REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-23

https://union.fespm.es

Análisis de una experiencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Gretel A. Fernández von Metzen, María N. León, Claudia M. Zang

Fecha de recepción: 22/11/2020
Fecha de aceptación: 13/02/2021

Resumen

El presente trabajo aborda reflexiones que derivan del análisis e implementación de una experiencia didáctica que pone en juego a los objetos que caracterizan a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Llevada a cabo con estudiantes del profesorado en Matemática, en el marco de una investigación. A partir de las producciones de los estudiantes se analizan las transformaciones semióticas puestas en juego para los diferentes registros semióticos estudiados. La conversión hacia el registro simbólico del modelo matemático propuesto, es el que mayores dificultades generó, además se observó cierto predominio hacia el tratamiento escalar en detrimento del vectorial.
Palabras clave: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, registros de representación semiótica, Ingeniería Didáctica.

Abstract

The present work deals with reflections derived from the analysis and implementation of a didactic experience that involves the objects that characterize the systems of linear differential equations. Carried out with students of the teacher training course in Mathematics, in the framework of an investigation. From the students' productions, the semiotic transformations put into play for the different semiotic registers studied are analyzed. The conversion towards the symbolic register of the proposed mathematical model is the one that generated the greatest difficulties. In addition, it was observed certain predominance towards the scalar treatment in detriment of the vectorial one.
Keywords: Systems of linear differential equations, semiotic representation registers, Didactic Engineering.

Resumo

O presente trabalho aborda reflexões que decorrem da análise e implementação de uma experiência didática que envolve os objetos que caracterizam os sistemas de equações diferenciais lineares. Realizado com alunos-professores de Matemática, no âmbito de uma investigação. A partir das produções dos alunos, são analisadas as transformações semióticas postas em jogo para os diferentes registros semióticos estudados. A conversão para o registro simbólico do modelo matemático proposto é a que gerou maiores dificuldades, além disso, foi observada certa predominância para o tratamento escalar em detrimento do vetor.
Palavras-chave: Sistemas de equações diferenciais lineares, registros de representação semiótica, Engenharia Didática.

1. Introducción

El análisis de la propia práctica, independientemente de la perspectiva teórica en la que se sustenta el mismo, constituye para el docente una de las herramientas fundamentales para evaluar el curso de las propuestas que diseña e implementa a diario, en las asignaturas donde se desempeña. En particular, este trabajo se fundamenta en las premisas del constructivismo, de este proceso de análisis emerge información que brinda al docente la posibilidad de adquirir conocimiento acerca de la comprensión que los estudiantes han logrado con la implementación de sus propuestas. A su vez, posibilita revisar, ajustar e incorporar diferentes modificaciones que considere convenientes para lograr los objetivos trazados en su planificación. En este sentido, este documento se derivó de un estudio realizado en el marco de una investigación de tesis de postgrado, cuyo objetivo general consistió en diseñar e implementar prácticas significativas para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Estas propuestas de enseñanza permitieron a los docentes tener acceso a las producciones de los estudiantes. Ello viabilizó caracterizar las relaciones entre la representación escalar y vectorial que admite un sistema y que fueron empleadas por los alumnos para su resolución.

El presente escrito pretende exponer la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de una consigna implementada durante el proceso de enseñanza. La misma se ejecutó en el marco de un taller con estudiantes del profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM) al finalizar el primer cuatrimestre del año 2017.

En las próximas secciones se presentará una síntesis del marco teórico que sustenta cada una de las acciones realizadas, los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta al momento de recolectar y analizar los datos que se derivan de las diferentes intervenciones, el análisis a priori y a posteriori de la propuesta didáctica implementada, y para finalizar, una sección destinada a las reflexiones que emergen de este trabajo.

2. Fundamentos teóricos

A partir del análisis de libros de texto, realizado preliminarmente al diseño de la actividad, se detectó que, ya sea a nivel de métodos de resolución como a aplicaciones, generalmente los sistemas de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales prevalecen por sobre los no lineales. Esta particularidad no es exclusiva de los sistemas, situación análoga se observó con las EDO lineales y no lineales (Zang, Fernández von Metzen, León y Vila Torres, 2017). Cabe aclarar que el estudio de las primeras, desde un enfoque algebraico, presenta grandes ventajas en relación a las segundas porque siempre se tiene un método analítico de resolución. Paralelamente, los métodos cualitativos y numéricos que sustentan el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales, también son válidos para las lineales. El estudio de las ecuaciones no lineales implica mayores desafíos matemáticos, dado que no siempre es posible encontrar un método analítico apropiado para hallar su solución. Sin embargo, esta complejidad se atenúa cuando el abordaje de las ecuaciones no lineales se realiza empleando técnicas cualitativas y numéricas, auxiliados con recursos tecnológicos (Blanchard, Devaney, Hall, 1998).

Una aplicación de los sistemas, ampliamente citada en la bibliografía, es el análisis de compartimientos que se inserta en el modelado de situaciones que involucren mezclas de sustancias. Se entiende que:

> […] un proceso o sistema complejo puede dividirse en subsistemas o "compartimientos" más simples que pueden ser analizados de manera separada. Entonces el sistema completo puede modelarse describiendo las interacciones entre los diferentes compartimientos. Así una planta química podría consistir en una sucesión de etapas separadas (o incluso compartimientos físicos) en los que varios reactivos y productos se combinan o mezclan. Puede suceder que una sola ecuación diferencial describa cada uno de los compartimientos del sistema, y luego el sistema físico completo se modela por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales (Edwards y Penney, 2001, p.310).

Un modelo de compartimientos está conformado por un número finito de componentes (o cajas) unidos por flechas, donde cada flecha indica que la sustancia de la que se lleva un registro sale de la caja al final de la flecha y entra en la caja adonde llega la punta de la flecha. Dentro de estos modelos, los denominados cascadas lineales, son los más sencillos de plantear y resolver según afirman Borelli y Coleman (2002). Estos autores los caracterizan de la siguiente manera:

> (a) ninguna cadena directa de flechas y cajas empieza y termina en la misma caja; y
> (b) la sustancia sale de la caja a una tasa proporcional a la cantidad dentro de la caja y, cuando entra en otra, lo hace a la misma tasa (Borelli y Coleman, 2002, pp.88-89).

La presencia de una flecha que apunta hacia una caja sin provenir de otra indica una fuente externa de la sustancia (es decir, una entrada). Una flecha que sale de un compartimiento, pero no apunta a otra indica que la sustancia sale del sistema a través de ese compartimiento. En lo que respecta al modelo que será analizado en el desarrollo de este trabajo es un ejemplo de cascada lineal.

2.1. Los fundamentos didácticos

Desde una mirada didáctica, se asume que el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales comprende dos aristas. Por un lado, se requiere de un amplio abanico de saberes previos que resulta necesario tener disponible para su aprendizaje (ya sean los referidos al Análisis Matemático en una y varias variables, como los correspondientes al Álgebra Lineal). Por otro lado, todo lo propio a los sistemas como objeto matemático nuevo a desarrollar: representación escalar y vectorial del sistema y de las soluciones dentro del registro algebraico, así como los métodos de resolución vinculados a cada uno de ellos; métodos cualitativos como el del campo de direcciones y el análisis del plano de fase dentro del registro gráfico, etc.; métodos numéricos como por ejemplo el de Euler. Por ello, al momento de diseñar y poner en práctica las propuestas de enseñanza y aprendizaje, es importante tener presente lo mencionado anteriormente. Además, en este trabajo se consideraron los aspectos subyacentes al manejo de las transformaciones semióticas (conversión y tratamiento) involucradas en el abordaje de los sistemas. De acuerdo a la teoría de Duval (2016), las representaciones semióticas constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos. Para este investigador, en Matemática, a diferencia de lo que sucede con las ciencias fácticas, no es posible un acceso perceptivo o instrumental al objeto de estudio, sino solamente a través de sus diversas representaciones semióticas. Un mismo objeto matemático admite más de una representación semiótica; y estas se diferencian según el tipo de procesos cognitivos que activan. Desde esta teoría, hay dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas: tratamiento y conversión. Se está ante un tratamiento cuando la transformación genera otra representación en el mismo registro. En particular, para los sistemas de ecuaciones diferenciales se está frente a una transformación de tipo tratamiento cuando se estudian los sistemas desde una perspectiva escalar (que involucran algoritmos de resolución que le son propios, por ejemplo, el método de sustitución) o cuando se los aborda desde una perspectiva vectorial (cuyos algoritmos de resolución incluyen por ejemplo el método de autovalores y el de la exponencial matricial). Por otro lado, se está frente a una conversión “cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial” (Duval, 1999, p.40). En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales, se realizan conversiones cuando se utiliza de manera interactiva diferentes registros de representación semiótica (descripciones en lenguaje natural, registro algebraico y registro gráfico).

Según Duval (1999), las conversiones son poco exploradas en la enseñanza dado que, en primer lugar, no existen reglas de conversión, en segundo lugar, los cambios de registros se efectúan con fines de simplicidad y economía de tratamiento y una vez realizada, se continúa sólo en el registro en el cual se trabaja, y finalmente existe una creencia en la inmediatez y simplicidad de un cambio de registro. Es decir, la conversión entre registros surgiría de manera espontánea.

Además, el autor plantea que las conversiones no son meras traducciones o codificaciones, como se podría pensar para algunos casos de pasaje del registro de lenguaje natural a registro simbólico, donde la conversión es congruente. Sin embargo, existen situaciones donde el pasaje de registros no puede reducirse a la simple codificación, como son los casos de conversiones no congruentes. Para este tipo de transformación, la mayor fuente de dificultades se genera a partir de los cambios de registros, donde las unidades significantes de un registro y otro no pueden ser puestas en correspondencia de forma directa, cumpliendo los tres requisitos de congruencia que plantea Duval (1999). Estos requisitos son:

- Correspondencia semántica: a cada unidad significante simple de una de las representaciones se puede asociar una unidad significante elemental.

- Univocidad semántica terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única significante elemental en el registro de la representación de llegada.
- Conservación del orden de organización de las unidades significantes: las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones (Duval, 1999, p. 50)

Esta diversidad de saberes involucrados y las relaciones implicadas entre ellos, induce a que se problematice sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, dado que, al parecer, tanto para los docentes a cargo de su enseñanza como para los destinatarios de estas prácticas, no resultaría ser algo trivial.

Las investigaciones afines al tema y aquellas ligadas a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en cursos de grado, suelen emprenderse desde una discusión preponderantemente algebraica (Artigue, 1995 a; Habre 2000 y 2003; Moreno y Azcárate, 2003). Este enfoque se centra en el estudio de técnicas de resolución en detrimento de las miradas cualitativa y numérica (Zang, Fernández von Metzen y León, 2013). Desde la bibliografía específica se señala que las nuevas tecnologías constituyeron adelantos significativos en el estudio cualitativo y numérico de las ecuaciones diferenciales: […] "el énfasis tradicional en ardides y procedimientos especializados para resolver ecuaciones diferenciales ya no es apropiado, dada la tecnología disponible"[…] (Blanchard *et al.,* 1998, p. v). Además los procedimientos cualitativos y numéricos permiten acceder a una descripción global de las soluciones sin contar con la expresión simbólica de la función que es solución (generalmente este comportamiento de las soluciones también puede ser inferido a partir de operar con la expresión simbólica). El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales reviste de características similares.

En matemáticas el acceso al objeto de conocimiento se efectúa de manera indirecta a través de las representaciones semióticas (Duval, 2016).

> Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso…y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo (Duval, 1999, p. 30).

Cuando no están dadas estas condiciones, es frecuente que en los estudiantes se generen dificultades para distinguir el objeto matemático de su representación o reconocer que dos representaciones semióticas diferentes representan el mismo objeto. Por ello, en este trabajo de investigación, en correspondencia con la teoría de registros de representación semiótica, se interroga sobre cuáles son las transformaciones semióticas implicadas y cuáles son los registros de representación que estas suscitan en lo relativo al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

3. Aspectos metodológicos

La mirada del investigador estuvo centrada en las prácticas llevadas a cabo en el aula, referidas al objeto matemático en estudio. Más precisamente, en lo concerniente a las transformaciones que se realizan con los registros de representación semiótica y que fueron puestos en juego por los estudiantes en la resolución de las consignas propuestas. Se consideró conveniente incorporar las contribuciones provenientes de la Ingeniería Didáctica. En este trabajo, en particular, se muestran los resultados obtenidos en el marco de las fases de análisis a priori y a posteriori. Con respecto a la primera fase de la Ingeniería Didáctica, la fase de análisis preliminares, la misma se efectuó pero, por razones de espacio, los resultados obtenidos no son incluidos en este documento. En el marco de los análisis a priori, segunda fase de la Ingeniería, se analizaron cuáles son las posibilidades de acción de los estudiantes frente a la consigna dada y de que medios dispone para validar lo que hace. En cuanto a la fase de experimentación, la misma se concretó a lo largo de dos encuentros, de dos horas de duración. Mayores especificaciones se presentan más adelante. En la última fase, la de los análisis a posteriori y evaluación, se utilizaron las producciones de los estudiantes (que al finalizar cada encuentro entregaron por escrito) y los registros escritos de lo observado por las investigadoras. Esta metodología de investigación se caracteriza por seguir un esquema experimental, teniendo como soporte las realizaciones didácticas en clase. Es decir, se basa en la concepción, ejecución, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995 b).

Para el estudio se han definido una serie de variables de análisis que permitieron analizar las producciones de los estudiantes. Estas fueron construidas en función de los datos recolectados. Teniendo en cuenta las transformaciones de registros de representación semiótica, se definieron seis categorías; entre ellas no existe un orden de jerarquía. Las categorías utilizadas para el análisis son:

A: las producciones que revelan que los estudiantes pueden describir lo que está sucediendo con el fenómeno utilizando para ello el lenguaje natural, pero no logran convertirlo a otro registro de representación semiótica.

B: las producciones que revelan que los estudiantes pueden formalizar y operar mediante el leguaje algebraico, pero no logran relacionarlo con el contexto del problema (lo estudian desde un enfoque netamente matemático y se despegan del contexto que dio origen al problema).

C: las producciones que revelan que los estudiantes no utilizan el registro simbólico algebraico pero pueden hacer conjeturas sobre el fenómeno en base a una representación gráfica (utilizan bosquejos de cómo serían las curvas solución pero no las plasman en expresiones simbólicas).

D: las producciones que revelan que los estudiantes pueden describir el fenómeno en lenguaje natural y lo pueden formalizar en un modelo simbólico, asimismo lo utilizan para hacer predicciones y validar el modelo en función a su ajuste o no a la información proporcionada en el enunciado del problema.

E: las producciones que revelan que los estudiantes pueden, dentro del registro algebraico, distinguir entre una representación escalar y una vectorial.

F: las producciones que revelan que los estudiantes pueden plantear un modelo en el registro algebraico y lo convierten al registro gráfico para hacer un análisis del comportamiento del fenómeno.

3.1 Contexto educativo y objetivo pretendido

Esta propuesta de trabajo se pensó, diseño e implementó bajo la modalidad de taller, en el mes de agosto del año 2017, con estudiantes del Profesorado en Matemática. Se destinaron dos encuentros de dos horas reloj cada uno, con una participación de 5 alumnos. Éstos ya habían cursado y regularizado la asignatura Análisis IV[1], cuyos contenidos versan sobre el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones diferenciales y una introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es una materia que se dicta en el primer cuatrimestre del calendario académico, y corresponde al tercer año de estudios de la carrera. La convocatoria a la participación del taller, se realizó mediante aula virtual de la FCEQyN y fue de carácter voluntaria.

Los participantes se distribuyeron en dos grupos de trabajo, que se mantuvieron a lo largo de los dos encuentros. El taller fue dirigido por la docente responsable de cátedra. Tanto las observaciones referidas a las intervenciones grupales como a las correspondientes a la profesora, fueron registradas en un documento escrito, y estuvieron a cargo de dos de las autoras de este artículo.

4. Diseño y análisis de la intervención didáctica

Para el diseño de la propuesta, se tuvo en cuenta la idea de incorporar un problema en el que sea posible la construcción de un modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Esto responde a sugerencias didácticas referidas al tema en las que se plantea que las prácticas de enseñanza que incorporan el trabajo con problemas de modelado favorecen la participación activa de los estudiantes en la construcción de sus propios saberes. La modelización puede ser entendida de diversas maneras, de acuerdo a la perspectiva teórica a la que se adhiere: modelización como contenido a enseñar o como medio para enseñar matemática (Barquero, 2009). En las carreras consideradas, prevalece el segundo enfoque, ya que es entendida también como un instrumento para dotar de significado a diferentes objetos que conforman el currículum. En este caso, se estaría resignificando o reinterpretando modelos ya construidos.

Asimismo, atendiendo a la teoría de Duval, para el diseño de la actividad, se priorizó el abordaje de al menos tres registros de representación semiótica de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. A través de la resolución de la consigna fue posible explorar las transformaciones que ponen en juego los

1 Esta asignatura es de cursado simultáneo para estudiantes de la carrera Profesorado en Física.

estudiantes. Además, permitió poner en evidencia que representaciones priorizan los alumnos: registro algebraico (cuando las soluciones se expresan en forma vectorial o bien en términos de sus componentes escalares), registro gráfico, etc.

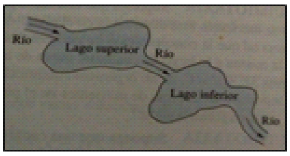
La propuesta implementada constó de tres consignas, sin embargo, por razones de extensión, en el presente trabajo sólo se tratará lo referido a la primera.

4.1 Análisis a priori de las consignas

La primera consigna de la secuencia es una adaptación de un ejercicio propuesto en el libro de texto de Hoffmann, Bradley y Rosen (2006). La interpretación de la información suministrada en la descripción verbal de la situación problemática (lenguaje natural), y que se expone en la figura 1, permitió a los estudiantes comenzar a hacer suposiciones y a realizar predicciones sobre el comportamiento a largo plazo del contaminante en cada uno de los lagos, de manera previa a la construcción del modelo matemático solicitado en el enunciado.

En el fenómeno involucrado (figura 1), subyace un problema de mezcla de sustancias, no usual para alumnos del profesorado. Por esta razón, se consideró conveniente agregar una sugerencia seguida a la descripción del enunciado que pueda servir de guía en la elaboración del modelo.

Consigna N°1: En una cierta provincia del país Z existen dos lagos que se encuentran comunicados por un río, tal como se muestra en la siguiente figura. Los mismos siempre fueron reconocidos por la belleza y pureza de sus aguas cristalinas, hasta que en un determinado momento una empresa extranjera decidió desechar 2000 kilogramos de productos tóxicos (contaminantes) en el lago superior. El lago superior contiene 700.000 litros de agua, el lago inferior contiene 400.000 litros, y el río circula a razón de 1.500 litros por hora. Se supone que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla del mismo y el agua sea homogénea en todo momento.



Sugerencia: Tener presente que la tasa de variación de contaminante con respecto al tiempo, en cada lago, deberá ser igual a la tasa de entrada menos la tasa de salida.

a) Plantea un modelo matemático que describa el comportamiento de la cantidad de contaminante $P_1(t)$ en el lago superior en el momento t.
b) Si $P_2(t)$ es la cantidad de contaminante en el lago inferior en el momento t, ¿Cómo será el modelo matemático que permite caracterizar la situación del lago inferior?
c) ¿Podría determinar qué sucede con la cantidad de contaminante en cada uno de los lagos a largo plazo?

Figura 1. Primera consigna presentada en el taller.

Puesto que se trata de un modelo de compartimientos o cascadas, en que los desechos son arrojados al lago superior solo una vez y pasado ese momento el agua que llega es pura, se admite la posibilidad de estudiar el comportamiento del contaminante en el primer lago en forma independiente del segundo. Esto implica reconocer que la tasa de variación que describe el comportamiento del contaminante en el lago superior, sólo depende de la tasa de salida, siendo nula la tasa de entrada. Además, como se considera que la rapidez a la que fluye el río es constante, tanto para la entrada como para la salida, el lago no presenta variaciones en su volumen. La ecuación que modela el lago superior viene dada por una ecuación diferencial de primer orden autónoma, con derivada de la cantidad de contaminante con respecto al tiempo, siempre negativa y directamente proporcional a la cantidad de contaminante presente en él.

En cuanto al segundo lago, si bien en el momento inicial solo posee agua pura, a medida que transcurre el tiempo empieza a recibir la influencia de los desechos que provienen del lago superior, por tanto, la tasa de variación que describe la cantidad de contaminante en el lago inferior con respecto al tiempo, depende tanto de la tasa de entrada como de la tasa salida, ambas variables. La rapidez a la que circula el río, al igual que lo descrito para el primer lago, se mantiene constante en la entrada y en la salida del lago, por ello el volumen de éste tampoco se modifica. El modelo que describe su comportamiento es una ecuación diferencial de primer orden autónoma, que depende de la cantidad de contaminante presente tanto en el lago superior como en la del lago inferior, para un tiempo t.

Explicar el comportamiento del contaminante en el segundo lago, induce a que el estudiante deba pensar de manera simultánea lo que sucede en ambos lagos para un determinado tiempo, es decir, la solución del problema deberá estar expresada en función de dos cantidades relacionadas entre sí, y a su vez dependientes del tiempo. Por otra parte, resulta importante que adviertan que el modelo se termina de ajustar al fenómeno en estudio cuando se añaden las cantidades iniciales de contaminante en cada lago, por lo tanto, el modelo es un problema de valor inicial.

El ítem c) fue pensado para propiciar el análisis cualitativo de las soluciones de un sistema aplicado en un contexto particular. Los conceptos referidos a punto de equilibrio y estabilidad cobran gran notabilidad sin hacer mención explícita a ellos. Determinar que la cantidad de contaminante en cada lago tiende a cero a largo plazo, se puede deducir a partir del enunciado: si no se tiran más desechos y la corriente del río que llega al lago superior se mantiene pura, al cabo de un tiempo los lagos se limpiarán. Es decir, para un valor de $t \geq t_*$, la cantidad de contaminante se estabilizará, permanecerá constante e igual a cero en cada uno de los lagos. De manera análoga, se podrá conjeturar un comportamiento semejante en caso de que la condición inicial dada en el lago superior se modifique, siempre considerando cantidades de contaminante positivas y distintas de cero, y conservando todos los demás supuestos establecidos en el problema. En general, para un sistema bajo estas condiciones, el punto de equilibrio se comporta como sumidero.

Conforme a la teoría de Duval, tanto en el ítem a) como en el b) se promueve a la conversión del registros de representación semiótica del lenguaje natural al registro simbólico algebraico, como al tratamiento dentro del registro simbólico de las notaciones escalar y/o vectorial. Emprender la conversión del registro del lenguaje natural al simbólico implica para el estudiante interpretar y relacionar que expresiones como el comportamiento de la cantidad de contaminante, la variación del contaminante con respecto al tiempo, la tasa de entrada y la tasa de salida, son expresiones en las que subyacen el concepto de derivada de una función.

La conversión del registro del lenguaje natural al registro simbólico para ambos lagos, sustentada en la aclaración “la tasa de variación de contaminante con respecto al tiempo, en cada lago, deberá ser igual a la tasa de entrada menos la tasa de salida”, presente en el enunciado, adquiere la forma:

$$\frac{dP_1}{dt} = tasa\ de\ entrada\ (TE) - tasa\ de\ salida\ (TS) \cdot$$

En dicha frase se evidencia correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y se conserva el orden de organización de las unidades significantes. Por el contrario, para la construcción de las expresiones simbólicas de cada una de las tasas, esto no se pone en relieve. La representación simbólica de las tasas, expresadas como el producto del flujo de entrada/salida por la concentración, no es inmediata para los estudiantes de las carreras involucradas. Tampoco en la descripción en lenguaje natural se presentan indicios de que esto debe expresarse de este modo. Asimismo, la frase “el río circula a razón de 1500 litros por hora” debe ser interpretada como el flujo aun cuando no esté explícito en el enunciado.

TE = flujo de entrada x concentración de contaminante en el flujo de entrada

TS = flujo de salida x concentración de contaminante en el flujo de salida

Por otra parte, la expresión “se supone que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla del mismo y el agua sea homogénea en todo momento” implica pensar en la manera en que se va a definir a la concentración (una manera de hacerlo es en términos de la densidad, es decir, como el cociente de la masa entre el volumen) y a su vez, se tiene que considerar constante el volumen. En estas construcciones subyace el fenómeno de no congruencia.

Con los datos del problema, se tiene que para el primer lago el modelo es:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{3}{1400}P_1 \qquad P_1(0) = 2000$$ *Modelo matemático para el lago superior*

Para el segundo lago:

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{3}{1400}P_1 - \frac{3}{800}P_2 \qquad P_2(0) = 0$$ *Modelo matemático para el lago inferior*

El **tratamiento** dentro de cada registro de representación semiótica en los ítems a) y b) se da de la siguiente manera:

- En el lenguaje natural, se revela la formulación de conjeturas y predicciones (inferir que los lagos se limpiarán a largo plazo porque está ingresando agua sin contaminante, formular hipótesis sobre cómo calcular la concentración, y determinar si las tasas dependen o no del tiempo, etc.) que se pueden llevar a cabo en el seno de cada grupo o en las interacciones que se generan con la docente en el proceso de construcción del modelo.

- En el registro algebraico, el tratamiento se genera en el proceso de construcción de las tasas de entrada y de salida para obtener finalmente la ecuación diferencial de primer orden.

La imagen proporcionada en la consigna contribuye a la correcta interpretación de la ubicación de los lagos, y a comprender el sistema en cascada que comporta. Aspecto relevante cuando se trabaja con modelos de flujos de fluidos ubicados en compartimentos, ya que el sistema puede ser abierto o cerrado. En este caso, el sistema es abierto y cumple con los dos requisitos definidos en los fundamentos teóricos, para cascadas lineales.

Una dificultad que podría emerger en esta situación, es lo concerniente al armado de la tasa de entrada o de salida. Los estudiantes del profesorado disponen de los conceptos de rapidez y densidad, también conocen las unidades en que estas magnitudes se expresan. Por ello la utilización de las unidades y el correspondiente análisis dimensional (las ecuaciones que se plantean deben ser homogéneas, es decir, ambos miembros de la ecuación deben estar expresados en las mismas unidades), juega un rol esencial para validar las suposiciones realizadas en la construcción del modelo. La tasa de entrada en el lago superior se anticipa que valdrá cero, puesto que el agua que ingresa no contiene contaminantes y la tasa de salida involucra el producto de la concentración del contaminante en el flujo de salida y la rapidez de salida del agua con contaminante. Por su parte, para la construcción de las tasas de entrada y de salida en el lago inferior, se debe tener en cuenta que ingresa agua contaminada proveniente del lago superior, cuyo flujo de entrada posee concentración variable y depende de la cantidad de contaminante que sale de ese lago. Además, la concentración en el flujo de salida también será variable, ya que el agua contaminada que ha ingresado se mezcla con el agua que se encuentra en él, y luego egresa.

Para el ítem c) se puede inferir que a largo plazo ambos lagos se limpiarán porque a medida que pasa el tiempo la masa del contaminante disminuye, dado no se ha volcado más contaminante en el lago superior. También es posible que los estudiantes resolvieran el sistema para hallar las expresiones que describen el comportamiento del contaminante en los lagos, para luego realizar un análisis de estabilidad en función de las expresiones algebraicas logradas.

Una vez que se haya reconocido que las dos ecuaciones construidas forman parte de un problema de valor inicial (PVI), con características particulares por tratarse de un sistema parcialmente desacoplado, la resolución se la puede emprender desde una mirada escalar o bien bajo una perspectiva vectorial. En ambas formas de abordaje, a nivel cognitivo, se produce un tratamiento de carácter semiótico dentro del registro algebraico.

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva escalar**

Una vez realizada la conversión del registro de lenguaje natural al simbólico (que fue descrita en una sección precedente de este documento), su resolución puede encararse con separación de variables e integración, en virtud de que en la ecuación correspondiente al lago superior la derivada sólo depende de la cantidad de contaminante que hay presente en él en cada instante.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\dfrac{3}{1400} P_1 \\ P_1(0) = 2000 \end{cases} \quad \Rightarrow P_1(t) = 2000e^{-\frac{3}{800}t}$$

Expresión que describe la cantidad de contaminante en el lago superior, en función del tiempo

Para lago inferior, basta sustituir esta solución en la segunda ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{3}{1400}P_1 - \dfrac{3}{800}P_2 \\ P_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dP_2}{dt} = \frac{3}{1400}2000e^{-\frac{3}{800}t} - \frac{3}{800}P_2$$

Para resolver esta ecuación se apela a los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y se obtiene:

$$P_2(t) = \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t} - \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t}$$

Expresión que describe la cantidad de contaminante en el lago inferior, en función del tiempo.

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva vectorial**

Teniendo disponible el modelo en el registro simbólico expresado en forma escalar (proceso de conversión ya descripto antes) y representado de forma equivalente empleando notación matricial, se puede apelar al método de autovalores para la resolución del sistema. Para ello, se lo expresa en forma matricial ***p'=Ap***, es decir

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\dfrac{3}{1400}P \\ \dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{3}{1400}P_1 - \dfrac{3}{800}P_2 \\ P_1(0) = 2000 \\ P_2(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dP_1}{dt} \\ \dfrac{dP_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{1400} & 0 \\ \dfrac{3}{1400} & -\dfrac{3}{800} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por resolución aplicando autovalores y autovectores se tiene:

$$\mathbf{p}(\mathrm{t}) = \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000e^{-\frac{3}{1400}t} \\ \dfrac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t} - \dfrac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t} \end{pmatrix}$$

Obtenidas las expresiones, es factible emprender un análisis cualitativo de la solución del PVI y concluir que a largo plazo los lagos se limpiarán. Dado que las funciones obtenidas dependen del tiempo, se puede aplicar límite con $t \to \infty$ y verificar lo anticipado, los términos exponenciales tienden a cero a largo plazo.

Otra posibilidad de analizar el ítem c) es efectuar una conversión hacia el registro gráfico y emprender un análisis cualitativo de las curvas solución representadas en el plano fase. Para ello se debe reconocer la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una función. En efecto, una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ especifica una pendiente en cada punto del plano xy donde f está definida. A partir de conocer esta información se construye un bosquejo de la solución mediante el trazado de pequeños segmentos de recta en diversos puntos del plano con la pendiente determinada por la ecuación diferencial en los puntos correspondientes. Extender este método a los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas implica que la dependencia de las variables dependientes con la variable independiente no esté explícita, necesariamente una de las variables dependientes se expresa como función de la otra. En este caso, lo que sucede en el lago inferior depende de lo que acontece en el lago superior.

$$\text{Registro algebraico} \xrightarrow{\text{conversión}} \text{Registro gráfico}$$

Mediante el uso de algún software matemático, se puede graficar el campo de direcciones asociado al sistema y de la curva solución que pasa por la condición inicial dada. Se cree que este es un procedimiento poco usual en los estudiantes, por ello se planificó la ejecución del ítem d). Si bien es parte de la consigna 1, no se presentó de manera conjunta con los tres primeros ítems, ya que su aparición en escena dependía de lo que emergiera en el anterior.

El enunciado del último ítem (figura 2) implica una doble tarea para el estudiante, que en términos de la teoría de Duval involucra dos tipos de transformación de registros. Por un lado, el trazado de la trayectoria en el plano fase que cumpla con las condiciones suministradas (registro gráfico), y por otro describir el comportamiento que sigue el contaminante en cada lago (lenguaje natural).

d) Dado el campo de direcciones del sistema construido, esboce la trayectoria que cumple con las condiciones iniciales, y describa el comportamiento con respecto al tiempo del contaminante de cada lago.

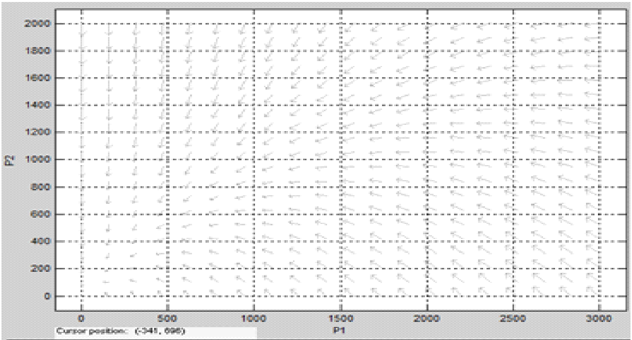


Figura 2. Ítem d) de la consigna N°1

- **Tratamiento en el registro gráfico: trazado de la curva solución asociado al PVI**

El registro gráfico posibilita la percepción visual del comportamiento del contaminante en forma simultánea en ambos lagos, a través de la trayectoria solución del sistema. Es importante destacar el sentido de orientación en que hay que recorrer la curva para poder interpretar correctamente la información, ya que en el plano fase se tiene una representación del conjunto imagen de las curvas trayectorias mientras la variable independiente se manifiesta en forma implícita.

Para esta situación, la lectura se realiza de derecha a izquierda. Cuando $t=0$ la cantidad de contaminante en el lago superior es $P_1=2000$ y para el lago inferior es $P_2=0$. A medida que t aumenta, la cantidad de $P_1 \to 0$ y en simultáneo el comportamiento de P_2 empieza a crecer, dado que el lago inferior comienza a recibir el contaminante proveniente del superior. Este crecimiento se produce hasta un determinado instante, luego la cantidad de contaminante en el lago inferior empieza a decrecer, con $P_2 \to 0$, convergiendo ambas variables al origen de coordenadas.

Por otra parte, para el trazado de la curva solución juega un rol primordial el concepto de vector tangente a una trayectoria. Su importancia reside en que permite descartar todas aquellas curvas que no correspondan a la solución del PVI dado que no cumplen la condición de tangencia ni las condiciones iniciales, funcionando de este modo como herramienta de validación. Disponer de esta relación posibilita vincular las representaciones algebraicas del sistema y la representación gráfica de sus soluciones.

$$\begin{cases} P_1' = -\dfrac{3}{1400} P_1 \\ P_2' = \dfrac{3}{1400} P_1 - \dfrac{3}{800} P_2 \end{cases}$$

En cada punto de la curva solución, existe un vector tangente cuyas componentes vienen dadas por las ecuaciones del sistema.

$$\mathbf{v} = \left(P_1'(t), P_2'(t)\right)$$
$$\mathbf{v}_0 = \left(P_1'(0), P_2'(0)\right)$$
$$\mathbf{v}_0 = \left(\tfrac{-30}{7}, \tfrac{30}{7}\right)$$

Para el momento inicial, el vector tangente tiene componente negativa en dirección de la variable P_1 y componente positiva en la variable P_2. Tal como se observa en la figura 3.

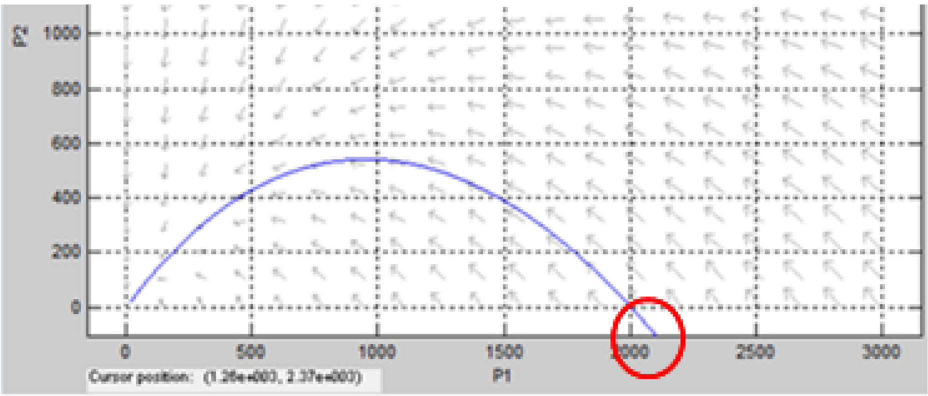


Figura 3: Trayectoria trazada de acuerdo a las condiciones iniciales dadas en el problema

En caso de no que se perciba la relación de tangencia propia del campo de direcciones, se podría lograr la representación gráfica de la curva solución del PVI considerando las funciones componentes de la solución, ya sea como ecuaciones paramétricas de la misma o bien, eliminando el parámetro t para encontrar una relación entre P_1 y P_2, con no poco trabajo adicional algebraico.

- **Conversión hacia el registro verbal: descripción del comportamiento con respecto al tiempo del contaminante para cada lago.**

Registro gráfico $\xrightarrow{\text{Conversión}}$ Registro verbal

En esta parte se esperaba que los estudiantes pongan en palabras lo que se observa en el gráfico acerca del fenómeno en estudio, que determinen cuáles son los alcances y las limitaciones que encierra la representación de la curva en el plano fase. Desde las conjeturas iniciales, la cantidad de contaminante en el lago superior siempre es decreciente. Sin embargo, para el lago inferior, al principio la cantidad de contaminante es creciente hasta un cierto tiempo, luego empieza a decrecer tendiendo a cero. Un interrogante que podía emerger frente a esta situación, era: *¿Cuántas horas deberán* transcurrir desde el inicio, para que en el lago inferior se consiga la máxima cantidad de contaminante?

Desde la lectura directa del plano fase esta información no se encuentra disponible, solo se puede decir cuál es la cantidad de contaminante máxima que posee el lago inferior, pero no en qué momento se produce tal evento. En cambio, desde la manipulación algebraica de las funciones componentes de la solución se podrá dar respuesta, ya que si la función P_2 posee un máximo para algún valor de t, entonces su derivada será nula en ese valor de tiempo.

$$P_2'(t) = -\frac{40}{7}e^{-\frac{3}{1400}t} + 10e^{-\frac{3}{800}t} = 0 \Longrightarrow t \approx 348,20 \text{ Horas}$$

Para $0 \leq t \leq 348{,}20$ horas, la cantidad de contaminante en el lago inferior es creciente, luego de $t= 348{,}20$ horas, la cantidad de desechos tóxicos empezará a disminuir hasta limpiarse. En $t= 348{,}20$ horas se produce el máximo para P_2, por lo que el vector tangente en ese punto tendrá segunda componente nula.

Finalmente, los estudiantes podrán leer en el plano fase, información valiosa vinculada a la cantidad de contaminante en cada lago y cómo se relacionan los comportamientos a largo plazo.

4.2 Descripción de las respuestas emergidas en el taller

Tal como se había previsto en el análisis a priori, la construcción del modelo matemático asociado al lago superior es el que generó mayor inversión de tiempo, principalmente con la construcción de la tasa de salida (detallada en una sección previa de este documento). Se observó, a partir de planteos que realizaron de manera oral y empleando el registro del lenguaje natural, que los estudiantes llegaban a comprender el fenómeno y a predecir correctamente lo que sucedería con el contaminante a largo plazo en ambos lagos. Sin embargo, se presentaron dificultades para reconocer en la tasa de salida la presencia del producto entre la concentración del contaminante en el flujo de salida y la rapidez de salida del agua con contaminante. Frente a esto, la docente tuvo que mediar formulando algunos interrogantes que permitieron que los estudiantes puedan avanzar con la resolución.

El primer encuentro contempló la discusión, dentro de cada grupo, del armado del modelo correspondiente al lago superior, seguida de su respectiva puesta en común en el pizarrón. En el grupo 2 (G2) las primeras conjeturas que emergieron estaban vinculadas a la masa del contaminante. Por un lado, a la cantidad inicial suministrada, pues se presentaba confusión acerca de que si los 2000 kilogramos ya se encontraban disueltos en el volumen del lago o bien si esa masa estaba entrando al lago superior. Por otro lado, decían que la tasa de salida era siempre la misma, cuestión que refleja la no percepción de la variabilidad de la masa con el paso del tiempo (debida al ingreso de agua pura al lago superior y a que la cantidad de desechos tóxicos se vuelcan inicialmente por única vez). Reconocían que se pedía armar un modelo que describa la cantidad de contaminante en el lago superior con respecto al tiempo, pero no lo asociaban a una relación de dependencia entre la variable P_1 y la variable independiente t, expresaban que tenía que aparecer t explícita en la fórmula. Hasta este momento del encuentro, las respuestas dadas se encuadran en lo descripto en la categoría A.

Ante esto, la profesora recuperó la afirmación de que la tasa de salida es siempre la misma y les preguntó: "*¿Qué significa que la tasa de salida sea constante?*" La respuesta no fue inmediata, tuvieron que pensar y releer el enunciado. Los estudiantes debaten dentro de cada grupo y concluyen que con el paso del tiempo la cantidad de contaminante iría disminuyendo por la entrada de agua limpia, lo cual les permitió arribar a que no era correcto hacer tal afirmación. Resultó de importancia volver hacia el contexto del problema una y otra vez para validar las conjeturas que se iban realizando en el proceso de armado del modelo.

Una vez aclarado verbalmente que la tasa de salida es variable, la docente preguntó: "¿Qué tendría que intervenir en la ecuación?" Uno de los estudiantes planteó que debía aparecer la concentración, sin embargo, sus cálculos se remitían a la concentración inicial, planteando el producto entre la rapidez del flujo de entrada y la concentración inicial. Seguidamente, por razones de legibilidad, se expone la transcripción de la respuesta, paralelamente se muestra la respuesta en la figura 4.

$$P_1'(t) = -1500\frac{lts}{h}\cdot\frac{2000kg}{70000lts} = -\frac{30}{7}\frac{kg}{h}$$

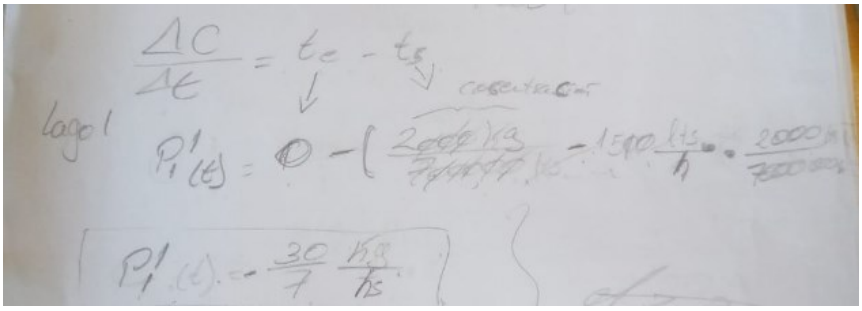


Figura 4: Tasa de salida considerada constante

Nuevamente emergió la idea de que la tasa de salida es constante. Si bien, los estudiantes habían arribado a que debía ser variable, en el modelo matemático propuesto aún no se lograba expresar. La respuesta dada tiene relación con lo detallado para la categoría A.

La docente preguntó: ¿Cómo es la concentración con respecto al tiempo? Los estudiantes manifestaron que era variable, determinaron que dicha expresión indicaría que la tasa de salida es siempre la misma y no se correspondía con el fenómeno en estudio. En palabras de uno de los estudiantes: "al considerar de esta forma estamos suponiendo que la tasa de contaminante es constante, y sabemos que eso no es así porque después de varias horas el lago 1 se limpia y así como planteamos siempre queda contaminante". Nuevamente revisaron el modelo propuesto y buscaron la manera de expresar la variabilidad de la concentración.

Mientras los estudiantes debatían en el grupo, el observador detectó que tenían en claro que el caudal del agua que entra en el lago superior es de $1500\frac{litros}{hora}$ y que el cociente $\frac{2000\,kg}{700000l}$ representa la concentración másica inicial, pero no lograron vislumbrar que esta magnitud depende de la cantidad de contaminante que haya en el lago para cada valor de t, precisamente esa es la función incógnita. La expresión dada por $\frac{P_1(t)}{700000}\frac{kg}{l}$ no surgió hasta la puesta en común, luego de provocarse un debate en forma colectiva.

Durante la socialización, la docente, a través de algunos interrogantes, indujo a que surja, desde los estudiantes, el modelo solicitado. Para ello realizó un bosquejo en el pizarrón, en el que se ubicaron los datos del problema, tal como se muestra en la figura 5, y les preguntó: "*¿Qué se puede decir de* $P_1(t)$ *en cualquier instante?*"

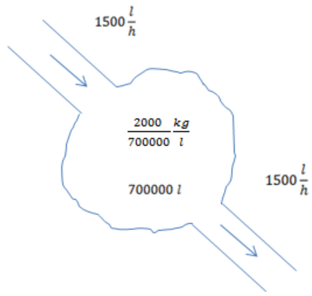


Figura 5: Bosquejo realizado por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del ítem a)

Los alumnos respondieron que a medida que transcurre el tiempo la cantidad de contaminante va a ser menor que en $P_1(0)=2000$. Añadieron que $P_1'(t)=-\frac{30}{7}\frac{kg}{h}$ es solo para $t=0$, en tanto para un instante cualquiera debía ser:

$$P_1'(t)=-1500\frac{lts}{h}\cdot\frac{P_1(t)kg}{70000lts}=-\frac{3}{1400}P_1(t)\quad con\ \ t\geq 0$$

Para validar dicho modelo, mediante la sustitución t = 0 confirmaron que la tasa inicial de variación es la que habían determinado. Uno de los alumnos escribió en el pizarrón:

$$P_1'(0)=-\frac{3}{1400}P_1(0)\Rightarrow P_1'(0)=-\frac{3}{1400}\cdot 2000$$

Finalmente, los estudiantes concluyeron que la presencia del signo menos en el modelo indica que la cantidad de contaminante va disminuyendo con el tiempo.

Para este primer ítem, las intervenciones de la docente durante las discusiones grupales como en el momento de la puesta en común, resultaron ser un factor primordial para concretar la conversión de registros prevista en el análisis a priori. Por ende, la continua retroalimentación entre las respuestas de los estudiantes y las preguntas que les devolvía la profesora, permitió que el modelo emergiera como una construcción conjunta de la clase y no como un producto acabado ni desde los grupos individuales ni como propuesto por la docente.

El segundo encuentro se produjo una semana después. Para comenzar el taller, la docente anotó en el pizarrón el modelo armado para el lago superior y leyó el enunciado del ítem b). Lo que sigue corresponde a la descripción de lo sucedido en este encuentro y está en consonancia con lo previsto en la categoría D.

Uno de los grupos, más precisamente el G1, se anticipó y afirmó que en el segundo lago (inferior), lo que ingresa es lo que sale del primero (superior), y escribió en el pizarrón:

$$= \frac{3}{1400} P_1(t) -$$

Luego, dijeron: "*La tasa de entrada en el segundo lago es la misma que la tasa de salida del primer lago, y es positiva porque está entrando".* Completaron la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{3}{1400} P_1(t) - \underbrace{\frac{3}{800} P_2(t)}_{1500\frac{l}{hs}\cdot\frac{P_2(t)kg}{400000l}}$$

En la igualdad escrita apareció la derivada de una nueva variable, que hasta el momento no había surgido en las respuestas de los estudiantes, por ello la docente preguntó: "*¿Qué es* $\frac{dP}{dt}(t)$*".* El G2, respondió: "*Para nosotros es P_2 porque describe la variación del lago inferior".* A continuación, uno de ellos escribió en el pizarrón:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \frac{3}{1400} P_1(t) - \frac{3}{800} P_2(t)$$

La docente interrogó a ambos grupos: "*¿Es definitiva esta ecuación?"*

Los estudiantes respondieron afirmativamente. Afirmaron que se trata de una ecuación lineal, distinguieron que las variables P_1 y P_2 dependen de la variable independiente tiempo, también reconocieron que se trata de una ecuación autónoma. Por último, aseveraron que la segunda ecuación, referida al lago inferior, depende de las dos funciones incógnitas.

Ante esto último, la docente interrogó: "*¿Pueden resolver esta ecuación (señalando la construida para el lago inferior) sin resolver la primera (la correspondiente al lago superior)?"* Sin dudarlo, los estudiantes respondieron que no. Por tanto, se les preguntó: "*¿Cuál sería el modelo que describe el comportamiento del contaminante en ambos lagos?"* Los estudiantes aseguraron que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales. Uno de los alumnos asentó en el pizarrón el modelo armado para el PVI indicando que es homogéneo:

$$\begin{cases} P_1{}'(t) = -\frac{3}{1400} P_1(t) \\ P_2{}'(t) = \frac{3}{1400} P_1(t) - \frac{3}{800} P_2(t) \end{cases} \quad \textit{sujeto a } \; P_1(0) = 2000 \;\; P_2(0) = 0$$

A continuación, se trabajó con el ítem c). En el interior del G1 dijeron verbalmente: "*A medida que t tiende a infinito, la cantidad de contaminante tiende a cero. Va a llegar un momento en que se van a limpiar los dos lagos de contaminantes".* Esto se realizó en el registro del lenguaje natural, anticipando lo que luego encontrarían resolviendo el sistema en el registro algebraico. Resolvieron el sistema siguiendo uno de los procedimientos anticipados en el análisis a priori (figura 6).

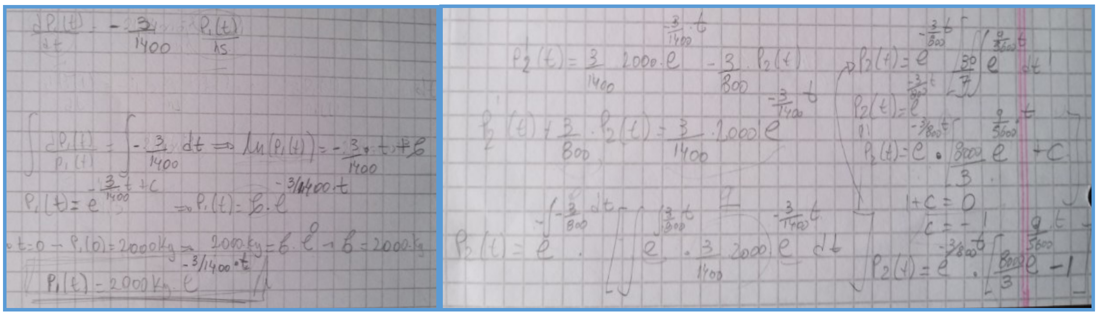


Figura 6: Resolución del PVI efectuada por uno de los grupos

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva escalar**

Seguidamente, plantearon el límite tendiendo a infinito, tal como lo habían expresado verbalmente, pero lo hicieron de la suma de las funciones que describen el comportamiento del contaminante en cada uno de los lagos (figura 7). Si bien la suma permite saber cuánto contaminante hay en total en los dos lagos para un tiempo *t*, la función resultante no es solución del sistema asociado.

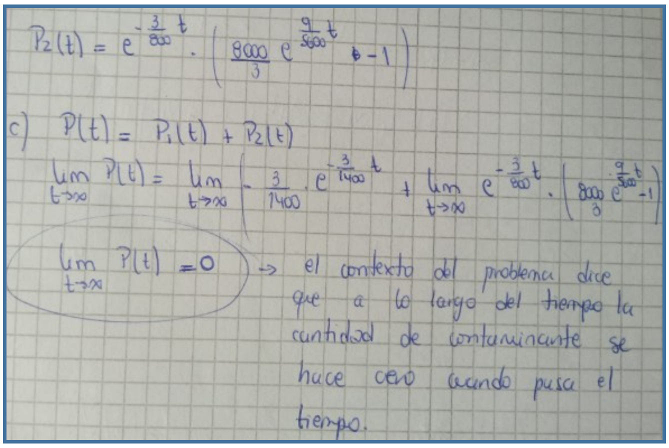


Figura 7: Procedimiento realizado por uno de los grupos para el ítem c)

Este procedimiento, no se había previsto desde el análisis a priori, en él se observa que los estudiantes definen una nueva función escalar como la suma de las funciones que describen la cantidad de contaminante en cada uno de los lagos. Dado que el límite de la suma tiende a cero, y que además en cada uno de los términos aparece un término exponencial con exponente negativo, los estudiantes habrán considerado que la cantidad de contaminante en cada uno de ellos tiende a cero, por tanto, los lagos se limpiarán.

En el G2, uno de los integrantes manifestó: "Hay que sacar el punto crítico". El observador detectó que se plantearon dos posibles alternativas de solución entre los miembros del grupo. En una de ellas, propusieron hallar la solución del sistema y luego analizar el comportamiento de las funciones obtenidas para $P_1(t)$ y $P_2(t)$. En la otra, consideraron hallar el punto crítico y analizar qué sucedería con el contaminante en cada lago, utilizando el plano fase. Uno de los integrantes sugirió que *(0,0)* es el único punto crítico, sin embargo no esgrimieron ningún tipo de argumento para validar lo afirmado. Otro insinuó la posibilidad de hacer un plano fase para analizar la estabilidad, pero no halló consenso dentro del grupo, por ende, optaron por resolver el PVI utilizando el tratamiento algebraico escalar, al igual que el G1. Si este procedimiento propuesto por ese estudiante hubiese tenido consenso en el grupo, habría emergido lo descripto en la categoría F.

Seguidamente se repartió la consigna d). El G_1 trazó varias curvas solución en el plano fase, cuando en realidad se solicitaba que tracen la solución correspondiente al PVI. Ante esto se les interrogó, "*¿Cuál de todas las curvas trazadas cumple con las condiciones iniciales del problema?"* Como respuesta eligieron una curva que no cumplía con las condiciones iniciales. La profesora les preguntó el por qué de esa selección, y los alumnos respondieron: "*porque es la forma de la exponencial".* Nuevamente, se les preguntó: "*¿Qué variables aparecen en el plano fase?".* La idea de esta pregunta era para ver si podían distinguir que si bien la ecuación paramétrica de la curva solución, se expresa por exponenciales en términos de la variable independiente *t*, la curva imagen correspondiente, dada en las variables $P_1(t)$ y $P_2(t)$ no tiene por qué seguir un comportamiento exponencial.

Luego, de realizar las modificaciones correspondientes en sus producciones, uno de los estudiantes pasó al pizarrón, y mostró la gráfica que efectivamente se ajusta a las condiciones iniciales (figura 8).

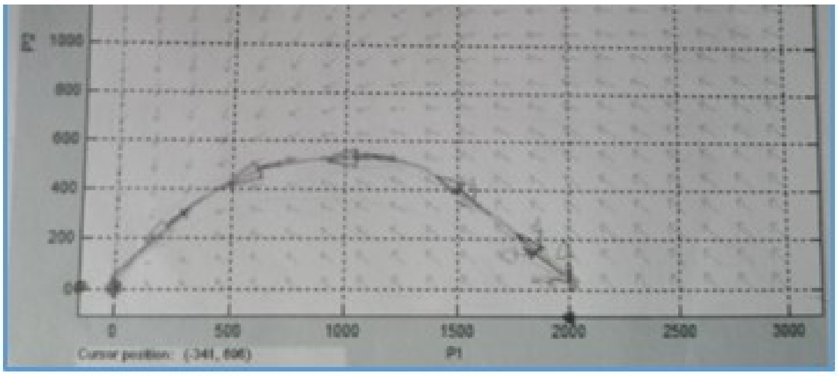


Figura 8: Curva trazada por uno de los grupos para el ítem d)

En el momento de describir el comportamiento del contaminante en cada lago, se detectó confusión con la ubicación de las condiciones iniciales, pues en el par (0,0) que representa la solución de equilibrio, localizaron a la condición inicial $P_2(0)=0$ y en el par (2000,0) a la condición inicial $P_1(0)=2000$, es decir, asociaron los pares (P_1, t_0) y (P_2, t_0), respectivamente. En forma colectiva se aclaró que cada par mencionado hace referencia a pares de la forma (P_1, P_2). Luego, la profesora preguntó si la trayectoria que marcaron es válida para el problema, todos respondieron afirmativamente, argumentando que a medida que *t* aumenta la cantidad de contaminante tiende a cero.

Varias de las cuestiones previstas en el análisis a priori no emergieron, como lo era la posibilidad de generar interrogantes dentro de cada grupo sobre el tiempo que le llevará al segundo lago alcanzar la cantidad máxima de contaminante, o bien lo referido a la relación que guardan los vectores tangentes y la orientación de la curva, aspecto no menor a ser tenido en cuenta para el trazado de la curva. En una de las producciones escritas se observa cómo esto último no es tenido en cuenta para el trazado de la trayectoria (figura 9).

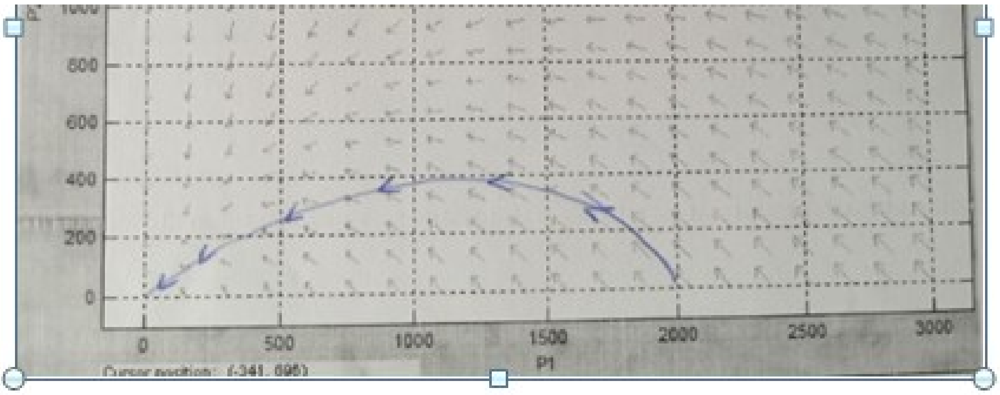


Figura 9: La curva trazada no es siempre tangente a los vectores del campo de direcciones

4.3 Algunas reflexiones logradas de la confrontación entre el análisis a priori y lo emergido en el taller

Si bien se había planificado de antemano que el armado del modelo matemático asociado al primer lago provocaría ciertas dificultades ligadas a la tasa de salida, el tiempo real empleado durante la puesta en práctica, fue ampliamente superior a lo estimado, lo que en cierta medida provocó que a los ítems restantes se les destinara menor tiempo de trabajo en grupo, por ende, los procedimientos emergidos resultaron un poco más escuetos.

Se cree que la conversión hacia el registro simbólico - algebraico del modelo matemático, es la que demandó mayor tiempo de discusión. Por otro lado, lo referido al tratamiento en el registro gráfico para el ítem d), permitió dar cuenta de los inconvenientes que emergieron en la interpretación de la información en el campo de direcciones al no aparecer de manera explícita la variable independiente.

En cuanto a la conversión hacia el registro del lenguaje natural para el ítem d), describieron el comportamiento del contaminante en cada uno de los lagos y establecieron argumentos que dieron cuenta de las elecciones realizadas, lo que los llevó a asociar el contexto del problema con los objetos matemáticos (por ejemplo asociar la variación de la cantidad de contaminante con respecto al tiempo con el objeto matemático de la derivada).

Con respecto a las categorías sugeridas para el análisis de las producciones, en esta experiencia sólo emergieron dos de ellas. Llama la atención que los alumnos no recurrieron al tratamiento vectorial en el registro algebraico, se cree que esto se debe a que el sistema involucrado es parcialmente desacoplado (lo que ocurre en el lago superior es independiente de lo que sucede en el lago inferior) y en consecuencia, es viable utilizar el método de sustitución para resolverlo. Cabe aclarar que la misma experiencia se replicó con la cohorte 2019 y que los resultados obtenidos están en proceso de análisis.

En general los resultados fueron favorables tanto para los estudiantes como para el equipo de docentes. Al finalizar el encuentro se les pidió a los participantes que manifestaran sus apreciaciones acerca del taller, opinaron que les había resultado muy interesante, que como estudiantes del Profesorado pudieron integrar lo estudiado en otros espacios de aprendizajes a nuevas situaciones problemáticas.

Para finalizar, esta experiencia significó un valioso trabajo para el equipo docente. La propuesta les permitió observar, en los estudiantes que cursaron la asignatura, aquellos aspectos de sistemas de ecuaciones diferenciales que tienen disponibles, muchas veces con significados incompletos y poco interrelacionados, para resolver problemas que ilustran situaciones reales. Asimismo, se reconoció que trabajar los aspectos escalares y vectoriales que el tema presenta, posibilita poner en juego conversiones entre los registros del lenguaje natural, algebraico y gráfico, actividades que fortalecen los recursos que poseen los estudiantes para enfrentar problemas matemáticos.

Bibliografía

Artigue Michèle (1995 a). La enseñanza de los principios del cálculo. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, Michele (1995 b). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R. Moreno L., Gómez P., Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barquero, B. (2009). Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Tesis de doctorando Universidad Autónoma de Barcelona.

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). “Ecuaciones diferenciales”. Editorial Thomson. México

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema Crucial en la Educación Matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta del RSME, 143 – 168.

Duval, Raymond (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval; A. Sáenz, (Eds.), Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Edwards, H. y Penney, D. (2001). Ecuaciones diferenciales. México: Prentice Hall.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. The Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 455-472.

Habre, S. (2003). Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(5), 651-662.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en Revista Enseñanza de las Ciencias, 21 (2). 265-280

Zang C., Fernández von Metzen G., León N. (2013). Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales. Educação Matemática Pesquisa, 15. Recuperado el 5 de septiembre de 2020, de http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12400/pdf

Zang C., Fernández von Metzen G., León N., Vila Torres, P. (2017). Los libros de texto recomendados a estudiantes universitarios para el estudio de ecuaciones diferenciales. Revista Premisa, 19, (73), p. 21-35. Disponible en http://www.soarem.com.ar/Documentos/73_139_Zang_Fdez_Leon_Vila.pdf

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen. Profesora en Matemática. Egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina (FCEQyN-UNaM).

María Natalia León. Profesora en Matemática, Física y Cosmografía, egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales (UNaM). Magister en Matemática Aplicada egresada de FCEQyN-UNaM, Argentina.

Claudia Mariela Zang. Profesora en Matemática y Profesora en Física, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones Argentina (FCEQyN-UNaM). Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina