UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Página 223-231

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES, EN CONTEXTO COTIDIANO Y CON PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

En un mercado se vende arroz y azúcar "al menudeo" a 3 soles y 2,40 soles el kilo, respectivamente. También, como oferta especial, se vende paquetes por 10 soles, que tienen 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar.

Sea f la función que expresa el pago de f (x; y) soles por la compra de x kg de arroz, y kg de azúcar, usando la oferta siempre que sea posible y asumiendo que las variables x, y pueden tomar todos los números reales no negativos.

a) *Exprese algebraicamente f considerando los posibles pagos de un comprador que a lo más comprará 8 kg de arroz y 5 kg de azúcar*

b) *¿f es continua en (3; 2)? ¿Por qué?*

Este problema es una versión simplificada de un problema creado al estar impartiendo un curso de funciones reales de varias variables reales en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP y plantearme la pregunta sobre la existencia de funciones discontinuas, de dos variables, en contextos cotidianos. Como me hice pregunta similar al impartir el curso de funciones reales de una variable real y así surgió el problema tratado en el número anterior de *UNIÓN*, pensé que lo natural sería hacer una variación adecuada a tal problema.

Recordará el lector que teníamos la situación dada por una oferta de venta de arroz según la cual, siendo 3 soles el precio del kilo de arroz en la venta "al menudeo", se vendían paquetes de 6 kg de arroz por 15 soles. Se pedía entonces, usar la situación para ilustrar casos de continuidad y de discontinuidad de una función en el intervalo [0; 17]. Una primera reacción mayoritaria ante este requerimiento, evidenciada por alumnos de pregrado y de posgrado, fue encontrar explícitamente la función que exprese algebraicamente el pago correspondiente a la compra de x kilos de arroz, usando la oferta siempre que sea posible. Con tal expresión algebraica se evidencia, tanto analítica como gráficamente, la discontinuidad de la función en los puntos $x = 6$ y $x = 12$ del intervalo [0; 17].

Al hacerme la pregunta *¿Cómo plantear una situación similar, considerando dos variables?* me vino la idea de considerar ahora dos productos, con sus precios respectivos por kilo para compras "al menudeo" y una oferta especial de un paquete que contenga algunos kilos de ambos productos. Así surgen la situación y los problemas propuestos en el presente artículo.

Para facilitar la comprensión del problema y el involucramiento de los estudiantes en su solución, propuse algunas cuestiones previas a los ítems (a) y (b).

i) *¿Para qué valores de x , y el comprador NO puede usar la oferta?*
ii) *¿Para qué valores de x , y el comprador puede usar la oferta solamente una vez?*
iii) *¿Para qué valores de x , y el comprador puede usar la oferta a lo más dos veces?*

Estos son también ejemplos de "*problemas pre*", creados a partir de la situación descrita.

Ciertamente, es muy interesante examinar las soluciones de los estudiantes a la luz de un marco teórico, como el enfoque ontosemiótico (EOS), pero ese no es el objetivo de este artículo, sino mostrar algunas soluciones y el potencial que tienen estos problemas, para estudiar aspectos didácticos relacionados con regiones en el plano; con la definición de una función de dos variables que tiene expresiones distintas en regiones disjuntas de su dominio; y con aspectos que tienen que ver con las estructuras algebraica y topológica del plano. Todo a partir de un contexto extramatemático cotidiano.

- Sobre el ítem *i)*.

A continuación muestro la respuesta del alumno A10

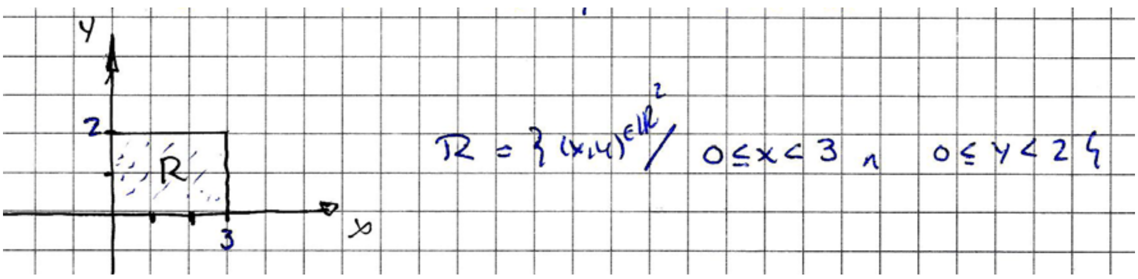

Figura 1

Se puede observar que el estudiante tiene idea del conjunto que se pide, sin embargo, las siguientes son algunas observaciones a su respuesta:

- El conjunto mostrado en el registro gráfico no corresponde al conjunto mostrado en el registro simbólico, pues en el primero se incluyen los segmentos vertical y horizontal que parten de (3; 0) y (0; 2) respectivamente y en el segundo no. Así, el conjunto mostrado en el registro gráfico representa un conjunto cerrado en el plano (contiene a su frontera), mientras que en el registro simbólico el conjunto no es cerrado.

- Una consecuencia de lo anterior es que en el registro gráfico se incluye el punto (3; 2) y en el registro simbólico no. Esto es particularmente importante, pues incluir este punto significa tener valores de x y de y para los cuales sí se puede usar la oferta. Precisamente, al comprar 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar, se compraría el paquete por 10 soles y no se pagaría 13,80 soles que resultaría de pagar 3 soles por cada kilo de arroz y 2,40 soles por cada kilo de azúcar.
- El estudiante no considera – en ninguno de los registros – los infinitos pares ordenados con valores de x y de y que están fuera de su rectángulo, para los cuales tampoco se puede hacer uso de la oferta; por ejemplo, el par (5; 1), pues al comprar 5 kilos de arroz y 1 kilo de azúcar no se puede hacer uso de la oferta; tampoco al comprar 2 kilos de arroz y 7 kilos de azúcar; y tampoco al comprar 2,9 kilos de arroz y 4 kilos de azúcar, pues en ninguno de los casos se puede incluir en la compra un paquete de 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar. Todos estos casos constituyen pares ordenados, que gráficamente son “fajas de longitud infinita”, una horizontal y otra vertical, como se muestra, a continuación (Figura 2) en la solución del alumno A3

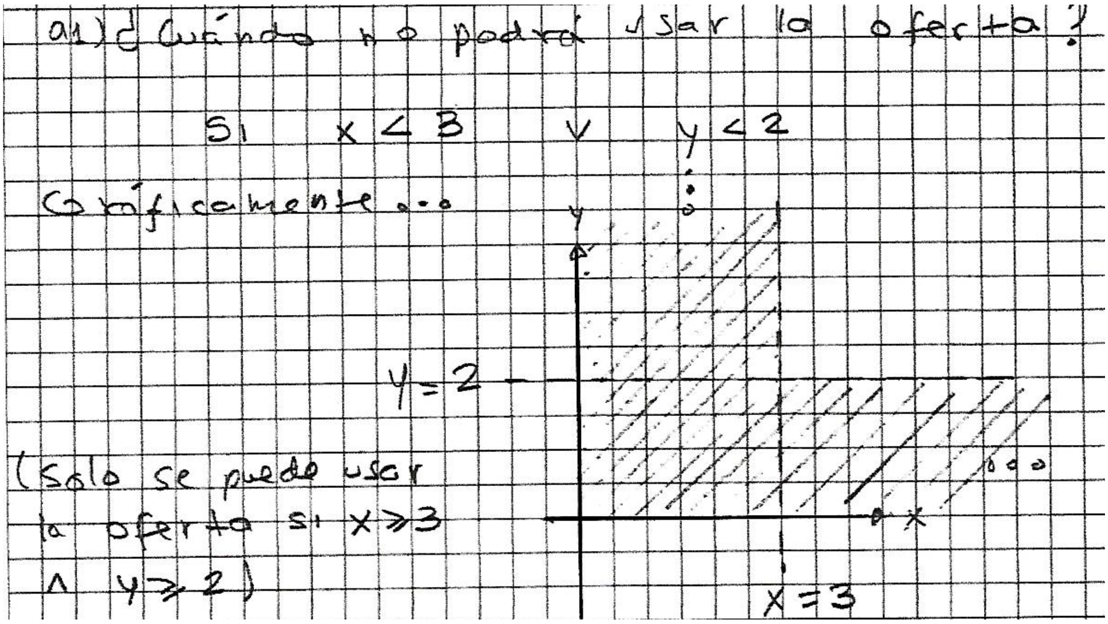

Figura 2

Evidentemente A3 está dando por obvio que las variables son no negativas, aunque lo correcto es explicitar esta restricción.

Lo original de esta solución es que llega a una representación correcta haciendo uso de una ley importante de la lógica simbólica (ver en la Figura 2 el segundo renglón y el paréntesis en la esquina inferior izquierda). El alumno usa la negación de una conjunción:

$$\sim(x \geq 3 \ \wedge y \geq 2) \ \equiv \sim (x \geq 3) \ \vee \sim (y \geq 2)$$
$$\equiv x < 3 \ \vee \ y < 2$$

Luego hace la representación gráfica en el primer cuadrante, asumiendo – como ya lo hicimos notar – la innegatividad de las variables.

Aludiendo a la forma de L del conjunto y a que para compras expresadas con pares ordenados $(x;\, y)$ en tal conjunto hay 0 posibilidades de hacer uso de la oferta, en este artículo llamaremos L_0 a tal conjunto. Aunque A3 no lo explicita simbólicamente, lo que muestra (Figura 2) es el conjunto:

$$L_0 = ([0;3[\ \times R)\ \cup (R \times [0;2[)$$

que es una manera simbólica y resumida de expresar el conjunto de pares ordenados $(x;\, y)$ de compras de x kg de arroz y de y kg de azúcar, en cada uno de los cuales no es posible usar la oferta, respondiendo así a la pregunta formulada en *i)*.

Podemos observar que si al conjunto dado por A10 en su registro gráfico le quitamos el punto (3; 2), tal conjunto está incluido en el conjunto dado por A3.

- En cuanto al ítem *ii)*

Observemos que, por ejemplo, si se compra 4 kg de arroz y 2,8 kg de azúcar, es posible usar una sola vez la oferta, pues se comprará el paquete de 3 kg de arroz con 2 kg de azúcar pagando 10 soles por él y el resto pagando los precios de venta “al menudeo”. Es decir, como

$$(4;\, 2{,}8) = (3;\, 2) + (1;\, 0{,}8),$$

es posible usar la oferta una sola vez. Situación similar ocurre, por ejemplo, con (7; 3) y con (5; 4,5), pero no con (7; 5), pues

$$(7;\, 5) = (3;\, 2) + (3;\, 2) + (1;\, 1)$$

y vemos que es posible usar la oferta dos veces.

Muestro en la Figura 3 la solución del alumno A3:

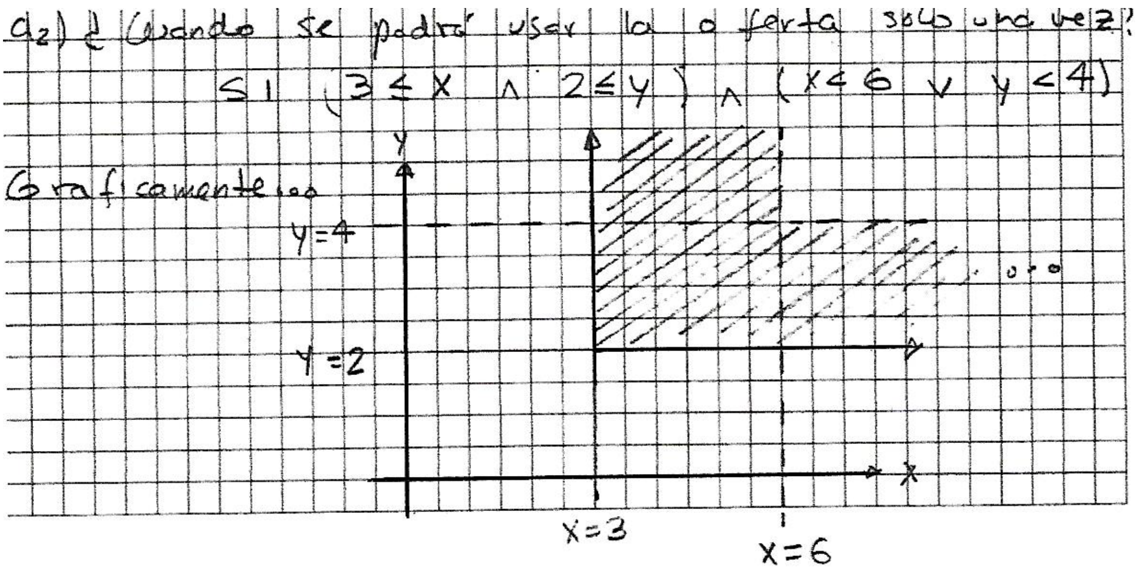

Figura 3

De manera similar a lo convenido al comentar la solución del ítem *i)*, a este conjunto llamamos L_1 y tenemos:

$$L_1 = ([3;6[\times[2;+\infty[) \cup ([3;+\infty[\times[2;4[)$$

- En relación al ítem *iii)*.

Muestro en la Figura 4 la solución del alumno A3:

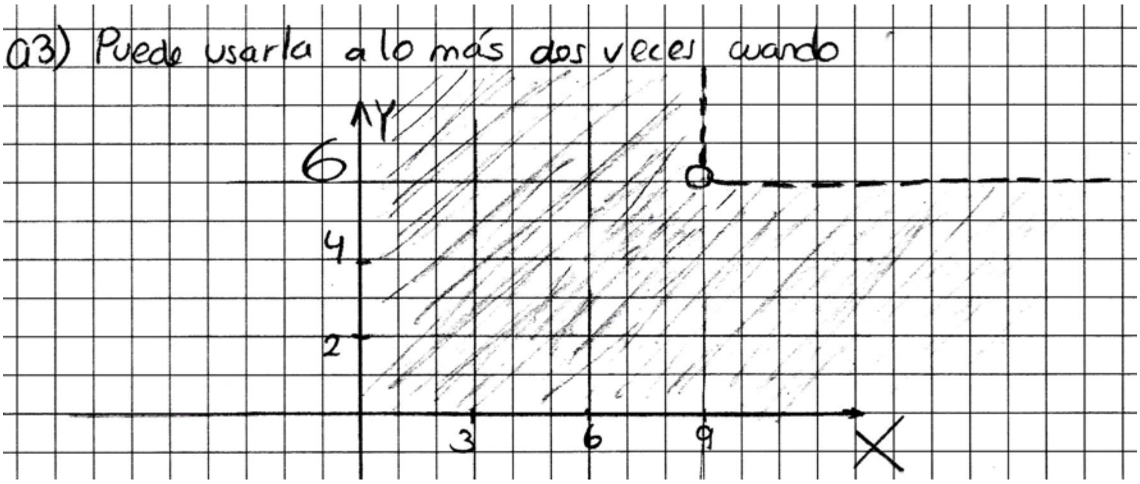

Figura 4

El conjunto mostrado corresponde a lo pedido y para relacionarlo con los conjuntos anteriores, notamos que si el requerimiento hubiera sido similar al requerimiento de *ii)*; es decir, determinar el conjunto de pares ordenados $(x;\ y)$ para los cuales la oferta se puede usar "*solamente*" [1] dos veces, tal conjunto, sería el denotado por L_2, similar a los casos anteriores; o sea:

$$L_2 = ([6;9[\times[4;+\infty[) \cup ([6;+\infty[\times[4;6[)$$

Pero el requerimiento en este caso es determinar el conjunto de pares ordenados $(x;\ y)$ para los cuales la oferta se puede usar *a lo más* dos veces, lo cual incluye la posibilidad que no se pueda usar, que se use una sola vez o que se use dos veces; en consecuencia, tal conjunto lo podemos denotar por $L_{0,1,2}$ y advertimos que

$$L_{0,1,2} = L_0 \cup L_1 \cup L_2$$

Además, la intersección de cualquier par de los conjuntos L_i descritos es vacía; es decir,

$$L_0 \cap L_1 = L_1 \cap L_2 = L_0 \cap L_2 = \emptyset$$

- Veamos ahora el ítem (a) del problema propuesto.

Debemos encontrar la función f de dos variables, tal que $f\ (x;\ y)$ exprese la cantidad que pagaría un comprador de x kilos de arroz y de y kilos de azúcar, a los precios dados y usando la oferta de los paquetes, siempre que sea posible.

[1] Las comillas a la palabra solamente, son porque debe tomarse en el sentido de poder usar la oferta dos veces, pero no tres o más; sin embargo, el solamente no puede excluir que la oferta se use una vez, pues - obviamente - si se usa dos veces, se está usando también una vez. La idea es no usar la oferta solamente una vez, para no incluir los casos ya considerados en L_1.

Tengamos en cuenta que según la información dada en el problema, el comprador a lo más puede comprar 8 kilos de arroz y 5 kilos de azúcar; es decir,

$$0 \leq x \leq 8 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 5.$$

Esto es equivalente a decir que $x \in [0; 8]$; $y \in [0; 5]$.

Así tenemos *el conjunto factible* del comprador, al que podemos denotar *A* y expresarlo como un producto cartesiano de los intervalos en los que toman valores las variables x, y.

$$A = [0; 8] \times [0; 5]$$

Este conjunto, en el registro gráfico, es el rectángulo que se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Es ilustrativo hacer cálculos con algunas cantidades específicas:

$x = 4$; $y = 1$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f(4; 1) = 3x4 + 2{,}40x1 = 14{,}40$

$x = 2$; $y = 5$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f(2; 5) = 3x2 + 2{,}40x5 = 18{,}00$

$x = 1{,}5$; $y = 1$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f(1{,}5; 1) = 3x1{,}5 + 2{,}40x1$

$= 6{,}90$

Podemos concluir que situación similar tendremos siempre que los x kilos de arroz y los y kilos de azúcar que se compren, no sean las suficientes como para hacer uso de la oferta del paquete por 10 soles; es decir, si el par $(x ; y)$ se encuentra en la región L_0, que, como vimos, es la región en la que no se puede hacer uso de la oferta. En consecuencia:

$$f(x; y) = 3x + 2{,}40y, \text{ para } (x; y) \in A \cap L_0 \qquad (\alpha)$$

En la Figura 6 mostramos, en color verde, $A \cap L_0$:

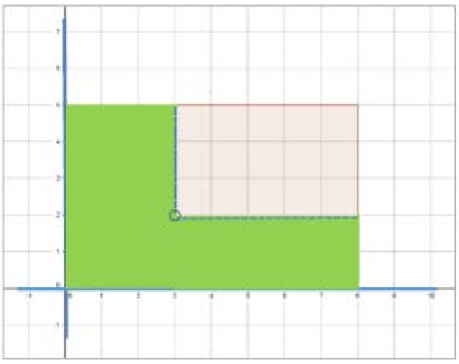

Figura 6

Veamos otros casos:

$x = 3$; $y = 2$

Estas son las cantidades que están en el paquete de oferta y obviamente, en este caso, $f\,(3; 2) = 10$.

$x = 5$; $y = 3$

Vemos que (5; 3) = (3; 2) + (2; 1); así, en este caso se puede usar la oferta una vez; en consecuencia, $f\,(5; 3) = 10 + 3\text{x}2 + 2{,}40\text{x}1 = 18{,}40$.

Es decir, se paga 10 soles por 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar, y por lo que excede a lo que está en el paquete se paga a los precios de venta “al menudeo”. O sea (5 – 3) kilos de arroz a 3 soles el kilo y (3 – 2) kilo de azúcar a 2,40 soles el kilo.

Situación similar tendremos siempre que los x kilos de arroz y los y kilos de azúcar que se compren, permitan usar solo una vez la oferta del paquete por 10 soles; es decir, si el par $(x; y)$ se encuentra en la región L_1, que, como vimos, es la región en la que se puede hacer uso de la oferta una sola vez. En consecuencia:

$$f\,(x; y) = 10 + 3(x\text{-}3) + 2{,}40(y\text{-}2), \text{ para } (x; y) \in A \cap L_1 \qquad (\beta)$$

En la Figura 7 mostramos, en color naranja, $A \cap L_1$:

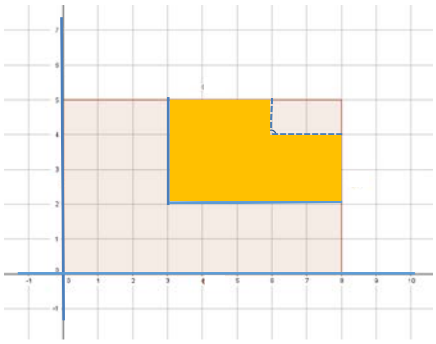

Figura 7

Como el lector podrá imaginarse, nos falta solo considerar los casos en $A \cap L_2$; es decir, aquellas cantidades de arroz y azúcar, que estando en el conjunto factible del comprador (en el conjunto A), sean tales que permitan usar solo dos veces la oferta de paquetes por 10 soles (en el conjunto L_2).

En la Figura 8 mostramos, en color marrón, $A \cap L_2$:

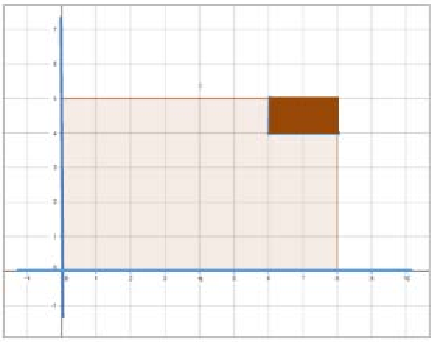

Figura 8

Se puede observar que, por ejemplo, si

$x = 7$; $y = 5$,

escribimos (7; 5) = (6; 4) + (1; 1)

= 2(3; 2) + (1; 1)

y así, en este caso, se puede usar la oferta dos veces; en consecuencia,

$$f(7; 5) = 20 + 3\text{x}1 + 2{,}40\text{x}1 = 25{,}40.$$

Por razonamiento similar al hecho para compras $(x; y)$ del conjunto $A \cap L_1$, ahora tenemos:

$$f(x; y) = 20 + 3(x-6) + 2{,}40(y-4) \text{, para } (x; y) \in A \cap L_2 \qquad (\gamma)$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$L_0 \cap L_1 = L_1 \cap L_2 = L_0 \cap L_3 = \emptyset$ y que $A = (A \cap L_0) \cup (A \cap L_1) \cup (A \cap L_2)$,

ya podemos usar (α), (β) y (γ) para completar lo pedido en el ítem (a) expresando resumidamente la función f para todas las posibilidades de compra en el conjunto factible del comprador; es decir, para todo $(x; y) \in A$:

$$f(x; y) = \begin{cases} 3x + 2{,}40y\,, & \text{para } (x;\ y) \in A \cap\ L_0 \\ 10 + 3(x-3) + 2{,}40(y-2)\,, & \text{para } (x;\ y) \in A \cap\ L_1 \\ 20 + 3(x-6) + 2{,}40(y-4)\,, & \text{para } (x;\ y) \in A \cap\ L_2 \end{cases}$$

- El ítem (b) del problema propuesto.

Para examinar la continuidad de la función f en el punto (3; 2) notemos que (3; 2) $\in L_1$; que $f(3; 2) = 10$ y que para puntos $(x; y)$ cercanos a (3; 2) en el conjunto L_0 los valores que toma f son cercanos a 13,8. Así, podemos concluir que f no es continua en (3; 2).

La conclusión anterior puede obtenerse de manera más formal teniendo en cuenta que (3; 2) es punto de acumulación tanto de L_0 como de L_1 y que

$$\lim_{(x;y)\to(3;2)} f(x; y) \text{ no existe}$$

pues para puntos $(x; y)$ vecinos a (3; 2) en el conjunto L_0 los valores que toma f son cercanos a 13,8 , mientras que para puntos $(x; y)$ vecinos a (3; 2) en el conjunto L_1 los valores que toma f son cercanos a 10.

Comentario

Una vez más, destaco la importancia de crear problemas y la vinculación de estos procesos con la modelización matemática. Es muy importante para la docencia y la investigación estar atentos a la riqueza matemática que hay en la realidad y muchas veces en situaciones muy sencillas y cotidianas como la compra-venta de productos y las ofertas que suelen hacerse en los mercados. Al construir la situación para ilustrar en un contexto real la discontinuidad en un punto de una función de dos variables, no imaginé toda la riqueza que se encontraría al resolver minuciosamente el problema. Ciertamente, se puede explotar didácticamente aún más esta situación-problema y el lector queda invitado a hacerlo.