UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2010, Número 21, páginas 59-67
ISSN: 1815-0640

De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios.

Nora Ferreyra; Estela Rechimont; Carlos Parodi; Nora Castro

Resumen

En este artículo se relata una actividad llevada a cabo con estudiantes de la carrera Profesorado en Matemática, de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). Se presentó un problema a dichos estudiantes, con la intención de analizar en su producción la exploración matemática que encierra su resolución, tratando de identificar distintas etapas y diferentes momentos en la evolución de las características algebraicas inherentes a la cuestión trabajada.

Abstract

This article describes an activity carried out with students carrer in Mathematics Teaching; in the National University of La Pampa (Argentina). It presented a problem to these students, with the intention to análise the mathematical exploration production contained in his resolution, trying to identify different levels and different times in the evolution of algebraic characteristics inherent in the question worked.

Resumo

Neste artigo se relata uma atividade levada a cabo com estudantes do curso de Professorado em Matemática, da Universidade Nacional de La Pampa (Argentina). Apresentou-se um problema a estes estudantes, com a intenção de analisar em sua produção a exploração matemática que encerra sua resolução, tratando de identificar diferentes etapas e diferentes momentos na evolução das características algébricas inerentes à questão trabalhada.

Marco Teórico

En investigaciones realizadas en los últimos años, en España (Gascón, 2001; Bosch, 1994; Bolea, 2003), se ha caracterizado el álgebra escolar y se han definido algunos indicadores del grado de algebrización de una obra matemática.

Álgebra escolar como Aritmética Generalizada

De acuerdo a algunas primeras observaciones y al resultado de diversas investigaciones al respecto, el modelo dominante del álgebra en las instituciones escolares, en general es el modelo de la aritmética generalizada.

Desde la perspectiva teórica de Gascón (1993) se identifica el "álgebra escolar" con un simbolismo algebraico que amplía y generaliza un lenguaje aritmético cuya mayor ventaja es haber sido muy utilizado y aplicado previamente en un dominio suficientemente amplio.

Las prácticas o actividades que se identifican como "algebraicas" son una prolongación o generalización de las prácticas aritméticas en cuanto a que generalizan técnicas de resolución e identifican el lenguaje algebraico como una generalización del lenguaje aritmético.

Las prácticas aritméticas se distinguen de las algebraicas (entendidas como generalización de la aritmética) en:

- **La resolución de problemas**

En una resolución aritmética se resuelve una sucesión de problemas simples, en los cuales cada resultado numérico es calculable e interpretable a partir del enunciado, sirve como dato de una etapa posterior y se puede describir con el lenguaje natural. En tanto que en una resolución algebraica no es posible una descomposición en pequeños problemas, cada etapa intermedia corresponde a la producción de una igualdad o relación algebraica.

- **Los resultados obtenidos**

En una práctica aritmética se obtiene una medida concreta en tanto que en una práctica algebraica puede ser una relación, entre dos magnitudes.

- **Los objetos con los que se trabaja**

En aritmética se trabaja con números en tanto que, en una práctica algebraica se manipulan símbolos que deben interpretarse de acuerdo al contexto en el que aparecen.

- **El significado de los signos y símbolos**

En aritmética los símbolos y signos tienen significado muy concreto y preciso, en tanto que en álgebra como aritmética generalizada pueden indicar no sólo acciones sino también relaciones, lo cual puede complicar su utilización e interpretación.

Álgebra escolar como instrumento de Modelización

Con origen en el modelo clásico de análisis- síntesis, Gascón (1993) propone una reconstrucción de la génesis del álgebra escolar a partir de los problemas verbales y de la modelización matemática. Pone énfasis en la potencialidad para trabajar, resolver o fundamentar métodos de resolución, en clases de problemas. Desde este punto de vista, una actividad matemática algebrizada permitirá la manipulación global de la estructura de los problemas, unificando los tipos de técnicas y tecnologías utilizadas y produciendo nuevos problemas.

Siguiendo a Chevallard y Gascón, la modelización matemática, y en particular la modelización algebraica, se desarrolla en cuatro etapas fundamentales (Bolea, 2003):

- Problemática inicial, que comprende la situación problemática a analizar y las cuestiones o preguntas iniciales que nos formulamos al respecto.

- Construcción del modelo, consiste en identificar y definir las variables involucradas en el problema y las relaciones entre ellas.
- Trabajo del modelo, se basa en manipular las relaciones establecidas, buscar e interpretar nuevas relaciones en pos de responder alguna de las preguntas formuladas inicialmente.
- Producción de problemas nuevos, donde a partir de la modelización del sistema inicial, se simplifica la tarea de plantear nuevas cuestiones, investigar e interpretar nuevos problemas que amplían el conocimiento del sistema estudiado inicialmente.

Puesto que no es posible trazar una línea precisa entre una obra algebrizada y una prealgebraica, consideramos que el avanzar sobre las etapas propuestas nos puede dar un primer indicio del grado de algebrización de un sistema planteado.

Experiencia

Sobre la hipótesis de la existencia de un proceso de desalgebrización en la escuela media en Argentina, y con el fin de estudiar la respuesta de estudiantes universitarios a una propuesta de modelización algebraica, se planteó la resolución de un problema sencillo a estudiantes de segundo año de la carrera Profesorado en Matemática y se analizó el trabajo de resolución del mismo y las sucesivas reformulaciones en el marco de un proceso de algebrización.

Problema:

Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{5}$ *de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita* $\frac{1}{5}$ *de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. De esta manera todas las cajas terminan con 172 caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?*

Etapas identificadas en la modelización algebraica del problema

Primera Etapa

El problema admite una resolución aritmética, a través de una cadena de operaciones sencillas. Al ser propuesto a los estudiantes, la mayoría presenta un planteo algebraico del tipo:

En la primera caja quedarán: $c_1 - \frac{1}{5}c_1$

En la segunda caja quedarán: $\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)$

En la tercera caja quedarán: $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right)$

Decimos que este estilo de planteo es algebraico pues se producen igualdades que representan enunciados matemáticos y el resultado final obtenido consiste en un sistema de ecuaciones como el siguiente:

$$c_1 - \frac{1}{5}c_1 = 172$$

$$\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) = 172$$

$$\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) = 172$$

....

En general, los estudiantes resolvieron el problema a partir del sistema anterior, limitando su trabajo algebraico a esa producción, considerada, desde nuestro punto de vista, como una primera etapa de algebrización. Esta primera fase consistiría en el planteo de una expresión algebraica y su correspondiente resolución a través de un trabajo aritmético, sin mediar una búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes u otro tipo de simplificaciones.

La resolución propuesta por otro grupo de alumnos fue completamente aritmética: "*los* $\frac{4}{5}$ *del contenido de la caja son* 172 *caramelos entonces calculo* $\frac{1}{5}$ *y se lo agrego para obtener el total*".

Con la intención de obtener una generalización y promover una evolución en la tarea de algebrización, se propone modificar el problema y tratar su posible solución si en lugar de mover $\frac{1}{5}$ de los caramelos de cada caja se tomara otra fracción.

La actividad se retoma en un plano puramente aritmético puesto que, al haber planteado las ecuaciones anteriores, ya se observó la posible resolución a través de una simple operación.

Los estudiantes plantean ejemplos, en particular, proponen el problema idéntico, reemplazando la fracción $\frac{1}{5}$ por $\frac{1}{4}$ y conjeturan, a continuación, acerca de distintas posibilidades para la fracción a considerar.

Observan entonces que no cualquier fracción permite plantear un problema resoluble, sin embargo no se avanza en la generalización para una fracción cualquiera $\frac{1}{n}$ puesto que implica un análisis más detallado de la relación entre dicha fracción y el término independiente, identificado en el problema como el número de caramelos que quedan finalmente en cada caja.

Al mantener este número, el 172 en el enunciado del problema, la relación "divide a" se ve encubierta por la operación división y algunos estudiantes no perciben la condición necesaria para la posible resolución.

<u>Segunda Etapa</u>

Con el fin de poder avanzar sobre la generalización, se propone reformular nuevamente el problema y analizar su posible solución si en lugar de terminar todas las cajas con un número específico de caramelos se indica una cierta cantidad *K*.

Este problema no puede abordarse directamente como una aplicación aritmética, requiere trabajo y simplificación de la expresión original para obtener información.

Surge así el análisis en torno a las condiciones que debe cumplir *K* para que las cantidades de caramelos existentes e intercambiadas en las cajas sean números enteros.

En la resolución de los estudiantes se observa una generalización de la técnica de resolución aritmética ya empleada y de las propiedades del número 172 expresado ahora como *K* en las distintas identidades.

Aparecen expresiones del tipo:

- *En la primera caja quedarán:* $c_1 - \frac{1}{5}c_1 = K \rightarrow c_1 = \frac{5K}{4}$
- *En la segunda caja quedarán:* $\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right) = K$, entonces $\left(c_2 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{K}{4}\right) = K$, es decir que $c_2 - \frac{1}{5}c_2 = K - \frac{1}{5}K \rightarrow c_2 = K$.
- *En la tercera caja quedarán:* $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(c_2 + \frac{1}{5}c_1\right)\right) = K$,

  de donde: $\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(K + \frac{K}{4}\right)\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{1}{5}\left(K + \frac{K}{4}\right)\right) = K$,

  luego: $\left(c_3 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_3 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_3 = K$.

Siguiendo: $\left(c_4 + \frac{K}{4}\right) - \frac{1}{5}\left(c_4 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_4 = K$ y $\left(c_5 + \frac{K}{4}\right) = K \rightarrow c_5 = \frac{3}{4}K$.

En este proceso, se observa una actividad algebraica más allá de la transformación aplicada y la utilización de símbolos y letras, dado que se conjetura sobre las condiciones de existencia de una solución entera para c_i a partir de las características de K.

En un análisis previo, los estudiantes ya habían obtenido implícitamente la relación $\frac{172}{n-1}$ pero su lectura e interpretación presentaron una mayor dificultad que $\frac{K}{4}$. Consideramos que dicho obstáculo procede de la noción de división y su utilización en este contexto. La división por 4 tiene un sentido aritmético que puede relacionarse con *K* de manera diferente que la división de un número específico por un *n* cualquiera.

La operación división y el número racional adquieren otro sentido al considerar esa cierta cantidad *K*, puesto que ya no se trata de operar y obtener un resultado sino de analizar la relación y generalizar la condición de existencia de una solución entera.

En una práctica aritmética se trabaja con números concretos y no se estudian ni se interpretan las relaciones entre dos magnitudes. Al presentar a los estudiantes esta discusión y señalar las diferencias entre los problemas planteados y sus resultados, se está avanzando en un trabajo algebraico.

Es evidente que este tratamiento se desarrolla en un mayor nivel de algebrización, puesto que se plantea una expresión algebraica, pero además se analizan las propiedades y el instrumento de resolución en forma general.

Si bien se considera el mismo procedimiento aritmético que condujo a la solución del caso anterior, en esta fase, se lo analiza íntegramente, estudiando todas las posibilidades de existencia de una solución.

Los estudiantes se mostraron entusiasmados ante esta generalización y aceptaron interesados el desafío de hacer nuevos planteos, conjeturar y revisar sus conclusiones.

Tercera Etapa

Se retoma la idea anterior y se busca la condición específica para el trabajo con una fracción cualquiera $\frac{1}{n}$. Surge así la expresión: $c_1 = \frac{nK}{n-1}$, donde se advierte la presencia de dos parámetros, relacionados entre sí, que no representan las mismas magnitudes y que aparecen en el enunciado del problema.

El trabajo con el sistema de ecuaciones, a través del proceso de modificaciones sucesivas del problema, se tornó más complejo. Las expresiones planteadas ahora son:

En la primera caja quedarán: $c_1 - \frac{1}{n}c_1 = K \rightarrow c_1 = \frac{nK}{n-1}$

En la segunda caja quedarán: $\left(c_2 + \frac{1}{n}c_1\right) - \frac{1}{n}\left(c_2 + \frac{1}{n}c_1\right) = K$, entonces $\left(c_2 + \frac{K}{n-1}\right) - \frac{1}{n}\left(c_2 + \frac{K}{n-1}\right) = K$, es decir que $c_2 - \frac{1}{n}c_2 = K - \frac{1}{n}K \rightarrow c_2 = K$.

Y así siguiendo.

Cabe señalar que esta complejidad no implica gran diferencia en el nivel de algebrización puesto que sólo se trata de la manipulación de expresiones sin atribuir a las incógnitas o a las relaciones un nuevo significado.

Cuarta Etapa

Finalmente, para mejorar el modelo del problema desarrollado hasta el momento, formulamos la siguiente pregunta: ¿Podríamos pensar en una nueva modificación del problema con un mayor grado de generalidad?

Algunas de las respuestas proporcionadas son:

- "*Se podría pensar que el número de cajas fuera n*".
- "*Se podría pensar en otro número cualquiera de cajas que podríamos señalar con m*".

- "*Se podría pensar que se retiraran distintas fracciones de cada caja*".
- "*Se podría pensar que el número final fuera una fracción de K*".
- "*Se podría proporcionar el número total de caramelos*".

A través de estas respuestas de los estudiantes se observó una gran evolución en cuanto al trabajo algebraico, ya no se piensa en la resolución del problema con un número como resultado sino en la construcción de un conjunto de problemas que responden al mismo patrón de resolución y cuya determinación depende de los parámetros previamente fijados.

Como resultado de una de las preguntas formuladas surgió el siguiente problema:

1) Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{n_1}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{n_2}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita $\frac{1}{n_3}$ de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita $\frac{1}{n_4}$ de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad *K* de caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?, ¿Qué características debe tener *K* ?.

Puesto que en el caso anterior se había observado la relación entre *K* y $n-1$, la primera conjetura que propusieron los estudiantes fue que *K* debía ser múltiplo de n_1-1, n_2-1, n_3-1 y n_4-1.

Realizaron el trabajo siguiendo el mismo esquema que en los casos anteriores y basándose en el dato de pertenencia de las cantidades iniciales al conjunto de los números enteros concluyen que efectivamente *K* debe ser múltiplo de n_1-1, n_2-1, n_3-1 y n_4-1.

Consideramos que este trabajo se realizó en una última etapa de este camino de algebrización a partir de un problema, completándose con la transferencia, es decir la aplicación del sistema modelizado y la interpretación del trabajo realizado y los resultados obtenidos en otras situaciones, a priori diferentes.

En este sentido, algunos planteos que surgieron del grupo son:

- *"Si se tratase de m cajas, debe verificarse la relación:* $c_1+c_2+\ldots+c_m=m\cdot K$*"*
- *"Así como se cambió una misma fracción por diferentes, podría cambiarse un mismo K por varios distintos y generalizar más"*

Algunos problemas presentados por el grupo son:

1) Hay cinco cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{8}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{6}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Más tarde, se quita $\frac{1}{4}$ de los caramelos que hay ahora en la tercera caja y se agregan a la cuarta. Finalmente, se quita $\frac{1}{2}$ de los caramelos que hay ahora en la cuarta caja y se agregan a la quinta. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad 210 caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja?.

Los estudiantes anticiparon la respuesta aplicando directamente el resultado obtenido anteriormente.

2) Hay una cierta cantidad de cajas con caramelos. Se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos de la primera caja y se agregan a la segunda. Luego se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos que hay ahora en la segunda caja y se agregan a la tercera. Así siguiendo con todas las cajas hasta que se quita $\frac{1}{3}$ de los caramelos que hay ahora en la anteúltima caja y se agregan a la última. Si todas las cajas terminan con una misma cantidad de caramelos cada una y 1000 caramelos entre todas. ¿Cuántas cajas había?, ¿Cuántos caramelos había inicialmente en cada caja? Si el total de caramelos es T, ¿qué condiciones debe cumplir dicho T ?

En este caso, los estudiantes utilizaron nuevamente el modelo obtenido con anterioridad, adaptando las variables a las condiciones indicadas en el problema y obteniendo nuevas relaciones que involucran al nuevo dato (total de caramelos).

Consideraciones Finales

Los estudiantes, aún después de haber cursado las materias básicas de la carrera Profesorado en Matemática, en la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), no han adquirido el hábito de formular conjeturas, generalizar enunciados, plantear problemas nuevos o investigar el alcance de la solución de un problema particular. Sin embargo, al estimular su actividad con preguntas en torno a una solución, responden con entusiasmo y logran buenas producciones.

El trabajo de generalización de problemas aritméticos favoreció la evolución hacia la utilización del álgebra como instrumento de modelización y, en definitiva, aumentó el grado de algebrización de algunas organizaciones matemáticas utilizadas por los estudiantes.

En este caso, se trabajó la divisibilidad de enteros aplicada a la resolución de un problema, en cuyo proceso se amplía y transforma el enunciado inicial y se estudian cuestiones referidas a la posibilidad de resolución, características de los parámetros, campo numérico de análisis, etc.

La reformulación de enunciados promovió la investigación por parte de los alumnos y la posible adquisición del hábito de conjeturar y desarrollar modelos generales para problemas y soluciones particulares.

Bibliografía

Bolea Catalán, P. (2003), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Gascón, J. (1993), *Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico*. Recherches en didactique des mathematiques, 13-3, pp. 295-332.

Gascón, J. (2001), *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 4-2, pp. 129-159.

Nora Ferreyra. Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, desde 1987. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos **noraf@exactas.unlpam.edu.ar**

Estela Rechimont. Profesora en Matemática y Física. Licenciada en Matemática y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha dirigido numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1973. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **rechimont@exactas.unlpam.edu.ar**

Carlos Parodi. Ingeniero Electromecánico y Magister en Didáctica de la Matemática. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1992. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **Parodic@ing.unlpam.edu.ar**

Nora Castro. Profesora en Matemática y Física. Ha participado en numerosos proyectos de investigación. Se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa desde 1979. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos. **nora@exactas.unlpam.edu.ar**