UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Página 167-174

Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Esbozar los gráficos de las funciones f + g, f – g y fg , conociendo únicamente los gráficos de las funciones afines[1] f y g.

No se conocen las expresiones algebraicas de f ni de g y sus gráficos se muestran en un mismo sistema de coordenadas cartesianas, en los que no están explícitas las unidades.

La solución de este problema evidencia relaciones entre propiedades aritméticas y propiedades geométricas. En la perspectiva de los registros de representación semiótica de Duval, mostramos que mediante conversiones y tratamientos, considerando los registros gráfico y algebraico, se simplifica el esbozo de gráficos de funciones obtenidas mediante operaciones con funciones afines, a partir de los gráficos de dos funciones afines dadas. En una perspectiva matemática, usamos la estrecha relación entre las estructuras algebraicas del conjunto de las funciones afines con las operaciones de adición y multiplicación, y del conjunto de los números reales, con operaciones similares.

El problema surgió en una clase sobre funciones afines en un curso para alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria, en la que se había ilustrado que las gráficas de funciones afines son rectas en el plano y que la suma de funciones afines es también una función afín. Habíamos resuelto problemas de hallar expresiones algebraicas – como funciones afines – correspondientes a rectas graficadas en un sistema de coordenadas. Se tenían en la pizarra, en un mismo sistema de coordenadas los esbozos de gráficos de dos rectas, que asumimos eran esbozos de gráficos de sendas funciones *f* y *g*, cuyas expresiones algebraicas no se conocían. En los ejes coordenados no estaban indicadas las unidades, como se muestra en la Figura 1.

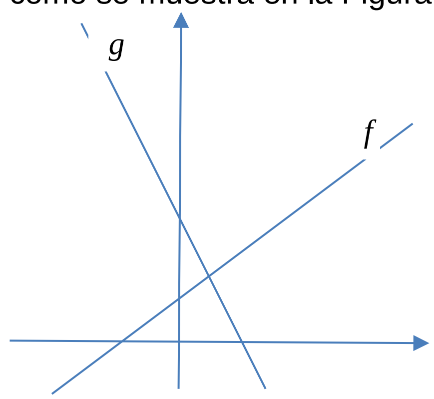

Figura 1

---

[1] Funciones afines, reales de variable real, son las de la forma $f(x) = ax + b$, con a y b constantes. Se dan detalles sobre estas y la suma de ellas en el anexo de este artículo (al final).

En lugar de marcar unidades en los ejes para encontrar expresiones algebraicas para las funciones afines correspondientes a tales rectas, surgió la idea de esbozar el gráfico de la función $f + g$. ¿Sería posible hacerlo en tales condiciones?

¿Cómo esbozamos el gráfico de la función $f + g$?

Observemos los puntos de intersección con el eje de abscisas, de los gráficos de f y g mostrados. Para mayor facilidad en las referencias, llamemos a tales puntos A y B respectivamente (Figura 2). Como todos los puntos que están en el eje de abscisas tienen ordenada 0, la abscisa de A será algún número real a y su ordenada será 0, de modo que $f(a) = 0$. Análogamente, la abscisa de B será algún número real b y su ordenada será cero, de modo que $g(b) = 0$.

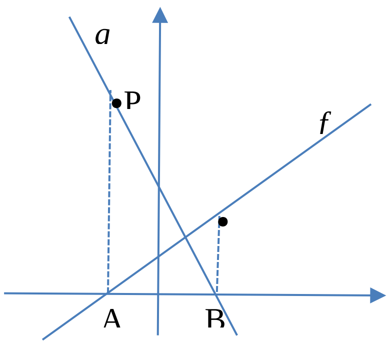

Figura 2

Observemos que un punto del gráfico de la función $f + g$ será

$$(a;\ (f + g)(a))$$

El valor de $g(a)$ será algún número real, y por ser $f(a)$= 0, se tendrá

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = g(a).$$

Así, ya tenemos un punto del gráfico de la función $f + g$: el punto cuyas coordenadas son $(a;\ g(a))$, que en la figura 2 lo llamamos P.

Con razonamiento similar obtenemos el punto Q del gráfico de la función $f + g$, cuyas coordenadas son $(b;\ f(b))$, pues siendo $g(b)$ = 0,

$$(f + g)(b) = f(b) + g(b) = f(b)$$

Como la función $f + g$ también es una función afín y en consecuencia su gráfico es una recta, teniendo los puntos P y Q de su gráfica, ya podemos graficar la recta que pasa por esos puntos, que es el gráfico de la función $f + g$ (Figura 3)

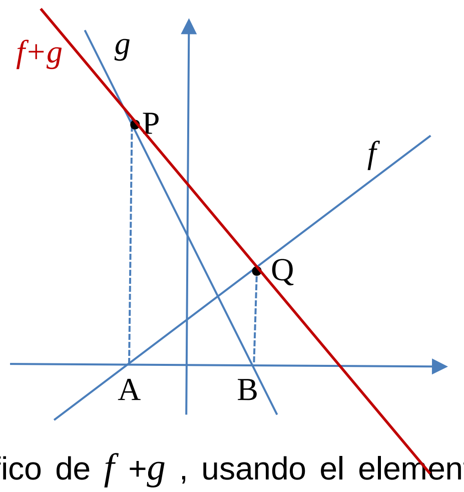

Figura 3

Esta manera de obtener un esbozo del gráfico de $f + g$, usando el elemento neutro aditivo de la adición, los estudiantes la encontraron más sencilla e ilustrativa, que hacerlo sumando ordenadas de puntos cualesquiera de f y g , o recurriendo a las expresiones algebraicas. A modo de verificación, usamos este último procedimiento, para lo cual, observando la figura 1, asignamos unidades del mismo tamaño en los ejes coordenados y consideramos que

$$f(x) = 1 + x \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - 2x \qquad (1)$$

En consecuencia, $(f + g)(x) = 4 - x$.

El gráfico de esta función $f + g$ es una recta de pendiente -1 , que interseca al eje de ordenadas en el punto (0; 4) y al eje de abscisas en el punto (4; 0), lo cual es coherente con la recta que pasa por los puntos P y Q graficada en la figura 3.

Indagaciones y resultados

Luego de haber "descubierto" esta forma de graficar sumas de funciones afines, conociendo solamente los gráficos de las funciones que se suman, se les pidió a los alumnos, formar grupos e indagar y crear problemas relacionados con este procedimiento. Resumo algunas indagaciones y resultados obtenidos.

Un grupo propuso

"*indagar por qué cuadrante o cuadrantes* ***no*** *pasaría la gráfica de f + g, sabiendo que f es creciente y de término independiente positivo y que g es decreciente y de término independiente también positivo*".

Hicieron sus indagaciones examinando gráficamente diversos casos y concluyeron que podría ocurrir que la gráfica de f + g no pase por el tercer o por el cuarto cuadrante. Fue interesante notar que el análisis gráfico luego se compatibilizó con el análisis algebraico encargado a otro grupo, pues el término independiente de la expresión algebraica correspondiente a f + g es positivo, pero el coeficiente del término lineal (pendiente de la recta) puede ser positivo, negativo o nulo. En el primer caso no pasa por el cuarto cuadrante, en el segundo caso no pasa por el tercero, y en el tercer caso no pasa por ninguno de los dos.

Otro grupo propuso

"indagar cómo construir gráficamente funciones afines f y g, para que la gráfica de f + g sea una recta horizontal".

Concluyeron que esto ocurría si las rectas son perpendiculares y de pendientes 1 y – 1, pero otro grupo encontró que bastaba que los gráficos de f y de g sean rectas que contengan, respectivamente, a las diagonales de un rectángulo con un lado en el eje de abscisas y otro lado paralelo al eje de ordenadas. Sugerí seguir indagando y relacionar las indagaciones hechas por los diversos grupos.

Graficar funciones obtenidas con otras operaciones con funciones afines

Como parte de las socializaciones, resultó planteada la pregunta

¿Hay un procedimiento similar para graficar funciones obtenidas con otras operaciones con funciones afines?

Consideramos los casos de $f - g$ y fg. Examinamos solo ligeramente el caso f/g, para percibir su mayor complejidad, por no tratarse de una función afín y sobre todo por la necesidad de usar asíntotas, que no era tema conocido por los estudiantes ni a tratarse en el curso.

- *Graficar $f - g$*

Consideremos las funciones afines f y g graficadas en las figuras 1 y 2.

Un primer punto de partida es que

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

y por ser f y g funciones afines, $f - g$ también lo es. Consecuentemente, su gráfico es una recta.

Observamos que las coordenadas de los puntos del gráfico de $f - g$ son de la forma $(x; (f-g)(x))$. En consecuencia, el punto Q = $(b; f(b))$ es un punto del gráfico de $f - g$, pues, como ya lo hicimos notar, en B se tiene que $g(b)$ = 0. Así,

$$(f-g)(b) = f(b) - g(b) = f(b)$$

Nos falta obtener otro punto. Ciertamente, es importante analizar gráficamente lo que ocurre con $f - g$ en relación al punto A, pues en tal punto se tiene $f(a)$ = 0 y así

$$(f-g)(a) = f(a) - g(a) = -g(a).$$

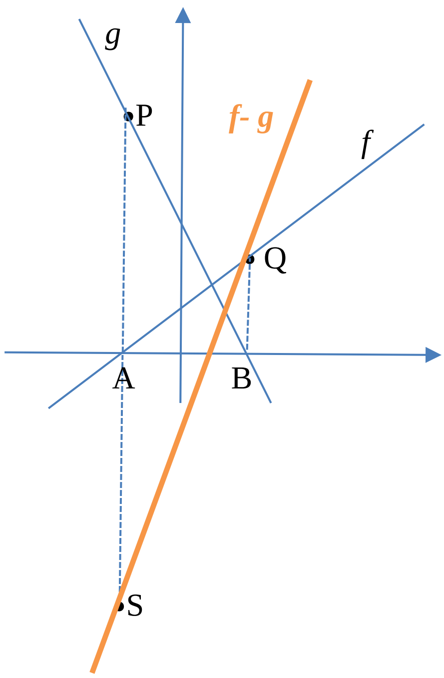

Figura 4

De esta observación concluimos que un punto del gráfico de $f - g$ tiene coordenadas $(a, -g(a))$, que es el simétrico del punto P, respecto al eje de abscisas. En la figura 4, llamamos S a tal punto y mostramos la recta que pasa por S y Q, que es el gráfico de $f - g$.

Otra manera de obtener el gráfico de $f - g$ es hacer el gráfico de $-g$ (recta simétrica a la recta del gráfico de g, respecto al eje de abscisas, y usar los mismos criterios que se usaron para graficar una suma de funciones afines, teniendo en cuenta que

$$f - g = f + (-g)$$

- *Graficar* fg

En primer lugar, recordemos que el producto de las funciones afines f y g se define como

$$(f\,g)(x) = f\,(x)\;g(x),\ \text{ para todo número real } x \qquad (2)$$

También, que las coordenadas de los puntos del gráfico de fg son de la forma

$$(x;\,(fg)(x)),$$

y que

- o las coordenadas del punto A son $(a;\,f(a))$, con $f(a) = 0$;
- o las coordenadas del punto B son $(b;\,g(b))$, con $g(b) = 0$.

Ahora analicemos observando la figura 5, que es la figura 2 sin los puntos P y Q.

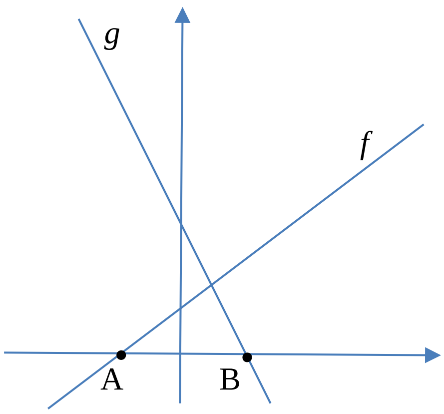

Figura 5

Como en A tenemos

$$(fg)(a) = f(a)g(a) = 0.g(a) = 0,$$

concluimos que $(a;\,0)$ (o sea A) es un punto del gráfico de fg.

Análogamente, como en B tenemos

$$(fg)(b) = f(b)g(b) = f(b).0 = 0,$$

concluimos que $(b;\,0)$ (o sea B) es un punto del gráfico de fg.

Así, A y B son puntos del gráfico de la función fg.

Ahora bien, ¿cómo es el gráfico de fg para valores menores que a (a la izquierda del punto A)? Podemos ver que

- o los valores $f(x)$ son menores que cero (por debajo del eje de abscisas)
- o los valores $g(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores menores que a, el producto $f(x)\;g(x)$ es menor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por debajo del eje de abscisas.

Por otro lado, ¿cómo es el gráfico de fg para valores entre a y b (a la derecha del punto A y a la izquierda del punto B)? Podemos ver que

- o los valores $f(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)
- o los valores $g(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores entre a y b, el producto $f(x)\;g(x)$ es mayor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por encima del eje de abscisas.

Finalmente, ¿cómo es el gráfico de fg para valores mayores que b (a la derecha del punto B)? Podemos ver que

- los valores $f(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)
- los valores $g(x)$ son menores que cero (por debajo del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores mayores que b, el producto $f(x)\ g(x)$ es menor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por debajo del eje de abscisas.

Como conclusión del análisis anterior, con ideas intuitivas sobre continuidad de la función fg, se llegó a la idea que parte de su gráfico es una curva con puntos cuyas ordenadas toman valores negativos y crecientes hasta llegar al punto A= (a ; 0). Como el gráfico pasa también por el punto B = (b ; 0), se intuye que los valores positivos que toman las ordenadas para x en el intervalo $]a\ ;\ b[$ son crecientes en un subintervalo de la izquierda y luego decrecientes en un subintervalo de la derecha. Para $x > b$, el gráfico tiene puntos cuyas ordenadas toman valores negativos y decrecientes.

En resumen, observando los gráficos de f y g, se intuye que la gráfica de fg es una curva que

- pasa por los puntos $(a;\ 0)$ y $(b\ ;\ 0)$
- es creciente hasta cierto punto del intervalo $]a\ ;\ b[$.(Podemos llamar M a tal punto)
- es decreciente desde el punto M.

Luego del convencimiento de esta percepción intuitiva del gráfico de fg, usamos GeoGebra con las expresiones algebraicas atribuidas a f y g en (1) para obtener un gráfico específico y compararlo con el intuido. Se celebró con entusiasmo al observar en la pantalla lo que se muestra en la figura 6. Notamos que como se consideró $f(x) = 1 + x$, la abscisa del punto A es a = -1; y como $g(x) = 3 – 2x$, la abscisa del punto B es b = 1,5. Además, el punto M aludido anteriormente, es el vértice de la parábola mostrada.

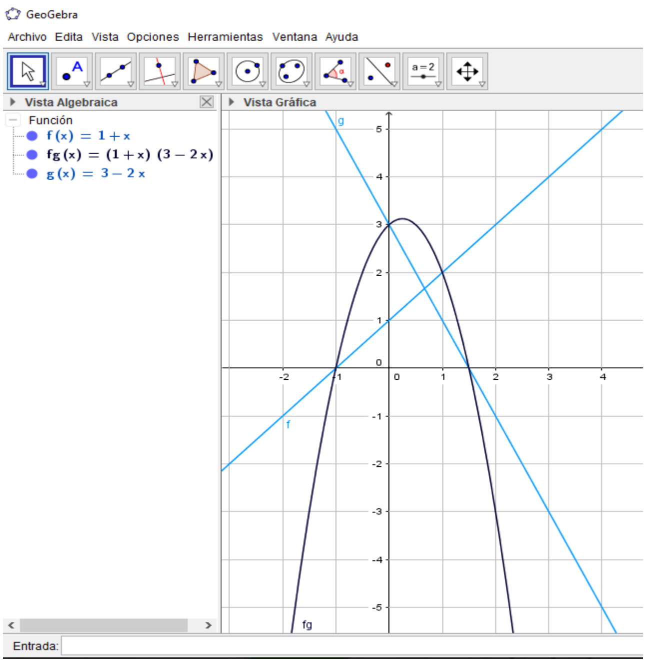

Figura 6

Evidentemente el gráfico de fg no es el gráfico de una función afín, sino de una función cuadrática, pues en el segundo miembro de (2) tendremos el producto de dos polinomios de primer grado, que es un polinomio de segundo grado.

Comentarios

1. En las clases se examinó en grupos, con tareas grupales e intergrupales, los procedimientos descritos para graficar sumas, restas y productos de funciones afines, considerando problemas propuestos por los mismos alumnos, con rectas paralelas, rectas ambas crecientes, rectas ambas decrecientes y rectas que pasan por el origen.

   Una vez más, destacamos la importancia de dar oportunidades a los alumnos a que ellos mismos hagan indagaciones e inventen problemas y a que disfruten resolviéndolos y pidiendo a sus compañeros que los resuelvan.
2. Los estudiantes percibieron con claridad una aplicación de la existencia del elemento neutro de la adición en el conjunto de los números reales, para simplificar la obtención del gráfico de una suma de funciones afines.
3. También percibieron una aplicación de las propiedades del producto de dos números reales en relación a los signos de los factores y a que uno de los factores sea cero, para obtener un esbozo intuitivo de la gráfica del producto de dos funciones afines.
4. Los estudiantes observaron que el procedimiento seguido para esbozar el gráfico del producto de dos funciones afines, sirve también para esbozar el gráfico de funciones cuadráticas definidas por expresiones algebraicas factorizables en el conjunto de números reales.
5. El problema desarrollado y comentado es intramatemático y henos mostrado sus potencialidades, trabajando en los registros gráfico y algebraico. Los lectores quedan invitados a encontrar problemas extramatemáticos en los que resulten útiles los procedimientos descritos.

Anexo

Función afín y suma de funciones afines

1. Una función h, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyos valores son números reales, se llama *afín* cuando existen números reales fijos a, b tales que $h(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Las funciones lineales son un caso particular de las afines, cuando $b = 0$.

   (Una exposición matemática amplia, se puede encontrar en el capítulo de funciones afines del libro escrito por Elon Lages Lima y colaboradores (2000)).

2. Si f y g son funciones reales de variable real, con dominio en $\mathbb{R}$, la función $f + g$ se define como

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo número real x ($\forall x \in \mathbb{R}$).

3. Si f y g son funciones afines, podemos establecer que

$$f(x) = a_1x + b_1 \quad \text{y} \quad g(x) = a_2x + b_2.$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son números reales fijos. Así, con lo definido en el punto 2, resulta que

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= (a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2).\end{aligned}$$

Como en los paréntesis tenemos números reales, por ser suma de números reales, concluimos que la función $f + g$ también es una función afín.

Por razonamiento similar, $f - g$ también es una función afín.

Referencia

Lages Lima, E., Pinto Carvalho. P., Wagner, E., & Morgado, C. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media. Volumen 1*. Lima: IMCA.