

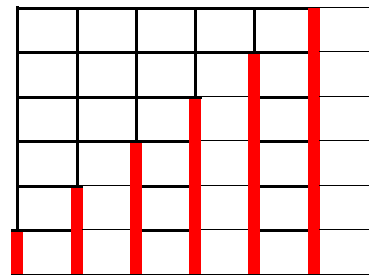
www.fisem.org/web/union
<http://www.revistaunion.org>

Triángulos, juegos y emociones

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema¹

¿Cuántos triángulos se pueden formar de modo que sus lados sean tres de los palitos (completos) que se muestran sobre el cuadrilado de la figura?



Este problema es fuente interesante para crear otros problemas y – sobre todo – para que los niños creen sus propios juegos. Mostraré el juego creado por una niña de 10 años, que no conocía cómo están relacionadas las longitudes de los lados de cualquier triángulo y comentaré sus potencialidades didácticas y matemáticas. Destaco la importancia de las emociones para el aprendizaje, máxime cuando se trata de niños y las emociones son originadas al crear ellos mismos un juego.

Con ideas suscitadas por el problema, preparé material concreto – palitos de colores, de tamaños proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5 y 6 – con el propósito de invitar a jugar con tal material, al inicio libremente y luego formando triángulos. En la Figura 1 muestro el material: 4 palitos de cada color (rojo, marrón, azul, blanco, amarillo y verde), siendo del mismo tamaño todos los del mismo color. La unidad de medida de los palitos es la longitud de los palitos de color rojo y para hacer más evidente las longitudes de los palitos en relación a la longitud de los palitos rojos, hay cartelitos con los números correspondientes. También hay cuatro dados, un bolígrafo y un block de hojitas de papel.

¹ Problema propuesto en una competición matemática para estudiantes de secundaria

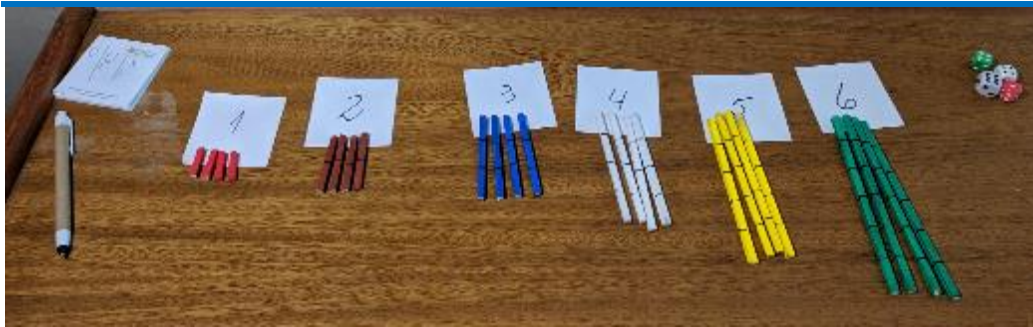


Figura 1

El material

Mostré el material a la niña y despertó su curiosidad; más aún cuando le dije que era para que juegue. Comenzó a manipular el material. Al inicio, formó figuras arbitrarias con los palitos. Dejé un tiempo para que ella se familiarice con el material. Observó los dados, usó tres de ellos, los lanzó y según los números obtenidos, escogió tres palitos cuyas longitudes correspondían a tales números. Con esos palitos construyó figuras arbitrarias, como se ve en la Figura 2 (Los colores de los dados no intervenían.)



Figura 2

Construcciones libres

- *¿Qué te parece si formas triángulos con tres palitos?* (Le aclaré que los vértices de los triángulos debían corresponder al encuentro de palitos por sus extremos)
- *Bien.* (Formó triángulos con palitos del mismo color, lo que siempre era posible pues iba obteniendo triángulos equiláteros.)
- *¿Y podrás formar triángulos cuyos lados no sean todos del mismo color?*
- *¡Claro!*

La niña construyó algunos triángulos (Figura 3), pero al escoger dos palitos marrones (de longitud 2) y uno amarillo (de longitud 5) me dijo sorprendida

- *¿¡Con estos palitos no se puede formar un triángulo!?*

Le sugerí que examine si había otros casos de imposibilidad y encontró el caso de palitos de longitudes 1, 2 y 3. y el caso de palitos de longitudes 2, 2 y 5 (Figura 4). Así, descubrió, con sorpresa, que había algunos palitos con los cuales era imposible construir un triángulo, según lo indicado.



Figura 3
Construyendo casos posibles
(Palitos de longitudes 4, 4 y 1)



Figura 4
Descubriendo casos imposibles
(Palitos de longitudes 2, 2 y 5)

Ante este descubrimiento, le pedí a la niña que invente un juego para dos o más personas, usando lo que tenía en la mesa y lo que había descubierto. Entonces se entusiasmó más, pensó un rato, usó tres dados, inventó un juego para dos jugadores, me lo explicó, se dio cuenta que podía ser para más jugadores y a mi pedido, precisó las reglas para el juego. A continuación, tales reglas, con las adecuaciones de lenguaje.

Reglas del juego creado

- *Juegan dos o más jugadores.*
- *Para decidir el orden, cada uno lanza un dado y comienza el que obtiene el mayor número.*
- *Cada jugador, en su turno, lanza tres dados.*
- *Por cada número obtenido en los dados, se extrae un palito del tamaño correspondiente a ese número.*
- *Con los palitos extraídos, el jugador debe tratar de formar un triángulo, uniendo los palitos por sus extremos.*
- *Si logran formar un triángulo con los palitos extraídos, se llevan los palitos. Si no se puede formar el triángulo, se devuelven los palitos y tira los dados el otro jugador. Así se continúa hasta que ya no se pueda formar más triángulos.*
- *Gana el que se lleva más palitos.*



Figura 5

Jugando el juego creado

En la Figura 5 se ve que, al lanzar los dados, la niña obtuvo los números 1, 3 y 6 y trata de convencerse que es imposible formar un triángulo cuyas dimensiones de sus lados sean 1 unidad, 3 unidades y 6 unidades.

Ciertamente, para jugar varias rondas, sería necesario tener más palitos de cada tamaño.

Sobre el problema inicial

Como lo mencioné en el pie de página, el problema inicial fue propuesto en una competición matemática para estudiantes de secundaria. Una participante de 12 años, resolvió el problema sin recurrir a material concreto ni a dibujar triángulos.

Escribió ternas con números asociados a los palitos, comenzando por excluir el número 1:

2 3 4, 2 4 5, 2 5 6, 3 4 5, 3 4 6, 3 5 6, 4 5 6

Podemos imaginar que la niña conocía la propiedad que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces, la longitud de cualquier lado es menor que la suma de las longitudes de los otros lados. Así,

$$c < a + b; \quad a < b + c; \quad y \quad b < a + c$$

Comentarios

1. Luego de conocer el juego creado por la niña, algo que aflora inmediatamente, es que los niños son capaces de crear juegos por *elaboración*; es decir, de manera similar a la creación de problemas, a partir de una situación dada. En este caso la situación es el material que se le presentó (Figura 1). Es más común que la creación de nuevos juegos sea por *variación* de juegos que se les presente a los niños (Malaspina y Malaspina, 2017, 2018). En la creación de problemas o juegos, por *variación*, se modifican uno o más de los elementos que constituyen el problema o el juego inicialmente dado (Malaspina 2018).
2. Adecuadamente orientados, los juegos creados por variación o por elaboración pueden tener un gran potencial matemático y didáctico, con la gran ventaja de generar emociones positivas, tan importantes para el aprendizaje.

3. Evidentemente, el juego creado por la niña tiene el potencial didáctico-matemático de hacer evidente que, dados tres números cualesquiera, no siempre es posible construir un triángulo cuyos lados tengan sus longitudes proporcionales a tales números. Es interesante seguir explorando para llegar a descubrir en qué casos es posible la construcción del triángulo.
4. A partir del problema-juego, se pueden crear otros problemas-juego usando tipos de triángulos a formar. Por ejemplo, que cada jugador disponga de material completamente similar en estructura y en cantidad y se juegue a quien construye más triángulos isósceles, no equiláteros, usando cada vez solo tres palitos.
5. Si se juega a construir triángulos rectángulos, se evidenciará que solo se puede formar el conocido triángulo de lados 3, 4 y 5. Ante esto, se puede añadir la regla de usar hasta dos palitos por cada lado del triángulo y así tener base para intuir la semejanza de triángulos, pues entonces se podrá construir también el triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10, usando dos palitos de 3, dos de 4 y dos de 5 para cada lado.
6. Esta experiencia didáctica muestra, una vez más, que la creación de problemas y de juegos que involucren aspectos matemáticos, favorece el estímulo del pensamiento matemático de quienes los crean. (Malaspina y Malaspina, 2017)
7. Un aspecto muy importante de la creación de problemas y juegos, es el involucramiento emocional de la persona que los crea, y de manera especial cuando es un(a) niño(a) quien crea su propio juego. El aspecto emocional es de suma importancia para aprender, pero lamentablemente se le presta poca atención en el ejercicio docente. Al respecto, Katrancı y Şengül (2019, p.3), citando a otros investigadores en educación matemática, nos recuerdan la importancia de la creación de problemas para generar emociones y actitudes positivas hacia las matemáticas:
 - Los estudiantes que crean problemas pueden **desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas** y esto provoca una disminución de sus preocupaciones. (Altun, 2001)
 - **Crear problemas ayuda a mejorar las actitudes y creencias matemáticas de los estudiantes.** (Akay & Boz, 2010; Cankoy & Darbaz, 2010)

Referencias

- Katrancı, Y., & Şengül, S. (2019). The Relationship Between Middle School Students' Attitudes Towards Mathematical Problem-Posing, Attitudes Towards Mathematical Problem-Solving, and Attitudes Towards Mathematics. *Education and Science*, 44(197), 1- 24.
- Malaspina, U. (2018). La invención de juegos, en el marco de la creación de problemas de matemáticas. Conferencia plenaria en IX CIEM. En Gaita, C.; Flores, J.; Ugarte, F. y Quintanilla, C. (Eds). *Actas del IX Congreso*

Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, pp. 3-9. Fondo Editorial de la Universidad Nacional de Huancavelica.

<http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2019/06/Actas-IX-CIEM--2018-IX-Congreso-Intenacional-sobre-Ense%C3%B1anza-de-las-Matem%C3%A1ticas..pdf>

Malaspina, U. & Malaspina, M. (2018). Stimulus of probabilistic thinking by engaging children and primary teachers in game invention. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds) *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 108). Umeå, Sweden: PME.

Malaspina, U., & Malaspina, M. (2017). Development of mathematical thinking in children by means of game invention. En Morska, J., & Rogerson, A. *Proceedings of the 14th International Conference: Challenges in Mathematics Education for the Next Decade*, Balatonfüred, Hungary (pp 229-234)