UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 143-167

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DE UM ESTUDO COM PROFESSORES

Graça Luzia Dominguez Santos, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 26/11/2016
Fecha de aceptación: 13/12/2016

Resumen

En este estudio desarrollamos un modelo teórico de Matemáticas para la Enseñanza del Concepto de Función. Utilizamos como aporte teórico las reglas de reconocimiento y realización de la teoría del sociólogo Basil Bernstein, y como herramienta metodológica la estructura organizacional del Estudio del Concepto. Los datos fueron recolectados en una investigación empírica con un grupo de profesores. El modelo fue estructurado a partir de la categorización de las realizaciones (llamadas Panoramas), identificados como tabular, algebraico, máquina de transformación, generalización de patrones, gráfico, diagrama y formal. Estos Panoramas fueron construidos a la luz de la convergencia entre las reglas de realización y reconocimiento. El modelo puede ser empleado como cuadro teórico en pesquisas sobre Matemáticas para la Enseñanza, así como para analizar y generar una amplia gama de formas de realización del concepto de función en la enseñanza.
Palabras clave: Matemática para la Enseñanza. Función. Concepto. Reglas de Realización y Reconocimiento.

Abstract

In this study, we built a theoretical model of Mathematics for Teaching the Concept of Function. Recognition and realization rules from Basil Bernstein's theory and the structure so-called concept study were used as methodological tools. Data were collected at a group of schoolteachers discussing on teaching function. The model was structured through categories of realizations, which we named as landscapes: tabular, algebraic, transformation machine, pattern generalization, graphics, diagram and formal. These landscapes were built in light of their realization and recognition rules. The model might be used as theoretical framework in researches about Mathematics for Teaching, as well to analyze and produce a wide set of forms of realizing the concept of function in pedagogical practices.
Keywords: Mathematics for Teaching. Function. Concept. Realization and Recognition rules.

Resumo

Nesse estudo, desenvolvemos um modelo teórico de *Matemática para o Ensino do Conceito de Função*. Utilizamos como aporte teórico, os construtos *regras de reconhecimento* e *realização* da teoria do sociólogo Basil Bernstein e como ferramenta metodológica, a estrutura organizacional do Estudo do Conceito. Os dados foram coletados em uma investigação empírica com um grupo de professores. O modelo foi estruturado nas categorias de realizações (panoramas): tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. Estes foram construídos à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. O modelo pode ser empregado tanto como quadro teórico em pesquisas sobre Matemática para o Ensino, quanto para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino nas práticas pedagógicas.
Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Função. Conceito. Regras de Realização e Reconhecimento.

1. Introdução

Em meados de 1980, conforme Adler e Davis (2006), Shulman identificou e descreveu o conhecimento profissional para docência em domínios específicos e técnicos, gerando o reconhecimento da natureza multidimensional do conhecimento em uso no ensino. Na área de Educação Matemática, o trabalho de Shulman alavancou uma série de estudos com o propósito de analisar, compreender e caracterizar a forma como a matemática é utilizada e/ou produzida pelos agentes responsáveis pelo seu ensino no contexto escolar (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013). Como consequência, um novo entendimento emergiu, sendo teorizado sob as denominações Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (tradução livre de *Mathematical Knowledge for Teaching*) e Matemática para o Ensino (MpE) (tradução livre de *Mathematics for Teaching*) (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013).

O MKT e MpE têm sido investigados a partir de diferentes quadros epistemológicos e teóricos (Barwell, 2013; Rhoads; Weber, 2016). Nesse estudo, como será explicitado na seção a seguir, adotamos uma perspectiva discursiva para apresentar uma conceptualização de MpE. Sendo assim, como a comunicação produzida na realização do ensino de matemática desenvolve-se em torno de conceitos matemáticos[1], compreendemos MpE como sendo uma Matemática para o Ensino de um determinado conceito. No presente estudo, elegemos função como o conceito a ser investigado.

A escolha do tema função deve-se ao seu papel central e estruturador no ensino da matemática, em virtude de estar presente na maioria dos seus ramos e proporcionar uma forma consistente de fazer conexões entre e através de uma ampla gama de tópicos na própria matemática e em outras áreas (Brasil, 2002; Kleiner, 1993). A relevância desse tópico na matemática, e em particular na matemática escolar, tem se refletido em uma vasta literatura sobre o seu ensino e aprendizagem (Tabach; Nachlieli, 2015). Para Sajka (2003) e Nachlieli e Tabach (2012), a complexidade deste conceito, decorrente da diversidade de formas de comunicá-lo e, portanto de interpretá-lo, torna-o um terreno fecundo para estudos sobre os seus processos de ensino.

Investigações têm sugerido e utilizado diferentes abordagens para o ensino desse tema (Elia, 2006). Callejo, Zapatera (2014) e Wilkie (2016) recomendam a exploração sistemática de padrões e regularidades nos anos iniciais, com o propósito de subsidiar o entendimento de funções. Doorman et al (2012) e Sierpinska (1992) indicam que função deve aparecer inicialmente no contexto de modelagem, como um instrumento para matematizar relações de dependência e variabilidade entre grandezas físicas e de outras naturezas. Hitt e González-Martin (2015) propõem iniciar o ensino de função utilizando a noção de covariação (análise de como duas quantidades variam simultaneamente).

[1] Na seção a seguir apresentamos o nosso entendimento de um conceito matemático adotado nessa investigação. Por ora, considere-o de forma intuitiva.

No que diz respeito à apresentação de uma definição formal do conceito de função[2] no ensino desse tema, segundo Hansson (2006), pesquisadores da área de Educação Matemática consideram que, apesar da precisão e concisão de tais definições, estas não são adequadas para uma abordagem inicial desse conceito na Escola Básica, em decorrência de demandarem uma familiaridade anterior com a terminologia matemática (Jones, 2006). Desse modo, segundo Nachlieli e Tabach (2012), é necessário reexaminar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Tais considerações apontam tanto para uma certa variabilidade, quanto para a natureza singular das configurações comunicativas produzidas no ensino do conceito de função, especialmente na Escola Básica. Ressaltamos que o foco da presente pesquisa não é o *status* ontológico do conceito de função, mas sim como é realizada[3] e quais as regras que regulam a comunicação matemática no ensino deste conceito.

Isto posto, nesse estudo temos como propósito analisar, descrever e demarcar essa variabilidade e natureza singular de formas de comunicar o conceito de função mobilizada e produzida no ensino, em termos de uma conceptualização de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Essa perspectiva para MpE do Conceito de Função será caracterizada por intermédio de suas fronteiras e possibilidades comunicativas, utilizando como quadro teórico conceitos da Teoria do sociólogo Basil Bernstein (2000, 2003). Adiante, reapresentamos o objetivo do presente estudo de maneira mais delimitada, após a apresentação da fundamentação teórica que sustenta a investigação.

2. Matemática para o Ensino do Conceito de Função: uma perspectiva teórica

Dentre as investigações que trilharam o caminho de estabelecer uma tipologia para o domínio do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática, refinando a categorização proposta por Shulman, destacam-se, segundo Barwell (2013) e Chapman (2013), os estudos de Deborah Ball e colaboradores (por exemplo, Ball; Thames; Phelps, 2008). Com base em investigações empíricas de como professores da Educação Básica utilizam a matemática no ensino, esses pesquisadores estabeleceram uma categorização para MKT que está em sintonia, conforme visão por eles adotada, com as demandas matemáticas específicas mobilizadas no trabalho do professor (Ball; Thames; Phelps, 2008). Fundamentado nessa categorização, o projeto *Learning Mathematics for Teaching*[4], cujo corpo técnico é composto por Deborah Ball e colaboradores, tem desenvolvido e validado

---

[2] Por exemplo: “Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if for all $x \in E$ there exists a unique $y \in F$ which is in the given relation with x” (Nachlieli; Tabach, 2012, p.14).
[3] Provisoriamente, tomemos o termo realizar ou realização como intuitivo, a seguir iremos defini-lo apropriadamente.
[4] O projeto investiga os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino. Estas medidas incluem itens que refletem as tarefas matemáticas reais que os professores enfrentam nas salas de aula. As avaliações podem ser usadas para medir a eficácia do desenvolvimento profissional focalizado na matemática. Informações disponíveis em http://www.umich.edu/~lmtweb/, acesso em 14 nov. 2016.

instrumentos qualitativos e quantitativos para avaliação do conhecimento profissional do professor de matemática (Adler; Patahuddin, 2012).

Para Adler e Huillet (2008), do ponto de vista epistemológico social, toda atividade matemática está direcionada a algum propósito e ocorre dentro de alguma instituição social. Então, a MpE só pode ser compreendida através de uma linguagem que a posiciona como estruturada e estruturando o contexto pedagógico, no qual ela "vive" (Adler; Huillet, 2008). Com base nesses pressupostos, Adler e Huillet (2008) analisam como a MpE é (re) produzida nos cursos de formação de professores na África do Sul.

Davis e Renert (2014), que adotam a nomenclatura MpE (*"Mathematics-for-teaching*", p.3) para o "[...] conhecimento disciplinar dos professores de matemática" (p. 3, tradução nossa), afastam-se de uma caraterização da MpE em domínios de conhecimento, em razão de a caracterizarem como emergente, dinâmica, tácita e distribuída pela categoria dos professores. Assim, esses pesquisadores sugerem como ferramenta para investigar e desenvolver a MpE, a estratégia colaborativa denominada de *Concept Study*, que traduzimos como Estudo do Conceito (EC), realizada "com" professores, para trazer à tona interpretações tácitas de conceitos matemáticos, selecionadas, mobilizadas e produzidas pelos professores no ensino, em diferentes circunstâncias e contextos (Davis; Renert, 2013, 2014).

Barwell (2013) sugere uma interpretação para o conhecimento de professores de matemática fundamentada na Psicologia Discursiva. Tendo em vista que, nessa perspectiva, o conhecimento é socialmente organizado e discursivamente estruturado (Barwell, 2013), então a comunicação matemática "[...] instanciada pelo ensino de matemática *in situ* desenvolve-se em formas que não são bem captadas por uma abordagem baseada em, por exemplo, categorias de conhecimento dos professores" (Barwell, 2013, p. 596, tradução nossa).

Diante do exposto, é possível corroborar o posicionamento de Chapman (2013) e Davis e Renert (2013) de que há, na área de Educação Matemática, um cenário heterogêneo de conceptualizações para MKT e MpE, implicando em diferenças consideráveis de como estes podem ser estudados, avaliados e desenvolvidos. Nesse estudo, apresentamos uma perspectiva discursiva para MpE[5], porquanto em ressonância com Bernstein (2000), entendemos que a comunicação matemática veiculada e produzida no contexto escolar onde ocorrem as relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados conteúdos (prática pedagógica) é *regulada* por princípios inerentes a essa prática.

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação em cada prática pedagógica[6], como princípios de classificação e enquadramento. O princípio de classificação regula o grau de isolamento entre categorias, sejam essas categorias referindo-se a atores sociais, tais como: professores, alunos, disciplinas, práticas tradicionais e não tradicionais, contextos, a exemplo de: escola,

---

[5] Em decorrência da perspectiva assumida, as ações comunicativas (produtos discursivos) realizadas no contexto escolar constituíram o objeto de análise da presente investigação, por esse motivo optamos por usar a terminologia MpE.

[6] De forma mais ampla, Bernstein (2000) considera "[...] prática pedagógica como um contexto social fundamental por intermédio do qual a reprodução-produção cultural tem lugar." (p. 3, tradução nossa).

universidade, família, etc.. Esse isolamento é o que gera espaço para uma categoria tornar-se específica (Bernstein, 2003). O isolamento é regulado pelos marcadores de fronteira - *regras de reconhecimento*, que possibilitam distinguir as categorias pela especificidade dos seus textos, na sua variabilidade de apresentações (Bernstein, 2000, 2003). Concordante com Bernstein, compreendemos por texto aqui qualquer ato comunicativo expresso por alguém, incluindo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (Bernstein, 2003). O grau de isolamento do princípio classificatório pode variar entre os valores mais forte (C+) e mais fraco (C-) (Bernstein, 2000, 2003). No caso C+, as categorias são mais especializadas, pois estão separadas por fortes limites (Bernstein, 2000, 2003). Onde há C-, o isolamento é mais reduzido, e como consequência as categorias são menos especializadas (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, se em uma determinada escola a relação entre as disciplinas é regulada por uma C+, há uma relação limitada ou ausente entre os seus respectivos textos.

O princípio de enquadramento refere-se à natureza do controle sobre as regras comunicativas[7] entre as categorias de uma prática pedagógica. Como dito por Bernstein (2003), por intermédio desse princípio é possível "[...] analisar as diferentes formas de comunicação legítima realizada em qualquer prática pedagógica" (p. 12, tradução nossa). O enquadramento também pode apresentar e variar entre valores mais forte (E+) e mais fraco (E-) (Bernstein, 2000, 2003). Diz-se que há E+, quando a categoria considerada como a de maior estatuto[8], dentro de um conjunto de categorias que estamos considerando, tem controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). No caso E-, as categorias de menor estatuto também têm algum controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). O princípio de enquadramento gera e regula as *regras de realização* que fornecem uma base para a seleção e produção de textos legítimos para cada categoria, ou seja, "como" os textos legítimos podem se tornar públicos (Bernstein, 2000, 2003).

Nesse estudo, apropriamo-nos dos conceitos de classificação, enquadramento, regras de reconhecimento e realização para analisar, identificar e categorizar formas especializadas de comunicar o conceito de função, produzidas para/no seu ensino no contexto escolar. Fundamentados nesses pressupostos teóricos, sustentamos que uma perspectiva para uma MpE do Conceito de Função perpassa pela explicitação das regras de reconhecimento e realização que estruturam as configurações comunicativas do conceito de função realizadas no seu ensino. Essas regras são geradas, respectivamente, pelos princípios de classificação e enquadramento operantes na prática pedagógica, que demarcam, regulam e legitimam o caráter e a forma especializada dos seus textos.

Entendemos um conceito matemático como um conjunto constituído pelas *realizações* (tradução livre de *realizations* (Davis; Renert, 2013, 2014)) (textos) que podem ser associadas à palavra que o denomina. Por conseguinte, o "conceito de

---

[7] Para Bernstein (2000), o enquadramento também regula as regras de ordem social, que dizem respeito à forma que as relações hierárquicas tomam em uma determinada prática pedagógica.
[8] A posição hierárquica das categorias que constituem uma prática pedagógica é estabelecida pelo princípio classificatório (relações de poder) (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, na relação médico-paciente, o médico pertence à categoria com maior estatuto ou o professor, na relação professor-alunos.

função" é formado pelo conjunto de realizações que podem ser associadas à palavra função. As realizações podem se apresentar, assim consideramos, como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos (Davis; Renert, 2014). Ressaltamos que optamos em adotar a denominação "realizações", ao invés de representações, com o propósito de evidenciar que não há, na perspectiva que estamos considerando, uma separação dualista entre o objeto matemático – no caso, função – e suas representações, como se objeto matemático (função) tivesse uma existência autônoma, ou seja, independente das suas representações. Nesse prisma, um conceito matemático não é nada mais do que um conjunto de suas realizações, reconhecidas e legitimadas no contexto comunicacional em que se manifestam.

Alicerçados por esses pressupostos teóricos, conceptualizamos *Matemática no Ensino* (MnE) *do Conceito de Função* como a categoria constituída dos textos do conceito de função, veiculados e produzidos no contexto escolar, pelos agentes responsáveis pelo ensino, de acordo com os princípios de classificação e enquadramento operantes na correspondente prática pedagógica. Portanto, a MnE do Conceito de Função diz respeito às formações discursivas deste conceito, com propósito de ensino, que ocorrem e emergem na dinamicidade da prática pedagógica, no contexto escolar.

Isto posto, definimos *Matemática para o Ensino* (MpE) *do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função. A utilização da palavra representação – separando o prefixo com um hífen – tem como objetivo demarcar que estamos referindo-nos a uma outra apresentação (apresentar novamente) das formas de realização do conceito de função no ensino. Como exemplos de MpE(s) do Conceito de Função, podemos citar: um grupo de professores analisando o ensino deste conceito ou um autor de um material curricular apresentando um conceito em sua obra. Além desses e outros exemplos, pode-se ter uma Matemática pra o Ensino de um determinado de conceito através de um modelo teórico, ou seja, um conjunto coerente, formalizado e sistematizado de proposições, que descreve as possibilidades e propriedades da MnE.

Assim posto, o objetivo do presente estudo foi desenvolver um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, portanto, identificando e descrevendo sistematicamente as categorias de realizações do conceito de função e suas propriedades, produzidas nas relações pedagógicas (a serem) efetivadas. O modelo está estruturado em categorias de realizações do conceito de função que se assemelham relativamente às regras de reconhecimento e realização, produzidas pelos princípios de classificação e enquadramento, respectivamente, que regulam a comunicação nas aulas de matemática.

Para desenvolver o modelo de uma MpE, podemos recorrer a variadas fontes, que contenham realizações possíveis do conceito nas práticas pedagógicas, tais como: livros didáticos, documentos oficiais, avaliações de larga escala, pesquisas na área de Educação Matemática e professores. Esses últimos assumem um papel fundamental, porquanto são os principais agentes no processo de ensino e aprendizagem da matemática (Even; Ball, 2009; Guerrero; Ribeiro, 2014). Os professores são participantes vitais na circulação de textos nas práticas pedagógicas, principalmente por meio da seleção e relevância que dão a interpretações particulares de conceitos matemáticos, culturalmente situadas, que são evocadas, explicita ou implicitamente, de acordo com a adequação matemática, suficiência para situação em questão (Davis; Renert, 2009, 2014), especificidade e legitimidade do contexto escolar.

À vista disso, inferimos que um estudo coletivo com professores, analisando o ensino do conceito de função, produziria uma variabilidade de realizações deste conceito, que, ao serem organizadas utilizando conceitos da teoria dos códigos de Bernstein, nos termos mencionados anteriormente, possibilitar-nos-ia a construção de um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Nesta conformidade, colocando o objetivo da pesquisa de forma mais precisa, tivemos por propósito construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores, que atuam em segmentos da Educação Básica.

O resultado da presente investigação pode servir de quadro analítico para pesquisas que se debruçam sobre fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem de função. Além disso, pode subsidiar autores de materiais didáticos e propostas curriculares no seu trabalho de delineamento, bem como professores no planejamento e realização do ensino.

3. O Contexto e os Participantes

O contexto para coleta de dados da investigação empírica foi um grupo de professores, todos licenciados em Matemática, que na ocasião atuavam no Ensino Fundamental II (anos finais) e/ou no Ensino Médio[9], na região metropolitana da Salvador na Bahia, Brasil. O grupo foi constituído pelos participantes do curso de extensão, intitulado “Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de ensino”, proposto e coordenado pela primeira autora, promovido pela Pró-Reitoria de Extensão e o Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). O curso teve carga horária total de sessenta horas, com trinta e duas horas de aulas presenciais, realizadas nas dependências do Instituto de Matemática da UFBA, aos sábados, no período entre setembro e novembro de 2015.

O curso foi iniciado com treze participantes, mas em decorrência de algumas desistências no seu transcorrer, a partir do quinto encontro presencial esse número foi reduzido a sete participantes, que prosseguiram até sua finalização. No Quadro 1, apresentamos o perfil de todos os professores participantes.

[9] No Brasil, o Ensino Fundamental II, o qual tem duração de 4 anos, atende alunos com idade média (padrão) entre 10 e 15 anos; o Ensino Médio é posterior ao Ensino Fundamental II e tem duração de 3 anos.

Quadro 1 – Perfil dos participantes

Nome	Nível escolar de atuação	Tempo de docência
Profª Talita	Fundamental II e Médio	1 ano e 6 meses
Profª Cibele	Fundamental II e Médio	4 anos
Profª Cláudia	Fundamental II	4 anos
Prof. Cledson	Fundamental II	5 anos
Profª Deise	Médio	15 anos
Prof. Elcio	Fundamental II e Médio	30 anos
Prof. Eusébio	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Janice	Fundamental II	13 anos
Prof. Luis	Fundamental II	3 anos
Prof. Nadison	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Patrícia	Fundamental II	3 anos
Prof. Sampaio	Fundamental II	25 anos
Profª Regina	Fundamental II	20 anos

Fonte: autores

Dentre os nomes constantes no Quadro 1, apenas o nome da professora Talita é fictício. Os demais participantes optaram por sua identificação, pelo primeiro nome ou sobrenome.

O formato do curso foi inspirado na configuração do Estudo do Conceito (EC) proposta por Davis e Renert (2013, 2014). O EC é um modelo de estudo coletivo com professores, em que esses são convidados a analisar, refletir, estender e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito matemático, sob o ponto de vista do seu ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Segundo esses pesquisadores, investigações empíricas ratificam que grupos de professores trabalhando coletivamente, geram listas ricas e consistentes de realizações, quando convidados a situar um conceito no contexto das suas experiências de ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Foi precisamente com base nessa acepção que propusemos o referido curso, pois julgamos que tal configuração produziria dados para a construção de um modelo teórico da MpE do Conceito de Função.

Conforme sugerem Davis e Simmt (2006), no EC, o pesquisador é responsável pelo gerenciamento do curso, organizando, selecionando e adequando ações que possibilitem aos participantes interagirem e exporem suas perspectivas e entendimentos acerca do conceito que está sendo objeto de análise. Sendo assim, com o propósito de instaurar o debate e reflexões sobre o tema, a pesquisadora propôs no primeiro encontro: *Elaborem uma situação problema, questão ou tarefa que vocês utilizam ou já utilizaram em sala de aula, abordando o tema função, que em seguida será socializada com o grupo*. A apresentação dessa atividade gerou uma lista diversificada de noções e interpretações sobre formas de realizar o conceito de função no ensino, que foram anotadas por todos para reflexões posteriores. Nessa lista, já foi possível identificar várias realizações deste conceito.

No Quadro 2, apresentamos, as atividades desenvolvidas a partir do segundo encontro. Tomando como base os estudos do conceito realizados por Davis e Renert (2013, 2014), iniciamos o curso com apenas o primeiro encontro planejado previamente. As conformações das sessões seguintes emergiram no transcorrer de cada encontro precedente, como decorrência das discussões entrecorridas.

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas nos encontros presenciais

Encontro	Atividades Desenvolvidas
Segundo	Cada professor trouxe uma situação problema, com solução, selecionada da sua experiência no ensino do tema. As situações foram analisadas pelo grupo e confrontadas com a lista construída no primeiro encontro.
Terceiro	O grupo foi dividido em três subgrupos, em que cada subgrupo apresentou uma situação problema (preparada previamente) que poderia ser aplicada no sexto, sétimo e nono ano, envolvendo noções do conceito de função, apesar desse tema não ser explicitamente abordado nesses anos.
Quarto	Organização e agrupamento da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função,por semelhanças de acordo com critérios estabelecidos pelos subgrupos.
Quinto	Apresentação das soluções de questões propostas pela pesquisadora no encontro anterior, com análise de quais noções e interpretações associadas ao tema função, construídas até o momento pelo grupo, as questões se vinculavam, bem como se existia algum outro entendimento relacionado com tema, que ainda não havia sido contemplado nos encontros anteriores.
Sexto	Discussão e análise de um texto que abordava a história do conceito de função, buscando relacionar as etapas históricas do desenvolvimento do conceito de função com as formas de realizar esse tema no ensino, que já haviam sido levantadas pelo grupo.
Sétimo	O grupo foi dividido em dois subgrupos, em que um subgrupo expôs uma aula de introdução do conceito de função no nono ano e o outro no primeiro ano do Ensino Médio. Após a apresentação, o grupo fez uma apreciação das similaridades e diferenças entre as duas aulas.
Oitavo	Retomada da tentativa de organizar da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função, por semelhanças, de acordo com critérios estabelecidos pelo grupo. Análise e reflexão coletiva acerca da variabilidade de formas de realizar o conceito de função na Escola Básica, bem como a repercussão dessa perspectiva, construída coletivamente, na tarefa de realizar o ensino esse conceito.

Fonte: autores

4. Procedimentos Metodológicos

Para análise e categorização das realizações do conceito de função identificadas no estudo com os professores, além dos conceitos da teoria dos códigos de Basil Bernstein, fundamentamo-nos na estrutura dos EC(s) implementados por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), porém, nesta dimensão, tomando-a para a análise de dados.

Baseados em experiências anteriores, Davis e Renert (2009) identificaram um conjunto de quatro ênfases para organização do trabalho dos grupos de estudo do conceito, que se mostraram produtivas para elaboração coletiva de entendimentos sobre conceitos matemáticos. Os investigadores intitularam essas ênfases de *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (Davis; Renert, 2009, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento para realizações é o mesmo apresentado na seção 2. Nos estudos realizados por Davis e Renert (2013, 2014), os panoramas são conjuntos de realizações que possuem características similares, em conformidade com parâmetros estabelecidos pelos participantes. Vinculações são, segundo Davis e Renert (2013, 2014), implicações lógicas que as realizações constituintes de cada panorama instauram, gerando diferentes possibilidades e restrições interpretativas das relações conceituais. A ênfase combinação é definida como uma fusão de realizações que produzem novas realizações (meta-realizações), as quais circunscrevem perspectivas interpretativas de cunho mais amplo. (Davis; Renert, 2014). No presente estudo a ênfase combinações não foi observada.

Nesse estudo, usamos como parâmetro para construção dos panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Para vinculações, adotamos entendimento congênere ao de Davis e Renert (2013, 2014), norteados, porém, por nossa perspectiva teórica. Por conseguinte, vinculações referem-se à produção de potencialidades e limitações comunicativas, desinentes das implicações lógicas estabelecidas pelas realizações componentes de cada panorama, que produzem uma teia de semelhanças e diferenças de noções, entendimentos e especificidades, muitas vezes subjacentes do conceito de função.

Ainda que os professores participantes do grupo pudessem agrupar as realizações e discutir suas implicações, a tarefa de organizá-las sistematicamente como necessário a um modelo teórico ficou sob a responsabilidade dos pesquisadores. Nesse sentido, entendemos que nos apropriamos da estrutura do EC, proposta por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), para além de uma estratégia de trabalho com os professores, transformando tal sistematização organizacional das realizações em uma ferramenta analítica para construção do modelo teórico de MpE do Conceito de Função.

Para o registro dos dados gerados, utilizamos: 1) o diário de campo, no qual fizemos anotações sobre o andamento do curso e das realizações do conceito de função produzidas pelos participantes; 2) gravações audiovisuais de todos os encontros, que após serem analisadas, tiveram transcritos os trechos nos quais identificamos realizações e vinculações discutidas e produzidas pelos participantes; 3) produções escritas pelos participantes (registros em papel e no quadro); 4) questionário que aplicamos para traçar o perfil dos participantes.

Tais documentos foram analisados em relação dialógica-dialética com a sintaxe conceitual explícita dos conceitos da teoria dos códigos de Bernstein (2000; 2003) e com a organização estrutural do Estudo do Conceito, os quais constituíram o quadro teórico, analítico e metodológico que fundamentam a linguagem conceitual do modelo de MpE do Conceito de Função construído.

5. Panoramas e Vinculações

As realizações consideradas como associáveis à palavra função, identificadas na coleção dos dados produzidos pelos participantes do curso, foram agrupadas por semelhanças de acordo com a convergência das regras de realização e reconhecimento, nos seguintes panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. A seguir, analisamos cada um dos panoramas, abordando suas vinculações.

Nas transcrições das falas dos professores quando inserimos alguma explicação para o enunciado, colocamo-la entre parêntesis.

5.1. Panorama Tabular

Compõem o panorama tabular as realizações de função como tabela, que se caracterizam pela disposição dos dados de entrada e os correspondentes dados de saída de uma relação funcional, em linhas ou colunas.

Na Parte A do Quadro 3, transcrevemos uma tabela da relação funcional que associa o consumo mensal em *watts* ao correspondente valor a ser pago na conta de energia elétrica, considerando o preço de R$ 0,54 por *watt*. Essa atividade foi proposta pela Profª Janice a uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental (quando o tema função ainda não foi inserido explicitamente no ensino), com os dados sobre o consumo mensal em watts de vários eletrodomésticos trazidos de casa pelos alunos. Segundo a Profª Janice, a tabela é realizada:

> "[...] usando a operação multiplicação pelo valor constante do *watt* [...] o que estaria variando é o valor mensal do consumo e automaticamente o valor da conta que iria ser paga [...] um ideia de função [...] a gente vai obedecer a uma sentença matemática e nós vamos calcular o valor em cima disso [...] que no caso é a operação matemática" (Profª Janice – 3º encontro).

Quadro 3 – Realizações de função como tabela

Parte A

Um *watt*-hora (W/h) é a medida de energia usualmente utilizada em eletrotécnica e é a quantidade de energia utilizada para alimentar uma carga de potência de um *watt* pelo período de uma hora. O valor de nossa conta de energia, depende do consumo de watts mensal. Com base nessas informações, complete a tabela abaixo:

.0,54	
Consumo (W)	Valor (R$)
40	21,60
70	37,80
120	64,80
170	91,80
220	118,80
254	137,16

Fonte: Transcrição do registro da Profª Janice – 3º encontro

Parte B

Uma caneta custa 3 reais. Se representarmos por "x" o nº de canetas que queremos comprar e por "y" o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela:

nº canetas	Preço a pagar
1	1 . 3 = 3
2	2 . 3 = 6
.	
.	
6	6 . 3 = 18

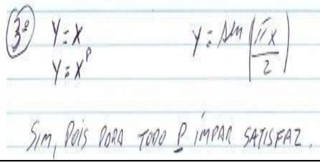
Fonte: Transcrição do registro da Profª Cibele – 2º encontro

Parte C

Atividade 3: Apresente uma lei de formação de uma função que satisfaça a relação descrita pela tabela a seguir.
Existem outras funções que satisfazem a relação? Por quê?

x	-1	0	1
y	-1	0	1

Adaptado de Schwarz e Dreyfus (1995)



Fonte: Registro do Prof. Luis Sérgio - 5º encontro

No supracitado extrato, podemos constatar que na realização da tabela está presente o reconhecimento das noções de variação e dependência, considerando que o preço a pagar (variável dependente) varia em decorrência do consumo (variável independente), bem como, que essa variação obedece a um padrão, uma lei (que no caso é a multiplicação do consumo por R$0,54, valor fixo do *watt*). Entendemos que a realização tabular pode ser o prelúdio do reconhecimento e legitimação das noções de variação, dependência, regularidade como constituintes da rede de interpretações do conceito de função.

Na Parte B do Quadro 3, expomos uma questão sugerida pela Profª Cibele para introdução do tema função no nono ano. No decorrer da apresentação da referida questão, a professora enuncia:

> Olhando a tabela você percebe que [...] a todos os valores de *x* estão associados valores de *y* e para cada valor de *x* está associado um único valor de y (Profª Cibele – 2º encontro).

Tal assertiva trata do caráter univalente de uma relação funcional, demarcando, dessa forma, o critério para o reconhecimento de uma tabela como uma realização do conceito de função, ou seja, a cada elemento do conjunto de entrada (das variáveis independentes) está associado um único elemento do conjunto de saída (das variáveis dependentes).

A solução da atividade descrita na Parte C do Quadro 3, apresenta uma infinidade de relações funcionais satisfazendo os dados da mesma realização tabular, e a análise da sua solução gerou algumas ponderações pelo grupo:

> Se temos um fenômeno e focalizamos parte de um fenômeno (poucos dados) então podemos ter modelos matemáticos (relações funcionais) que

representem aquele fragmento, mas não o fenômeno como um todo (Prof. Eusébio- 5º encontro).

O excerto anterior entremostra a limitação de termos informações apenas de um número reduzido de dados da realização tabular de uma relação funcional.

5.2. Panorama Algébrico

O panorama algébrico é composto das realizações de uma relação funcional cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, que explicitam a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou expressão algébrica. Indicando-se, em uma relação funcional, a variável independente por x e a variável dependente por y, então a realização de uma função como expressão algébrica é frequentemente reconhecida e realizada pelo texto $y = f(x)$.

O exercício da Parte A do Quadro 4 faz referência a uma relação funcional de uma situação fictícia ou hipotética, na qual a realização de função como expressão algébrica $(f(x) = 1{,}5x + 16)$ foi utilizada para descrever (modelar matematicamente) a situação, ou seja, a realização algébrica "traduz o comportamento do fenômeno" (enunciação do Prof. Eusébio – 2º Encontro), de forma concisa e compacta, por intermédio de textos específicos, a saber, operadores simbólicos e letras (variáveis).

Quadro 4 – Realizações de função como expressão algébrica

Parte A	Parte B	Parte C
Na produção de peças, uma fábrica tem custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida (custo unitário). Sendo x o número de peças produzidas, determine: a) A lei da função que fornece o custo de produção de x peças; b) Calcule o custo de produção de 400 peças. Respostas: a) $f(x) = 1{,}5x + 16$ b) $f(400) = 1{,}5.400 + 16$ $f(400) = 600 + 16 = 616$	Um automóvel está parado diante da UFBA, um caminhão o ultrapassa com velocidade constante de 20m/s, nesse exato instante o motorista do automóvel arranca com a aceleração de 4m/s^2, em perseguição ao caminhão. Após quanto tempo o automóvel alcançará o caminhão? Quanto terá percorrido o automóvel? $S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $S_a = 0 + (0 \cdot 1) + \frac{4t^2}{2} \Rightarrow S_a = 2t^2$ $S_c = 0 + 20t + \frac{0t^2}{2} \Rightarrow S_c = 20t$ $S_c = S_a \Rightarrow 20t = 2t^2 \Rightarrow 2t^2 - 20t = 0$ $\Rightarrow 2t(t-10) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 10s$	Uma aplicação *f* de R em R, define uma função "afim", quando associa a cada $x \in R$ o elemento $(ax+b) \in R$, onde $a \neq 0$. Isto significa que $(x, ax+b) \in f, \forall x \in R.$ Se $b = 0$ então $f : x \to ax$, é dita função linear.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Luis Sérgio – 4º encontro	Fonte: Transcrição do registro do Prof. Nadison – 2º encontro	Fonte: Transcrição do registro de Registro do Prof. Sampaio – 5º encontro

A partir da realização algébrica da relação funcional é possível determinar o custo de produção ($f(x)$ – variável dependente) que é único, para cada número x de peças produzidas (variável independente), o que foi realizado, no item b da questão transcrita na Parte A do Quadro 4 para $x = 400$. Tais considerações apontam para o reconhecimento da realização algébrica como apropriada para tratar aspectos quantitativos de uma relação funcional.

Para solucionar a questão apresentada na Parte B do Quadro 4 é necessário a partir da função horária do espaço do movimento uniformemente variado, cuja realização algébrica é $S = S_0 + v_0 t + (at^2/2)$, realizar algebricamente as funções horárias do automóvel ($S_a = 2t^2$) e do caminhão ($S_c = 20t$), e em seguida determinar a interseção entre essas duas relações funcionais, que é equivalente a obter os zeros da função quadrática $S_a - S_c = 2t^2 - 20t$. Demarcamos que o reconhecimento dos textos das realizações algébricas propiciou a legitimação da realização tanto da operação subtração $(S_a - S_c = 2t^2 - 20t)$, como também da determinação dos zeros desta relação funcional.

As realizações de função como expressão algébrica apresentam como especificidade e potencialidade consolidar informações acerca de uma relação funcional em uma única cadeia de símbolos, tornando possível realizar operações (Ronda, 2015), tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor.

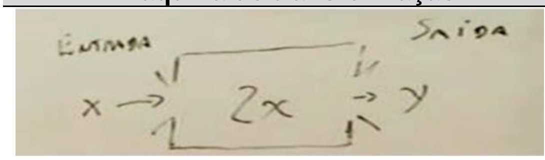
Na Parte C do Quadro 4, transcrevemos um registro em que a realização de função como expressão algébrica foi utilizada para definir as relações funcionais afim e linear. O caráter conciso das realizações algébricas pode viabilizar o reconhecimento de tipos específicos de funções, podendo ser empregada para defini-las.

No entanto, apesar das potencialidades das realizações desse panorama, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) ressaltam que as realizações algébricas não são alternativas viáveis para estudantes no início do processo de escolarização, porquanto eles não estão familiarizados com esses textos. Desse modo, segundo esses pesquisadores, torna-se cabal investigar (outras) formas de como as relações funcionais podem ser realizadas no ensino (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

5.3. Panorama Máquina de Transformação

Constituem esse panorama as realizações de função que utilizam a metáfora de uma relação funcional como uma máquina que transforma um dado valor (de entrada ou *input*) em outro (saída ou *output*). No Quadro 5, reportamos um texto icônico da realização de função como máquina de transformação, apresentado pelo Prof. Sampaio no primeiro encontro presencial do curso.

Quadro 5 – Realização de função como máquina de transformação



Fonte: Registro de Prof. Sampaio – 1º encontro

O professor relata que utiliza essa realização na introdução do tema função, pois considera que tais textos têm uma relação mais direta com o contexto cotidiano dos alunos: “Aqui nessa máquina eu coloco minha matéria prima, a minha máquina processa e coloca para fora o meu produto” (Prof. Sampaio, 1º encontro), isto é, cada elemento que entra é transformado/processado em um (único) elemento de saída, condição (univalência) para que uma dada relação seja funcional. Esse extrato da fala do Prof. Sampaio revela que as realizações de função como máquina de transformação viabilizam o reconhecimento e legitimação das noções processo, transformação e mudança como constituintes da teia de possibilidades interpretativas do conceito de função. O Prof. Sampaio também menciona que, a partir dessa realização, introduz as definições dos conjuntos domínio (entrada) e imagem (saída), instaurando, desse modo, o processo de familiarização com os textos legítimos que compõem esse conceito.

As realizações desse panorama afiguram-se como mais condizentes para realizar funções cujos conjuntos domínio e imagem são numéricos, e a relação funcional respeita uma regra, como podemos observar no Quadro 5, em que a realização de função como máquina de transformação está subordinada à realização algébrica ($f(x) = 2x$). Essas considerações evidenciam as limitações comunicativas que os textos desse panorama estabelecem.

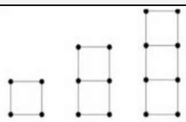
5.4. Panorama Generalização de Padrões

O presente panorama é formado das realizações que comunicam o conceito de função como uma generalização de padrões. Estamos considerando generalização de padrões como textos com afirmações gerais, que são gerados pelo reconhecimento do padrão de relação entre quantidades e/ou variáveis, com base em algumas informações de uma situação (funcional) particular (Mavrikis et al, 2012).

Na Parte A do Quadro 6, reportamos uma questão adaptada de Callejo e Zapatera (2014), proposta aos professores pela pesquisadora, que se refere ao reconhecimento e realização de uma generalização, padrão ou regularidade em uma sequência geométrica. Na discussão da questão pelo grupo a generalização foi realizada, por exemplo, pelos textos:

> Foram usados quatro palitos para fazer o primeiro quadrado e três para cada quadrado subsequente, assim n quadrados requererão $4 + 3(n-1) = 3n+1$ palitos (Profª Cibele, 5º encontro).

> [...] as bolinhas vão aumentando dois a dois, só que eu tenho que subtrair sempre (as) do primeiro quadrado [...], logo $B = 4 + 2(Q-1)$ [...] $2Q + 2$, essa é a lei que vai reger as bolinhas [...] (Prof. Nadison, 5º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 6 – Realizações de função como generalização</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>Observe as seguintes figuras:
Como podem ver na imagem a figura com um quadrado, para ser construída necessita de 4 bolinhas e 4 palitos, a figura com dois quadros precisa de 6 bolinhas e 7 palitos e a com três quadrados de 8 bolinha e 10 palitos.

a) Quantos bolinhas e palitos serão necessários para construir uma figura com 4 quadrados? E com 6? E com 20?
b) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de bolinhas.
c) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de palitos.
Adaptado de Callejo e Zapatera (2014)</td><td>A bula de um medicamento apresenta a dosimetria em função da massa corpórea, de acordo com a tabela:
<table><tr><td>Massa Corporal (Kg)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>Dose indicada (gota)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>
a) Escrever a expressão que relacione a dose a ser ministrada com a correspondente massa corporal.
$DI.2 = M \Leftrightarrow M.\frac{1}{2} = DI$</td></tr>
<tr><td>Fonte: Questão proposta pela pesquisadora - 5º encontro.</td><td>Fonte: Transcrição dos registros dos professores Cibele, Cláudia, Sampaio e Luis Sérgio - 7º encontro.</td></tr>
</table>

Como podemos observar, são afirmações gerais (generalizações) de dependência funcional entre o número de palitos e o número de quadrados, e número de bolinhas e o número de quadrados, que foram realizadas com textos em linguagem natural e, posteriormente por realizações algébricas das respectivas relações funcionais. As realizações de função por generalização foram obtidas por inferências decorrentes da análise da estrutura de construção dos primeiros elementos da sequência, e funcionam como uma "autorização" para determinar qualquer elemento da sequência. Isso evidencia parâmetros próprios para o reconhecimento e realização de textos no contexto da Educação Básica, isto é, da MnE do Conceito de Função. Note que que a legitimação dessas realizações (as fórmulas), no contexto da Matemática Acadêmica (dos matemáticos, assim estamos assumindo), teria que ser pautada em uma demonstração, no caso, pelo processo de indução matemática.

Na Parte B do Quadro 6, relatamos uma questão em que com base em alguns dados de uma situação funcional, fornecidos por uma realização tabular, solicita-se uma expressão (afirmação geral) que relacione a dose (em gotas) de um medicamento com a correspondente massa corpórea (em kg) do usuário. Essa questão foi sugerida no 7º encontro, para introdução do tema função em uma turma do nono ano. O Prof. Luis Sérgio afirma: "A massa corporal é sempre o dobro da dose indicada" e escreve no quadro os textos: "$DI.2 = M$" e "$M.(1/2) = DI$". As três afirmações são generalizações da situação funcional descrita pela realização tabular, e como destacou o Prof. Eusébio, "do ponto de vista matemático procedem". No entanto, conforme ressaltaram os professores Sampaio e Eusébio, apenas uma delas é apropriada para generalizar o fenômeno, a saber: $DI = M/2$, porquanto "[...] é a quantidade de gotas que vai depender da massa" (Prof. Sampaio).

Os extratos relatados assinalam que realizar uma generalização de uma situação funcional, suscita tanto o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis, quanto a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. No exemplo descrito na Parte B do Quadro 6, as três generalizações obtidas seriam realizações da relação funcional que satisfaz a tabela, caso esta fosse considerada isoladamente. O reconhecimento da natureza das variáveis, como independente (massa corpórea) e dependente (dose), decorreu da análise dos textos, denominados por nós de não-escolares, que evidenciou a relação de causa e efeito do fenômeno (mesmo que fictício) matematizado por uma relação funcional.

Frisamos que as realizações de função como generalização de padrões estão restritas a um subconjunto de relações funcionais, aquelas que são passíveis de serem realizadas algebricamente (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

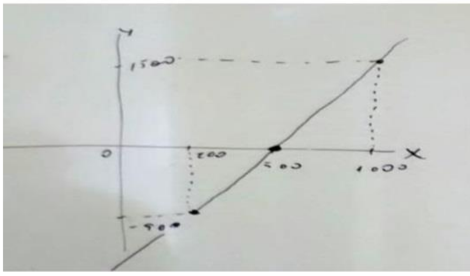
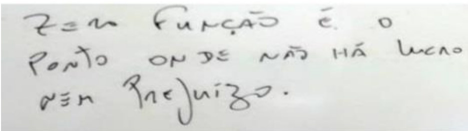
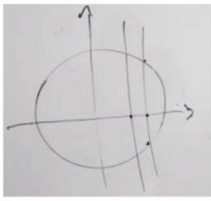
5.5. Panorama Gráfico

Compõem o panorama gráfico as realizações gráficas de relações funcionais, cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, denotado por R. A realização gráfica de uma relação funcional *f,* dessa natureza, é o conjunto: $\{(x,y) \in R \times R; x \in dom(f) \text{ e } y = f(x)\}$. A realização gráfica de uma função real com variável real geralmente é uma curva no plano cartesiano $R \times R$, designada de gráfico da função.

Na Parte A do Quadro 7, apresentamos a realização gráfica de função, obtida a partir da sua realização algébrica $y = 3x - 1500$, que descreve uma situação funcional da semirrealidade (1ª coluna). Para realizar o gráfico da relação funcional $y = 3x - 1500$, o Prof. Eusébio determinou os pontos $(200, -900)$, $(500, 0)$ e $(1000, 1500)$, e plotou-os no plano cartesiano. O processo de realização do gráfico está subordinado ao reconhecimento (com base na realização algébrica) de que a relação funcional $y = 3x - 1500$ é afim[10], e, portanto tem como realização gráfica uma reta. A partir dessa realização gráfica é possível visualizar e interpretar para que valores de x (número de DVD(s) locados) a locadora teve lucro ($y > 0$), prejuízo ($y < 0$), ou nem lucro e nem prejuízo ($y = 0$), o zero da função ($x = 500$), que corresponde à interseção do gráfico com o eixo horizontal.

O exemplo supracitado atesta que as realizações gráficas de uma relação funcional propiciam o reconhecimento de características das funções, tais como sinal e zeros (caso existam), além também dos intervalos de monotonicidade e extremos (caso existam). Portanto, o comportamento global ou local de uma relação funcional pode ser analisado, reconhecido e legitimado, nesse contexto, com base na sua realização gráfica.

Quadro 7 – Realizações gráficas

Parte A		**Parte B – teste da linha vertical**
Em uma locadora de DVD(s), a locação de uma DVS custa R$ 3,00/mês e o custo fixo de manutenção da locadora é R$ 1500,00/mês. Que relação matemática podemos estabelecer para saber se ao final do período de um mês a locadora obteve lucro ou prejuízo? Locação: R$ 3,00 Custo mensal: R$ 1500,00 Lucro: *y* Quantidade de DVD(s) locados: *x* $y = 3x - 1500$		
Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro		Fonte: Registros do Prof. Sampaio – 7º encontro

O Prof. Eusébio evidenciou, nos quinto e oitavo encontros, que a noção de correspondência entre as variáveis está implícita nas realizações gráficas, em razão da existência dos pontos $(x, f(x))$ ser decorrência do fato de que: a cada x (variável independente) do domínio da função *f* corresponde a um (único) $y = f(x)$ (variável dependente). Além disso, o caráter univalente (um único $y = f(x)$) dessa

[10] Ressaltamos que o domínio da relação funcional que descreve o fenômeno é um subconjunto dos números naturais, assim sendo, a sua realização gráfica é um conjunto (discreto) de pontos sobre o gráfico da relação funcional $f(x) = 3x - 1500, x \in R$.

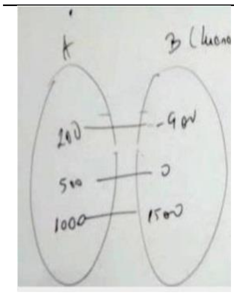
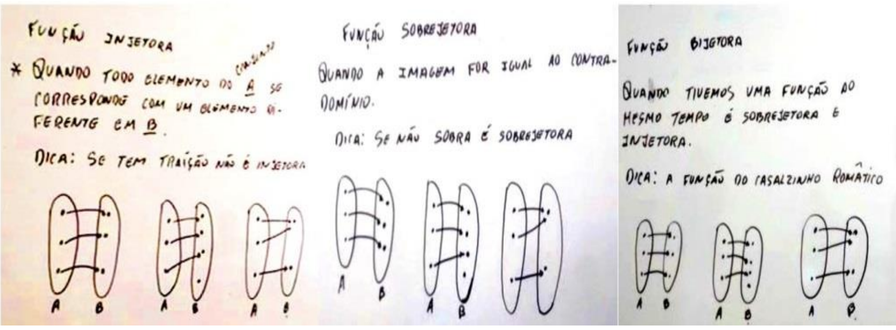
correspondência possibilita o reconhecimento das curvas no plano cartesiano que são realizações gráficas de uma relação funcional. Na Parte B do Quadro 7, a curva (uma circunferência) não é a realização gráfica de uma relação funcional, porque as retas verticais traçadas intersectam a curva em dois pontos. Esse processo de traçar retas paralelas ao eixo vertical, passando por pontos de abscissa x, com x um elemento do domínio de *f*, e verificar se estas intersectam a curva em um único ponto, é denominado de teste da linha vertical e é um critério para o reconhecimento (ágil) de curvas que são realizações gráficas de uma relação funcional (Jones, 2006; Steele; Hillen; Smith, 2013), legitimado no contexto da Educação Básica.

5.6. Panorama Diagrama

Constituem esse panorama as realizações de função como diagramas de setas, as quais viabilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. Convencionalmente as realizações por diagramas estão restritas as relações funcionais em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas.

Na Parte A do Quadro 8 é apresentada a realização por diagramas de flechas da (parte) relação funcional descrita na Parte A do Quadro 7, que foi realizada tomando como referência a sua realização algébrica $f(x)=3x-1500$, com a determinação das imagens $f(1000)=1500$, $f(500)=0$ e $f(200)=900$[11]. Neste caso, foram estabelecidas conexões (*pontes*) entre as realizações algébrica e por diagramas de setas. Na realização do diagrama o Prof. Eusébio comunica:

> "Então a gente teve para a quantidade locada (referindo-se ao conjunto A do número de DVD's locados) uma valor correspondente [...] que corresponde a lucro ou prejuízo (conjunto B). A partir do diagrama a gente observa que todo elemento de A, vai ter um único correspondente em B" (7º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 8 – Realizações de função como diagrama</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro</td><td>Fonte: Registros do Prof. Luis Sérgio – 7º encontro</td></tr>
</table>

[11] Neste caso, o professor usou a realização por diagramas apenas para alguns elementos do domínio e contradomínio da relação funcional em tema.

O excerto demarca que para realizar uma função por diagramas é necessário identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e a cada elemento do domínio fazer corresponder (por uma seta) um único elemento do contradomínio. Portanto, o caráter univalente do conceito de função está patente nessas realizações.

No sétimo encontro, O Prof. Luis Sérgio apresentou as definições de função injetora[12], sobrejetora e bijetora por intermédio das realizações de função como diagramas, conforme é possível observar na Parte B do Quadro 8, em que as mesmas três realizações por diagrama foram utilizadas para exemplificar as referidas definições. Nessa conformidade, a relação funcional realizada pelo primeiro diagrama (da direita para esquerda) é injetora e sobrejetora, e, portanto bijetora, a realizada pelo segundo diagrama é injetora, mas não é sobrejetora, e a realizada pelo terceiro é apenas sobrejetora.

Ainda referindo-nos a Parte B do Quadro 8, o Prof. Luis Sérgio apresentou o que denominou de “Dica” para cada uma das definições enunciadas. Cada “Dica” é um texto na forma de metáfora, empregado como recurso mnemônico, que estabelece relações entre o conteúdo matemático (no caso, as definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras) com circunstâncias da vida cotidiana. Segundo Grilo (2014), os recursos mnemônicos são estratégias utilizadas pelos professores com o propósito de auxiliar o reconhecimento de determinados textos (matemáticos), na expectativa de que possam ser realizados mais facilmente pelos estudantes, por apresentarem uma linguagem mais familiar para os alunos. Como é possível observar, tais textos distanciam-se do rigor e precisão dos textos da Matemática Acadêmica (Grilo, 2014), mais uma vez consubstanciando o pressuposto assumido de que os critérios de comunicação são regulados nos contextos em que são produzidos.

No que concerne às limitações das realizações desse panorama, ressaltamos que, para relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínios são constituídos de uma grande quantidade de elementos (ou são infinitos), não é viável (possível) utilizar as realizações como diagramas, para reconhecer se a relação funcional em análise é injetora, sobrejetora ou bijetora.

5.7. Panorama Formal

Compõem o panorama formal as realizações de função como uma definição formal. Utilizamos o adjetivo formal, em razão dessas definições apresentarem perceptível semelhança com os textos contemporâneos que definem função, e são legitimados na Matemática Acadêmica, como por exemplo, a definição apresentada na seção 1 (nota de rodapé) e a atribuída ao grupo Bourbaki: “Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f) em que X e Y são conjuntos não vazios e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$” (Sierpinska, 1992, p.30, tradução nossa).

[12] Sugerimos uma definição mais precisa, por exemplo, uma função é injetora se, e só se elementos distintos do domínio da função possuem imagens distintas.

No Quadro 9, expomos duas realizações de função como definição formal. A que consta na Parte A foi apresentada pelo Prof. Eusébio no sétimo encontro, na simulação de uma aula para introdução do tema função no primeiro ano do Ensino Médio, e a da Parte B foi enunciada pelo Prof. Sampaio no quinto encontro. Como podemos constatar, ambas apresentam reconhecível similitude com as definições supracitadas.

Quadro 9 – Realizações de função como definição formal

Parte A	Parte B
Dados dois conjuntos não vazios (*A* e *B*). Uma relação que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$, recebe o nome de função.	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação [...] f de $A \times B$, recebe o nome de aplicação de *A* em *B* ou função definida em *A* com imagens em *B* se, e somente se, para cada elemento do primeiro existe um e só um *y* do segundo, tal que o par (x, y) pertence a *f*.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Eusébio – 7º encontro	Fonte: Transcrição da enunciação do Prof. Sampaio – 5º encontro

O Prof. Eusébio apresentou a definição (formal) descrita na Parte A do Quadro 9, conjuntamente com as realizações algébrica, gráfica (Parte A - Quadro 7) e por diagramas (Parte A – Quadro 8), da situação funcional descrita na Parte A do Quadro 7 (1ª coluna). Segundo o professor, "[...] essas são algumas possibilidades da gente poder confrontar o conceito formal (definição formal, segundo nosso entendimento), vamos dizer assim com as representações [...]" (7º encontro). No caso, o Prof. Eusébio empenhou-se em instaurar o reconhecimento das relações existentes entre a realização de função como definição (formal) apresentada e as realizações gráficas e por diagrama, sobretudo no que diz respeito ao seu caráter univalente. Isso posto, afigura-se que o professor pretendeu estabelecer *pontes* entre tais realizações. De forma mais abrangente, essas *pontes* podem ser estabelecidos entre os panoramas aos quais essas realizações pertencem.

Os caracteres univalente e arbitrário das relações funcionais, expressos nas realizações de função como definição formal, propiciam precisão, estrutura lógica e generalidade a essas realizações, atributos que estão em consonância com os parâmetros de legitimação da Matemática Científica (Tabach; Nachlieli, 2015). Entretanto, segundo Even (1990) e Sierpinska (1992), não abarcam a variabilidade de entendimentos e formas de comunicar o conceito de função, quando este é utilizado tanto na matemática, como em ciências e situações funcionais do cotidiano, pois tais casos transcendem a mera lógica desta definição.

A natureza formal e generalista das realizações de função como definição formal indica, conforme Kleiner (1993), o que incluir ou excluir do estoque de exemplos de relações funcionais. Foi exatamente com esse propósito, que o Prof. Sampaio enunciou a realização de função como definição formal constante na Parte B do Quadro 9, para justificar o reconhecimento do texto: $g(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ como a realização algébrica de uma relação funcional, considerando que satisfaz a definição formal apresentada.

Comparada com a univalência, arbitrariedade é um critério menos visível (Steele; Hillen; Smith, 2013) nas realizações de função. Todavia, essas duas caraterísticas, concomitantes ou não, explicitadas ou não, auxiliam, ou mesmo possibilitam, o reconhecimento e a realização das legítimas realizações de função, como destacamos na análise dos panoramas anteriores.

6. Síntese do Modelo

O modelo foi estruturado em termos de panoramas, constituídos de agrupamentos de realizações do conceito de função que portam semelhanças referentes às regras de reconhecimento e realização.

As regras de reconhecimento são essenciais para caracterizar a especialização comunicativa de cada um dos panoramas. Em razão de regularem "que" textos podem ser reconhecidos, em decorrência da sua sintaxe específica (Bernstein, 2000, 2003;), como legitimamente pertencentes ao correspondente panorama.

As regras de realização regulam a forma da comunicação em cada panorama, transmitindo parâmetros específicos para seleção e produção dos seus textos legítimos (Bernstein, 2000), isto é, operam regulando "como" um texto legítimo de cada panorama pode ser dito.

No Quadro 10, sumariamos o "que" (regras de reconhecimento) e o "como" (regras de realização) das realizações integrantes de cada um dos panoramas que compõem o modelo construído. Apresentamos também um resumo das vinculações das realizações constituintes dos panoramas, identificadas no estudo com os professores.

Considerando que um conceito matemático é constituído pelo seu conjunto de realizações, a síntese apresentada no Quadro 10 ao explicitar o "que" e o "como" dos textos que constituem as realizações de cada um dos panoramas do conceito de função operam como "lentes de aumento", que esquadrinham as suas partes constituintes ao expor a variabilidade de facetas singulares dos seus textos, com suas diferentes estruturas de referências, conjuntos de convenções, interpretações e parâmetros de comunicação que são legitimados no contexto em questão.

Quadro 10 – Síntese da MpE do Conceito de Função – o "que" e o "como" dos seus

Panorama	o "que" (reconhecimento)	o "como" (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados numéricos ou não em uma tabela, no caso em que, todo elemento de uma linha (coluna) está associado a um único elemento da respectiva linha (coluna).	Organizar os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus respectivos dados de saída estejam na mesma linha ou coluna.	-Evidenciar as noções de variação, dependência e regularidade. -Inferir incorretamente sobre o tipo da relação funcional.
Algébrico	Uma lei, regra ou fórmula, em textos com notação algébrica, na qual seja possível exprimir de forma única (com exceção de expressões algébricas equivalentes) uma variável (denominada de dependente) em termos de uma outra variável (denominada de independente).	Explicitar a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou regra empregando símbolos algébricos.	-Tratar de aspectos quantitativos. -Operar com relações funcionais. -Propiciar o reconhecimento de tipos de relação funcionais. -Exigir familiaridade com a notação algébrica simbólica.
Máquina de transformação	Texto icônico de uma máquina, que transforma cada dado de entrada em um único dado de saída, obedecendo a uma regra.	Realizar texto icônico que simule uma relação funcional como uma máquina que processa os elementos do conjunto domínio transformando-os, por intermédio de uma regra, nos elementos do	-Demarcar as noções de processo, transformação e mudança. -Introduzir as definições dos conjuntos domínio e imagem de uma relação funcional.

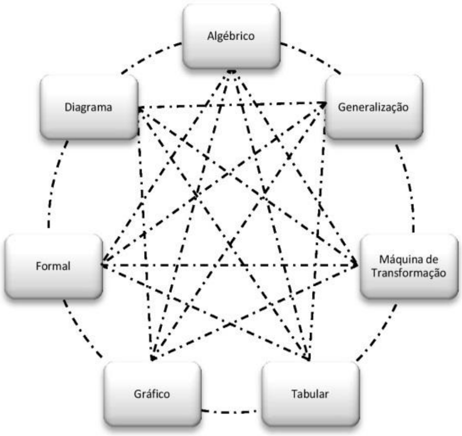
		conjunto imagem.	
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que a partir de algumas informações de uma dada relação funcional, explicita de forma geral, seu padrão ou regularidade de caráter univalente.	Apresentar uma afirmação geral (texto declarativo ou simbólico), que com base em algumas informações de uma relação funcional, que expressam seu padrão ou regularidade.	- Propiciar o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis. - Propiciar a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. -Propiciar o reconhecimento da existência de um padrão ou regularidade.
Gráfico	Um conjunto G de pontos do plano cartesiano, tal que se (x,y_1) e (x,y_2) são elementos de G então $y_1 = y_2$.	Plotar no plano cartesiano os pontos da forma $(x, f(x))$, em que f é uma relação funcional com variável independente x.	-Evidenciar a noção de correspondência entre variáveis. -Utilizar o teste da linha vertical. -Identificar e determinar[13] os intervalos de monotonicidade, sinal, zeros e extremos (caso existam) de uma relação funcional.
Diagrama	Uma correspondência arbitrária e univalente entre conjuntos dispostos em diagramas.	Identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e dispô-los em diagramas, de forma que a cada elemento do domínio corresponda (seta) um único elemento do contradomínio.	-Demarcar a correspondência entre conjuntos. -Apresentar as definições de funções injetoras, sobrejetora e injetoras.
Formal	-Associação arbitrária e univalente entre variáveis. -Subconjunto de AxB, A e B quaisquer e não vazios, tal que os elementos de A e B estão em uma associação univalente.	Realizar um texto declarativo que define função, na qual devem estar explicitadas as características de univalência e arbitrariedade, com a utilização de quantificadores.	-Reconhecer as relações que são funcionais nas suas mais variadas formas de realização. -Limitar o entendimento da variabilidade de noções e interpretações associadas ao conceito de função.

Fonte: autores

Na Figura 1, apresentamos um texto icônico do modelo construído nesse estudo – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores.

A Figura 1 tem como propósito apresentar uma visão estrutural geral (macro) do modelo de MpE do Conceito de Função desenvolvido no presente estudo.

Figura 1 – Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de um estudo com professores



[13] Com a utilização de softwares gráficos é possível não apenas identificar, mas também determinar os zeros, extremos e as interseções (caso existam).

Ao dispormos os panoramas em retângulos disjuntos objetivamos comunicar que cada um deles tem sua identidade e fronteiras específicas, porquanto é o isolamento que confere singularidade (Bernstein, 2000, 2003) a cada panorama. As dimensões semelhantes dos retângulos e a conformação circular têm como propósito assinalar que as relações entre os panoramas, sob perspectiva do modelo, não são hierárquicas, tendo em vista que todos os panoramas têm como característica comum serem conjuntos de realizações do mesmo conceito. Por fim, as linhas tracejadas que interligam, dois a dois, os panoramas pretendem demarcar a possibilidade do estabelecimento de *pontes* entre os panoramas, no processo do ensino do conceito de função. Alguns dessas pontes, identificadas nos dados, foram evidenciados no decorrer da análise dos panoramas.

As pontes entre os panoramas podem ser interpretados, sob o ponto de vista bernsteiniano, como uma redução no isolamento entre os panoramas, ou seja, como uma classificação mais fraca nas relações entre os panoramas (intraconceito). Nessa perspectiva, valores de classificação mais forte ou mais fraco nas relações intraconceito, levam à menor ou maior articulação entre os vários panoramas.

Estudos assinalam a importância de organizar o ensino de forma a estabelecer, em nossos termos, *pontes* entre os diferentes modos de realizar funções (Ronda, 2015; Steele; Hillen; Smith, 2013), em razão de muitas investigações apontarem que os alunos tendem a identificar o conceito de função somente com uma das suas realizações (Nachlieli; Tabach, 2012). Por exemplo, o texto “função” pode ser visto como equivalente à sua realização algébrica em um contexto, como sua realização gráfica em outro, e só raramente, como relacionada às duas realizações simultaneamente (Nachlieli; Tabach, 2012). Por conseguinte, esses resultados sugerem que o ensino do conceito de função, em algum momento, dever ser pautado em uma classificação (C-) nas relações intraconceito.

Entretanto, como cada panorama tem sua comunicação especializada que revela aspectos particulares do conceito de função, mais apropriados e operacionais para certos contextos funcionais do que para outros, entendemos que deve haver espaço no ensino do conceito de função para o desenvolvimento de uma orientação específica e focada no reconhecimento e na realização dos seus textos, isto é, para uma classificação mais forte nas relações intraconceito. Nessa configuração, entendemos que o enquadramento também terá uma gradação mais forte (E+), pois os textos do panorama em estudo serão privilegiados em relação aos dos outros panoramas, em certo sentido os textos do panorama que está sob foco no ensino têm “controle” sobre as regras de comunicação.

Diante do exposto, entendemos que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído pode ser empregado para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino, em decorrência da variação da gradação nos valores de classificação e enquadramento, que podem variar entre os extremos de mais forte a mais fraco.

7. Considerações Finais

No presente estudo, construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de estudo com um grupo de professores, subsidiados por conceitos da teoria sociológica de Bernstein.

A teoria de Bernstein apresenta rigor e precisão que dão origem a uma série de conceitos inter-relacionados (Hoadley, 2006), operacionalizando-nos com robustez analítica, teórica e metodológica. No entanto, como ressaltado por Hoadley (2006), as suas categorias teóricas não permitem uma leitura direta do empírico. Nessa conformidade, faz-se necessário a construção de uma linguagem de descrição (no nosso caso, modelo teórico de MpE do Conceito de Função) com o propósito de trazer esses conceitos para mais perto dos dados, possibilitando a sua leitura. Assim sendo, os dados empíricos foram organizados em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. Desse modo, o modelo foi estruturado nos panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal.

A identificação com precisão dos critérios comunicativos legítimos para cada panorama possibilita tanto o reconhecimento, como uma forma de selecionar e produzir segmentos legítimos de textos sobre o conceito de função, inteirado da sua rede de entendimentos e especificidades interpretativas. Fornece, dessa forma, uma transparência comunicativa para leitura do modelo, que propicia uma perspectiva multifacetada da MnE do Conceito de Função, operacionalizada (ou a ser operacionalizada) no decorrer dos Ensinos Fundamental II e Médio, podendo, inclusive, alertar para novas possibilidades, relações e configurações comunicativas.

Tal perspectiva pode contribuir com a comunidade de professores que atuam na Escola Básica ou cursos de formação inicial e continuada, trazendo subsídios e reflexões em relação a formas de realizar conceito de função no ensino nesses níveis, tanto no diz respeito à diversidade e especificidade de formas de realizá-lo, a sua organização e sequenciamento, critérios de avaliação, quanto na escolha pela gradação dos princípios de classificação e enquadramento nas relações intraconceito das práticas pedagógicas a serem efetivadas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função desenvolvido e construído nesse estudo deve ser entendido como resultado de uma lente teórica particular, a qual nos permitiu uma descrição (uma re-presentação) sistemática e estruturada do que reconhecemos através do nosso olhar como o fenômeno que conceptualizamos como MnE do Conceito de Função.

Referências

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: researching mathematics for teaching mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*, p. 270-296.

Adler, J.; Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In Sullivan, P.; Wood, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222.

Adler, J.; Patahuddin, S. M. (2012). Recontexualising items that measure mathematical knowledge for teaching into scenario based interviews: an investigation*. Journal of Education*, No. 56.

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, p. 389-407.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p.595-606.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity*: theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield.

Bernstein, B. (2003). *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge.

Brasil (2002). Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *PCN + Ensino médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec.

Callejo, M. L.; Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *BOLEMA*. v. 28, n.48, p. 64-88.

Carraher, D. W.; Martinez, M. V.; Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 3-22.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237-243.

Davis, B.; Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 29, N. 3, p. 37-43.

Davis, B.; Renert, M. (2013). Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Matematics*, v. 9, n. 3, p. 37-43.

Davis, B.; Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group. 141 p.

Davis, B.; Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 3, p. 293-319.

Doorman, M. et al. (2012). Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. V. 10, I. 6, p. 1243-1267.

Elia, I. et al. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*. p. 317-333.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* V. 21, p. 521-544.

Even, R.; Ball, D. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Grilo, J. S. P. (2014). *Da Universidade para a Escola: A Recontextualização de Princípios e Textos do discurso pedagógico de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática*. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Guerrero, L. S.; Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, v. 1, p. 1-15.

Hansson, O. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Tese de Doutorado. Luleå University of Technology, Suécia.

Hitt, F; González-Martin, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*. V. 88, p. 163-187.

Hoadley, U. (2006). Analysing pedagogy: the problem of framing. *Journal of Education*, n. 40, p. 15-34. Disponível em <http://www.joe.ukzn.ac.za>. Acesso em 07 set. 2016.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, 7 (2), p. 1-20.

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209.

Mavrikis, M. et al. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic a_ordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, Wiley.

Nachlieli, T., Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, p. 10-27.

Rhoads, K.; Weber, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. *International Journal of Education*, V. 78, p. 1-12.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics,* n. 90, p. 303-319.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, p. 229-254.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. United States: The Mathematical Association of America, p. 25-58.

Steele, M.; Hillen, A. F.; Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, p. 451-483.

Tabach, M.; Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitionsfor developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, n.90, p. 163-187.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, n.93, p. 333-361.

Graça Luzia Dominguez Santos: Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Brasil. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA. Temas de pesquisa: matemática para o ensino e formação continuada de professores. **E-mail:** gracadom@ufba.br
Jonei Cerqueira Barbosa: Professor de Educação Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Brasil. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, ambos da UFBA. Pesquisador do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Temas de pesquisa envolvem materiais curriculares, matemática para o ensino e formação continuada de professores. **E-mail**: jonei.cerqueira@ufba.br