UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 71. Agosto 2024
Páginas 1-16

Una añadidura con ayuda de Geogebra, a los métodos de solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Uma adição com a ajuda da GeoGebra, aos métodos de solução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Leandro López Rubira, Lierli Oconnor Montero

Fecha de recepción: 06-03-2023
Fecha de aceptación: 23-07-2024

Resumen	Para enseñar los métodos de solución de ecuaciones algebraicas es tarea obligada del maestro apelar a la geometría. La utilización de GeoGebra es hoy día una práctica en la enseñanza de las matemáticas. En el presente artículo los autores muestran un método con la ayuda de Geogebra en el que se obtienen las soluciones reales y las soluciones para el caso complejo de las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, se dan algoritmos de trabajo y se ilustran con dos ejemplos desarrollados en clases. **Palabras clave**: ecuaciones cuadráticas, caso complejo.
Abstract	In order to teach the methods of solving algebraic equations, it is the obligatory task of the teacher to appeal to geometry. The use of GeoGebra is nowadays a practice in the teaching of mathematics. In this article the authors shows a method with the help of Geogebra in which real solutions and solutions for the complex case of the type $ax^2 + bx + c = 0$ are obtained; algorithms and examples treated in class are shown. **Keywords**: quadratic equations, complex case
Resumo	Para ensinar os métodos de resolução de equações algébricas, e tarefa obrigatória do professor recorrer a geometria. O uso do GeoGebra e hoje uma prática no ensino de matemática. Neste artigo os autores apresentam um método com ajuda do GeoGebra com o qual são obtidas soluções reais e soluções para o caso complexo de equações quadráticas do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, são mostrados algoritmos do trabalho e são mostrados exemplos tratados em aula. **Palavras-chave:**equação quadrática, caso complexo

1. Introducción

1.1 Unos comentarios históricos

Los problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas, como otros logros matemáticos, aparecen alrededor del año 2000 ac en las tablillas aritméticas de los babilonios y en los papiros egipcios del año 1650 ac.

Los babilónicos resolvían problemas concretos usando tablas para facilitar operaciones y aproximarse a resultados, que servían como guía para resolver problemas similares y llegar a conclusiones de forma general en el sentido operacional, lo cual refleja un matiz algebraico dentro de la solución, que busca dejar en evidencia un algoritmo que puede reproducirse dependiendo el caso.

En el caso de los árabes y su solución a las diferentes posibilidades que podría presentar la ecuación cuadrática, es un método basado en argumentos geométricos, dada la influencia de las matemáticas griegas y la geometría de Euclides; llegando a la solución de la ecuación desde un razonamiento que relacionaba áreas de figuras planas, en particular, cuadrados y rectángulos.

En la Geometría de René Descartes se puede ver claramente un híbrido que se presenta, de los argumentos geométricos y los resultados algebraicos, ya que las soluciones que propone Descartes parten de un razonamiento geométrico, y a partir de la introducción de una notación versátil, permitió llegar a una relación algebraica. Es de notar la generalidad con la que realiza las construcciones y el análisis de sus resultados, siguiendo la línea de lo realizado por al-Kwarizmi y evolucionando la posición babilónica de los casos puntuales(Medina Leguizamón, 2019)**.**

Este tipo de trabajo híbrido se ha mantenido en el tiempo y una de sus aristas hoy día ha dado en llamarse algebra geométrica en la que los esfuerzos principales van dirigidas a construir en los estudiantes ideas algebraicas a partir de situaciones geométricas (Ballen Novoa, 2012). Es un útil recurso didáctico que, efectivamente, permite construir ideas en la realización de tareas algébricas.

1.2 Algunas consideraciones didácticas

Las ecuaciones cuadráticas se estudian en la enseñanza secundaria pero se aplican a todo lo largo de la educación y tales aplicaciones cubren un amplio espectro de tipicidades, y desde la perspectiva de diversas ciencias. En el estudio de las ecuaciones cuadráticas es regla obligada apelar a los beneficios de las representaciones geométricas. Las representaciones geométricas-visuales son de particular importancia en el proceso de solución de problemas algebraicos. En este sentido, es muy importante recordar que, a decir de Charbonneau (1996, pág. 15), "Álgebra no es solamente el producto de la evolución de la aritmética. El álgebra debe mucho a la geometría"(Charbonneau, 1996).

Nuestra intención es incorporar, a la ya amplia cantidad de métodos geométricos de solución existentes, una nueva propuesta de método geométrico para resolver ecuaciones cuadráticas con la ayuda de GeoGebra. Para ello, construiremos las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ (Ruiz Hidalgo, 2015).

GeoGebra es un software libre y disponible en múltiples plataformas que puede ser utilizado en matemática para educar en todos los niveles, y que reúne dinámicamente las ramas principales del área matemática como son la aritmética, la geometría, el álgebra y el cálculo en un conjunto sencillo a nivel operativo. Están reconocidas tales ventajas de este sistema que su utilización alcanza hoy día apreciables niveles.

Hoy día es una práctica el empleo de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas y son muchos los trabajos que se hacen, ya bien a nivel de investigación o a nivel de salón de clase. Así, por ejemplo, se han hecho estudios en relación al desarrollo de competencias geométricas (Jaraba Gutierrez, 2020).

La antigüedad con la que se reseña el estudio de las ecuaciones de segundo grado da criterio de cuan importantes son en el contexto de la enseñanza de la matemática y, a su vez, advierte su utilidad en la solución de situaciones cotidianas pues son parte de trabajos de física, química, ingeniería, entre otros; además forman parte de los fundamentos de contenidos básicos de muchas asignaturas en carreras universitarias, lo cual de alguna manera vislumbra la importancia que tienen por las aplicaciones a situaciones diversas como: el cálculo de áreas, lados y diagonales de paralelogramos; sirven para determinar la superficie y radio de círculos; abordar el teorema de Pitágoras; adquirir una mejor comprensión de funciones cuadráticas; realizar estudios de cálculo en: cuadratura de polígonos, lanzamiento de un proyectil, caída de los cuerpos, velocidad del agua en tuberías, ecuaciones diferenciales de segundo orden, resistencias eléctricas, sistema masa - resorte; entre otras aplicaciones. Todas estas afirmaciones permiten elaborar una adecuada ponderación del rol de las ecuaciones cuadráticas en la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias en general. (Galván Fernandez, 2004).

En este artículo planteamos la idea desde el punto de vista cognitivo y una propuesta de acciones para el tratamiento didáctico de la construcción de la solución de la ecuación en el caso de solución compleja. Conocer alternativas metodológicas en la solución de un problema es esencial en la enseñanza de las matemáticas.

2.De los métodos geométricos de solución de las ecuaciones cuadráticas.

2.1. Algunos métodos geométricos de solución para ecuaciones cuadráticas no escritas en la forma$Ax^2+Bx+C=0$

Estas formas de ecuaciones se deben a las formulaciones desde la noción de área. Será necesario tener en cuenta que los griegos en ningún momento podían igualar una suma de áreas a cero. Existe una apreciable cantidad de trabajos en los que se asocian representaciones geométricas de las ecuaciones cuadráticas al proceso de búsqueda de las respectivas soluciones. A consecuencia de tales formas de las ecuaciones cuadráticas los métodos de solución asociados requieren trabajar primero con la raíz cuadrada del término independiente y después el método como tal. En este epígrafe se muestran solo algunos casos y la obtención de la raíz se considera un hecho. También se prescinde de las comprobaciones algébricas.

Caso 1: Descartes (1596-1650) detalla instrucciones geométricas para resolver ecuaciones cuadráticas en forma similar a como lo hicieron los griegos en la antigüedad, su método para ecuaciones de la forma $x^2= bx + c^2$ presenta los siguientes pasos, detallados en la figura 1(María Martinez, 2012)

Antes de trazar la figura asociada a este caso, hay que explicar cómo obtener un segmento de longitud c. Para ello se traza un segmento de longitud c^2 y, a continuación del mismo, trazamos un segmento de longitud 1 (la unidad). Se traza una circunferencia con centro en el punto medio de la unión de ambos segmentos que y radio la mitad de longitud del segmento unión. La raíz buscada, es decir, el valor de c, se obtiene trazando una perpendicular por el punto de unión de los segmentos hasta que corte la circunferencia.

Una vez trazado el segmento de longitud c, en la figura 1 con extremos indicados por A y B, se traza una perpendicular en su extremo izquierdo de longitud (b/2). A continuación, se traza una circunferencia con centro en el extremo de la perpendicular trazada (que nombraremos C) y con el radio igual a (b/2), la misma longitud del segmento perpendicular. Luego se traza una línea entre los puntos *B* y *C* de manera que corte el círculo en otros dos puntos denominados *E* y *D*. Las raíces pueden expresarse como: $x_1 = \frac{b}{2} + BC;\ x_2 = \frac{b}{2} - BC$

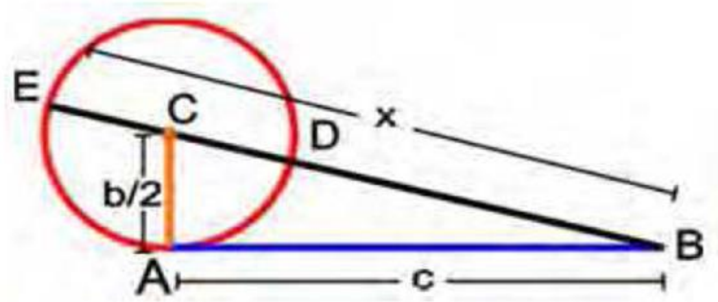

Fig.1.Construcción geométrica de Descartes para $x^2= bx +c^2$

Caso 2: Construcción geométrica de una solución positiva de $x^2+ bx = c$

Se hace la construcción siguiente para obtener una solución positiva de la ecuación. Ya vimos, en el caso anterior como se obtiene la raíz cuadrada de un segmento. Sea el lado del cuadrado ABCD tiene longitud $\sqrt{c}$ y la longitud del segmento PA es (*b/2).* Se hace centro en P y realiza un arco de radio BP, que interseque al segmento DP en el punto X. Si m denota la longitud de *PB* y *x* la longitud de AX, se tiene $m = x + b/2$. En la figura 2 se observan tales asunciones:

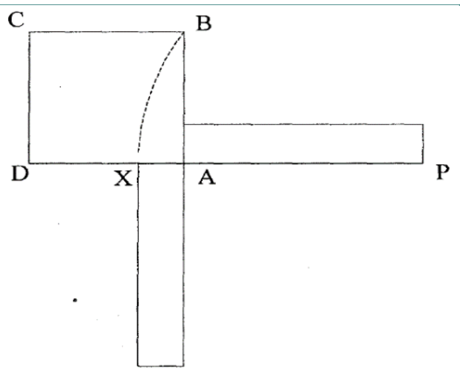

Fig.2. **Construcción geométrica de una solución positiva de $x^2 + bx = c$**

Se obtiene de esto que una solución positiva de la ecuación $x^2 + bx = c$ es la longitud del segmento AX. (María Martinez, 2012).

Caso 3**:** En la figura 3 se muestra cómo resolver la ecuación del tipo $x^2+b^2=ax$. El procedimiento es el siguiente: Se traza un segmento *AB* de longitud *a* y se divide en dos partes iguales por el punto *C*. Por debajo de C se traza el segmento perpendicular a *AB* de longitud *b*, hasta el punto *D*. Se dibuja la circunferencia de centro *D* y de radio *(a/2)* y el punto de intersección *E* con el segmento *AB* determina las soluciones, de manera que, *AE* es una de ellas (aparece en azul) y la otra es *EB* (que aparece en rojo). Es conveniente destacar que CE es $\sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b^2}$, resultando que AE=(a/2)+CE y que EB=(a/2)-CE.(Ruiz Hidalgo, 2015).

Es importante llamar la atención sobre las condiciones que deben cumplir *b* y *a*. Para que exista solución real, debe cumplirse b <(a/2). En la figura 3 se observa claramente que si no se satisface dicha condición, la circunferencia de centro *D* y radio *a/2* no intersecaría con *AB*.

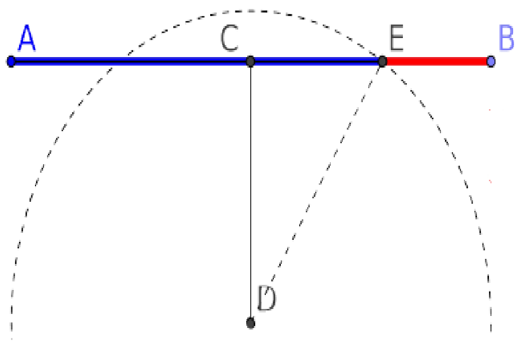

Fig. 3. Construcción geométrica para la solución de $x^2+b^2=ax$

2.2. Algunos métodos geométricos de solución para ecuaciones cuadráticas que están escritas en la forma x^2+ bx + c= 0.

Caso 1: Thomas Carlyle (1795-1881), trabaja una solución geométrica para la ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+ c = 0$ partiendo de definiciones de la geometría plana, como: ecuación de una circunferencia, distancia entre puntos y punto medio. La figura 4 muestra la forma de análisis geométrico empleado por Carlyle, del cual, por geometría analítica se desprende la ecuación de la circunferencia (Galván Fernandez, 2004):

$$\left(x-\left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(\frac{c+1}{2}\right)\right)^2=b^2+(c-1)^2$$

Los puntos X_1 y X_2 representan la solución de la ecuación. Los valores son las distancias desde el origen de coordenadas hasta los puntos citados. Para hallar estos valores se procede por métodos elementales de geometría analítica. Primero se sitúan los puntos A=(0;1) y B=(-b; c). A continuación, se obtiene el punto medio de AB, que no se nombra en la gráfica, y, con él como centro, finalmente se traza la circunferencia con radio igual a AB/2. Las intersecciones con el Eje X, X_1 y X_2 nos darán las soluciones, que serán las abscisas de los mencionados puntos.

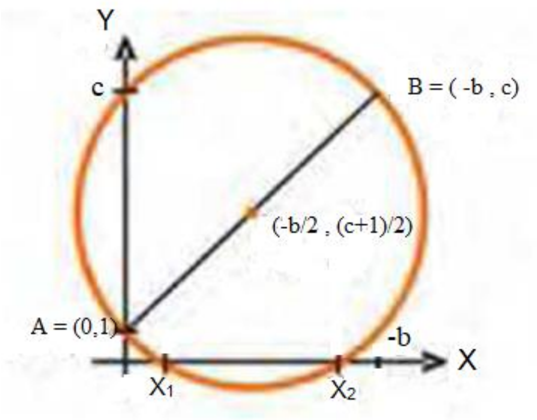

Fig.4. Construcción geométrica de Carlyle para $x^2+bx+ c = 0$

Caso 2:

El matemático alemán Karl Von Staudt (1798 - 1867), encuentra una solución a la ecuación $x^2- px+ q = 0$, muy similar a la actualmente conocida resolvente, y para esto se vale de construcciones geométricas como se muestra en figura 5(Galván Fernandez, 2004).

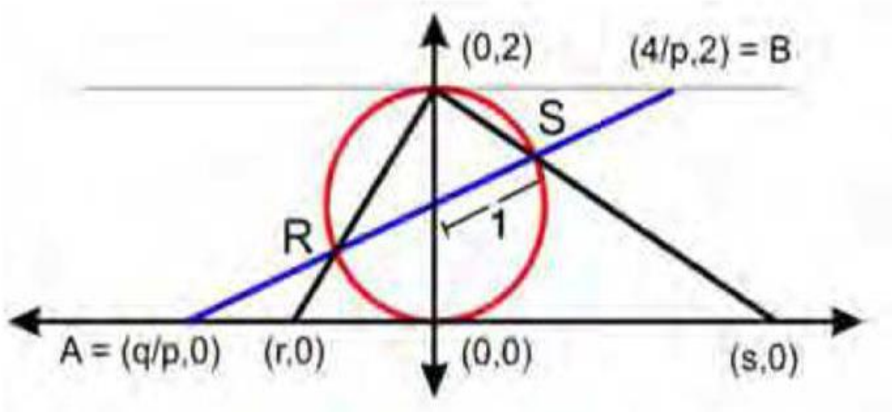

Fig.5. Construcción geométrica de Von Staudt para x^2+bx+ c = 0

Usando coordenadas, ubica los puntos A(q/p;0) y B(4/p;2), luego realiza la construcción de un círculo con centro en (0,1) y radio 1u. Luego traza el segmento AB, que corta la circunferencia en los puntos *R* y *S*, cuyas proyecciones desde las coordenadas (0, 2) se denominarán respectivamente (r, 0) y (s, 0). Se tiene que *r* y *s* son las raíces de la ecuación. Sin dudas, una joya matemática.

***Caso 3*: ** Otra alternativa de solución geométrica de la ecuación de segundo grado se muestra en la figura 6. Sea la ecuación x^2 - sx + p = 0. Para encontrar las dos soluciones positivas se procede del modo siguiente:

Considérense dos números positivos cuya suma es s y cuyo producto es p, esto es: s = a + b y además p = ab. Se considerará a>b sin afectar el método.

1. Se traza un segmento de longitud s = a + b. (se desconocen los valores de a y b) cuyos extremos son A y B. Se determina el punto O, que es el centro del segmento AB, y se traza una circunferencia de centro en O y radio $r = \frac{a+b}{2}$ (AB es su diámetro)
2. Se traza una paralela a AB a la distancia $\sqrt{p}$, denominando C al punto en que corte la circunferencia a la derecha de O. Se traza entonces una perpendicular al diámetro AB que pase por C, su altura será $\sqrt{p}$. Sea H el punto en que corta al diámetro AB. Tracemos además un radio desde O hasta C. Tendremos entonces dos triángulos rectángulos. Cada uno de ellos tiene hipotenusa $\frac{a+b}{2}$; un cateto es $\sqrt{p}$ y el otro cateto (contenido en s) es $\frac{a-b}{2}$ (recordar se supuso a>b). Así quedan definidas las longitudes a (se muestra en rosado) y b (se muestra en verde), soluciones positivas de la ecuación dada. La ecuación no tiene solución real si $\sqrt{p} > \frac{a+b}{2}$. (Galván Fernandez, 2004).

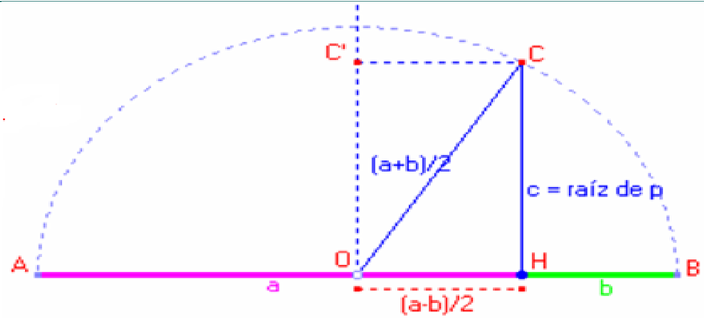

Fig.6. Otra alternativa de solución geométrica de la ecuación x^2 - sx + p = 0

2.3. De los métodos en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Solución geométrica, cuando las raíces son reales: A continuación el método de Lill. Los tres coeficientes de a, b y c, se dibujan con ángulos rectos entre ellos como se muestra en la figura 7, donde SA=a, AB=b y BC=c. Se dibuja un círculo con SC como diámetro. Si esta circunferencia corta la línea AB, entonces la ecuación tiene soluciones reales, y están dadas por el negativo del cociente $\frac{AX_1}{AS}$ (que es el coeficiente a) y el negativo del cociente $\frac{AX_2}{AS}$. Si a es 1, esto es AS=1, entonces los coeficientes pueden ser leídos directamente. Así, las soluciones en el diagrama son $-\frac{AX_1}{AS}$ y $-\frac{AX_2}{AS}$. (Barrera Mora, 2000)

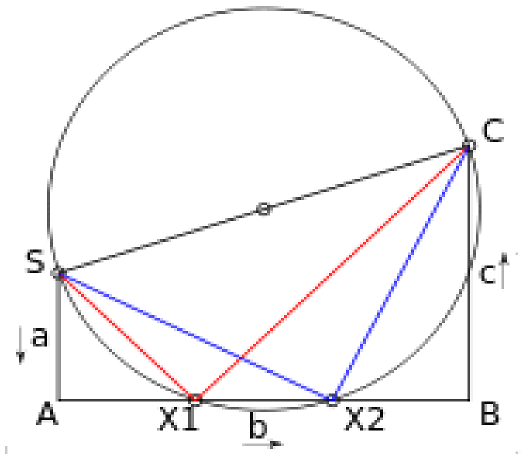

Fig.7. Solución geométrica de $ax^2 + bx + c = 0$ cuando son reales.

De la solución compleja:

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tal que D= $b^2 - 4ac < 0$.

Método: Se grafica la parábola y = $ax^2 + bx + c$ cuyo vértice es (-b/a; -D/4a). Se aplica una reflexión en el eje de las abscisas y se obtiene la nueva parábola dada por y = - $(ax^2 + bx + c) = - ax^2 - bx - c$. Se trata entonces de trasladar el vértice de esta parábola para el mismo vértice de la original, para ello bastaría sumar al miembro derecho de la ecuación cambiada de signo la constante $2y_v$ donde y_v = -D/4a, de manera que la parábola auxiliar queda definida por la expresión y = - ($ax^2 + bx + c$)+ (-D/4a) cuyo vértice está en (-b/a; -D/4a).

La parte real de las raíces es, precisamente, la abscisa del vértice de ambas parábolas y la parte imaginaria puede ser calculada como la mitad de la distancia entre los interceptos con el eje X de la parábola recién obtenida o también la distancia entre el punto de coordenadas (-b/2a; 0) y los interceptos de la parábola con el eje X, por lo tanto, girando dichos puntos con respecto al centro del segmento formado por ambos se obtienen las coordenadas de las raíces complejas (Figura 8).

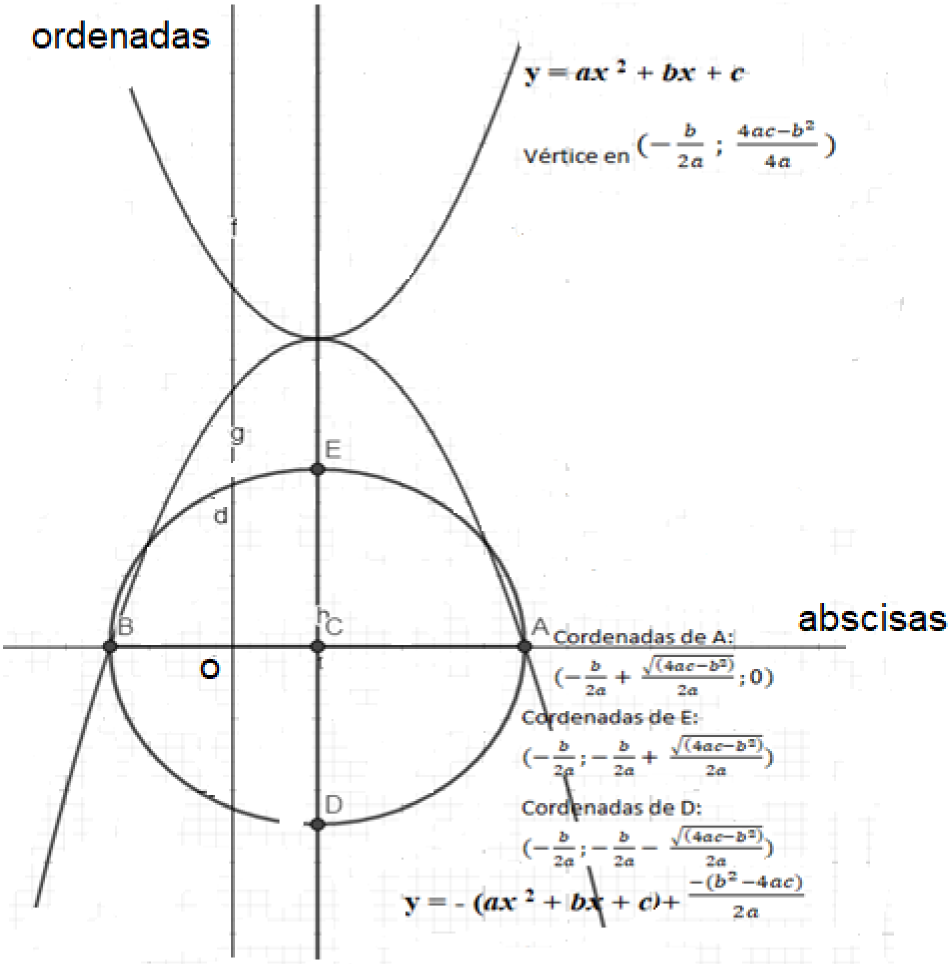

Fig.8. Solución geométrica de $ax^2 + bx + c = 0$

Es necesario que hagamos observar que el método descrito para el caso anterior admite modificaciones; basta, por ejemplo, mover la parábola inicial hacia abajo dos veces la magnitud dada por la ordenada del vértice y resulta igualmente procedente.

2.4 De la añadidura: Método para obtener soluciones de las ecuaciones cuadráticas con ayuda de Geogebra.

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. A continuación se indican tres pasos generales a seguir:

1.- Se sitúa en el plano los tres puntos: A, B y C. El punto cuyo nombre es A, tiene como coordenadas (0; a), siendo la ordenada de este punto el valor del coeficiente a en la ecuación de segundo grado. El punto cuyo nombre es B, tiene como coordenadas (-b;0) siendo su abscisa el opuesto del coeficiente b de la ecuación de segundo grado. El punto cuyo nombre es c, tiene como coordenadas (-b; c), siendo su abscisa la misma del punto cuyo nombre es B y su ordenada es el coeficiente c de la ecuación de segundo grado.
2.- Se indica a GeoGebra situar en el plano el punto D (-B/2; (A+C)/2), punto medio del segmento AC. Al ejecutarlo, expone las coordenadas del punto D arriba a la izquierda.
3.- Se indica a GeoGebra trazar la circunferencia con centro en D y que pasa por C y además brinda la ecuación de la circunferencia cuyo radio está dado por la expresión $r = \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2-2AC}{2}}$. GeoGebra nombra "c" a la circunferencia trazada y no debe confundirnos la coincidencia en los nombres: uno es el valor del término independiente de la ecuación y el otro es el nombre de la circunferencia que servirá de enlace para resolverla.

En dependencia del tipo se ecuación, ya bien con soluciones reales o con soluciones complejas, se realizan las acciones del modo siguiente:

- Particularizar las acciones generales uno (1) , dos (2) y tres (3)
- Se procede con pasos específicos en dependencia del tipo de ecuación (según tipo de solución real o compleja). Para esta especificidad se muestran los ejercicios desarrollados:

Ejercicio 1: Resolver la ecuación $2x^2-17x+30=0$. En este caso los coeficientes son: A=2; B=-17; C=30

1. Después de los pasos uno y dos : Los puntos resultan: A(0,2), B(17,0) y C(17,30). Se obtiene que -B=17. La colocación de los puntos se observa a continuación D (8.5,16), punto medio del segmento A-C. (Figura 9)

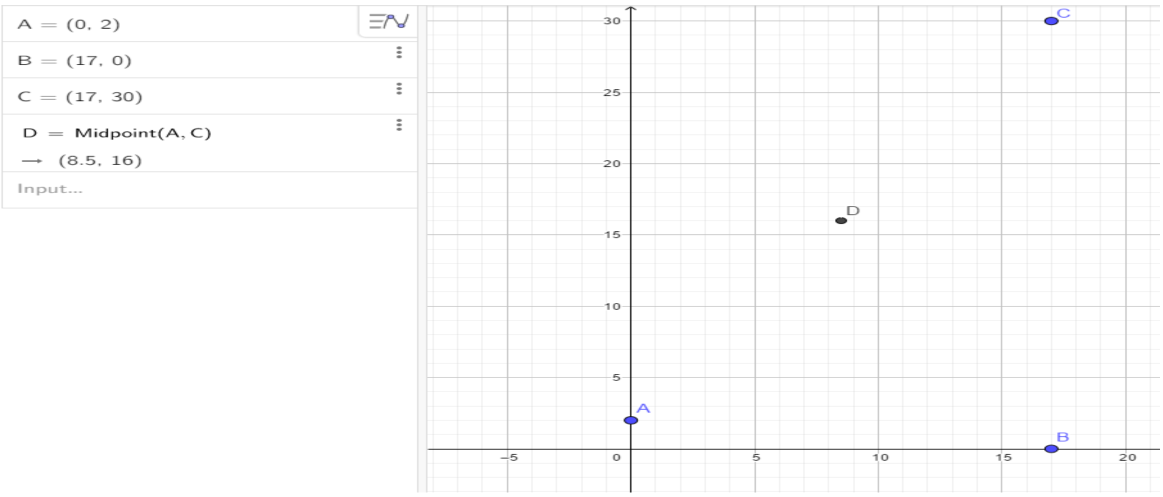

Fig.9. Puntos en el plano XY

2. Después del paso tres se obtiene (figura 10):

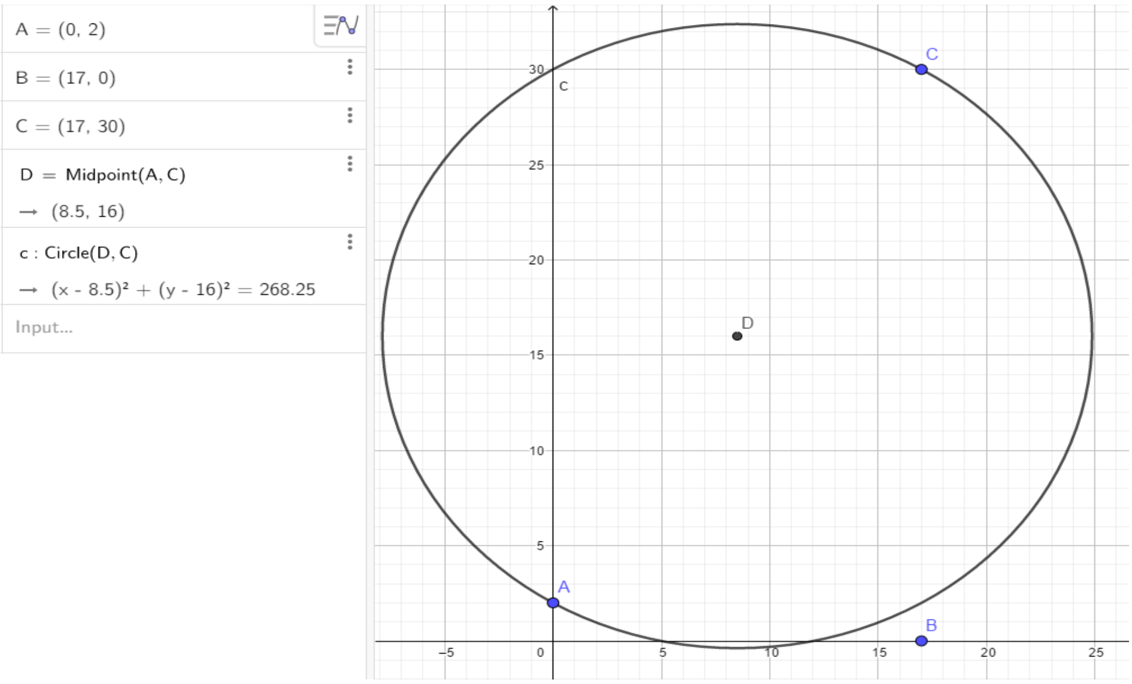

Fig.10. Circunferencia que resulta de los valores de a, b y c de la ecuación

A continuación, se enuncian los dos casos posibles:

***Caso I*: La circunferencia corta el eje X.**
Esto significa que la ecuación tiene dos soluciones para dos interceptos y una solución doble para un intercepto que ocurre cuando la circunferencia es tangente al eje X. Para obtener las soluciones de la ecuación se procede del modo siguiente:

Caso I –A: Dos interceptos: Se indica a GeoGebra las acciones siguientes:
1.- Encontrar los interceptos de la circunferencia c y el eje X. Sean E y F
2.- Trazar un segmento de recta desde el punto A hasta el E (la recta f) y un segmento de recta desde el punto A hasta el F (la recta g).
3.- Trazar una recta paralela al eje X que pase por el punto (0; A-1) (es la recta h). En este caso se ordenó trazar la recta y=2-1 porque A=2. La recta se nombró h.
4.- Encontrar el intercepto entre la recta f y la recta h. Sea G el intercepto de las rectas f y h. La abscisa de G es una raíz real.
5.- Encontrar el intercepto entre la recta g y la recta h. Sea H el intercepto de las rectas g y h. La abscisa de H es otra raíz real.

Se obtienen los resultados que se muestran en la figura 11

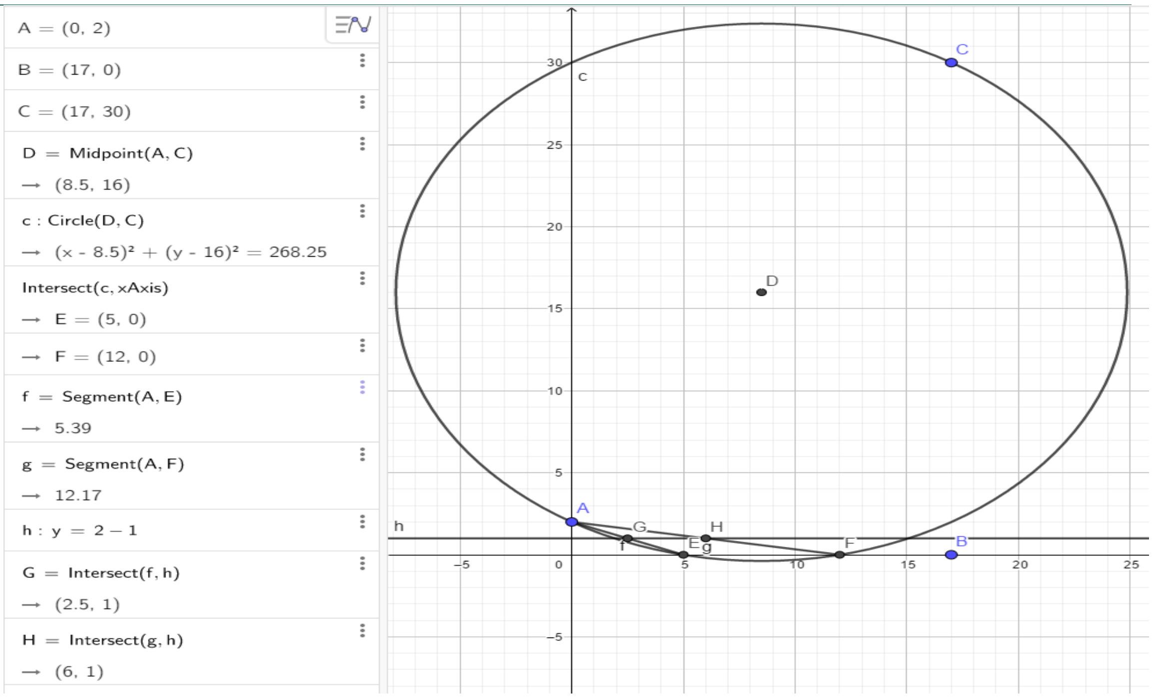

Fig. 11. Raíces reales de la ecuación

En el ejercicio desarrollado, las raíces son $X_1=2.5$ y $X_2=6$ que son las abscisas de G y H respectivamente. A la izquierda de la figura aparecen los valores de las coordenadas y fórmulas que identifican los elementos que aparecen.

Caso II: La circunferencia no corta al eje X. Existen soluciones complejas

Se ilustra la secuencia de los pasos mediante la respuesta obtenida al resolver la ecuación $\mathbf{4x^2-8x+13=0}$. En este caso los coeficientes son: A=4; B=-8; C=13

1. Según paso uno se obtiene A(0;4), B(8,0) y C(8,13) Observar que -B=8
2. Según paso dos se obtiene D (4, 8.5), punto medio del segmento A-C.
3. Después del paso tres se obtienen los resultados siguientes (figura 12):

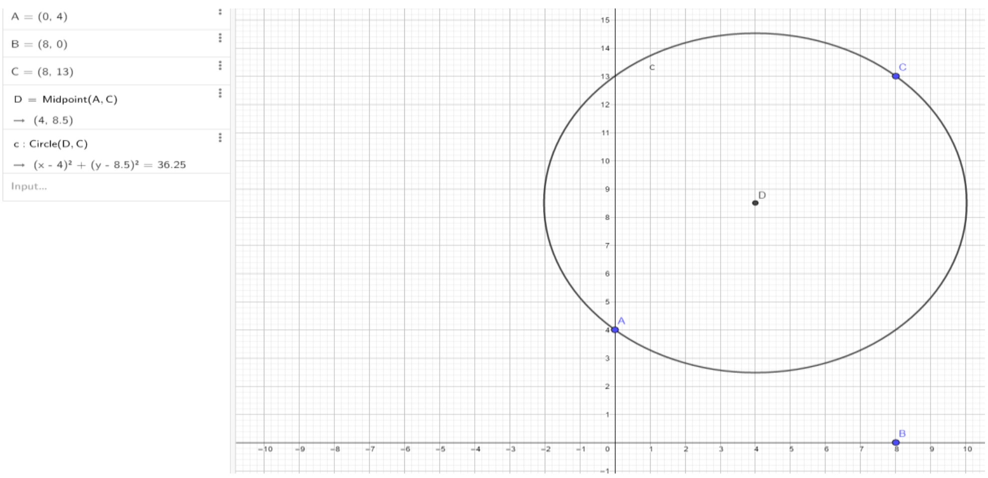

Fig. 12. Circunferencia

Como se puede observar, la circunferencia no corta al Eje X, lo que significa que las raíces de la ecuación dada son valores complejos. Para encontrar las soluciones se procede del modo siguiente:
4.- Trazar la recta paralela al eje Y por el punto D
5.- Hallar el intercepto de esta recta con el eje X (Sea E).
6.- Trazar la recta A – E (recta g)
7.- Trazar la recta paralela al eje X que pasa por el punto (0; A-1) (recta h). A-1=3 en nuestra ecuación resultando la recta y=3
8.- Hallar el intercepto entre las rectas g y la paralela al Eje X (recta y=3). Sea el punto G. *La abscisa de este punto es la parte real de la solución. En este caso la abscisa de G es 1* (uno)

El procedimiento continúa con los pasos siguientes para obtener la parte imaginaria:
9.- Hallar punto medio entre D y E. Sea H
10.- Trazar la circunferencia con centro en H y que pasa por D {o por E, son equivalentes}.Sea d esta circunferencia
11.- Hallar los interceptos entre c {la primera circunferencia} y d. Sean I y J (ver figura 13c).
12.- La distancia de los puntos I y J hasta el punto E es la misma, en este caso es $\frac{\sqrt{AC-B^2}}{2}$.Al pedirle a GeoGebra que trace el segmento reporta, además, su longitud. Ahora solo falta dividir este segmento entre el valor de A para disponer de la parte imaginaria. Para ello:
13.- Se sitúa el punto K en el Eje X con la longitud del segmento IE
14.- Se Traza la recta A_K que llamaremos k
15.- Se halla el intercepto entre la recta k y la recta i {la correspondiente a y=A-1}. Sea L este intercepto. *La abscisa de este punto L es la parte imaginaria de las raíces, en este caso es 1.5*

Las ilustraciones obtenidas en GeoGebra se muestran en el conjunto de figuras13: a, b, c, d y e.

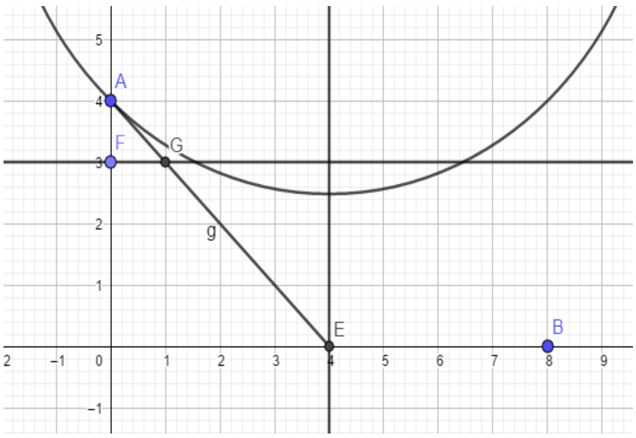

Fig.13 a: Resultados después del paso siete

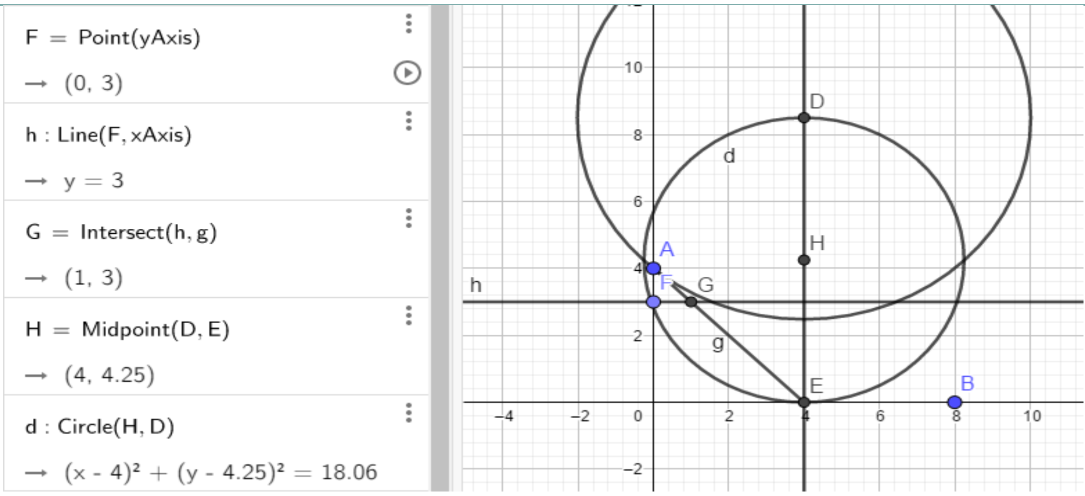

Fig. 13 b: Resultados depués del paso 10

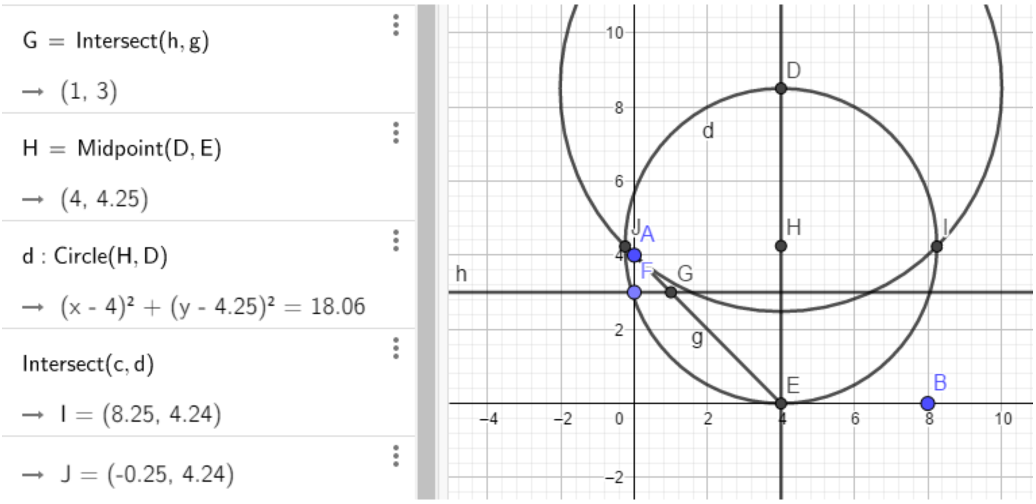

Fig. 13 c. Resultados depués del paso 11

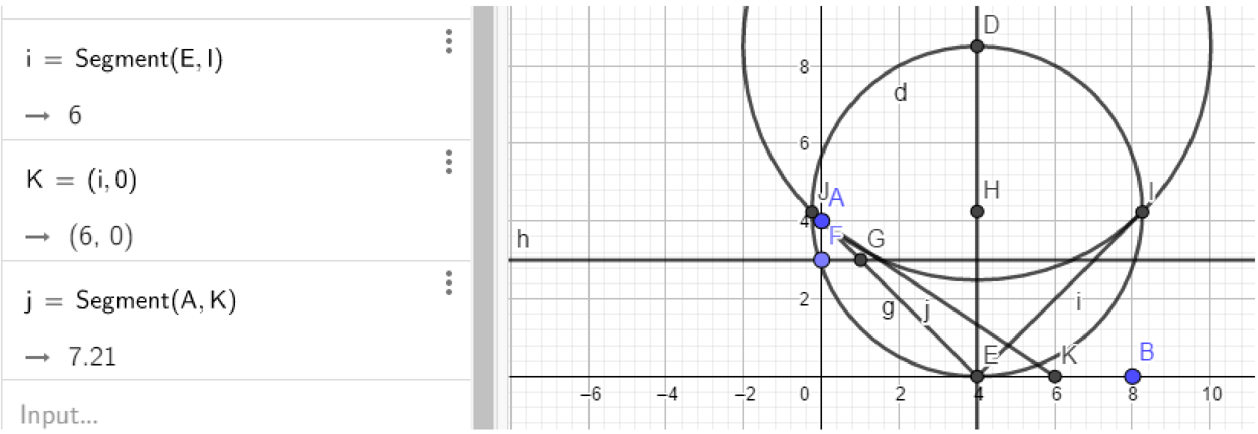

Fig. 13 d. Resultados después del paso 13.

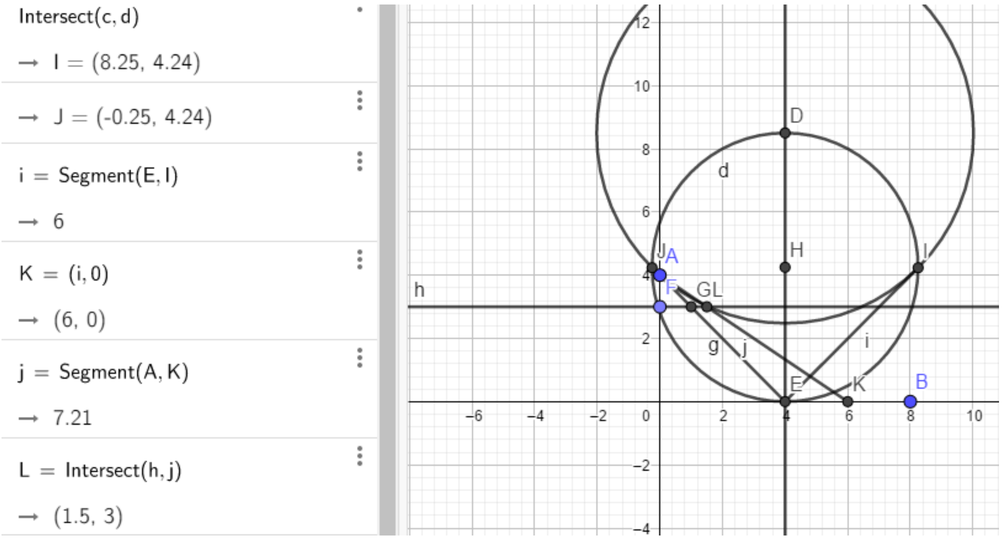

Fig. 13 e. Resultados después del paso 15.

Las raíces de la ecuación $4x^2$-8x+13=0 son X_1=1+1.5j y X_2=1-1.5j

3. Conclusión

Se ofrece una alternativa lógico - metodológica con ayuda de GeoGebra para tratar en el aula en ejercicios donde se requiera resolver la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, para el caso de solución compleja, que complementa la amplia variedad de alternativas ya sistematizada en la literatura especializada y que tiene como único propósito poner una herramienta más al alcance profesores y estudiantes.

4. Referencias bibliográficas

- Ballén Novoa, J. O. (2012). El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá, Colombia.
- Barrera Mora, F. (2000) La importancia de las representaciones geométricas en la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas. *Educación Matemática. Vol. 13 No. 1 . pp.107-119.*
- Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry.In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra, Perpective for Reasearch and Teaching , Mathematics Education Libray, Kluwer Academic Publisers.
- Galván Fernández, C. Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado.
- Jaraba Gutiérrez,A.(2020).GeoGebra: herramienta didáctica para fortalecer competencias geométricas en Educación Media. http://www.sinewton.org/numeros ISSN: 1887-1984 Volumen 105, páginas 165-188
- María Martínez, A., Arrieche,M. Construcciones geométricas entorno a la ecuación de Segundo grado como aspecto mediacional para su Enseñanza. Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Maracay. Venezuela.

- Medina Leguizamón, Y A ; Barragán Pérez, J M. (2012). Un recorrido histórico de algunos métodos de solución para ecuaciones algebraicas de segundo y tercer grado. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Bogotá, D. C.
- Ruiz Hidalgo, J F, Lupiáñez Gómez, J L. Acercamiento Geométrico a Las Ecuaciones de Segundo Grado con GeoGebra. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Primer autor: López Rubira Leandro. Profesor Asistente Universidad Tecnológica de la Habana. Ingeniero automático. Profesor de matemática, física y teorías de control. Coordinador académico. Autor de artículos. Perfil en Research gate. leandroalgebra@yahoo.es, https://orcid.org/0000-0003-0798-8296.

Segundo autor: Oconnor Montero Lierli: Profesor titular Universidad Tecnológica de la Habana. Licenciado en matemática. Ph. D. Autor de libros, monografías y artículos. Coordinador académico en pre y posgrado. Perfil en Research Gate y Google académico. loconnor@mecanica.cujae.edu.cu, https://orcid.org/0000-0002-3159-0221.

.