Marzo de 2007, Número 9, páginas 187-201
ISSN: 1815-0640

Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato

Silvia Mayén, Belén Cobo, Carmen Batanero y Patricia Balderas

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de respuestas a un cuestionario que evalúa la comprensión de diferentes elementos del significado de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos al finalizar la educación secundaria. Nuestros resultados indican dificultades compartidas con los de un estudio anterior realizado en estudiantes españoles de menor edad y sugieren la necesidad de enriquecer la enseñanza con tareas más próximas a la vida cotidiana del estudiante, incrementando así su cultura estadística.

Abstract

In this paper we present a study of Mexican students' answers. The test involved was built to evaluate the student's understanding of central tendency measures at the end of secondary school. Our results depicted difficulties that were common to younger Spanish students and suggested the need to look for a teaching improvement based on situations that are closer to students' surrounds and that increase their statistics culture.

Introducción

Recientemente (Cobo, 2003; Batanero, Cobo y Díaz 2003) se ha elaborado un cuestionario de evaluación de la comprensión de los promedios, que tiene en cuenta el contenido global de este tema, según se recoge del análisis del currículo español en la Educación Secundaria Obligatoria, así como del contenido de los libros de texto usados por los estudiantes y como marco teórico, el desarrollado por Godino (2002). En estos trabajos previos se describieron, así mismo, las principales dificultades encontradas respecto a dichos conceptos en el contexto español.

Las medidas de posición central han suscitado gran interés dentro de la investigación en educación estadística, como puede constatarse en las investigaciones que resumimos en la segunda sección y que describen errores y dificultades en estudiantes de diversas edades, incluso en alumnos universitarios. Estas investigaciones, sin embargo, han tocado puntos aislados de su comprensión y los instrumentos de evaluación empleados no se basan en un análisis de la enseñanza recibida por los estudiantes participantes en las mismas.

En este trabajo utilizamos una parte del cuestionario citado, para realizar un estudio de la comprensión de los promedios en estudiantes mexicanos de Bachillerato (17-18 años). Esta parte del cuestionario, que se incluye en este artículo como anexo, se eligió, una vez analizado el currículo mexicano y observados los contenidos coincidentes con el currículo español, en cuanto al tratamiento de los promedios, aunque el estudio de Cobo (2003), se llevó a cabo con estudiantes de menor edad (15-16 años). El propósito de este trabajo es continuar nuestras investigaciones previas y comprobar si las dificultades detectadas en el contexto español son específicas o bien compartidas por estudiantes de edades próximas, pero en un contexto educativo diferente. Este sería el primer paso para plantear propuestas didácticas que permitan superar las dificultades encontradas.

En lo que sigue analizamos cada ítem del cuestionario y presentamos la proporción de estudiantes que responde correctamente cada ítem. Comparamos también con los resultados españoles, teniendo en cuenta la menor edad de aquellos estudiantes. La comparación es posible, puesto que se siguió un criterio común de corrección de las respuestas.

Para fundamentar el trabajo describimos en primer lugar las investigaciones previas.

Investigaciones previas

A pesar de ser uno de los conceptos estadísticos básicos, los promedios no son siempre bien comprendidos por los estudiantes de educación secundaria o incluso los universitarios. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que muchos estudiantes no identifican las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada. Esta situación se produce en particular, al calcular una media a partir de datos agrupados en intervalos (Li y Shen, 1992; Gattuso y Mary, 1996, Carvalho,1998).

Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos saben invertir el procedimiento, esto es, determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Mevarech (1983) sugiere que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética satisface los axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Reading y Pegg (1996), estudiaron la forma en que los alumnos de 12-18 años reducen los conjuntos de datos, observando que algunos eran capaces de dar un resumen de datos presentados en forma numérica, pero fracasaron en la tarea, cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico estadístico.

Watson y Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes de 11 a 15 años al término "promedio" y hallaron que un gran número consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Esta idea es correcta si la distribución es simétrica, pero si no lo es, solo se cumple para la mediana. En su estudio, tratan de analizar el desarrollo evolutivo del concepto e indican también que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, sólo la entienden los estudiantes de cursos avanzados. Otros autores como Tormo (1993) y Mary y Gattuso (2005) analizan si los estudiantes tienen en cuenta el efecto de un valor cero sobre la media. Todos estos trabajos se centran en el análisis de algoritmos de cálculo o propiedades aisladas. En nuestro estudio previo (Cobo, 2003; Batanero, Cobo y Díaz, 2004) y en el que ahora planteamos, tratamos de realizar una evaluación conjunta de la comprensión de todas las medidas de tendencia central por los estudiantes, para lo cual hemos seleccionado el cuestionario que se describe a continuación.

Descripción del cuestionario

El cuestionario está orientado a la evaluación del significado que los estudiantes mexicanos y españoles asignan a las medidas de tendencia central. Es parte del construido por Cobo (2003), quien lo utilizó también con estudiantes más jóvenes. En su construcción, utilizó el marco teórico desarrollado por Godino (2002), quien considera los siguientes tipos de componentes en el significado de un concepto (en este caso las medidas de posición central):

1. Reconocimiento de los problemas que se resuelven mediante promedios.
2. Comprensión de las definiciones de media, mediana y moda.
3. Comprensión de sus propiedades básicas, tanto numéricas, como algebraicas y estadísticas.
4. Reconocimiento del lenguaje matemático, que puede ser numérico, verbal, simbólico y gráfico.
5. Capacidad de cálculo y comprensión de los procedimientos de cálculo frente a su aplicación automática.
6. Capacidad de argumentación de los alumnos para apoyar sus respuestas y observar hasta qué punto son completas y consistentes.

Estos elementos se han considerado, tanto en la construcción del cuestionario, como en la interpretación de las respuestas de los alumnos. En este trabajo en particular no tendremos en cuenta el punto 6 (tipos de argumentos), que se dejará para un análisis posterior, y respecto al punto 4 (lenguaje matemático) los ítems están todos dados en formato verbal y numérico excepto el 9 que usa el formato gráfico. Todos los ítems del cuestionario son de respuesta abierta, con el fin de recoger con detalle los razonamientos de los estudiantes y han sido adaptados de diferentes investigaciones.

A continuación analizamos los ítems propuestos:

Ítem 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en México es 2.2 hijos por familia.

a. Explica qué significa para ti esta frase.
b. Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Este ítem fue tomado de Watson (2000). Recoge dos campos de problemas asociados con la media (efectuar un reparto equitativo en una distribución de datos); y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población. Para resolverlo, el alumno podría usar las definiciones de media (dada por el algoritmo) y moda (como valor más frecuente), y las siguientes propiedades: numéricas "la media es un valor perteneciente al rango de la variable", "la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos"; algebraicas: "el cálculo de la media no es operación interna" y estadísticas: "la media o la moda son representantes del conjunto de datos". Como elemento de cálculo se requiere buscar una distribución de datos que se ajuste a una media dada, lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro y saber aplicarlo a la inversa.

Ítem 2. María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?
b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

En este ítem tomado de Watson (2000) se requiere el cálculo de la media ponderada. Este ítem nos permite también averiguar si reconocen la siguiente propiedad: "la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas" y "la media no es asociativa".

Ítem 3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos.

¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

En este ítem, tomado de Tormo (1993) se trata de interpretar la media como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme. Han de usar la definición de media, dada por su algoritmo. En este problema se puede observar si los estudiantes tienen conocimiento sobre la propiedad: "la suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula" y "media como centro de gravedad de los datos".

Ítem 4. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Tomado también de Tormo (1993), plantea un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Requiere conocer dicho algoritmo y saberlo invertir para el caso de datos aislados. No se dan dichos datos, sino la media, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Incluye las propiedades de la media, de: "ser un valor perteneciente al rango de la variable" y "ser el centro de gravedad de la distribución".

Ítem 5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?
c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Con este ítem se pretende medir la comprensión de la definición y algoritmo de cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar, así como si los estudiantes comprenden adecuadamente el efecto de valores atípicos sobre dicho valor. Se presenta la mediana como promedio más adecuado para una distribución en la que, debido a la presencia de un valor atípico, la media no es demasiado representativa.

Este ítem contempla las siguientes propiedades: en el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no y la media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar y la media es menos resistente que la mediana.

Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores.

Ítem 6. Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Este ítem tomado de Godino (1999), se centra en la mediana y su relación con las otras medidas de tendencia. Los datos corresponden a una variable ordinal, que no admite el cálculo de la media, por lo que los únicos parámetros de centralización que se pueden usar como resumen de los datos son la mediana y la moda. Contiene las siguientes propiedades: para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta los valores numéricos de los datos, sólo su posición una vez ordenados (numérica); la mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la media no existe en este caso (algebraica); y los promedios son representantes de un colectivo (estadística).

Ítem 7. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

a. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?
b. Lucía __________ Juan __________ Pablo __________
c. ¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados.
d. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Está tomado de Gattuso (1996) y está orientado a encontrar una distribución para una media dada; incluye elementos de cálculo de la media para variable discreta con datos aislados. En la segunda parte del problema, se pretende valorar si los estudiantes conocen la propiedad de que en la media se han de considerar todos los valores de los datos, incluyendo el cero. Contiene las siguientes propiedades: en el cálculo de la media intervienen todos los valores, la media cambia cuando cambia algún dato y el cálculo de la media, como operación algebraica, es conmutativa y no tiene elemento neutro.

Ítem 8. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación:

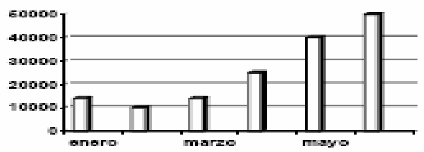
6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Corresponde al problema de encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones y en presencia de errores, cuya solución es la media. Tomado de Garfiel y Konold (1992). Aunque la respuesta esperada es la media, los alumnos podrían optar por la mediana o la moda, por lo tanto, este ítem incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas, en el caso de una variable discreta con datos aislados. Puesto que hay un valor atípico, esperamos que los alumnos lo detecten y lo eliminen si optan por calcular la media, aunque su eliminación no es requerida si optan por usar la mediana o moda.

Contiene también las siguientes propiedades: la media y la mediana pueden ser diferentes a todos los valores de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos, la media cambia al cambiar algún dato, el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es, los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo y la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero.

Ítem 9. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



a. Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
b. Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Se centra en la estimación directa de la media y mediana a partir de un gráfico, y ha sido tomado de Zawojeswki (1986). La dificultad que se presenta está en la lectura del gráfico. Este es el único ítem que usa esta representación, mientras que los restantes sólo usan representaciones numéricas y verbales. El ítem tiene dos propiedades: la mediana y media pueden no coincidir con los datos y el cálculo de la media y el de la mediana no son operaciones internas.

En la Tabla 1 se resume el contenido evaluado en cada ítem respecto a los tipos de elementos en el significado de un concepto.

Tabla 1. Contenido evaluado por ítem

	Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Definición	Media como algoritmo	×	×		×	×		×	×	
	Mediana, valor central					×	×		×	
	Mediana, dos partes					×	×			×
	Moda, valor más frecuente	×				×	×		×	
Propiedades	El Valor se encuentra en el rango	×			×					
	Puede no coincidir con los datos	×							×	
	Intervienen todos los valores y cambia con un dato					×	×	×	×	
	Operación interna (es / no es)	×							×	
	No tiene elemento neutro								×	
	No es asociativa		×							
	Media de la suma de variables		×							
	Representantes de un colectivo	×				×	×		×	
	Media, centro de gravedad			×	×					
	Posición en distribuciones simétricas					×				
	Media poco resistente					×				
	Suma desviaciones a la media			×	×				×	
	Definidas según tipo de variable						×			
Campos de problemas	Buscar la mejor estimación								×	
	Hacer un reparto equitativo	×		×						
	Encontrar el valor probable	×						×		
	Buscar un representante de datos ordinales					×	×			
	Buscar un representante de datos cualitativos						×			
Algoritmos y procedimientos	Cálculo media datos aislados	×			×	×		×	×	
	Cálculo media ponderada		×							×
	Cálculo gráfico media									×
	Invertir algoritmo media	×	×		×			×		
	Buscar distribución dada la media	×			×			×		
	Cálculo mediana datos aislados (núm. impar)					×	×			
	Cálculo mediana datos aislados (número par)					×			×	
	Cálculo gráfico mediana, datos agrupados									×
	Cálculo gráfico mediana									×
	Cálculo moda, datos aislados						×		×	

Resultados y discusión

La muestra estuvo formada por 125 estudiantes mexicanos de 17 y18 años; de siete centros de enseñanza, todos ellos públicos y del último curso de Bachillerato. En el estudio de Cobo (2003), que usaremos como comparación, los estudiantes tenían 15 y 16 años y cursaban el último año de Educación Secundaria Obligatoria.

Sería, por tanto, de esperar unos mejores resultados por parte de los estudiantes mexicanos, considerando también que el tramo de enseñanza ya no es obligatorio.

Los dos cuestionarios fueron aplicados en situaciones similares en cuanto a las instrucciones dadas por el profesor que aplicó el cuestionario: pasarlo en una de las horas de clase de matemáticas, haber estudiado el tema previamente, motivación e interés de los alumnos mexicanos y españoles.

En la Tabla 2 presentamos, para cada ítem la proporción de respuestas correctas (índices de dificultad, según Muñiz,1994), cuanto mayor es este valor significa que el ítem es más fácil de resolver para los alumnos.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas totalmente correctas y desviación típica

	Estudiantes mexicanos (N = 125)		Estudiantes españoles (N = 144)	
Ítem	% Correcto	Desviación típica	% Correcto	Desviación típica
1-1	,56	,50	,69	,46
1-2	,66	,48	,37	,48
2-1	,36	,48	,34	,48
2-2	,21	,41	,38	,49
3	,54	,50	,49	,50
4	,73	,44	,66	,48
5-1	,48	,50	,38	,49
5-2	,23	,42	,32	,47
5-3	,20	,40	,33	,47
6-1	,50	,50	,13	,33
6-2	,22	,41	,04	,20
7-1	,74	,44	,67	,47
7-2	,50	,50	,68	,47
7-3	,67	,48	,61	,49
8	,86	,34	,67	,47
9-1	,35	,48	,67	,47
9-2	,17	,38	,26	,44

Entre los estudiantes mexicanos, este índice fluctúa entre 0.17 en el ítem 9.2 (cálculo de la mediana a partir de un gráfico) y 0.86 en el ítem 8 (estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores). Por parte de los estudiantes españoles, este índice osciló entre un 0.04 de respuestas correctas en el ítem 6.2 (elegir un promedio adecuado en un conjunto de datos ordinales) y 0.69 en el ítem 1.1 (hallar una distribución de datos, dada la media).

Algunos ítems difíciles de resolver para ambos grupos fueron los siguientes:

- Ítem 9.2 (0,17-0,26), donde se ha de estimar la mediana a partir de un gráfico. La dificultad proviene del hecho de que los datos están agrupados y los estudiantes o bien no tienen en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana, obteniendo el punto medio de los valores de la variable o bien no dan respuesta.
- Ítem 2.2. (0,21-0,38), con el que se espera que los estudiantes sean capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma, aunque la dificultad no está en este punto, sino en el cálculo de la media ponderada que los alumnos han de realizar previamente.
- Ítem 5.2 (0,23-0,32), calcular la mediana con un número par de valores aislados; en unos casos los alumnos no ordenan los datos al calcular la mediana; en otros, no saben resolver la indeterminación producida al haber dos datos centrales.
- Ítem 5.3 (0,20-0,33), efecto de los valores atípicos; no todos los estudiantes son conscientes que se debe eliminar este valor al calcular la media o bien tomar la mediana como promedio más adecuado, al ser insensible a los valores atípicos.
- Ítem 2.1 (0,36-0,34), cálculo de la media ponderada, ya que los estudiantes no tienen en cuenta la ponderación, por lo que coincidimos en este punto con las investigaciones de Pollatsek, Lima y Well (1981).

Por otro lado, resultaron sencillos para los dos grupos los siguientes ítems:

- Ítem 8 (0,86-0,67), idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. Esta es una idea estadística muy potente, pues es base de los métodos de estimación; los resultados sugieren que es intuitiva para los alumnos.
- Ítem 7.1 (0,74-0,67) y 7.2 (0,50-0,68), encontrar una distribución de valores conocida sólo la media y reconocer si la solución es o no única. Este fue el ítem más sencillo, lo que contradice los resultados de otras investigaciones como las de Cai (1995), quien considera esta tarea difícil, aunque sus estudiantes eran de menor edad.
- Ítem 4 (0,73-0,66), similar al anterior, y también conocimiento del algoritmo de la media y que el valor de ésta ha de estar comprendida en el rango de valores de datos.

- Ítem 7.3 (0,67-0,61), efecto del cero sobre el valor de la media; este efecto fue reconocido por los estudiantes, en contradicción con los resultados de Mevarech (1983) quien considera ésta una propiedad difícil.
- Ítem 1.1. (0,56-0,69), idea de media como un reparto equitativo en una distribución de datos y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población, estos dos tipos de problemas fueron especialmente sencillos para los estudiantes.
- Ítem 3 (0,54-0,49), la suma de desviaciones respecto a la media ha de ser igual a cero, esto es, las desviaciones por encima se compensan con las desviaciones por debajo de la media.

Observamos las principales diferencias entre estos grupos de estudiantes en los ítems 9.1(0,35-0,67), cálculo de la media a partir de un gráfico; 1.2 (0,66-0,37), dar una justificación de por qué se construye una distribución dada la media; 5.1 (0,48-0,38), encontrar la mediana con un número impar de valores.

También se produce una clara diferencia en el ítem 6.1 (0,5-0,13) y 6.2 (0,22-0,04), donde se debe usar la mediana como resumen estadístico de unas variables ordinales. Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes mexicanos transforman las variables en escala de razón, asignando un valor numérico a las diferentes categorías (insuficiente, aprobado, etc.). El problema es que aunque la transformación conserva el orden, no conserva la escala y se llega a un resultado incorrecto. En este ítem, nosotros, a diferencia de Cobo (2003), hemos considerado también como correctas las respuestas en que los alumnos comparan los grupos a través de la media, siempre que ésta se haya calculado correctamente y se llegue a un resultado consistente con la estrategia, mientras que Cobo (2003), sólo consideró correcto si los estudiantes usaron la mediana o la moda para comparar los grupos. De ahí la diferencia obtenida en los porcentajes. En todo caso son pocos los que siguen esta estrategia y la mayoría, ni siquiera usa un promedio para comparar los grupos, sino simplemente compara uno de los valores de la variable; de ello que disminuya el número de respuestas correctas en la segunda parte del ítem. Usan así sólo una parte de los datos en la comparación, estrategia que Estepa (1993) llamó “concepción local” en su estudio sobre la asociación.

En cuanto a las desviaciones típicas, en general se agrupan alrededor de 0,50, lo que no supone una variabilidad muy elevada, es decir, los grupos son homogéneos respecto a los tipos de dificultades encontradas por los alumnos, especialmente en los ítems de alta dificultad.

Son en realidad pocas las diferencias observadas, y no siempre mejoran los estudiantes mexicanos, que tienen mayor edad. Ello sugiere la necesidad de dar mayor importancia a la enseñanza de los promedios, incluso en el tramo de Bachillerato, para preparar debidamente a los estudiantes para su ingreso a la Universidad.

Principales dificultades observadas

Para resumir, presentamos a continuación las principales dificultades encontradas respecto a la comprensión de elementos de significado, que se dedujeron del análisis cualitativo de las respuestas, aunque aquí no la incluimos con detalle, así como de los porcentajes de fallos en los ítems y del significado evaluado por éstos.

- *Problemas.* Fue difícil para los dos grupos reconocer la mediana como mejor promedio de datos ordinales, pues se producen muchos fallos en el ítem 6 y los estudiantes que lo resuelven usan preferentemente la media y no la mediana. Por el contrario, los estudiantes reconocen los problemas de estimar una cantidad desconocida (ítem 8) y efectuar un reparto equitativo (ítems 1 y 7) como asociados a la media aritmética.
- *Representaciones.* El único problema se presenta con las gráficas en ambos grupos, donde se producen mayor número de errores en la pregunta 9; ya que los estudiantes no tuvieron ningún problema con los términos o símbolos relacionados con los promedios.
- *Algoritmos.* Los estudiantes calculan con facilidad medias simples en casi todos los problemas y entienden el algoritmo de cálculo de promedios, el cual invierten correctamente para encontrar una distribución con media dada (ítem 1). Lo más difícil en ambos grupos fue el cálculo de medias ponderadas (ítem 2) y el cálculo de la mediana a partir de un gráfico (ítem 9). También tienen dificultad en resolver la indeterminación cuando el número de datos al calcular la mediana es par (ítem 5).
- *Definiciones.* La definición que causa más dificultad es la de la mediana (ítem 5, 6), pero también la de media cuando se ha de usar la ponderación (ítem 2).
- *Propiedades.* Los estudiantes tienen dificultad en reconocer que la media es poco resistente cuando hay valores atípicos y que intervienen todos los valores en su cálculo. Reconocen que el valor de la media está comprendido en el rango de variación de la variable, el efecto del cero sobre su valor y que la suma de desviaciones por encima y debajo de la media se compensa.

Conclusiones e implicaciones para la enseñanza

Los resultados son razonablemente satisfactorios, pues los alumnos reconocen intuitivamente tanto los campos de problemas como las propiedades de la media y son capaces de realizar correctamente el algoritmo, incluso invertirlo, si no aparece la ponderación. Sin embargo, aparecen todavía errores y dificultades, algunas muy frecuentes, así como gran variación en los índices de dificultad.

La semejanza de algunos resultados con los obtenidos por Cobo (2003), con alumnos de menor edad sugiere que las dificultades del estudiante para responder cuestiones sobre la media no son especificas de ninguno de los dos sistemas educativos, sino son compartidas por estudiantes mexicanos y españoles y en el caso de los mexicanos, se mantiene con la edad. Ello llama la atención sobre la posible mejora de la enseñanza.

Hacemos notar el carácter no convencional de las tareas propuestas, respecto a las que son habituales en los libros de texto (Cobo y Batanero, 2004b); pero sin embargo son más próximas a las situaciones en las que los estudiantes han de interpretar y trabajar con los promedios en su vida diaria y profesional. Una primera consecuencia para el diseño de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje es tratar de acercarlos a este tipo de situaciones, bases de la cultura estadística, según Gal (2002).

Estos resultados, no obstante, son aún provisionales, puesto que el estudio mostrado es principalmente cuantitativo. En la actualidad hemos iniciado el estudio cualitativo de las respuestas de los estudiantes mexicanos para identificar la existencia de conflictos semióticos para dilucidar sobre la hipótesis planteada por Cobo (2003), quien asume que la dificultad de las tareas sobre promedios se puede explicar por la complejidad semiótica de las mismas y la existencia de conflictos semióticos en los estudiantes durante el proceso de resolución de los problemas.

Bibliografía

- C. Batanero, B. Cobo, y C. Díaz (2003): “Assessing secondary school students' understanding of averages”. Proceedings of CERME III. Bellaria, Italia. On line: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG5/TG5_batanero_cerme3.pdf
- J. Cai (1995): “Beyond the computational algorithm. Students' unsderstanding of the arithmetic average concept”. En L. Meira (Ed.). Proceedings of the 19th PME Conference (v.3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.
- C. Carvalho (1998): “Tarefas estadísticas e estratégias de resposta”. Comunicación presentada en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Castelo de Vide, Portugal.
- C. Carvalho (2001): “Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade”. Tesis doctoral. Universidad de Lisboa.
- B. Cobo (2003): “Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria”. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- B. Cobo y C. Batanero (2000): “La mediana ¿Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria?”. UNO, 23, 85-96.
- B. Cobo y C. Batanero (2004a): “Razonamientos aritméticos en problemas de promedios”. SUMA, 45, 79-86.
- B. Cobo y C. Batanero (2004b). “Significados de la media en los libros de texto de secundaria”. Enseñanza de las ciencias, 22(1), 5-18.
- A. Estepa, C. Batanero y F. T. Sánchez (1999): “Judgments of association in the comparison of two samples: students' intuitive strategies and preconceptions”. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 7, 17-30.

- I. Gal (2002): "Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities". International Statistical Review, 70(1), 1-25.
- L. Gattuso y C. Mary (1996): "Development of concepts of the arithmetic average from high school to University". Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.
- J. D. Godino (2002): "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.
- J. D. Godino y C. Batanero (1997): "Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education". En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- D. Li y S. M. Shen (1992): "Students'weaknesses in statistical projects". Teaching Statistics, 14 (1), 2-8.
- C. Mary y L. Gattuso (2005): "Trois Problèmes Semblables de Moyenne pas si Semblances que Ca! l'Influence de la Structure d'un Problème sur les Réponses des Élèves". Statistics Education Research Journal, 4(2). On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2).pdf
- Z. R. Mevarech (1983): "A deep structure model of students'statistical misconceptions". Educational Studies in Mathematics, 14, 415-429.
- Pollatsek, S. Lima, y A. D. Well (1981): "Concept or Computation: Students'understanding of the mean". Educational Studies in Mathematics, 12, 191-204
- C. Reading (2002): "Profiles for statistics understanding". En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics. Cape Town: IASE. CD ROM.
- C. Reading y J. Pegg (1996): "Exploring understanding of data reduction". En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.
- R. Strauss y E. Bichler (1988): "The development of children's concepts of the arithmetic average". Journal for Research in Mathematics Education, 19 (1), 64-80.
- C. Tormo (1993): "Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años". Trabajo de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.
- J. M. Watson y J. B. Moritz (2000): "The longitudinal development of understanding of average". Mathematical Thinking and Learning, v1 (2/3), 11-50.
- J. Zawojewski (1986). " The teaching and learning proceses of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency. Tesis doctoral. Universidad Northwestern, Evenston, Illinois.

Patricia Balderas, Licenciada en Matemáticas, tiene Maestría en Educación en Matemáticas y Doctorado en Pedagogía (enseñanza y aprendizaje de matemáticas) por la Universidad Nacional Autónoma de México. Es profesora de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional Autónoma de México. Realiza una Estancia Sabática en la Universidad de Granada con financiación de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha dirigido proyectos de investigación en educación matemática financiados por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. Es miembro del Comité Editorial de la Revista Educación Matemática. Ha publicado libros para la enseñanza de precálculo y cálculo; así como artículos de investigación en educación matemática. Fue miembro del comité organizador del Tercero y Quinto Simposios Internacionales en Educación Matemática “Elfriede Wenzelburger” celebrados en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Carmen Batanero, Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada.
Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

Belén Cobo, Licenciada en Ciencias (Matemáticas) y Doctora en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de Granada, España. Profesora de educación secundaria en el Instituto Los Neveros, Huétor Vega, Granada. Colabora con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, formando parte de la Junta Directiva Provincial. Tiene experiencia en organización de cursos para el profesorado, Jornadas de Investigación y Olimpiadas Matemáticas. Coautora del proyecto editorial “Construir las Matemáticas” (Editorial Proyecto Sur) y autora de diversas publicaciones relacionadas con la Educación Matemática. Ha participado en la impartición de diversos cursos para Centros de Profesorado.

Silvia Mayén, Licenciada en Economía (Métodos Cuantitativos y Modelos Econométricos) y Diplomada en Programación Neurolingüística y Educación, por el Instituto Politécnico Nacional, México. Profesora. del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos “Miguel Othón de Mendizábal” en el Instituto Politécnico Nacional de México. Realiza sus estudios de Doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Ha sido Analista Especializada en la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas y Jefa del Departamento de Enlace Institucional del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.