UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 147-153
ISSN: 1815-0640

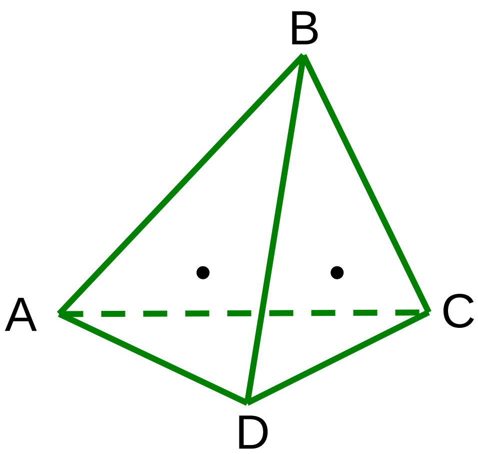
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Dado un tetraedro regular cuyas aristas miden k cm, hallar la longitud del camino más corto sobre su superficie, que une los centros de dos caras del tetraedro.



Este problema ha sido propuesto a estudiantes de secundaria, a universitarios de primer año de estudios de ingeniería, y a profesores de matemáticas de secundaria. Las dos formas de enfocar el problema, que acá comentamos, muestran aspectos interesantes de la geometría plana y del espacio, y de aproximaciones intuitivas a la determinación del camino más corto sobre una superficie no plana, cuyos extremos son dos puntos de ella.

Una manera de presentarlo, graduando dificultades para resolverlas individualmente y en grupo, es la siguiente:

Situación:

Una hormiga se encuentra en el centro de una de las caras de un tetraedro regular, cuyas aristas miden 12 cm, y avanza sobre la superficie del tetraedro hasta alcanzar una gota de miel que se encuentra en el centro de otra de las caras del tetraedro

Actividad individual

a. *Describe el camino de longitud más corta que podría seguir la hormiga.*
b. *Halla la longitud del camino descrito en la actividad anterior.*

Actividades grupales

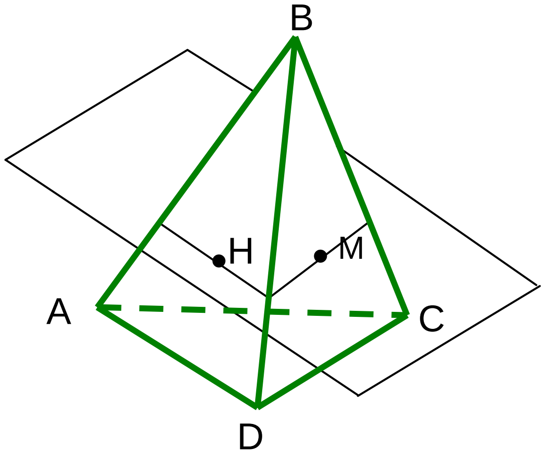
a. *Decir cuáles fueron las longitudes de los caminos obtenidos por los integrantes del grupo. Escribir sólo los números obtenidos en la parte de actividades individuales.*
b. *¿Cuál es la respuesta del grupo sobre el camino más corto que puede seguir la hormiga?*
- *Describirlo.*
- *Decir cuál es su longitud.*
- *Justificar e ilustrar por qué es el camino más corto.*

c. *¿Cuál sería la longitud del camino más corto que puede seguir la hormiga si las aristas del tetraedro miden k cm?*
d. *Proponer y resolver (o exponer cómo se resolvería) un problema similar al resuelto, considerando otro par de puntos del tetraedro.*
e. *Proponer y resolver (o exponer cómo se resolvería) un problema similar al resuelto, considerando otro cuerpo geométrico*

Comentarios

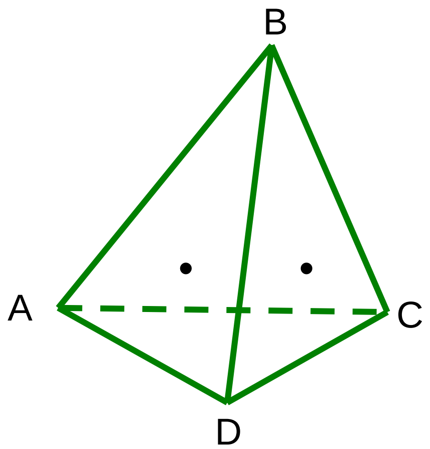
1. En las experiencias tenidas, básicamente hemos encontrado dos enfoques para resolver el problema (sin considerar las actividades grupales d y e):

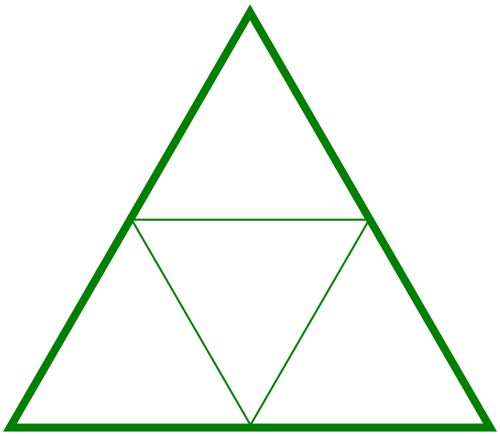
   I) Imaginando la intersección de un plano paralelo a la base, que pase por los dos puntos.



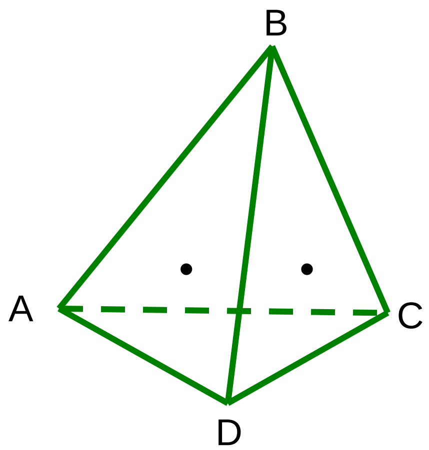
II) Examinando la situación en un desarrollo plano del tetraedro.

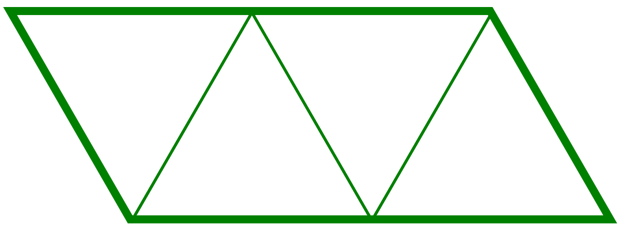
El desarrollo plano más “natural” del tetraedro es el que tiene forma de triángulo equilátero.





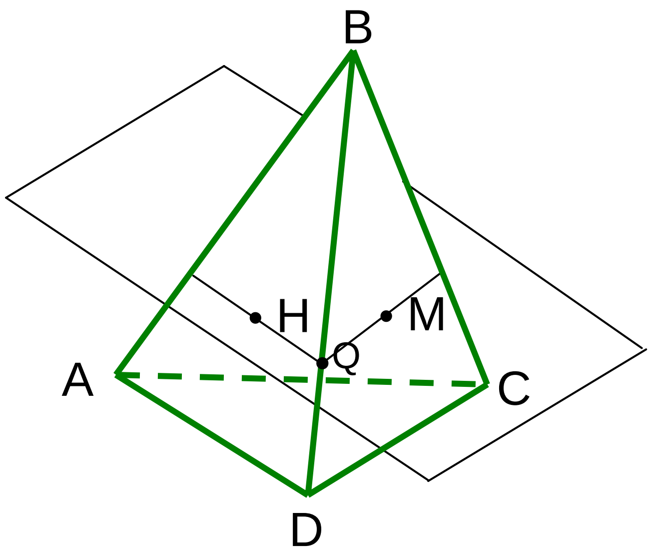
Otro desarrollo plano del tetraedro es el que tiene forma de paralelogramo.





2. Comentemos el primer enfoque:

Supone cierta experiencia en la visión espacial, para ubicar bien la intersección del plano con las caras del tetraedro. En particular, la ubicación del punto de intersección con la arista BD, que lo estamos llamando Q.

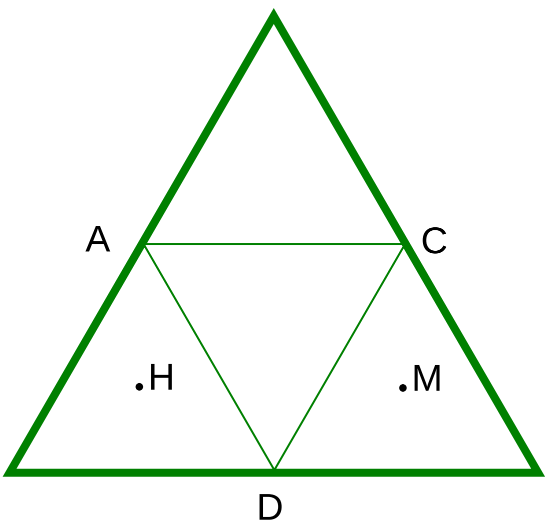


Aplicando teoremas básicos de la geometría del triángulo, se obtiene que la longitud del segmento HQ es 4 cm y por este resultado algunos participantes afirmaron que el camino más corto buscado tiene 8 cm de longitud, pues se obtiene recorriendo los segmentos HQ y QM, ambos de 4 cm de longitud.

3. Comentemos el segundo enfoque:

Consideremos el desarrollo plano que es un triángulo equilátero cuyos lados miden 24 cm.

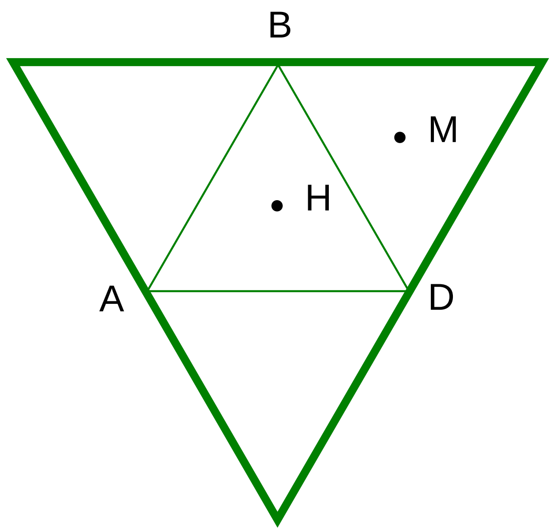
Una primera dificultad es la ubicación adecuada de los puntos del tetraedro en el desarrollo plano. Al obtener el triángulo equilátero “cortando” las aristas BA, BD y BC del tetraedro, obtenemos:



Es interesante notar las dudas que despierta el poner nombre a los vértices del triángulo mayor, al haber ocurrido que en el tetraedro eran el mismo vértice. Una decisión destacable es la que adoptó un grupo: llamarlos B' , B" y B'" , aludiendo a su origen común en el tetraedro y a su distinción en la figura plana.

Se ve fácilmente en la configuración presentada que el segmento HM tiene longitud 12 cm, al observar que el cuadrilátero HACM es un rectángulo. Siendo 12 cm la longitud de cada arista del tetraedro, surgió la duda de que el segmento HM sea el camino de longitud mínima. Hubo propuestas de descartar el camino y el método cuando uno de los integrantes del grupo explicó, con el enfoque antes visto, que para él, el camino más corto sería de longitud 8cm. También se observó, que tal segmento HM atraviesa el triángulo ACD que es el de la base del tetraedro y así correspondería a un camino en el tetraedro que se evidencia como uno que no es el de longitud mínima.

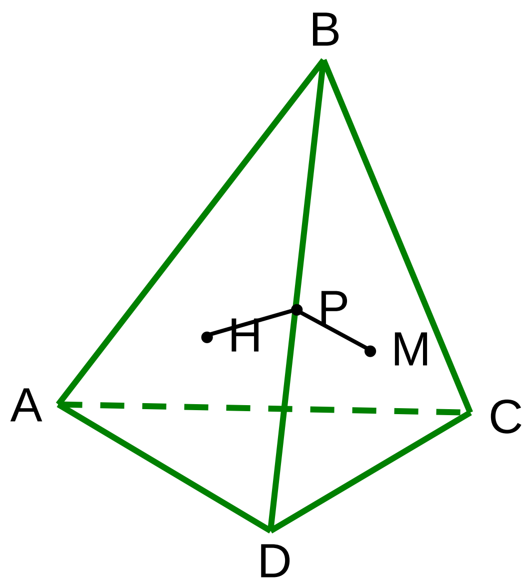
La pregunta del facilitador del taller sobre la posibilidad de encontrar soluciones coherentes razonando tanto en la figura tridimensional como en la correspondiente figura plana, llevó a concluir que para encontrar el camino más corto "abriendo" el tetraedro, no debería "cortarse" la arista común a las caras en las que se encuentran los puntos H y M, lo cual condujo al siguiente triángulo equilátero, con otra ubicación de los puntos correspondientes al tetraedro. (El tetraedro se "abre" "cortando" las aristas CA, CB y CD.)



Con esta configuración, suele obtenerse con relativa facilidad que la longitud del segmento de recta que une H y M es $4\sqrt{3}$ cm. Se tiene una situación para recordar axiomas de la geometría plana y aplicar los teoremas relacionados con las alturas de un triángulo y el punto de intersección de éstas. Es fácil obtener que la altura de cada triángulo equilátero que es cara del tetraedro, tiene una longitud de $6\sqrt{3}$ cm.

Es importante observar que como $4\sqrt{3}$ es menor que 8, queda claro que 8 no es la longitud del camino de longitud mínima, pero no se ha hecho una demostración formal que el camino más corto que une H y M es de longitud $4\sqrt{3}$ cm. Ante esta observación hay quienes tienen tal convencimiento de haber hallado ya el camino más corto, que no se animan a hacer una demostración (intuición optimizadora), y hay quienes se proponen hacerlo usando más refinadamente los teoremas sobre alturas de triángulos y perpendicularidad de segmentos.

Como se ve en la siguiente figura, el camino en el tetraedro, correspondiente al segmento HM, está conformado por los segmentos HP y PM, ambos de longitud $2\sqrt{3}$ cm, donde P es el punto de la arista BD en el cual los segmentos HP y PM son perpendiculares a BD. Notar que esto significa que la hormiga debe iniciar su camino óptimo hacia la gota de miel "subiendo" hacia el punto P (y no avanzando paralelamente al plano de la base)



Considerando el desarrollo plano que es un paralelogramo, también se obtiene un segmento de recta de longitud $4\sqrt{3}$ cm.

4. Luego de las discusiones en grupo con el caso concreto del tetraedro regular cuyas aristas miden 12 cm, resulta sencillo, pero ilustrativo, trabajar el caso general del tetraedro regular cuyas aristas tienen longitud *k* cm.

5. La actividad (*d*) permite evaluar lo aprendido en las actividades anteriores, con situaciones similares, pero que plantean dificultades específicas a partir de las propias ideas propuestas por los integrantes del grupo para ubicar los puntos H y M en el tetraedro. Resulta muy interesante llegar a expresiones adecuadas para precisar otras ubicaciones de los puntos H y M.

6. Vinculación con una *geometría no euclídea*

Para la actividad grupal (*e*) lo más frecuente es que se escoja un cubo; sin embargo, se dio una situación sumamente interesante cuando se le estimuló a buscar otros cuerpos geométricos y un grupo propuso ubicar los puntos H y M en una esfera. La gran novedad está en que no se puede "abrir" la esfera y tener un desarrollo plano de ella para encontrar la solución apoyándose en que la distancia más corta entre dos puntos del plano es la longitud del segmento de recta que los une. Resulta natural pensar en un arco de circunferencia que una los puntos H y M ¿cuál? La solución formal de este problema lleva a considerar la analogía entre las rectas en el plano y las circunferencias máximas en una esfera y así tomar contacto con la geometría de la esfera.

Cabe destacar una vez más la importancia de dar oportunidades de crear problemas a los alumnos y de que los profesores tengan una buena formación matemática para orientar adecuadamente las ideas que surjan entre los estudiantes, hacer sugerencias atinadas para los trabajos individuales y en grupo y ampliar la cultura matemática de los participantes.