UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 79-102

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ESTUDIO DE PROCESOS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN INTERACCIÓN CON PARES

Ana María Mántica, Ana Laura Carbó

Fecha de recepción: 09/08/2016
Fecha de aceptación: 30/10/2016

Resumen	Se presenta el análisis de lo actuado por un grupo de estudiantes de una escuela secundaria, al formular una conjetura y validarla, en una actividad en la que se pretende que establezcan que con dos lados no es posible construir un único triángulo. Conscientes que cuando se conoce el proceso de producción de la demostración se puede tomar una decisión acerca de su validez efectiva y de su nivel, realizamos el estudio utilizando registros etnográficos, audio, artefactos escritos y videos, de lo producido durante la resolución de la tarea. Se realizan clasificaciones de los niveles de prueba alcanzados. Uno de los principales medios que transforman una situación de argumentación en una situación de prueba es someterla al debate para garantizar o desconocer su validez. Se observa cómo actúan los estudiantes al producir soluciones comunes. **Palabras clave**:Conjetura – Procesos de Prueba - Interacciones – Triángulos
Abstract	In the following study it is presented the analysis of what has been done by a group of students at a secondary school, to formulate a conjecture and validate it, in an activity in which it is intended to establish that with two sides is not possible to build a single triangle. Being aware of knowing the process of production of the proof can take a decision on its validity and its effective level, the study was performed using ethnographic records, audio, videos and written artifacts, produced during the resolution of the task. Classifications of the test levels achieved were done. One of the most important ways that transform a situation of arguments in a test situation to submit it to the discussion to ensure or ignore its validity. It is seen as acting students when it has to produce common solutions. **Keywords :**Conjecture - Validation processes – Interactions – Triangles
Resumo	Neste artigo se apresenta uma análise da atuação de um grupo de estudantes de uma escola do Ensino Médio, ante uma formulação e avaliação de uma conjectura, em uma atividade em que se pretende estabelecer que com dois lados não é possível construir um único triângulo. Consciente que quando se conhece o processo de produção da demonstração se pode tomar uma decisão sobre a sua validez efetiva

e o seu nível, realizamos o estudo utilizando registros etnográficos, áudio, artefatos escritos e vídeos, produzidos durante a resolução da tarefa. Foram feitas classificações dos níveis de prova. Um dos principais meios que transformam uma situação de argumento em uma situação de prova é levar a debate para garantir ou desconhecer a sua validez. Se observa como atuam os estudantes quando têm que produzir soluções comuns.
Palavras chave: Conjecturas- Processos de Validação – Interações – Triângulos

1. Introducción

Presentamos el análisis de las interacciones entre estudiantes de segundo año, 14-15 años, de escuela secundaria al momento de realizar actividades de validación de un problema geométrico en un entorno de lápiz y papel, con el propósito de estudiar los tipos de pruebas que utilizan en el proceso de formulación y validación de conjeturas.

Entendemos la actividad de validar como la realización de dos procesos. En el primero, se establecen las conjeturas a partir de las evidencias que provee la exploración de la situación. En el segundo se justifica la conjetura y a estas justificaciones las llamamos pruebas. La prueba es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad.

Diferentes investigadores que han estudiado las particularidades del trabajo geométrico, como Vinner (1991), Fischbein (1993), Laborde (1996), Berté (1999), Berthelot y Salin (1994), Salin (2004), Itzcovich (2005), sostienen que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales. Pero esta figura geométrica no es un mero concepto; es una imagen visual, posee propiedades que normalmente los conceptos no poseen, dado que incluye la representación mental de propiedades espaciales. Mántica (2011) sostiene que "el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas no es espontáneo y deben ser objeto de enseñanza" (p. 32), por lo que deben proponerse a los estudiantes actividades que involucren estudiar y tratar propiedades de las figuras. Esto significa apostar a la elaboración, identificación y validación de propiedades por parte de los estudiantes, como también el uso de propiedades en la producción de nuevas relaciones

Acerca de la validación en geometría se han desarrollado estudios desde perspectivas diferentes, en general en el marco de la geometría euclídea y muchos de ellos apoyados por el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD). Estos estudios abordan aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos, que generan diferentes clasificaciones o estructuras organizativas de los procesos de validación. Diversos estudios (de ninguna manera pretendemos ser exhaustivos) que hacen referencia a analizar procesos involucrados en tareas de conjeturar, explorar y validar, presentan diferencias que se pueden establecer entre los sujetos con los que se realizan y el entorno con el que trabajan los sujetos, ya sea con lápiz y papel, con SGD o con ambos. Harel y

Sowder (1998), Balacheff (2000), Marradez y Gutiérrez (2000), Gutiérrez (2002) y Prior y Torregosa (2013) realizan sus estudios con estudiantes de escuela secundaria. Marradez y Gutiérrez (2000) y Gutiérrez (2002) realizan el estudio empleando un SGD, en tanto los tres estudios restantes mencionados trabajan la problemática de la validación en entornos de lápiz y papel. En tanto Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) realizan la investigación con estudiantes avanzados de la Licenciatura en Matemática y utilizando SGD, Rodríguez (2006) también utiliza como sujetos estudiantes de Licenciatura en Matemática pero en el estudio emplea ambos entornos, lápiz y papel y SGD.

Coincidimos con Balacheff (2000) en que el proceso de validación es la actividad intelectual no completamente explícita que se encarga de la manipulación de la información, dada o adquirida, para producir una nueva información, cuando este proceso tiene como fin asegurarse la validez de una proposición y ocasionalmente producir una explicación, una prueba o una demostración.

2. Características del estudio

El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación **Estudio de procesos de validación en la producción de conocimientos en clases de matemática de distintos niveles educativos** y se encuadra dentro de la investigación-acción. Este método se relaciona con problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores y puede ser desarrollada por ellos, interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema y describe e interpreta lo que sucede con el mismo lenguaje utilizado por ellos.

La propuesta analizada se implementa con un grupo de estudiantes de segundo año de la escuela secundaria nº 3109 de la ciudad de Santa Fe, Argentina, al que concurren 40 alumnos entre 13 y 14 años. Estos estudiantes acceden a colaborar en la realización de las actividades en el marco del proyecto, dan su consentimiento para ser grabados durante las clases y acuerdan que lo producido sea utilizado en el marco de la investigación.

Se presenta en este trabajo un estudio descriptivo como la mayoría de los estudios en educación (Cohen y Manion (1990)), en el que se cuenta lo que ya ha ocurrido, a partir de observaciones a individuos, grupos, instituciones y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación.

Entre los métodos de recolección de datos mencionamos la observación no participante, artefactos escritos (McKnigh, Magid, Murphy y McKnigt, 2000) y grabaciones en audio y en video. En el estudio se observan y registran las clases de matemática durante tres módulos de trabajo. El observador realiza un registro etnográfico de lo acontecido y además emplea grabadores de audio y cámara de video, elementos que se utilizan para reconstruir el proceso realizado por los integrantes de cada grupo, además de lo escrito en las carpetas y afiches. El audio registrado permite analizar las interacciones de los estudiantes, intentando una única respuesta para la tarea encomendada, partiendo de lo realizado individualmente.

La secuencia que se diseña, presentada en el anexo, tiene por objetivo que los estudiantes conjeturen y validen la propiedad de la desigualdad triangular de los lados del triángulo.

En este artículo se presenta el análisis del problema 1 cuyo propósito es que los estudiantes conjeturen y validen que dados dos segmentos, se pueden determinar infinitos triángulos que los contengan como lados. Se forman para esto 8 grupos de 5 alumnos cada uno. La conformación de estos grupos la diseña el docente a cargo del curso de modo que en cada uno de ellos haya estudiantes que normalmente tienen una activa intervención en el aula de matemática. Se plantea la clase de manera que, en primera instancia los alumnos trabajen en la tarea propuesta por el docente en forma individual y luego se conforman los grupos con el propósito que se debatan las conjeturas elaboradas en forma individual y se logre una justificación grupal, para presentarla a la clase.

Los grupos se distribuyen en el aula de modo que las interacciones de sus integrantes no interfieran en la de los restantes. Los observadores no participantes ubicados en distintos puntos del aula registran en un cuaderno lo que acontece. Se colocan además grabadores en cada grupo a fin de registrar las interacciones entre los integrantes.

Para el análisis de la tarea que se presenta en este artículo, se utiliza lo documentado en las carpetas de los estudiantes, lo sintetizado en el afiche como acuerdo del grupo, las anotaciones del observador no participante, el audio de las grabaciones de las interacciones en cada uno de los grupos al realizar la tarea indicada. La implementación del problema 1 demanda tres módulos de clase consecutivos, que equivalen a 120 minutos.

3. Marco de referencia

Para el estudio que presentamos tomamos a Balacheff (2000) que analiza el proceso de estudiantes de entre 11 y 15 años que deben formular una conjetura y validarla en interacción con pares, en un entorno con lápiz y papel. Consideraremos, también a Harel y Sowder (1998) quienes se enfocan en asuntos cognitivos vinculados a los esquemas de pruebas y estudian las justificaciones que convencen a los estudiantes y que ellos utilizan para convencer a otros estudiantes y al profesor. En función de estas clasificaciones y lo encontrado en los análisis de lo actuado por los distintos grupos considerados tomaremos la clasificación propuesta por Rodríguez (2006) quien trabaja con estudiantes de la licenciatura en matemática empleando tanto en entornos con SGD como de lápiz y papel.

Además Quaranta y Wolman (2003) que abordan la importancia de la interacción para el avance del conocimiento.

Balacheff (2000) realiza una distinción entre los términos explicación, prueba y demostración. Sostiene que en la *explicación* es el sujeto quien establece y garantiza la validez de una proposición avalada por sus propias reglas de decisión de la verdad. Se habla de *prueba* cuando la explicación es reconocida y aceptada por una comunidad. El paso de la explicación a la prueba tiene que ver con un proceso social, es decir que el discurso que asegura la validez de la proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad determinada. La prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. Además la posición no es definitiva, puede evolucionar con el tiempo en función del avance de los saberes en los que se apoya. Reserva el término *demostración* para un tipo de prueba particular en matemática: una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto definido de reglas. Sostiene que los estudiantes construirán pruebas de los enunciados que ellos producen antes de dominar la demostración en el sentido de los griegos y analiza si logran distanciarse del discurso natural aproximándose a un discurso formal. Presenta un estudio experimental acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Muestra los procesos de demostración usados por estudiantes, agrupados en binomios, al resolver con lápiz y papel un problema geométrico y analiza cómo llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta a través de la discusión verbal. Pone el énfasis no sólo en la relación entre los ejemplos utilizados y el enunciado que se pretende demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan eso ejemplos. En los primeros estudios realizados distingue cuatro tipos principales de pruebas pragmáticas e intelectuales: empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental. Llama “*pruebas pragmáticas* a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y *pruebas intelectuales* a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones”(p.22). Empirisismo ingenuo, experimento crucial y ejemplo genérico corresponden a demostraciones empíricas y experimento mental a demostraciones deductivas informales. Considera que la diferencia entre las demostraciones pragmáticas es la forma cómo los estudiantes seleccionan los ejemplos: En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. La experiencia crucial es una experimentación sobre un caso que se reconoce tan poco particular cómo es posible, cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración. En este estudio, el autor, realiza una clasificación de las pruebas intelectuales. Entre éstas considera la experimento mental en la que las razones se fundamentan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego no testificada por medio de sus representantes, sino que formuladas en su generalidad, aparecen como un medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación, se libera de situaciones particulares. El otro tipo que considera, dentro de las intelectuales, es el cálculo sobre enunciados que son pruebas totalmente independientes de la experiencia, basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones que se ponen en juego en la solución del problema. Este estudio permite ver los procesos de validación usados por los estudiantes al resolver un problema, revisando cómo llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta a través de la discusión verbal. Considera que una característica relevante es que los estudiantes tienen la tarea de resolver juntos un problema y sostiene que “las interacciones entre individuos en igualdad de condiciones permite independientemente de toda intervención de un experimentador la exteriorización de las concepciones de los proyectos y la toma de decisiones” (p. 44).

Harel y Sowder (1998) y Sowder y Harel (1998) emplean la palabra prueba en un significado amplio, en el sentido psicológico de justificación más que en el sentido estrecho de demostración matemática. Introducen el término “esquema de prueba” de una persona o una comunidad como aquello que le permite asegurarse (eliminar sus propias dudas sobre la veracidad de una afirmación matemática) y persuadir (eliminar las dudas de otros sobre esa afirmación). Plantean esta noción de “esquema de pruebas” como una herramienta para analizar esas formas de convicción o persuasión y los organizan en tres categorías: externos; empíricos, y analíticos, con subcategorías para cada uno. Estos esquemas son mutuamente exclusivos, pues una justificación no puede pertenecer a dos tipos de esquemas a la vez, pero puede suceder que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una prueba. Los esquemas de prueba externos los subdividen en autoritarios, rituales y simbólicos. En este esquema tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia/fuente exterior. En los esquemas de prueba empíricos las justificaciones son hechas sólo en base a ejemplo y se dividen en perceptivos e inductivos. Los esquemas de prueba analíticos los dividen en transformacionales y axiomáticos. Los profesores de matemática probablemente consideran los esquemas de prueba analíticos como el tipo fundamental de justificación en matemáticas. Los autores sostienen que los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son argumentos convincentes producto de la actividad humana, en la que ellos pueden y deben participar dado que son parte esencial de la actividad matemática.

Rodríguez (2006) establece los siguientes tipos o categorías de pruebas, de convicción externa o de convicción propia. Las primeras son aquellas donde la principal fuente de convicción es un agente ajeno a la persona y los de convicción propia aquella en las que el origen de convicción radica en la propia persona. Las de convicción externa a su vez las clasifica, en autoritarios, rituales y simbólicos. En las de convicción propia distingue dos tipos, empíricas en las que la convicción proviene de la comprobación en ejemplos y deductivas en las que la comprobación proviene principalmente de una justificación lógico deductiva.

Quaranta y Wolman (2003) sostienen que el valor fundamental de los momentos de discusión es que son potencialmente fructíferos para la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones. No se trata sólo de dar a conocer los resultados obtenidos; sino buscar razones, argumentar intentando defender su verdad o falsedad. Estos momentos de discusión requieren de la participación activa del docente quien no debe sólo proponerlos sino también conducirlos. Para esto se requiere de una intervención que incite a los estudiantes a explicitar lo realizado, aceptando todas las respuestas, ayudando a establecer acuerdos y recordando acuerdos anteriores relacionados con los conocimientos que se pretenden trabajar en esa situación. El trabajo con "los otros" conlleva la situación de resolución conjunta entre los alumnos que, según las autoras, facilita colaboraciones en el proceso de buscar soluciones mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado. Esto requiere tener en cuenta lo que dicen los otros, las sugerencias que hacen explicitar y justificar sus propias elecciones, estimulando intercambios que posibilitan tomar conciencia sobre algún aspecto no considerado, descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, reformularlos.

4. Relevancia del problema

El trabajo con formulación y validación de conjeturas es de interés en el quehacer del aula de matemática, y se pone de manifiesto en los documentos regulatorios tanto nacionales como jurisdiccionales. Detallamos esto en los siguientes párrafos.

En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (2011) del ciclo básico de la educación secundaria, se expresa que debe abordarse "La producción en interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales" (p. 14). Más adelante se expone que la escuela ofrecerá situaciones de enseñanza que promuevan "La producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales" (p. 16). Para segundo año, en particular, propone en relación con la geometría y la medida "El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: (…) formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que puedan validarlas" (p. 22).

El Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, en sus orientaciones curriculares (2011) expresa,

> Con respecto a la validación, entendida como la decisión autónoma del estudiante acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta, se podrán aceptar en los primeros años de escolaridad secundaria, argumentaciones imprecisas y escrituras poco formales como pruebas ligadas a la acción y a la experiencia, para evolucionar hacia pruebas intelectuales que generalizan las relaciones borrando toda huella del contexto en el que se planteó la situación. (p. 40)

El diseño curricular jurisdiccional ciclo básico de la educación secundaria de la provincia de Córdoba (2011) propone, la elaboración de argumentaciones acerca de la validez de las propiedades de las figuras bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos) para analizar afirmaciones, reconociendo los límites de las pruebas empíricas. Expresa que debe consolidarse la

> Elaboración de argumentaciones sobre condiciones necesarias y suficientes para congruencia de triángulos construidos Uso de instrumentos de geometría y programas graficadores para la construcción de figuras a partir de informaciones. Producción de argumentaciones acerca de validez de la propiedad triangular y propiedad de la suma de ángulos interiores de triángulos y cuadrilátero. (p 42)

Podemos decir que hay un marcado interés en distintos documentos regulatorios de valorizar, en los estudiantes de la escuela secundaria, el inicio en el trabajo deductivo en el aula de matemática.

Respecto al trabajo en geometría, Balacheff (2000) plantea que de manera implícita, la enseñanza de la matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Esto es particularmente notorio cuando el problema planteado se presenta de la forma: "mostrar que…". En una formulación de este tipo, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que está por descubrir es una demostración" (p.5). Propone partir de los argumentos de los alumnos y conducirlo a una situación paradójica en la cual se vean obligados a ponerlos en tela de juicio. Trabajar para hacer que el estudiante tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales. Se trata de problematizar la evidencia. Considera que la interacción social es un elemento determinante para la toma de conciencia sobre la verdadera importancia de los procedimientos de validación como medio fiable y eficaz para establecer la verdad de la proposición.

Como se plantea en el punto que se expresan las características del estudio, la propuesta apunta a que los estudiantes interactúen poniendo en esta acción tanto la conjetura como su justificación. Estas interacciones dan acceso, por los debates que ellas suscitan, a la observación de los procesos que sostienen las decisiones tomadas por los alumnos.

5. Análisis de los datos

El objetivo de la tarea es que los estudiantes logren enunciar la desigualdad triangular. Se plantean para esto tres problemas que se presentan en el anexo. En este trabajo realizamos el análisis del debate entre pares del primer problema cuyo objetivo es que los estudiantes puedan determinar que dados dos segmentos, se pueden determinar infinitos triángulos que los contengan como lados.

Los estudiantes en un trabajo individual en primera instancia y con un debate entre pares en un segundo momento, deben emitir una conjetura y suministrar una prueba respecto al problema 1, cuya consigna se transcribe:

Consigna:

Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás,

a) Construye un triángulo: b) Construye otro triángulo, distinto del anterior, con esos mismos dos segmentos. c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

Se presenta a continuación el análisis del debate de cada uno de los ocho grupos constituidos, y se clasifican las interacciones según los tipos de pruebas empleados, teniendo en cuenta si son de convicción externa o propia y si son de convicción propia según la forma de escoger los ejemplos y la utilización que de ellos se realiza.

5.1. Grupo 3

Ladislao: Esta todo entre es infinito y no es infinito.

Marisel: Para mi no es infinito, porque tenemos un límite para armar un triángulo, desde el grado 0 hasta 179 grados, 59 minutos, 59 segundos y no hay más posibilidades.

Pareciera que para Marisel si un conjunto es acotado no puede ser infinito. Está usando el límite del intervalo, para asegurar que no puede encontrar infinitos triángulos. Es decir que usa este ejemplo para descartar una de las hipótesis. La cuestión de que haya "un límite" es tomada como una experiencia crucial por Marisel, para asegurar que no hay infinitos triángulos.

Los estudiantes continúan una discusión sobre la finitud o infinitud de las soluciones del problema, fundado en la cota de los 180º y las posibles amplitudes de los ángulos que forman los segmentos dados. Interviene Florencia que afirma: "hay infinitas soluciones a pesar que hay un tope". Descartan el ángulo de 0º y el de 180º considerando que en esos casos no se forma triángulo. Algunos estudiantes logran modificar lo referente a la infinitud de las soluciones.

Ladislao: entre el segmento de los 179º de inclinación hasta los 180º va a haber infinitos grados de inclinación, pero mientras que no supere los 180º, podés tener infinitos segmentos que no lleguen a los 180º de inclinación.

Florencia: entre el grado 1 y el grado 2 hay infinitas medidas, hay un tope pero nunca se llega porque hay infinitas medidas.

Podríamos decir que Ladislao y Florencia están utilizando un ejemplo genérico dado que logran interpretar la representación física como una sucesión de posiciones entre dos grados determinados. Florencia logra separarse de lo que los estudiantes consideran el "tope" para fundamentar su postura considerando un caso más general, entre 1º y 2º. De sus explicaciones, puede inferirse que estarían reconociendo que u*n conjunto acotado puede tener infinitos elementos*.

	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 3		Marisel *El ángulo de* *179º 59` 59``.*	Florencia y Ladislao *Consideran que entre 1º y 2º hay infinitas medidas* *Un segmento fijo y otro móvil.*	

Tabla 1. Tipos de pruebas grupo 3

Nos interesa destacar lo acontecido entre Florencia y Ladislao, ambos emplean el ejemplo genérico, utilizado para establecer las razones de validez de la conjetura, basándose en un segmento fijo y otro móvil, "el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura" (Balacheff, 2000, p.69)

F: Si tomamos el transportador no tenemos infinitas subdivisiones, dado que la graduación es en grados, pero dentro del límite, entre cada grado, hay infinitas posibilidades.

L: se puede dejar fijo uno de los segmentos e ir corriendo el otro pero hay un momento en el que se corta, entonces.

F: cuando lo vas corriendo entre una posición y otra, hay más, hay infinitas.

L: hay infinitos triángulos, pero hay un tope, pero hay infinitos,… las dos cosas", o sea hay un tope porque no es posible hacer un triángulo si los segmentos forman 0º o 180º, "pero entre un grado y otro hay infinitas "medidas".

El trabajo en conjunto de explicitar y justificar permite a Ladislao considerar la posible infinitud de un conjunto acotado. Pareciera que Ladislao y Florencia utilizan implícitamente el concepto de infinito real, abordado por el docente en el tema números reales e intervalos. En este caso la interacción entre los pares constituye un factor de progreso en lo que respecta a la relación entre conjunto acotado y conjunto infinito.

5.2. Grupo 5

En principio, en el grupo no acuerdan la solución del problema, algunos sostienen que hay infinitas soluciones y otros que millones pero no infinitas.

Se presenta una discusión entre Julia y Milagros respecto a si hay muchas “millones” o infinitas soluciones, como no logran un acuerdo respecto al tema solicitan la intervención del docente. El docente, teniendo en cuenta el debate entre las estudiantes decide hacer referencia a la densidad de los números reales, tema que los estudiantes tienen disponible. Considera que puede relacionarlo con la densidad de los números reales y el concepto de intervalo acotado. Les propone analizar cuántos números reales hay entre dos reales dados, preguntando cuantos números reales hay entre 1 y 2.

Julia, sostiene que no hay infinitos triángulos como solución del problema, afirma que entre 1 y 2 hay infinitos números reales. Puede manifestar esto pero, no puede modificar su afirmación respecto a la cantidad de triángulos que podría construir. Por su parte Milagros puede utilizarlo para fundamentar lo que sostiene, dado que expresa “aunque haya un final en medio hay infinitos números”.

El ejemplo planteado por el docente es un “experimento crucial”, las estudiantes lo emplean para descartar una de las dos hipótesis planteadas, hay infinitas soluciones o hay millones.

Milagros representa dos circunferencias concéntricas (figura 1) con radio cada uno de los segmentos dados y centro el extremo común a estos segmentos para explicar su afirmación. Sostiene que son infinitos triángulos porque entre los extremos de un arco de la circunferencia de radio mayor hay infinitos puntos, a cada uno de esos puntos les corresponde uno que es extremo del radio de la circunferencia menor. Milagros estaría advirtiendo que “entre los extremos del arco de circunferencia considerada, hay infinitos puntos que permiten por tanto construir infinitos triángulos” (Mántica y Carbó, 2013, p. 41).

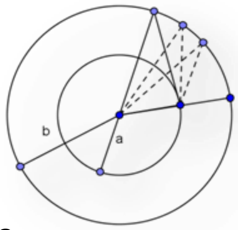


Figura 1

Para Milagros hay infinitos triángulos, pero para Julia no. Milagros, en función de las interacciones, logra establecer una relación entre los puntos del arco de la circunferencia de radio menor y los del arco de la circunferencia concéntrica de radio mayor, respecto a un ángulo central. Los estudiantes utilizan en su fundamentación la continuidad de la circunferencia, podríamos decir que emplean lo que Balacheff denomina teorema en acto[1].

	Empirisismo	Experiencia	Ejemplo	Experimento mental

[1] Teorema en acto: las propiedades de las relaciones que la persona utiliza en la solución de un problema. No obstante esto no significa que por tanto dicha persona puedas hacerlas explicitas o justificarlas.

	ingenuo	crucial	genérico	
Grupo 5		¿Cuántos reales hay ente 1 y 2? *Densidad de los números reales.*		Milagros *Relaciona arcos de dos circunferencias concéntricas, de distinto radio, respecto al mismo ángulo central.*

Tabla 2. Tipos de pruebas grupo 5.

Luego de la interacción presentan como conclusión que pueden construirse infinitos triángulos. Julia sostiene que por más que tenga infinitos puntos el arco de circunferencia algún límite tiene que tener, "en algún momento se termina" sin embargo concluye que son infinitos a pesar de no estar convencida. Manifiesta "Si Milagros lo dice, seguro es. Ella siempre resuelve bien todo". Se pone de manifiesto que acata lo que sostiene Milagros por considerarla una alumna "avanzada" en matemática, esquema de prueba autoritaria, según Sowder y Harel (1998). En este caso la interacción no resulta beneficiosa para Julia ya que no se cumple con una de las características necesarias, como es el sostenimiento de las propias convicciones, en la medida que no puede fundamentar su conjetura.

En casos como este las interacciones presentan limitaciones pues algún alumno del grupo asume ""la dirección de la solución" y los demás la aceptan -tal vez por su "fama de bueno en matemática"-, pero sin poder reutilizarla por su propia cuenta en otra situación" (Quaranta y Wolman, 2003 p. 195). Es probable que Julia no pueda hacer uso de la relación conjunto acotado-conjunto infinito en otra situación que lo amerite.

Después de la intervención del docente, Milagros desiste de considerar que hay un número finito de triángulos y logra interpretar que al desplazar uno de los segmentos dados, considerándolo uno de los lados de un triángulo, su extremo describe una circunferencia. La continuidad de la circunferencia le permite interpretar que son infinitos los puntos del arco de la circunferencia que describe el extremo del segmento.

Tomaremos como experimento mental el caso que los estudiantes logren reconocer como un arco de circunferencia el lugar geométrico descripto por el extremo de uno de los segmentos dados al variar el ángulo que forma con el otro segmento dado, tomado como la inicial o fijo. Consideraremos esto como lo que Balacehff (2000) denomina "procedimientos de validación de nivel superior" (p. 59).

5.3. Grupo 6

Evangelina sostiene que se pueden formar diferentes tipos de triángulos dependiendo de la "ubicación" de los segmentos, dice "te puede quedar de 45º o de 90º" y el resto acuerda. Logran sólo estos dos casos, estaríamos frente a un empirisismo ingenuo.

Cuando Evangelina comienza a interactuar con los integrantes del grupo para fundamentar su respuesta, generaliza haciendo referencia a otros triángulos, pues deja de considerar que el ángulo que forman los segmentos dados sólo son de 45º o de 90º para centrarse en la longitud del tercer lado. Compara a los segmentos como si fuesen las agujas de un reloj, diciendo que "dependiendo del ángulo que forman varía el tamaño del tercer lado". Estaría utilizando un ejemplo genérico, en este caso la r*elación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*. Podemos decir que los estudiantes están utilizando la propiedad “en todo triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa” propiedad que desconocen, podríamos decir también en este caso que utilizan un teorema en acto.

Sol interviene explicando su postura que no coincide con la de Evangelina y Flor. Hasta ese momento no la había explicitado pues esas alumnas tienen, para el resto de la clase, una “autoridad matemática” por sus notas académicas, según nos manifiesta la docente del curso. Sol explica que para ella pueden construirse muchos triángulos y lo hace utilizando el compás, apoyando un extremo en el punto común de los segmentos dados que considera como dos lados del triángulo y la otra punta del compás en el extremo libre de uno de los segmentos. Estaría utilizando en la justificación el concepto de circunferencia, estableciendo la relación ángulo central-arco que abarca. Podríamos decir que estamos frente a un experimento mental, dado que “es en virtud del conocimiento y no de la práctica que la evidencia permite rechazar algo para establecer una verdad”. (Balacheff, 2000, p. 26)

	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 6	Todo el grupo menos Sol, considera ángulos de 45º y 90º		Evangelina *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	Sol *Correspondencia entre el ángulo central y el arco de circunferencia que abarca*.

Tabla 3. Tipos de pruebas grupo 6.

La interacción entre los estudiantes permitió a Evangelina pasar de un empirisismo ingenuo a un ejemplo genérico y a Sol superar el esquema de prueba autoritaria y realizar una experimento mental. En este caso la interacción resultó positiva para Evangelina y para Sol, les permitió avanzar en el proceso de prueba. Estos intercambios “obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de las posibilidades hasta llegar, a veces, a perturbar la propia posición”. (Quaranta y Wolman, 2003, p. 198).

5.4. Grupo 7

En una primera instancia los alumnos centran la discusión en el caso que los segmentos no formen triángulo. Julieta sostiene “tenés que ir moviendo el segmento hasta llegar y se pueden hacer un montón de triángulos, pero que no se interpongan porque si no, queda plano”, considerando los segmentos incluidos en semirrectas opuestas. Yamila sostiene “que no queden segmentos superpuestos”, considerando ambos segmentos incluidos en la misma semirrecta.

Inés sostiene que hay un montón de triángulos pues considera que los segmentos pueden formar ángulos de 1º, 2º y así hasta 179º, “nosotros tomamos del punto de vista de los grados”. Es decir que considera los ejemplos que puede visualizar tomando las divisiones que le ofrece el instrumento de medida que poseen, el transportador. Podríamos decir que su tipo de prueba es empirisismo ingenuo dado que lo verifica en los casos que les permite visualizar el transportador, no aborda el problema de la validez ya que le alcanza con los casos que puede constatar.

Inés asegura que no puede haber infinitos triángulos porque “hay una medida establecida de 0º hasta 179º”, mantiene lo obtenido en un principio, o sea la conclusión que extrajo de observar el transportador. No se plantea que pueda existir un triángulo que posea un ángulo interior cuya amplitud sea mayor a 179º y menor a 180º, no considera factible que el ángulo que forman los segmentos tenga una amplitud no entera, es decir “no pueden reconocer que la amplitud de un ángulo puede expresarse como una parte entera en grados sexagesimales y las partes conmensurables” (Mántica y Carbó, 2013, p.46) .

Utilizan un soporte, el transportador, para ejemplificar los triángulos que puede construir. El ángulo que forman los segmentos dados debe ser un número entero. No consideran la existencia de submúltiplos conocidos del grado (minutos y segundos) dado que no les es posible visualizarlos en el instrumento disponible. Las soluciones propuestas son empíricas, “el empirisismo ingenuo aparece como un estado en el cual ellos se encuentran y permanecen debido a razones ligadas a la situación o a sus relaciones con el conocimiento mismo”. (Balacheff, 2000, p. 56).

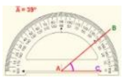
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 7	*El grado sexagesimal única unidad de medida* Basados en el transportador 			

Tabla 4. Tipos de pruebas grupo 7.

La confrontación surgida de las interacciones entre sus integrantes no les permite pasar hacia otro tipo de pruebas quedándose en el empirisismo ingenuo. El modo que utilizan para convencerse y convencer es la construcción del triángulo. No logran “generar” los triángulos, sólo pueden pensarlo a partir de la construcción de cada uno de ellos mediante la utilización del transportador, no consiguen desprenderse del instrumento. Esto se manifiesta en las representaciones realizadas y en los casos que excluyen, 0º y 180º, puesto que al graficar los segmento en ambas posiciones verifican que no se forma triángulo.

El docente pone en interacción a este grupo con otro, con el fin que puedan revisar, o bien la conjetura o el tipo de validación empleada. Les plantea las posturas son contrapuestas, para unos son infinitos los triángulos y para otros 179 triángulos. Un alumno del grupo 7 expresa “y … hacemos fácil: te preguntamos a vos y listo!” es notorio en este grupo el peso de la autoridad. Este alumno pone en evidencia un esquema de prueba utilizando una forma de convicción externa y dentro de estas la que Harel y Sowder (1998) denominan autoritaria, en este caso la autoridad es el docente.

5.5. Grupo 8

Josefina sostiene que se pueden construir “cuatro triángulos de diferentes formas según la ubicación de los segmentos”. Realiza un triángulo utilizando los dos segmentos dados (explica la construcción diciendo “corto, corto, largo” haciendo referencia a que utilizó para dos lados el segmento de menor longitud y para el lado restante el de mayor longitud). En el item b, considera que puede construir tres triángulos: rectángulo, obtusángulo y acutángulo, los asocia con una clasificación conocida según la amplitud de los ángulos interiores. Responde “se pueden construir cuatro triángulos”. Estamos frente a un empirisismo ingenuo ya que asegura esto después de haberlo verificado en estos cuatro casos.

El docente le hace notar que el problema pregunta cuantos triángulos, no cuantos tipos de triángulos. Josefina comienza a cuestionarse lo afirmado anteriormente y dice, haciendo referencia a los triángulos representados, “dentro de cada tipo, se pueden formar varios”. Expresa que considerando diferentes posiciones de los segmentos dados, la longitud del tercer lado va a ir variando, lo muestra sobre la representación como si uno de los segmentos tomara distintas posiciones. Al escuchar esto Micaela sostiene que la variación de la longitud de este tercer lado está relacionada con la variación de la amplitud del ángulo que forman los lados dados, advierte en la explicación de Josefina que el ángulo que forman los segmentos va variando al mover uno de ellos. Josefina y Micaela establecen una *relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*

Podríamos decir que el tipo de prueba elaborado por Josefina y Micaela es ejemplo genérico. En el caso de Josefina considerando la variación en la longitud del lado no coincidente con los segmentos dados y en el caso de Micaela considerando la amplitud del ángulo que determinan los lados dados. En estas pruebas la dificultad está en el carácter genérico del ejemplo que se propone y que los interlocutores compartan las concepciones de los objetos en juego. Este debate “exige principalmente la expresión de una interacción y de un sistema de representación de gran complejidad en lengua natural”. (Balacheff, 2000, p. 74).

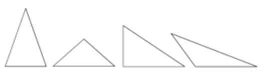
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 8	Josefina, Hay cuatro triángulos. 		Josefina y Micaela *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	

Tabla 5. Tipos de pruebas grupo 8

La interacción entre las estudiantes, ante el hecho de refutar una aseveración de un integrante del grupo, le permite a Josefina avanzar de un empirisismo ingenuo a un ejemplo genérico. Tener que confrontar y defender sus afirmaciones lleva a los estudiantes, a determinar criterios comunes para aceptar una afirmación.

5.6. Grupo 4

Comienzan con un empirisismo ingenuo. Sostienen que hay dos triángulos que son los que todos los integrantes del grupo lograron dibujar cuando resuelven la consigna en forma individual (un triángulo rectángulo donde los catetos son los segmentos dados y un triángulo isósceles que tiene dos lados iguales al segmento de menor longitud y el tercer lado el segmento de mayor longitud).

Constanza, opina que si se mueve uno de los segmentos de unos de los triángulos construidos se pueden ir obteniendo diferentes triángulos, los demás integrantes del grupo adhieren a lo propuesto por Constanza. Camila dice a la docente "ustedes nos dieron estos dos segmentos, entonces yo armo así: esta es mi base (tomando uno de los segmentos dados) y empiezo a mover el otro y a mover y mover, entonces tengo un triángulo, dos triángulos, tres triángulos,... se podría tener muchos, entonces llegamos a la conclusión de que vamos a tener infinitos triángulos". Establece una *relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*

Para Constanza, el hecho de mover uno de los segmentos de uno de los triángulos construidos se transforma en una experiencia crucial, que le permite refutar la hipótesis "son dos triángulos". A partir de esto se desprenden del caso particular, podríamos decir que emplean un ejemplo genérico para validar su afirmación de que hay infinitos.

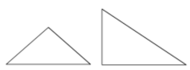
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 4	El grupo completo sostiene que hay dos triángulos. 	Constanza, comienza a girar uno de los lados del triángulo rectángulo.	Todo el grupo. *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	

Tabla 6. Tipos de pruebas grupo 4.

Con base en los resultados de su investigación, Balacheff (2000), plantea una ruptura entre los dos primeros tipos de pruebas y los dos últimos. Esta ruptura puede ser caracterizada como el paso de una verdad asegurada a partir de una afirmación del hecho a una verdad asegurada a partir de un razonamiento. La dificultad con este tipo de pruebas es que es necesario que el resto acepte el carácter genérico del ejemplo propuesto, que compartan las mismas concepciones de los objetos en juego. "Cuando esto no ocurre, la explicación desarrollada aparece ligada a un caso particular. En este contexto empírico, es legítimo recurrir a la experiencia crucial como medio del debate de validez". (p. 73).

5.7. Grupo 1

Milagros describe los dos triángulos isósceles que el grupo considera se pueden construir con los dos segmentos dados, y por ese motivo su tipo de prueba es empirisismo ingenuo. Toma en un caso el segmento de mayor longitud para cada uno de los lados iguales y el otro segmento lo utiliza como "base" y en el otro caso toma el de mayor longitud como "base" y los de menor longitud para cada uno de los lados iguales.

Emilce y Agostina expresan que si uno de los segmentos dados es la base, se puede tomar el otro segmento y utilizar diferentes posiciones, que si lo mueven un pedacito obtienen otro triángulo distinto al anterior. Afirman "por cada grado se encuentra un triángulo, hasta llegar a los 179º".

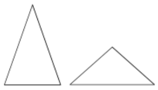
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 1	Milagros, dos triángulos isósceles 		Emilce y Agostina *El grado sexagesimal única unidad de medida* *Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto*	

Tabla 7. Tipos de pruebas grupo 1.

Se presenta por un lado la *discretización de la medida* y por otro la *relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto*. Dado que consideran la variación de grado en grado y van realizando el movimiento del lado que no consideran como "base". Suponen un segmento fijo y el otro libre.

En la interacción acuerdan que se pueden construir los triángulos dejando fijo un lado y haciendo variar el otro, siempre de "grado en grado", basados en el transportador. Dejan explicito que por cada grado se encuentra un triángulo. La situación de resolución conjunta es positiva "porque facilita colaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado". (Quaranta y Wolman, 2003 , p. 195), aunque en este caso no les haya permitido despegarse del instrumento utilizado (el transportador) y considerar que existen submúltiplos del grado.

5.8. Grupo 2

Dicen que son tres los triángulos que pueden construirse, por ese motivo su tipo de prueba es empirisismo ingenuo. En realidad son dos, puesto que los triángulos rectángulos que consideran son iguales, pero están en distintas posiciones.

Dos integrantes del grupo, Lautaro y Santiago, centran su atención en el triángulo rectángulo. Sostienen que se pueden construir triángulos formando con los segmentos, un ángulo de "1º, 2º, 3º, 4º, y hasta 179º". El docente que se encuentra presente en el momento del debate, pregunta "¿entre 1º y 2º no hay nada?". Los estudiantes responden que "hay miles porque están en el medio los minutos y los segundos". La pregunta del docente se convierte en un ejemplo crucial para estos alumnos permitiéndoles utilizar los submúltiplos del grado (minutos y segundos).

Los estudiantes continúan el intercambio y Manuela dice "si vas abriendo y cerrando (refiriéndose a los segmentos) los lados del triángulo, podés hacer miles de millones". Estaría utilizando un ejemplo genérico para afirmar que hay más triángulos de los tres considerados. Interviene Emilia y dice "hasta 179º", a lo que Manuela contesta "o más, porque no tiene que haber sólo un grado de diferencia, puede haber menos porque el grado no es la medida mínima de variación, tenés los minutos, segundos, milésimas de segundo etc. para variar" y sostiene que si lo haces de 180º queda llano pero si "lo corrés un poquitito ya podés hacer el triángulo".

El planteo de Manuela, que el grado no es la medida mínima para expresar la amplitud de un ángulo, se convierte en una experiencia crucial que le permite contrarrestar lo que afirma Emilia, para quien 179º es la mayor amplitud que podría formar el ángulo determinado por los segmentos dados. Manuela estaría haciendo referencia a lo que se denomina *sistema mixto para medición de ángulos,* interpretando la densidad pero no la continuidad del mismo. Pasan de considerar valores enteros para la amplitud del ángulo, observable en el transportador, a submúltiplos del grado, no directamente observables, y luego a considerar subdivisiones de estos submúltiplos.

El docente se mantiene atento al debate de los estudiantes e interviene oportunamente considerando que estas interacciones se "desarrollan siempre en torno a un objeto de conocimiento, apuntando hacia un saber al que queremos que nuestros alumnos se aproximen progresivamente" (Quaranta y Wolman, 2003, p. 234).

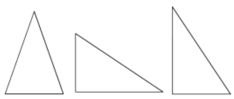
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 2	Todo el grupo afirmaba que podían construirse tres, que en realidad son 2. 	Docente ¿Entre 1º y 2º no hay nada? Manuela El grado no es la medida mínima. Si vas abriendo y cerrando los segmentos.	Manuela, Lautaro y Santiago *Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto.* Manuela Consideran submúltiplos decimales de la unidad de medida.	

Tabla 8. Tipos de pruebas grupo 2

5. Conclusiones

En los grupos analizados es posible apreciar que intentan dar una explicación de lo que afirman aunque no siempre se valgan para ello de propiedades con las que cuentan. En el anexo II se presenta la síntesis de los tipos de pruebas puestos en juego.

Harel y Sowder (1998) consideran que las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación. Las disidencias o los acuerdos en los intercambios permite, en algunos casos, avanzar en el tipo de justificación de la conjetura, aun sin lograr en algunos casos modificar el tipo de prueba que realiza el estudiante Los grupos (5),(6) y(7) apelan a cuestiones que no tienen que ver con el modo de validar las afirmaciones que se pretende abordar desde la matemática, y el modo de convencimiento se sitúa en lo que afirma un estudiante considerado como más avanzado en matemática o en la autoridad del profesor.

La interacción con los demás estudiantes permite modificar el tipo de validación que se realiza y esto, en general, conlleva un avance en el tipo de prueba. Los grupos (2), (3), (4) y (5) utilizan una experiencia crucial en el intercambio. Logran avanzar en el tipo de prueba para validar su conjetura, el (5) a una experimento mental y los otros tres a un ejemplo genérico, utilizando argumentaciones para convencer al resto del grupo de sus afirmaciones.

> (…) esta interacción social es la que le da significado a la experiencia crucial. Este tipo de validación se manifiesta en todo su apogeo en un conflicto acerca de la validez de un enunciando que no puede ser superado a través del paso a un nivel superior de prueba (Balacheff, 2000, pp.85-86).

Milagros, grupo (5), realiza una comparación que permite considerar que un conjunto acotado puede ser infinito en relación al caso del intervalo [1,2], Constanza, grupo (4), considera que uno de los lados puede ser considerado el lado libre de un ángulo. En ambos casos la experiencia crucial es sometida a prueba, para validar o invalidar la afirmación, es de hecho una respuesta pragmática al conflicto planteado entre los estudiantes. Las discusiones entre los estudiantes “no siguen necesariamente las reglas del debate matemático, aunque quizás constituyan sus precursores” (Quaranta y Wolman, 2003, p.235), dado que al someter a prueba en algunos casos al experimento crucial, podrían plantearse si un ejemplo es suficiente o no para probar una afirmación.

Los grupos (1), (6) y (8) logran avanzar de un empirisismo ingenuo al ejemplo genérico sin pasar por la experiencia crucial. En estos casos presentan la confrontación de un modelo de acción, Josefina (8) sostiene que al “tomar diferentes posiciones de los segmentos dados la longitud del tercer lado va a ir variando”. Emilce y Agostina (1) afirman que si “al otro lado lo mueven un pedacito tienen otro triángulo”. Evangelina (6), compara los segmentos como “si fuesen la agujas del reloj”. No se toma un ejemplo en sí mismo para validar la conjetura sino que encuentran un modo de “generar” el triángulo partiendo de los segmentos dados.

La interacción jugó un papel fundamental y diferente en el trabajo de cada grupo. Se constituyó en un obstáculo en el grupo (5), dado que Julia no logra convencerse de que hay infinitos triángulos, pero una alumna que según los compañeros es “muy buena en matemática”, sí está convencida de esto y puede fundamentarlo utilizando propiedades conocidas. Julia, sin estar convencida, acata esa afirmación, no logra desarrollar procedimientos propios de validación para su afirmación y por tanto emplea un esquema de convicción externa. Esto también ocurrió en el grupo (7), donde los estudiantes consideran que para modificar su conjetura deberían preguntar al docente, marcando la autoridad del mismo en lo que respecta a la determinación de su verdad o falsedad. Pero la interacción se convirtió, de alguna manera, en un motor de avance en otros grupos, como ya mencionamos, o en algunos integrantes de estos, debido a que “originó procesos de concientización, obligando a los estudiantes a justificar o hacer explícitas las decisiones tomadas por ellos” (Balacheff, 2000, p.85).

Sólo algunos integrantes de los grupos (5) y (6), para fundamentar la validez de su proposición, se basan en un análisis de las propiedades de los objetos que intervienen en la misma. Las razones que fundamentan la validez de su justificación obedecen a un proceso de interiorización que hacen explícito en los argumentos que utilizan para realizar sus pruebas. Estos casos los consideramos como experimento mental puesto que logran liberarse de situaciones particulares.

Balacheff (2000) sostiene que "los estudiantes tienen dificultades no solamente al expresar por medio de palabras las pruebas que realizan, sino al reconocer y hacer explícitos los conceptos en juego" (p.85). Esto se manifiesta en la interacción entre Inés, grupo (7) y Sol (6). La afirmación de Inés está fundada en un ejemplo basado en un instrumento, el transportador, y por lo tanto es un empirisismo ingenuo. Se contrapone a lo sostenido por Sol, que basa su afirmación en una experimento mental. Inés sostiene que hay un número determinado de triángulos porque varía de 0º a 179º, de grado en grado. Sol le dice "entre grado y grado hay infinitos, "tenés décimas, centésimas, milésimas… y todo eso, tenés infinitos para hacer triángulos" y afirma que, en grados "enteros" no hay infinitas pero considerando los submúltiplos de la unidad sí hay infinitos aunque no puedan superarse los 180º. Se manifiesta en los alumnos un problema con la unidad de medida,

> " (…) desconocen o se resisten a trabajar en el sistema mixto (sexagesimal y decimal) de medición de ángulos, es decir, no pueden reconocer que la amplitud de un ángulo puede expresarse como una parte entera en grados sexagesimales y las partes conmensurables. (Mántica y Carbó, 2013, p.46).

Consideramos que hubo buenos momentos de interacciones entre pares que permitieron el avance sobre el tipo de argumentación utilizada para fundamentar las afirmaciones. "Los momentos de discusión generan condiciones que facilitan el avance hacia la conceptualización de aquellos conocimientos que los alumnos pudieron utilizar en las resoluciones" (Quaranta y Wolman, 2003, p.234), si bien no siempre pueden formularse las propiedades que las fundamentan. Los tipos de pruebas empleados por los estudiantes al realizar la actividad de validar las conjeturas respecto a la actividad propuesta se ajustan más a las de convicción propia que a las de convicción externa. En la mayoría de los modos de convencerse y convencer tienen que ver con el modo de seleccionar el ejemplo utilizado, es menor el número de casos en el que los elementos de convicción están basados en propiedades o deducciones lógicas.

El hecho que las pruebas intelectuales, como la denomina Balacheff (2000) sean las menos utilizadas en el grupo analizado, consideramos que está en relación con las propiedades disponibles para justificar las afirmaciones. Además con el tipo de pruebas que habitualmente realizan los estudiantes de la escuela secundaria.

Se analiza una situación geométrica que implica la actividad de validar a estudiantes de secundario interactuando entre pares en el proceso, en un entorno de lápiz y papel, de un problema lleva implícito el concepto de infinito real. Este concepto es muy complejo para los estudiantes de este nivel, que tienen la "concepción del infinito como "lo que no tiene fin". Entendido fin en el sentido amplio como "límite"" (Waldegg, 2008, p. 121).

La mayoría de los grupos consideran la generación de los triángulos dejando un lado fijo y girando el otro, pero lo piensan como un conjunto discreto. Waldegg (2008) sostiene que “una concepción basada en un proceso de generación efectiva de los elementos de un conjunto” (p.30), no permite una aproximación al concepto real de infinito. Sólo en el caso del grupo (5) pueden relacionarlo con lo trabajado en el conjunto de los números reales y utilizar a partir de esto, que un conjunto acotado puede ser infinito. Establecen una relación entre la continuidad e infinitud de un segmento de la recta real con un arco de circunferencia. El grupo (2) se acerca a la concepción real del infinito.

Puede continuarse el trabajo analizando procesos de validación de estudiantes de secundaria utilizando un SGD. Estos softwares facilitan la exploración, permitiendo construcciones dinámicas y promoviendo la elaboración de conjeturas.

Referencias bibliográficas

Argentina. Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2011). *Educación secundaria. Ciclo básico. Orientaciones curriculares.*

Argentina. Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba. (2011). *Diseño curricular jurisdiccional ciclo básico de la educación secundaria 2011-2015.*

Argentina. Ministerio de Educación ciencia y Tecnología. (2011). *Núcleos de Aprendizaje prioritarios. Nivel Medio.*

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Colombia.

Berté, A. (1999). *Matemática dinámica*. AZ Editora. Buenos Aires.

Berthelot, R. y Salim, M. (1994). *La enseñanza de la geometría en la escuela primaria.* Laboratorio de Didáctica de las Ciencias y Técnicas. Universidad Bordeaux. Francia.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla. Madrid.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24. pp. 139-162.

Gutiérrez, A. (2002): *Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles.* Actas del 5º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 85-94.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). *Student’s proof schemes: results from exploratory studies.* En A. Schoenfeld y otros (Ed.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 234–283), Providence, EE.UU., American Mahematical Society,

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría, en Puig, L.; Calderón, J. (eds.): *Investigación y didáctica de las matemáticas*. (MEC-CIDE: Madrid, España), pp. 67-85.

Mántica y Carbó (2013). *Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. Educación Matemática. 25(3)*. 27-59.

Mántica (2011) Referentes teóricos para un estudio didáctico de la geometría. En Mántica, A. y Dal Maso, M. (comp). *La geometría en el triángulo de las Bermudas.*

Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula. Ediciones UNL. Santa Fe. Argentina. Pp.13-32.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning Geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics.* 44: 87- 125.

McKnight, C., A. Magid, T. Murphy y M. McKnigt (2000*), Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician,* Rhode Island, American Mathematical Society

Moreno, L. y Waldegg, G. (2008a). La evolución conceptual del infinito matemático actual. En I. Fuenlabrada (comp.), Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 15-41. [Publicación original: "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity", *Educational Studies in Matehmatics*, vol. 22, núm. 3, 1991, pp. 211-231.]

Moreno, L. y Waldegg, G. (2008b). *El acercamiento de Bolzano a las paradojas del infinto: implicaciones para la enseñanza.* En I. Fuenlabrada (comp.), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 109-134. [Publicación original: Bolzano´s approach to the paradoxes of infinity: Implications for teachin", Science & Education, vol. 14, 2005, pp.559-597]

Perry, P.; Camargo, L.; Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Prior, J. y Torregosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 16 (3), pp. 339-368.

Quaranta. M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En Mabel Panizza (comp.)*, Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* 189-243, Paidós. Buenos Aires.

Rodríguez Díaz, F. (2006). Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la licenciatura en matemáticas. Trabajo de investigación. Universidad de Valencia. Disponible en http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Rodriguez06.pdf. Fecha de captura: 13/10/2014.

Salim, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-82). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Student´s justifications*. The mathematics teacher.* 91(8): 670-676.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anexo I

Tarea 1. Objetivo: Enunciar la desigualdad triangular.

Problema 1.

a) Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, construye un triángulo.

b) Construye otro triángulo, distinto al anterior, con esos mismos dos lados.

c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

Problema 2.

a) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

b) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

c) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Problema 3.

a) A continuación se proponen medidas de segmentos. Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

3 cm, 2 cm, 1 cm

8 cm, 12 cm, 5 cm

8 cm, 4 cm, 4 cm

7 cm, 1cm, 2 cm.

b) Con estos segmentos no es posible construir un triángulo: 8cm, 3cm, 2 cm. ¿Qué explicación darían de por qué no se puede?

Al finalizar esta actividad el docente institucionalizara la desigualdad triangular

Anexo II

	Convicción externa	Convicción propia			
	Autoritarios	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento Mental
Grupo 1		Dos triángulos isósceles		*El grado sexagesimal única unidad de medida. Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	
Grupo 2		Dos triángulos	¿Entre 1º y 2º no hay nada? El grado no es la unidad mínima. Abriendo y cerrando los segmentos dados.	*Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto Submúltiplos decimales de la unidad de medida.*	
Grupo 3			El ángulo de 179º59`.	Entre 1º y 2º hay infinitas medidas Un segmento fijo y otro móvil	
Grupo 4		*Dos triángulos*	Girando uno de los lados de uno de esos triángulos	*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	
Grupo 5	Alumna “buena en matemática”		*Densidad de los números reales.*		*Biyección entre arcos de dos circunferencias concéntricas, de distintos radios, respecto al ángulo central correspondiente a dichos arcos.*
Grupo 6	Pares con “autoridad matemática”	Triángulos con ángulos de 45º y 90º		*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	*Correspondencia entre la amplitud del ángulo central y el arco de circunferencia que abarca.*
Grupo 7	Docente	*El grado sexagesimal única unidad de medida* Basados en el transportador			
Grupo 8		Cuatro triángulos.		*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	

Autores:

Ana María Mántica: Profesora en Matemática y Magister en Didácticas Específicas con mención en Matemática. Docente de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Directora de Proyectos de Investigación en Enseñanza de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo y de Proyectos de Extensión referidos a problemáticas de la enseñanza con estudiantes secundarios que concurren a escuelas de zonas vulnerables. Autora de publicaciones referida a la enseñanza de la matemática en revistas especializadas nacionales e internacionales y de libros y capítulos de libros sobre esta temática. ana.mantica@gmail.com

Ana Laura Carbó: Profesora en Matemática. Docente de la Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Integrante de Proyectos de Investigación en Enseñanza de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo y de Proyectos de Extensión referidos a problemáticas de la enseñanza con estudiantes secundarios que concurren a escuelas de zonas vulnerables. analauracarbo@hotmail.com