UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2009, Número 17, páginas 96-101
ISSN: 1815-0640

## El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

# Tríos para investigar

## Problema

*Llamamos **trío** a un conjunto de tres números naturales consecutivos.*
*Descubre regularidades de los tríos.*

---

Este problema, tal como está enunciado, lo conocí cuando fue dado como ejemplo de problema para estimular la investigación en un taller en el ICME 11, (México, 2008), desarrollado por Castelló, M., Codina, R. y López, P., del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

Vi posibilidades interesantes para trabajar con alumnos y profesores y pensé en presentar una situación y secuencias de actividades individuales y grupales a desarrollar en talleres con profesores de primaria y de secundaria. En los talleres, entregué a cada participante una hoja con la situación y las actividades individuales a desarrollar y luego que concluyeron las actividades individuales, les repartí otra hoja con la misma situación y las actividades grupales a desarrollar:

## Situación

*Llamaremos TRÍO a cualquier conjunto cuyos únicos elementos son tres números naturales consecutivos.*

*Por ejemplo, un TRÍO es el conjunto*

{7; 8; 9}

*Los TRÍOS tienen varias propiedades. Por ejemplo, una de ellas es:*

*"El producto de los tres números de un trío es un número par"*

## Actividades individuales

a) *Examina cuáles de los siguientes conjuntos son TRÍOS:*

*{46; 47; 48}, {30; 40; 50}, {4; 5; 6; 7}, {3; 4; 5}.*

b) *Verifica la propiedad dada, con varios ejemplos de TRÍOS.*

c) *Considerando ejemplos de TRÍOS, examina qué otras propiedades tienen los TRÍOS y haz una lista de las propiedades que descubras.*

La intención de la actividad (a) es que el participante se familiarice con la definición de TRIO. Ciertamente, ante una definición dada, es muy importante saber reconocer qué elementos la cumplen y qué elementos no.

La actividad (b) está pensada para ayudar a entender mejor la actividad (c), que es la que invita a la indagación y a la investigación

A continuación copio algunas de las propiedades encontradas, desarrollando la actividad (c).

***Participante A*** *(Profesora de primaria)*

. El promedio de los tres términos, es el término medio.
. La media de los términos extremos, es el término medio.
La suma del primer y tercer término es el doble del segundo
La suma de los tres términos es un múltiplo de tres
La diferencia del doble del mayor con la suma de los otros dos, es 3

***Participante B*** *(Profesor de secundaria)*

$2 + 3 + 4 = 9$
$3 + 4 + 5 = 12$
$4 + 5 + 6 = 15$
$5 + 6 + 7 = 18$
$6 + 7 + 8 = 21$
$7 + 8 + 9 = 24$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$20 + 21 + 22 = 63$

1) $a + a+1 + a+2 = 3a+3$
$= 3(a+1)$
$= \overset{\circ}{3}$

2) * Podemos observar que la suma es un múltiplo de 3

3) * Además la suma de los extremos es el doble del número central

4) El término central es el promedio de los extremos.

5) la suma es siempre el triple del número central.

6) la suma de los tres números es el triple del primero mas tres.

Cabe destacar el entusiasmo que suscita pasar de "no encuentro ninguna propiedad" a ir descubriendo algunas, por ensayo y error, intuyendo y formalizando, con pequeñas intervenciones del o los encargados del taller. Se presentan interesantes ocasiones de usar contraejemplos para descartar posibles propiedades observadas en algunos casos particulares. Así, aunque en los tríos {7; 8; 9}, {1; 2; 3} y {21; 22; 23} se cumple que la suma de sus elementos es un número par, ésta no es una propiedad o regularidad de los tríos, pues basta ver que no se cumple en el trío {6; 7; 8}, en donde la suma de sus elementos es 21, que es un número impar.

## Actividades grupales

1. Comparar y examinar las respuestas dadas a las actividades individuales.
2. Dar una explicación de por qué se cumple la propiedad enunciada de los **TRÍOS**.*("El producto de los tres números de un* **TRÍO** *es un número par")*
3. Hacer una lista con el mayor número posible de propiedades de los **TRÍOS**. Ilustrar con un ejemplo cada propiedad que se enuncie.
4. Encontrar un **TRÍO** cuya suma de sus elementos sea el número 2007.

5. ¿Es posible encontrar un **TRÍO** cuya suma de sus elementos sea 2009? ¿Por qué?
6. Inventar un problema usando **TRÍOS**.

Las tres primeras actividades buscan reforzar, complementar y enriquecer las actividades individuales; la actividad 2 hace reflexionar sobre la importancia de la demostración, considerando situaciones generales y no sólo verificando el cumplimiento de una regularidad en muchos casos particulares. Las otras tres actividades proponen nuevos desafíos para afrontarlos en grupo. Las actividades 4 y 5 pueden hacerse aplicando una propiedad de los tríos encontrada anteriormente, o pueden brindar la ocasión para descubrir tal propiedad.

A continuación copio algunas de las propiedades encontradas grupalmente, desarrollando la actividad 3.

***Grupo 4*** *(Profesores de secundaria*

Denotemos al trío de la siguiente forma: $t_K = \{K-1 ; K ; K+1\}$,

* La suma es múltiplo de tres

$S = K-\cancel{1}+K+K+\cancel{1} = 3K$

* La suma es el triple del número intermedio

$S = 3K$, donde K es el término intermedio.

* El término intermedio es el promedio de los términos extremos.

$\frac{K-\cancel{1}+K+\cancel{1}}{2} = \frac{2K}{2} = K$

* El doble del término mayor menos la suma de los otros dos, es 3.

$2(K+1) - (K-1+K) = 2K+2-2K+1 = 3$

* El doble del término medio es igual a la suma de los términos extremos

$2K = (K-1)+(K+1)$

* El cuadrado del término mayor menos el cuadrado del término menor es igual a cuatro veces el término medio.

$(K+1)^2 - (K-1)^2 = (K^2+2K+1) - (K^2-2K+1) = 4K$

* La suma de los cuadrados de los términos extremos es el doble del cuadrado del término intermedio, aumentado en 2.

$(K+1)^2 + (K-1)^2 = K^2+2K+1+K^2-2K+1 = 2K^2+2$

(**) La suma de los cuadrados de los tres términos es igual al triple del cuadrado del término intermedio, aumentado en 2.

$(K-1)^2 + K^2 + (K+1)^2 = K^2-\cancel{2K}+1+K^2+K^2+\cancel{2K}+1$

$= 3K^2+2$

Los participantes perciben la importancia de complementar la intuición con la formalización y la relación entre lo particular y lo general (dualidad ejemplar – tipo, en el lenguaje del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.)

El siguiente es un problema, con su solución, propuesto por el mismo grupo 4, desarrollando la actividad 6:

La suma de los cuadrados de las edades de tres hermanos es 365, sabiendo que dichas edades son números enteros consecutivos, ¿Cuál es la edad del menor?

Solución:

edades ⇒ menor = $k-1$
medio = $k$
mayor = $k+1$

Utilizando la propiedad (**) tenemos que $3k^2+2 = 365$.

$$3k^2 = 363$$
$$k^2 = 121$$
$$k = 11$$

Por lo tanto, la edad del menor es 10 años.

## Otras posibilidades para trabajar e investigar con TRÍOS:

*Definir tríos más específicos:*

- *Tríos ordenados.* El orden no se exige en la definición de trío, pero puede ser útil considerarlo explícitamente, de la manera natural.
- *Tríos pares / impares.* La paridad de un trío podría determinarse por la paridad del "número del medio" en un trío ordenado, o por la del "número que no es ni el mayor ni el menor de los tres elementos del trío"
- *Tríos de pares / impares.* Estos tríos tendrían que ser de números pares / impares consecutivos.

*Definir operaciones con tríos ordenados.* Se puede definir la adición de dos tríos ordenados, sumando los elementos respectivos "el primero con el primero, el segundo con el segundo y el tercero con el tercero". Así, surgen preguntas relacionadas con esta operación ¿es binaria interna? (¿la suma de dos tríos ordenados es un trío ordenado?), ¿es conmutativa?, ¿es asociativa?, ¿existe un elemento neutro?, ¿qué resulta al sumar tríos pares?, ¿y al sumar tríos impares?, ¿y al sumar un trío par con otro impar?, etc.

*Una generalización*. Considerar tríos en el conjunto de números enteros y examinar las consecuencias en las propiedades encontradas con los tríos con números naturales. ¿Se mantienen todas las propiedades?, ¿qué pasa con los tríos ordenados y con la paridad / imparidad definida?, ¿qué pasa con la adición de tríos y las propiedades encontradas?

Se puede preparar y proponer actividades teniendo en cuenta estas ideas y otras que se les ocurra a docentes e investigadores, que estimulen más el espíritu de investigación de alumnos, maestros y futuros maestros y brinden oportunidades para revisar conceptos importantes vinculados con las estructuras algebraicas.

Los lectores quedan invitados a ejercitar su vocación investigadora y docente, usando estas ideas. Si se animan a experimentar, considerando también grupos de alumnos de secundaria o de últimos años de primaria, les agradeceré mucho que me envíen sus observaciones, comentarios, resultados, etc. Ciertamente, también quedan invitados a crear o adecuar situaciones, con sus respectivas actividades individuales y grupales, para estimular el espíritu investigador, tan importante en la formación de alumnos y profesores