UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

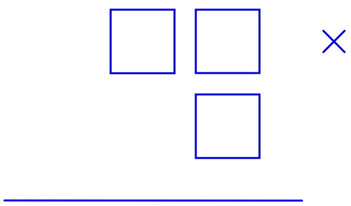
Septiembre de 2007, Número 11, páginas 197-204
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Juan escribió en la pizarra los números 2, 5, 6 y 3. Escoge tres de estos números, que sean diferentes entre sí, y escríbelos en las siguientes casillas, de modo que el producto de los números sea el <u>*mayor*</u> *posible*



Este es un problema que puede ser abordado por alumnos de primaria que ya sepan multiplicar números de dos dígitos por otro de un dígito. Plantea una situación sencilla de búsqueda de un valor óptimo, ofrece interesantes posibilidades de explotarlo didáctica y matemáticamente, y hace más entretenido el ejercicio de multiplicar, al hacer varias multiplicaciones en el marco de un desafío alcanzable o tratar de hacer el menor número posible de cálculos buscando una racionalidad para obtener lo pedido. Presentamos una experiencia didáctica en el nivel de educación primaria y hacemos algunos análisis – primero para este nivel y luego para niveles más avanzados – usando criterios del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática que se viene desarrollando por Juan Godino, Vicenç Font y otros investigadores[*].

---

[*] Ver, por ejemplo:
Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),* Vol. Especial, 131-155.
Un artículo que muestra relaciones con otros enfoques didácticos, se encuentra en:
Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M.R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME) 9*(1), 117-150.

Una experiencia didáctica

A manera de ilustración, comento la experiencia tenida al pedirle a David, de11 años y cursando el quinto grado de primaria, que resuelva este problema.

Es pertinente mencionar que en el enunciado que tenía la hoja que se le entregó a David, no decía explícitamente que los números que escoja tenían que ser diferentes entre sí. David escogió el número 6, lo escribió en todas las casillas y efectuó la multiplicación.

Estrictamente, su solución es correcta y revela el criterio intuitivo de usar el máximo de un conjunto finito de números para la obtención de otro máximo. David encontró el mayor número que se puede obtener efectuando una multiplicación de un número de dos dígitos por otro de un dígito, escogiendo los dígitos del conjunto $\{2,\ 5,\ 6,\ 3\}$.

A David se le pidió que continúe trabajando con el problema, pero ahora escribiendo tres números diferentes en las casillas y escogiendo tales números de los que escribió Juan en la pizarra, que son el 2, el 5, el 6 y el 3

David efectuó diecisiete multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{rrl} \boxed{5} & \boxed{3} & \text{X} \\ & \boxed{6} & \\ \hline 3\ 1 & 8 & \end{array}$$

Su respuesta es correcta y al preguntársele si estaba seguro, respondió que sí. Al preguntársele por qué, respondió que ya no se puede conseguir otro número más grande.

Cuando se le propuso el problema, cambiando el conjunto de números a escoger por $\{3,\ 5,\ 7,\ 4\}$, David efectuó sólo seis multiplicaciones y su conclusión fue:

$$\begin{array}{r} \boxed{7}\ \boxed{4}\ \times \\ \boxed{5} \\ \hline 3\ \ 7\ \ 0 \end{array}$$

El máximo buscado es 378 (54 x 7) y vemos que David obtuvo el producto más próximo a tal máximo. Cabe anotar que cuando propusimos este problema a varios estudiantes universitarios y a algunos profesores, 370 es el producto que inicialmente consideraron como el máximo. Parece que una primera aproximación intuitiva a la solución del problema, lleva a considerar que el máximo se obtendrá poniendo el dígito mayor en el lugar de las decenas.

Al percibir que David estaba mostrando una capacidad intuitiva de encontrar un valor óptimo en este contexto aritmético, le pedimos que escoja los números, siempre diferentes entre sí, del mismo conjunto $\{3, 5, 7, 4\}$ y que los escriba en las casillas, de modo que al efectuar el producto indicado el resultado sea el número ***menor*** posible.

David efectuó cinco multiplicaciones, tres de ellas considerando al 3 como factor de un solo dígito (en las otras dos consideró el número 5) y ninguna de las cinco considerando al 7 en el lugar de las decenas. Dio como solución:

$$\begin{array}{r} \boxed{4}\ \boxed{5}\ \times \\ \boxed{3} \\ \hline 1\ \ 3\ \ 5 \end{array}$$

Es la solución correcta y podríamos afirmar que David ha ido desarrollando una “intuición optimizadora” para resolver las dificultades planteadas.

Uno de los aportes concretos de David es que en el enunciado del problema ahora se diga explícitamente que los números que se escojan sean diferentes entre sí o no.

Una mirada más sistemática

Resulta interesante examinar la solución del problema inicialmente planteado, considerando elementos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Un importante instrumento de análisis en tal enfoque es la noción de *configuración epistémica.* Para resolver un problema la persona necesita una serie de conocimientos (conceptos, propiedades y procedimientos) tiene que utilizar representaciones (lenguaje) y tiene que hacer algún tipo de argumentación. También podemos considerar que tiene unas *capacidades y habilidades* de tipo general. La unidad formada por la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, los procedimientos y las argumentaciones que son necesarios para su resolución recibe el nombre de *configuración epistémica* si adoptamos un punto de vista institucional o referencial y de *configuración cognitiva* si adoptamos un punto de vista *personal*. El análisis de dichas configuraciones nos informa de la "anatomía de la actividad matemática". Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos, son necesarias otras herramientas, en especial los procesos asociados.

Una situación-problema podría resolverse por diferentes métodos, y así podría formar parte de dos o más configuraciones epistémicas/cognitivas diferentes que, a su vez, pueden formar parte de bloques matemáticos muy diferentes (por ejemplo geometría y álgebra)

Una de las ventajas de tener una configuración epistémica institucional es que tenemos una referencia para valorar la configuración cognitiva personal que ha utilizado el alumno en su resolución del problema.

En este marco, resumido muy brevemente, pasemos ahora a examinar soluciones del problema propuesto. Haremos una primera configuración epistémica institucional teniendo en cuenta el uso del problema con alumnos de primaria, y luego la configuración cognitiva de la solución de David.

Consideremos una solución con la siguiente pauta:

Observar que para obtener el producto máximo, usando sólo tres de los cuatro dígitos dados, no será necesario usar el dígito 2.

Escribir las seis maneras posibles de ubicar en las casillas los dígitos 3, 5 y 6. Efectuar las multiplicaciones y escoger el mayor de los productos obtenidos.

Configuración epistémica:

Lenguaje: números, multiplicación, producto, mayor, menor.

Situación-Problema: Búsqueda de un valor máximo en un problema intramatemático, de contexto aritmético.

Conceptos: Multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales, numeración posicional, decenas y unidades.

Proposiciones: Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Procedimientos: Comparar números naturales. Seleccionar los casos relevantes. Efectuar las multiplicaciones en tales casos. Comparar los productos obtenidos y escoger el máximo.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Hagamos ahora la *configuración cognitiva* de la solución de David.

Lenguaje: números, producto, multiplicación, mayor, menor

Situación - Problema: Encontrar el mayor producto efectuando multiplicaciones de números de dos dígitos por un número de un dígito.

Conceptos: multiplicación, producto, relación de orden entre números naturales.

Proposiciones: Si *a*, *b* y *c* son números naturales, tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Procedimientos: Comparación de números naturales. David advierte que usando el mayor de los números dados en todas las casillas obtendrá el mayor producto que se puede obtener multiplicando números de dos dígitos y un dígito. Con dígitos diferentes para cada casilla, David hace inicialmente multiplicaciones al azar, y va descartando las que le dan un número menor que otro producto. Luego advierte que es mejor usar los dígitos mayores.

Argumentos: Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener. Verificación empírica.

Podemos observar que la diferencia fundamental con la configuración epistémica tomada como referencia, está en los procedimientos, pues David no inicia sus cálculos descartando el número 2, por ser el menor de los dígitos dados y tener que escoger sólo tres; sin embargo, una aproximación a esta manera de resolver un problema como éste se percibe en la solución de David al problema de encontrar el producto mínimo, pues usa muy poco el 7 (que es el mayor de los dados en ese problema) y cuando lo usa, no lo ubica en el lugar de las decenas.

Descartar el menor de los números dados supone intuir la proposición dada en la configuración epistémica y nos sugiere la posibilidad de proponer ejercicios previos que faciliten esta intuición, o proponer el problema considerando como paso previo uno que haga pensar al alumno cuál de los números dados no usaría en sus cálculos para buscar el producto máximo.

La proposición aludida y explicitada en la configuración epistémica que hicimos de este problema, es una formalización y generalización de la acción intuitiva de descartar el número 2 por ser el menor de los cuatro dados. Es ilustrativo demostrar que la proposición es verdadera, como una manera de hacer evidente la relación entre intuición y formalización en la actividad matemática.

<u>Proposición</u>: Dados los dígitos positivos a, b y c, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

<u>Demostración</u>: Sea $h <$ mín $\{a, b, c\}$.

$$\overline{ab} \times c > \overline{hb} \times c \text{, pues } \overline{ab} > \overline{hb}$$

$$\overline{ab} \times c > \overline{ah} \times c \text{, pues } \overline{ab} > \overline{ah}$$

$$\overline{ab} \times c > \overline{ab} \times h \text{, pues } c > h.$$

Para otros niveles

Otra solución referencial y su configuración epistémica, considerando la aplicación del problema a estudiantes de secundaria o post secundaria, sería siguiendo la pauta que describimos a continuación, observada en algunos casos que el problema fue propuesto a estudiantes universitarios y a profesores:

Descartar el uso del número 2.

Siendo 6 y 5 los dígitos dados más altos, examinar las dos posibilidades de obtener en el producto un número que tenga más de 6x5 decenas:

$$\begin{array}{r} 63 \times \\ \underline{\quad 5} \\ 315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \times \\ \underline{\quad 6} \\ 318 \end{array}$$

Descartar 63 x 5 y concluir que el máximo buscado es 318, obtenido como producto de 53 y 6. (Observar que en 63 x 5 hay 30 decenas más 15 unidades y en 53 x 6 hay 30 decenas más 18 unidades.)

Configuración epistémica:

El *lenguaje, la situación–problema*, los *conceptos* y el *procedimiento* general son los mismos que los explicitados en la configuración epistémica anterior.

Veamos los otros dos objetos matemáticos restantes:

Proposiciones: Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, si en el producto $\overline{ab} \times c$ se reemplaza cualquier dígito por un número positivo menor que los tres, el nuevo producto siempre es menor que $\overline{ab} \times c$.

Dados los dígitos positivos *a*, *b* y *c*, tales que $a < b < c$, el mayor número que se puede obtener como producto de un número con dos de estos dígitos y otro de uno de estos dígitos, es un número que tenga por lo menos *b* x *c* decenas.

(Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de esta proposición)

Propiedad transitiva de la relación de orden.

Argumentos:

Cuanto mayores sean los dígitos de los factores de un producto, mayor será el producto que se pueda obtener.

Los casos más relevantes corresponden a la obtención del mayor número de decenas.

Verificación empírica.

Esta configuración epistémica, nos abre otras posibilidades para proponer y orientar ejercicios, problemas, juegos y demostraciones previos y posteriores al trabajo con el problema presentado. Un juego atractivo puede ser pedir a un grupo de estudiantes que resuelva el problema, estableciendo que el ganador será el que encuentre el número máximo con el menor número de multiplicaciones y justifique su procedimiento.

El enfoque ontosemiótico propone que las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde diversas facetas o dimensiones duales y una de ellas es la dualidad entre ejemplar y tipo, en la cual se refiere a una de las actividades fundamentales de la matemática, que es la generalización. Ya ha estado presente esta dualidad en las configuraciones epistémicas realizadas, pues a partir del caso concreto se ha construido proposiciones generales, pero es enriquecedor mostrar algunas otras posibilidades de generalización del problema presentado y proponerlo – inclusive en un contexto lúdico – por ejemplo en cursos de formación o de capacitación de profesores. A continuación dos posibilidades:

a) Juan dice que es capaz de resolver el problema propuesto sin necesidad de hacer multiplicación alguna. ¿Es esto posible? ¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? ¿Cómo se puede justificar?
b) María propone otro desafío: Escribe en la pizarra cinco dígitos positivos *a*, *b, c, d* y *e* tales que $a < b < c < d < e$ y pide elegir tres de esos dígitos, diferentes entre sí, para formar el multiplicando, y otro más para formar el multiplicador, de manera que el producto sea el menor posible.

Invitamos al lector a justificar un procedimiento para elegir y ubicar los dígitos.