REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 60. Diciembre 2020
Páginas 076-103

Uma proposta de investigação histórica, epistemológica e matemática sobre a noção de sequência recorrente com o amparo de uma Engenharia (Didática) de Formação

Francisco Regis Vieira Alves, Paula Maria Machado Cruz Catarino, Anabela M. F. Borges Varela Rodrigues

Fecha de recepción: 18/04/2020
Fecha de aceptación: 30/11/2020

Resumo

No presente trabalho discutimos os resultados coligidos de um conjunto de investigações desenvolvidas no periodo (2017 – 2020) e outro conjunto de investigações ainda em desenvolvimento, com o amparo dos pressupostos de uma Engenharia Didática de Formação (EDF). O contexto histórico, matemático e epistemológico se restringe ao exame de um conjunto de dez sequências numéricas recorrentes que, em certa medida, são desconsiderados pelos autores de livros de História da Matemática. Dessa forma, assinalamos o interesse em constituir e descrever itinerarios de ensino, de investigação e de dispositivos de formação no Brasil para professores, com o interesse em proporcionar um incremento de uma cultura matemática sobre um conjunto de dez sequências numéricas recorrentes, cujas propriedades generalizadas continuam a atrair o interesse de matemáticos em varios países e, de forma especial, de pesquisadores em Portugal.

Palavras chave: Sequência Recorrente. Engenharia Didática de Formação. Formação de Professores. História e Epistemologia.

Abstract

In the present work, we discuss the results collected from a set of investigations developed in the period (2017 - 2020) and another set of investigations still under development, with the support of the assumptions of Didactic Training Engineering (EDF). The historical, mathematical and epistemological context is restricted to examining a set of ten recurring numerical sequences that, to a certain extent, are disregarded by the authors of History of Mathematics books. Thus, we point out the interest in constituting and describing teaching, research and training devices in Brazil for teachers, with the interest in providing an increase in a mathematical culture over a set of ten recurring numerical sequences, whose generalized properties continue to attract the interest of mathematicians in several countries and, in particular, of researchers in Portugal.

Keywords: Recurring Sequence. Didactical Engineering Training. Teacher training. History and Epistemology.

Resumen	En este trabajo, analizamos los resultados recogidos de un conjunto de encuestas desarrolladas durante el período (2017-2020) y otro conjunto de encuestas aún en desarrollo, con el apoyo de hipótesis de Ingeniería de Entrenamiento Teisactic (EDF). El contexto histórico, matemático y epistemológico se limita a examinar un conjunto de diez secuencias numéricas recurrentes que, en cierta medida, son ignoradas por los autores de los libros de historia matemática. Así, destacamos el interés de construir y describir dispositivos de enseñanza, investigación y formación en Brasil para profesores, con el interés de proporcionar un aumento de una cultura matemática sobre un conjunto de diez secuencias digitales recurrentes, cuyas propiedades generalizadas siguen despertando el interés de matemáticos de varios países y en particular de investigadores en Portugal. **Palabras clave:** secuencia periódica. La Ingeniería didáctica de formación. Formación del profesorado. Historia y epistemología.

1. Introdução

A discussão de elementos de ordem histórica e epistemológica, tomando como referência o conhecimento matemático, requer maior vigilância e um reexame apropriado, tendo em vista que, quando objetivamos o professor de Matemática, se mostra imprescindível um robusto e sólido componente de formação à respeito de conhecimentos (saberes), desde sua etapa histórica ou época de gênese mas, também, uma qualitativa compreensão sobre o estádio atual e evolutivo do saber matemático. Em outro extremo, em nossos trabalhos, temos questionado uma retórica acadêmica, identificada em um contexto de publicações científicas, endereçadas ao emprego da História da Matemática e a formação do professor, que costuma enfatizar a importância de um componente histórico, todavia, desconsidera uma imprescindivel discussão minuciosa e cuidadosa sobre uma indene evolução epistemológica dos modelos matemáticos e tende a enfatizar aspectos curiosos, biográficos e apenas anedóticos ou, ainda, envolvendo determinados elementos pitorescos à respeito da vida de eminentes matemáticos do passado. (Alves, 2015; 2017a; 2017b; 2018a).

Por outro lado, temos assinalado sobre o caráter de imprescindibilidade de uma compreensão sobre um viés não estático e eminentemente evolutivo a respeito do conhecimento matemático, desde o estágio de nascedouro de determinadas noções científicas ou objetos teórico-conceituais e, também, o interesse atual da pesquisa internacional de matemáticos profissionais, fato que confirma um vigor intrínseco dinâmico e evolutivo. Tal perspectiva leva em consideração a dimensão histórica, a dimensão matemática e, também, a dimensão epistemológica do saber matemático.

Ademais, para determinados exemplos de assuntos matemáticos que possuem maior interface com noções da escola básica e um maior campo de visibilidade de aplicação, assinalamos o emprego de uma aparato técnico-metodológico, capaz de proporcionar uma ação para a pesquisa, ensino e a realização didática, possuindo maior sistemática de investigação, visando lidar com os fenômenos derivados do trinômio clássico: professor – estudantes – saber matemático (Alves, 2018a; 2018b).

A partir do contexto anterior, no presente trabalho, apresentamos alguns dados e exemplos de pesquisa desenvolvida no Brasil, no contexto da formação inicial de professores de Matemática, visando enfatizar determinados elementos de ordem histórica, matemática e epistemológica (Alves, 2017a; 2018b). A pesquisa iniciada no ano de 2017, adquire visibilidade por intermédio de um conjunto de produções intelectuais publicadas em periódicos e envolvendo trabalhos de dissertações de mestrado em desenvolvimento e outras dissertações concluídas no período (2017 – 2020), no Programa de Pòs-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, em Fortaleza - Ceará. Os resultados coligidos são divulgados ainda por intermédio de variadas publicações em periódicos especializados nacionais e internacionais.

Concernentemente ao *design* de investigação adotada, podemos afirmar que todo o itinerário desenvolvido aqui assumiu os pressupostos de uma Engenharia Didática (Almouloud; De Queiroz & Coutinho, 2008) e, como maior ênfase foi direcionada ao contexto da formação de professores, enfatizamos os elementos característicos de uma Engenharia Didática de Formação (EDF) ou de Engenharia Didática de 2ª geração (Lajoie et all, 2019; Perrin-Glorian & Bellemain, 2019; Tempier, 2016; Tempier & Chambris, 2017). O objeto teórico-conceitual e matemático de interesse se denomina, formalmente, por sequência recorrente homogênea de ordem 'n', todavia, pelo fato de buscar maior visibilidade histórica e o impacto correspondente na formação inicial docente, os trabalhos examinados se restringiram ao caso das sequências numéricas recorrentes de 2ª ordem.

De forma preliminar, com origem na tabela 1, escolhemos um conjunto de dez sequências recorrentes de 2ª ordem. No âmbito dos criterios de nossas escolhas, a lista abaixo envolveu, desde os casos e exemplos costumeiramente discutidos por autores de livros de História da Matemática (Bell, 2012; Boyer, 2011; Eves, 2004, Hodgkin, 2010), como no caso da sequência de Fibonacci e de Lucas, bem como, outros exemplos de sequências menos conhecidas, desconsideradas e pouco divulgadas no contexto da formação de professores, como o caso das sequências de Coordonier ou Padovan, de Perrin, da sequência de Narayanna, da sequência de Leonardo e a sequência generalizada de Oresme. Na Tabela 1, indicamos o conjunto das dez sequências numéricas recorrentes considerado em nosso estudo.

Tabela 1. Descrição e levantamento blibliográfico correspondente às sequências recorrentes de 2ª ordem.

Descrição da sequência recorrente	Descrição da fórmula de recorrência
Sequência (Generalizada) de Fibonacci (SGF)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_0 = 0, f_1 = 1$, $n > 0$
Sequência (Generalizada) de Lucas (SGL)	$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, $L_0 = 1, L_1 = 3$, $n > 0$
Sequência (Generalizada) de Pell (SGP)	$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, $P_0 = 0, P_1 = 1$, $n > 0$
Sequência (Generalizada) de Jacobsthal (SGJ)	$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1}$, $J_0 = 0, J_1 = 1$, $n > 0$
Sequência (Generalizada) de Coordonier (SGC)	

Sequência (Generalizada) de Perrin (SGPe) **Sequência (Generalizada) de Mersenne (SGM)** **Sequência (Generalizada) de Oresme (SGO)** **Sequência (Generalizada) de Narayanna (SGN)** **Sequência (Generalizada) de Leonardo (SGL)**	$C_{n+1}=C_{n-1}+C_{n-2}$, $C_0=1, C_1=0$, $n>0$ $Q_{n+1}=Q_{n-1}+Q_{n-2}$, $Q_0=3, Q_1=0$, $n>0$ $M_{n+2}=3M_{n+1}-2M_n$, $M_0=0, M_1=1$, $n>0$ $O_{n+2}=O_{n+1}-(1/4)O_n, O_0=0, O_1=1/2, n>0$ $N_{n+1}=N_n+N_{n-2}$, $N_0=1, N_1=1$, $n>0$ $Le_{n+1}=2Le_n-Le_{n-2}$, $Le_0=1, Le_1=1$, $n>0$ (Catarino & Borges, 2020)
Total considerado na pesquisa	**Dez sequências recorrentes de 2ª ordem**

Fonte: Elaboração dos autores.

Com origem nos elementos apontados há pouco, definimos alguns assuntos abordados em determinados periódicos especializados de Matemática Pura, visando uma transposição didática (Chevallard, 1991) correspondente, aproximando-os da realidade e da compreensão dos professores que atuam na Educação Básica no Estado do Ceará. Dentre os assuntos ou abordagens escolhidas, destacamos: (i) propriedades e representação matricial de sequências; (ii) descrição do processo de extensão para índices inteiros; (iii) descrição de funções gerais, relacionadas com a generalização das sequências; (iv) estudo de recorrência e forma n-dimensional; (v) introdução de unidades imaginárias i, j, k, $i^2=-1=j^2=k^2$ e a unidade dual ε, $\varepsilon^2=0$ e $1\varepsilon=1\varepsilon=\varepsilon$; (vi) descrição de representação com unidade híbridas; (v) descrição do modelo computacional (2D/3D) e a correspondente visualização do modelo fractal (2D/3D) relacionado com determinadas sequências numéricas.

A partir dos elementos indicados nos parágrafos predecessores, indicaremos a seguinte pergunta: como conceber recursos didáticos e descrever um itinerário de formação e de informação (divulgação) à respeito da noção de sequência recorrente para professores de Matemática em formação inicial ?

O questionamento anterior, por sua vez, proporcionou a descrição dos seguintes objetivos específicos para o estudo: (i) desenvolver uma análise e levantamento bibliográfico sobre a noção de sequências recorrentes de 2ª ordem, tanto em livros de História da Matemática, bem como em peiódicos (nacionais e internacionais) de Matemática Pura; (ii) adotar um *design* de investigação capaz de proporcionar os pressupostos sistemáticos para uma pesquisa no campo da Educação Matemática e interface com a História da Matemática; (iii) conceber sequências de ensino e constituir dispositivos de formação capaz de proporcionar o incremento da cultura matemática de professores à respeito da noção de sequência recursiva de 2ª ordem

Na seção subsequente delinearemos um cenário de cooperação envolvendo pesquisadores do Brasil e, também, pesquisadores de Portugal (Catarino; Campos & Vasco, 2019). Afim de compreender um processo epistemológico evolutivo sobre a noção de sequência recursiva de 2ª ordem, se mostrou imprescindível um exame não exaustivo dos elementos de sua gênese histórica mas, também, os avanços mais representativos da pesquisa atual sobre o referido tema, tanto no contexto da Educação Matemática, bem como, no contexto da pesquisa em Matemática Pura.

2. Uma proposta de cooperação científica Brasil x Portugal

Com o interesse de buscar uma compreensão sobre a pesquisa matemática atual no contexto de interesse pela generalização de propriedades relacionadas com as dez sequências que indicamos na tabela 1, desenvolveremos um ação de cooperação científica envolvendo matemáticos portugueses e um exame de sua pesquisa (Campos et all, 2014; Catarino, 2015; 2016; 2019). Desde que a natureza do processo investigativo indicado no objetivo espeífico indicado em (i), se mostrou imprescindível a constatação sobre os resultados mais recentes na respectiva área de estudo. Nesse sentido, assinalaremos alguns elementos mais representativos e que concorreram para uma demarcação do nosso campo epistémico de interesse.

Nesse sentido, cabe assinalar um incremento pela pesquisa sobre sequências e propriedades generalizadas, a partir da contribuição do pensamento pioneiro de Stakov (2009). Não obstante, cabem resgistrar alguns trabalhos pioneiros da década de 60, 70 e 90, que envolveram uma espécie de maior difusão científica e repercussão da pesquisa norteamericana em torno da noção da Teoria das Sequências Recorrentes. (Iver, 1961; Alfred, 1965; Hoggat, 1969; Brousseau, 1971).

Em outros trabalhos, podemos identificar o interesse dos matemáticos visando a obtenção de novas formas de generalização da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas. (Feinberg, 1963; Gould, 1981; Harman, 1981; Horadam, 1961).

Mais recentemente, registramos o empenho por parte de especialistas pela generalização e a correspondente evolução matemática de outras sequências recorrentes (Cook, 2004), mediante outras formas de representação. Cabe observar que, respeitando os limites do trabalho atual, assinalaremos alguns trabalhos mais recentes que têm influenciado nossa investigação, com ênfase nas publicações de matemáticos portugueses (Campos et all, 2014; Catarino; Campos & Vasco, 2019; Catarino, 2016; 2019; Catarino & Borges, 2020; Catarino & Vasco, 2013).

Podemos observar um interesse particular pela generalização de determinadas propriedades derivadas da sequência de Pell, pelos quaternions de Pell e os octônions de Pell. (Catarino & Vasco, 2017). Assinalamos um trabalho pioneiro de Catarino (2019) que introduz uma nova não denominada de quaternions de k-Pell biomplexos e os números hibridos de k-Pell. Vejamos, para exemplificar, duas definições matemáticas recentemente introduzidas na literatura científica.

Definição 1: A sequência de Leonardo, denotada por $\{Le_n\}_{n=0}^{\infty}$, é definida por intemédio da seguinte recorrência $Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$, com os seguintes termos iniciais $Le_0 = 2, Le_1 = 1$. (Catarino & Borges, 2019, p. 76).

Definição 2: Definiremos um número híbrido de k-Pell, a partir da seguinte relação $HP_{k,n} = P_{k,n} + P_{k,n+1}i + P_{k,n+2}\varepsilon + P_{k,n+3}h$, em que, os coeficientes são originados da sequência de números k-Pell $\{P_{k,n}\}_{k,n=0}^{\infty}$ e, as unidades i, ε, h (Catarino, 2019).

A partir desses e outros exemplos atuais, constatamos que, desde o seu momento de gênese, até os días atuais, a noção de sequência recorrente continua atrainda o interesse de especialistas em varios países. Tais indicios revelam um peculiar e dinâmico processo epistemológico evolutivo da Matemática (Alves, 2015; 2017), de modo particular, quando consideramos a noção de sequências recorrentes.

Assim, com origem nesses elementos, identificamos o campo epistêmico-matemático de interesse, na seção subsequente, indicaremos um itinerário assumido em nossa investigação. Os dados correspondem a um conjunto de trabalhos e dissertações de mestrado finalizadas no período (2017 – 2020), no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE, Fortaleza - Brasil. Por outro lado, indicaremos ainda o planejamento investigativo pretendido para o periodo (2020 – 2023), que correspondem a um outro conjunto de pesquisas em andamento. Ademais, consideramos, ainda, as publicações científicas (nacionais e internacionais) correlacionadas com esses trabalhos supramencionados.

3. Fundamentação teórica: sobre a noção de Engenharia e de Engenharia (Didática) de Formação

A vertente francesa da Didática da Matemática introduziu no Brasil representativa influência sobre as pesquisas interessadas nos fenômenos decorrentes do ensino e da aprendizagem em Matemática. Com origem em um viés eminentemente multitéorico, constatamos a adoção de quadros teórico e um *corpus* técnico e científico dedicado ao estudo sistemático de principios modelizadores de investigação. (Alves, 2016; 2017a; 2017b; 2018b; Alves & Catarino, 2019).

A tradição de um *design* de investigação adotado pela vertente francesa da Didática da Matemática possui suas origens ao final dos anos 70 e consolidação nas décadas de 80 e 90. Todavia, um retorno significante aos fundamentos e seu exame foi necessário, na medida em que, os especialistas franceses registraram os entraves e dificuldades de repercussão e os entraves de divulgação de um aparato técnico e científico objetivando a pesquisa. No excerto abaixo, Perrin-Glorian & Bellemain (2016; 2019) descrevem um percurso evolutivo do emprego, em caráter multiteórico, da noção de Engenharia, aliada ao uso da Teoria das Situações. (Brousseau, 1997).

> No entanto, a teoria da situação se desenvolveu pela primeira vez em torno da caracterização de situações adidáticas em situações quase isoladas do mestre, o que significa que a engenharia didática em seus primórdios se concentrou nos aspectos matemáticos (epistemológicos) e cognitivo e não explicou o papel do professor no momento da implementação das sessões em sala de aula. A partir do final da década de 1980, a importância desse papel foi enfatizada tanto na pesquisa (por exemplo, Grenier, 1990, Margolinas, 1992, Perrin-Glorian, 1993) quanto nos efeitos observados da difusão no ensino de situações produzidas pela engenharia de pesquisa didática […] (Perrin-Glorian & Bellemain, 2019, p. 55)

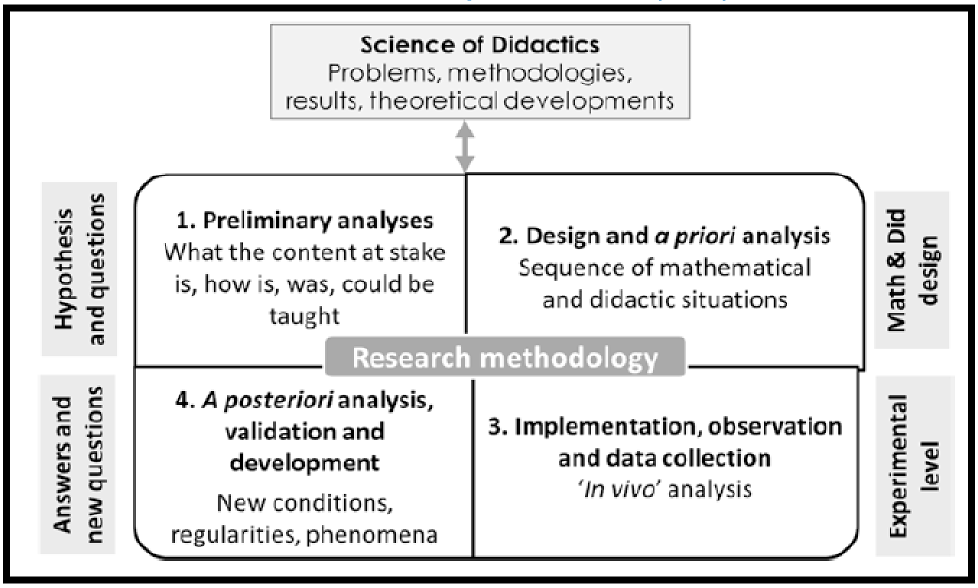
A vertente francesa da Didática da Matemática, como mencionamos há pouco, um estilo multiteórico, quando assume os pressupostos de uma Engenharia para o estudo do fenômenos derivados do ensino e da aprendizagem. Não obstante, apesar que a atenção maior dedicada pela Teoria das Situações se endereça ao estudante, deconsiderando o exame necessário do papel do professor de Matemática. Por conseguinte, na década de 90, podemos observar uma reorientação dos interesses, cuja descrição inicial atribuida à Perrin-Glorian (1993; 1999; 2011; 2019) revelam um reexame de determinados elementos de transmissão de um aparato amparado pela noção de Engenharia. Perrin-Glorian & Bellemain (2019) observam que:

> A preocupação com o uso dos resultados da pesquisa no ensino regular se reflete no trabalho que acabamos de discutir. As dificuldades na transmissão da Engenharia Didática e as necessidades de formação de professores também revelaram a necessidade de estudar mais de perto o funcionamento da educação comum do ponto de vista das restrições institucionais (inclusive sociais) que estruturam o exercício da profissão docente e da conduta da classe. Essa pesquisa geralmente ocorreu com base em observações naturalistas, e não na engenharia didática. No entanto, a fronteira entre observação a engenharia naturalista e didática nem sempre é tão clara quanto parece e a engenharia didática (ou a adaptação de produtos de engenharia didática anterior) também tem sido usada como um meio de estudar a educação comum e como forma de formação de professores. (Perrin-Glorian & Bellemain, 2019, p. 71)

Cabe observar alguns exemplos representativos de investigações amparadas pelos pressupostos uma Engenharia Didática, com maior atenção ao campo de atividades desenvolvidas pelo professor de Matemática e que indicam o emprego de uma segunda categoría ou família da noção de Engenharia, cuja introdução ocorreu, de forma pioneira, por Perrin-Glorian (1993; 2011). Artigue (1990) explica e indica as fazes correspondentes de uma Engenharia Didática e o interesse investigativo.

> Em uma pesquisa em Engenharia Didática, a fase de projeto é realizada com base em um referencial teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos já adquiridos no campo estudado, mas também com base em um certo número de análises preliminares, na maioria das vezes: a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino, a análise do ensino usual e seus efeitos, a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução , a análise do campo de interesse no qual a realização didática real ocorrerá, e, é claro, levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa. (Artigue, 1990, p. 6)

Figura 1 – Esquema proposto por Barquero & Bosch (2015) para investigação com professores de Ciências e Matemática
Fonte: Barquero & Bosch (2015)



Na Figura 1 indicamos um itinerário de investigação realizado na investigação de Barquero & Bosch (2015), com ambiente modelizado no contexto universitário. Observamos, porém, que os autores desenvolveram uma Engenharia Didática de Formação e, determinadas modificações e a natureza das relações são consideradas, na medida em que, ocorre um significativo interesse maior pelos fenômenos derivados da aprendizagem idionssincrásica do adulto e, neste caso, uma consideração maior e substancial pela aprendizagem do professor de Matemática.

Podemos observar que, a despeito do itinerário das fases da Engenharia seguir as quatro etapas clássicas, recordamos a perspectiva assinalada por Tempier & Chambris (2017) quando recordam que a noção de Engenharia retomada por Perrin-Glorian (2011) possui interesse na formação, na constituição de recursos para o professor e sua divulgação e, em tal *design* de investigação, “o desenvolvimento de recursos para o ensino constitui um dos objetivos da investigação” (Tempier & Chambris, 2017, p. 5). Assim, na figura 2, divisamos outros elementos contemplados e adaptados por nossa Engenharia de Formação (objetivos, concepção de um recurso, experimentação com professores em no contexto universitário de formação inciail, proposição de um recurso para professores e estudantes).

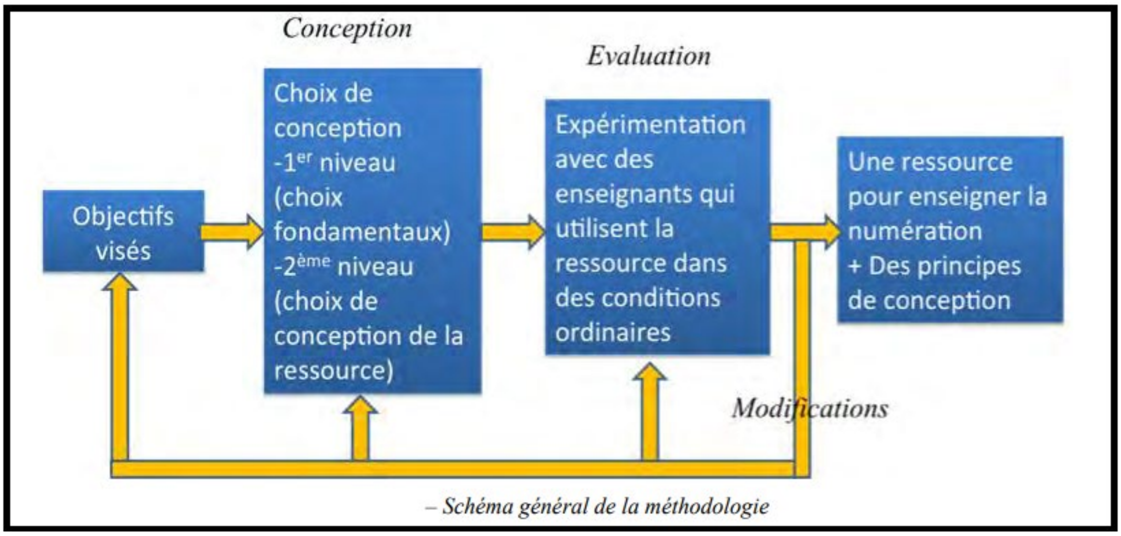
Quando assumimos os pressupostos de uma Engenharia Didática de Formação, assinalamos uma perspectiva de mudança de interesse investigativo. Nesse sentido, Tempier (2012, p. 894) assinala a necessidade de que essa metodología ou *design* consiste em “realizar uma escolha a priori à respeito de um recurso (aos dois níveis de engenharia), e testar/verificar sua validade por professores, diante de situações profissionais (ao menos com cinco anos de esperiência)” (Ver figura 2).

Por sua vez, em sua tese de doutorado, Tempier (2013) manifestou o interesse pela concepção de situações que permitissem a mobilização dos conhecimentos dos professores a respeito a determinado conteúdo matemático e, a “descrição de um recurso aceitável e utilizável pelos professores”. (Tempier, 2013, p. 11). Pouco mais adiante, o autor declara que “a concepção de situações deve ser baseada em um estudo aprofundado da contagem e da escrita. Mas, para permitir sua importação para as aulas comuns, também deve levar em consideração as condições e restrições do ensino atual desse conceito.” (Tempier, 2013, p. 12).

Na Figura 2 visualizamos um itinerário desenvolvido pelo pesquisador francês, que trabalhou com uma amostra de professores com experiência não inferior a cinco anos. Cabe recordar que toda a história evolutiva da noção de Engenharia pode ser compreendida a partir da evolução da Teoria da Situações e recíprocamente (Perrin-Glorian, 1999). Dessa forma, para a concepção de situações didáticas, adotamos os principios organizadores e de modelação em situações de ensino, antevistos e previstos para o saber matemático (*le savoir mathématique*), segundo ao conjunto de situações de dialética de ação, dialética de formulação, dialética de validação e a dialética de institucionalização. (Brousseau, 1997). Ainda sobre a Figura 2, assumimos o emprego da Teoria da Situações no momento de concepção (*conception*) e de experimentação e avaliação (*evaluation*), como identificamos no diagrama proposto por Tempier (2012). Finalmente, a partir de modificações e dos ajustes necessários, prevemos a proposição de um recurso didático para professores de Matemática, afim de um incremento sobre a noção de sequências numéricas.

Figura 2 – Tempier (2012) descreve o desenvolvimento e esquema geral de sua metodología de invesigação no contexto da formação

Fonte: Tempier (2012, p. 895).



4. Análises preliminares e *a priori*: adaptações necessárias

De modo *standard*, na primeira etapa de uma Engenharia Didática, Artigue (2015) assinala o interesse pelo desenvolvimento de uma análise epistemológica:

> Uma análise epistemológica do conteúdo em jogo, geralmente incluindo uma parte histórica. Essa análise ajuda os pesquisadores a fixar os objetivos precisos do DE e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Também apóia a busca de situações matemáticas representativas do conhecimento visado, o que a teoria das situações didáticas chama de situações fundamentais. São situações problemáticas para as quais o conhecimento é necessário ou, em certo sentido, ideal. A análise epistemológica ajuda os pesquisadores a tomar a posição reflexiva e a distância necessárias em relação ao mundo educacional em que estão inseridas e a construir um ponto de referência. (Artigue, 2015, p. 472)

De modo *standard*, nas análises preliminares, ocorre uma demarcação do campo epistêmico de interesse, a partir da identificação de um problema relevante, quase sempre relacionado com questões que convergem para o interesse no ensino. A concepção e análise a priori, é o momento onde são escolhidas as variáveis, podendo ser macrodidáticas ou microdidáticas, das quais serão discutidas mais adiante durante a concepção das situações didáticas. Após a escolha das variáveis, o docente deverá então construir as situações problema de acordo com o campo epistêmico-matemático desenvolvido, para então serem aplicadas posteriormente com os estudantes, visando alcançar os objetivos da pesquisa. Mais uma vez, assinalamos o pensamento categórico de Artigue (2015), quando esclarece que:

> A concepção e a análise *a priori* é uma fase crucial da metodologia. Baseia-se nas análises preliminares realizadas e é o local em que as hipóteses de pesquisa são explicitadas e engajadas na concepção de situações didáticas, onde construções teóricas são postas à prova. A concepção requer um número de opções e estas se situam em diferentes níveis. Algumas escolhas conduzem o projeto global e, nesse caso, é comum falar em macro-escolhas;

> alguns estão situados no nível de uma situação específica e, nesse caso, é comum falar em microchoices. Essas escolhas determinam variáveis didáticas, portanto, temos variáveis macrodidáticas e micro-didáticas. Essas variáveis condicionam o meio, assim as interações entre os alunos e o conhecimento, as interações entre os alunos e entre os alunos e o professor, assim as oportunidades exatas que os alunos têm para aprender, como e o que podem aprender. De acordo com os fundamentos teóricos da DE, nessas escolhas deve-se prestar atenção especial à relevância epistemológica dos problemas apresentados e à responsabilidade matemática dada aos alunos. (Artigue, 2015, p. 473).

Por outro lado, desde que assumimos os pressupostos de uma (EDF), determinadas preocupações são acrescidas ao nosso itinerário investigativo, por envolver professores em formação. Nesse sentido, Tempier (2016) esclarece que:

> Assim, na Engenharia Didática para o desenvolvimento, a natureza da parceria professor/pesquisador varia de acordo com as questões de pesquisa/desenvolvimento em jogo. Primeiro de tudo, é necessário a colaboração entre pesquisadores e alguns professores para projetar versões iniciais do recurso. Em segundo lugar, para estudar a disseminação do recurso no ensino comum, é necessário desenvolver experimentos para os quais os professores não façam parte da equipe de pesquisa. Essa fase levanta novas questões que podem levar os pesquisadores a colaborar mais estreitamente, para que eles possam desenvolver soluções baseadas nas práticas dos professores. (Tempier, 2016, p. 274).

Com o amparo das reflexões de Tempier (2013; 2016), ajustamos determinadas variáveis consideradas como invariantes na amostra de trabalhos considerados no presente estudo. De fato, Tempier & Chambris (2017, p. 290) comentam que "históricamente, a metodologia da Engenharia Didática é associada ao quadro teórico da Teoria Situações Didáticas". Assim, para o desenvolvimento das três primeiras fases da Engenharia, a Teoria Situações Didáticas proporciona o desenvolvimento da Engenharia e, concorrem para análise dos dados coletados da experimentação em sala de aula. Observamos que "essas análises levam ao desenho de um recurso para professores, que deve permitir a apropriação dos desafios de situações e fornecer itens para implementação em sala de aula". (Tempier & Chambris, 2017, p. 299).

Ademais, cada situação proposta no recurso para professores, podemos identificar um itinerário de fases semelhantes ao proposto por Tempier & Chambris (2017), a saber: A primeira fase descreve os desafios da situação através de uma apresentação do problema, técnicas e das dificuldades dos alunos (professores), conhecimento matemático, papel de determinadas variáveis didáticas etc., A segunda fase fornece elementos para a implementação pelo professor: material, descrição das etapas de implementação (pesquisa, agrupamento e síntese), descrição do problema com exemplos e variáveis didáticas. Por fim, a terceira fase parte propõe elementos para a determinação da institucionalização do conhecimento matemático em jogo.

5. Alguns resultados sobre pesquisas desenvolvidas em (2017 – 2020)

Na presente seção, abordaremos a discutiremos alguns resultados representativos de pesquisas desenvolvidas no período de (2017 – 2020), envolvendo um grupo de cerca de 30 professores de Matemática no Estado do Ceará, na cidade de Fortaleza, consideradas no estudo de Dos Santos (2017) e de Oliveira (2018).

Antes, porém, observamos determinadas características da fase de coleta e exame de dados, ao longo de uma Engenharia Didática (ED), como explica Artigue (2015).

> Durante a fase de realização, os dados são coletados para a análise *a posteriori*. A natureza dos dados coletados depende dos objetivos precisos do DE, das hipóteses postas à prova nele e das conjecturas feitas na análise a priori. No entanto, é dada especial atenção à coleta de dados que permite ao pesquisador entender a interação dos alunos com o meio e até que ponto essa interação apóia sua passagem autônoma das estratégias iniciais para as estratégias visadas e analisar os processos de desconcentração e institucionalização. (Artigue, 2015, p. 474).

No trecho seguinte, assinalamos o relato de um professor de Matemática, quando compreendeu o processo de extensão da sequência de Fibonacci, investigado no trabalho de dissertação de Dos Santos (2017).

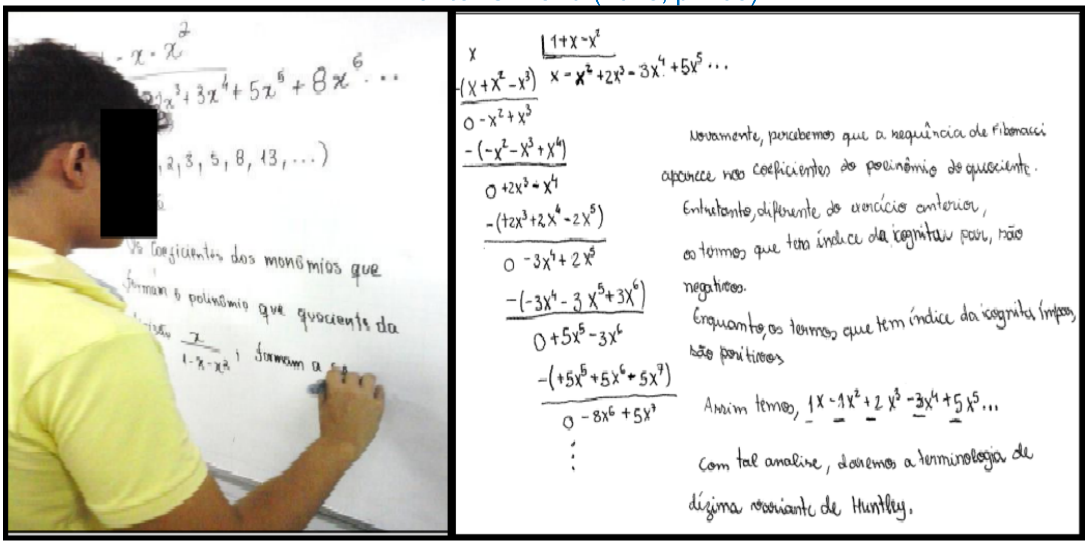
> “[...] a surpresa foi que até então para os naturais eu já conhecia, agora quando chegou na terceira questão, e foi tratar em relação ao f0, f-1 e f-2 pra mim não poderia acontecer, porque até onde eu conhecia a sequência de Fibonacci era só para números naturais [...]” (Dos Santos, 2017, p. 103)

A dissertação de Oliveira (2018) pode ser caracterizada como uma segunda parte ou continuidade da dissertação de Dos Santos (2017), posto que considera um campo epistemológico ampliado da sequência de Fibonacci e não apenas seus elementos pitorescos e de ordem episódica (Alves, 2015; 2017). Abaixo, um professor participante (em formação inicial) do estudo de Oliveira (2018) manifesta compreensão sobre o processo de generalização da sequência de Fibonacci.

> “[...] a fórmula da primeira é muito básica, elementar. Na segunda ele aperfeiçoou o que já existia, acrescentou as variáveis, agora dá pra trabalhar com polinômios a partir dessas fórmulas. Na última linha, ele já trabalhava com polinômios só que aí no Fibonacci, ele vai trabalhar nos complexos. Sempre tendo uma extensão [...]” (Oliveira, 2018, p. 185)

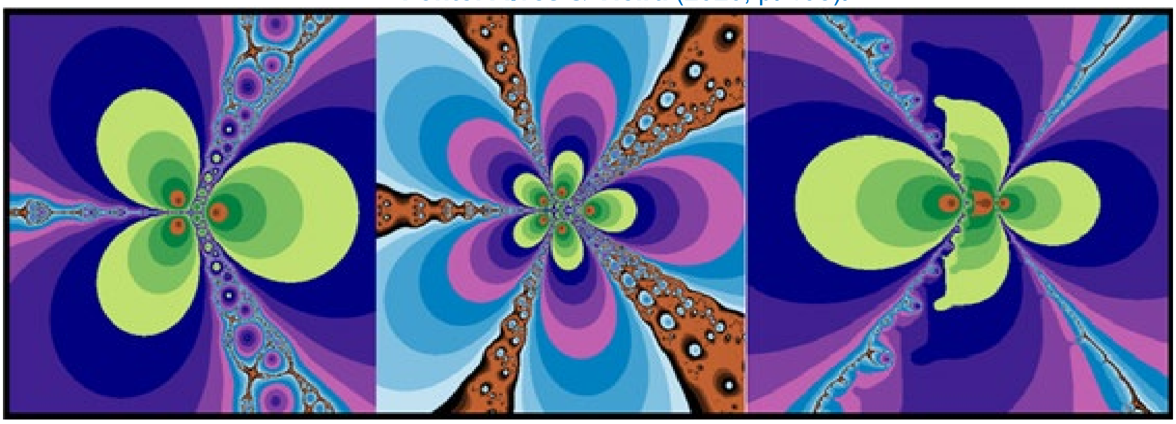
Na Figura 3, Oliveira (2018) discutiu a atividade desenvolvida por um professor participante do seu estudo, quando detalhou determinadas propriedades da sequência generalizada de Fibonacci, a partir de representações algébricas polinomiais e a inserção de variável real e de uma variável complexa ao modelo e/ou sua fórmula de recorrência. Na figura 3 visualizamos a atividade de um professor envolvendo um processo de exame do modelo de Fibonacci (Alves, 2017), com a inserção de uma variável real e sua descrição polinomial.

Figura 3 – Oliveira (2018) desenvolveu uma pesquisa com um campo epistémico ampliado sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci (SGF)
Fonte: Oliveira (2018, p. 195).



Podemos observar, ao lado direito, um processo de divisões sucessivas de polinômios que permitem a identificação de funções geradoras e os números de Fibonacci se apresentam em seus coeficientes. (Ver Figura 3). Por sua vez, cada vez mais, registramos a interface da Matemática com a tecnologia. Desse modo, podemos mencionar alguns trabalhos que permitem visualizar determinadas propriedades geométricas, via fractais 2D/3D, derivados diretamente de sequências recorrentes. Para exemplificar, na Figura 4, visualizamos alguns fractais 2D relacionados com a sequência de Merssenne.

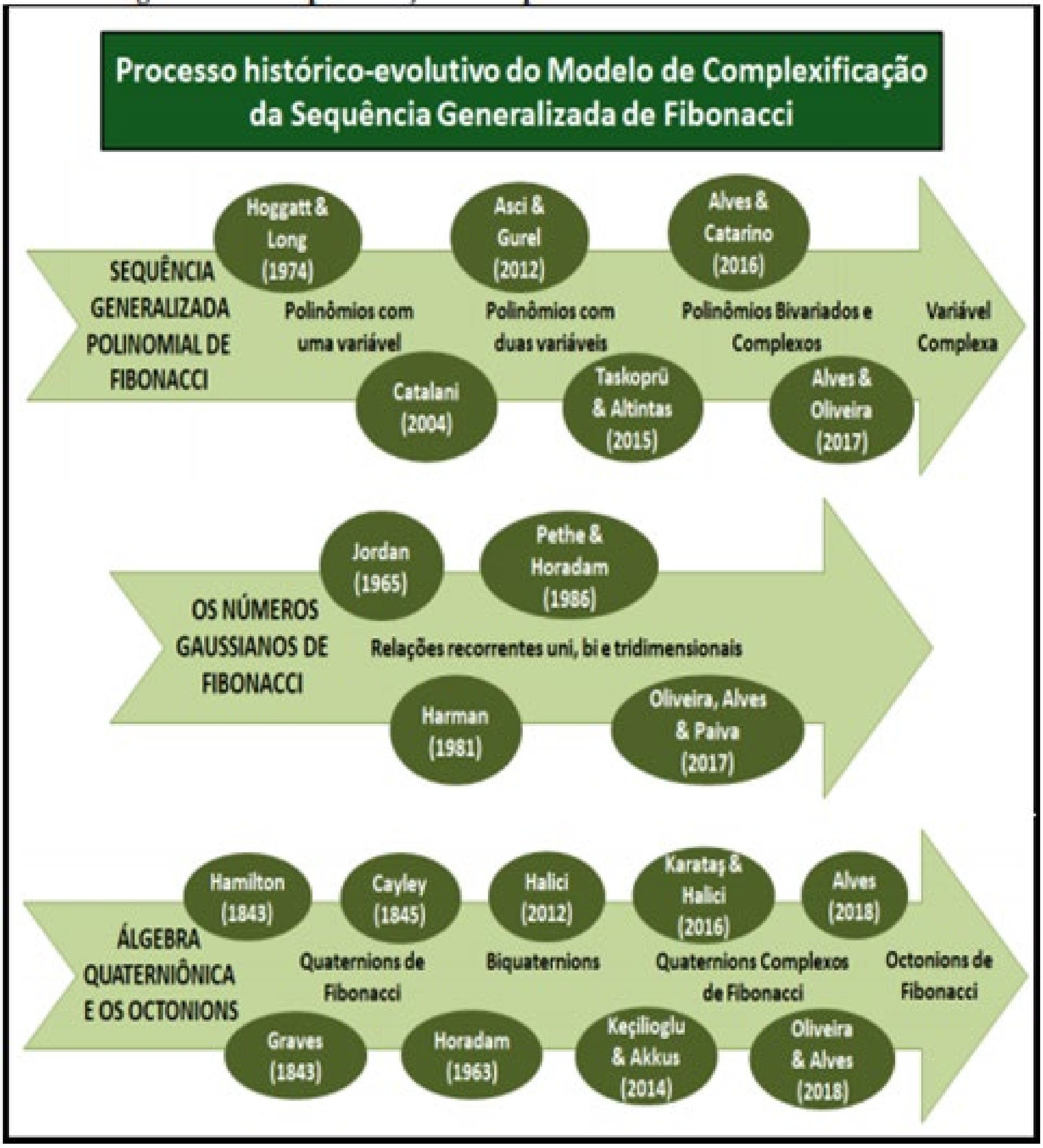
Figura 4 – Alves & Vieira (2020) discutem propriedades dos fractais da sequência de Leonardo e Mersenne.
Fonte: Alves & Vieira (2020, p. 195).



Mais recentemente, registramos em nossos trabalhos (Alves; Catarino & Mangueira, 2019; Alves & Vieira, 2020) uma abordagem que acentua a importância da visualização no ensino, da percepção e da intuição matemática, mediante representações fractais (ver acima, na Figura 4) relacionadas com as sequências de Mersenne e de Leonardo. Outros exemplos podem ser consultados nos trabalhos de Alves & Vieira (2020) e em Alves, Catarino & Mangueira (2019).

Para concluir, exibimos na Figura 5, Oliveira (2018) apresenta um cenário de desenvolvimento histórico, matemático e epistemológico. O viés histórico, discutido por Oliveira (2018), se caracterizou pelo interesse de gênese das ideias primitivas relacionadas com a sequência de Fibonacci. O componente epistemológico discutido por Oliveira (2018) se consubstancia pelos processos de sistemátização e evolução de ideias e novos modelos especializados, que confirmam um estádio dinâmico de evolução científica. Por fim, o componente matemático se torna visível, na medida em que, varios matemáticos, de inúmeros países, manifestam o interesse pela SGF.

Figura 5 – Oliveira (2018) desenvolveu uma pesquisa com um campo epistémico ampliado sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci (SGF)
Fonte: Oliveira (2018, p. 95).

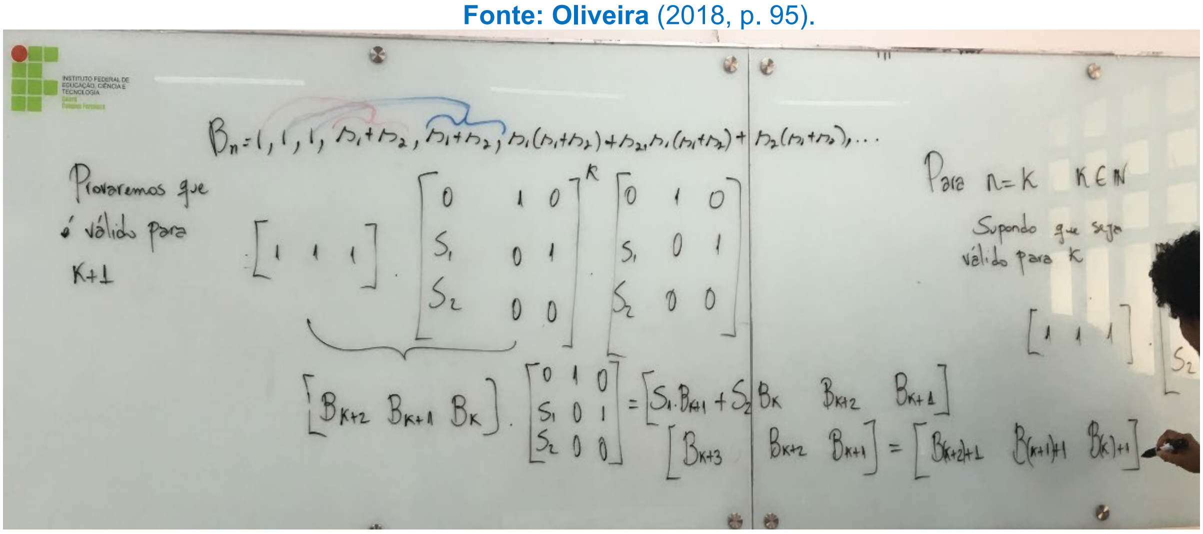


6. Pesquisas em desenvolvimento (2020 – 2023) e futuras investigações

Nas seções predecessoras indicamos alguns resultados alcançados a respeito de publicações científicas e pesquisas desenvolvidas no período (2017 – 2020). Na seção atual discutiremos alguns elementos preliminares que correspondem aos dados iniciais de investigações em pleno desenvolvimento e previstas para o periodo (2020 – 2023). Por conseguinte, indicamos os seguintes estudos investigativos em andamento: uma Engenharia de Formação sobre a Sequência Generalizada de Coordonier ou Padovan e a sequência de Lucas (Guedes, 2020) e Narayanna (Sridharan; Sridharan & Srinivas, 2015); uma investigação histórico epistemológica sobre sequências recorrentes n dimensionais; sobre o processo de hibridização de sequências recorrentes (Mangueira; Alves & Catarino, 2020; Mangueira & Alves, 2020); uma Engenharia de Formação sobre a Sequência de Narayanna (Bezerra; Alves & Vieira, 2020); uma Engenharia de Formação sobre a Sequência de Oresme.

Para exemplificar, assinalamos, na Figura 6, a atividade descoberta de propriedades da sequência de Padovan ou de Coordonier. Na Figura 6, um professor participante de uma pesquisa em andamento, empregou o modelo de indução matemática correlacionado com propriedades matriciais relacionadas com a SGC.

Figura 6 – Pesquisa em andamento sobre a sequência de Padovan ou de Coordonier
Fonte: Oliveira (2018, p. 95).



Para exemplificar, apresentamos a explicação do professor participante da situação didática (no momento ou fase de institucionalização) desenvolvida e que podemos visualizar na Figura 6. Após utilizar propriedades matriciais, o professor compreendeu a relação das representações matriciais com sua representação via sistema lineares, quando declarou que:

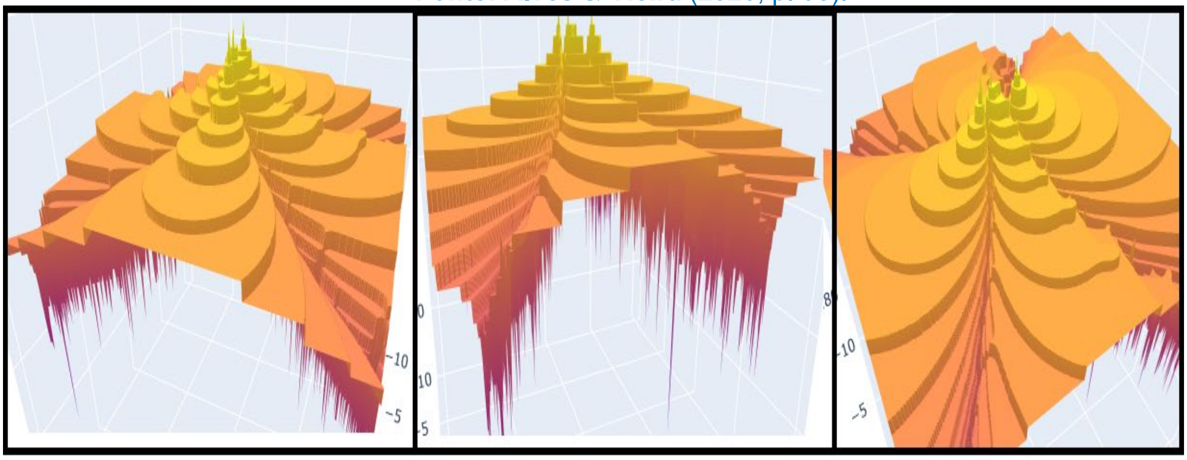
> [...] essa fórmula será basicamente igual a de Padovan, sendo que durante a resolução do sistema de equações lineares, devemos inserir os valores iniciais generalizados para obter a nova fórmula de Binet desses números similares aos de Padovan [...].

Para exemplificar, apresentamos a explicação do professor participante da situação didática (no momento ou fase de institucionalização) que manifestou seu entusiasmo na descoberta de propriedades matemática relacionadas com determinadas sequências recorrentes. Foram fornecidos, apenas aos professores participantes da investigação, alguns exemplos de utilização da tecnología, quando foram exibidos alguns fractais (3D) relacionados com a sequência de Padovan ou de Coordonier, como exemplificamos na Figura 7 um estudo de fractais 2D/3D. Tal cenário de aprendizagem apresentado aos professores constitui elemento importante para sua formação inicial.

> [...] me senti construindo o meu próprio conhecimento, ainda mais porque eu nunca tinha visto essa sequência antes, nem na matemática e muito menos dessa forma que está sendo repassado para a gente. Alguns desses assuntos não são encontrados na literatura, isso mostra mais interesse da gente diante da resolução dos exercícios [...].

Na Figura 7, divisamos o emprego da tecnología no contexto de ensino.

Figura 7 – Visualização de fractais 3D relacionados com a sequência de Padovan com o uso do *Google Colaab* apresentados aos professores
Fonte: Alves & Vieira (2020, p. 95).



Na Figura 8 trazemos uma desenho esquemático ou diagrama evolutivo da sequência de Padovan ou de Coordonier. De forma semelhante ao diagrama proposto por Oliveira (2018), extraimos uma compreensão sobre o indene e irrefreável processo de evolução epistemológica, acrescido pelo interesse de pesquisadores internacionais, em torno da especialização e generalização da SGP. Na Figura 9, os professores participantes de uma investigação em andamento sobre a sequência de Padovan ou de Coordonier podem adquirir uma compreensão sobre o interesse de matemáticos profissionais, na atualidade, sobre tal sequência.

Assinalamos, ainda, a investigação em andamento sobre a sequência de Narayanna, que representa a versão indiana e pouco divulgada e comentada nos compêndios de História da Matemática, correlacionada com a emblemática sequência de Fibonacci. Em Bezerra; Alves & Vieira (2020) podemos examinar recentes relações bidimensionais e tridimensionais derivadas da relação de recorrência original, e que indicamos na Tabela 1 por $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, $N_0 = 1, N_1 = 1$. Temos acentuado em nossos trabalhos, um expediente que permite uma compreensão de um processo epistemológico e evolutivo, desde seu estado de nascedouro, até o estádio atual, o que confirma um componente não estático do saber matemático.

De forma semelhante ao fluxograma indicado na Figura 8, buscaremos descrever o mesmo diagrama correlacionado com a sequência generalizada de Narayanna, o que confirma o seu processo histórico dinâmico e evolutivo, no contexto da matemática indu (Dutta, 2002; Murthy, 2009; Plofker, 2007), há séculos passados, até os días atuais. Podemos observar que na matemática indiana, identificamos o antigo matemático Narayanna Pandita, que viveu cerca de 1356 a. C. desenvolveu varios métodos métricos e numéricos semelhantes aos que foram estudados e adquiriram maior visibilidade histórica, graças ao trabalho de Leonardo de Fibonacci séculos depois (Singh, 1985). Introduziremos um exemplo de uma nova definição.

Definição 3: A sequência bidimensional de Narayanna é descrita pela seguinte recorrência $\begin{cases} N(n+1,m)=N(n,m)+N(n-2,m) \\ N(n,m+1)=N(n,m)+N(n,m-2) \end{cases}$, em que, definimos os seguintes valores iniciais $N(0,0)=0, N(1,0)=1, N(0,1)=i, N(0,2)=i, N(1,1)=1+i$, $N(1,2)=1+i$, $N(2,1)=1+i$, $N(2,2)=1+i$ e a unidade imaginária i, definida por $i^2=-1$. (Bezerra; Alves & Vieira, 2020).

Na Figura 8, visualizamos um fluxograma que revela um paulatino e dinâmico processo de contribuição e contrução do saber científico e matemático em termos da sequência de Padovan, a sequencia correlata com a sequência de Fibonacci, todavia, desconsiderada pelos autores de compêndios de História da Matemática. Um pouco mais adiante, na Figura 9, observamos a atividade de um professor imerso em um cenário de investigação sobre a sequência de Padovan ou de Coordonier.

Figura 8 – Descrição histórico, epistemológica e evolutiva sobre a sequência de Padovan ou de Coordonier
Fonte: Arquivos do pesquisador

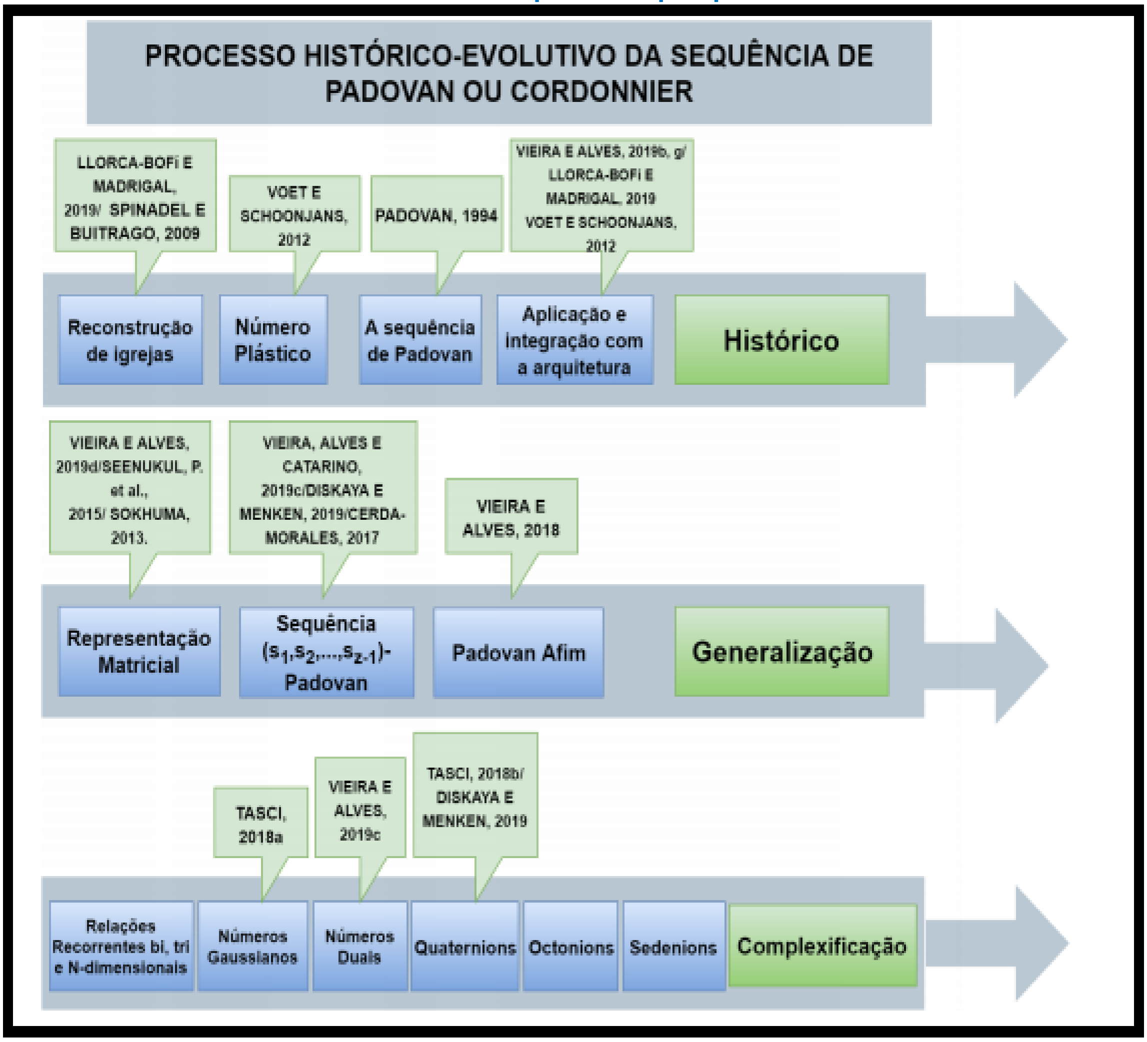
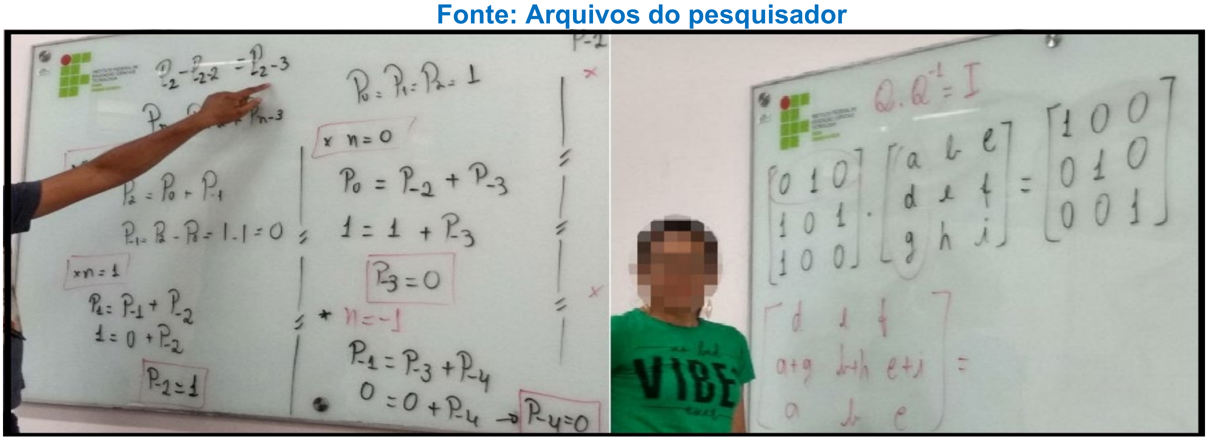


Figura 9 – Oliveira (2018) desenvolveu uma pesquisa com um campo epistémico ampliado sobre a Sequência Generalizada de Fibonacci (SGF)
Fonte: Arquivos do pesquisador



Na Figura 10, mostra-se uma descrição com base no trabalho de Huntley (1985), em que é realizada uma divisão direta da fração racional $\frac{1}{1-x^2-x^3}$, obtendo os termos da sequência de Padovan ou Coordonier. Podemos realizar essa divisão, utilizando o *software Maxima*, sendo, portanto, um recurso computacional gratuito, desenvolvido para realizar cálculos matemáticos, possibilitando a manipulação de expressões algébricas, a plotagem de gráficos e a constatação do uso da tecnologia.

Figura 10 – Investigação de propriedades da sequencia de Padovan ou de Coordonier com o auxílio do *software Maxima* discutido com os professores
Fonte: Arquivos do pesquisador

(%i1) 1/(1-x^2-x^3);

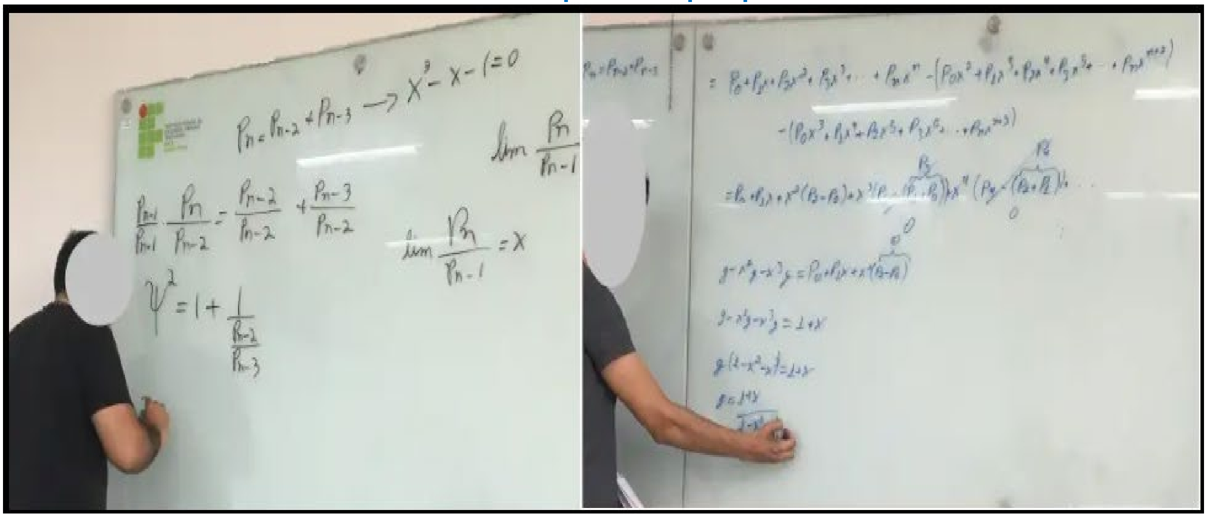
(%o1) $\frac{1}{-x^3-x^2+1}$

(%i2) taylor(1/(-x^3-x^2+1), x, 0, 70);

(%o2)/T/ $1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+4x^8+5x^9+7x^{10}+9x^{11}+12x^{12}+16x^{13}+21x^{14}+28x^{15}+37x^{16}+49x^{17}+65x^{18}+86x^{19}+114x^{20}+151x^{21}+200x^{22}+265x^{23}+351x^{24}+465x^{25}+616x^{26}+816x^{27}+1081x^{28}+1432x^{29}+1897x^{30}+2513x^{31}+3329x^{32}+4410x^{33}+5842x^{34}+7739x^{35}+10252x^{36}+13581x^{37}+17991x^{38}+23833x^{39}+31572x^{40}+41824x^{41}+55405x^{42}+73396x^{43}+97229x^{44}+128801x^{45}+170625x^{46}+226030x^{47}+299426x^{48}+396655x^{49}+525456x^{50}+696081x^{51}+922111x^{52}+1221537x^{53}+1618192x^{54}+2143648x^{55}+2839729x^{56}+3761840x^{57}+4983377x^{58}+6601569x^{59}+8745217x^{60}+11584946x^{61}+15346786x^{62}+20330163x^{63}+26931732x^{64}+35676949x^{65}+47261895x^{66}+62608681x^{67}+82938844x^{68}+109870576x^{69}+145547525x^{70}+\ldots$

Na fase dialética da institucionalização, prevista pela Teoria das Situações, se mostrou imprescindível a confrontação do modelo matemático formal com o modelo computacional, a depender do sistema computacional algébrico empregado para produzir representações com uma determinada sequência recorrente (ver Figura 10).

Figura 11 – Investigação de propriedades da sequencia de Padovan ou de Coordonier
Fonte: Arquivos do pesquisador



Para finalizar, quando consideramos a Figura 11, observamos um conjunto de atividades desenvolvidas por um professor participante de pesquisa em andamento sobre a sequência de Padovan ou de Coordonier (Vieira, Alves & Catarino, 2020). Os professores participantes seguem um percurso inicial de estudo sobre as sequências mais discutidas por livros de História da Matemática. Em nosso caso, propriedades clássicas e outras examinadas diretamente em *papper* de divulgação científica sobre a sequência de Fibonacci e de Lucas (Guedes, 2020).

De forma semelhante ao caso da sequência de Fibonacci, que podemos extrair o número de outro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ largamente discutido na literatura. Na situação didática que indicamos na figura 11, o professor, a partir da relação de recorrência que indicamos na Tabela 1, descrita por $C_{n+1} = C_{n-1} + C_{n-2}$, $C_0 = 1, C_1 = 0$, determinou a equação polinomial característica $x^3 - x - 1 = 0$ (ver figura 11 ao lado esquerdo) que, como explica Iliopoulos (2015), possui uma única raíz real, cujo valor aproximado é indicado na surpreendente relação $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}} = \psi = 1.324718... \approx \frac{4}{3}$.

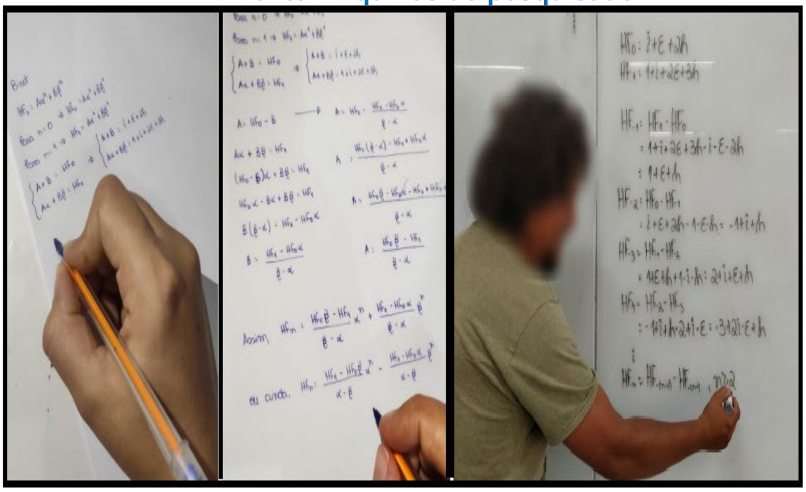
Decerto que, diante dos fatores limitantes do trabalho atual, escolhemos apresentar apenas alguns indícios dos dados produzidos por parte de uma amostra prevista e estimada de 60 professores de Matemática, tomados com referência no período de (2017 – 2020) e (2020 – 2023). Assinalamos, entretanto, alguns elementos norteadores para os trabalhos investigativos em curso:

- Identificação e descrição de relações envolvendo os números figurais 2D/3D e n-dim com a noção de sequências recorrentes de 2ª ordem e a descrição de sequências de ensino, envolvendo o uso do *software GeoGebra*. (Barros & Alves, 2020);

- Identificação e descrição de relações envolvendo os números híbridos (Ozdemir, 2018), descritos por $h = a + bi + c\varepsilon + dh$, em que $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1$, com a noção de sequências numéricas recorrentes de 2ª ordem e a descrição de sequências estruturadas de ensino (Mangueira & Alves, 2020; Mangueira, Alves & Catarino, 2020).

Para ilustrar, na Figura 12 apresentamos a imagem de uma atividade, em sala de aula, de formalização desenvolvida por um professor de Matemática envolvendo a noção de número híbrido $h = a + bi + c\varepsilon + dh$ e da sequência recorrente de Mersenne. Outros detalhes sobre o assunto, sugerimos ao leitor consultar diretamente o trabalho de Mangueira & Alves (2020).

Figura 12 – Exemplo de aplicação e sequência de ensino para a noção de número híbrido de Mersenne
Fonte: Arquivos do pesquisador



7. Considerações finais

Nas seções predecessoras apresentamos alguns exemplos de resultados de pesquisas desenvolvidas no Brasil, no periodo de (2017 – 2020) e, ainda, apontamos determinados indicadores preliminares de interesse de algumas investigações em curso, previstas para o periodo de (2020 – 2023). Mencionamos, aquí, alguns trabalhos desenvolvidos no contexto da formação inicial e continuada de professores de Matemática, com um interesse maior pela divulgação científica, pela cooperação internacional e sobre a promoção inequívoca de uma cultura matemática que estimula ampliar e, ainda, propagar os conhecimentos profissionais restritos dos professores de Matemática acerca da noção de sequências numéricas recorrentes (Alves & Catarino, 2019; Alves, Vieira & Catarino, 2020; Vieira, Alves & Catarino, 2020).

Nesse sentido, a adoção de um *design* investigativo, denominado de Engenharia Didática de Formação, com amplo papel de relevância para a vertente francesa da Didática da Matemática, associado ao conjunto de premissas assumidas pela Teoria das Situações Didáticas, possibilitou conceber e desenvolver um aparato e um amplo itinerário de investigações, com objetos matemáticos bem definidos e precisos (ver Tabela 1) e com o interesse nos vieses históricos, matemáticos e epistemológicos. Robert (2005) adverte o caráter de imprescindibilidade da pesquisa sobre formação (profissional) de professores e a proposição de dispositivos atualizados.

> Há pouca pesquisa significativa no ensino de matemática sobre o treinamento profissional real (inicial ou contínuo) de professores de matemática do ensino médio. Seja na França ou no exterior, há cada vez mais propostas de treinamento substanciadas em referência a vários trabalhos, pouco avaliados. (Robert, 2005, p. 210).

Não podemos desconsiderar, ainda, um movimento de cooperação científica envolvendo estudantes brasileiros e pesquisadores do Brasil e de Portugal, cujos trabalhos na pesquisa em Matemática Pura impulsiona inúmeros desdobramentos e na promoção e concepção de sequências didáticas estruturadas de ensino sobre assuntos costumeiramente restritos a apenas presentes em *papper* (ver definições 1 e 2) e outras introduzidas, como consequência da pesquisa (ver a definição 3). Com origem nesse preservado processo de cooperação científica Brasil x Portugal, assinalamos as possibilidades de vislumbrar ulteriores desdobramentos e generalização de inúmeras propriedades matemáticas, mediante a sua interface com a tecnologia atual, mediante o uso de *softwares*, tais como: *GeoGebra*, *CAS Maple*, *Maxima* e *Google Colaab*. (Ver exemplos das Figuras 4, 7, 10, 13 e 14).

Ademais, com o amparo no pensamento de Tempier (2015), o desenvolvimento de pesquisas, a partir de um contexto histórico, matemático e evolutivo, deve proporcionar uma clara visão sobre o assunto, por intermédio de situações didáticas vivenciadas por professores, tanto em formação inicial ou continuada. Ademais, o recurso didático também deve "apresentar recursos que incentivem os professores a usá-lo (apontando dificuldades encontradas pelos alunos, por exemplo), fornecer aos professores uma visão complementar do conceito e, possivelmente, estender-se a outros conceitos". Para concluir, assinalamos a cooperação científica envolvendo pesquisadores portugueses. De fato, a pesquisa matemática desenvolvida na Europa, de modo *standard*, ocorre restrita ao selecionado circuito científico de divulgação, proporciona objetivarmos possíveis desdobramentos e repercussão, tendo em vista o contexto da formação (inicial ou continuada) de professores de Matemática. Resgatando, ainda, o pensamento de Tempier (2012), o recurso aqui proposto pode possuir dois interesses, não mutuamente exclusivos, a saber: tanto a formação de professores, bem como a aprendizagem básica de estudantes.

Figura 13 – Exemplo de utilização da tecnología na exploração e visualização de propriedades da sequência de Leonardo com o *Google Colaab*
Fonte: Alves; Vieira & Catarino (2020)

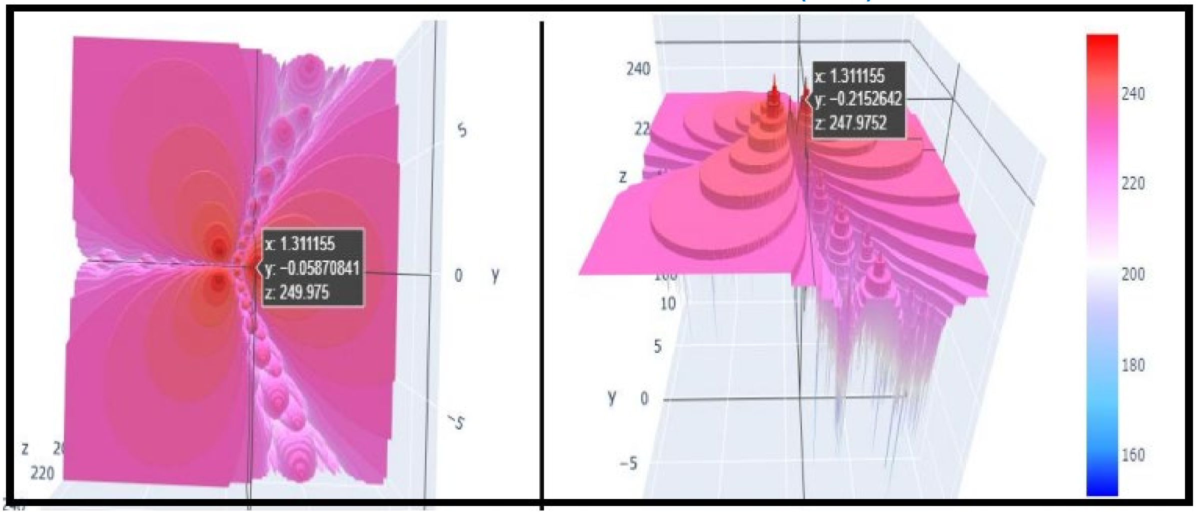
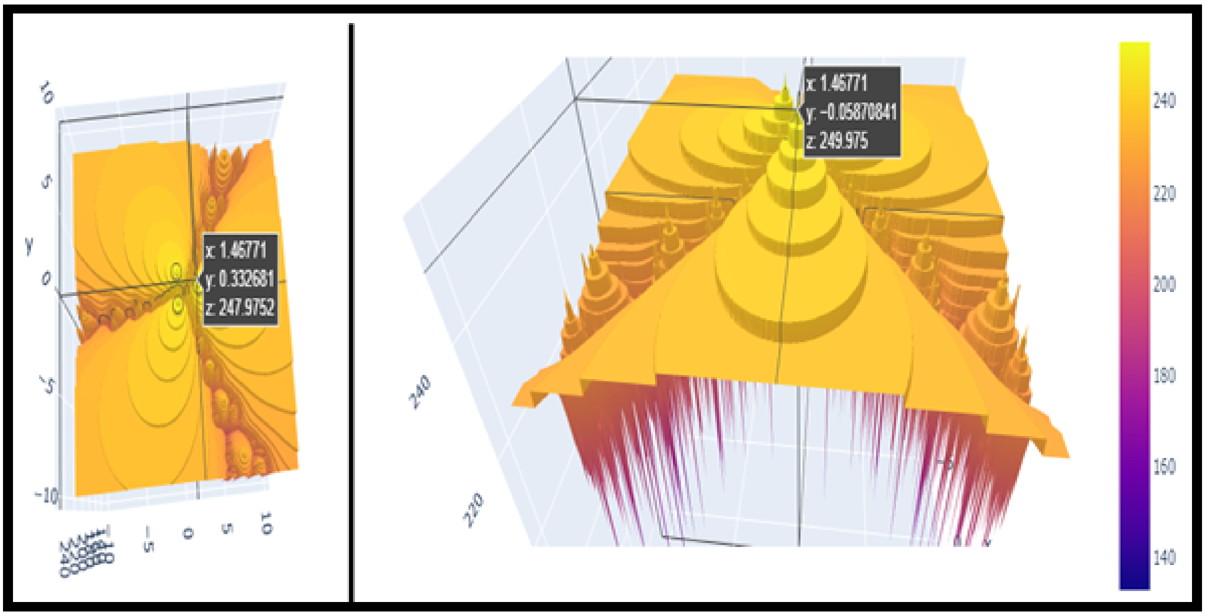


Figura 14 – Exemplo de utilização da tecnología na exploração e visualização de propriedades da sequência de Narayanna com o *Google Colaab*
Fonte: Alves; Vieira & Catarino (2020)



Bibliografía

Alfred, Brother, U. (1969). *An Introduction to Fibonacci Discovery*, The Fibonacci Association, Houghton Mifflin Company: USA.

Alves, F. R. V. (2015). Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de fibonacci - FHF. *Revista Vidya* (Santa Maria. Online), *35(2)*, 133 -145.

Alves, F. R. V. (2016). Engenharia didática para a generalização da noção de sequência de Fibonacci na disciplina de história da matemática: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), *18(1)*, 61/2-93.

Alves, F. R. V. (2017a). Fórmula de de Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci - SGF. *Revista Brasileira de História da Matemática*, *17(2)*, 1-16. Recuperado el 10 de janeiro de 2020.

Alves, F. R. V. (2017b). Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s, t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. *Unión (SAN CRISTOBAL DE LA LAGUNA)*, *51(3)*, 83 -106. Recuperado el 10 de janeiro de 2020.

Alves, F. R. V. (2018a). The Quaterniontonic and Octoniontonic Fibonacci Cassini´s Identity: An Historical Investigation with the Maple´s Help. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13(2)*, 1-14. Recuperado el 10 de janeiro de 2020.

Alves, F. R. V. (2018b). Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC) Didactical Engineering: about the teaching of generalized Catalan numbers. *Educação Matemática Pesquisa*, *20(2)*, p.

47 -83. Recuperado el 10 de janeiro de 2020, de https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36808

Alves, F. R. V. (2016). Didática da Matemática*: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. Revista Interfaces da Educação**,* *7(21)*, 131 – 150. Recuperado el 10 de janeiro de 2020, de https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces article / /viewFile/1259/1183

Alves, F. R. V. & Vieira, R. P. M. (2020). The Newton Fractal´s Leonardo Sequence Study with the Google Colab. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15(2)*, 1-9. Recuperado el 12 de julho de 2020, de https://www.iejme.com/article/the-newton-fractals-leonardo-sequence-study-with-the-google-colab-6440

Alves, F. R. V.; Catarino, M. P. & Mangueira, M. M; (2019). Discovering theorems about the gaussian mersenne sequence with the maple´s help: implications for the mathematical theachers in Brazil. *Annals. Computer Science Series*, *17(4*), 69-177. Recuperado el 12 de julho de 2020, de http://anale-informatica.tibiscus.ro/download/lucrari/17-2-24-Alves.pdf

Alves, F. R. V.; Vieira, R. P. M. & Catarino, M. P. (2020). Visualizing the Newtons Fractal from the Recurring Linear Sequence with Google Colab: An Example of Brazil X Portugal Research. *International Eletronic Journal of Mathematics Education*, *15(3)*, 1 – 19. Recuperado el 16 de julio de 2019, de https://www.iejme.com/article/visualizing-the-newtons-fractal-from-the-recurring-linear-sequence-with-google-colab-an-example-of-8280

Almouloud, Saddo Ag; De Queiroz, C. & Coutinho, Silva. (2008). *Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *3(1)*, pp. 62-77. Recuperado el 16 de julio de 2019, de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008v3n1p62/12137

Almouloud, Ag Saddo. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Artigue, M. (1989). *Ingénierie didactique. Publications mathématiques et informatique de Rennes,* 19(*S6), 124-128.* Recuperado el 16 de janeiro de 2020, de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1989___S6_124_0.pdf

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Berlin/Heidelberg: Springer, (pp. 159 – 160).

Artigue, M. (2015). Perspective on Design Research: the case of Didactical Engineering. In: A. Bikner-Ahsbahs and C. Knipping, ed. *Approaches to Qualitative*

Research in Mathematics Education Examples of Methodology and Methods, 1st ed. New York London: Springer Dordrecht Heidelberg, (pp. 467-496).

Barros, E. F.; & Alves, F. R. V. (2020). Funções geradoras dos números poligonais e dos números hipertetraédricos kdimensionais. *Revista eletrônica paulista de matemática*, *18(3)*, 1-12.

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. In (eds) Watson A. & Ohtani M. *Task design in Mathematics Education*. An ICME study 22, Springer International Publishing Switzerland, pp. 249-272.

Bell, E. T. (2012). *The Development of Mathematics*, New York: Dover Publications.

Bezerra, F. H.; Alves, F. R. V. & Vieira, R. P. (2020). Relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais de Narayanna. *Revista Paulista de Matemática*, *18(1)*, 20 – 35.

Boyer, C. A (2011). *History of Mathematics*, New York: Wiley.

Brousseau, B. A. (1971). *Linear Recursion and Fibonacci sequence*, The Fibonacci Association, Nova York: Houghton Mifflin Company.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Catarino, P. M.; (2015). A note on h(x) − Fibonacci quaternion polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals*, *77(4)*, 1 – 5.

Campos, H. et all. (2014). On Some Identities of k-Jacobsthal-Lucas Numbers, *8(10)*, 489 – 494.

Catarino, P. M.; Campos, H.; & Vasco, P. J. (2019). A note on k-Pell, k-Pell-Lucas and Modified k-Pell numbers with arithmetic indexes, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, *89(1)*, 97 – 107.

Catarino, P. M. C. (2016). The modified Pell and the Modified k-Pell Quaternions and Octonions, *Advances in Applied Clifford Algebra*, *26(2)*, 577 – 590.

Catarino, P. M. C. (2019). On *k*-Pell hybrid numbers, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, *22(1)*, 83 – 89. Recuperado el 16 de janeiro de 2020, de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09720529.2019.1569822

Catarino, P. M. C. & Borges, A. (2020). On Leonardo Numbers, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, *89(1)*, 71 – 86. Recuperado el 16 de janeiro de 2020, de http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/amuc/article/view/1005

Catarino, P. M. C.; & Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k-Pell-Lucas Sequence, *Applied Mathematical Sciences*, *7(98)*, 4867 – 4873. Recuperado el 16 de janeiro de 2020, de

Catarino, P. M. C.; & Vasco, P. (2017). On dual k-Pell quaternions and octonions, *Mediterranean Journal of Mathematics*, *14(75)*, 1 – 20.

Chevallard, Y. (1991). *La tranposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aires.

Cook, C. (2004). Some sums related to sums of Oresme numbers. In: Howard, F. T. *Application of Fibonacci numbers*. Dordrecht: Springer, 87 - 101.

Dos Santos, A. A. (2017). *Uma Engenharia Didática para a noção de sequência extendida de Fibonacci: uma experiência no contexto do IFCE* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil, 2017. Disponível em https://ifce.edu.br/fortaleza/pgecm/publicacoes/dissertacoes-defendidas

Dutta, A. K. (2002). Mathematics in Ancient India. *Resonance*, *1(1)*, 1-16.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática/Howard Eves*; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Feinberg, Mark. (1963). The Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonaci Quarterly*, *1(3)*, 67 – 71.

Gould, H. W. (1981). A history of the fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem, *The Fibonacci Quarterlly*, *19(3)*, 250 – 257.

Guedes, A. M. *Uma Engenharia Didática para o estudo da Sequência Generalizada de Lucas (SGL)* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil, 2020. Disponível em https://ifce.edu.br/fortaleza/pgecm/publicacoes/dissertacoes-defendidas

Harman, C. H. (1981). Complex Fibonaci Numebrs, *The Fibonacci Quarterly*, *19(1)*, 82 – 87.

Hodgkin, L. (2010). *A History of Mathematics: From Mesopotamia to Modernity*, Oxford: Oxford University Press.

Hoggat, Vernner, E. (1979), Fibonacci and Lucas Numbers, The Fibonacci Association, California: Houghton Mifflin Company, USA

Horadam, A. F, (1961). A generalized Fibonacci sequence, *Amer. Math. Monthly, 68 (5)*, 455–459.

Huntley, H. E. (1985). *A divina proporção*. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

Iliopoulos, V. (2015). The plastic number and its generalized polynomial, *Cogent Mathematics*, *2(1)*, 1 – 6.

Iver, M. (1961). Some Results on Fibonacci Quaternions, *The Fibonacci Quarterly*, *7(2)*, 201 – 211.

Lajoie, C et all. (2019). Former à aider un élève en mathématiques: une étude des potentialités d'un scénario de formation basé sur un jeu de rôles, *Can. J. Sci. Math. Techn. Educ*, *19(5)*, 168 – 188. Recuperado el 16 de julho de 2020, de https://link.springer.com/article/10.1007/s42330-018-0021-4

Mangueira, M. M.; Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. (2020). Números Híbridos de Mersenne, *Revista Paulista de Matemática*, *18(3)*, 1 – 25.

Mangueira, M. M. & Alves, F. R. V. (2020). Números híbridos de Fibonacci e de Pell, *Revista THEMA*, *17(1)*, 1 – 20.

Murthy, T. S. (2009). *A modern introduction to Ancient Indian*. New Delhi: New Age International Publishers.

Oliveira, R. R. (2018). *Engenharia Didática com o tema: relações bidimensionais, tridimensionais e n-dimensionais do modelo de Fibonacci* (dissertação de mestrado), Fortaleza: Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil. Disponível em https://ifce.edu.br/fortaleza/pgecm/publicacoes/dissertacoes-defendidas

Oliveira, R. R.; & Alves, F. R. V. (2019). An investigation of the Bivariate Complex Fibonacci Polynomials supported in Didactic Engineering: an application of Theory of Didactics Situations (TSD). *Revista Acta Scientiae*, *21(2)*, 170-195.

Ozdemir, M; (2018). Introduction to Hybrid Number, *Advances in Applied Clifford Algebras*, *28(1)*, 1 – 45.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, Recherches en didactique des mathématiques, *13(2)*, 5 - 118.

Perrin-Glorian, M. J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, *19(3)*, 279-322.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In Margolinas C.et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, pp. 57 – 74.

Perrin-Glorian, M. J. (2019). A l'interface entre recherche et enseignement, les ingénieries didactiques, *1er Congrès international de la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique*, 1 – 13.

Perrin-Glorian, M. J. & Bellemain, P. M. (2019). L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres, *Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online*, *9(1)*, 45 – 82.

Plofker, K. (2007). *Mathematics in India, The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China and Islam*. Pricenton: Princenton University.

Robert, A. (2005). De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré: un point de vue didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10(2)*, 209 – 249.

Singh, P. (1985). The So-called Fibonacci Numbers in Ancient and Medieval India, *Historia Mathematica*, *12(1)*, 229 – 244.

Sridharan, R. ; Sridharan; R. & Srinivas, M. (2015). Nārāyaa's Generalisation of Mātrāvotta-prastāra and the Generalised Virahāka-Fibonacci Representation of Numbers, *Indian Journal of History of Science*, *50(2)*, 227 – 244.

Stakov, A. (2009). *The Mathematics of Harmony*: *from Euclid to contemporary mathematics and computer science*, London: Word Scientific Press.

Tempier, F. (2012). Quelle ressource pour enseigner la numération décimale ? présentation d'une ingénierie didactique de développement en cours, In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT6, pp. 892–907).

Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19(3)*, 261 – 276.

Tempier, F.; & Chambris, C. (2017). Concevoie une ressource pour l´enseignment de la numération décimale de position, *Recherche En Didactique des Mathématiques*, *37(3)*, 289 – 332. Recuperado el 16 de janeiro de 2020, de https://revue-rdm.com/2017/concevoir-une-ressource-pour-l/

Vieira, R. P. M. & Alves, F. R. V. (2020). Engenharia Didática e a Sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e *a priori*. *Revista UNION Iberoamericana de Educação Matemática* (San Cristovan la Laguna), *16(58)*, 1 – 25.

Vieira, R. P. M.; Alves, F. R. V. & Catarino. P. M. (2020). Uma Engenharia Didática no procesos de investigação da generalização da Sequencia de Padovan: uma experiência em um curso de licenciatura. *Acta Ulbra*, 22(4), 1 – 20.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio e suporte financeiro no Brasil concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Agradecemos o apoio e suporte financeiro em Portugal pelos fundos nacionais através da FCT - Foundation for Science and Technology. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

Autores

Alves, Francisco Regis Vieira.

Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Professor Titular do Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – Fortaleza/CE, Brasil. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ - PQ2, Brasil. Docente do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática PGECM/IFCE. Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática ENCIMA/UFC. Docente do Mestrado Acadêmico em Educação Profissional e Tecnológica PROEPT/IFCE. Site pessoal: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles. E-mail: fregis@ifce.edu.br. ORCID: 000-0003-3710-1561

Catarino, Paula, M. Machado, Cruz.

Doutora em Matemática, área de especialização em semigrupos - álgebra, doutoramento concluído na Universidade de Essex, Reino Unido. É docente no departamento de Matemática, da Escola de Ciências e Tecnologia, da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. É Membro colaborador do Laboratório de Didática de Ciências e Tecnologia da UTAD/CIDTFF, da Universidade de Aveiro, Membro integrado do CMAT-UTAD, polo da UTAD do Centro de Investigação de Matemática CMAT, da Universidade do Minho, Braga, Portugal e integra o grupo webPACT. E-mail: pcatarino23@gmail.com ORCID: 0000-0001-6917-5093

Borges, Anabela. M. F. Varela, Rodrigues.

Concluiu Doutoramento em Matemática pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro em 1999. É Professor Auxiliar na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - UTAD. Publicou 6 artigos em revistas especializadas e 6 trabalhos em actas de eventos. Orientou 3 dissertações de mestrado na área de Matemática. Actua na área de Ciências Exactas com ênfase em Matemática. Nas suas actividades profissionais interagiu com 8 colaboradores em co-autorias de trabalhos científicos. E-mail: aborges@utad.pt ORCID: 0000-0002-6166-8245