UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2006, Número 7, páginas 23 - 38
ISSN: 1815-0640

Perspectiva integrada de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: una mirada al campo disciplinar de la matemática

Marcela Falsetti, Mabel Rodríguez, Gustavo Carnelli, Francisco Formica

Resumen

La relación entre la Matemática científica y la escolar, su imagen, la naturaleza del conocimiento matemático y las particularidades de la actividad matemática son algunas de las importantes cuestiones que confluyen al momento de pensar la enseñanza de esta disciplina. Presentamos aquí un desarrollo sobre estos aspectos, donde destacamos algunas características de la Matemática como disciplina científica. Este trabajo nos centramos en el campo disciplinar y es parte de otro más amplio en el que realizamos un recorrido por las tendencias actuales en la Educación Matemática y por la situación y las perspectivas de la enseñanza de esta disciplina.

Introducción.

La Matemática siempre ha tenido un lugar privilegiado en el desarrollo humano por su presencia práctica en la vida cotidiana, su protagonismo en el ámbito científico – tecnológico y su influencia en el ámbito artístico. Es además considerada como ámbito privilegiado del pensamiento humano. Probablemente este privilegio radique en el hecho que ofrece posibilidad de abstracción desde la manipulación concreta (sensorio-motriz) de objetos a temprana edad. Operaciones mentales como clasificar, cuantificar, ordenar, seriar, ubicar, discernir, comparar, simbolizar, generalizar, representar, construir teniendo en cuenta la percepción espacial, etc. se van dando en el pensamiento humano, de forma creciente en complejidad, ya desde los primeros contactos del hombre con los objetos. Justamente, hacer Matemática consiste en sistematizar acciones como las anteriores y los resultados de las mismas.

La Matemática es una ciencia formal que persigue rigor en sus fundamentos, por lo cual axiomatiza sus construcciones y no consiente ambigüedad en las definiciones. Esta disciplina ha persistido en la cultura humana y tiene actualmente un creciente protagonismo. Luis Santaló[1], explica este fenómeno a través del carácter de dualidad que la Matemática presenta (Santaló, 1994), la cual no es entendida como una relación dialéctica entre sus características sino como la

[1] Luis A. Santaló, (Girona 1911 - Buenos Aires 2001) matemático español quien desarrolló la mayor parte de su carrera en Argentina ha sido el máximo exponente de la Geometría Integral que se aplica con éxito a la medicina, la biología, geología, etc. englobándose dichas aplicaciones bajo el nombre de Estereología. Santaló fue además un gran pedagogo y divulgador científico con más de 250 publicaciones, entre ellos libros con gran influencia en nuestra comunidad matemática, como su Geometría Proyectiva o Vectores y Tensores.

posibilidad de brindar una visión diversificada de las cosas. La dualidad de la Matemática consiste en que a lo largo de su historia se han referido, y se refieren, a ella como arte y como técnica, como teoría y herramienta, como filosofía y aplicación, como paradigma de exactitud y como modelo de aproximación, como creación intelectual pura y como verificación experimental. La Matemática ha avanzado como ciencia gracias al equilibrio entre estas características duales, exacerbar alguna de ellas implica desvirtuar el tipo de conocimiento que la constituye, por ejemplo, insistir en su carácter teórico, podría "aplastar toda iniciativa original e ingeniosa que se aparte de lo impuesto por el maestro" (Santaló, 1994).

Como ya mencionamos, en este trabajo presentamos aspectos referidos a la trayectoria del campo disciplinar de la Matemática, donde se observan algunas características de la Matemática como disciplina científica: cuáles son sus mecanismos de producción, cuáles son sus características especiales que la diferencian de otros campos disciplinares, cómo se presenta a la comunidad no especialista, es decir cuál es su imagen, y finalmente cuál es su relación con la Matemática a enseñar a nivel escolar, a la que nos referiremos como Matemática escolar[2].

El campo disciplinar de la matemática: algunas características

1. La Matemática como saber científico

Evolución histórica: breve reseña

La Matemática participa en la vida desde comienzos de la humanidad. Desde entonces las distintas sociedades han ido dotando al conocimiento matemático de distintas características y contenidos, cada uno de ellos, de acuerdo con la idiosincrasia, a las necesidades y a las "modas" que imperaban en cada momento de la historia. Es así como la Matemática se vio entreverada con la astronomía, la música, la astrología, el arte y la religión entre otras disciplinas, prácticamente desde sus comienzos.

Ejemplos de estas intervenciones de la Matemática pueden ser las aplicaciones concretas que hicieron los babilonios en la astronomía. En los finales del siglo VIII antes de Cristo, este pueblo alcanzó un alto grado de desarrollo para poder predecir algunos fenómenos astronómicos. Con sus mediciones y observaciones, buscaban elaborar los calendarios y también los vaticinios para sus monarcas. Precisamente de los babilonios y también de los egipcios parece ser que Pitágoras asumió la idea de que los números eran quienes regían los movimientos de los astros, y que también estaban muy relacionados con las figuras geométricas. De hecho, Pitágoras y sus discípulos han prácticamente rendido un "culto" al número. Afirmaban que el

[2] Consideramos como Matemática Escolar la Matemática de los niveles primario y medio aunque podría extenderse, y el documento así lo refleja, a la Matemática de la Formación Docente.

número es la esencia de las cosas, lo que permite llegar a las raíces y fuentes de la naturaleza. La aritmética que desarrollaron estaba muy vinculada a la Geometría: relacionaban el número con lo mensurable. Es para destacar el gran desarrollo que la escuela de los pitagóricos tuvo en el área de la Geometría, desarrollo que en cierta forma surgió del estudio que hacían de la aritmética, dada la vinculación que establecían entre ambas áreas.

Recorriendo la historia desde aquellos momentos hasta nuestros días, se observa en la Matemática una sucesión de cambios en los contenidos y áreas de estudio, y también en los puntos de vista desde los que se aborda el estudio. Esto se debe a que simultáneamente con el desarrollo y evolución de la Matemática, también evolucionan el resto de las disciplinas que forman el conocimiento humano. Es así como el conocimiento matemático se ve requerido, favorecido y enriquecido por varias de las ramas del saber que a lo largo de la historia han ido teniendo presencia, tanto como en la antigüedad la han tenido la música, la astronomía, la astrología, la religión, la arquitectura, y otras representaciones del "saber artístico". Si bien el desarrollo de la Matemática es requerido por otras ciencias como, por ejemplo, la medicina, la física, la geología, las que a su vez requieren y exigen constantes avances en la tecnología, también es cierto que la Matemática nunca ha dejado de ser un área del saber que responde a los intereses y gustos personales del investigador. Así, la Matemática ha pasado a formar parte imprescindible de la evolución de la ciencia y la tecnología en general.

Ciencias fácticas y formales: la Matemática como una ciencia formal

Cuando hablamos de ciencia entendemos que es un conjunto de conocimientos que conforman un sistema, fundado en el estudio sistemático y metódico de un objeto determinado que determina un saber verificable. Los conocimientos involucrados en la ciencia resultan de la aplicación de una serie de acciones o prácticas racionalmente secuenciadas, aceptadas institucionalmente (por la comunidad científica) y que son englobadas dentro de un método científico.

El modelo físico-matemático dominante durante el siglo XIX, el espacio propio logrado por disciplinas como la Biología y la Química y la posterior instalación del debate acerca del estatus epistemológico de las ciencias sociales, conforman un entramado bajo el cual los intentos por clasificar y agrupar a las disciplinas se tornan complejos, debiendo adoptar criterios convencionales para su realización. Si tomamos como parámetros para realizar una clasificación de las ciencias a su objeto de estudio, su método, el tipo de enunciados y el tipo de "verdad" involucrado en esos enunciados, puede hablarse de ciencias formales y ciencias fácticas, subdividiéndose este último grupo en ciencias naturales y ciencias sociales.

Las ciencias fácticas tienen como objeto de estudio entes pertenecientes a la realidad empírica. En términos amplios, para las ciencias naturales es la naturaleza; para las ciencias sociales son a) las leyes, regularidades, formas de organización, de comportamiento, etc. del ser humano, considerado individualmente o en comunidades humanas y b) los ambientes y "habitats" de estas comunidades. El problema del método de las ciencias sociales originó un debate en el terreno de la epistemología, mencionado anteriormente, que dividió inicialmente el pensamiento entre los que plantearon una posición "explicativa", que sostuvo la continuidad en el conocimiento y la sentencia para las ciencias sociales a ajustarse al método de las ciencias naturales y aquellos que se enrolaron en una postura "comprensivista" (o hermenéutica), que –a muy grandes rasgos– postularon una grieta epistemológica entre las sociales y las naturales, proponiendo para el conocimiento proveniente de las ciencias sociales a la *comprensión,* que se explica, básicamente, en la "pertenencia" como precedente de la objetivación manifestada en la auto-implicación del científico en el objeto de estudio.

Las ciencias formales son la Matemática y la Lógica, que tienen como objeto de estudio entes ideales (conceptos abstractos), sin marco espacio – temporal. No obstante, estos entes pueden ser interpretados –de acuerdo con la realidad empírica– al establecerse relaciones con los hechos. Los enunciados de estas ciencias se refieren o bien a relaciones entre signos (a los que se puede, en algunos casos, asignárseles contenido empírico), o bien a relaciones entre conceptos abstractos, operaciones que puedan hacerse entre ellos y propiedades de los conceptos y de las operaciones.

En Matemática, la "verdad" de un enunciado depende de la aceptación del carácter de verdad de ciertos enunciados dados a priori, los axiomas, y de que éste pueda deducirse, a través de reglas lógicas de inferencia, de los axiomas.

La Matemática es un ejemplo de "sistema axiomático". Éstos están compuestos por los términos primitivos (términos que no requieren de definición y que pueden ser interpretables), las definiciones, los axiomas, las reglas de inferencia o deductivas (provistas por la Lógica) y los teoremas. Como ya dijimos, los axiomas son proposiciones que se consideran como verdaderas y no requieren demostración. El conjunto de axiomas debe tener ciertas características como por ejemplo la independencia (es decir que uno de ellos no pueda deducirse de otros) y la consistencia (que no pueda deducirse a partir de ellos otros enunciados que los contradigan). Partiendo de los axiomas y a partir de las reglas de inferencia, se llegan a deducir los "teoremas", componentes fundamentales en la cadena deductiva. La formalidad de los sistemas axiomáticos radica en que todas sus componentes puedan expresarse en un lenguaje sintáctico y en que los nuevos enunciados se obtienen a partir de cadenas deductivas. Sin embargo, un sistema axiomático no se reduce a esto pues da a lugar a una dimensión semántica cuando dichos componentes son puestos en relación con objetos, empíricos o ideales. La interpretación de un sistema en términos de proposiciones verdaderas constituye un "modelo" del sistema axiomático.

La Matemática tiene por *objeto de investigación* por un lado crear sistemas abstractos constituidos por definiciones de conceptos, por representaciones simbólicas, con símbolos y gramáticas específicas, reglas de manipulación simbólica y conceptual, relaciones entre los conceptos obtenidas mediante técnicas específicas y aplicación de la Lógica Simbólica y por otro crear teorías, técnicas y modelos enmarcados en dichos sistemas. Estos sistemas se presentan a la comunidad científica como un conjunto interrelacionado, coherente y autocontenido de axiomas y teoremas. Los modelos pueden referirse a la realidad física y social captada por el hombre como así también pueden referirse a abstracciones matemáticas en sí mismas. Cuando se refieren a la realidad extra-matemática son medios para describir, interpretar, anticipar, obtener conclusiones sobre hechos, procesos, funcionamientos de los sistemas estudiados. Son, por lo tanto, base y sustento conceptual y simbólico de las demás ciencias y la tecnología. El método de investigación propio de esta ciencia es predominantemente deductivo aunque también se vale del método inductivo para entender y observar regularidades en la forma en que se relacionan los conceptos.

Lo hasta aquí descrito permite tener una idea de la Matemática como campo disciplinar científico. Esta presentación de la Matemática tiene el peso puesto en la forma en la que se presenta el saber matemático en la comunidad científica de acuerdo a los métodos científicos que le corresponden y ha dejado expresamente afuera las cuestiones temporales en el desarrollo histórico de las nociones así como el terreno de la generación de las ideas y la búsqueda de soluciones a los problemas planteados. Este otro terreno, arena de los matemáticos, tiene sin lugar a dudas otras características. En él se admite la duda, la búsqueda informal, inductiva, la exploración, las soluciones aproximadas, temporales, etc. Así también, en una mirada temporal, lo axiomático no aparece en un primer momento. El problema de hacer convivir ambas características de la Matemática científica se evidencia en la enseñanza de la disciplina. Desde nuestra concepción, la Matemática escolar se encuentra con la Matemática científica justamente en este otro terreno. Entre la Matemática científica y la Matemática escolar planteamos que se comparta el hacer del matemático más que el formalismo y rigurosidad que se encuentra en la Matemática comunicada entre científicos, por lo menos en las primeras instancias de aprendizaje. Veremos a continuación cómo la concepción de la Matemática científica en relación con la Matemática escolar determina condicionantes para su aprendizaje llegando a tener fuertes repercusiones de índole social.

La Imagen de la Matemática

Un aspecto importante a tener en cuenta es la “imagen” que la sociedad tiene de la Matemática. En general, esta imagen es la de una ciencia fría, rígida y poco asociada con el quehacer humano. Así también se la considera difícil y circunscripta a un reducido grupo de individuos. Esta imagen, tan difundida, es la que Ernest llama visión absolutista (Ernest 1996). Esta posición ve a la Matemática como universal, objetiva y cierta. Asume que los objetos de estudio son preexistentes y la tarea del hombre es “descubrirlos”. No se contempla la posibilidad de la “invención” y se asume que los “objetos” matemáticos y el conocimiento son necesarios, perfectos y eternos. El conocimiento matemático es considerado como universal, carente de valores e independiente de la cultura y de la historia. Es esta filosofía absolutista la que ha regido en la sociedad hasta no hace mucho tiempo atrás y, fruto de esta interpretación del conocimiento matemático a lo largo de tanto tiempo, es la imagen negativa que se tiene en realidad de la Matemática.

Ernest propone, oponiéndose al absolutismo, pensar a la Matemática de una manera distinta, otorgándole una imagen que incluye una faceta más humana. Esta línea, llamada "falibilismo", ve a la Matemática como un "trabajo en progreso", incompleto y permanente. Es vista en constante evolución y en la cual el hombre es quien la "inventa" o "crea". De esta forma, adquiere las características de revisable, corregible y cambiante, que da lugar a la invención de nuevas verdades y, por lo tanto la ve como emergente de las producciones e invenciones del hombre, y no sólo como fruto del "descubrimiento" (Ernest 1996). El filósofo Wittgenstein opina que la Matemática consiste en una mezcla y entrecruzamiento de juegos de lenguaje entrelazados, aunque éstos no son juegos en un sentido trivial. También expresa que a menudo seguimos reglas en el razonamiento matemático, consecuencia de la costumbre bien ensayada, no por una necesidad lógica, y de esta forma, puntualiza qué es lo que los matemáticos hacen en la práctica, y no lo que las teorías lógicas nos dicen, lo cual sería el motor que conduciría el desarrollo del conocimiento matemático. Esta imagen más humanizada, que contempla la falibilidad en su razonamiento y admite la revisión, le quita la cuota de rigidez que durante tanto tiempo se le adjudicó a la Matemática y que derivó en la construcción de la imagen negativa ya señalada. La corriente falibilista se instaló en la sociedad en la segunda mitad del siglo XX y es consonante con el programa constructivista de la enseñanza de la Matemática.

La Matemática y algunas de sus ramas de saber específico

La evolución constante de todo el conjunto de conocimientos que forman el saber humano, y el requerimiento en paralelo de la evolución del saber matemático, ha ido desarrollando a lo largo de los últimos dos siglos muchas de las áreas de la Matemática que hoy requieren de particularizada especialización, en técnicas, teorías y métodos, para poder abordarlas. Tal es el caso del Análisis Matemático (que vio sus primeros pasos con Leibniz y Newton), el Álgebra, la Topología, y las diversas "ramas" de la Geometría (diferencial, integral, de la convexidad, de los fractales, algebraica, etc.) entre otras. Cada una de estas áreas, tienen su propio objeto de estudio y sus propias características. A grandes rasgos, podríamos señalar algunas particularidades de las más difundidas y fundamentales en la formación matemática:

– El objeto de estudio del Álgebra clásica es la resolución de las ecuaciones polinomiales $P(x) = 0$, donde P es un polinomio. Posteriormente, el Álgebra tomó como rumbo el estudio de las estructuras, entendidas éstas como "clases" de objetos (por ejemplo, los grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales), a las cuales se las dota de algunas operaciones como las que se realizan entre números reales o enteros. Como sostiene Miguel de Guzmán (1984) "…El estudio abstracto de tales estructuras representa una enorme economía de pensamiento, ya que aparecen repetidas muchas veces, en muy diversas áreas de una forma natural. Los teoremas demostrados sobre la estructura abstracta son así inmediatamente aplicables. Por otra parte, tal estudio pone de manifiesto la unidad profunda de los diversos campos de la Matemática…" Entre los representantes del estudio de las "estructuras algebraicas", figura el grupo Bourbaki.

– El Análisis Matemático estudia la variación de magnitudes. Para ello se deben manipular cantidades infinitamente grandes o infinitamente pequeñas, de aquí que esté relacionado con el cálculo infinitesimal. Una característica central es que su evolución se origina a partir de métodos heurísticos. Puede decirse que comenzó su estudio en el siglo XVII, y que fue una herramienta fundamental para la física clásica. De Guzmán describe la filosofía del cálculo infinitesimal como sigue: "… Deseamos estudiar cómo se desarrolla un proceso complicado que aparece en la naturaleza, en una máquina, en la sociedad o tal vez en un mundo matemático ideal. Analizamos primero lo que ocurre «localmente», es decir, en una porción pequeña, para un cambio pequeño de tal o cual variable del fenómeno. Al proceder así tal vez podamos aplicar algún principio característico del proceso que nos permita una formulación matemática del modo en que se relacionan las diferentes variables del proceso. Tal formulación aparece a menudo en forma de ecuaciones diferenciales, es decir, ecuaciones en las que figura una función y sus derivadas y se desea saber cómo o cuál es la función o funciones que la satisfacen. Al hacerlo sabremos cómo se comporta el fenómeno, no ya «localmente», sino «globalmente»" (De Guzmán, 1984). Como señalamos anteriormente, entre los exponentes del desarrollo del análisis, se encuentran Newton, Leibniz y Bernoulli.

– Cuando nos referimos a la Geometría, pensamos en el estudio de las "formas" (figuras planas y cuerpos) y su relación con las medidas. Si bien sus comienzos datan de la antigüedad (Pitágoras, Euclides y Arquímedes ya eran estudiosos de las formas y de sus dimensiones), ha tenido a lo largo de la historia una gran evolución y adaptación a diferentes modalidades de abordaje. Descartes tuvo la idea de relacionar desarrollos algebraicos con los geométricos, dando así origen a la "Geometría analítica". Esto hizo avanzar notablemente el estudio del cálculo infinitesimal. Pero no sólo el Cálculo se vio influenciado y beneficiado por la Geometría, varias de las ramas de la Matemática se ven favorecidas por el aporte de tipo geométrico en sus concepciones y demostraciones.

– En cuanto a la Topología su objeto de estudio son las propiedades de las figuras o formas que no se ven alteradas por "transformaciones continuas" (homeomorfismos), como pueden ser doblar, estirar, encoger, pero sin romper, sin provocar orificios ni separar lo que estaba unido ni pegar lo que estaba separado. De esta forma, puede decirse que, desde el punto de vista "topológico", un cuadrado no difiere de un triángulo, dado que uno se transforma "homeomórficamente" en el otro. En el contexto de la Topología no se estudian las entidades asociadas a las "medidas" como, por ejemplo, las nociones de ángulo y área (que sí son de fundamental importancia en la Geometría). La Topología hace enormes aportes a la fundamentación de resultados en el Análisis Matemático y Funcional, y en la Geometría, entre otras áreas de la Matemática.

Hasta aquí, hemos detallado algunas de las características de estudio de algunas ramas de lo que puede llamarse Matemática del Continuo o Matemática Continua. Un desarrollo importantísimo ha tenido en el último siglo la llamada

Matemática Discreta, asociado éste, al amplio desarrollo que tuvo, por ejemplo, la informática. Esta Matemática es la que está más asociada a las “aplicaciones”, y su estudio tiene una gran componente empírica. Los procesos de estudio que admiten una modelización o una formulación a partir de “simulaciones” en el campo de la informática, tienen un sustento matemático basado en lo “discreto”. Se consideran “variables discretas” a aquellas variables que admiten la existencia de dos “mediciones consecutivas”, o sea, que no admiten una representación “continua”. Tales pueden ser los datos recogidos en un análisis estadístico, o en un registro numérico de alguna situación o hecho particular. Por ejemplo, si bien la variable “altura de cierta especie de árbol” es una variable continua, el registro de una determinada población se hace a partir de una serie de mediciones hechas por un observador. Los datos recogidos por este observador, son “finitos”, y pueden ordenarse, por ejemplo, de menor a mayor, y así observarse que existe en ellos la noción de “dos medidas consecutivas”. Ésta es una característica de una variable discreta, que en este caso está representando una “muestra” de una variable continua, de la cual se obtendrán características desde las inferencias que surjan de esta muestra finita. Este proceso de análisis de una variable continua a partir de “datos discretos” es una de las acciones que se desarrollan dentro del mundo de la Matemática Discreta. Están asociadas a ella, por ejemplo, la estadística, la teoría de grafos, la programación lineal, la programación dinámica, la teoría de control óptimo, entre otras.

El pensamiento matemático

Es común oír hablar del pensamiento matemático y de la forma en que la Matemática desarrolla el pensamiento en “el individuo que la practica”. El desenvolvimiento de las tareas que el matemático desarrolla involucra acciones y actividades, que requieren de una forma de pensar específica que es lo que podríamos definir como el “pensamiento matemático”. Algunas características del mismo son:

- Se maneja con una simbolización adecuada que permite presentar eficaz y operativamente entidades que representan la realidad física o mental (De Guzmán. 1993).
- Manipula racional y rigurosamente objetos de producción mental (de Guzmán, 1993).
- Es analítico cuando inicia la búsqueda del camino adecuado para la resolución de un problema. Reflexiona sobre lo que ya ha hecho y también sobre lo que hará. Juzga los pasos realizados y decide emprender cambios en el abordaje del tema de estudio, si no ve apropiado el enfoque inicial.
- Es abarcativo e integrador. Intenta reconocer lo que se relaciona con un problema de estudio, ya sea desde la Matemática o desde otra disciplina. Dentro de la propia Matemática, busca herramientas en cualquiera de las áreas (Álgebra, Análisis…) que le sean útiles para el fin que persigue, independientemente de que sean o no herramientas de su dominio habitual.
- Es crítico y cuestionador de sus propias reglas (por ejemplo, el cuestionar la necesidad del postulado de Euclides de las paralelas como regla esencial y

evidente para el desarrollo de la Geometría dio a lugar a las Geometrías no euclidianas)

- Usa en forma integrada diferentes recursos intelectuales:

    - se apoya en lo intuitivo, lo sensible, lo inductivo y lo empírico para conceptualizar, diferenciar y determinar objetos y relaciones;
    - recurre a expresiones simbólicas precisas para definir y comunicar dichos objetos y relaciones y en reglas operativas y leyes lógicas, también simbolizables, para manipularlos, establecer vinculaciones entre ellos, validar dichas relaciones y comunicar resultados.

- Es estructurante y generalizador en los siguientes sentidos:

    - establece clases de objetos (como por ejemplo matrices, n-uplas, polinomios, etc. abarcados en la clase de "vectores", no en el sentido físico sino de elemento del espacio vectorial), luego establece formas de operar con los objetos de esa clase (sumar vectores y multiplicar vectores por escalares) y de vincularlos entre sí conservando las propiedades de las operaciones (Ej. las transformaciones lineales)
    - frente a operaciones o propiedades que responden a ciertos patrones o regularidades, estructura una nueva operación o propiedad (Ej. la multiplicación a partir de la suma con los términos iguales).

- Es flexible, no se ata a modelos preestablecidos como paradigmas sino que busca nuevos modelos y procedimientos.
- Es creativo, dinámico, no algorítmico. Sobre esta última característica vale aclarar que, es parte de la actividad matemática la producción de algoritmos, es decir la producción de reglas y operaciones que se aplican metódica y sistemáticamente a objetos, pero esa producción no es algorítmica.

Este tipo de pensamiento se pone de manifiesto en las producciones matemáticas como los teoremas, las demostraciones, las teorías, las fórmulas, frutos de enfrentar al individuo que hace Matemática con problemas, extramatemáticos o intramatemáticos. El desarrollo de estas producciones exige un accionar muy complejo y amplio que determina, como veremos en un próximo apartado, la verdadera actividad matemática.

La Matemática: arte y oficio

Como señalamos anteriormente, la evolución de la Matemática también se debe a los intereses que cada investigador (matemático) tiene en su área de estudio. Vale preguntarse por qué los investigadores tienen puesto su interés en descubrir nuevas teorías o nuevos resultados, tan abstractos, que tal vez sólo un pequeño grupo de personas pueda interpretarlos y entenderlos. Sin embargo, este cuestionamiento no es frecuente cuando se piensa en un pintor respecto de su obra, ya que se lo justifica porque tuvo esa imagen en la mente y decidió plasmarla en la pintura.

El estudio de la Matemática le proporciona a quien lo realiza un tipo de placer y desafío que sólo él puede explicar. Para hacer referencia a esto, en el Seminario inaugural del curso 2001-2002 del Proyecto: Detección y Estímulo del Talento Precoz en Matemáticas en la Comunidad de Madrid, organizado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y la Fundación Airtel, se presentó el siguiente texto, basado en una anécdota del matemático *Yves Meyer.* Éste decía que: *"… estaba tratando de resolver un problema que me había entregado un amigo matemático. La esposa de este último se me acerca y me dice: Yves, si en lugar de trabajar en esas matemáticas que para nada sirven, utilizaras tu inteligencia en aliviar el sufrimiento humano, las cosas irían un poco mejor en este mundo, ¿no te parece? El reproche me hirió, pero continué mi trabajo matemático. Dos días después había resuelto el problema planteado, pero no sabía responder aún el cuestionamiento de Bárbara, la esposa de mi amigo. Pasó el tiempo y gracias al trabajo de todo un grupo de investigadores y médicos, en el cual yo estaba incluido, los nuevos métodos de tratamiento de imágenes que descubrimos, se aplican en numerosos problemas planteados por las imágenes médicas. Entonces encontré parcialmente la respuesta: "Sí, yo he podido en parte aliviar el sufrimiento humano". Y ¿por qué decía este matemático "parcialmente"? Le faltaba considerar lo que él esperaba cuando trabajaba en un problema matemático. Encontrar esa mezcla de miedo, excitación y alegría, similar a la que siente un niño al buscar el tesoro perdido en una isla misteriosa…".*

Para el investigador en Matemática (al igual que en algunas otras ciencias), la Matemática también representa un arte, y desde ese punto de vista, la producción surgida de su investigación está vista por él como una producción artística, dotada de múltiples componentes estéticas. Entre ellas, se destacan la "belleza" de una demostración, cualidad tal vez compartida por la comunidad matemática, e interpretada desde la óptica de la economía de recursos para lograrla, la perfecta armonía que la lógica brinda para entrelazar cada una de las hipótesis hasta lograr alcanzar el resultado anunciado. Es común escuchar en el ámbito de la Matemática, que cuando hay dos demostraciones de un mismo resultado, una es más linda que la otra. ¿Por qué? A veces, es más linda porque es más corta, otras veces, la belleza está en que es más clara o que no utiliza tantos recursos de otras áreas, etc. El matemático encuentra en su producción (su obra) el mismo placer que el pintor, el escultor o el músico encuentra en la suya. Resulta curioso que algunos elementos que tienen en cuenta los artistas (pintores, escultores,...) a la hora de analizar la belleza de su obra, sean la simetría, la proporción, la proyección, el orden, y que también éstos sean elementos de la Matemática.

Algunos interrogantes acerca del motivo por el cual un matemático estudia uno u otro problema, pueden surgir porque el objeto de estudio de la Matemática es, para la mayor parte de la sociedad, un verdadero misterio. En el común de la gente, existe la noción de que el único elemento de estudio de la Matemática es el número y sus relaciones con el cálculo (operacional) elemental. También asocia al estudio de la Matemática con ciertos elementos de la Geometría elemental. Es muy poco lo que se conoce fuera del ámbito de la "comunidad matemática" acerca de la actividad desarrollada por el propio matemático.

2. La Matemática de la Investigación y la Matemática enseñada en el aula

La actividad matemática

Como se ha señalado, la Matemática se genera a partir de situaciones problemáticas surgidas desde diferentes fuentes, ya sean de la propia Matemática o de otras disciplinas que requieren de ella. Estas situaciones son las que van dando origen a las distintas teorías, y junto con ellas, a los distintos conceptos, propiedades, axiomas y demás elementos involucrados en el saber matemático. La actividad que se lleva a cabo para resolver estas situaciones–problemas, es la que podría llamarse "actividad matemática". Algunas de las acciones que intervienen en la actividad matemática, en los distintos niveles en que ésta se desarrolla, son, por ejemplo: representar, comparar, resolver, estimar, operar, seleccionar, argumentar, reconocer estructuras, revertir procedimientos, razonar, simbolizar, justificar.

La actividad matemática presenta variadas facetas, dependiendo –entre otras cosas– del nivel o instancia en que se desarrolla. Estas instancias pueden ser las de producción o creación del conocimiento matemático (la actividad del matemático), las de la enseñanza y las del aprendizaje de la Matemática. En cualquiera de estas instancias, el que hace Matemática desarrolla una faceta creativa. Por ejemplo, el que enseña Matemática, debe ser capaz de adecuar los conocimientos a enseñar, de acuerdo al alumnado y a los problemas elegidos o planteados para la enseñanza de determinados conceptos. Por otro lado, quien aprende Matemática, también crea conocimientos nuevos para él, aunque no sean novedosos para la humanidad.

J. Godino (1998) expresa *"…La génesis del conocimiento matemático se produce como consecuencia de la actividad del sujeto enfrentado a situaciones problemas y haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos disponibles".* Además de las *ostensivas* e *intensivas*, considera que se necesitan otras entidades para describir a la actividad matemática, como son las *actuativas*, *extensivas*, y *afectivas*. Interpreta cada una de ellas de la siguiente manera:

> ***Ostensivas***: cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos), incluyendo las entidades lingüísticas y notacionales.
>
> ***Extensivas:*** las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (problemas, situaciones, aplicaciones). En general, de ellas surgirán las entidades intensivas.
>
> ***Intensivas:*** ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, teorías, proposiciones).
>
> ***Actuativas:*** acciones del sujeto ante situaciones o tareas (describir, operar, argumentar, generalizar)
>
> ***Afectivas:*** creencias, actitudes, preferencias, emociones.

Aunque tal vez no parezcan de carácter primordial, en la actividad matemática las entidades afectivas muchas veces son las que determinan el rumbo de la investigación, la enseñanza o el aprendizaje de la Matemática. Las creencias, actitudes o preferencias del investigador, el docente o el alumno, son las que lo hacen reflexionar, a cada uno en su lugar, acerca de cuál es el tema a investigar, cuál la metodología de enseñanza a utilizar y cuál es el sentido que el alumno le da al concepto que está aprendiendo. Es muy importante el rol de estas entidades, sobre todo en el campo de la actividad docente. El docente se enfrenta a la tarea de reelaborar los conocimientos surgidos en el seno de la comunidad matemática, y debe enseñarlos a partir de la visión que él tenga de esos conocimientos.

Relación entre la Matemática científica y la Matemática escolar

Al hablar de la actividad matemática podemos referir dos planos diferentes en los que plantear el tema: la actividad matemática en el ámbito científico (en donde diremos que se desarrolla la "Matemática científica") y la actividad matemática en el ámbito escolar (donde diremos que se plantea la "Matemática escolar").

Desde el ámbito científico hasta el ámbito escolar, la Matemática hace un recorrido que merece especial atención. En particular, en la comunidad científica es donde nace o se gesta el conocimiento matemático, pero como es sabido, no todo lo que se conoce de la Matemática, es tema de estudio en el nivel escolar. Eso presupone que hay una selección de contenidos que atiende a distintos criterios, entre los que figuran las necesidades específicas del nivel en que se enseñará, la cantidad de recursos tecnológicos, informáticos o bibliográficos con que cuentan las instituciones en que dichos contenidos serán enseñados, el nivel económico–cultural de la comunidad receptora de estos contenidos, etc.

El recorrido que el saber matemático hace desde el campo de producción de la Matemática hasta el saber transformado que se enseña en la escuela, puede describirse simplificadamente en algunos pasos que detallamos a continuación.

En principio el curriculum de la formación docente ya presenta una primera transformación y selección a partir de la cual el cuerpo docente del nivel superior, sea éste la Universidad o el Instituto de Formación del que egresen los profesores de Matemática, trabaja seleccionando contenidos. Esta selección supone cuáles son los contenidos mínimos que conforman los planes de estudio del profesorado. A lo largo de su carrera, el estudiante del profesorado recibe formación pedagógica en la que estos contenidos disciplinares son acompañados en paralelo por los propios de las materias pedagógicas, en particular de la Didáctica de la Matemática. Esta conjunción de conocimientos de la Matemática con los de la Didáctica de la Matemática va desarrollando en el estudiante de profesorado la capacidad de poder hacer él mismo una selección de contenidos matemáticos para enseñarlos en la escuela en la que desarrolle su ejercicio profesional. Esta última selección de contenidos hecha por el estudiante del profesorado (en este caso, generalmente con la ayuda de sus docentes) para llevar adelante en sus prácticas docentes (residencias) o por el profesor recién egresado para llevar a su lugar de trabajo, puede considerarse como la última etapa de lo que llamamos la "transformación" del conocimiento matemático. Es indudable que cada etapa de esta transformación está íntimamente vinculada con muchos aspectos que tienen que ver con lo personal, lo institucional y lo social, entre otros.

Esta descripción sobre la transformación de los saberes matemáticos a los saberes escolares puede modelizarse de diversas formas. El modelo más difundido se conoce con el nombre de transposición didáctica y se ha originado en la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemática. Algunos de los interrogantes a los que debe atenderse con cualquier modelo propuesto que tenga la intención de comprender esta transformación, son: ¿qué relación guardan los saberes matemáticos con los escolares? ¿Tienen puntos en común o son construcciones diferentes? Si comparten algo, ¿en qué consiste ese terreno común?, y si no comparten nada ¿por qué se llaman igual?

Un punto de vista que compartimos es que la Matemática científica y la escolar compartan ciertos aspectos del "hacer", de la actividad que se realiza con y sobre los contenidos matemáticos. Esta actividad debería ser considerada en un sentido amplio, desde el aspecto heurístico y el formal, ambos presentes en el quehacer del matemático. El aspecto heurístico tiene que ver con combinar observaciones y tener registro de los patrones recurrentes, explotar la analogía y la inducción, hacer uso de elementos auxiliares, descomponer y recombinar, usar casos particulares para luego generalizar, trabajar "hacia atrás" reconstruyendo procedimientos, elegir estrategias y técnicas para aproximarse a la comprensión o resolución de problemas, evaluar la elección sea por ensayo o por anticipación de su aplicación, hallar y verificar resultados, etc. El aspecto formal tiene que ver con las representaciones semióticas y los pasajes de una a otra, la generalización, las definiciones de objetos, la formulación de conjeturas y la demostración matemática, etc.

Bibliografía

- Arcavi, (2000); Problem-driven research in mathematics education, Journal of Mathematical Behaviour, 19, pp. 141-173.
- Arendt, H. (1997); Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géometrie. Repères – IREM, 26.
- Astolfi, J-P (2002); Aprender en la escuela, Edit. Océano.
- Barbin,E. (2000); Construire la Géometrie Élementaire. Repères – IREM, 40. pp. 5-9.
- Bishop, A. (2000); Enseñanza de las matemáticas. ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos?. Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Ed. GRAO.
- Bkouche, R. La démonstration: du réalisme au formalisme. Archivo html en casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf.
- Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (1994); Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.

- Brousseau, G. (2000); Les propriétés didactiques de la géometrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie. Actes du Séminaire de Didactiques des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Créte.
- Capponi, B. (2000); De la Géometrie de traitement aux constructions dans CABRI-GEOMETRE II au college. Repères – IREM, 40. pp. 11-42.
- Charnay, R. (1994); Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard, Y. Bosch, M., Gascon, (1997); J. Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de educación. Para profesores, padres y alumnos. Vol. 22, España., Horsori, Institut de Ciences de l´Educació, Universidad de Barcelona.
- De Guzmán, M. (1984); Panorama de la Matemática. Avances del Saber. Tomo 5. Ed. Labor.
- De Guzmán, M. (1993); Enseñanza de la Matemática. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones. Ed. Popular- OEI- Madrid.
- Díaz, E. (editora) (1997); Metodología de las Ciencias Socales. Editorial Biblos. Buenos Aires.
- J. Dieudonné (1971); La abstracción en Matemáticas y la Evolución del Álgebra. La Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Aguilar. Madrid.
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (1999); Marco General, Nivel Inicial: (Tomo I: Estructura General, Fundamentación y Propósitos de las Áreas, Expectativas de Logros, Tomo II: Organización de Contenidos) y Superior (Tomo I: Estructura General, Profesorado Inicial, Profesorado EGB, Tomo II: Profesorado de Matemática)
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Programa para la definición del Diseño Curricular del Nivel Polimodal. Documento base.
- Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnicos Profesionales. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Propuestas para la enseñanza de matemática en el 3er Año del nivel polimodal. Documento de apoyo Nº 1.
- Ernest, P. (1996); The nature of mathematics and teaching. Philosophy of Mathematics Education. Newsletter 9.
- Font, V. (2002); Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas. Revista EMA Vol. 7, Nº 2. Una empresa docente.
- Fortuny , J., Azcárate,C. (1994); Parte II: Enseñanza de la Matemática. Formación del profesorado de las Ciencias y la Matemática. Tendencias y experiencias innovadoras. Gil, D. Pessoa,A., Fortuny,J., Azcárate,C. Editorial Popular.
- Gascón, J. (1998); Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Krichesky, Rodríguez, Petrucci, Guindi, de Amézola, Cerletti, "Las condiciones y posibilidades del "pasaje" de saberes y prácticas especializados: el caso particular de la formación de docentes". Ponencia presentada en las Jornadas de Docencia de la UNGS, 2004.

- Nápoles Valdés, J., Cruz Ramírez, M. (2000); La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones., Función Continua, Nro. 8. Bs. As.
- Polya, G. (1945; 2nd edition, 1957); How to solve it. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1954); Mathematics and plausible reasoning (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; (Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962,1965/1981); Mathematical Discovery (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: Princeton University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.
- Ruiz, A., Barrantes, H. (1998); La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Academia Colombiana de Ciencias. Disponible en http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/indice.htm
- Santaló, L. (1990); Matemática para no matemáticos. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España.
- Santaló, L. (1994); Enfoques: hacia una didáctica humanista de la Matemática. Ed. Troquel. Bs. As.
- Schoenfeld, A. (1992); Learning to think mathematically. Problem Solving, Metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.) New York: Mac Millan. (disponible en formato html)

Marcela C. Falsetti es Doctora en Matemática y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
mfalse@ungs.edu.ar

Mabel A. Rodríguez es Doctora en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
mrodri@ungs.edu.ar

Gustavo F. Carnelli es Licenciado en Enseñanza de las Ciencias, orientación Matemática. Realiza el Doctorado en Educación y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
gcarnell@ungs.edu.ar

Francisco A. Formica es Licenciado en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad Nacional de General Sarmiento.
Buenos Aires – Argentina.
aformica@ungs.edu.ar