UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 261-264
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

¿Cuál es el mayor valor que puede tener una función real, de dos variables reales, considerando valores de éstas en un determinado conjunto?

¿Será posible plantear ejemplos concretos de este problema para alumnos de secundaria o de primaria?

Tal como está propuesto, es un problema de optimización muy general, en el que pueden considerarse problemas de programación lineal y problemas de programación no lineal.

Nos hace recordar el teorema de Weierstrass según el cual el máximo existe si la función es continua y si el conjunto considerado es cerrado y acotado (y obviamente no vacío).

En esta perspectiva, es natural pensar que es un problema cuyos casos concretos solamente se pueden estudiar en cursos universitarios. Así, un ejemplo concreto es el siguiente problema:

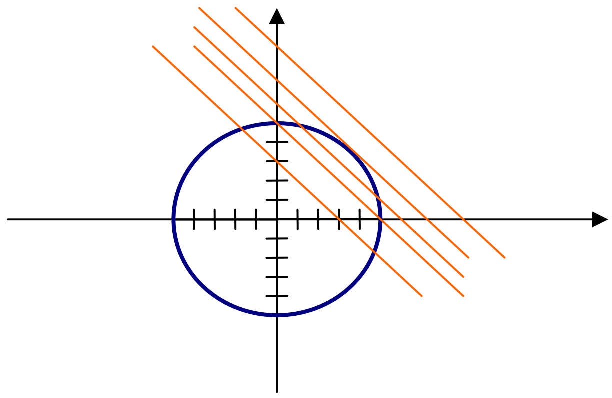
Encontrar el mayor valor que puede tener la función $f(x, y) = x + y$, considerando que (x, y) son puntos del conjunto determinado por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Hay varias maneras de resolver este problema, pero siempre será muy útil tener en cuenta que:

- La función que se desea maximizar (*función objetivo*) es una función lineal y que sus curvas de nivel son rectas.
- El o los puntos que den el valor máximo a la función, deben estar en una circunferencia de radio 5 (*la región factible*).

Con estas consideraciones geométricas, una forma sencilla y visualizable de resolver el problema es mostrando en un mismo gráfico la circunferencia de radio 5 y varias rectas de nivel de la función objetivo. A continuación se hace tal representación:



Las rectas corresponden a diversos valores de $x + y$. Podemos percibir, por ejemplo, la recta $x + y = 3$ que pasa por los puntos (0, 3) y (3, 0) y que es secante a la circunferencia; también la recta $x + y = 5$ que pasa por los puntos (0, 5) y (5, 0) y que, como la anterior, es secante a la circunferencia. Los valores de K son más altos cuanto más hacia el noreste (hacia arriba y hacia la derecha) estén ubicadas las rectas.

Como el problema es hallar el mayor valor de $x + y$, cuando (x, y) es un punto de la circunferencia, se ve gráficamente que el mayor valor se hallará cuando la recta y la circunferencia sean tangentes.

Tenemos entonces **un problema de optimización que puede ser usado en aulas de secundaria.** A continuación mostramos dos soluciones del problema interrelacionando argumentos algebraicos y geométricos usados en la secundaria:

Solución 1

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x + y = K$$

donde K es una constante cuyo valor debe ser el mayor posible, pero tal que el conjunto solución del sistema sea sólo un punto. Esto se consigue examinando la ecuación de segundo grado en la variable x que resulta al reemplazar $y = K - x$ en la ecuación de la circunferencia. Debe exigirse que el discriminante – que dependerá de K – sea cero. Haciendo cálculos se obtiene que el discriminante es $-4K^2 + 200$, y en consecuencia $K = 5\sqrt{2}$.

Solución 2

Observar que en el punto de tangencia la recta y el radio deben ser perpendiculares. Como las rectas tienen pendiente -1 (determinan triángulos rectángulos isósceles con los ejes coordenados), el radio debe tener pendiente 1 y en consecuencia en el punto de tangencia se debe tener $x = y$. Así

$$2x^2 = 25$$

y concluimos fácilmente que $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, con lo cual el mayor valor de $x + y$ es $5\sqrt{2}$.

Volvamos ahora a la pregunta hecha cuando comenzamos a analizar el problema inicial.

¿Será Imposible una forma concreta del problema en primer grado de primaria?

Respondemos con el siguiente problema, que puede ser resuelto por niños de primer grado:

Jorge escribe en la pizarra los números 4, 7, 3, 8, y 5. ¿Cuál es la mayor suma que se puede obtener sumando dos de los números que escribió Jorge?

En esta formulación no está explícita la función objetivo, pero podemos darnos cuenta que está presente: es también la función $f(x, y) = x + y$. Es evidente que el conjunto factible es {4, 7, 3, 8, 5}. Ciertamente no es necesario usar estos términos al trabajar con los niños, pero es muy importante que los profesores tengan una visión amplia del contexto matemático del problema.

A continuación mostramos otras dos formas de presentar, esencialmente, la misma dificultad, para niños de primaria. La segunda sugiere trabajar dinámica y participativamente con los niños.

I) *En el siguiente cuadro, se indica cuantas canicas tienen Abel, Bruno, Carlos, Daniel y Esteban:*

Abel	*Bruno*	*Carlos*	*Daniel*	*Esteban*
4	*7*	*3*	*8*	*5*

Si se reúnen las canicas de dos de estos niños ¿Cuál es el mayor número de canicas que se pueden obtener?

II) *Abel, Bruno, Carlos, Daniel y Esteban forman el equipo A y Róger, Samuel, Tomás, Ulises y Víctor forman el equipo B. El profesor tiene una bolsa con muchas canicas y nueve papelitos envueltos, en los que antes ha escrito los dígitos del 1 al 9. Cada alumno del equipo A saca un papelito al azar y el profesor le entrega tantas canicas como indica el número en tal papelito. Cada papelito se utiliza una sola vez. Se hace lo mismo con los alumnos del equipo B, haciendo intervenir todos los papelitos al inicio. Así, cada integrante del equipo tiene un determinado número de canicas, como se indica en el siguiente cuadro:*

A					*B*				
Abel	*Bruno*	*Carlos*	*Daniel*	*Esteban*	*Róger*	*Samuel*	*Tomás*	*Ulises*	*Víctor*
4	*7*	*3*	*8*	*5*	*2*	*9*	*4*	*3*	*5*

Cada equipo debe seleccionar dos jugadores para que jueguen con los dos jugadores seleccionados en el otro equipo. Si para el juego se necesita tener el mayor número posible de canicas, ¿quiénes deben ser seleccionados de cada equipo? ¿Con cuántas canicas en total se presentarán los seleccionados de cada equipo?

Un trabajo interesante para los profesores es motivar a los niños para que justifiquen que la elección que hicieron en cada equipo es realmente la mejor. Es una ocasión para hacer varias sumas muy sencillas, buscar la manera de hacerlas ordenadamente (por ejemplo haciendo un cuadro para registrar todas las parejas de sumandos y las sumas que se van obteniendo), y practicar la relación “mayor que”, al ir comparando los resultados.

Vemos, así, que es posible trabajar problemas de optimización desde el primer grado de primaria y tener ocasiones de estimular el pensamiento científico, tratando adecuadamente la información y justificando afirmaciones.