UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 31 - 46
ISSN: 1815-0640

Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas

José Antonio Fernández Bravo

Resumen

A partir de lo que se entiende por "algoritmos", se analiza la enseñanza actual de éstos en el área de Matemáticas, dentro de la Educación Primaria (6–12 años de edad). Desde las posibles causas de las dificultades y bloqueos didácticos más frecuentes, se cuestionan las respuestas estereotipadas de algunas preguntas convencionales. El autor distingue dos clases de algoritmos en la actividad escolar y, desde esa diferenciación, intenta destapar procedimientos perturbadores e identificar intervenciones educativas que faciliten el desarrollo del pensamiento matemático y la adquisición de su conocimiento.

Abstract

The present teaching techniques applied in Elementary Mathematics (6–12 year olds) stemming from what are known as "algorithms" are analysed. Starting off with the possible causes for common difficulties and didactic mental block, stereotyped answers to some common question are placed in doubt. The author identifies two types of algorithms that are frequently applied in school activities and from these, attempts to uncover ineffective methods and identify educational procedures that facilitate the development of mathematical thought and the acquisition of mathematical knowledge.

¿La automatización de los pasos a realizar en la aplicación del algoritmo, describe el hacer matemático? ¿Tiene sentido actualmente la enseñanza de los algoritmos sobre las cuatro operaciones básicas? ¿Qué procedimientos deberíamos favorecer y cuáles deberíamos olvidar? ¿Es posible sustituir la rutina ignorante del automatismo por la acción desafiante del pensamiento? ¿Por qué seguimos apoyando nuestra actuación didáctica en criterios tradicionales sin sentido, aún a pesar de producir en el pensamiento de nuestros alumnos un vacío de significado? ¿Qué nos aportan a los docentes los libros de texto y materiales escritos para que tanto abusemos de ellos, si admitimos constantemente que el exceso de éstos, provoca: en la enseñanza, un horrible drama; y, en el aprendizaje, el cortejo a un razonamiento perdido?

Si por la acción correcta del pensamiento se entienden muchas cosas, no se entenderán aquellas muchas en las que esta acción no esté presente.

Introducción

La Matemática está llena de algoritmos[1]: el de la multiplicación, el de la división, el algoritmo de Euclides o el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones…; son ejemplos, entre otros. En nuestra propia actividad cotidiana podemos encontrar muchos algoritmos; una misma receta de cocina, puede llevarnos a su aplicación. Podríamos decir vagamente que un algoritmo es el conjunto de pasos a realizar, necesariamente ordenados y finitos[2] para alcanzar un objetivo. Si quisiéramos obtener un artículo de una máquina, deberíamos seguir una serie de pasos: 1) Introducir una cantidad de dinero igual al precio que marca el artículo, o superior en el caso en el que devuelva cambio 2) Pulsar la selección del artículo que se desea adquirir 3) Recoger el artículo. Este sencillo conjunto de acciones ordenadas puede representar, aunque de forma simplificada, fácilmente un algoritmo. Si tuviéramos que crear un algoritmo para conseguir un determinado objetivo A en la vida real, deberíamos hacer un buen uso de la observación y del sentido común, anotando los pasos que, mediante la experimentación, nos permitieran obtener la secuencia de operaciones a realizar. A nivel científico, el proceso de creación de un algoritmo es más o menos parecido; sin separarse mucho de la idea anterior, también necesita de la observación, la experimentación y la lógica. **Sin razonamiento lógico sería imposible crear algoritmo alguno; es vital, pero también lo es un gran dominio de la materia y un pensamiento creativo**. Conviene señalar que la obtención de un mismo resultado no requiere necesariamente la aplicación del mismo algoritmo.

Krinitski (1988) distingue los algoritmos que se aplican en la vida cotidiana, de los algoritmos científicos. Los primeros se basan en la experiencia, pero no están sometidos a ningún análisis de verificación estricta y precisa; a éstos los denomina algoritmos "*en sentido intuitivo*". En la actividad escolar, nos gustaría también distinguir dos clases de algoritmos: el *"sumiso"*, y el *"innovador"*[3]. Entenderemos por **algoritmo *sumiso*** el que se impone para realizar la acción operativa, **–el pensamiento se somete a una aceptación de lo que hace sin entender por qué lo hace–,** obligando al entendimiento del alumno[4] que lo utiliza a rendirse ante la

[1] Un algoritmo se identifica en el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema. La palabra "algoritmo" se debe al matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (Al-juarizmi) (780-850) miembro de la "Casa de la sabiduría" fundada en Bagdad por el califa Al-Mamun (809-833). Al-Khowarizmi escribió un libro sobre aritmética (traducido al latín en el s. IX por Adelardo de Bath y Roberto de Chester), en el que hace una exposición exhaustiva del sistema de numeración hindú. Este sistema se empezó a conocer como «el de Al-Khowarizmi» y, por las deformaciones que tuvo llegó a la palabra «algorismi», «algorismo» o «algoritmo».

[2] Cuando el algoritmo entra en una cadena infinita de pasos y nunca terminaría de llegar a un resultado, se dice que ese algoritmo es inaplicable, para ese dato o conjunto de datos iniciales, en esa operación.

[3] He tenido que utilizar estas palabras de distinción para expresar una idea: por un lado, de difícil aceptación (ya que se cree que para algunas operaciones sólo existe un algoritmo); y, por otro, de difícil entendimiento para algunos docentes (ya que se identifica únicamente la validez del algoritmo, en la coincidencia de éste con el de la tradición didáctica heredada por ellos en su época estudiantil).

[4] Para evitar redundancia y complejidad en la lectura, debido a que en ocasiones debemos expresar la idea con demasiadas oraciones subordinadas, utilizaremos las palabras "niños, alumnos, profesores…" para designar también a: niñas, alumnas, profesoras…; respectivamente.

rutina de su aplicación. Por el contrario, el **algoritmo *innovador***, sería aquel que **se aplica con opción de decisión propia**, comprendiendo y entendiendo, tanto lo que se hace como el por qué de ello.

Un posible algoritmo en el quehacer cotidiano de la enseñanza de la matemática, puede representarse en la exposición de los pasos que deben dar nuestros alumnos para "multiplicar un número cualquiera de tres cifras por otro de una cifra", por ejemplo: *1) Multiplica el número de una cifra por el número de unidades del número de tres cifras y escribe, sólo y bajo la línea marcada, la cifra de las unidades obtenida 2) Multiplica el número de una cifra por el número de decenas del número de tres cifras y súmale al resultado, en su caso, el número de decenas obtenido en la multiplicación realizada en el primer paso 3) Como si de un solo número se tratase, del resultado obtenido en el paso 2), escribe solo el número de unidades obtenido al lado izquierdo del número que hay bajo la línea 4) Multiplica el número de una cifra por el número de centenas…*

Si al análisis de los pasos anteriores le dedicamos el tiempo necesario, nos damos cuenta que el hacer matemático no está en la aplicación del algoritmo, sino en los mecanismos intelectuales que nos han permitido llegar a él; al actuar de esa forma, les estamos presentando vagamente la conclusión del proceso intelectual que se ha llevado a cabo, y eso, a nuestro juicio, mucho se aleja del quehacer matemático[5]. **La Matemática no está en la aplicación reiterada de movimientos, sino en la cantidad de ideas que se relacionan**. Hay muchas formas de llegar al resultado si se comprende lo que se hace, y hay mil formas de multiplicar que se apoyan siempre en propiedades y relaciones matemáticas. **El algoritmo, debería ser el punto de llegada[6] y siempre como necesidad de abreviar el tiempo dedicado a la obtención del cálculo pedido.**

Si en la escuela se actuara tal y como se ha descrito anteriormente para multiplicar, por ejemplo, "un número de tres cifras por otro de una cifra", estaríamos aplicando un algoritmo *sumiso* y sería difícil desarrollar en los alumnos: la observación, la experimentación, la intuición, el razonamiento lógico, la creatividad y la emoción por el saber hacer…

Tristemente, aunque hasta ahora hayamos pretendido extrañar la realidad, es el desierto hacer cotidiano y habitual de la escuela lo que se está relatando; los sombríos avatares de los estereotipos que se representan normalmente en nuestras *sumisas* aulas. Los niños imitan sin saber por qué hacen lo que hacen o, por qué dicen lo que dicen. Cuando utilizan el algoritmo (*sumiso*), en muchas ocasiones, tardan más en obtener el resultado que si lo intentan por sus propios métodos –sus propios métodos, desde la corrección matemática, también son algoritmos

[5] Bertrand Russell (1985), escribía con énfasis de protesta: "Cuando nuestros niños mal aprenden, sin gracia, cosas acerca de las clases están recibiendo lo que queda, al paso del tiempo y bajo al apisonadora de la vulgaridad, del brillante esfuerzo intelectual de unos hombres."

[6] No conviene olvidar que una de las tareas fundamentales de la Matemática consiste en la necesidad de trabajar en una Teoría sustancial de algoritmos. Cuando el algoritmo es el punto de llegada de un proceso intelectual, éste se convierte, sin duda, en innovador.

respetables, y siempre *innovadores*–. Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. No ocurre lo mismo con los niños que se han visto sometidos desde sus primeras experiencias matemáticas a la penosa aplicación reiterada de algoritmos *sumisos*, en éstos disminuye considerablemente su capacidad para establecer relaciones y, paradójicamente, su cálculo mental se expresa con un rendimiento muy bajo, debido a que intentan imitar mentalmente la forma en que opera el algoritmo[7] impuesto.

Quizás deberíamos plantearnos una reorganización y distribución de los contenidos. **El profesor de matemáticas debería dedicarse a hacer matemáticas** y enseñar al alumno a establecer relaciones mentales a partir de la clara aplicación de propiedades. A lo largo de la historia se nos han presentado distintos algoritmos, entendiendo siempre que la función principal de éstos es la de producir automatismos. Tendría que ser responsabilidad **del profesor de Conocimiento del Medio**[8], por la transmisión de la cultura, y debería ser él, sin menosprecio profesional, el que enseñase el algoritmo que se utiliza para obtener un resultado, en este caso numérico, a partir de una determinada operación matemática; así, el niño podría elegirlos como ahorro de tiempo, entendiendo el por qué se hace como se hace; pues lo que hace, como concepto, propiedad o relación, ya se le habría explicado anteriormente en clase de matemáticas.

Actualmente no tiene sentido, iniciándose como punto de partida en la acción del algoritmo, enseñar a hacer: sumas, restas, multiplicaciones o divisiones; pues una cosa es, por ejemplo, hacer multiplicaciones y, otra, muy distinta, es saber multiplicar. Así ocurre que muchos docentes se expresan diciendo: "*no lo entiendo, mira que multiplican bien pero les cuesta mucho ver los problemas*" Si nos permitieran corregirles científicamente les diríamos que si sus alumnos supieran qué es multiplicar no tendrían dificultad alguna en identificar situaciones multiplicativas en la vida real; la dificultad educativa reside, en este caso, en que **se confunde: saber "multiplicar"** con hacer "multiplicaciones". Y, quizás de estas confusiones se obtenga como resultado, algo:

> *"Didácticamente equivocado, conceptualmente hipertrófico, científicamente inútil e históricamente absurdo",*

utilizando palabras de Pascal, como las refiere Rey Pastor (1981) en su libro "Elementos de Análisis Algebraico". Lo esencial requiere la organización de procedimientos abiertos a la oportunidad de adaptar, de renovar, reorganizar, cambiar, seleccionar, de realizar, de crear.

[7] Niños hay que cuando les preguntas por el resultado de "32 x 99" colocan… y hacen la raya en su mente y… van colocando como si lo hicieran por escrito; parece que su mente eligiera lo más difícil de realizar, pero eso no es así: su mente elige simplemente el único recurso que posee.

[8] "Conocimiento del Medio Natural y Social" es una asignatura que se contempla en España en el curriculum de Educación Primaria (6–12). Con este área como ejemplo, nos referimos a los profesores responsables de la cultura Social y tradición histórica de un país.

Hoy, ni siquiera tiene ya sentido enseñar a: sumar, restar, multiplicar y dividir, como fin en sí mismo (algoritmos *sumisos*). Eso se exigía hace unos años en las escuelas porque se necesitaba entonces para abrirse camino en la vida, –y aproximadamente hasta finales de la primera mitad del siglo pasado–. Esto no quiere decir que no haya que hacer uso en la escuela actual de esas operaciones, pues cometeríamos un grave error si hiciéramos una falsa interpretación de estas ideas. Lo que se intenta decir es que **el uso de las operaciones se haga desde una evidente realidad matemática** y, más que la finalidad sea hacer sumas, restas… el objetivo consista en utilizar las sumas, las restas… **como medio para desarrollar el pensamiento** (algoritmos *innovadores*). Pero estas expresiones que aquí hemos utilizado: si son fáciles de entender, no son fáciles de aceptar; por lo que nos vemos obligados, antes de expresar algo sobre cómo a nuestro juicio se debería proceder para la elaboración de algunas ideas principales de las cuatro operaciones básicas, a analizar lo que debe entenderse por conocimiento matemático, incidiendo brevemente en los estereotipos de su enseñanza, los avatares de su aprendizaje y el "requerido" uso de materiales y recursos.

> *"Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. Los aderezos técnicos de esta materia, su simbolismo y expresiones formales, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos: todo ello tiende a ocultar su auténtico carácter (…) Esta ciencia no trata de símbolos y cálculos. (…) El objetivo de las matemáticas son los conceptos. Se trata sobre todo de ver el modo en que los diferentes conceptos se relacionan unos con otros. El objetivo de las matemáticas es comprender (…) No se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien en comprender por qué existe una respuesta, (…) Pero lo que sobre todo tienen es significado. (Ian Stewart, 2004: 13–14)*

1. Sobre la enseñanza de la Matemática

Son muchas las personas que sin estar cercanas al mundo de la enseñanza de la Matemática preparan con éxito, según las exigencias académicas, a los estudiantes que durante el verano tienen que asegurarse al menos un aprobado en septiembre. Revistas y periódicos anuncian el evento: "Estudiante de secundaria da clases particulares a niños…"; "Periodista ayuda a redactar problemas…" "Ama de casa con buenos conocimientos en matemáticas imparte clases…" Podríamos preguntarnos si existe, o no, diferencia entre: un profesional, un amateur, un especialista, un experto y un aficionado a la enseñanza de las matemáticas. La respuesta se puede encontrar, quizás, matizando una diferenciación esencial: una cosa es dedicarse a enseñar matemáticas y, otra, muy distinta, dedicarse a desarrollar el pensamiento matemático. ¿**Cuál sería entonces el objetivo de la enseñanza** en esta área del saber y cuáles deberían ser sus exigencias académicas: exponer información y contenido para recoger por imitación lo que dicta; o, por el contrario, preguntar, suponer, provocar y desafiar para descubrir el conocimiento y conquistar el espíritu del hacer matemático?

Dicen que las matemáticas enseñan a pensar. Sin embargo, muchos docentes advierten que eso no sucede en la clase de matemáticas; en ella aseguran: *no se piensa.* Esto puede deberse a dos razones fundamentales: Una, que las matemáticas no enseñen a pensar y hayamos sido víctimas de un engaño universal; otra, que en clase de matemáticas se haga de todo, menos Matemáticas. Son muchos los profesionales de la educación los que también admiten que **se pierde mucho tiempo en rellenar ejercicios de libros vacíos de actividad rentable**, con el único fin de entregar a los padres carpetas llenas de fichas o cuadernos repletos de números, prueba del trabajo y de la constancia y del contenido elaborado, pero lejos, muy lejos, –como se puede comprobar–, de explicar conocimiento[9] alguno. Hay que hacer el libro de texto, copiando los ejercicios en el cuaderno. Después, y sin demorar mucho el tiempo –que no se pierda– cuadernillos de problemas en grupo: "*Los problemas y yo para la cooperación y la convivencia*"; para añadir un librito que también hay que hacer sobre la numeración y el desarrollo de la atención por aplicación al trabajo individual: "*Atención a los numerito, para jugar solito*"; también hay que hacer el cuaderno de *repaso*. Después del cuaderno de *repaso* tenemos, para los más desfavorecidos: *El cuaderno de Refuerzo*; y, para los más aventajados: *El cuaderno de Ampliación*. Todo esto hay que programarlo debidamente (un auténtico rompecabezas para encajarlo en unas cuantas horas), saber cuándo hay que utilizar cada material, la secuencia que se establece y el tiempo que a cada uno se dedica. Y, como no podemos contar con el sábado y el domingo, aunque de vez en cuando mandemos algunos deberes disfrazados, nos damos cuenta… que no llegamos, así que lo mejor es indicarles en ocasiones a nuestros alumnos lo que tienen que poner, con el fin de que todo esté perfectamente completado –que no digan nunca que no hacemos bien nuestro trabajo–.

2. Sobre el aprendizaje de la Matemática

La Matemática es una actividad mental. El pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado; **rigor es, ante todo: claridad mental**. El desarrollo del pensamiento no se consigue solo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. Formular unas cuantas observaciones indicativas con el fin de subrayar que el niño ha realizado actividades para desarrollar el pensamiento nada dice sobre el verdadero desarrollo, si descuidamos la emoción, la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento de las demás actuaciones, procesos, estrategias, comportamientos y

[9] Nos referimos al conocimiento matemático. La elección, si cabe, entre proceso y resultado o la exactitud del número frente al rigor del pensamiento. Muchas veces se mutila el proceso afianzando una forma más cómoda, según el profesor, para responder a los "contenidos". "Así pues dime, y sin miedo, qué es lo que tú piensas que es el conocimiento". (Platón (1985) "Sócrates. Teeteto")

diálogos. Toda acción lógica que opere significativamente en el aprendizaje de la Matemática debe, a nuestro juicio, desde la enseñanza:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción. Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el "bien" o "mal" como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.
- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven porque actualizan las necesidades del alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,…
- Habituar al alumno a explicar; fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de "porque sí". Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.

Un profesor o profesora[10] de matemáticas permitirá que sus alumnos establezcan relaciones y encaminará sus estrategias didácticas hacia la comprensión, desde la realidad mental y la evidencia lógica. Formulará preguntas que provoquen claros desafíos al pensamiento, sin decir en modo alguno cómo se piensa. Favorecerá creativamente la discusión y el diálogo, dirigido a la investigación: "¿Qué pasaría si…?" "Supongamos que…" Y pondrá en todo momento a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección. Si esto se acepta, **¿qué sentido pueden tener en la enseñanza de la Matemática los algoritmos *sumisos*?**

Aún a pesar de estar totalmente admitido que la Matemática es una actividad mental**, seguimos imponiendo, sin carácter científico y bajo la perezosa sospecha de la apatía,** ese dogma prescriptivo: "así se hace", "así se coloca", "así se resuelve", "así se calcula"…; protocolo aburrido y penumbra intelectual de un extraño secreto, justificado por la orgullosa acción de terminar un programa sin calidad, que, por los resultados obtenidos de las evaluaciones externas, ni siquiera imprime cuantificación académica. Seguimos vistiendo a la Matemática, desde la enseñanza, con ese falso atavío de ojos tristes, símbolos mezquinos y largas faldas negras, y, en su aprendizaje se la reconoce, entonces, lejos de esa razonada elegancia discreta que la caracteriza y que, quizás, no sepamos transmitir.

[10] No tiene sentido distinguir entre un "buen" profesor y uno "malo", pues esa diferenciación es en sí misma incoherente. Más sentido tiene hablar de "profesores" o "no profesores", aunque ambos se ganen la vida mediante una actividad docente.

3. Sobre el uso de materiales y recursos

El material es un medio dirigido a producir en el que aprende resultados fructíferos. Si no los produce hay que evitar su utilización. El uso de materiales y recursos en el aula es consecuente, en su hacer didáctico, con la interpretación que se tenga de la Matemática. Que los materiales "didácticos" se apliquen en el trabajo de clase no significa que cubran los altos desafíos educativos como el aprendizaje significativo y funcional o el hacer heurístico. Es la pedagogía utilizada la que nos conduce, o no, al cumplimiento de tales objetivos. El empleo del material es, sin duda, más que necesario, pero **si ha de ser fructífero y no perturbador, debe llevar implícito un fuerte conocimiento de los procesos intelectuales que se pueden conseguir y de cómo se consiguen**. Algunos de nosotros creemos estar en la moda pedagógica por el mero hecho de utilizar materiales; sin embargo, la metodología que utilizamos para dirigir su manipulación se encamina más, a convencer a los niños de lo que tienen que ver, que a permitir que nos digan lo que realmente ven; y eso, ya está totalmente demodé, sobre todo cuando el esfuerzo se dedica a buscar algo que permita la exclusiva adquisición de la rutina algorítmica. Así, por ejemplo, se inventan un cuento para colocar las unidades con las unidades y las decenas con las decenas: "*Érase una vez un pueblo en el que había un río. A ambos lados del río había casas. Los habitantes no se podían mezclar: los del lado derecho tenían que ir a sus casas que estaban en el lado derecho, y los del lado izquierdo tenían que ir a sus casas que estaban en el lado izquierdo, pasaba entonces que…*" Después de todo este rollo hacemos una falsa analogía y, colocando verticalmente 23 + 45, intentamos convencer de la similitud que tiene esto con el cuento del río –las casas de la derecha y, las de la izquierda–; así, fácilmente ve el niño que los números de la derecha se suman juntos, como se debe hacer con los de la izquierda, sin poder mezclar unos con otros. A mi juicio, esto sirve de poco para el hacer matemático: ¿Por qué las decenas y las unidades tienen que estar separadas por un río? ¿Cómo tienen que ser las casas de las decenas? ¿Y las de las unidades? ¿En qué relación intelectual se representa el habitante y el habitáculo?

> *Las decenas y las unidades se relacionan por equivalencia de cantidad que define el Sistema de Numeración Decimal: "diez elementos de un orden equivalen a un elemento de un orden inmediatamente superior".*

¿Qué sucederá cuando se trabaje con tres cifras? ¿Cuántos ríos debería haber en el cuento? ¿Es necesario advertir que las unidades van con las unidades y las decenas con las decenas? Ya se sabe que no es necesario advertirlo. El problema no es la suma; la gran dificultad está en el concepto de número. **Confundimos muchas veces causa y consecuencia**, y más que dirigir nuestros esfuerzos a saber matemáticas, perdemos mucho tiempo en enseñar formas y procedimientos que nos llevan a obtener un resultado, carente de significado y posibilidad de extensión del saber. Sin embargo, no faltan docentes que se expresan diciendo: "*bueno por lo menos suman y ya no tiene fallos*" Pensemos: Si llueve y lo que yo quiero es que deje de llover, tengo que centrarme en su causa y, meterme bajo un tejado no arregla nada. Que cuando llueva te mojes, no quiere decir que cuando no te mojes haya dejado de llover. No se ha estudiado la causa; la lluvia sigue ahí, y la dificultad pronto surgirá de nuevo.

Veintitrés (23) es el dibujo convencional para representar dos elementos “diez” y tres elementos “uno”; 45 es el dibujo para representar cuatro elementos “diez” y cinco elementos “uno”. Si sumo 23 + 45, lo que obtengo, lo coloque como lo coloque, son seis elementos “diez” y ocho elementos “uno” y eso, en matemáticas se representa así: 68; la suma es un número.

La adición

La suma es un número. La esencia de nuestro Sistema de Numeración se representa en la comprensión del número de dos cifras[11]. Los contenidos previos necesarios para entrar con éxito en el desarrollo y la comprensión del número de dos cifras, están en el dominio del número de una cifra. Algunos de los que se dedican a la enseñanza entienden por dominio de número de una cifra: saber contar[12], –estableciendo una correspondencia, entre el orden de los números naturales y, todos y cada uno de los distintos elementos–. Contar es una actividad matemática, pero no exclusiva del hacer de esta ciencia y, quedarse ahí es saber poco del número de una cifra. He podido comprobar cómo muchos niños, lo único que saben, por ejemplo, del número ocho es que va después del número siete y antes del número nueve. Es importante que un niño sepa que nueve equivale también a: cinco más cuatro, o, seis más tres; al tiempo que sea capaz de establecer una dinámica de relaciones con otras descomposiciones numéricas: si nueve equivale a cinco más cuatro, y cinco equivale a tres más dos, entonces, a nueve también se le puede representar como tres más dos más cuatro. El dominio del número de una cifra, implica conocer esos números desde la pluralidad que los define y relaciona. Es fundamental conocer las descomposiciones aditivas que equivalen a un número dado, como lo es, por reversibilidad, encontrar fácilmente el resultado que equivale a una descomposición dada.

Hasta aquí, se puede entender que lo que se precisa del niño es llegar al resultado de una suma, pero esto no es del todo cierto; ya hemos expresado anteriormente que, una cosa es sumar y, otra –muy distinta– es hacer sumas. He visto cómo muchos niños calculan el resultado de una suma mediante conteo, más que mediante relaciones y aplicación de propiedades; yo no hablo de contar –técnica que supongo superada– sino de sumar: que un niño sea capaz de descomponer un número de una cifra, con rapidez y precisión, en tantas expresiones diferentes, mediante la adición, puedan darse por equivalentes:

8 = 5 + 3; 4 + 4; 7+ 1; 5 + 2 + 1; 6 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1...

[11] Para profundizar en la didáctica del número de dos cifras se puede consultar: Fernández Bravo, J.A. (2004): El número de dos cifras. Editorial CCS. Madrid

[12] Para profundizar en una didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática se puede consultar: Fernández Bravo, J. A. (2005): Enséñame a contar. Investigación didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática. Grupo Mayeútica. Madrid.

Esto puede parecer interminable, pero no lo es si se procede con un hacer matemático. Me explico: si partimos de las sumas de dos y sólo dos sumandos, el trabajo se queda reducido considerablemente. Si trabajamos la propiedad conmutativa de la adición, las descomposiciones básicas de los cinco primeros números cardinales que tendría que saber el alumno, serían las siguientes, y sólo esas:

2= 1+1
3= 2+1
4= 3+1; y, 2+2
5 = 4+1; y 3 + 2

Obsérvese que no es necesario amargar al niño con más descomposiciones. Esas son todas, podríamos decir, a partir de las cuales, como descomposiciones básicas, se podría trabajar matemáticamente. Mediante una dinámica de relaciones, se pueden ir sustituyendo las descomposiciones aprendidas. Así, se sabe que: 5=4+1; pero, como también sabemos que, cuatro es igual a 3+1, o, 2+2, podremos sustituir y expresar cinco como: 3+1+1, o, 2+2+1; pero, como sabemos que 3=2+1, podremos seguir sustituyendo y expresar cinco, por ejemplo, como: 2+1+1+1.

Idénticos razonamientos podríamos aplicar a la forma de proceder con los siguientes números de una cifra, partiendo de sus descomposiciones básicas:

6= 5+1; 4+2; 3+3
7= 6+1; 5+2; 4+3
8= 7+1; 6+2; 5+3, 4+4
9= 8+1, 7+2; 6+3; 5+4

El aprendizaje de estas descomposiciones básicas por el alumno es objetivo principal en la enseñanza y ayudarán posteriormente a hacer uso práctico de las descomposiciones de los números múltiplos de 10, de 100, de 1000,… (50= 40 + 10; 30 + 20) El buen uso de los Números en Color o regletas ayuda considerablemente a este aprendizaje, así como cualquier otro material que, por su estructura, permita generar esas descomposiciones con la manipulación del alumno y descubrirlas por sus propios medios. Una vez percibidas, distinguidas e identificadas, podemos ayudar a establecer con ellas relaciones a través de cuentos[13], canciones, adivinanzas, etc.

> *"Las cifras son números particulares a los que se confía la tarea de representar los números" (Denis Guedj, 1998: 34)*

Para avanzar, tendríamos que trabajar con el número 10, y estudiar sus parejas de sumandos: 9+1; 8+2; 7+3; 6+4; 5+5. Deberíamos enseñar al niño a pensar "decimalmente", por una simple relación lógica con nuestro sistema de numeración,

[13] Existen cuentos como: "La caja de números I y II", o, "El hipopótamo gracioso y fuerte", publicados por la editorial CCS de Madrid, que ayudan por su aplicación a la retención de las descomposiciones básicas. Estos cuentos facilitan la comprensión de una estructura de composición-descomposición.

ya que éste es decimal, y conseguir que su mente busque constantemente el número 10.

Ejemplos:

- 6 + 2 + 4 = 10 + 2 = 12
- 7 + 5 = 5 + 2 + 5 = 10 + 2 = 12
- 9 + 8 + 4 = 9 + 8 + 1 + 1 + 2 = 10 + 10 + 1 = 21
- 56 + 25 = 50 + 6 + 20 + 5 = 70 + 5 + 1 + 5 = 70 + 10 + 1 = 81
- 324 + 89 = 300 + 20 + 3 + 1 + 80 + 9 = 300 + 100 + 10 + 3 = 400 + 13 = 413

¿Qué más hay que saber? La Matemática trabaja con el mínimo discurso lógico, la didáctica también debe hacerlo.

La sustracción

La resta no existe como operación independiente. Para saber restar es necesario saber sumar. La operación de restar se estudia principalmente, en la Educación Primaria, como sustracción y como complementariedad.

La representación matemática de la resta como sustracción no es fácil para el niño, debido a que el sustraendo se representa como cantidad distinta, sin serlo; ya que ésta lo que indica es la acción que se realiza sobre la cantidad total. Así, por ejemplo en: 5 – 3, el 5 indica la totalidad de elementos y el 3 la acción que sobre ese 5 se realiza. Como vemos no existen dos cantidades diferentes, ya que el 3 es parte del 5. Lo que existe es exclusivamente 5.

Para estudiar la resta por complementariedad, partiremos de las parejas de sumandos que equivalen a un número de una cifra, mayor que el número uno. En primer lugar trabajaremos hasta el número nueve, luego trabajaremos el número diez (9 +1; 8+2; 7+3; 6+4; 5+5), para terminar con la extensión a números múltiplos de 10, de cien, de mil… en función de la edad.

La multiplicación

¿Por qué hay que trabajar las tablas de multiplicar en orden? ¿Por qué no se establecen y estudian relaciones entre las tablas de multiplicar? ¿Por qué hay que distinguir entre multiplicar por una cifra, por dos o más de dos? Supongamos que me preguntan por el resultado de 9 x 7, con seguridad se me ha olvidado, pero si me han enseñado a establecer relaciones sé que nueve veces, equivale a: diez veces menos una vez, rápidamente obtendré el resultado desde “70 – 7”. Es conveniente ver que la tabla del 8 es doble de la tabla del 4. Y que la tabla… Supongamos que tenemos que multiplicar 123 x 98, a alguien se le ocurrirá multiplicar 123 por 8 y por 90, con independencia del orden; otro, sin embargo, observa los números y multiplica: 123 por 100, multiplica 123 por 2 y, posteriormente, resta los resultados obtenidos; otros, pueden multiplicar 123, por 50 y por 40 y por 4 y por 4, solo utilizarían la tabla del 5 y del 4, y también obtendrían el resultado correcto.

> *¿Qué sentido tiene seguir escribiendo esas filas de ceros y dejando espacios, sin saber por qué?*

La división

La división no existe como operación independiente. Si se sabe multiplicar se sabe dividir. En primer lugar habría que estudiar la división como inversa de la multiplicación. Después, podríamos estudiar el significado del resto de una división, para terminar estableciendo relaciones que nos permitieran calcular el cociente de una división cualquiera.

1. Introducir la división como inversa de la multiplicación: 12 dividido por 3 equivale a 4, porque 4 multiplicado por 3 equivale a 12.
2. Estudiar el resto: El número de elementos que sobran al hacer grupos no puede ser mayor que el número del divisor.
3. La relación "divisor por cociente" no puede ser mayor que el dividendo: El número total de elementos utilizados para hacer grupos, no puede ser mayor que el número de elementos de que disponemos. Se suele confundir en la introducción de esta operación el resto por defecto con el resto por exceso, siendo costosa la diferenciación del "sobran" con el "me faltan".

4. Un ejemplo de intervención en el aula

Una vez estudiados con nuestros alumnos (niños y niñas de 8 años de edad) los tres apartados anteriores, planteamos ejercicios numéricos para observar lo que hacían y cómo lo hacían. Como nada sabían sobre el algoritmo convencional aplicaban los tres puntos descubiertos, investigando con ellos la veracidad del cálculo obtenido:

613 / 9 ; 4032 / 517 ; 809 / 72 ; 1007 / 502 ; 593 / 106 ; 89 / 7 ; 8035 / 906

No distinguíamos entre dividir por una o varias cifras[14]; era irrelevante, las relaciones eran las mismas. Después de unas cuantas divisiones de las que surgían una serie de situaciones intelectuales propias, se iban creando significativas estrategias de resolución, de insospechada procedencia para nosotros, que les hacían ganar tiempo:

[14] Una de las causas por lo que los maestros no tenemos el reconocimiento social que merecemos es porque, a estas edades, el padre o la madre pueden enseñar (cuando no la tía que está en Bachillerato y sabe más, o una vecina que estudia informática y se ha comprado un ordenador). Si permitimos que aprendan con ellos lo mismo que pueden aprender con nosotros, no habrá ningún reconocimiento; no existen pautas de diferenciación profesional y los parámetros de capacitación no se perciben socialmente.

- Buscaban un número (cociente) aproximado, redondeando dividendo y divisor

846 / 136 → 800 / 100

Números de los que partían para seguir buscando.

- Multiplicaban el divisor por múltiplos de diez para tener puntos de referencia respecto al dividendo,

846 / 136 136 x 10 = 1360

846 < 1360 → Número del cociente < 10

- Intuían en la investigación la proporcionalidad de los resultados,

846 /136 Supongamos que empezaban multiplicando por tres;

136 x 3 = 408. Observaban que 846 era aproximadamente el doble de 408. El siguiente número utilizado como cociente era seis;

136 x 6 = 816; 846 – 816 = 30; 30 < 136.

He querido resaltar estas tres estrategias, demostrando que pueden ser descubiertas[15], porque son de las que, paradójicamente, solemos informar.

> *"Se ha comprobado que el interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición." (Puig Adam, 1956:5)*

Observemos algunos modos de proceder de los niños con la división: 645 dividido por 47 (645 / 47)

No diferenciaban la relación por las cifras que tuviese el divisor. Les daba igual que el dividendo tuviese ceros intercalados, que los tuviera el divisor, o que existieran en el cociente; que la división fuese exacta o entera.

Estrategia A) 645 / 47

47 x 10 = 470; 47 x 12 = 564
645 – 564 = 81 → Se pueden hacer más grupos.
81 > 47
47 x 15 = 705 → Se utilizan más elementos.
Prueba con números entre 12 y 15. Lo consigue en 13.
47 x 13 = 611; 645 – 611 = 34 → Es posible.

[15] La Matemática no se estudia, se hace desde una disposición mental. No hay que esperar a estudiar vectores, integrales o matrices para que el alumno haga Matemática. Se puede hacer Matemática a cualquier edad al igual que se puede dejar de hacerla aunque estemos trabajando con derivadas parciales.

Estrategia B) 645 / 47

47 x 10 = 470. Sobran muchos. Según él unos 200.
47 x 15 = 705 → Se pasaba.
Lo consigue en 13, mediante ensayo y error, sabiendo que el número es mayor que 10 y menor que 15.

Estrategia C) 645/ 47

47 x 10 = 470
47 x 20 = 940 Esta entre 10 y 20, nos dice.
Elige números y lo consigue en 13.

Estrategia D) 645/ 47

Elige al azar el número 18 para empezar.
47 x 18 = 846; 846 – 645 = 201
Como se pasa en 201 elementos busca grupos de 47 con esos 201 elementos:
201 / 47 → 47 x 4 = 188 → 4 grupos
Piensa, entonces, que se ha pasado en cuatro grupos y resta los grupos:
18 – 4 = 14 grupos.
Comprueba: 14 x 47 = 658. Se pasa por muy poco, según él.
Lo consigue en 13.

Estrategia E) 645/ 47

Elige al azar el número 7 para empezar.
47 x 7 = 329; 645 – 329 = 316.
Se da cuenta que le faltan "otros tantos" elementos (645 → (aprox.) doble de 329)
Prueba con 14 grupos: El doble de 7 grupos. Comprueba.
Lo consigue en 13.

Los niños generaban estas estrategias sin conocer el algoritmo tradicional de la división. Posteriormente, se les presentó éste y, no sólo lo entendieron; aún más: nos ayudaron a mejorarlo[16]. Después, ellos elegían y lo utilizaban libremente; era una acción más para la obtención del resultado.

> *La asociación Nacional de Educación, en una declaración de 1961 titulada El objetivo central de la educación norteamericana, expone:*
>
> *"El objetivo que dirige y fortalece a todos los otros objetivos de la educación –el hilo común de la educación– es el desarrollo de la capacidad para pensar" (Mayer, 1986)*

[16] Para profundizar se puede leer el artículo sobre la iniciación a la división, de Fernández Bravo, 1995.

5. Ideas finales

La enseñanza de los algoritmos gozará actualmente de sentido, en la medida que permita una **atención a la diversidad de ideas** –pluralidad que enriquece la amplitud de estrategias significativas–, respetando procedimientos propios y desarrollando la fecundidad de éstos; no en tanto al contenido que presenten, sino en tanto a las relaciones que se puedan articular en la mente del alumno.

De nada servirán actuaciones didácticas aisladas, desprovistas de relación e interconexión de conceptos; aunque estén perfectamente dirigidas, debilitarán la comprensión y el entendimiento. **Crear en la mente una dinámica de relaciones y ser capaz de estructurarlas al ser conscientes de ellas, forma parte del proceso de actividad matemática**, y esta actividad se puede presentar también a través de los algoritmos, siempre que el trabajo con ellos favorezca en el niño la creación de criterios válidos para la construcción del conocimiento.

No tendría sentido, sin embargo, *ver si "cabe" o "no cabe" –no sé el qué ni dónde– o seguir "bajando" del dividendo la cifra siguiente, o "llevarse" a… –no sé qué sitio– en no sé qué operaciones*, sin entender nada de lo que se hace o del por qué se hace como se hace; de ser así, **la enseñanza de los algoritmos cambiará: los avatares de la creatividad, por el automatismo estereotipado; la lógica del razonamiento, por el sistema de la rutina; y, un pensamiento que comprende, por un ignorante convencimiento.**

El campo de acción de la Matemática es el pensamiento y, el pensamiento es en sí mismo un acto creativo; los latidos del pensamiento son las ideas: ¿Cuánto tiempo nos queda para que la escuela distinga y acepte la sustitución, sin resignación ni maquillaje, del algoritmo *sumiso* por el *innovador*?

Bibliografía

- Boyer, C. (1987): Historia de la Matemática. Alianza. Madrid.
- Cockcroft, W.H. (1985): Las matemáticas sí cuentan. MEC. Madrid.
- Dewey, J. (1998): Democracia y Educación. Morata. Madrid. (Ed Original, 1916)
- Fernández Bravo, J. A. (1989): Los Números en Color de G. Cuisenaire. Seco-Olea. Madrid (Prólogo del Profesor Alberto Aizpún)
- Fernández Bravo, J. A. (1994):"¿Es la multiplicación una suma de sumandos iguales?" Comunidad Educativa. Mayo, 215, 36–42. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (1995):"Fundamentos epistemológicos del aprendizaje-enseñanza por investigación. Iniciación a la división". Comunidad Educativa. Septiembre-Octubre, 226, 36-41. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (2.000): Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. CISS/PRAXIS. Barcelona.
- Fernández Bravo, J. A. (2.002): La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación. Editorial CCS. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (2.004): El número de dos cifras. Editorial CCS. Madrid

- Fernández Bravo, J. A. (2.005): Enséñame a contar. Investigación Didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática. Grupo Mayéutica. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. y J.C. Sánchez Huete (2.003): La Enseñanza de la Matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas. Editorial CCS. Madrid
- Traducido al Portugués (2.005): O ensino da matemática. Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Artmed. Brasil
- Ian Stewart (2004): De aquí al infinito. Las matemáticas hoy. Crítica. Barcelona
- Krinitski, N. (1988): Algoritmos a nuestro alrededor. Editorial Mir. Moscú.
- Le Lionnais, F. (1962): Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Editorial Universitaria. Buenos Aires.
- Mason, J. /Burton, L. /Stacey, K. (1988): Pensar matemáticamente. Mec-Labor. Barcelona.
- Mayer Richard, E. (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Paidós. Barcelona.
- Platón (1979): Teeteto en Obras Completas. Aguilar, 2ª ed., 4ª reim., Madrid.
- Puig Adam, P. (1956): Didáctica. Matemática. Eurística. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid
- Rey Pastor, J. (1981): Elementos de Análisis Algebraico. Madrid. Biblioteca Matemática
- Russell, B. (1985): Escritos básicos I. Planeta-Agostini. Barcelona
- Stephen J. Chinn y J. Richard Ashcroft (1999): Mathematics for Dyslexics. A teaching Handbook. Whurr Publishers. London
- Wittgenstein, L. (1987): Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial. Madrid

José Antonio Fernández Bravo, maestro, Licenciado y Doctor. Es profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", (Universidad Complutense de Madrid) en el Departamento de Ciencias y Matemáticas. Imparte cursos y conferencias en distintas instituciones y numerosos Congresos Nacionales e Internacionales. Autor de cuentos, obras de teatro, juegos, materiales, artículos y libros, sobre Metodología Didáctica para la Enseñanza de la Matemática: Los Números en Color de G. Cuisenaire, 1989; Didáctica de la Matemática en Educación Infantil, 1995; Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos, 2000; La Numeración y cuatro operaciones básicas, 2002; El material Numerator. (Juego para el alumno), 2002; El Número de dos cifras, 2004; *El Hipopótamo gracioso y fuerte*, 2002; *Los animales que se escaparon del circo*, 2002; Enséñame a contar, 2005; entre otros.