UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 187-207

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

GEOMETRÍA EN EL AULA A PARTIR DE UN TRATADO ESPAÑOL DE FORTIFICACIÓN DEL SIGLO XVI

Carlos Dorce Polo

Fecha de recepción: 06/09/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	Se ha demostrado que la introducción de la historia de las matemáticas en el aula ordinaria es muy beneficiosa para el desarrollo y el proceso de aprendizaje. Aquí se presenta una secuencia didáctica donde la geometría, las TIC y el trabajo cooperativo se ven complementadas con un tratado de fortificación español del siglo XVI: los estudiantes aprenderán a tomar medidas indirectas a partir de las instrucciones de la *Teorica y practica de fortificacion* (1598) de Cristóbal de Rojas. De este modo, tendremos una experiencia exitosa donde la historia de las matemáticas se hace imprescindible para contextualizar un problema determinado. **Palabras clave**: Historia de las matemáticas, Innovación pedagógica
Abstract	It has been shown that the introduction of the history of mathematics in regular classrooms is very beneficial for the development and learning process. Here is presented a didactic sequence in which Geometry, ICT and cooperative are complemented with a 16th century Spanish treatise about Fortification: the students will learn to compute indirect measures from the instructions of the *Teorica y practica de fortificacion* (1598) by Cristobal de Rojas. Thus, we will have a successful experience where history of mathematics is essential to contextualize a particular problem. **Keywords**: History of mathematics, Pedagogical innovation
Resumo	Tem sido demonstrado que a introdução da história da matemática em salas de aula regulares é muito benéfico para o processo de desenvolvimento e aprendizagem. Aqui é apresentada uma seqüência didática em que Geometria, TIC e cooperativa são complementados com um tratado espanhol do século 16 sobre Fortificação: os alunos vão aprender a calcular medidas indiretas de as instruções *do Teórica y practica de fortificacion* (1598) por Cristobal de Rojas. Assim, teremos uma experiência bem sucedida onde a história da matemática

é essencial para contextualizar um problema particular.
Palavras-chave: História da matemática, Inovação pedagógica

1. Introducción

Los beneficios de la historia de las matemáticas dentro de los currículos oficiales han sido ampliamente estudiados y no sólo por la relación intrínseca de la historia con la propia asignatura (Siu y Tzanakis, 2004) sino porque aporta, como mínimo, tres mejoras muy considerables (Panasuk y Horton, 2012):

1. El contexto para poder comprender de modo adecuado la revolución de los conceptos matemáticos. Como pasa con cualquier otra ciencia, los temas que llenan los libros de texto actuales no surgieron de la nada sino que detrás hubieron grandes mentes que propusieron soluciones a problemas concretos. Los logaritmos, por ejemplo, fueron el resultado de las pocas ganas que tenía el gran terrateniente escocés John Napier (1550–1617) de hacer "tediosos cálculos" (Dorce, 2014) y ahí apareció la idea de obtener una herramienta que permitiera convertir los productos en sumas y las divisiones en restas (a través de las conocidas fórmulas $\log xy = \log x + \log y$ y $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$). Pongamos un ejemplo más. La tradición antigua asigna la invención de la geometría al reparto de tierras ordenado por el faraón Ramsés II (s. XIII a.C.) entre sus ciudadanos. Cada egipcio recibió una parcela rectangular de terreno por la cual tenía que pagar impuestos. Tras la crecida del Nilo, todas las parcelas cercanas a la orilla del río quedaban parcialmente inundadas y, evidentemente, los contribuyentes pidieron que se tuvieran en cuenta las áreas secas de sus rectángulos a la hora de cobrar dichos impuestos (Heath, 1981, p. 121). Con todo, cada problema es un mundo y cada situación puede despertar la curiosidad por la resolución de una cuestión que, en algún momento de la historia, pareció imposible de resolver.
2. Esta búsqueda de soluciones adecuadas aporta al estudiante una percepción muy interesante de cómo la humanidad se ha desarrollado intelectualmente. Durante muchos años, por ejemplo, las reglas de falsa posición fueron el único método razonable que tenía un mercader o un comerciante para poder resolver una ecuación de primer grado. En el antiguo Egipto, por ejemplo, para calcular la cantidad que sumada a su mitad es igual a 16, un escriba suponía que dicha cantidad era 2 que, sumado a su mitad daba un resultado de 3. Evidentemente, como el resultado tenía que ser 16, todo debía ser $\frac{16}{3}$ veces mayor y, consecuentemente, la cantidad buscada es $\frac{16}{3}\cdot 2 = \frac{32}{3}$. Con la llegada del álgebra árabe y, sobre todo, con la aparición del álgebra simbólica, la

transposición de términos entre ambos miembros de la ecuación se hizo popular y dichas reglas dejaron paso a los actuales libros de texto.

3. El aumento de la motivación y del interés del alumnado hacia esta asignatura. La historia de las matemáticas está llena de anécdotas y datos que permiten que la clase sea un espacio donde los alumnos tengan la necesidad de seguir aprendiendo relaciones, fórmulas y propiedades que en ningún caso se había planteado con anterioridad. Un ejemplo de ello son los cálculos con números decimales que se hicieron en un grupo de alumnos de 2º de Enseñanza Secundaria Obligatoria de un instituto catalán (edades de 13 y 14 años) a partir de las propiedades del número 1.089 (Dorce, 2013). La experiencia consistió en proponer que cada alumno se pensase mentalmente un número de una cifra con dos decimales (por ejemplo, el 6,31). Después, debían darle la vuelta (1,36) y restar ambos números (6,31 – 1,36 = 4,95). Una vez más, los alumnos debían girar el resultado (5,94) y sumar ambos números (5,94 + 4,95 = 10,89), obteniendo 10,89. En general, partiendo de un número no-capicúa, el resultado siempre es 10,89 y esa fue una excusa para deducir casos particulares e introducir el lenguaje algebraico. El problema inicial fue popularizado por Lewis Carrol (1832–1898) tras plantearlo como un problema de monedas distintas, aunque la referencia más antigua que he encontrado se remonta a la revista londinense *Educational Times*, fundada en 1847, dedicada a la educación, la ciencia y la literatura.

En este sentido, la historia de las matemáticas permite romper con la visión parcial de la materia que tienen los alumnos (Guevara Casanova y Massa Esteve, 2009). A veces, los contextos históricos no tienen un momento específico y único dentro de las unidades didácticas sino que pueden servir para introducir un determinado tema situándolo en el tiempo, o bien para terminar el tema y poder dar así una visión más amplia del mismo.

En el ámbito de la historia de la geometría, las experiencias realizadas hasta el momento pueden considerarse de satisfactorias. Un ejemplo son las clases de geometría basadas en compases móviles (Maschietto y Bartolini Bussi, 2011). Las mismas autoras (2006) defienden que estas "máquinas matemáticas" son parte de la fenomenología histórica de la geometría ya que la regla y el compás están en la base misma de la geometría elemental, y los instrumentos para trazar curvas fueron muy usados por personajes de la talla de René Descartes (1596–16650), Frans Van Schooten (1615–1660) e Isaac Newton (1643–1727) en su camino por desarrollar la geometría algebraica. Otro ejemplo algo distinto es la construcción geométrica de la ecuación cuadrática. Radford y Guérette (2000) plantean que los alumnos resuelvan dicha ecuación tal y como se hizo en la antigua Mesopotamia alrededor del siglo XX a.C. Partiendo de $x^2 + x = \frac{3}{4}$ y de los pasos descritos por el escriba de la tablilla BM 13901 para resolverla, el procedimiento lleva directamente al razonamiento geométrico mesopotámico descrito por Høyrup (1990). La clase se organiza en grupos cooperativos y se plantean encontrar las dimensiones de un rectángulo cuyo semiperímetro es igual a 20 unidades y cuya área es igual a 96 unidades cuadradas, es decir, resolver $x^2 - 20x + 96 = 0$. En la experiencia se impuso el método de ensayo-error y el profesor siguió la secuencia didáctica con una presentación de la geometría mesopotámica, la discusión de las soluciones y la introducción del álgebra simbólica. Siguiendo esta idea, Guevara y Massa (2009) propusieron también la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas a partir del *Hisâb fî al-jabr wa'l-muqqabala* de Muhammad ibn Mûsâ al-Jwârizmî (s.IX).

En nuestro caso, la propuesta se va a centrar en la lectura del primer tratado de fortificación que se imprimió en castellano en el siglo XVI y que incluye grandes dosis de aritmética y de geometría. Su autor, Cristóbal de Rojas, lo pensó para ser un libro útil y didáctico para cualquier ingeniero, con lo que todas sus explicaciones se fundamentan en su propia experiencia y conocimientos. Como es habitual en este tipo de obras, la geometría es uno de los pilares sobre los que se apoya toda la teoría de la fortificación, de modo que los *Elementos* de Euclides pasan a jugar un papel determinante. En 1576, Rodrigo de Zamorano (h.1542–1623), Catedrático de Cosmografía en la Casa de Contratación de Sevilla, había publicado en España los *Seis libros primeros de la Geometria de Euclides* con lo que la geometría euclídea pasaba a estar a disposición de la lengua castellana. Veinte años más tarde, Rojas dio un paso más al elaborar un manual práctico de uso de dicha geometría y, con ello, abrió la puerta a la docencia de las técnicas habituales de medición en cualquier ejército del siglo XVI.

2. El autor: Cristóbal de Rojas

No se conoce la fecha de nacimiento exacta de Cristóbal de Rojas (Mariátegui, 1880) aunque el retrato suyo realizado en 1597 (fig. 1) que acompaña su *Teorica y practica de fortificacion* contiene una nota donde se lee que el autor tenía 42 años. Por lo tanto, se acepta que Rojas nació en la ciudad de Toledo alrededor del año 1555.

Figura 1

Rojas inició sus estudios en la Real y Pontificia Universidad de Santa Catalina de Toledo y allí entró en contacto con los *Elementos* de Euclides como discípulo de Alonso Cedillo[1]. Sus primeros trabajos de arquitectura fueron como colaborador de Juan de Herrera (1530–1597) en las obras del monasterio de San Lorenzo de El Escorial. Una vez finalizadas en 1584, se dirigió a Andalucía donde participó en diversas obras de las que no conservamos ninguna noticia. Precisamente, su primer proyecto conocido se encuentra recogido en el capítulo VII de su *Teorica y practica de fortificacion*:

> Por yr picando en muchas cossas, sere siempre ellas breue, aunque todas las que he tratado, y tratarè en este libro, las tengo experimentadas, y principalmente èsta de atajar vn rio para vn molino, porque en el Andaluzia, en vn rio que llaman Guadajoz, estaua vn molino desbaratado, mas auia de 30 años, y para reedificarlo, hizo su dueño muchas vezes juntas de Ingenieros [...] Y viendo y considerando yo todas las traças, que auian dado aquellos maestros, y junto con esto discurriendo largo sobre ello, me resolui y dispuse, aplicando à proposito la materia para tal fundamento, sobre el qual hize la traça y fabrica siguiente (Rojas, 1598, pp. 95-96).

A partir de esta obra que culminó con éxito, su nombre debió de tomar una cierta reputación como ingeniero y esto lo llevó a aceptar el cargo de Maestro Mayor de las Fábricas de Sevilla. Su nueva situación no evitó que tuviera discrepancias con las autoridades debido a sus distintas opiniones sobre las obras que se tenían que llevar a cabo y a los retrasos en el cobro de sus honorarios. Rojas solicitó la plaza de Ingeniero en Madrid en diversas ocasiones y aunque no le fue concedida hasta 1596, su buena predisposición provocó que fuera nombrado Maestro Mayor en Cádiz, donde habían quedado muchas obras inconclusas tras el fallecimiento de Giacomo Fratin, Capitán Ingeniero, en 1586. En esta etapa de su vida fue cuando conoció al italiano Tiburzio Spannocchi (1541–h.1606) quien influiría bastante en su vida. En Cádiz, Rojas levantó un plano completo de la bahía y diseñó su propio proyecto hasta que en 1591 tuvo que cumplir con diversas misiones militares en España y Europa. Tras volver a Madrid, empezó su labor docente en la Academia de Matemáticas de Madrid, iniciando así sus primeras ideas sobre la edición de un tratado en castellano sobre fortificación. Tras diversos trabajos en Cádiz, Gibraltar y Tarifa, Rojas obtuvo la licencia para imprimir su inédito tratado en 1598, aunque sus tareas como ingeniero siempre lo tuvieron muy ocupado. Entre los años 1600 y 1606 se dedicó a seguir trabajando en las fortificaciones de Cádiz hasta que estas quedaron definitivamente paralizadas. A partir de aquí, su situación económica empeoró de manera que empezó a aceptar obras civiles particulares para

[1] Alonso Cedillo ocupó la Cátedra de Matemáticas desde, como mínimo, el año 1576.

ganarse la vida e inició la redacción de un nuevo libro que vería la luz en 1613 con el título *Compendio y breve resolucion de fortificacion conforme a los tiempos presentes*. Rojas falleció el 12 de octubre del año siguiente tras enfermar durante los trabajos en la construcción de la fortaleza de Mámora.

3. La *Teorica y practica de fortificacion*

Como se ha dicho, la *Teorica y practica de fortificacion* fue el resultado de la experiencia docente que tuvo Rojas en la Academia de Matemáticas. La obra, terminada en 1596, tiene un carácter marcadamente práctico, hecho que provocó que tuviera mucho éxito tanto en España como en Portugal a lo largo de los siglos XVI y XVII.

El tratado está dividido en tres partes precedidas de un prólogo introductorio donde Rojas explica que lo escribió a instancias del Conde de Puñonrostro y reconoce que le pidió consejo a Juan de Herrera. De influencias claramente italianas, el texto se enmarca en la serie de obras de ingeniería militar en las que las matemáticas y, sobre todo, la geometría se convierten en el eje transversal de las mismas. De hecho, la primera parte se inicia con una sección con "las reglas de Aritmética necesarias al Ingeniero" (Rojas, 1598, p. 2), es decir, la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales y "quebrados", la regla de tres con y sin tiempo, la regla de compañías, las reglas de falsa posición, y la extracción de las raíces cuadrada y cúbica. También se recogen las "demostraciones forzosas de Euclides para el Ingeniero" que incluyen las definiciones de punto, línea, superficie, ángulo, triángulo, cuadrilátero, polígono y, en todos los casos, sus distintos tipos y clasificaciones. Se demuestran las proposiciones 1 (construcción del triángulo equilátero a partir de uno de sus lados), 3 (restar segmentos), 9 (construcción de la bisectriz de un ángulo), 10 (construcción de la mediatriz de un segmento), 12 (trazo de la perpendicular a una recta desde un punto exterior), 13 (la suma de dos ángulos suplementarios es igual a dos ángulos rectos), 21 (desigualdades entre ciertos ángulos), 23 (construcción de un ángulo igual a otro dado), 31 (trazo de una recta paralela a otra recta dada), 32 (la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos), 46 (construcción de un cuadrado a partir de uno de sus lados) y 47 (teorema de Pitágoras) del libro I de los *Elementos*, la 3 (el equivalente geométrico a la igualdad ($(a+b)a = ab + a^2$) y 12 (teorema del coseno) del libro II, la 31 (el triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo) y 36 (construcción de la recta tangente a una circunferencia desde un punto exterior) del III, la 5 (trazo de la circunferencia circunscrita a un triángulo), 10 (construcción del triángulo isósceles de ángulos 72º, 72º y 36º), 11 (construcción del pentágono regular inscrito en una circunferencia) del IV, la 16 ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$) del V, la 4 (teorema de Tales), 13 (teorema de la altura), 17 ($\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = ac$), 25 (construcción de figuras semejantes con una razón dada) y 30 (construcción de líneas continuas proporcionales) y la 33 (los planos paralelos comparten perpendiculares comunes) del XI. Esta primera parte sigue con un capítulo que concreta las citadas reglas de la Aritmética, y otro sobre los principios y reglas de la fortificación, donde se explica cómo construir los ángulos exteriores de todos los polígonos regulares de diez o menos caras. A partir de aquí, Rojas inicia una serie de ejemplos de aplicación directa de la geometría a la construcción de plazas triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales y heptagonales a partir de la división de un ángulo recto en tantas partes como ángulos tienen dichos polígonos. Vale la pena señalar que antes del trazo de los baluartes de la plaza pentagonal, Rojas explica la construcción geométrica del pentágono regular (fig. 2) que, traducida al castellano actual es:

> Sea el círculo dado *AFD* y sea su centro el punto *B*. Dice esta regla que se divida el semidiámetro *AB* en dos partes iguales en el punto C y puesta la punta del compás en el mismo punto *C* con el intervalo o distancia *CD* se señalará el punto *E*, de suerte que estén distantes por partes iguales la *E* y la *D* del punto *C* y luego pasar la punta del compás al punto *E* y abrirle justamente hasta el punto *D* como muestran los puntillos *ED* y aquel es un lado justamente del pentágono de este círculo que vamos trazando (Rojas, 1598, p. 21).

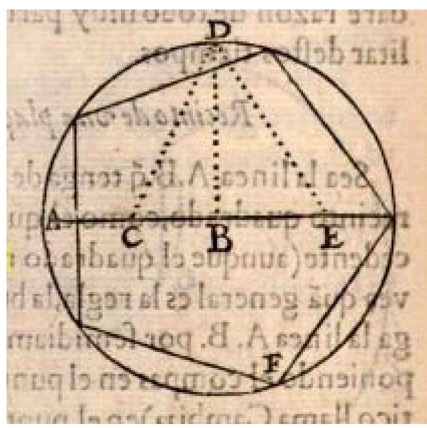

Figura 2

Si $r = AB = BD = 1$ es el radio de la circunferencia (con *AB* y *BD* perpendiculares), por construcción se tiene que $AC = CB = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras el segmento *CD* medirá $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Es evidente, pues, que $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y que *BE* es igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Una vez más, por el teorema de Pitágoras, $DE = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, medida que coincide con la longitud del lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia. En efecto, como $\cos\angle ECD = \cos 72º = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos 72º =$$
$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = 2 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \tfrac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Además, a partir de la misma figura (fig. 2), *BD* se corresponde con el lado del hexágono regular y *BE* con el del decágono regular (por la proposición 10 del libro XIII de los *Elementos*, que afirma que los lados del pentágono, hexágono y decágono inscritos en una misma circunferencia forman un triángulo rectángulo).

Con el cálculo de la suma de los ángulos de un polígono y la construcción de polígonos semejantes a escala finaliza esta primera parte que da paso a la segunda que es una recopilación de todas aquellas materias que Rojas cree que son imprescindibles para ser un buen ingeniero. Reconoce sus 25 años de experiencia en este campo y cita a Galasso Alghisi (1523–1573), Gabriello Busca (h.1540–1605), Girolamo Maggi (h.1523–1572), Jacopo Castriotto (1501–1563) y Giacomo Lanteri (h.1500–1560), todos ellos autores de tratados de fortificación en la segunda mitad del siglo XVI, y también a "los más modernos y que más a propósito parece haber escrito" (Rojas, 1598, p. 31) que son Carlo Tetti y Girolamo Cattaneo (1540–1584). Con este primer discurso, Rojas demuestra estar al corriente de las obras más relevantes de ingeniería militar de su época y discute las medidas de las distintas plazas determinando cuales son más seguras. Con todo, en el capítulo V plantea el diseño y fortificación de "una plaza en triángulo y las demás hasta el heptágono" (Rojas, 1598, pp. 39-44), al que siguen una serie de capítulos dedicados a aspectos prácticos de su construcción, del mejor modo de ser defendidas y de cómo han de ser medidas, intercalando capítulos dedicados al cálculo de áreas de los triángulos, los cuadriláteros y el círculo, y a la transformación de unas figuras en otras. Tras una resolución del problema de la duplicación del cubo, donde cita a Niccolò Fontana, más conocido por el sobrenombre de Tartaglia (h.1499–1557), Rojas inicia su capítulo XXII "que enseña a medir distancias":

> Yo quiero medir desde el punto *A* hasta el punto *B* [Fig. 3], cuántos pasos, o varas, o pies hay. [Se pondrá] el cuadrante en el punto *B* y será de forma que el lado *CE* del dicho cuadrante mire al punto *A* y el lado *CD* mire hacia el arbolillo señalado con la *T*. Luego, se irá

> caminando hacia el arbolillo *T* por la línea, en ángulos rectos, y se volverá a plantar el cuadrante junto al dicho arbolillo *T* de tal forma que por el lado *CD* se vea el punto *B*, y por el lado *DE* se vea el punto *A*. Y estando así, se medirá la distancia que hay desde *B* hasta el punto *D* junto al arbolillo *T*, y aquella será la distancia que habrá des del punto *A* [...] (Rojas, 1598, p. 80).

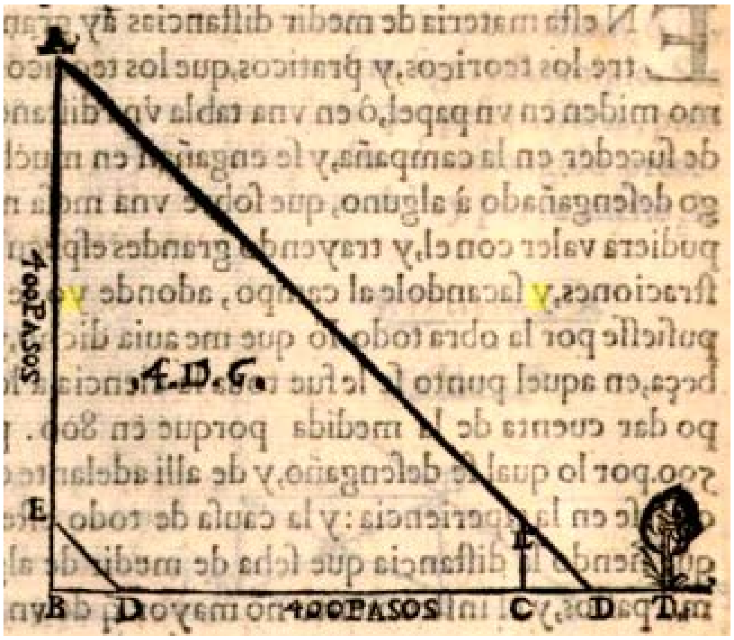

Figura 3

Rojas explica que con este método se puede medir cualquier distancia aunque, en el caso de que haya algún impedimento en el camino, también se puede utilizar el siguiente método:

> Sea el río *BA* [Fig. 4]. Digo que se haga un cuadrado en la tierra tan grande como se pudiere, pues cuanto mayor fuere, tanto será más cierta la medida, y se hará de tal forma este cuadrado que un lado suyo, que será *EC*, mire al punto *A* de la otra banda del río. Y supongo que este cuadrado tiene por cada lado 80 pies, como en esta figura aparece. Digo pues, que se plante el cuadrante, o instrumento, en el punto *D* y se mire al punto *A*, y se note por donde corta la línea al cuadrado que se hizo en la

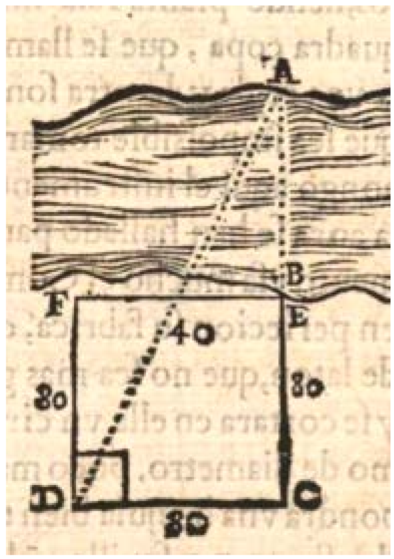

Figura 4

> tierra. Y supongo que cortó por la mitad del [lado], que fue a los 40 pies. Hecho esto se ordene una regla de tres diciendo: Si 40 vinieron de 80, los mismos 80, ¿de dónde vendrán? (Rojas, 1598, p. 81).

4. El trabajo cooperativo como valor añadido

Una vez planteado el marco teórico en el que se van a mover los estudiantes, vale la pena aprovechar los beneficios propios del trabajo cooperativo ya que va a lograr que los alumnos desarrollen habilidades personales relacionadas con el trabajo en equipo y el liderazgo, así como la reflexión conjunta de un conjunto de información que debe ser analizada y procesada para poder extraer conjeturas y razonamientos propios de las matemáticas.

Si bien el aprendizaje cooperativo no puede ser un recurso que sólo sea utilizado dentro de una unidad didáctica sin cambiar la estructura fundamental del aprendizaje (Pujolás, 2008), este tipo de actividades pueden fomentar otro tipo de visión dentro del alumnado. Esta nueva manera de ver las cosas puede ser fundamental para romper los esquemas tradicionales de las aulas ya que además de introducir esta nueva metodología, nos permite promover el desarrollo de las competencias básicas. En este sentido, la sensación que tiene el estudiante de que necesita ayuda al mismo tiempo que aporta sus conocimientos y razonamientos es equivalente al equilibrio entre iguales que cada grupo encuentra y con ello se potencia la participación de todos los alumnos, la regulación del propio aprendizaje y la necesidad del trabajo en equipo como punto de apoyo de su esquema cognitivo. Con unos objetivos de trabajo determinados por los propios interesados, sus resultados de aprendizaje son mucho más óptimos que los que se obtienen a través de las típicas clases magistrales.

Sin embargo, el trabajo en grupo de manera cooperativa no es fácil ya que no se trata simplemente de colocarlos sentados físicamente juntos, sino que se ha de crear el clima propicio para que todos trabajen de manera autónoma a la par que colaborativa. El planteamiento es, pues, el de estructurar el aula en grupos cooperativos que intenten dar respuesta a la pregunta: "¿Cuál es la longitud del patio del instituto?" A partir de una lluvia de ideas, cada grupo se dedica a teorizar sobre cómo se puede medir el patio de manera fiable tras lo cual, hay una puesta en común de todas las opciones pensadas. He aquí las opciones más razonables:

1. Medir el patio directamente. Para ello se necesita una cinta métrica suficientemente larga. Pregunta: ¿disponemos de dicha cinta métrica?
2. Si no disponemos de ella, podemos enlazar sucesivas mediciones con cintas métricas más cortas.
3. Usar la aplicación "Medir la distancia" de Google Maps (Fig. 5). La tecnología actual permite medir la longitud del patio sin necesidad de salir del aula. Es necesario aprovechar esta aplicación gratuita (o alguna similar de otra firma) y al mismo tiempo formularnos la pregunta de cómo lo haríamos si no tuviéramos ordenadores disponibles. Es decir, ¿cómo hubieran medido el patio en el siglo XVI?
4. Mirar las medidas que constan en los planos del edificio que se conservan en los despachos de la dirección del centro educativo.

Con una actividad como esta, los estudiantes deben argumentar sus puntos de vista y, en la puesta en común, deben defender sus posiciones o reconstruirlas a partir del intercambio y discusión de las ideas. Todos tienen su opinión y la diversidad del aula se ve perfectamente armonizada ya que se recogen los esfuerzos de todos en un mismo frente común. De esta manera se consigue un punto en el que toda la clase está deseosa de saber cuál es la verdadera longitud del patio y los alumnos se preguntan realmente qué hay que hacer para conseguirla. Por lo tanto, el camino que se va a iniciar en el aula va a estar formado por una secuencia de actividades que deben trasladar la geometría del libro de texto a la realidad y, posteriormente, a través de la *Teorica y practica de fortificacion*, trasladar la realidad a la geometría del libro de texto.

Esta retroalimentación permitirá contextualizar las matemáticas, ver su pasado y terminar concluyendo con un resultado explícito y práctico.

5. Propuesta de aula

La secuencia de actividades que aquí se va a plantear fue implementada en un grupo de estudiantes de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (edades de 15 y 16 años) en un instituto público de la periferia de Barcelona, en Cataluña, España. A través de seis actividades, temporizadas en cuatro sesiones de 60 minutos cada una, el alumnado trabajó diversos contenidos del currículo oficial catalán de este curso y que se adaptan perfectamente a las nuevas ordenaciones curriculares actuales (Decret 187/2015), que son:

Numeración y cálculo

- Números racionales e irracionales
    - Recursos digitales para la realización y comprobación de cálculos numéricos.
    - Cálculo mental: estimación y estrategias de cálculo.

Espacio y forma

- Trigonometría
    - Uso de programas de geometría dinámica.
    - Uso de la trigonometría para la resolución de problemas en contextos diversos.

Medida

- Medidas indirectas
    - Semejanza y trigonometría.
    - Unidades de medida.
    - Aproximación por exceso y por defecto.
    - Precisión, exactitud y error.
    - Resolución de problemas relativos a medidas indirectas.

Estadística y azar

- Estudios estadísticos
    - Diseño, muestras y aleatoriedad de las respuestas y experimentos.
- Herramientas de análisis de datos
    - Medidas de centralización y dispersión.
    - Hoja de cálculo y recursos digitales para la estadística.

Además, también se adapta a los criterios de evaluación propuestos:

Dimensión resolución de problemas

- Resolver problemas de la vida cotidiana, de otras materias y de las mismas matemáticas utilizando distintos tipos de números (racionales e irracionales), símbolos y métodos algebraicos (ecuaciones de 1º y 2º grado, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales) y evaluar los métodos de resolución posibles, como por ejemplo el ensayo-error o el cálculo mediante herramientas tecnológicas.

- Estimar, medir y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con la precisión adecuada a la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.
- Obtener medidas indirectas en la resolución de problemas de ámbitos diversos (por ejemplo, la agrimensura y la navegación), utilizando la trigonometría con los medios tecnológicos que actualmente se usan para realizar medidas indirectas.
- Elaborar estudios estadísticos e interpretar tablas y gráficos estadísticos así como los parámetros estadísticos más habituales [...].

Dimensión razonamiento y prueba

- Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, como la realización de conjeturas, su justificación y generalización, así como la comprobación, el tanteo y el contraste con diversas formas de razonamiento a lo largo de la historia de las matemáticas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros a través del trabajo por parejas o en grupo o la puesta en común con toda la clase.

Dimensión conexiones

- Usar relaciones entre diversas partes de las matemáticas (álgebra y geometría, números y geometría, números, estadística y geometría, números y azar) que favorecen el análisis de situaciones y el razonamiento.

Dimensión comunicación y representación

- Expresar verbalmente y por escrito, con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, simbólicos o gráficos, valorando la utilidad del lenguaje matemático y su evolución a lo largo de la historia.
- Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

Con todo, la secuencia didáctica es la siguiente.

5.1. Actividad 1

En esta primera sesión de una hora, se introduce la pregunta "¿Cuál es la longitud del patio del instituto?", se forman los grupos cooperativos y se inicia la lluvia de ideas y la puesta en común descritas en el punto 4. Sea como sea, el grupo entero debe organizar la tarea de medición del patio y se va a proponer como incentivo que la secuencia de actividades va a terminar en el patio realizando efectivamente la medición con los medios que se tienen a mano.

Figura 5

5.2. Actividad 2

Cada grupo va a disponer de un ordenador y su misión será la de calcular la longitud del patio, y también su perímetro y su área. A través del plano del instituto que se obtiene de Google Maps y la aplicación "Medida de distancias", cada grupo deberá seguir los siguientes pasos:

1. Buscad el plano del patio del instituto en Google Maps y rellenad la primera columna de la tabla con la aplicación "Medida de distancias" que se obtiene al pulsar el botón derecho del ratón:

	Medida Google Maps	Medida calculada a mano
Longitud		
Perímetro		
Área		

Tabla 1

2. Bosquejad en vuestro cuaderno de notas la forma del patio del instituto y con las medidas obtenidas en la tabla anterior, comprobad que vuestros resultados coinciden, con un cierto margen de error, con el área calculada por Google Maps.

3. Calculad el error absoluto y el error relativo cometido en vuestro cálculo del área comparado con el resultado de Google Maps.
4. Compartid vuestros tres resultados con el resto de grupos y calculad la media aritmética y la desviación típica de los mismos. ¿Podemos llegar a una conclusión final?

Con estas cuatro preguntas se trabajan tres aspectos del currículo. En primer lugar, como se ve en la Fig. 6, la forma del patio es irregular y en la pregunta 2 cada grupo tendrá que desarrollar al máximo su capacidad de abstracción para poder calcular las medidas que se piden. Según Google Maps, el perímetro del patio es de aproximadamente 400,5 metros (1.314 pies) y su área es igual a 5.888,3 m^2 (63.381,09 ft^2).

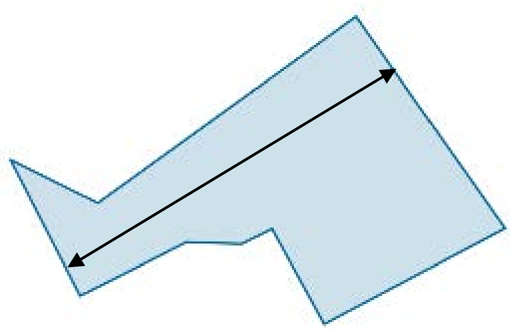

Figura 6

.

En la pregunta 3 se pide comprobar la exactitud de los cálculos realizados comparándolos con los resultados obtenidos mediante la aplicación informática. El cálculo del área de la figura a partir de descomposiciones en polígonos más simples y regulares obliga a tener un cierto grado de precisión para poder corroborar que el resultado obtenido por el grupo es suficientemente correcto. Por lo tanto, se puede abrir aquí un debate sobre qué porcentaje de error relativo es aceptable y a partir de qué valor no lo es.

Finalmente, con la pregunta 4 se pretende repasar dos de los conceptos básicos de la estadística para terminar concluyendo una medida más o menos estandarizada del patio.

5.3. Actividad 3

La clase se realiza directamente en el patio del instituto y cada grupo dispondrá de sus respectivos cuadernos de notas, una calculadora, un transportador de ángulos y una cuerda de longitud igual a 10 m. Su objetivo será el de medir efectivamente la longitud del patio.

Si bien se intuye una cierta desesperanza en algunos de los grupos, al final todos ellos colaboran con sus respectivas cuerdas para organizarse y dar una única medida común. Es previsible que la idea salga de los mismos grupos y que los propios alumnos hagan de picas de referencia con lo que, una vez más, el trabajo colaborativo da sus frutos con esta ayuda mutua entre todos los miembros del aula. Un incentivo que ayuda a esta agrupación es que el alumnado sabe previamente el resultado obtenido por el medidor de Google Maps (112,78 m en este caso) con lo que en seguida se dan cuenta de su necesidad de cooperar.

5.4. Actividad 4

Para esta actividad, es necesario que el docente presente adecuadamente el uso de la historia de las matemáticas en el aula y, en particular, la de la *Teorica y practica de fortificacion*. Cada grupo va a disponer del texto correspondiente al capítulo XXII del tratado y un guión basado en las siguientes preguntas:

1. Buscad en internet información sobre la figura de Cristóbal de Rojas, su época y el estado de las matemáticas a finales del siglo XVI.
2. Leed el capítulo XXII de la *Teorica y practica de fortificacion*. Bosquejad en vuestro cuaderno de notas la figura del patio del instituto y cómo podéis medirlo con tan solo una cuerda de 10 metros de longitud.

Como antes, la actividad se cierra con una puesta en común de los razonamientos de cada uno de los grupos y un debate sobre su idoneidad efectiva. Además, el profesor ha de plantear también la variante de la Fig. 8.

5.5. Actividad 5

Esta es la actividad clave de toda esta secuencia didáctica. Organizados en grupos, los alumnos han utilizado las TIC para calcular la longitud, el perímetro y el área del patio de su instituto, han calculado explícitamente dicha área, errores absolutos y relativos y también han trabajado la estadística. Se han enfrentado también a la resolución contextualizada de un problema y han terminado encontrando en un libro del siglo XVI, el cual han tenido que situar en el espacio y en el tiempo, la solución al cálculo real de una medida de longitud horizontal. Además, han aprendido cómo estaban las matemáticas en el siglo XVI y con una buena guía propuesta por el profesor, han obtenido nociones sobre los renacentistas italianos Girolamo Cardano (1501–1576) y Niccolò Fontana, el francés François Viète (1540–1603) y, en otro ámbito, los españoles Juan de Ortega (h.1480–1568) y Juan de Herrera (aunque estos nombres podrían considerarse del todo imprescindibles, siempre se pueden obtener otras historias matemáticas de mucha utilidad).

Ahora llega el momento de utilizar las matemáticas sobre el terreno. La clase se desarrolla en el patio y con el texto de Rojas cada grupo ha de calcular la longitud del patio. Con la cuerda suministrada, cada grupo formará un cuadrado de lado igual a 10 m a partir del cual se representarán las figuras 7 i 8 y se medirán las longitudes *x* e *y*, respectivamente (Figs. 9 y 10). Para medir la distancia *AB*, lo único que hay que hacer es determinar el punto *K* (Fig. 7) en el que corta la visual *AD* al lado *BF*. Entonces, aplicando el teorema de Tales se tiene que:

$$\frac{FK}{DF}=\frac{BK}{AB}\Rightarrow AB=\frac{DF\cdot BK}{FK}=\frac{l\,x}{l-x},$$

donde *l* es el lado del cuadrado y $x=BK$.

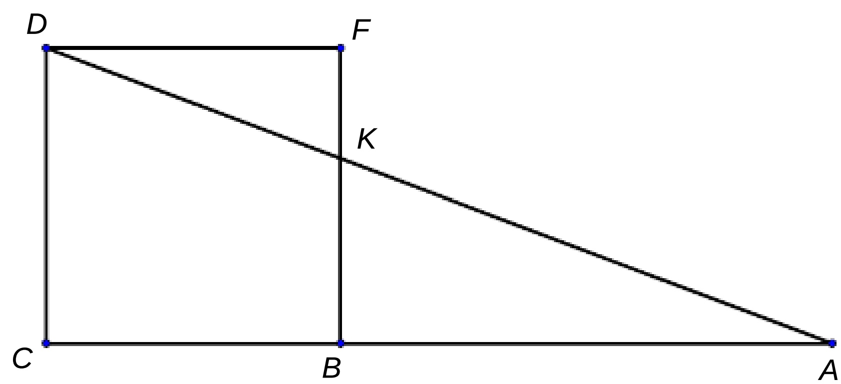

Figura 7

Una variante de esta medición (no contenida en la obra) podría haber sido buscar la visual *MFA* (Fig. 8) y medir directamente la distancia $y=DM$. En este caso, por el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{AB}{BF}=\frac{DF}{DM}\Rightarrow AB=\frac{BF\cdot DF}{DM}=\frac{l^2}{y}$$

Tras la explicación de ciertos instrumentos de medición y la construcción de relojes de sol, la tercera parte trata sobre los principios de la arquitectura y la fábrica de materiales, citando a personajes de la talla de Marco Vitruvio (s. I a.C.), Jacopo Vignola (1507–1573), Andrea Palladio (1508–1580) o Sebastiano Serlio (1475–h.1554).

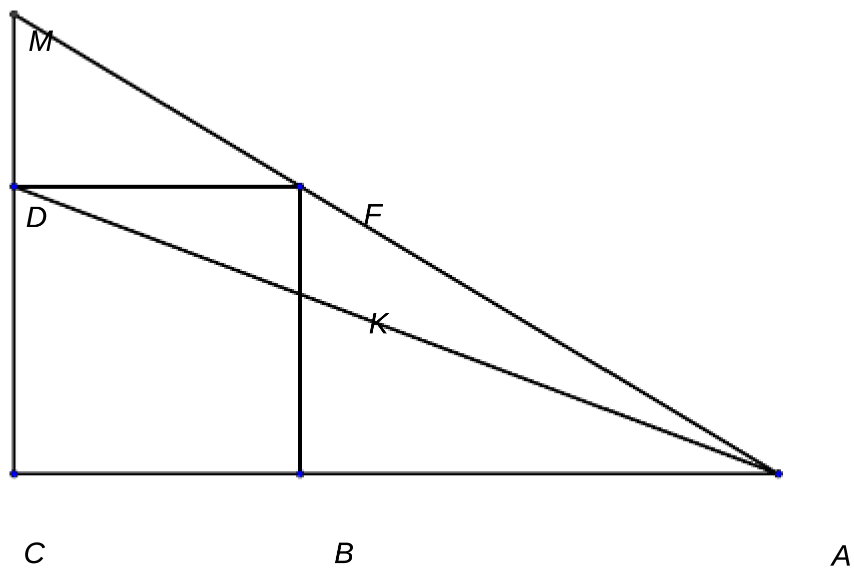

Figura 8

A la vista de los resultados, la mejor medida obtenida fue de $x = 9{,}12$ m e $y = 0{,}96$ m, con lo que se obtuvo una longitud del patio igual a 113,64 m y 114,17 m, respectivamente (112,78 m es la medida que se obtuvo de Google Maps en la línea transversal que se utilizó para determinar la longitud).

Una pregunta más que ha de ser añadida en el trabajo grupal es la determinar las correctas medidas de x e y que se deberían haber obtenido considerando que 112,78 m es la longitud exacta del patio, es decir, resolver las ecuaciones:

$$\frac{10x}{10-x} = 102{,}78 \Rightarrow 10x = 102{,}78(10-x) = 1027{,}8 - 102{,}78x \Rightarrow x = \frac{10{,}278}{112{,}78} \approx 9{,}11\text{m}$$

$$\frac{100}{y} = 102{,}78 \Rightarrow y = \frac{100}{102{,}78} \approx 0{,}97\text{ m}$$

Se cierra así esta secuencia didáctica, analizando las medidas tomadas con los resultados obtenidos y hasta qué punto se podrían haber mejorado.

Figura 9: trazado de las Figs. 7 y 8 con cuerdas

5.6. Actividad 6

Esta es la actividad final. Cada grupo tiene que presentar sus resultados y entre todos se deben sacar las conclusiones finales.

Para una correcta evaluación, cada alumno debe implementar su propia evaluación individual dentro del grupo que se ha de complementar con la observación permanente del docente y de su seguimiento tanto individual como colectivo del proceso de aprendizaje. Además, cada grupo tiene que presentar una memoria con sus reflexiones y cálculos. Por lo tanto, se pueden plantear distintos tipos de rúbricas evaluadoras que enfaticen algunos de los aspectos trabajados por encima de otros. En general, los resultados obtenidos son muy satisfactorios y el alumnado suele mostrar su interés por este tipo de actividades que combinan facetas diversas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por lo que respecta a la introducción lectura y análisis de un texto matemático del siglo XVI y la correspondiente introducción de la historia de las matemáticas en el aula, la reflexión global es igualmente satisfactoria y las rúbricas planteadas han de contener preguntas concretas sobre su implementación.

Figura 10: medición del segmento *x*

6. Reflexiones finales

En general, esta actividad permite la introducción de una pequeña dosis de historia de las matemáticas dentro del aula y lo hace para colaborar en la adquisición de las competencias matemáticas básicas del alumnado. Puede afirmarse que, en este caso, la historia de las matemáticas no ha sido introducida tan solo de modo anecdótico y divertido, sino que ha contribuido al diseño de una secuencia didáctica que ha permitido a los estudiantes poder desenvolverse adecuadamente por un problema geométrico. Siguiendo las competencias generales elegidas por el proyecto PISA (OECD, 2004, p. 40), se puede afirmar que esta secuencia de actividades cumple las expectativas de adquisición de las competencias básicas matemáticas (tabla 2).

	P	A	C	M	PR	R	LS	HR
Actividad 1	X	X	X		X			
Actividad 2	X	X	X	X	X	X	X	X
Actividad 3	X	X	X		X			X
Actividad 4	X	X		X	X	X	X	X
Actividad 5	X			X	X	X	X	X
Actividad 6	X	X	X					

Tabla 2: P: pensar; **A:** argumentar; **C:** comunicar; **M:** modelar; **PR:** plantear y resolver problemas; **R:** representar; **LS:** utilizar el lenguaje simbólico y técnico y las operaciones; **HR:** usar herramientas y recursos

De este modo, la interacción entre los propios alumnos así como todo el trabajo realizado contribuye a que el aula de matemáticas sea el espacio ideal para poder desarrollar el razonamiento lógico óptimamente.

Bibliografía

Bartolini Bussi, M. G. y Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche*. *Dalla storia alla scuola*. Springer-Verlag, Nueva York.

DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (DOGC, núm. 6945, 28.08.2015).

Dorce, C. (2013). "El joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebraic". Noubiaix, 33, 22-34.

Dorce, C. (2014). "Un paseo histórico por la invención de los logaritmos", Suma, 75, 33-42.

Guevara Casanova, I. y Massa Esteve, M. R. (2009). "La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària". *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Nova època, Vol. 2 (1), 377-388.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*. Volume I. Dover Publications, Inc, Nueva York.

Høyrup, J. (1990). "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17.1 (Jan 1, 1990): 27-69.

Mariátegui, E. (1880). *El capitán Cristóbal de Rojas. Ingeniero militar del siglo XVI. Apuntes históricos*. Imprenta del Memorial de Ingenieros, Madrid.

Maschietto, M. y Bartolini Bussi, M. G. (2011). "Mathematical Machines: From History to Mathematics Classroom", en O.Zaslavsky y P.Sullivan (eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics. Tasks to Enhace Prospective and Practicing Teacher Learning*. Springer, Nueva York, Dordrecht, Heidelberg, Londres.

OECD (2004), *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. OECD, París.

Panasuk, R. y Horton, L. (2012). "Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints. *International Electronic Journal on Mathematics Education*, 7 (1), 3-20.

Pijolàs, P. (2008). *Nueve ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Grao, Barcelona.

Radford, L. i Guérette, G. (2000), "Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach", en Katz, V. (ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. An International Perspective*, The Mathematical Asociation of America, Washington DC.

Rojas, C. (1598). *Teorica y practica de fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos*. Luis Sanchez, Madrid.

Siu, M.-K. (2004). "History of mathematics in classroom teaching - appetizer? Main course? Or dessert?" *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3 (1-2), V-X.

Nombre: **Carlos Dorce Polo**
Correo: cdorce@ub.edu
Profesor asociado de Historia de las Matemáticas en la facultad de Matemáticas e Informática de la Universitat de Barcelona (desde 2006)
Profesor de enseñanza secundaria y bachillerato en el INS Barres i Ones de Badalona, Cataluña, España (desde 1998).