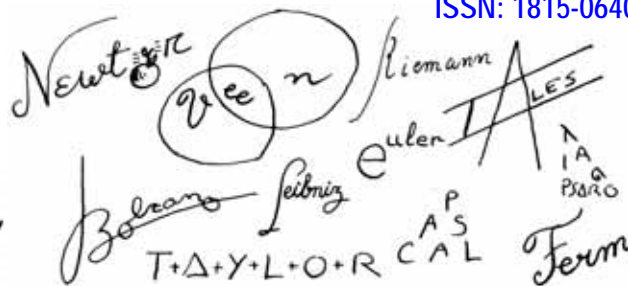


firma invitada



Educación Matemática e Imaginación

Claudi Alsina

Resumen

El objetivo de este artículo es estudiar el desarrollo de la imaginación en clase de matemáticas con vistas a favorecer la creatividad matemática.

Abstract

The main aim of this paper is to study the development of imagination in mathematics classrooms in order to promote mathematical creativity.

Introducción

En sus enfoques más tradicionales, la Educación Matemática ha dado especial atención a la transmisión de conocimientos. Pero en enfoques más innovadores aparece un objetivo más ambicioso como es el desarrollo de la creatividad matemática de los estudiantes. Nuestro objetivo en este breve artículo es intentar aclarar el rol que el desarrollo de la “*imaginación matemática*” podría jugar en este cultivo de la creatividad. Tras unas sintéticas aproximaciones a lo que es la imaginación y a su papel en la matemática intentaremos analizar un posible interés tanto desde el punto de vista formativo como docente.

¿Qué es la imaginación?

*“Pinto los objetos tal como los pienso,
no como los veo”*

Pablo Picasso

La palabra “*imaginación*” es una de estas palabras maravillosas, que tienen asociada una seductora ambigüedad, capaz de interesar a colectivos muy amplios, dando lugar entonces a concepciones muy diversas. Si como es normal recurrimos

primero al Diccionario de la Real Academia Española podemos ya acotar un poco este término:

Imaginación

(Del lat. *imaginatio*, -onis).

1. f. Facultad del alma que representa las imágenes de las cosas reales o ideales.
2. f. Aprensión falsa o juicio de algo que no hay en realidad o no tiene fundamento.
3. f. Imagen formada por la fantasía.
4. f. Facilidad para formar nuevas ideas, nuevos proyectos, etc.

Pero intentando profundizar un poco más podemos convenir en adoptar una descripción menos religiosa y más psicológica

“La imaginación es la habilidad de formar imágenes mentales”

En efecto, se trata de una habilidad de nuestra mente y nos lleva a generar imágenes mentales no necesariamente ligadas a las visiones reales o a percepciones realizadas anteriormente. Aquí arranca su poder creativo. No solo se trata de ficciones o fantasías, la imaginación también combina situaciones, plasma intuiciones, forja imágenes alternativas y puede generar creencias. El factor tiempo no representa ningún obstáculo: imaginamos el pasado y el futuro, imaginamos los recuerdos y el porvenir. La imaginación va pues asociada a la libertad mental. No debe dar respuestas exactas o descripciones reales, puede ir mucho más allá del sentido común... y sin embargo puede *dar sentido* al propio pensamiento racional o emocional. Y puede ser socialmente compartida.

Nuestras imaginaciones pueden (a posteriori) llevar a la elaboración de poemas, de cuentos, de historias, de obras de arte... y en el mundo científico a la creatividad, a la formulación de nuevos modelos, a nuevas interpretaciones, etc. La ciencia es, en gran medida, un juego racional donde realidad e imaginación mantienen un constante diálogo.

Siguiendo a Claxton (Claxton, 1994) podemos aceptar el siguiente principio:

“Cuando la imaginación se vuelve más disciplinada, más se convierte en una fuente valiosa de intuiciones e hipótesis que pueden ser, al mismo tiempo, más seguras y más osadas que las del puro ensayo y error”

Nos apuntamos pues a la idea de que la imaginación puede jugar también un papel importante en ciencia. Albert Einstein lo expresó explícitamente:

“La imaginación es más importante que el conocimiento. Mientras que el conocimiento se limita a todo lo que ahora conocemos y entendemos, la imaginación abarca el mundo entero, todo lo que en el futuro se conocerá y entenderá”.

En definitiva, la imaginación también puede formar parte del patrimonio científico y por tanto jugar un papel tanto en la creación científica como en su enseñanza.

Matemática e imaginación

“¿En qué se parece un cuervo a un pupitre?”

Lewis Carroll

“En que hay una A en AMBOS”

E.V. Rieu

Hace ya muchos años Edward Kasner y James Newman publicaron su entrañable libro *Matemáticas e imaginación* (versión española (Kasner y Newman, 1978)), todo un clásico de lo que hoy denominamos matemática recreativa. En el epílogo de este libro sus autores, después de una interesante discusión sobre la naturaleza de las matemáticas, acaban su obra con las siguientes consideraciones sobre matemática e imaginación:

“El desarrollo de las matemáticas es una imagen de la lucha eterna por mayor entendimiento y mayor libertad: de lo particular a lo general; de las configuraciones acotadas por líneas rectas hasta las curvas patológicas; de las propiedades de ésta o aquella figura determinada a las propiedades de todas las figuras; de una dimensión a n dimensiones; desde lo finito hasta lo infinito. En esta marcha la imaginación ha desempeñado un notable papel. Porque la imaginación tiene el valor pragmático de adelantarse a la lenta caravana del pensamiento bien ordenado y frecuentemente reconoce la realidad antes que su pesado amo. En eso consiste su contribución esencial a una de las más extrañas colaboraciones del pensamiento: las sosegadas matemáticas y el vuelo de la imaginación.

Las matemáticas constituyen una actividad regida por las mismas reglas impuestas a las sinfonías de Beethoven, las pinturas de Da Vinci y las poesías de Homero. Así como las escalas, las leyes de la perspectiva y las reglas del metro parecen carecer de fuego, podrá

parecer que las reglas formales de las matemáticas no tienen brillo. Sin embargo, finalmente, las matemáticas alcanzan pináculos tan elevados como los logrados por la imaginación de sus más osados exploradores. Y esto encierra, quizá, la última paradoja de la ciencia, puesto que en su prosaico tráfago, tanto la lógica como las matemáticas dejan atrás, frecuentemente, a su avanzada y muestran que el mundo de la razón pura es más extraño aún que el mundo de la fantasía pura.”

Creo que esta bellísima descripción pone las cosas en su sitio: al rigor deductivo y a su formalización anteceden la imaginación como base a la creatividad matemática, es decir, la imaginación al servicio de la concreción de nuevas teorías o conceptos y a la demostración de nuevos teoremas. Evidentemente hay en matemáticas una labor meritoria de desarrollo formal, de pruebas o resoluciones que sin demasiada necesidad de imaginación permiten hallar resultados. Pero en la concepción de figuras, en la genialidad de combinar técnicas de diversos campos o en la resolución sorpresiva de un problema, la imaginación juega un papel importantísimo (Véase por ejemplo en (Mazur, 2003) una sugestiva aproximación no solo a los números imaginarios sino el propio rol de la imaginación en matemáticas).

Todos los que hemos realizado investigaciones matemáticas sabemos que las publicaciones finales, pulcramente organizadas y lógicamente expuestas, nunca reflejan este estudio previo creativo en el cual intuiciones, cálculos, diagramas, ejemplos, etc. nos llevan a imaginar soluciones, o métodos a aplicar. Si esta imaginación es esencial en el propio oficio matemático, deben tener también su influencia en la formación.

El cultivo de la imaginación en clase

“Imagine all the people...”

John Lennon

La imaginación en clase de matemáticas necesita ser cultivada. El sentido común también. Imaginación y sentido común no son facultades innatas y además interesa su estimulación, en nuestro caso, en la dirección adecuada: la de la *creatividad matemática*. Y como la imaginación también puede tener una dimensión grupal y ser compartida, su cultivo va más allá del progreso individual y puede ser un objetivo de clase.

Los estudiantes tienen grandes capacidades imaginativas y a lo largo de su progreso escolar pasan por diversas fases de este desarrollo imaginativo. La psicología tiene bien estudiadas estas fases y diversas teorías pedagógicas han planteado la necesidad de explotar más estas capacidades. En clase de matemáticas deberíamos poner el acento en potenciar aspectos que resultan de especial interés (NCTM, 2000). Citaremos tres casos:

(i) Imaginación y visualización

Gran parte de la intuición matemática reposa sobre visualizaciones mentales de objetos matemáticos (figuras, movimientos, gráficos,...). La imaginación puede estimularse dando importancia a las visualizaciones en clase (Alsina y Nelsen, 2006) (Nelsen, 2000, 2001). El material manipulativo (Alsina, 2005a), (Alsina 2005b) y los dibujos jugaran en este proceso un punto clave (difícilmente puede “pensarse” en geometría sin un conocimiento previo táctil o visual de los objetos).

(ii) Imaginación y razonamiento

A menudo es complicado seguir o desarrollar un razonamiento matemático por falta de imaginación: difícilmente empezamos a razonar correctamente si antes no somos capaces de formar en nuestra imaginación unas referencias o vislumbrar unos caminos para deducir algo. Provocar imágenes mentales (“Imaginemos que...”) puede ayudar, y mucho a razonar mejor. Veáanse estrategias en (Mason, 2004).

(iii) Imaginación y resolución de problemas

Resolver problemas es un motor esencial de la educación matemática. Citemos de nuevo a (Claxton, 1994):

“Por ejemplo, en el área de la resolución de problemas matemáticos, George Pólya ha identificado estrategias a las que recurrir como: “descomponer el problema en subproblemas”, “crear un problema análogo al que nos ocupa pero más sencillo, y ver si lo podemos resolver”, “tratar de representar el problema con un método visual o mediante imágenes”, o “suponer una solución posible y tratar de encontrar la respuesta trabajando en el problema hacia atrás a partir de ella”. Muchas de estas estrategias también son útiles para los científicos. Las personas expertas en la resolución de problemas poseen tantos conocimientos y técnicas relacionados con ella que la mayoría de los problemas con que se encuentran son rutinarios para ellos; pero cuando se ven temporalmente confundidos poseen un repertorio de estrategias de uso más general que pueden rellenar los huecos.”

Un interesante libro de Meter M. Higgins (Higgins, 2002) titulado *Matemáticas para la Imaginación* versa precisamente sobre las relaciones problemas-imaginación. Otra sugestiva referencia es (Tanton, 2000).

Es evidente pues que la imaginación forma parte de las técnicas para abordar la resolución de problemas: hay imaginación cuando asociamos a un mapa complejo un simple grafo, cuando vemos mentalmente como revoluciona una figura plana, cuando mentalmente generamos un mosaico, cuando en una reducción al absurdo imaginamos lo que ocurriría en caso contrario, etc. Me viene a la memoria aquel viejo problema: “si en 24 horas sube una montaña siguiendo el único camino que

lleva a la cima y el día siguiente baja por el mismo sendero, debe haber un lugar donde usted está a la misma hora los dos días"... y uno se "imagina" superpuestas la subida y la bajada y entiende el cruce (¡igual hora!).

Ejemplo. La canción del teorema de Pitágoras

En la conferencia "La matemática hermosa se enseña con el corazón" incluí una canción dedicada al teorema de Pitágoras con música popular de A. Mestres. He hecho cantar esta canción o su correspondiente traducción a profesorado de Cataluña, Galicia, Madrid, Valencia, Argentina y Holanda.

1 *Un conocido pensador
viajando por Egipto
un triángulo encontró
con lados: tres, cuatro y cinco.*

2 *Viva el triángulo,
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor.*

3 *Sobre el ejemplo meditó:
¡recto era el ángulo!
y lo generalizó
al triángulo rectángulo.*

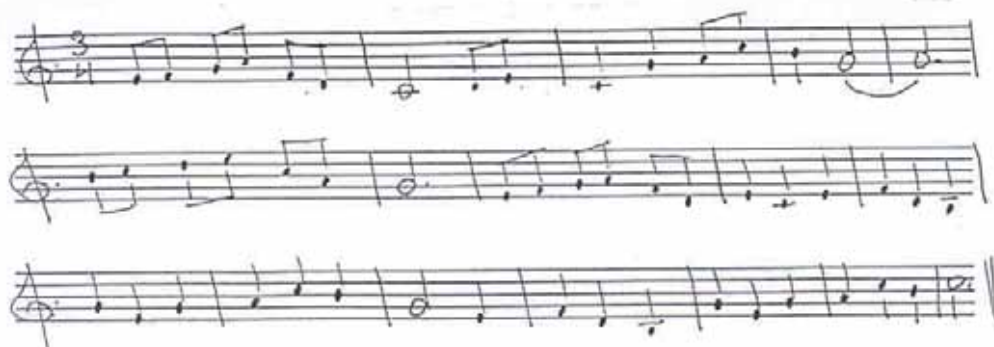
4 *Viva el triángulo,
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor.*

5 *Los cuadrados calculará
de los catetos que ahora usa
y el cuadrado obtendrá
del lado hipotenusa*

6 *Viva el triángulo
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor*

7 *Pitágoras nos dejó
una verdad fabulosa
para poder hacer
Geometría rigurosa*

8 *Viva el triángulo
rectángulo y señor
Viva el triángulo
medible con amor*



La imaginación docente

“Aprendí a aprender para poder enseñar y aprendí a enseñar para poder aprender”

L. A. Santaló

En una ocasión Anna Freud dijo cínicamente: “las mentes creativas siempre han sabido sobrevivir a cualquier clase de formación defectuosa”. Nuestro objetivo docente debe ser ofrecer una formación de calidad. Para ello debemos ser los profesores los primeros en ser imaginativos dando a nuestra actuación en el aula enormes dosis de creatividad. Dice W.N. Sawyer:

“La docencia mala en matemáticas es enseñar presentando una sucesión inacabable de signos sin significado, palabras y reglas y fallar en la promoción de la imaginación”.

La imaginación docente tiene muchísimos resortes a explotar, desde el planteamiento de problemas imaginativos y tareas ricas, a la creación de entornos de aprendizaje atractivos, pasando por unas dinámicas con juegos, salidas, torneos, concursos, etc., que estimulen la participación imaginativa. Por ejemplo, para los niveles elementales existen hoy maravillosos cuentos sobre matemáticas que tienen un gran interés didáctico... pero también pueden proponerse concursos de escribir y dibujar nuevos cuentos dedicados a los temas matemáticos que se tratan en clase. La imaginación es, además, gratis.

Ejemplo. ¿Han escrito alguna vez una carta de amor a un concepto o figura?

Yo lo he hecho y les incluyo esta emocionada:

Carta de amor a un trapezoide

Querido trapezoide,

Le sorprenderá que por primera vez alguien le haga una declaración de amor y ésta no provenga de una figura plana. Su pertinaz vivencia en el plano le ha mantenido siempre al margen de lo que ocurre por arriba o por abajo, enfrente o detrás. Digámoslo claramente: yo lo conocí hace años pero usted aún no se había enterado, hasta hoy, de mi presencia. Debo pues empezar por el principio y darle noticia de cómo fue nuestro primer encuentro.

Ocurrió una tarde de otoño lluviosa. Una de estas tardes de octubre en que llueve a cántaros, los cristales de los colegios quedan humedecidos y los escolares sin recreo. Usted estaba quieto en una página avanzada de un libro grueso que era nuestra pesadilla continua. Me acuerdo aún perfectamente. Página 77, al final hacia la derecha. Fue al abrir esta página, siguiendo la orden directa de la señorita Francisca, nuestra maestra, cuando lo vi por primera vez. Allí estaba

usted entre los de su familia, un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un rombo, un romboide,... y ¡el trapezoide!. Un perfil grueso delimitaba sus desiguales lados y sus extraños ángulos. La señorita Francisca se fue exaltando a medida que nos iba narrando las grandes virtudes de sus colegas cuadriláteros... que si igualdades laterales, que si paralelismos, que si ángulos, que si diagonales... y el rato fue pasando y la señorita seguía sin decir nada. Como las señoritas acostumbran a no explicar lo más interesante, a mí se me ocurrió preguntarle

- Señorita... ¿y el trapezoide?

Éste –replicó la maestra- este es el que no tiene nada.

¿Nada de nada? – le repliqué

Sí, nada de nada – me contestó

...y sonó el timbre. Quedé fascinado: usted era un pobre, muy pobre cuadrilátero. Estaba allí, tenía nombre, pero nada más. Por eso a la mañana siguiente volví a insistir en el tema a la señorita.

Así debe ser muy fácil trabajar con los trapezoides –le dije - ya que como no tienen nada de nada no se podrá calcular tampoco nada de nada.

¡Al contrario! Estos son los más difíciles de calcular. Ya lo verá cuando sea mayor.

Durante aquella época yo creí intuir que matemáticas y cosas sexuales debían tener algo en común pues siempre se nos pedía esperar a ser mayores para “verlo”.

A usted ya no lo vi más hasta que en Bachillerato don Ramiro nos obsequió con una fórmula muy larga para calcular su área. Esto me enfadó enormemente. Usted había pasado del “nada de nada” al “todo de todo”. A partir de entonces empecé a pronunciar su “oide” final con especial desprecio “¡trapez-OIDE!”.

Nuestro siguiente encuentro tuvo lugar en una calle. De pronto miro el pavimento y descubro con horror que le estoy pisando. Dí un salto y me quedé mirando. ¡Que maravilla! Después de tantos años sobre mosaicos llenos de ángulos rectos allí estaba usted. El “nada de nada” era ahora una loseta. Dibujé aquel suelo y entonces marqué los puntos medios de sus lados y empecé a trazar rectas y una maravilla de paralelogramos nacieron enmarcando su repetición.

Con el tiempo he ido aprendiendo muchas cosas de usted y le he dedicado muchos ratos. La señorita Francisca tenía razón en lo difícil que es tratarlo pero no la tenía en lo del “nada de nada”.

Y ahora al final de la declaración sólo me queda pedirle una cosa. Sé que es difícil pero no tengo más remedio que pedírselo. Por favor no diga nunca a nadie que yo hice esta declaración. Guarde esto en el centro del paralelogramo inscrito que le acompaña. Yo guardaré su recuerdo, dibujándolo en todas las reuniones. Los amores imposibles al menos tienen la virtud de ser duraderos. Suyo. Claudi.

Epílogo

Jean-Luc Picard en 'Star Trek: The Next Generation' dice "las cosas sólo son imposibles hasta que dejan de serlo". Aunque el tema de la imaginación en clase de matemáticas tiene sus complicaciones no nos podemos resignar a perder el inmenso valor formativo que la imaginación compartida entre docentes y estudiantes puede aportar. Como dijo George Smith Patton "Nunca digan a la gente como hay que hacer las cosas. Díganles lo que hay que hacer y les sorprenderán con su ingenio". ¿Imaginación al poder? Al menos ¡imaginación a la clase!

Bibliografía

- C. Alsina (2005): "Mathematical Proofs in the Classroom: the Role of Images and Hands-on Materials", *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation- Festschrift für Werner Blum, W. Henn and G. Kaiser, G. eds., Frazbecker, Hildesheim*, pp 129-138.
- C. Alsina (2005): *Geometría Cotidiana, Placeres y Sorpresas del Diseño*, Rubes, Barcelona.
- C. Alsina, R.B., Nelsen (2006): *Math Made Visual. Creating images for understanding mathematics*. MAA, Washington.
- G. Claxton (1994): *Educar mentes curiosas. El Reto de la ciencia en la escuela*, Visor Dist. S.A. Madrid.
- K. Egan (1992): *Imagination in Teaching and Learning*, University of Chicago Press, Chicago.
- K. Egan, D. Nadaner (eds.) (1988): *Imagination and Education*, Teachers College Press, New York.
- N. Frye (1963): *The Educational Imagination*. Canadian Broadcasting Corporation, Toronto.
- P.M. Higgins (2002): *Mathematics for the Imagination*, Oxford University Press, Oxford.
- E. Kasner, J.R. Newman (1978): *Matemáticas e Imaginación*, Compañía Editorial Continental, S.A., México.
- J.H. Mason (2004): *Mathematics Teaching Practice. A guide for University and College Lectures*, Horwood Pub. Chichester
- B. Mazur (2003): *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*, Farrar, Strauss and Girnox Ed., Cambridge.
- NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. Pub. Nat. Council of Teachers of Mathematics, USA.
- R.B. Nelsen (1993): *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*, MAA, Washington. (In Spanish: *Proyecto Sur*, Granada, 2001).
- R.B. Nelsen (2000): *Proofs without Words II: More exercises in Visual Thinking*, MAA, Washington.
- R. Norman (2000): "Cultivating Imagination in Adult Education", *Proceedings of the 41st Annual Adult Education Research*.
- G. Pólya (1954): *How to Solve it*, Anchor-Doubleday, Garden City NY.
- J. Sallis (2000): *Force of Imagination. The Sense of Elemental*.
- J. Tanton (2001): *Solve this. Math activities for students and Clubs*. MAA, Washington.