UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 62 – Agosto 2021
Páginas 1-21

https://union.fespm.es

Conjeturar y validar en un problema de geometría mediado por GeoGebra. ¿Qué construcciones se ponen en juego?

Magali Freyre, Patricia Cavatorta

Fecha de recepción: 2/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	Se presenta el análisis de producciones de estudiantes de Profesorado en Matemática en la resolución de un problema de geometría con GeoGebra. Trabajan en grupos y los datos analizados se recogen de grabaciones de audio y video, archivos de GeoGebra y registros escritos. Se da cuenta del tipo de construcciones dinámicas que los estudiantes realizan, la elaboración y validación de conjeturas y el rol del software en dichas acciones. Se logra construir una categorización de los tipos de construcciones dinámicas según las propiedades geométricas empleadas y según las finalidades de uso de las mismas, para el análisis en profundidad de las producciones consideradas en este estudio. **Palabras clave**: Conjeturar y validar, tipos de construcciones dinámicas, GeoGebra, clasificación de cuadriláteros
Abstract	We present an analysis of the productions made by prospective mathematics teachers during the resolution of a geometry problem with GeoGebra. The students work in groups and the information to analyze is collected from audio and video recordings, GeoGebra files and written notes. The analysis shows types of dinamic constructions that students make, the elaboration and validation of conjectures and the role of GeoGebra in those processes. A categorization of types of dinamic constructions is developed to realise a deep analysis of the productions. It takes into account the geometric properties used and the purpose of using of the constructions. **Keywords**: Guess and validate, types of dynamic constructions, quadrilateral classification, GeoGebra
Resumo	Apresentamos a análise das produções dos alunos de Licenciatura em matemática na resolução de um problema de geometria com o GeoGebra. Eles trabalham em grupos e os dados analisados são coletados de gravações de áudio e vídeo, arquivos GeoGebra e registros escritos. Ele percebe o tipo de construções dinâmicas que os alunos realizam, a elaboração e validação de conjecturas e o papel do software nessas ações. É possível construir uma categorização dos tipos de construções dinâmicas de acordo com as propriedades geométricas utilizadas e de acordo com as finalidades de seu uso, para a análise aprofundada das produções consideradas neste estudo. **Palavras-chave:** Conjectura e validar, tipo de construções dinámicas, GeoGebra , clasificação de cuadriláteros

1. Introducción

Las acciones de conjeturar y validar son de suma importancia si se tiene como objetivo la construcción de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. La elaboración de argumentos que validen aquello que se conjetura depende del contrato didáctico que se establece y tiene distintas características de acuerdo a cada nivel educativo. Por estas razones, en la formación de profesores de matemática, es fundamental el planteo de propuestas de enseñanza que impliquen la evolución en la construcción de argumentos hacia la elaboración de demostraciones formales.

Por otro lado, las tecnologías digitales utilizadas en la enseñanza de la Geometría influyen sobre qué tipo de problemas plantear a los estudiantes para que realmente se activen las acciones de conjeturar y validar. El trabajo con problemas donde resulta potente la utilización de software de geometría dinámica (SGD) para allanar el camino de la conjetura o para construir ideas en torno a la elaboración de argumentos válidos, haciendo uso de conceptos y propiedades geométricas; resulta enriquecedor para la construcción de conceptos.

Este artículo presenta estudios realizados por un grupo de investigación de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), Argentina. En el grupo se investiga en general sobre la construcción de conceptos matemáticos y la validación de sus propiedades mediadas por tecnologías digitales en la formación de profesores (Freyre y Mántica, 2017; Mántica y Freyre, 2019). Una de las cuestiones que motiva orientar la investigación en la formación de profesores tiene que ver con la importancia de que futuros profesores estén atravesados en su formación por experiencias de enseñanza y aprendizaje mediadas por tecnologías digitales, no sólo para su apropiación sino para reflexionar respecto de las características que estas ofrecen a la hora de pensar propuestas de enseñanza. Cabe destacar que actualmente esto cobra mayor relevancia dadas las situaciones de enseñanza virtual que se gestionan mundialmente.

Particularmente, en este artículo se presenta un análisis en profundidad de las producciones de estudiantes de Geometría II del Profesorado en Matemática de un Instituto Superior de Profesorado de la provincia de Santa Fe, en el proceso de resolución de un problema de geometría con GeoGebra. Este problema de geometría tiene como objetivo trabajar la resignificación de la clasificación jerárquica de cuadriláteros a partir de la elaboración y validación de conjeturas con el software. La elección de trabajar con el software GeoGebra radica entre otras cosas en su carácter libre, de código abierto, multiplataforma y en las variadas funciones que ofrece (Carrillo de Albornoz Torres, 2012). Actualmente la página de GeoGebra incluye además la posibilidad de generar grupos que actúan como aulas virtuales; características que permiten enriquecer el trabajo a distancia para el aprendizaje de la Matemática.

Las preguntas que dan origen a este trabajo son: cómo los estudiantes elaboran conjeturas y las validan en un problema de geometría con GeoGebra y qué tipos de construcciones dinámicas ponen en juego en esos procesos. En el trabajo de investigación, buscando respuestas a estas preguntas, se estudian referentes teóricos que permiten analizar por un lado los procesos de conjeturar y validar y por otro los tipos de construcciones que pueden realizarse con SGD en la resolución de problemas. Los antecedentes en relación a los tipos de construcciones resultan insuficientes para el análisis en profundidad de los resultados obtenidos en la implementación del problema antes mencionado. Por tanto surge la necesidad de elaborar una categorización de tipos de construcciones para dicho análisis, lo que representa una contribución teórica que se encuentra al final del artículo y cuya construcción se elabora en el proceso de análisis de los datos y se presenta en el desarrollo.

2. Marco teórico

Se encuentran estudios sobre el trabajo de resolución de problemas en entornos dinámicos por parte de futuros profesores de matemática (Iglesias y Ortiz, 2018, Iglesias y Ortiz, 2019). Resulta importante, además de estudiar los usos que le dan a los software de geometría dinámica, que estos estudiantes tengan contacto con actividades cercanas al quehacer matemático que puedan implementarse en la educación básica (Iglesias y Ortiz, 2019). Reid, Botta y Prieto (2017) presentan una propuesta de enseñanza de geometría para escuela secundaria que es elaborada por estudiantes de profesorado de matemática en conjunto con los profesores de los cursos donde se implementa.

Otros trabajos investigan particularmente la formulación y validación de conjeturas con software de geometría dinámica en estudiantes de profesorado de matemática (Cruz y Mántica, 2017; Cruz y Mántica, 2019). Se considera que el hecho de acercar a los futuros profesores de matemática a actividades que emplean recursos tecnológicos y son propias del quehacer matemático tales como conjeturar y validar, puede potenciar su trabajo como docentes logrando establecer mejoras en la enseñanza de la matemática (Cruz y Mántica, 2019).

El aprendizaje de la geometría con recursos digitales plantea diferencias en cuanto al trabajo tradicional de la misma con lápiz y papel. Los software de geometría dinámica permiten que se trabaje con diferentes representaciones de objetos matemáticos.

Villella (2017) afirma que la posibilidad de observar invariantes de forma dinámica a través de la manipulación de objetos en la pantalla representa un aspecto fundamental en la comprensión de los conceptos. Las construcciones geométricas por si mismas no demuestran, pero pueden estimular al estudiante a realizar demostraciones. De esta manera, a partir del trabajo con estos software el estudiante puede explorar, formular conjeturas y verificar hipótesis, convirtiendo a los objetos matemáticos en objetos vivos, que van más allá de un conjunto de algoritmos para resolver problemas tradicionales.

El estudio de la geometría con tecnologías de la información y la comunicación promueve el desarrollo de habilidades mentales permitiendo a los estudiantes acceder a un estudio formal de la geometría posteriormente. La exploración y la manipulación de objetos posibilitan que se establezcan conjeturas mediadas por las prácticas propias del software, tales como arrastrar, medir, trazar, hacer zoom, entre otras. El rol del docente resulta fundamental ya que a través de sus intervenciones puede generar espacios para explorar, conjeturar, verificar y sistematizar información poniendo en juego los conocimientos previos de los estudiantes y las características del software. De esta manera, las construcciones geométricas constituyen un objeto de experimentación sobre la teoría, contribuyendo a que se supere la tensión entre los procesos de visualización y justificación, dotando de sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático y sin utilizar el discurso de manera directa (Villella, 2017).

En cuanto a las características de las herramientas que ofrecen los entornos dinámicos de geometría se recuperan los aportes teóricos de Arzarello (2001). Este autor describe al arrastre y a la medición como herramientas fuertes para construir conocimiento matemático en cuanto ayudan a la producción de conjeturas permitiendo la exploración sobre las figuras, moviéndolas y observando la manera en que cambian y no cambian sus medidas y formas. Estas prácticas posibilitan el descubrimiento de propiedades invariantes. De esta manera, la posibilidad de arrastrar y medir ofrece una retroalimentación durante la exploración que contribuye a considerar la prueba como una real explicación de conjeturas y propiedades.

En las prácticas de arrastre y medición se distinguen procesos ascendentes y descendentes. En los ascendentes se desarrolla un trabajo desde los dibujos hacia la teoría, explorando libremente una situación y buscando regularidades e invariantes. En los procesos descendentes por el contrario, el trabajo se desarrolla desde la teoría hacia los dibujos, para validar, refutar conjeturas o verificar propiedades. Estos procesos permiten una vinculación entre el nivel teórico y el perceptual. La medición y el arrastre en los procesos ascendentes se utilizan como herramientas heurísticas para identificar propiedades al observar los cambios e invariantes en la figura. En los procesos descendentes la medición se utiliza como herramienta de control, para verificar una predicción o validar una conjetura (Arzarello, 2001).

En este sentido, se entiende al proceso de elaboración de conjeturas con SGD como aquel que se realiza formulando evidencias identificadas en una situación a través de la exploración. El proceso de validación de las mismas corresponde a la justificación que se hace sobre ellas. Los procesos de exploración en problemas resueltos con SGD tienen características peculiares atendiendo a los tipos de construcciones que con ellos se realizan y por tanto influyen sobre los dos procesos antes mencionados.

Con respecto a las construcciones que pueden realizarse con software de geometría dinámica, se destacan los aportes de Healy (2000) quien distingue entre construcciones blandas y robustas. En las construcciones blandas no se consideran todas las propiedades geométricas relacionadas con la figura y el desplazamiento permite controlar el lugar de las figuras posibles de ser generadas ya que posibilita obtener las propiedades que faltan. En una construcción robusta la figura tiene todas las propiedades geométricas esperadas. En estas construcciones el desplazamiento permite generar una familia de dibujos con las mismas propiedades geométricas. En las construcciones blandas, en cambio, el desplazamiento es parte de las mismas. Permite que se pongan en evidencia las propiedades que no son consideradas inicialmente en la construcción pero son observables en una cierta posición de ella. Así, la generalización emerge de casos particulares a partir de la búsqueda de posiciones en que las condiciones se cumplen.

En lo que a procesos de demostración se refiere, Larios (2015) sostiene que las dificultades que se encuentran generalmente en los estudiantes a la hora de producir demostraciones surgen al proponerles que reconstruyan un proceso que otros ya han realizado, sin involucrarlos en la elaboración de los enunciados ni en la formulación de conjeturas relacionadas a los mismos.

Asimismo, Boero, Garuti y Mariotti (1996), en Larios (2015), consideran que si los estudiantes exploran situaciones, elaboran conjeturas y luego producen las demostraciones correspondientes, se evidencia una unidad cognitiva en el proceso. De esta manera, el proceso de construcción de la demostración es continuo y consta de etapas por las que se transita de una manera no necesariamente lineal. Las etapas son: *Exploración de una situación*, que puede surgir de experiencias previas o ser propuesta por el profesor; *Producción de una conjetura*, que se da tras la observación llevada a cabo, *Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas planteadas* y *Producción de la demostración,* en la que a partir del encadenamiento de argumentos se validan las conjeturas planteadas.

Los software de geometría dinámica permiten la exploración y la visualización de situaciones para buscar regularidades y condiciones geométricas. La operación de arrastre ilustra su capacidad dinámica para manipular representaciones de objetos matemáticos. Esto resulta beneficioso para los estudiantes, quienes a diferencia de los matemáticos profesionales, no trabajan con objetos matemáticos asiduamente, y el software les permite que estos sean más susceptibles de ser experimentados. De esta manera, se plantea una situación y el estudiante explora, conjetura y valida el conocimiento, individual y grupalmente. Las etapas mencionadas anteriormente no necesariamente se dan de manera lineal y progresiva ya que en algunas oportunidades por ejemplo se puede requerir exploración más de una vez. Lo interesante radica en que los resultados obtenidos durante el proceso pueden servir como punto de partida para nuevas exploraciones, descubrimientos y conjeturas dando lugar a nuevas validaciones de las mismas (Larios, 2015).

3. Metodología

La investigación es de tipo cualitativa ya que procura dar cuenta de resultados obtenidos de la implementación de un problema de Geometría con GeoGebra, a partir de un análisis interpretativo de lo realizado por los estudiantes en la resolución del mismo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2010).

De esta manera el estudio requiere de una contextualización del entorno, para estudiar en profundidad los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes a la hora de resolver el problema propuesto en el que se pretende que elaboren conjeturas y establezcan argumentos para validarlas. Al tratarse de un tipo de investigación cualitativa, se evalúa el desarrollo natural de los sucesos.

El trabajo con el problema presentado se organiza en distintas etapas que dan cuenta de un proceso de investigación previo a la escritura de este artículo. Estas etapas contemplan la redacción de la consigna, su estudio previo con las posibles resoluciones, la valoración del problema que tiene en cuenta el contexto de implementación, el análisis propiamente dicho de lo realizado por los estudiantes a partir del marco teórico de referencia, y los nuevos aportes producto de los resultados de la investigación.

3.1. Etapa de estudio previo del problema

Se presenta a continuación el problema cuya redacción surge como producto de un proceso en el cual se intenta evitar direccionar las formas de resolución habilitando la exploración por parte de los estudiantes para la elaboración de conjeturas.

Realizar una construcción con GeoGebra que permita analizar y responder las siguientes preguntas: 1. ¿Qué cuadriláteros convexos se pueden construir sabiendo que sus vértices están sobre una circunferencia y una de sus diagonales es un diámetro de la misma? 2. ¿Dónde deben estar ubicados los vértices en cada caso? ¿Por qué?

Tabla 1. Consigna del problema

Los objetivos del problema son:

- La elaboración de conjeturas respecto de las posibilidades de construcción de cuadriláteros por medio de la experimentación con el software y la validación utilizando propiedades geométricas.
- La resignificación de la clasificación jerárquica de cuadriláteros.

Se elabora un estudio previo del problema teniendo en cuenta estos objetivos considerando las conjeturas correctas y posibles resoluciones del mismo que pueden surgir a partir de distintas construcciones con GeoGebra, teniendo en cuenta sus herramientas y propiedades geométricas que poseen disponibles los alumnos[1]. En este estudio previo se identifican particularmente dos tipos posibles de resoluciones en relación con las justificaciones de las conjeturas correctas; y dentro de cada tipo de resolución se presentan varias posibilidades en función de las propiedades utilizadas para resolver el problema. En un tipo de resolución, se utiliza la construcción elaborada para abordar el problema, las propiedades de cuadriláteros y distintos procedimientos que el software permite; para validar la posición de los vértices establecida como conjetura. En el otro tipo de resolución, se realiza una segunda construcción considerando las propiedades de cuadriláteros para validar la posición de los vértices establecida como conjetura, a partir de los procedimientos de construcción.

Se realiza también una valoración del problema contemplando las posibilidades de exploración y de argumentación que posibilita el trabajo de

[1] El estudio completo se encuentra en: Cavatorta, P., Freyre, M. y Renzulli, F. (2017).

resolución del mismo con el software[2]. En este estudio, se analiza por ejemplo que la consigna permite diferentes caminos de resolución ya que la manipulación dinámica con el software ofrece diversas posibilidades para pensar las posibles respuestas al problema. Además, los estudiantes en el proceso de conjeturar la ubicación de los vértices, su relación con los elementos de la circunferencia y concluir qué tipo de cuadrilátero se obtiene en cada caso, pueden utilizar diversos procedimientos de resolución ya que estos no están pautados en el enunciado. Este aspecto posibilita un trabajo autónomo en la resolución.

Los caminos para elaborar la construcción geométrica, explorar, conjeturar y argumentar son variados. En la resolución del problema se pueden recuperar las propiedades de los paralelogramos, los conceptos de mediatriz y bisectriz, las isometrías del plano, las propiedades de los cuadriláteros, triángulos y ángulos inscriptos en una circunferencia; entre otros conceptos. Los estudiantes pueden determinar si su conjetura es o no correcta a través del trabajo con el software. De este modo se valora positivamente la consigna, dadas sus posibilidades para la exploración y la argumentación.

3.2. Etapa de implementación y recogida de datos

Los sujetos de estudio son los alumnos que cursan la materia Geometría II del segundo año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, de un Instituto Superior de Profesorado de la provincia de Santa Fe, Argentina.

El trabajo en la materia se realiza utilizando el software GeoGebra de manera fundamental, para la elaboración de conjeturas y la validación utilizando propiedades geométricas. Los contenidos previos desarrollados refieren a polígonos, en particular triángulos y cuadriláteros, definidos empleando una clasificación jerárquica, y las propiedades de sus elementos. También se trabajan los conceptos de perímetro y área de figuras planas, y la definición y propiedades de polígonos inscriptos y circunscriptos a una circunferencia.

La dinámica de trabajo, que continúa desde el cursado de Geometría I, comprende la realización de una guía por cada eje de contenido, que introduce a través de un trabajo exploratorio los conceptos, propiedades y demostraciones que luego se formalizan recurriendo al material bibliográfico obligatorio de la cátedra. En la materia además se pretende promover con el uso de software la integración entre la Geometría Sintética y la Analítica, como establecen los documentos regulatorios de la provincia de Santa Fe (Resolución 2090/15).

En lo que respecta a la implementación del problema, los estudiantes lo resuelven en grupos: uno de dos estudiantes y otro de tres. Posteriormente se realiza una puesta en común en la que se socializan sus resoluciones teniendo como soporte la proyección de las construcciones hechas con GeoGebra.

Los datos que se recogen son de distintos tipos: lenguaje escrito, verbal y no verbal, conductas observables e imágenes. Se recogen a partir de tres

[2] El estudio completo se encuentra en: Renzulli, F., Cavatorta, P. y Freyre, M. (2017).

instrumentos: grabaciones de audio y video del trabajo en grupo y la puesta en común, archivos de GeoGebra con las construcciones elaboradas por los estudiantes y registros escritos de cada grupo durante la resolución del problema. De los archivos de GeoGebra se recupera el protocolo de construcción que permite observar las herramientas utilizadas y los pasos de la construcción.

3.3. Etapa de análisis

En esta etapa se analizan las producciones obtenidas a partir de la implementación de la propuesta teniendo en cuenta el marco teórico de referencia y las características del problema.

El análisis contempla principalmente los aportes de Healy (2000) en cuanto a los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Se consideran las etapas que desarrolla Larios (2015) en la construcción de una demostración, que posibilitan a los estudiantes involucrarse en estas prácticas constituyendo una unidad cognitiva en el proceso.

Por otro lado, se observan los procesos que se dan en las prácticas de arrastrar y medir, atendiendo a lo propuesto por Arzarello (2001).

Se describen detalladamente situaciones orales o escritas que permiten identificar las herramientas utilizadas por los estudiantes para construir y elaborar conjeturas, las propiedades geométricas que son consideradas y las conductas observadas en las resoluciones con el software y puesta en común.

3.4. Etapa de formulación de resultados

A partir del análisis realizado se obtienen los resultados del estudio, los cuales se presentan en el apartado resultados y conclusiones.

4. Estudio de las producciones

El problema planteado solicita el establecimiento de dos conjeturas. Una referida a los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos bajo las condiciones establecidas en la propuesta, y la otra relacionada con la posición de los vértices de esos cuadriláteros sobre la circunferencia. Así, la segunda depende del trabajo realizado con respecto a la primera.

Se organiza el análisis de lo realizado por los estudiantes en función del orden en el que se exponen las conclusiones en la puesta en común. Se transcriben algunos diálogos que funcionan como evidencia para el análisis. Para esto se utilizan las letras A y P que corresponden a intervenciones de alumno y profesor respectivamente. También se presentan algunas imágenes de registros escritos y figuras construidas por los estudiantes con el software.

4.1. En relación al Grupo 1

Para elaborar las conjeturas los estudiantes realizan dos construcciones geométricas particulares de cuadriláteros inscriptos en una circunferencia. Conjeturan que los cuadriláteros que se pueden construir son: rombo, cuadrado, romboide y rectángulo. No contemplan la posibilidad de que se puedan construir trapezoides no romboides. A continuación se mencionan los pasos de cada una de las construcciones, las conjeturas a las que arriban y el análisis a partir de los referentes del marco teórico.

Primera construcción

Los estudiantes trazan dos puntos sobre la circunferencia (vértices del cuadrilátero) y la cuerda que tiene por extremos a esos dos puntos, luego trazan una recta perpendicular a la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. A partir de la intersección de la recta con la circunferencia determinan los otros vértices del cuadrilátero (Figura 1).

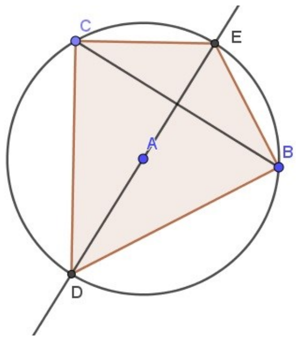


Figura 1. Primera construcción del Grupo 1.

Esta es una construcción robusta, ya que tiene todas las propiedades geométricas esperadas: los cuatro vértices pertenecen a la circunferencia y una diagonal del cuadrilátero es diámetro de la misma. Se limita la posibilidad de hallar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos, ya que se impone la condición de perpendicularidad de las diagonales del cuadrilátero. Este aspecto de la imposición de una condición extra que limita la posibilidad de conjeturar no es contemplado en la categorización hecha por Healy (2000).

Este tipo de construcción hace que las conjeturas sean en función de esa propiedad no necesaria que se cumple, permitiendo sólo identificar a partir del desplazamiento, romboides y cuadrado. Esta conjetura si bien es correcta no contempla todos los cuadriláteros posibles de ser construidos de acuerdo a lo que propone el problema, lo que se evidencia en el siguiente diálogo.

A: Con este tipo de construcción solamente los cuadriláteros que cumplen la condición de la actividad son el rombo, el cuadrado y el romboide.

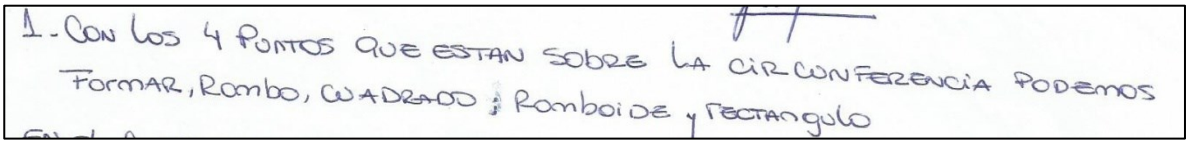
P: ¿Cuál es la ubicación de los vértices?

A: En esta construcción, en el caso del romboide, un par de puntos tienen que ser los extremos de un diámetro y los otros extremos de una cuerda.

Mientras se exponen estas conclusiones en la puesta en común, los estudiantes utilizan el arrastre de los puntos sobre la circunferencia generando los cuadriláteros que nombran.

La docente les pregunta a los alumnos en qué casos se puede construir un rombo y una de ellas responde que sólo se puede construir el cuadrado en el tipo de construcción analizada. Esto evidencia que tienen incorporado, al menos en este caso, la clasificación jerárquica de cuadriláteros.

En el registro escrito esto puede observarse a partir de un punto y coma utilizado para enumerar los cuadriláteros posibles de ser construidos. (Figura 2)


1.-Con los 4 Puntos que estan sobre la circunferencia Podemos
Formar, Rombo, cuadrado ; Romboide y rectangulo

Transcripción del texto:

1- Con los 4 puntos que están sobre la circunferencia podemos formar, rombo, cuadrado; romboide y rectángulo.

Figura 2. Fragmento de texto presentado por el Grupo 1.

Segunda construcción

En este caso trazan una circunferencia, luego dos puntos sobre la misma (vértices del cuadrilátero), una recta que los contiene y otra recta paralela a la primera que corta a la circunferencia en dos puntos, que son los vértices restantes. Luego trazan las diagonales de este cuadrilátero con la herramienta Segmento. (Figura 3)

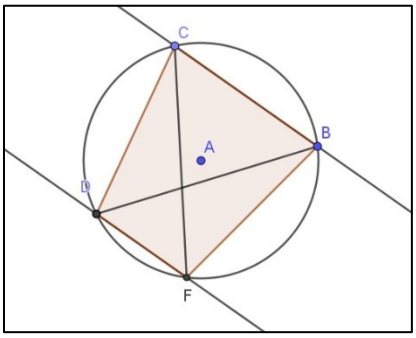


Figura 3. Segunda construcción del Grupo 1.

Esta construcción es blanda (Healy, 2000) ya que no considera todas las propiedades geométricas necesarias para abordar el problema. No cumple con la condición de que una de las diagonales del cuadrilátero debe ser diámetro de la circunferencia, aunque esto se verifica en algunas posiciones de los puntos y puede ser encontrada a partir del arrastre. En la misma se considera una propiedad no necesaria, la del paralelismo de un par de lados. Nuevamente se observa que se imponen condiciones extras limitando las conjeturas, cuestión no contemplada en la categorización consultada.

A partir de esta construcción conjeturan que se pueden construir rectángulos y cuadrados. Esta conjetura si bien es correcta es incompleta dadas las limitaciones que impone la construcción para el problema en general. La posición de los vértices establecida para estos cuadriláteros es correcta.

El carácter blando de la construcción se relaciona con un desplazamiento limitado de objetos libres dado que solo consideran los casos en que las diagonales pasan por el centro de la circunferencia, tratando de aproximarse "a ojo" a que la construcción cumpla con la propiedad geométrica necesaria en el problema pero no contemplada.

Cuando se les pregunta a los alumnos cómo pueden asegurar que esas diagonales pasan por el centro, ellos responden de acuerdo a lo que se visualiza en la vista geométrica:

P: ¿Cómo se aseguraron de la condición que una de las diagonales tiene que ser diámetro?

A: Porque pasa por el centro.

P: ¿Estaban convencidos de eso antes de construir?

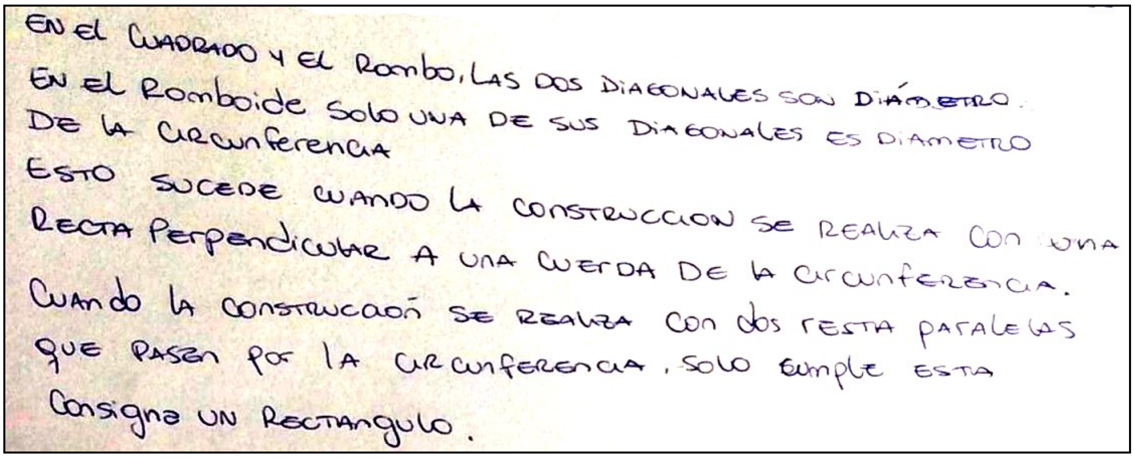
A: No, construimos el dibujo y después hicimos las diagonales para ver si se cumplía.

Así, puede afirmarse que los estudiantes no sienten la necesidad de verificar, ya sea con herramientas del software o con propiedades geométricas. Esto evidencia que no trabajan en la etapa de Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas (Larios, 2015), dado que no recurren a herramientas del software para asegurarse que la diagonal pasa por el centro de la circunferencia, para lo cual podrían haber utilizado por ejemplo la herramienta Relación; y tampoco realizan otra construcción con la finalidad de constatar. De esta manera, no se observan procesos descendentes (Arzarello, 2001) en la resolución del problema, lo que les permitiría constatar en el dibujo lo conjeturado teóricamente.

En relación a las dos construcciones

El desplazamiento que realizan en ambas construcciones durante la puesta en común reproduce lo realizado por su grupo para la elaboración de conjeturas, ya que a partir del arrastre de objetos libres logran deducir algunos cuadriláteros que pueden construirse. De esta manera, las construcciones realizadas son para conjeturar. Los estudiantes trabajan en un proceso ascendente, desde los dibujos hacia la teoría (Arzarello, 2001).

Los integrantes de este grupo pueden determinar que estas construcciones con propiedades impuestas permiten encontrar posibles cuadriláteros de ser construidos pero no necesariamente todos. Esto se manifiesta en lo expresado en su registro escrito, donde explican por separado qué cuadriláteros se pueden lograr con cada construcción. (Figura 4)


EN el CUADRADO Y EL Rombo, LAS DOS DIAGONALES SON DIÁMETRO.
EN el Romboide Solo UNA DE SUS DIAGONALES ES DIAMETRO
DE LA CIRCUNFERENCIA
ESTO SUCEDE CUANDO LA CONSTRUCCION SE REALIZA CON UNA
RECTA PERPENDICULAR A UNA CUERDA DE LA CIRCUNFERENCIA.
Cuando LA CONSTRUCCIÓN SE REALIZA CON dos RECTA PARALELAS
QUE PASEN POR LA CIRCUNFERENCIA, SOLO CUMPLE ESTA
Consigna UN RECTANGULO.

Transcripción del texto:
En el cuadrado y el rombo, las dos diagonales son diámetro. En el romboide solo una de sus diagonales es diámetro de la circunferencia.
Esto sucede cuando la construcción se realiza con una recta perpendicular a una cuerda de la circunferencia.
Cuando la construcción se realiza con dos rectas paralelas que pasan por la circunferencia, sólo cumple esta consigna un rectángulo.

Figura 4. Fragmento de texto presentado por el Grupo 1.

Se evidencia que los estudiantes experimentan dos etapas de las mencionadas por Larios (2015). Realizan Exploración de una situación al mover puntos libres sobre la construcción para identificar las características de los cuadriláteros inscriptos, y trabajan en una etapa de Producción de conjetura al determinar qué cuadriláteros se pueden construir.

Con respecto a la justificación de las conjeturas, si bien se evidencia que tienen conocimientos de las propiedades de los cuadriláteros involucrados porque las utilizan para seleccionar las herramientas de construcción con el software, no utilizan estas propiedades para validar la ubicación de los vértices. La validación a partir de propiedades geométricas se realiza luego de la intervención de la docente en la puesta en común, y no surge como necesidad de los estudiantes.

4.2. En relación al Grupo 2

Los estudiantes conjeturan que se pueden construir paralelogramos y trapezoides. Dentro de los paralelogramos establecen que se pueden construir cuadrado, rombo y rectángulo, y de los trapezoides sólo el romboide. Se evidencia un buen manejo de la clasificación jerárquica de cuadriláteros, aunque no consideran que pueden construirse trapezoides no romboides.

Para establecer las conjeturas hacen dos construcciones. Una considerando sólo las condiciones de la consigna (segunda construcción) y otra con una condición impuesta (primera construcción).

A continuación se mencionan los pasos de cada una de las construcciones, las conjeturas establecidas a partir de ellas, y el análisis realizado contemplando los referentes del marco teórico.

Primera construcción

En esta construcción marcan dos puntos y la circunferencia que tiene por centro uno de ellos y pasa por el otro. Luego marcan otro punto de la circunferencia y la recta que pasa por los dos puntos que pertenecen a la circunferencia (vértices del cuadrilátero). Luego trazan dos rectas perpendiculares a ésta por los dos vértices, y determinan los otros dos vértices a partir de las intersecciones de estas rectas con la circunferencia. (Figura 5)

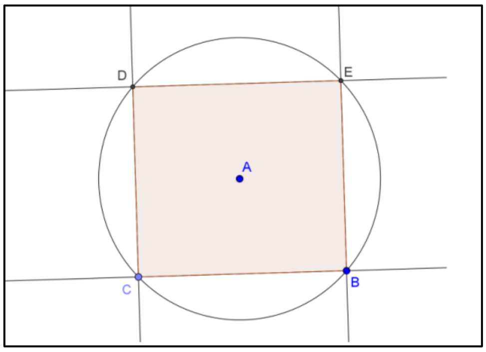


Figura 5. Primera construcción del Grupo 2.

La construcción corresponde al tipo robusta de acuerdo a la categorización de Healy (2000), ya que para la misma se consideran todas las propiedades geométricas requeridas por el problema. Sin embargo, se impone una condición no necesaria: la perpendicularidad de dos lados no consecutivos a un tercero, aspecto no contemplado por la categorización antes mencionada. A partir de esta construcción sólo pueden mostrar que se pueden construir rectángulos y cuadrados, pero no lo explicitan, se limitan a contar cómo construyen.

Los estudiantes durante la puesta en común explican los pasos de la construcción y aclaran que la realizan luego de haber conjeturado que un rectángulo puede ser construido bajo las condiciones del problema. Esto da cuenta de la finalidad de la construcción: es realizada para verificar lo que conjeturan.

Los estudiantes aclaran que luego de construir el rectángulo inscripto, trazan la diagonal y observan que pasa por el centro de la circunferencia.

Se genera un diálogo en la puesta en común a partir de una pregunta del docente en la que se intenta la búsqueda de justificaciones en relación a que la diagonal del rectángulo pasa por el centro de la circunferencia:

P: ¿Cómo se aseguraron que la diagonal siempre va a pasar por el centro? Es decir… ¿Cómo aseguran que la diagonal de ese cuadrilátero va a ser diámetro?

A: Vimos que cuando lo trazamos siempre pasa por el centro.

P: ¿Recuerdan alguna propiedad geométrica para justificar que esa diagonal necesariamente es un diámetro?

A (del otro grupo): La de los ángulos inscriptos, que es la mitad del ángulo central y entonces abarca el diámetro.

P: ¿Y el ángulo central en este caso? ¿Cuánto mide?

A: Es un ángulo de 180º.

Vale aclarar que a pesar de haber realizado una construcción para constatar una conjetura previamente establecida, esta constatación sólo se hace visualmente y no apoyada de herramientas del software ni propiedades geométricas disponibles. No utilizan por ejemplo la herramienta Relación para comprobar que el centro de la circunferencia pertenece a la diagonal del rectángulo y sólo luego de la intervención docente se logra una justificación a partir de propiedades geométricas, pero por un alumno del otro grupo.

La puesta en común también permite observar el trabajo en relación a la otra conjetura solicitada por el problema: la ubicación de los vértices para cada cuadrilátero. Los estudiantes, en este caso, no responden inicialmente dónde deben estar ubicados los vértices. La docente solicita que respondan eso y se da el siguiente diálogo.

P: ¿Dónde deben estar ubicados los vértices?

A: Sobre la circunferencia.

P: Sí, eso es lo que pide la consigna, ¿Pero qué más pueden decir?

A: Que son extremos de una cuerda.

P: ¿Qué propiedades tienen las diagonales del rectángulo?

A: Se cortan en su punto medio y son congruentes.

P: ¿Qué permite asegurar eso en relación a los vértices?

A: Si una diagonal es diámetro, la otra también es, porque miden lo mismo.

Este diálogo evidencia que sólo a partir de las preguntas generadas por el profesor los estudiantes logran identificar la correcta ubicación de los vértices, ya que si bien esto es parte de la consigna del problema no fue tenido en cuenta inicialmente por este grupo. Los estudiantes elaboran una conjetura y luego realizan la construcción para constatar, pero no utilizan propiedades geométricas disponibles para validar esta conjetura. Las justificaciones se dan recién en la puesta en común aunque no surgen como necesidad de los estudiantes. De esta manera la etapa de Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones (Larios, 2015) es promovida por la intervención docente.

El trabajo con esta construcción les permite desarrollar procesos descendentes (Arzarello, 2001) en los que a partir de una conjetura teórica elaboran una construcción para analizar el dibujo. En esta construcción utilizan propiedades geométricas del rectángulo pero no las tienen en cuenta en principio para validar la conjetura. Tampoco utilizan herramientas del software para hacerlo.

Segunda construcción

En esta construcción marcan dos puntos y la circunferencia que tiene por centro uno de ellos y pasa por el otro. Luego la recta que pasa por esos dos puntos y los puntos de intersección con la circunferencia. A continuación marcan otros dos puntos, uno en cada semicircunferencia determinada por la recta. Continúan trazando cuatro rectas tomando dos a dos los puntos marcados sobre la circunferencia de manera de determinar un cuadrilátero convexo. (Figura 6)

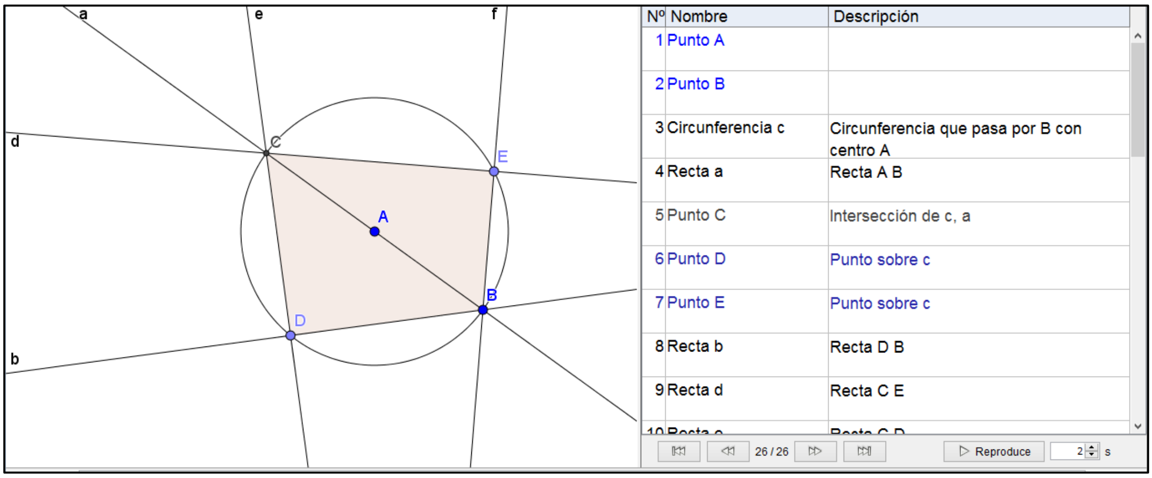


Figura 6. Primera construcción del Grupo 2.

De todas las construcciones presentadas hasta el momento, esta es la única robusta (Healy, 2000) a la que no se le impone ninguna condición extra o no requerida por el problema. Cumple con todas las propiedades necesarias y suficientes solicitadas. A partir del desplazamiento de puntos en esta construcción se pueden encontrar todos los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos.

Vale aclarar que los estudiantes manifiestan en la puesta en común que esta es la primera construcción elaborada por ellos y que dudan en un primer momento si exponerla o no. Afirman que a partir de la exploración sobre la misma logran las conjeturas correctas sobre los tipos de cuadriláteros posibles de ser construidos.

Este hecho se evidencia también en el nombre que eligen para el archivo de GeoGebra en este caso. El archivo se denomina "dónde está". De esta manera, parecería que la finalidad de la construcción es conjeturar no sólo qué tipos de cuadriláteros se pueden construir, sino también dónde deben estar ubicados los vértices, aunque esta última conjetura no la formulan hasta la puesta en común con la primera construcción. Por esta razón se trata de una construcción realizada para conjeturar.

Los estudiantes realizan esta construcción y a partir de las distintas representaciones encontradas logran establecer una conjetura correcta, aunque no exhaustiva, respecto de los cuadriláteros posibles de ser construidos, manifestando de esta manera un proceso ascendente en su resolución, (Arzarello, 2001). El trabajo con esta construcción se sitúa en las etapas de *Exploración de una situación* y *Producción de una conjetura* según Larios (2015).

En relación a las dos construcciones

Este grupo resuelve el problema mediante procesos ascendentes y descendentes (Arzarello, 2001) ya que logran realizar dos construcciones, una para conjeturar y otra para comprobar algunas de las conjeturas formuladas. Vale aclarar que presentan las dos construcciones en la puesta en común en el orden contrario al que utilizan para elaborarlas. Parecería de esta manera que les resulta más significativo el hecho de presentar como resolución una construcción para constatar (primera construcción) en la que puede observarse un rectángulo que soporta el arrastre, aunque para esto se consideren propiedades geométricas no necesarias impuestas al problema.

Esto puede deberse a que al no trabajar en las etapas de búsqueda de justificaciones y argumentos para validar, el impacto visual de las múltiples representaciones logradas con esa primera construcción les brinda mayor seguridad para poder sostener su conjetura. El rectángulo construido no se deforma a partir del arrastre de objetos libres, por lo que en todas las posiciones es rectángulo. Este es el tipo de construcciones que generalmente se proponen en el espacio curricular para un problema de cuadriláteros con GeoGebra, lo que puede influenciar en el hecho de no querer en un principio poner en común el trabajo con la segunda construcción.

Si bien en ambas construcciones, por ser robustas, se mantienen invariantes las propiedades geométricas necesarias y suficientes relacionadas con el problema, en la segunda construcción no se mantienen invariantes las propiedades que pueden definir a un cuadrilátero específico inscripto. Este hecho permite dar respuesta al problema pero parecería generar cierta incertidumbre en los estudiantes.

Esto también se evidencia en el registro escrito que presenta este grupo, en el que sólo se refieren al trabajo con la primera construcción.

5. Resultados y conclusiones

Los aportes de Healy (2000), Larios (2015) y Arzarello (2001) permiten realizar un análisis interrelacionando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes en la resolución de este problema geométrico, las etapas en el proceso de construcción de la demostración dentro de las que trabajan y el rol que juegan en estos procesos las prácticas de arrastrar y medir.

5.1. Sobre las conjeturas

Como se menciona anteriormente, en el problema hay dos aspectos que conjeturar, por un lado qué tipo de cuadriláteros se pueden construir y por otro la posición de los vértices sobre la circunferencia para cada cuadrilátero. La identificación de cuadriláteros es lograda por los grupos de estudiantes sin intervención del docente a partir de las construcciones realizadas con GeoGebra, aunque ninguno manifiesta la posibilidad de construir trapezoides no romboides. Por otro lado, la conjetura referida a la posición de los vértices sólo surge a partir de las interacciones con el docente en la puesta en común. Parecería que la pregunta propuesta para elaborar dicha conjetura genera confusión, ya que los estudiantes responden que los puntos se encuentran sobre la circunferencia sin dar mayores precisiones en un primer momento.

5.2. Sobre los tipos de construcciones

A partir del estudio realizado, se considera que los aportes de Healy (2000) en cuanto a los tipos de construcciones son válidos pero no suficientes para poder describir en profundidad las construcciones realizadas por los estudiantes en la resolución del problema implementado. Por este motivo resulta necesario establecer una nueva categorización de tipos de construcciones para problemas geométricos que contemple todos los casos observados. Se eligen nuevos términos para nombrar estas categorías. Por otro lado, los procesos que se dan en las prácticas de arrastrar y medir, propuestos por Arzarello (2001) resultan un punto de partida para la elaboración de una categorización de construcciones según la finalidad de uso en un tipo de problemas geométricos específico.

Se presentan estas nuevas categorizaciones: según las propiedades empleadas y según la finalidad de uso. Además, se realiza un análisis de las producciones de los grupos presentados en el apartado 4 en función de las mismas.

5.2.1. Categorización de tipos de construcciones según las propiedades empleadas

Esta categorización atiende a construcciones asociadas a problemas de geometría. Para poder clasificar una construcción de acuerdo a este agrupamiento es necesario determinar las condiciones consideradas para realizarla. Por esto resulta imprescindible conocer el problema que le da origen o el contexto en el que es elaborada.

Construcciones fuertes:

Una **construcción fuerte** cumple con las propiedades geométricas necesarias y suficientes en relación a lo establecido por el problema dado, en todas las posiciones de la figura. Si cumple al menos otra propiedad geométrica no necesaria, se denomina **construcción fuerte con propiedades impuestas**.

Construcciones débiles:

Una **construcción débil** cumple con algunas de las propiedades necesarias establecidas por el problema dado, pero no con todas. El desplazamiento de la construcción en este caso debe permitir encontrar posiciones de la figura en las que todas las propiedades necesarias se cumplan. Si cumple al menos otra propiedad geométrica no necesaria, se denomina **construcción débil con propiedades impuestas**.

5.2.2. Categorización de tipos de construcciones según la finalidad de uso

Esta categorización atiende a construcciones asociadas a problemas geométricos en los que se busca analizar relaciones o propiedades que involucran a una figura geométrica. En este tipo de problemas se distinguen dos finalidades para las cuales se elaboran las construcciones: conjeturar o constatar.

Construcciones para conjeturar:

Se utilizan para establecer conjeturas respecto de relaciones o propiedades involucradas. Este tipo de trabajo se relaciona con un proceso que Arzarello (2001) denomina ascendente, en el que se procede desde los dibujos hacia la teoría.

Construcciones para constatar:

Se utilizan luego de establecer una predicción sobre una propiedad o relación existente en la figura, para aceptar o rechazar dicha predicción. La constatación no necesariamente involucra el empleo de propiedades que justifiquen o validen la aceptación o no de la predicción. Este tipo de trabajo se relaciona con lo que Arzarello (2001) denomina proceso descendente, en el que se procede desde la teoría hacia los dibujos.

5.2.3. Análisis de las producciones de los grupos

A partir de todo el análisis presentado en este escrito puede observarse que tres de las cuatro construcciones elaboradas por los grupos cumplen propiedades no necesarias de acuerdo a lo que plantea el problema, denominadas propiedades impuestas.

La resolución del problema implica establecer conjeturas respecto de los cuadriláteros posibles de ser construidos, la posición de sus vértices en la circunferencia y dar argumentos en torno a lo conjeturado. El hecho de imponer condiciones extras limita la posibilidad de identificar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos en una única construcción. Esta imposibilidad parecería generar en los estudiantes la necesidad de elaborar más de una construcción para abordar el problema.

En el caso del grupo 1: una construcción fuerte y una débil, ambas con propiedades impuestas. El grupo 2, en cambio, realiza dos construcciones fuertes, una con propiedades impuestas en la que los cuadriláteros que pueden identificarse no son todos los posibles y otra fuerte propiamente dicha, la que sí permite a partir del arrastre generar todos los cuadriláteros posibles. Cabe destacar que esta última construcción es desestimada inicialmente por los estudiantes, ya que si bien la utilizan para conjeturar, no la conciben óptima para ser presentada en la puesta en común en un primer momento.

El hecho de considerar especialmente propiedades impuestas puede deberse a la importancia que suele darse a las construcciones fuertes durante el cursado de la carrera. Esto quiere decir que las construcciones que son consideradas más ricas son aquellas en las que al mover los objetos libres se mantienen invariantes ciertas propiedades de la figura. De esta manera, parecería que la construcción que permite identificar todos los cuadriláteros posibles de ser construidos y cumple todas las propiedades necesarias y suficientes según el contexto del problema necesita cumplir aún mas propiedades, y que se mantengan invariantes, lo que podría ser la razón por la que se agregan propiedades no necesarias.

Es necesario aclarar que cuando se realiza la etapa de estudio previo del problema se esperan que surjan construcciones fuertes como la segunda construcción del grupo 2. Si bien se analiza la posibilidad de que aparezcan construcciones débiles, no se piensa en esta etapa que los estudiantes agreguen propiedades no necesarias. Este es un aspecto que también contribuye a la elaboración de la categorización presentada.

Con respecto a las finalidades de uso de las construcciones, puede decirse que el grupo 1 elabora dos construcciones para conjeturar. Permanecen en un proceso ascendente, de los dibujos a la teoría. El hecho de haber considerado propiedades impuestas les permite también que se utilicen estas construcciones para constatar, pero esta es una actividad que no realizan.

Con respecto al grupo 2, elaboran una construcción para conjeturar y otra fuerte con propiedades impuestas para constatar, aunque realizan constatación visual y no apoyada en herramientas del software ni en propiedades geométricas.

5.3. Sobre las etapas en el proceso de construcción de demostraciones

Se evidencia que ambos grupos trabajan en las etapas de Exploración de una situación y Producción de una conjetura (Larios, 2015). Las elaboraciones de conjeturas se realizan en relación a dar respuesta a qué tipos de cuadriláteros son posibles de ser construidos. Sólo a partir de las intervenciones del docente en la puesta en común logran producir conjeturas en torno a la posición de los vértices.

En cuanto a las justificaciones de las conjeturas planteadas puede decirse que no realizan una exploración orientada con este fin por necesidad propia. El hecho de transitar en esta etapa podría haberles permitido que comprendan qué es necesario probar y cuáles son los objetos auxiliares que pueden aportar a la validación.

Es sólo a partir de las preguntas generadas por el docente que se enuncian oralmente propiedades geométricas que validan algunas conjeturas. Si bien los estudiantes utilizan propiedades para construir, éstas no son una demostración en sí mismas, y la necesidad de validar no surge por parte de ellos. Villella (2017) sostiene que de todos modos el trabajo de construcción, exploración y formulación de conjeturas con el software fomenta que los objetos geométricos se conviertan en objetos vivos, y que este tipo de tareas habilita a superar la tensión entre la visualización y la justificación por parte de los estudiantes. En este caso, la superación de esta tensión se da sólo a partir de la intervención del docente.

Bibliografía

Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. Dipartimento di Matematica Università di Torino, Italia. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.patrickmoisan.net/documents/publications/cw2001/2001/contributions/Arzarello.pdf

Cavatorta, P., Freyre, M. y Renzulli, F. (2017). Análisis previo de un problema sobre cuadriláteros inscriptos usando SGD en la formación de profesores. En *Libro de resúmenes VIII Encuentro Nacional y V Latinoamericano La Universidad como objeto de investigación. La Reforma Universitaria entre dos siglos.* (pp.1636-1653). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.unl.edu.ar/u17/2016/08/16/post-1/

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. UNIÓN [en línea], 29. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo5.pdf

Cruz, M. y Mántica, A. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN* [en línea], 51. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/51/03.pdf

Cruz, M. y Mántica, A. (2019). La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica. *ÉPSILON* [en línea], 101. Recuperado el 28 de julio de 2020 de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon101_8.pdf

Freyre, M. y Mántica, A. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra. *NÚMEROS* [en línea], 95. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/95/Geogebra.pdf

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En Tadao Nakahara y Masataka Koyama (Ed.) Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 1, 103-117. Hiroshima University: Hiroshima.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. (2010). *Metodología de investigación*. MC Graw Hill, México.

Iglesias, M y Ortiz, J. (2018) Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *MATEMÁTICAS, EDUCACIÓN Y SOCIEDAD,* [en línea], 1(2). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/13

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *UNIÓN* [en línea], 55. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2019/55/aula01.pdf

Larios, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/729/312

Mántica, A. y Freyre, M. (2019) Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA* [en línea], 31 (1). Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31/1/08_REM_31-1.pdf

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe (2001). *Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Diseño curricular*. Anexo VII del decreto Nº 2090/15. Argentina.

Reid, M., Botta, R. y Prieto, F. (2017). Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos. *UNIÓN* [en línea], 49. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/49/Reid.pdf

Renzulli, F., Cavatorta, P. y Freyre, M. (2017). Valoración de una tarea de geometría sobre cuadriláteros inscriptos y sus propiedades para resolver utilizando GeoGebra. En *VI* Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática: memorias, 212-223. Recuperado el 28 de julio de 2020 de http://www.fhuc.unl.edu.ar/media/investigacion/publicaciones/MATEMATICA/MATEMATICA_ebook_memoriaFHUC_2017.pdf

Villella J. (2017). Revisitando la enseñanza de la geometría con ojos TIC: otro desafío para el desarrollo profesional docente. En G. Fioriti (Ed.), Recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática, 143-157. Miño y Dávila Editores, Buenos Aires. Argentina.

Autores:

Primer autor: **Freyre, Magali Lucrecia**: Profesora de Matemática en los niveles secundario, universitario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales. Cuenta con publicaciones en revistas especializadas en enseñanza de la matemática.

Segundo autor: **Cavatorta, Patricia Noemí**: Profesora de Matemática en los niveles universitario y superior no universitario. Ha participado como expositora en congresos y jornadas especializados nacionales e internacionales. Cuenta con publicaciones en revistas educativas.