UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 165-186
ISSN: 1815-0640

Perspectiva integrada de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática: una mirada a la Educación Matemática

Marcela Falsetti – Mabel Rodríguez – Gustavo Carnelli – Francisco Formica

Resumen

Entre los numerosos elementos que confluyen en la enseñanza de la Matemática pueden mencionarse la relación entre la Matemática científica y la escolar, la imagen y la naturaleza de la Matemática, las particularidades de la actividad matemática, la formación didáctica del profesorado y la evolución en la forma de entender su enseñanza. Este trabajo tiene la intención de ofrecer una visión integradora de estas cuestiones que aporte al entendimiento de la complejidad de la enseñanza de la Matemática y dé puntos de apoyo desde donde revisar su práctica de enseñanza. Complementa otro trabajo anterior –publicado en esta revista– en el que se atendieron las cuestiones referidas al campo disciplinar.

Introducción

Fenómenos o procesos como el de enseñar y el de aprender Matemática no son ingenuos, se comprenden, explican, diseñan y ejecutan desde perspectivas ideológicas, teóricas y vivenciales que son implícitas en la mayoría de los casos. Sin embargo, cuando estas perspectivas o posturas se hacen manifiestas cobran fuerza en la difusión y en la orientación de procesos. Este efecto, se observa a partir de los trabajos de Miguel de Guzmán[1] y de Luis Santaló[2], por ejemplo, en los que se evidencian con claridad, precisión y sin tecnicismos ostentosos, estas tres componentes, ideológica, teórica y vivencial, conformando una perspectiva integrada. Más modestamente, intentamos aquí brindar un panorama general e integrador que aporte para el entendimiento de la enseñanza y el aprendizaje actuales de la Matemática. Para ello recorremos un arco que abarca las características específicas del quehacer matemático científico, teorías didácticas y tendencias de la enseñanza actual[3].

---

[1] Miguel de Guzmán Ozámis (Cartagena 1936 - Madrid 2005) matemático español, doctorado con Pedro Calderón en la Univ. de Chicago en temas de Análisis Armónico. Dedicado también a la divulgación de la Matemática. Presidente de la ICMI (International Comission of Mathematical Instruction) desde 1991 a 1998.

[2] Luis A. Santaló, (Girona 1911 - Buenos Aires 2001) matemático español quien desarrolló la mayor parte de su carrera en Argentina ha sido el máximo exponente de la Geometría Integral que se aplica con éxito a la medicina, la biología, geología, etc. englobándose dichas aplicaciones bajo el nombre de Estereología. Santaló fue además un gran pedagogo y divulgador científico con más de 250 publicaciones, entre ellos libros con gran influencia en nuestra comunidad matemática, como su Geometría Proyectiva o Vectores y Tensores.

[3] Cabe aclarar que el presente trabajo está motivado por el trabajo en un seminario con profesores formadores de docentes que coordináramos en el marco de un proyecto ministerial de la Provincia de Buenos Aires para llevar a cabo una revisión curricular.

La Matemática siempre ha tenido un lugar privilegiado en el desarrollo humano por su presencia práctica en la vida cotidiana, su protagonismo en el ámbito científico – tecnológico y su influencia en el ámbito artístico. Es además considerada como ámbito privilegiado del pensamiento humano. Probablemente este privilegio radique en el hecho que ofrece posibilidad de abstracción desde la manipulación concreta (sensorio-motriz) de objetos a temprana edad. Operaciones mentales como clasificar, cuantificar, ordenar, seriar, ubicar, discernir, comparar, simbolizar, generalizar, representar, construir teniendo en cuenta la percepción espacial, etc. se van dando en el pensamiento humano, de forma creciente en complejidad, ya desde los primeros contactos del hombre con los objetos. Justamente, hacer Matemática consiste en sistematizar acciones como las anteriores y los resultados de las mismas.

El privilegio que goza la Matemática se evidencia también en el tratamiento especial que la psicología cognitiva y la pedagogía dieron y dan a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática y en el hecho que la Didáctica de la Matemática tenga un amplio desarrollo aportando nociones ya generalizadas a otros campos como las de “transposición didáctica” y “resolución de problemas”, entre otras. Sin embargo este “halo de privilegio” ha hecho que se traspasaran límites y extrapolaran competencias; así, considerando que la Matemática es el campo de conocimiento ideal para el desarrollo del “espíritu crítico”, se da a entender que estudiando Matemática puede uno tener gran poder de criticismo, reflexión y rigor en otros ámbitos de la vida, la cultura y la ciencia. Esta omnipotencia intelectual que supuestamente la Matemática otorga, lejos de brindar beneficios, provoca, contrariamente, un distanciamiento entre la disciplina y el individuo común, que no tiene afinidad con ella. La enseñanza de la Matemática debiera entonces contrarrestar este efecto, para ello el profesor debe conocer la naturaleza de la disciplina, tener una clara concepción sobre esta ciencia y sobre sus alcances y limitaciones.

Acordamos con Miguel de Guzmán (Guzmán, 1993) en que enseñar Matemática es tarea difícil, *“[…] la matemática misma es una ciencia intensamente dinámica y cambiante. De manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos. Y aun en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.”* y agrega *“El otro miembro del binomio educación - matemática, no es tampoco nada simple. La educación ha de hacer necesariamente referencia a lo más profundo de la persona, una persona aún por conformar, a la sociedad en evolución en la que esta persona se ha de integrar, a la cultura que en esta sociedad se desarrolla, a los medios concretos personales y materiales de que en el momento se puede o se quiere disponer, a las finalidades prioritarias que a esta educación se le quiera asignar, que pueden ser extraordinariamente variadas...”.* Como vemos, la dificultad de la enseñanza de la Matemática se debe a la necesidad de tender hacia la vinculación equilibrada de por lo menos cuatro esquemas organizacionales de pensamiento, dinámicos cada uno de ellos, que son:

- los esquemas de la "lógica" interna del individuo que aprende, regidos por sus necesidades, condicionales (afectivos, cognitivos, etc.) y posibilidades internas;
- los esquemas de organización grupal, de relaciones sociales y contractuales al interior de las instituciones educativas y del grupo de aprendizaje en relación con la disciplina.
- los esquemas de organización y fundamentación de la disciplina según los cuales es posible tejer redes conceptuales en donde los conceptos se relacionan en forma ecológica, es decir cada concepto es esencial para definir o entender otros y sin él no podría construirse la teoría, método o técnica de la cual forma parte. Es necesario aclarar que este criterio "ecologista" de organización es intrínseco a la Matemática, es decir no se rige por los fenómenos fácticos a los que los conceptos hacen referencia. En cuanto a la forma de validación, éstas son de tipo deductivas.
- los esquemas de producción del conocimiento matemático que son de tipo empírico, exploratorio, inductivo, inferencial, etc.

Para contribuir a entender la complejidad presentada, en este trabajo realizamos un recorrido por la Didáctica de la Matemática que nos permite delinear algunas pautas en lo que respecta a la enseñanza de esta disciplina. Tratamos de responder a cuestionamientos que surgen en la práctica de enseñanza tales como ¿qué vinculaciones hay, o debería haber, entre la Matemática científica y la Matemática escolar?, ¿qué respuestas aporta la Didáctica de la Matemática a los interrogantes del aprendizaje y de la enseñanza?, ¿cuáles son los cambios y las tendencias actuales en la enseñanza?, ¿cuáles deberían ser las tareas ineludibles de un profesor al enseñar Matemática? Aquí sintetizamos discusiones teóricas junto con reflexiones sobre la práctica referidas a estos asuntos.

Hemos organizado el trabajo partiendo de las discusiones más generales que hoy en día se mantienen a nivel mundial para luego ir particularizando los análisis y aportes ajustándonos a problemáticas que se encuentran actualmente en el contexto de las escuelas y de las instituciones educativas que forman profesores. Presentamos las siguientes secciones.

1. **Educación Matemática: panorama del campo didáctico.**
   En esta sección se presentan características de la Didáctica de la Matemática, su evolución, su objeto, función y sus perspectivas.
2. **Situación y perspectivas de la enseñanza de la Matemática. Problemáticas de enseñanza y aprendizaje.**
   En esta sección se realiza una presentación sobre las principales cuestiones referidas al aprendizaje y enseñanza de la Matemática en general y también una presentación más particularizada y concreta sobre la situación actual de enseñanza a partir de describir y analizar prácticas de enseñanza en el ámbito áulico.

1. Educación Matemática: panorama del campo didáctico

1.1. Evolución histórica. Tendencias

La enseñanza de la Matemática ha tenido un cambio acorde a la influencia de la psicología cognitiva en el campo de la educación pasando de la forma conductista a la forma constructivista, entendida esta última en un sentido amplio que luego explicaremos. En la forma conductista se destacó el predominio de las evaluaciones de conductas manifiestas y observables, en términos de control de aquello logrado o no logrado por el estudiante. Aunque el modelo ha sido superado por distintas teorías psicológicas que dan sustento a otras modalidades de enseñanza, esta influencia está arraigada en la historia de la formación docente y forma parte, en la mayoría de los casos, de las biografías escolares de los docentes en ejercicio y formadores. Ha sido estudiado que la biografía escolar de un docente, en muchos casos, es replicada por éste como modelo de enseñanza en el aula. De este modo, podemos afirmar que hoy en día el modelo conductista, en distintas variantes y grados, aún tiene vigencia.

En lo que respecta específicamente al campo de la enseñanza de la Matemática, en su camino hacia el constructivismo, se produjo poco antes de la década del 70 una revolución como producto de dos corrientes: el desarrollo de la teoría de conjuntos y las implicaciones educativas de las investigaciones psicogenéticas de J. Piaget. El desarrollo de la teoría de conjuntos, que se instaló en las escuelas con el nombre de Matemática Moderna, se llevó adelante sin conexión con los contenidos que hasta el momento se venían desarrollando (de Aritmética y Geometría), sino que se incorporaron como un capítulo anterior sin vinculación con el resto. La Matemática científica transitaba una etapa de formalización, propia de los avances del campo disciplinar. Se produjo un problema en la enseñanza de la Matemática a raíz de que esta formalización fue trasladada a las escuelas como “la nueva Matemática que debía enseñarse”, causando desconcierto en los docentes (que ignoraban el contenido), las instituciones, las familias y por supuesto los estudiantes. En paralelo, el marco psicológico de las investigaciones en psicología genética determinó la importancia de ciertas actividades que, supuestamente, preparaban a los estudiantes para aprender los conceptos matemáticos. Estas actividades reproducían las realizadas por J. Piaget en sus investigaciones psicológicas que tenían otra finalidad, no siendo ésta la inclusión directa de ellas en la enseñanza. Esta confusión ha causado una adaptación inapropiada de dichas investigaciones al ámbito educativo.

Los aprendizajes de los estudiantes bajo la modalidad conductista, así como la enseñanza de la Matemática Moderna y las aplicaciones de la Teoría de Piaget, se percibían insatisfactorios. Interpretamos que estudios sistemáticos de dichos aprendizajes dieron origen a un campo disciplinar que poco a poco fue configurándose y ganando autonomía: estamos hablando de la Didáctica de la Matemática. Podemos considerar, entonces, que el inicio de este campo como disciplina autónoma es relativamente reciente. El primer paso para sistematizar este campo de estudio se ha debido esencialmente a los aportes de G. Brousseau e Y.

Chevallard, ambos investigadores franceses quienes han sido los referentes principales, en las décadas de los 70 y 80, de la que hoy en día se conoce como la "Escuela Francesa" de la Didáctica de la Matemática. Desde entonces y de manera creciente, se han ido desarrollando distintas teorías y enfoques que forman parte de la Didáctica de la Matemática que actualmente se nutre de aportes provenientes de diversos investigadores de todas partes del mundo. Aunque este campo haya comenzado a desarrollarse como disciplina sobre la base de la investigación, su valor y su status sigue siendo cuestionado y criticado principalmente por la comunidad profesional (matemáticos, docentes, ingenieros, etc.). Esencialmente esto se debe a que los trabajos producidos pueden no verse como interesantes o significativos. Esto a su vez podría atribuirse a dos razones: una de tipo comunicacional, que se manifiesta porque resulta difícil transmitir la idea esencial de los trabajos producidos, y la otra por deficiencias propias de los mismos (Arcavi, 2000).

El objeto de investigación de la Educación Matemática (o de la Didáctica de la Matemática) es, en términos amplios, crear teorías y modelos sobre cómo se produce el conocimiento matemático a nivel individual y social, especialmente cómo se produce este conocimiento a nivel escolar y cuál es el conocimiento matemático adecuado, o susceptible a ser producido, en el ámbito de una institución escolar. Para ello toma como referencia el conocimiento matemático científico. Su método de investigación abarca, según el paradigma del investigador, desde el tipo de las ciencias fácticas (de la psicología, la sociología, la antropología) hasta el tipo comprensivista. En el primer caso, la forma de validar el conocimiento en esta disciplina es mediante la verificación de hipótesis. La Didáctica de la Matemática, que ha nacido como disciplina intentando desarrollar programas de investigación que respondan a problemas originados de desafíos y dificultades de la enseñanza de la Matemática, tiene, por otro lado, un rol práctico, intentando tener eficacia para resolver situaciones de enseñanza y aportar recursos para una mejor eficacia didáctica (formación de docentes) (Astolfi, 2002).

En el artículo de Font (2002) se encuentra el detalle de los programas de investigación en Didáctica de la Matemática y sus distintos aportes. Nosotros presentamos una breve síntesis de los principales enfoques.

Entre los posicionamientos de algunos de los principales programas de investigación podemos mencionar el **enfoque cognitivo** en el que se destacan dos líneas de investigación: pensamiento matemático avanzado, introducido por Tall y Vinner, entre otros, y la teoría de los campos conceptuales desarrollada por Vergnaud. Adoptan una postura constructivista para el aprendizaje, para la enseñanza, atienden a las condiciones que posibilitan el aprendizaje significativo e investigan sobre las representaciones mentales de las personas.

Otro enfoque es el **constructivismo radical** de Von Glasersfeld. Éste tiene como bases la epistemología genética de Piaget, la formación del conocimiento por medio de la acción y la reflexión sobre la acción, la evolución de los esquemas que se adaptan al mundo experiencial del sujeto y modeliza el conocimiento. El aprendizaje es constructivista e individualista, la enseñanza es respetuosa de las construcciones de los alumnos que anticipan, confrontan y validan sus razonamientos y el docente es un mero facilitador, considerándoselo, en esta línea, “aprendiz de la enseñanza”.

El **constructivismo social**, que tiene en Ernest a uno de sus referentes, adopta una ontología relativista moderada, propone la fenomenología social y entiende al mundo como el resultado de una construcción social. En su epistemología asume el conocimiento como provisorio y aceptado socialmente. La teoría del aprendizaje es constructivista, considera relevante el lenguaje, la interacción social y las situaciones de conflicto cultural y cognitivo (resurgimiento de la teoría de Vygotsky).

El **enfoque fenomenológico** debido centralmente a Freudenthal considera que los conceptos, estructuras e ideas matemáticos se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. En una enseñanza que siga este enfoque se intentan describir los contenidos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas para los que se han creado.

En el **enfoque semiótico**, introducido por Godino y Batanero, se desarrolla la teoría de los objetos institucionales y personales y la teoría de las funciones semióticas, que postulan que las funciones semióticas facilitan el estudio de las representaciones mostrables (públicas) y las mentales (privadas) puestas en juego en las prácticas de Matemática. La introducción de las funciones semióticas permite perfeccionar la idea de que un sujeto comprende un concepto matemático determinado cuando lo usa eficazmente en diferentes prácticas; revisten singular importancia en el plano relacional y de este modo las Matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas, compartida socialmente como lenguaje simbólico y sistema conceptual organizado lógicamente. Su teoría del aprendizaje es constructivista. *“Aprender matemática es construir significados personales y enseñar matemática consiste en procurar que los significados personales se aproximen al significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar”* (Font, 2002).

La **teoría crítica** reflexiona sobre la Matemática realizada en las instituciones, pensada como una herramienta para la emancipación democrática. Pretende la construcción de significados con mirada sociopolítica que complementa la construcción personal y social realizada en el aula. Considera las prácticas de la Educación Matemática en la escuela como una red de distintas cuestiones que se interrelacionan y juntas provocan las condiciones para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en esa institución y esa red en la que intervienen las relaciones entre estudiantes, profesores, grupo de profesores de Matemática, administrativos y directivos, es el objeto de investigación para esta teoría por considerarla básica para la reflexión sobre la práctica. Se resalta la importancia de entender la política de la institución, la relevancia de las Matemáticas escolares, la organización de la escuela, la comunidad de profesores, el significado que cada docente da a la Matemática en el aula para entender el funcionamiento de la Matemática escolar. Entre los representantes podemos mencionar a P. Valero y O. Skovsmose.

El **enfoque sistémico** plantea ampliar la reflexión teórica incluyendo un estudio de los contenidos matemáticos a enseñar y no limitarla al análisis de cuestiones cognitivas propias del alumno y de su aprendizaje. La Matemática es considerada como una ciencia que se ocupa de resolver problemas. El aprendizaje es concebido como constructivista y la tarea central de la enseñanza es llevar a cabo la transposición didáctica. La metodología de investigación es vista por Font como positivista, cuestión que consideramos es discutible. En este enfoque se encuadra la Teoría de Situaciones de G. Brousseau.

El **enfoque antropológico**, tiene como uno de sus principales exponentes a Y. Chevallard. La Matemática es considerada como una actividad humana llevada a cabo en distintas instituciones. El aprendizaje es concebido como constructivista. La enseñanza se corresponde con una actividad de reconstrucción de los objetos matemáticos con el fin de reutilizarlos en otros contextos. De este modo la función del enseñante es generar condiciones para llevar adelante esta reconstrucción. La metodología de investigación también es descripta como positivista.

En la Teoría de Situaciones se concibe el conocimiento matemático como una construcción resultante de una serie de situaciones interrelacionadas en las que intervienen el alumno y el profesor con distintas responsabilidades, según el momento, frente a la creación de ese conocimiento. La situación inicial, disparadora de la producción de conocimiento, debe darse a partir de un problema planteado a los alumnos. Por supuesto, quien plantea el problema es el profesor y debe hacerlo de modo tal que el alumno no note su intencionalidad de enseñanza. El problema, junto a esta forma en que se le presenta al alumno y junto a los recursos que se utilicen para que el alumno se comprometa con la resolución del mismo y se apropie de él constituyen una *situación a-didáctica.* En este tipo de situación el alumno considera el problema como un asunto propio reconociendo que éste requiere de un conocimiento nuevo que debe construir por sus propios medios, sin direccionamiento externo. La *situación didáctica* es aquella en la que el docente interviene, siempre que sea necesario, en el sistema de interacciones del alumno con el problema, ya sea mediante preguntas que continúen con la línea de pensamiento del alumno o proveyendo o sugiriendo técnicas que permitan al alumno concretar la línea de acción que trazó. En las situaciones a-didácticas y en las didácticas se destacan momentos en los que se pone cierto énfasis en el tipo de trabajo propuesto para el alumno, ellos son: las situaciones de *acción*, de *formulación* y de *validación*. En las situaciones de acción el estudiante debe poder actuar sobre el problema, hacer elecciones de conocimientos matemáticos que considere adecuados y anticipar resultados posibles. El problema debe admitir retroacción, es decir debe ser tal que le devuelva al alumno información sobre las consecuencias de esa acción, permitiéndole juzgarla sin la intervención del docente. En esta etapa tienen preeminencia las *nociones protomatemáticas*, que son aquellas que se usan pero que no son reconocidas como objeto de estudio ni como instrumento. Las nociones protomatemáticas (así como las paramatemáticas y matemáticas que se describirán a continuación) son introducidas por Chevallard en un marco epistemológico más amplio. Consideramos, de todas formas, que permiten ser adaptadas localmente facilitando la descripción de las distintas etapas de construcción de conocimiento. Las situaciones de formulación son aquellas en las que el estudiante intercambia información con otros estudiantes para su posterior debate en la clase. Es una reconstrucción de la acción en la que se toma contacto con otros procedimientos de resolución. Se trata de una forma de hablar de la situación, en la búsqueda de la construcción de un lenguaje, un sistema simbólico capaz de representar lo hecho. Se da aquí un dominio de las *nociones paramatemáticas*, es decir, nociones que se utilizan conscientemente como instrumentos que permiten describir a otros objetos matemáticos, pero que no son objeto de estudio en sí mismo. Finalmente en las situaciones de validación, el estudiante debe probar la validez, exactitud y pertinencia de su modelo, de los resultados de su acción y formulación, convenciendo a otros, quienes pueden pedir explicaciones adicionales y aún rechazar –justificando– las que no acuerden. Las acciones realizadas pueden ser reformuladas o aún desechadas –si son reconocidas como falsas– lo que implicará la búsqueda de un nuevo procedimiento, pero teniendo en cuenta los errores anteriores como parte del proceso de construcción. Las nociones dominantes en esta situación son las *nociones matemáticas*, objetos matemáticos construidos, listos para ser enseñados y utilizados. Son objeto de estudio en sí mismos y también instrumento para el estudio de otros. En las tres situaciones mencionadas, es tarea del docente la *devolución* del problema al estudiante, es decir, ubicarlo en situación a-didáctica.

Esta teoría comporta también otras nociones importantes como la de medio o "*milieu*", que puede ser entendido como el conjunto de objetos materiales y simbólicos que dan marco o contexto al trabajo del alumno (y al profesor) y al cual éste debe ir adaptándose para ir originando un tipo de conocimiento específico. En este contexto se dan las conductas del que aprende, las acciones y reacciones provocadas por la situación a-didáctica, las informaciones que surgen a partir del manejo de técnicas sobre el problema y las formulaciones que surgen de las distintas situaciones, etc. Otras nociones de la teoría son la de *institucionalización* y *contrato didáctico.* Este último es entendido como el conjunto de reglas, en su mayoría implícitas, que regulan las acciones y las responsabilidades del docente y de los alumnos quienes, estos últimos, deben producir el conocimiento para resolver el problema. La *institucionalización* es el momento en el cual el docente muestra las relaciones entre la producción del alumno por un lado y el conocimiento científico y el proyecto didáctico por otro. En la institucionalización el docente da coherencia al conocimiento construido por el alumno respecto al conocimiento instituido (científico-escolar) mostrando la relación entre el significado que los conceptos elaborados tienen en la Matemática y el sentido construido por el alumno y usado por él en el contexto de aprendizaje.

El enfoque antropológico de Chevallard es más abarcativo y no sólo da un marco teórico para explicar la actividad matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el ámbito escolar sino que enmarca la actividad matemática en el contexto de las actividades humanas que se dan según reglas, técnicas y especificidades de las instituciones. De esta manera, al aparecer lo institucional, se da un marco teórico para explicar la relación entre actividades y saberes que se dan en distintas instituciones y que guardan relación entre sí. Así por ejemplo, el saber o contenido matemático que ha sido designado para enseñar preexiste antes de esta designación en el seno de la institución Matemática (la de los matemáticos científicos). Este saber "sabio" sufre una serie de transformaciones que lo convierten en un objeto de enseñanza. El proceso de transformación que media entre estos dos contenidos o saberes es la *transposición didáctica*.

Aunque el somero panorama planteado deja entrever el auge y diversidad que tiene en estos momentos la Didáctica de la Matemática, la Escuela Francesa sigue siendo, a nuestro entender, la más difundida a los fines de la formación docente. En los institutos de formación docente, así como en las capacitaciones, casi la totalidad de enfoques y propuestas se circunscriben a la línea francesa.

Las tendencias actuales marcan una prolífica producción de trabajos de investigación en los distintos enfoques. Esto nos pone en el compromiso de tener que ampliar la mirada respecto a la formación en la Didáctica de la Matemática de los futuros docentes.

1.2. Rol de la Didáctica de la Matemática en la Formación Docente

A partir de algunos diseños curriculares de formación docente analizados[4], se observa una ausencia de definición en varios sentidos en cuanto a la Didáctica de la Matemática. En ellos, por un lado, no está explícito ni el rol ni la función de la Didáctica de la Matemática, pareciera que es una cosa obvia y transparente pero en realidad esconde una falta de definición sobre cómo se concibe la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. Esta cuestión también se observa en los Diseños Curriculares de los niveles escolares (inicial y EGB) en los que no hay una línea didáctica clara que se deba seguir. Mencionamos esto como un hecho objetivo sin valoración, dado que bien podría considerarse valioso que el diseño sea expresamente abierto en estos aspectos, o por el contrario podría considerarse imprescindible una mayor definición y prescripción en los mismos.

Desde nuestro punto de vista, el futuro docente debería manejar (en el sentido de conocer y ser capaz de actuar en consecuencia) más de una teoría o modelo de la Didáctica de la Matemática. Por un lado porque concebimos que cada docente debería forjar su propia adaptación de las teorías aprendidas en la formación docente para ajustarlas a su contexto de trabajo, a sus gustos, a sus concepciones, a su visión sobre la Matemática, sobre el sujeto del aprendizaje, etc. Se espera de este modo que cada docente defina su propio marco teórico con el cual pueda ser coherente a la hora de la enseñanza, sobre todo en momentos en los que la definición teórica sobre los lineamientos didácticos en el nivel escolar está abierta a la elección justificada de las instituciones y sus docentes. Por otra parte, la formación docente se da en un cierto tiempo y contexto y el trabajo profesional se llevará a cabo en otro tiempo y contexto de modo tal que los aprendizajes logrados deberían facilitar la adecuación del futuro docente a cambios constantes y poco predecibles. Por esta razón, consideramos conveniente no sesgar la enseñanza de la Didáctica a una única mirada dado que tal vez, en un tiempo cercano, otros aportes (diferentes a la línea única seleccionada) se encuentren mejor adaptados a las necesidades docentes.

[4] Ver por ejemplo Documentos Curriculares de la Provincia de Buenos Aires.

Finalmente, una tercera razón, es que presentar la Didáctica desde un único punto de vista podría hacer que el alumno (futuro docente) responda –oficio de alumno- con lo que el profesor formador "espera oír de él". De este modo, el futuro docente podría no estar de acuerdo con el enfoque enseñado, pero no tendría otra opción para aprobar la materia que repetir o actuar como se espera de él. En este caso, es altamente probable que este alumno cuando sea docente ignore las enseñanzas recibidas en su formación. Este último hecho, que puede ser causado por una combinación de múltiples variables, suele ser nombrado por profesores de práctica de institutos de formación docente, como una característica encontrada en las observaciones de las residencias e incluso por inspectores al observar docentes en ejercicio.

Hemos encarado hasta aquí el problema de analizar qué criterio usar para definir qué contenidos deberían incluirse en la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Nos resta enfocar dos problemas que no son menores. Por un lado queremos mencionar los propósitos de la enseñanza de la Didáctica de la Matemática, que sintetizaremos mencionando algunos conocimientos, en términos de "saber hacer" y que consideramos indispensables para los futuros docentes. Por otra parte dedicaremos un párrafo a pensar en cómo encarar la enseñanza de la Didáctica de la Matemática.

Respecto de qué cuestiones consideramos relevantes que los futuros docentes aprendan en las asignaturas afines a la Didáctica, mencionamos las siguientes:

- Seleccionar y preparar contenidos matemáticos para su enseñanza.
- Analizar problemas de la práctica docente desde diversos enfoques teóricos.
- Disponer de herramientas teóricas que permitan analizar los aprendizajes y los errores de los alumnos.
- Disponer y utilizar herramientas para el diseño y aplicación de situaciones didácticas bajo distintos modelos de aprendizaje supuestos.
- Plantear objetivos diferenciados para un mismo contenido matemático en función de los diferentes niveles, conocimiento de los alumnos, etc.
- Conocer y adaptar a distintos contextos, trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática.
- Justificar la selección de un sistema de evaluación y diseñar distintos tipos de instrumentos.

A estas cuestiones les agregamos un objetivo que a nuestro entender es central para la formación: el alumno futuro docente debe, en primer lugar, ser capaz de definirse como docente lo que implica definirse en cuanto qué Matemática él concibe para la enseñanza, cuáles son sus concepciones respecto de la enseñanza y respecto del aprendizaje según las características de los sujetos. Esto lleva implícito que el futuro docente debe:

- Conocer y elegir, justificadamente, aspectos de teorías de la Didáctica de la Matemática, de la Enseñanza y del Aprendizaje que le permitan definir su marco teórico como docente.

Desde este enfoque consideramos importante para la enseñanza de asignaturas afines a la Didáctica de la Matemática: a) proponer objetivos valiosos (en el sentido recién descrito) y b) incluir en la bibliografía básica de estas asignaturas trabajos de investigación que respondan a distintos enfoques teóricos.

Respecto de cómo encarar la enseñanza de la Didáctica de la Matemática, comenzamos abriendo una serie de interrogantes que nos preocupan y sobre los que intentaremos esbozar algunas respuestas. Nos preguntamos ¿cómo encarar el problema de enseñar la Didáctica de la Matemática?, ¿qué teorías/ investigaciones elegir?, ¿qué criterios usar?; haciendo una analogía con lo trabajado en el apartado1.2 ¿qué de la Didáctica de la Matemática enseñar que sea representativo de ella?

Haciendo una analogía con la enseñanza de la Matemática, podríamos pensar que el alumno (futuro docente) debe construir su conocimiento didáctico y esto debe hacerse a partir de una propuesta centrada en su actividad. Aunque este tipo de metodología no es usual en la formación superior, consideramos que, por lo menos para algunos contenidos, debería llevarse a cabo. Esto nos lleva a plantearnos una enseñanza de la Didáctica basada en la “resolución de problemas” (por ejemplo, a través de estudio de casos) pero problemas de la enseñanza/aprendizaje, cuyo abordaje es altamente complejo dado que en ellos se ponen en juego múltiples variables y enfoques que permiten analizar la cuestión desde distintos campos que convergen en la Didáctica (la psicología, la antropología, etc.). Es decir, proponemos que la enseñanza de la Didáctica se presente como un campo que produce explicaciones, posibles interpretaciones de problemas y permite establecer posibles respuestas a problemas y no como una serie de definiciones teóricas de conceptos que sólo le brindan al alumno un vocabulario nuevo que le permite comunicarse con sus pares pero no le permite incidir en su práctica docente. Dice J. F. Halté (citado en Astolfi, 2002), refiriéndose a la Didáctica del Francés, pero adecuable perfectamente a la Didáctica de la Matemática *“es indispensable que los maestros hagan didáctica, que piensen de manera didáctica, que se transformen en didactas, no en aplicadores de recetas mediocres, y, para continuar la metáfora, que produzcan su propia cocina. La práctica de la didáctica se reproduce como una experiencia de laboratorio... El porvenir de la didáctica pasa por el establecimiento de una relación simbiótica entre investigación y enseñanza. En síntesis hay mucho trabajo para todos en el punto en el que nos encontramos. ¡Y se trata de un trabajo interactivo!”*. Esto nos permite enunciar otros dos criterios que consideramos importantes de tener en cuenta a la hora de pensar en la enseñanza de la Didáctica de la Matemática: a) los docentes deberían recibir formación para participar en equipos de investigación y luego deberían formar equipos de investigación y b) los docentes deben reflexionar sobre la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Para que esto sea posible se deben mejorar la realidad de trabajo en los institutos de formación docente, creando condiciones para tales fines, no sólo en términos de remuneraciones sino en espacios dentro de la institución para tal fin.

Aún no se ha discutido en profundidad en la comunidad educativa el problema de la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Creemos que hoy en día es un campo a explorar.

2. Situación y perspectivas de la enseñanza de la matemática. Problemáticas de enseñanza y aprendizaje.

2.1 Cuestiones preliminares para entender la situación actual de la enseñanza

El movimiento reformista de la enseñanza de la Matemática Moderna fue gestándose en Estados Unidos y Francia desde los años cincuenta. A nivel mundial, desde principios de los sesenta hasta fines de los ochenta, la enseñanza de la disciplina estuvo guiada por pautas originadas en el seno de la comunidad matemática. Matemáticos de gran prestigio como H. Cartan, J. Dieudonné y G. Choquet, entre otros, indicaban, desde su perspectiva científica, cuál era el cambio que debía darse en la enseñanza, no sólo a nivel superior sino también básico. Estas indicaciones estaban influenciadas por el espíritu de las investigaciones científicas de la época, inclinadas preferentemente hacia el Análisis, las estructuras algebraicas, la Topología algebraica y por la introducción de métodos de razonamiento cada vez más complicados y abstractos para satisfacer las exigencias de rigor que se había planteado a partir de la crisis de los fundamentos de principios del siglo veinte.

Hubo en esta época varias conferencias internacionales donde matemáticos y profesores destacados perfilaban los métodos y procedimientos de la enseñanza; cabe aclarar que estos métodos estaban determinados a la luz de la Lógica y de la Matemática y en esas conferencias la discusión sobre las cuestiones psicológicas y pedagógicas involucradas en la enseñanza quedaban en segundo plano. A nivel regional, las reuniones más influyentes para nuestro país, como puntapié de la reforma, fueron la primera y segunda Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática de Bogotá (1961) y Lima (1966)[5] respectivamente. Resumidamente, enumeramos las siguientes cuestiones que surgieron en estos espacios internacionales de acuerdo y resultaron ser pautas de organización de la enseñanza de la disciplina:

1- Enseñar a los estudiantes a ordenar y encadenar sus pensamientos en forma deductiva en concordancia con el método de razonamiento que emplean los matemáticos.
2- Fomentar la facultad de abstraer y razonar sobre nociones abstractas.

[5] El objetivo central de las conferencias era de divulgar el nuevo enfoque universalista de la Matemática desarrollado alrededor de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas abstractas y la lógica matemática. También se pretendía lograr el compromiso de los delegados para que promovieran el cambio curricular en sus países. Los delegados de Argentina a dichas conferencias fueron el Dr. Luis Santaló y el Dr. Alberto González Domínguez (ver Ruiz & Barrantes)

3- No incluir en la enseñanza la cuestión de la historicidad de los conceptos para poder vincular más estrechamente la matemática escolar con la matemática contemporánea.
4- Dar unidad conceptual a la Matemática a través de las nociones de conjuntos, relaciones, funciones, estructuras algebraicas fundamentales como la de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial. Introducir las estructuras y técnicas algebraicas en el Álgebra y Geometría elementales.

Con estos principios la enseñanza de la Matemática iba dirigida a formar estudiantes con habilidades para operar con entes abstractos y a desarrollar competencias que los prepararan para continuar estudiando Matemática a nivel científico. Además, para aquellos sin intereses en seguir carreras afines, contribuía a fortalecer su formación en tanto el ejercicio del razonamiento matemático “desarrolla la claridad de espíritu y el rigor del juicio” (Dieudonné, 1971).

Sin embargo los acuerdos logrados y las reformas efectuadas no se materializaron en buenos aprendizajes. El paradigma de universalidad, de predominio de las estructuras algebraicas y del formalismo en la enseñanza de la Matemática, junto a la forma de ponderación de unos saberes matemáticos sobre otros, tuvo en la práctica, consecuencias no deseables, como por ejemplo:

1- Una excesiva insistencia en la manipulación simbólica y en el lenguaje lógico en detrimento de las ideas y de formas de pensamiento creativos, también propias del quehacer matemático, como la exploración, la analogía, la inducción, la heurística, etc. (por ejemplo: insistencia en la clasificación de relaciones: de orden, de equivalencia, a nivel de escuela media).
2- Reiteración de ciertos contenidos sin complejizarlos según el nivel escolar (por ejemplo: operaciones con conjuntos, producto cartesiano, relaciones, etc. vistos de la misma manera en distintos niveles de escolaridad)
3- La ponderación del aspecto formal de un concepto por sobre el operativo (por ejemplo el concepto de función dado por relaciones entre conjuntos en lugar de dado por correspondencia entre variables, la manipulación algebraica de cálculo con logaritmos haciendo uso de sus propiedades, la presentación de números complejos como par ordenados de números reales con ciertas operaciones que extienden la estructura de cuerpo de los reales sin estudiar suficientemente el papel de los números complejos como raíces de polinomios de coeficientes reales).
4- La pérdida de lo intuitivo, de la exploración racional del espacio físico y el consecuente empobrecimiento del estudio de la Geometría.

Otras consecuencias no deseables se ven en el plano psicológico si tenemos en cuenta que el paradigma antes mencionado ocasiona, cuando es extremado, una imagen distorsionada de ciencia acabada, irrefutable, estática, de difícil acceso, lejana de la cotidianidad, lo que ocasiona rechazo, fracaso y desinterés con respecto a su estudio por parte del estudiantado. Se ven también en el plano pedagógico en el aumento de las dificultades de aprendizaje, en la resistencia de algunos errores a ser superados, en la imposibilidad por recontextualizar temas aprendidos, etc. Por otro lado quienes logran entender los mecanismos, técnicas, teorías, tienen gusto por el formalismo y se animan a continuar una carrera afín, suelen tener dificultades cuando son estudiantes de nivel superior al abordar otros aspectos, como el de modelización y resolución de problemas. Tienen una imagen de teoría y práctica de la Matemática disociadas y una visión aplicacionista de los problemas.

Más allá de los defectos que uno pueda ahora aludir a la "revolución de las Matemáticas Modernas", hay una cuestión importante a destacar que es el compromiso y actuación de la comunidad matemática científica por decidir sobre los destinos de la Matemática a enseñar y la contundencia en la determinación de qué debía enseñarse de esta ciencia y el papel de la misma en la escolaridad.

2.2 Tendencias actuales

A partir de los años ochenta las publicaciones en Didáctica de la Matemática han adquirido protagonismo en lo que se refiere a delinear caminos en la Educación Matemática. Estos trabajos abordan cuestiones epistemológicas, metodológicas, cognitivas, socio-cognitivas por lo cual han logrado introducir distintos enfoques sobre qué es aprender y qué es enseñar Matemática y aquello que puede ser capital estable del aprendizaje de la Matemática en esta realidad cambiante e incierta del mundo actual.

La tendencia actual de la enseñanza de la Matemática, propiciada desde las investigaciones en Educación Matemática, es vincular el conocimiento del individuo que aprende con el conocimiento matemático científico, viendo a este último no sólo como un saber acabado y específico con incumbencias en campos técnicos y profesionales, sino también como un saber cultural, con características especiales, necesario para desarrollar las capacidades humanas y para mejorar la relación del hombre con su medio a través del poder interpretativo y representacional que la Matemática le brinda. Por eso es que han tenido auge en este último tiempo ideas tales como: la de "inculturación" (o enculturación) (de Guzmán, 1993), que se refiere a *"concebir la Educación Matemática como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático"* poniendo énfasis en los procesos inventivos y constructivos (intuitivos, empíricos, heurísticos) además de los procesos de formalización (simbolización, argumentación, deducción, demostración); la de *"educar al hombre informático"* (Santaló, 1990), que se refiere al desarrollo del intelecto humano en formas de pensamiento que hagan que se procese la información en forma ágil, creativa y no mecanicista para tomar decisiones conscientes y reflexionadas, en la forma más económica posible, luego de haber interpretado dicha información. Asimismo, en el ámbito de la investigación educativa, han surgido teorías como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), que enmarca la actividad matemática en el contexto de las actividades humanas que se dan según reglas, técnicas, especificidades de las instituciones y la Etnomatemática[6] que enmarca la producción matemática en relación a la tradición cultural (de acuerdo a grupos étnicos, a legados históricos, a los hábitos domésticos y a las formas informales, no escolarizadas, de aprender cuestiones matemáticas).

[6] A Ubiratán d'Ambrosio, matemático y educador brasileño, le corresponde haber popularizado esta corriente de investigación en los años ochenta.

2.2.1 *Los principales temas en el debate sobre la enseñanza*

Los principales asuntos relativos a la enseñanza que se han ido desarrollando desde los años ochenta, son: aprendizaje activo y procesos de pensamiento matemático, resolución de problemas, papel de las nuevas tecnologías de la información y de procesamiento de datos y la recuperación de la enseñanza de la Geometría.

Aprendizaje activo y resolución de problemas: El aprendizaje activo sobreentiende ponderar procesos de construcción por sobre los de transmisión-recepción para lograr desarrollar la autonomía en el aprendizaje, la capacidad crítica, la creatividad, entre otras cosas. Este tipo de aprendizaje se sustenta en las tareas que se desarrollan en el ámbito escolar, las cuales debieran, necesariamente, tender un puente entre las estructuras conceptuales básicas de la Matemática y el conocimiento de los alumnos. Las tareas deben ser gestionadas por el docente de modo de que el alumno se ubique en una situación en la que hay un asunto planteado en relación con el saber matemático. El alumno debe sentirse motivado para abordar ese asunto y comprometerse a dilucidarlo, comprenderlo, analizarlo, encontrar las relaciones no evidentes, manipular autónomamente ciertos objetos que él conoce para obtener más información sobre él. Formas para abordar la situación planteada son: explotar la analogía, hacer uso de elementos auxiliares, descomponer y recombinar, usar casos particulares para luego generalizar, trabajar hacia atrás, elegir estrategias y técnicas para aproximarse a su comprensión o resolución, evaluar la elección sea por ensayo o por anticipación de su aplicación, hallar y verificar resultados, defender los nuevos procedimientos elaborados por él, etc. Este conjunto de acciones es parte de lo que se llama "heurística". El asunto planteado (que puede estar basado en los procesos históricos de construcción de un concepto, en modelos, en juegos, en aplicaciones), y que da lugar al abordaje antes descrito, es un *problema* y la situación (con intervención de distintos aspectos: social, física, afectiva, temporal, etc.) generada a partir de él es la *situación problemática*. Coincidimos con Labarrere (citado en Nápoles Valdés, 2000) que un problema es una proposición o un cuestionamiento en los que se plantea un asunto, fuente de curiosidades, inquietudes, desafíos, en el cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona y que ésta debe develar. La "resolución de problemas" como marco para la enseñanza de la Matemática, y como marco de investigaciones en Didáctica, se inició a partir de los trabajos de Polya (1945, 1954, 1981). En un principio este marco hizo referencia a la enseñanza y aprendizaje de las competencias necesarias para abordar un problema haciendo hincapié en distintas formas de resolver, de evaluar y optimizar métodos y técnicas (estrategias), es decir en los procesos de pensamiento más que en los contenidos. Actualmente se incorporan variantes que también incluyen el tratamiento del contenido. Según Schoenfeld (1992), la resolución de problemas involucra aspectos afectivos, prácticos, cognitivos y metacognitivos. El aspecto afectivo tiene que ver con las creencias y valoraciones sobre la Matemática y los problemas, su dificultad, su utilidad, etc.; el práctico tiene que ver con las destrezas, técnicas y uso de instrumentos; el cognitivo tiene que ver con la memoria, su contenido y su estructura, los conocimientos previos y la forma en que éstos se conectan con los nuevos, las estrategias y los procedimientos heurísticos; el metacognitivo tiene que ver con la autorregulación, monitoreo y control.

Los problemas pueden tener diferente funcionalidad de acuerdo con los modelos de enseñanza en los que se utilizan (Charnay, 1994): como criterio de aprendizaje (modelo de enseñanza normativo), se basa en la reiteración y reutilización de esquemas ya enseñados reconociendo en el nuevo problema planteado la forma de resolución de un problema análogo ya realizado; como móvil de aprendizaje (modelo incitativo), en el que el problema tiene estrecha relación con los intereses del estudiante, depende de lo ocasional y disminuye la posibilidad de ejercer control sobre la coherencia de lo aprendido; como recurso de aprendizaje (modelo apropiativo) los problemas se eligen en función del saber que se quiere construir para que den lugar a situaciones de acción, formulación, validación por parte del alumno, en interacción con sus pares, y de institucionalización por parte del docente.

Nuevas tecnologías: Con respecto a una formación matemática que aproveche en forma creativa y crítica las nuevas tecnologías, Santaló (1990) sugiere las siguientes perspectivas de enseñanza con las cuales acordamos:

– *“Educar en el planteo de los problemas en programas calculables, sin demasiada preocupación por economizar el número de operaciones o la cantidad de parámetros”* (los programas calculables a los que se refiere son algoritmos que sean fáciles de programar para hacer cálculos).
– *“Es mejor ir aprendiendo las leyes del razonamiento de manera natural, como algo inherente al lenguaje. [...] Por ejemplo, las ideas de inducción, demostración por el absurdo, condición necesaria y suficiente o «si y sólo si» hay que aprenderlas con ejemplos referentes a casos concretos a medida que van apareciendo, sin pretender filosofar sobre su significado abstracto”.*
– Incluir en los ciclos de enseñanza los siguientes puntos: elementos de estadística y probabilidad, (*“elementos de la teoría de muestreo para poder entender las bases de las encuestas de opinión (...) y apreciar su grado de confiabilidad”*), elementos de teoría de grafos, teoría de juegos y programación lineal (*“puesto que la vida es un continuo de decisiones que cada uno debe tomar con frecuencia y que influyen o pueden influir en el futuro la escuela debe informar sobre la existencia de una teoría de la decisión”*).

Además de los softwares que se han desarrollado para la actividad matemática, técnica o científica, como el Mathematica, el Matlab o el Maple, existen softwares diseñados con propósitos educativos, como el Derive, Cabri, el Graphmatica, entre otros. En general todos estos paquetes favorecen la ejecución de los cálculos, la visualización de los objetos matemáticos y sus relaciones y ofrecen la posibilidad de la exploración abierta.

Así como la formación matemática contempla, como acabamos de mencionar, el uso de tecnologías, no debemos olvidarnos del aspecto formal de la Matemática.

Con respecto a este punto, consideramos que se debe ir incorporando paulatinamente, mediante actividades de clase cuidadosamente diseñadas que permitan conectar las formas iniciales de validación (intuitivas), con las formas más complejas, como la demostración matemática.

La recuperación de la Geometría como estudio de formas: En cuanto al lugar de la Geometría en el conocimiento escolar, Arendt (1997) alerta sobre la "desgeometrización" de lo cotidiano en una sociedad donde lo informático impone un predominio de lo numérico. Esta desaparición de la Geometría en lo cotidiano tiene su influencia en el aprendizaje y la enseñanza de la disciplina. Como contrapartida a este fenómeno, destaca la reaparición de la Geometría en formas más sofisticadas dentro de dominios más avanzados de la ciencia. La Geometría aparece como un campo esencial donde se construyen elementos que permiten la "inteligibilidad del mundo" y esto justifica que se defina, o redefina, su lugar en la enseñanza.

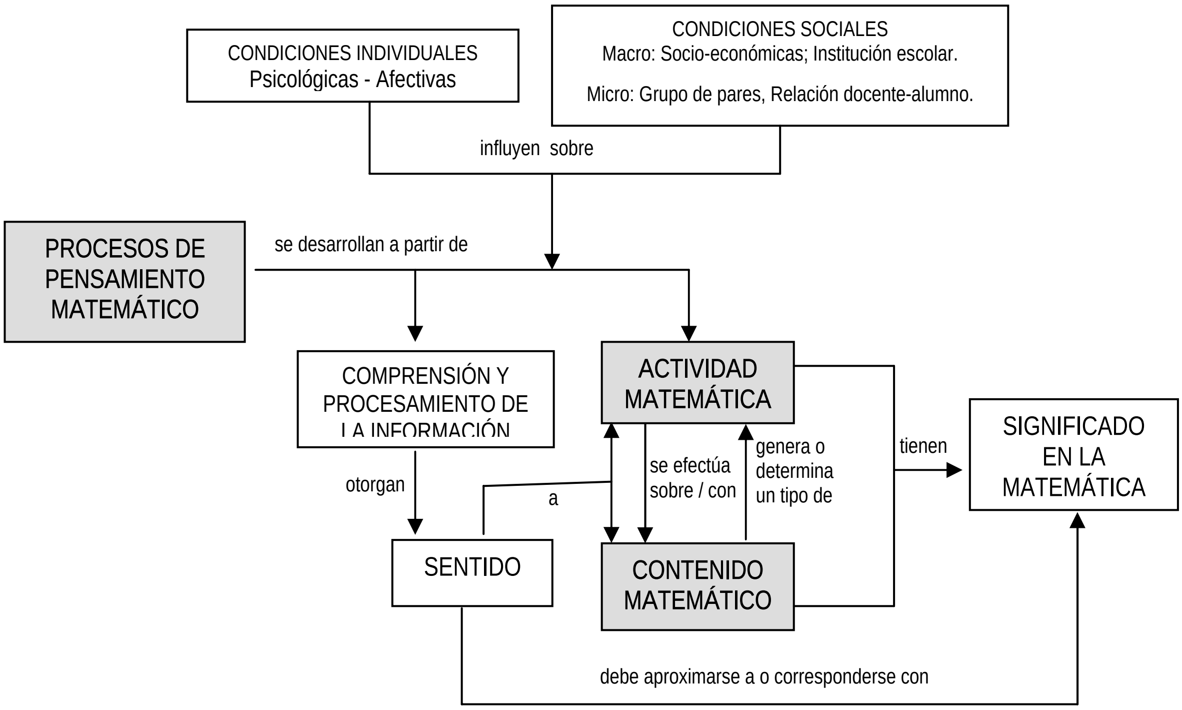
Barbin (2000) señala que el punto de partida de la enseñanza de la Geometría debería ser el estudio de las figuras y la formación de esquemas de razonamiento sobre la figura y la construcción: *"Hacer una construcción obliga a una puesta en orden [...] Este trabajo de la puesta en orden es esencial en el aprendizaje del razonamiento geométrico. Además, escribir las construcciones puede constituir para los alumnos, una primera etapa en la escritura de un texto ordenado y argumentado. Por otro lado, para construir una figura hace falta partir de las condiciones del problema y proceder por análisis remontándose a las figuras más simples a partir de las cuales ella puede ser obtenida*". Este punto de partida es compartido por Pluvinage y Rauscher (Capponi, 2000) para quienes habría que privilegiar una "Geometría construida o de tratamiento" en lugar de una "Geometría de figuras ideales" o una "Geometría de las estructuras". En esta Geometría construida se distinguen cinco etapas: a) identificar y representar los objetos y las propiedades geométricas, b) identificar los condicionantes de una situación geométrica, c) comprender los vínculos entre las propiedades, d) explicitar la distinción entre contenido y estatus de hipótesis y tesis de una proposición respecto a una situación geométrica, e) efectuar y redactar las demostraciones.

Para favorecer este tipo de aprendizaje han surgido programas de computadora (Cabri, Geometer Sketchpad o Cinderella) que fomentan un tipo de relación entre el aprendiz y la Geometría que explota la visualización, la exploración, la formulación de hipótesis, la construcción, la verificación computacional. Los conocimientos construidos a partir de estas actividades matemáticas sobre la base de estos soportes informáticos constituye lo que se llama Geometría Dinámica.

2.3 Consideraciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática

Frente a la pregunta qué significa aprender y qué significa enseñar Matemática podríamos encontrar tantas respuestas como enfoques didácticos (ver parte 2), psicológicos o pedagógicos haya. Hay acuerdos más o menos generalizados como por ejemplo que el aprendizaje no es consecuencia directa de la enseñanza y que se aprende Matemática desde "el hacer", sea éste entendido como practicar, ejercitar, resolver problemas, etc.

Desde nuestra concepción, el aprender Matemática involucra componentes básicos, que constituyen un eje central y específico, que son: los procesos de pensamiento matemático (PPM), la actividad matemática (AM), los contenidos y conceptos matemáticos (CM). En la parte 1 ya señalamos cuáles eran las características del pensamiento matemático. Con procesos de pensamiento matemático nos referimos a las formas de pensamiento que se van generando en situaciones de aprendizaje y que pueden ser intermedias o de características que se van aproximando a las ya indicadas. Por supuesto, el pensamiento del alumno no es directamente accesible al profesor sino a través de las manifestaciones simbólicas, del lenguaje matemático o no matemático, a través de los que el profesor infiere, interpretación mediante, cuáles son los logros y cuáles las falencias en la consolidación de este pensamiento matemático y evalúa para ese caso, qué información el alumno puede estar necesitando o qué actividad debería reforzar. El pensamiento se desarrolla a partir de la actividad matemática (ver parte 1 sección 1.2.1) y de la forma en que la información que vaya surgiendo de ella sea procesada y comprendida. La actividad matemática se efectúa sobre un contenido (o concepto) matemático o con él. La información es fruto de una interpretación de los datos que se van obteniendo en la realización de la actividad matemática, la cual a su vez permite un acercamiento intelectual al contenido. En dicha interpretación intervienen los conocimientos o esquemas conceptuales previos. En el procesamiento de la información y en las acciones para comprender intervienen los aspectos cognitivos, metacognitivos, afectivos y prácticos así como psicológicos y sociales. Luego de procesar la información y comprender el contenido y la actividad matemática, el alumno construye o da sentido a estos últimos. El sentido es el significado personal que un concepto o actividad tiene para un sujeto en tanto éste percibe, intelectualmente, su funcionalidad, de acuerdo a sus propios esquemas personales, y puede operar con el concepto o poner en práctica la actividad en forma consciente y acorde, desde su entendimiento, al contexto. El sentido es el que da "razón de ser" al concepto o la actividad para el sujeto y es el que permite cierta "direccionalidad intencionada" a la acción. Por otro lado el contenido matemático abordado y la actividad matemática realizada tienen un significado en la Matemática (instituida), de acuerdo a su funcionalidad (es decir qué puede hacerse con ese contenido), a cómo se relaciona con otras ramas del saber, de acuerdo a las teorías de la que forma parte, su utilidad, etc. El sentido de un contenido o concepto construido por el alumno y el significado matemático del mismo debieran ir acercándose. Cuando la información ha permitido seleccionar y realizar pautas de acción para recrear, reorganizar, modificar conocimientos previos de modo que posibilitan nuevas pautas de acción, organizadas y planificadas, es que surge un nuevo conocimiento. El conocimiento involucra entonces información, sentido y posibilidad de acción. El siguiente cuadro esquematiza lo expuesto:



De acuerdo a este esquema podríamos ahora decir que las tareas fundamentales al enseñar Matemática son: gestionar una propuesta pedagógico-didáctica capaz de poner en marcha el circuito de arriba, *"fomentando una actividad matemática viva, variada, dinámica, exploratoria en cuya práctica se desarrollen las capacidades de buscar soluciones en lugar de memorizar procedimientos, investigar modelos en lugar de memorizar fórmulas, formular conjeturas en vez de realizar simples ejercicios de aplicación"* (Fortuny & Azcárate,1994); acercar el sentido construido por el alumno al significado en la Matemática o fomentar el acercamiento entre ellos (acorde a la idea de "institucionalización" de Brousseau); supervisar que los sentidos que se construyan no contradigan los significados de la Matemática o no obstaculicen futuros vínculos entre sentido y significado (supervisión epistemológica) y proveer herramientas para que el alumno se haga consciente de sus formas de pensamiento (metacognición) y pueda así comunicarlas, y para la construcción de sistemas simbólicos o de representación variados (lógicos, gráficos, etc.) que faciliten al alumno la representación, lo más fielmente posible, de su pensamiento. En todas estas tareas fundamentales debe promoverse y regularse el aspecto social del aprendizaje, es decir deben fomentarse las interacciones entre pares y con el docente de una forma intencionada, como parte de la propuesta pedagógico - didáctica. Concebimos el aspecto social como una componente del aprendizaje que debe tenerse en cuenta como variable que el docente debe regular.

Hay cuestiones de la enseñanza que podrían provocar un "corto-circuito" en este esquema como son: a) que el alumno no logre dar sentido a la actividad matemática o al contenido, b) que el profesor desconozca el significado del contenido y de la actividad en la Matemática y por lo tanto no pueda acercar sentido a significado, c) que se haga demasiado hincapié en una de las componentes centrales (PPM, AM o CM) en detrimento de las otras.

A modo de cierre.

Hemos intentado tomar posición sobre las cuestiones que identificamos como centrales a la hora de encarar la enseñanza de la Matemática. Así mencionamos, entre otras cosas, la importancia, a la hora de realizar prácticas educativas, de: tener en cuenta el quehacer matemático científico, pensar la enseñanza desde la actividad matemática que puede generarse con la propuesta, disponer de diversos enfoques didácticos, etc.

Más explícitamente, sostenemos que entre la Matemática científica y la Matemática escolar se comparta el quehacer matemático más que el formalismo y rigurosidad que se encuentra en la Matemática comunicada entre científicos. En cuanto a la formación en Didáctica de la Matemática para futuros docentes, sostenemos que ésta debe ser amplia, no limitándose a una única corriente. Mencionamos también la importancia de que los futuros docentes sean formados en investigación en Didáctica de la Matemática.

Siguiendo el desarrollo realizado en cada uno de estos aspectos, consideramos que este documento podría ser un instrumento que brinda herramientas que podrían utilizarse para analizar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en diversas instituciones educativas, así como también abre una serie de direcciones para seguir pensando y definiendo líneas de acción referidas a la enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles de enseñanza.

Bibliografía.

- Arcavi, (2000); Problem-driven research in mathematics education, Journal of Mathematical Behaviour, 19, pp. 141-173.
- Arendt, H. (1997); Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géometrie. Repères – IREM, 26.
- Astolfi, J-P (2002); Aprender en la escuela, Edit. Océano.
- Barbin,E. (2000); Construire la Géometrie Élementaire. Repères–IREM, 40. pp. 5-9.
- Bishop, A. (2000); Enseñanza de las matemáticas. ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos?. Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Ed. GRAO.
- Bkouche, R. La démonstration: du réalisme au formalisme. Archivo html en casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf.
- Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (1994); Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Brousseau, G. (2000); Les propriétés didactiques de la géometrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie. Actes du Séminaire de Didactiques des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Créte.

- Capponi, B. (2000); De la Géometrie de traitement aux constructions dans CABRI-GEOMETRE II au college. Repères – IREM, 40. pp. 11-42.
- Charnay, R. (1994); Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard, Y. Bosch, M., Gascon, (1997); J. Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de educación. Para profesores, padres y alumnos. Vol. 22, España., Horsori, Institut de Ciences de l´Educació, Universidad de Barcelona.
- De Guzmán, M. (1984); Panorama de la Matemática. Avances del Saber. Tomo 5. Ed. Labor.
- De Guzmán, M. (1993); Enseñanza de la Matemática. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones. Ed. Popular- OEI- Madrid.
- Díaz, E. (editora) (1997); Metodología de las Ciencias Socales. Editorial Biblos. Buenos Aires.
- J. Dieudonné (1971); La abstracción en Matemáticas y la Evolución del Álgebra. La Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Aguilar. Madrid.
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (1999); Marco General, Nivel Inicial: (Tomo I: Estructura General, Fundamentación y Propósitos de las Áreas, Expectativas de Logros, Tomo II: Organización de Contenidos) y Superior (Tomo I: Estructura General, Profesorado Inicial, Profesorado EGB, Tomo II: Profesorado de Matemática)
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Programa para la definición del Diseño Curricular del Nivel Polimodal. Documento base.
- Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnicos Profesionales. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Propuestas para la enseñanza de matemática en el 3er Año del nivel polimodal. Documento de apoyo Nº 1.
- Ernest, P. (1996); The nature of mathematics and teaching. Philosophy of Mathematics Education. Newsletter 9.
- Font, V. (2002); Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas. Revista EMA Vol. 7, Nº 2. Una empresa docente.
- Fortuny , J., Azcárate,C. (1994); Parte II: Enseñanza de la Matemática. Formación del profesorado de las Ciencias y la Matemática. Tendencias y experiencias innovadoras. Gil, D. Pessoa,A., Fortuny,J., Azcárate,C. Editorial Popular.
- Gascón, J. (1998); Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Krichesky, Rodríguez, Petrucci, Guindi, de Amézola, Cerletti, “Las condiciones y posibilidades del “pasaje” de saberes y prácticas especializados: el caso particular de la formación de docentes”. Ponencia presentada en las Jornadas de Docencia de la UNGS, 2004.
- Nápoles Valdés, J., Cruz Ramírez, M. (2000); La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones., Función Continua, Nro. 8. Bs. As.
- Polya, G. (1945; 2nd edition, 1957); How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

- Polya, G. (1954); Mathematics and plausible reasoning (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; (Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962,1965/1981); Mathematical Discovery (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: Princeton University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.
- Ruiz, A., Barrantes, H. (1998); La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Academia Colombiana de Ciencias. Disponible en http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/indice.htm
- Santaló, L. (1990); Matemática para no matemáticos. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España.
- Santaló, L. (1994); Enfoques: hacia una didáctica humanista de la Matemática. Ed. Troquel. Bs. As.
- Schoenfeld, A. (1992); Learning to think mathematically. Problem Solving, Metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.) New York: Mac Millan. (disponible en formato html)

Marcela C. Falsetti es Doctora en Matemática y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
mfalse@ungs.edu.ar

Mabel A. Rodríguez es Doctora en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática en la Universidad de General Sarmiento ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
mrodri@ungs.edu.ar

Gustavo F. Carnelli es Licenciado en Enseñanza de las Ciencias, orientación Matemática. Realiza el Doctorado en Educación y dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
gcarnell@ungs.edu.ar

Francisco A. Formica es Licenciado en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
aformica@ungs.edu.ar