REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 88-111

Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes

Benedito Antonio da Silva, Gabriel Loureiro de Lima

Fecha de recepción: 02/12/2014
Fecha de aceptación: 29/11/2015

Resumen	Este artículo destaca las preocupaciones didácticas observadas en los libros y en las prácticas de los maestros que enseñaron los cursos de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de São Paulo entre los años 1930 y 1990. Los datos fueron obtenidos en la investigación doctoral de uno de los autores, que buscó presentar una visión general de los modelos de tales cursos durante ese período. Son preocupaciones em relación, especificamente, a la forma de definir los conceptos, la llamada, en primer lugar, a las definiciones provisórias y a la necesidad de diferenciar la definición de un objeto matemático de uma aplicación del mismo. Se observó que, poco a poco, el curso inicial de Cálculo se ha vuelto más adecuado a la madurez matemática de los ingresantes universitários pero, que, al mismo tiempo, las cuestiones fundamentales relacionadas a los conceptos perdieron espacio en los textos. **Palabras clave**: Educación superior. Cálculo diferencial e Integral. Preocupaciones didácticas. Textos didácticos.
Abstract	This paper highlights didactic preocupations observed in adopted books and practices of teachers who worked in course of Calculus Differential and Integral at University of São Paulo between the 1930 and 1990. Data were obtained on the doctoral research of one authors, aimed to present an overview of models of such courses during this period. That are preocupations that concerns specifically athow to define concepts, the lokinf of in the first place, the working provisories definitions and the need to differentiate the definition of a mathematical object of an application. It was observed that, step by step, the initial course of Calculus has become more appropriete to mathematical maturity of freshmen in higher education, but at the same time, fundamental questions concerning the concepts lost space in textbooks. **Keywords**: Higher education. Differential and Integral Calculus. Educational concerns. Textbook
Resumo	Este artigo destaca preocupações didáticas observadas em livros adotados e nas práticas de docentes que atuaram em cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade de São Paulo entre as décadas de 1930 e 1990. Os dados foram obtidos na investigação de doutorado de um dos autores, que buscou apresentar um panorama dos modelos de tais cursos nesse período. São preocupações que dizem respeito especialmente à forma de definir conceitos, ao apelo, em primeiro lugar, às definições provisórias e à necessidade de se diferenciar a definição

de em um objeto matemático de uma aplicação do mesmo. Observou-se que, pouco a pouco, o curso inicial de Cálculo se tornou mais adequado à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior, mas que, ao mesmo tempo, questões fundamentais referentes aos conceitos perderam espaço nos livros didáticos.
Palavras-Chave: Ensino superior. Cálculo Diferencial e Integral. Preocupações didáticas. Livros Didáticos.

1. Introdução

São muitas as dificuldades dos estudantes dos cursos de Exatas, quanto à aprendizagem dos conteúdos envolvidos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral; daí resultando o alto índice de reprovação que pode levar à desistência de cursos inicialmente escolhidos de diferentes áreas, em que a disciplina compõe a grade curricular.

De modo geral a transição do ensino básico para o superior não ocorre de modo natural e sem rupturas e renegociações de parâmetros de ensino e de aprendizagem. Quando ingressam no curso superior, os estudantes trazem expectativas e apreensões; por um lado as boas avaliações em matemática geram a expectativa de que o curso de Cálculo não represente problemas para seu aprendizado. De outro lado, ao se deparar com questões globais envolvendo temas anteriormente estudados, quase sempre de modo compartimentalizado, e também com novas questões impactantes, como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais.

Por seu turno, os professores de Cálculo também têm suas expectativas quanto ao nível de desempenho de seus novos alunos, muitas vezes esperando que eles tragam uma bagagem suficiente para compreender suas explicações e construir seu próprio saber matemático. Também os professores do ensino secundário esperam que a matemática ensinada por eles seja suficiente para que os alunos sigam sem dificuldades o de Cálculo na universidade.

Com frequência essas expectativas dos três segmentos de alguma forma envolvidos no curso de Cálculo são frustradas, fato que indica ser oportuno investigar e refletir sobre essa realidade, uma vez que quanto mais se conhecem os fatos sobre ela, mais instrumentalizado se está para examiná-la e questioná-la, para melhor determinar os elementos que a compõem, a fim de tentar conscientizar-se dos problemas que ela comporta.

Outra componente, que numa hierarquia talvez viesse em primeiro lugar, reside na própria natureza dos conteúdos matemáticos envolvidos no Cálculo Diferencial e Integral, isto sem considerar os aspectos de ordem pedagógica inerentes à transição entre esses diferentes níveis de ensino.

Para Gascón (1997) na transição da educação básica para a superior ocorre uma mudança profunda no contrato didático: Nesse nível de ensino passa a vigorar um novo contrato que transfere ao estudante uma parte importante da responsabilidade didático-matemática que na educação básica era exclusiva do professor.

Segundo o autor, o aluno da educação básica, para cumprir o contrato vigente, deve simplesmente acompanhar as aulas e resolver alguns exercícios para complementar os assuntos tratados nelas. Cabe ao professor explicar com toda clareza o que o aluno deve fazer para aprender, além de controlar constantemente suas atividades. Já na universidade o processo de aprendizagem da matemática não se restringe às aulas; agora fica explícito que o estudante é o responsável pelo processo de seu próprio estudo. É de sua responsabilidade decidir como buscar materiais de apoio, quais livros consultar e como estudar e utilizar as aulas de teoria e de exercícios para melhorar seu aprendizado. É também de sua responsabilidade entender a matemática, estabelecer relações, interpretar, justificar e globalizar conhecimentos, atividades muito diferentes do caráter algébrico presente fortemente no ensino secundário. Para Gascón (2009), no ensino superior, inevitavelmente o aluno precisará resolver questões não resolvidas em sala de aula pelo professor, o que implica em não ter um raciocínio pronto para "imitar". Além disso, nas avaliações a que será submetido nos cursos universitários, ao contrário do que normalmente ocorre nos ensinos fundamental e médio, o aluno usualmente deverá, além de demonstrar uma interpretação global do conteúdo trabalhado, resolver questões diferentes daquelas discutidas em sala de aula.

Há também descontinuidades entre à própria organização escolar das questões matemáticas que se estudam na educação básica e na universidade. A este respeito, Lima (2012, pp. 244 -245) fundamentado em Gascón (2009, pp. 292 – 296), destaca que, enquanto na educação básica a grande rigidez na atividade matemática acaba fazendo com que alguns alunos identifiquem ou até mesmo confundam determinado objeto matemático com a simbologia que lhe dá suporte, no ensino superior as nomenclaturas dos objetos que estão sendo estudados são consideradas irrelevantes e qualquer modificação nas notações empregadas, visando facilitar a aplicação de determinada técnica, não representa, do ponto de vista matemático, nenhuma alteração importante à mesma. Além disso, enquanto na educação básica, em geral, não se exige que o aluno interprete o resultado obtido ao aplicar determinada técnica matemática, na universidade a necessidade de tal interpretação já é tida como subentendida. Outro aspecto a ser considerado é que, no ensino básico, usualmente não se explora a reversão das técnicas matemáticas e quando há duas tarefas inversas entre si, em geral, as técnicas de resolução de ambas são apresentadas aos alunos como se fossem independentes, enquanto que, no ensino superior, os mesmos precisarão ser capazes de estabelecer relações entre as operações e suas respectivas inversas. Outro aspecto relevante é que:

> No ensino superior ocorre uma mudança radical em relação ao papel das definições matemáticas. Enquanto que no ensino secundário elas têm um papel essencialmente descritivo, com a finalidade de explicitar de maneira precisa as características de objetos já supostamente conhecidos, na universidade servem para construir objetos novos. [...] As funções das demonstrações também mudam completamente no ensino superior. Enquanto que no secundário elas têm um papel meramente "decorativo", já que as propriedades e os resultados podem ser percebidos, de maneira intuitiva, por meio de exemplos, ilustrações, etc, na universidade tais argumentações ostensivas, por meio de exemplos particulares ilustrando uma propriedade, perdem seu valor demonstrativo. É preciso que se façam demonstrações, de fato. (LIMA, 2014, pp.244-245).

É preciso que se leve em consideração também algumas características específicas do Cálculo que se tornam bastante evidentes neste processo de transição da educação básica para o ensino superior. Enquanto que na educação básica se estudam as relações internas de uma função específica, na universidade é necessário as transformações de funções e as características de toda uma família de funções.

Ainda é nesse momento que se evidenciam diferenças entre os procedimentos para se resolver problemas de Álgebra e de Cálculo. Por exemplo, em Álgebra, para provar que dois conjuntos A e B são iguais, deve-se mostrar que eles contêm os mesmos elementos. Já no Cálculo, muitas vezes, para se provar que dois números A e B são iguais, deve-se mostrar que para todo número real positivo ε, tem-se que $|A - B| < \epsilon$. Esse procedimento, corriqueiro no tratamento de limites, pode representar um enorme obstáculo para o aprendizado de tal conceito e de sua manipulação em diferentes situações em que esse conteúdo é aplicado. Tal ruptura de procedimentos, dolorosa para o estudante, às vezes, não é percebida pelo professor.

Junte-se a isso a necessidade de se relacionar diferentes conhecimentos, anteriormente estudados de forma pontual e que agora exigem procedimentos globais, para se verificar a existência da enorme barreira que representa a transição da escola básica para o curso superior e, em particular, a dimensão do obstáculo que se apresenta ao estudante no início de seus estudos de Cálculo.

Assim, observa-se que são muitos e variados os fatores que concorrem para que o ensino e aprendizagem da Matemática na universidade e do Cálculo, em particular, represente fonte de dificuldades ao estudante ingressante no ensino superior. Para Lucas et al. (2014),

> [...] o problema vai muito mais além da qualidade da "bagagem" de conhecimentos que o aluno transporta do ensino secundário para o ensino superior universitário. Mais do que o saber científico, o aluno deverá ter aprendido no ensino secundário a adaptar-se a novos desafios/tarefas que possam surgir na universidade, a responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, a ampliar as situações problemáticas, a questionar e a estabelecer conjecturas que lhe permitam solucionar um determinado problema proposto. Para tal, cremos que é necessário que o aluno trabalhe, já no ensino secundário, com uma matemática mais flexível, aberta, articulada e mais justificada do que a que vive atualmente nesta instituição escolar. (p.2)

A Comunidade Científica desde há muito vem dando sinais de que está atenta às questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Já em 1908, o Congresso da União Internacional de Matemática, em Roma, constituiu a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), exatamente com a finalidade de se debruçarem sobre tais questões; em 1914 a Comissão contava com adesão de vinte e oito países e já havia recebido inúmeros relatórios provenientes de vinte e oito países, sendo que os das Ilhas Britânicas foram organizados em dois volumes de Relatórios Especiais, publicados pelo Conselho da Educação em 1912. (Silva, 2011).

Com o advento da primeira guerra mundial, a Comissão permaneceu praticamente inativa até que em 1928, em Bolonha, decidiu-se reativá-la e esse ano tem sido visto como sendo o do reinício de suas atividades, que culminou com duas sessões durante o Congresso de Matemáticos de Zurique. Nesse encontro, o Professor Hadammard, de Paris, foi indicado para suceder o Professor D. E. Smith, de Nova York, que vinha presidindo a Comissão desde a morte de Felix Klein (1925). Desde 1969 a Comissão vem promovendo, a cada quatro anos um Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME), em que são discutidas as questões chaves e as tendências das pesquisas na Área.

A Educação Matemática, área do conhecimento de característica multidisciplinar, vem se ocupando há décadas com problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Os resultados de pesquisas nessa área, respaldadas em teorias sobre o desenvolvimento cognitivo, bem como a formação do pensamento, incluindo aí o pensamento matemático, foram sendo aceitos pela comunidade científica internacional. Essas teorias, em geral referem-se ao desenvolvimento cognitivo e/ou formação do pensamento de jovens nas faixas etárias dos alunos da educação básica. Essa é uma das razões pela qual a atenção principal dos educadores matemáticos inicialmente estivesse voltada a esse nível de ensino. Outra população que tem sido alvo de investigação no que tange ao processo do ensino e da aprendizagem da Matemática é aquela formada por professores e futuros professores do Ensino Básico.

Daí a inserir estudantes e professores do Ensino Superior foi um passo. Mogens Niss, na conferência do ICMI9 (2000), traça um panorama das questões chaves e tendências identificadas nas pesquisas em Educação Matemática, no qual situa a questão da inserção dos diversos níveis de ensino como problemas de pesquisa em Educação Matemática, assim como a evolução da área. Salienta o referido autor que no princípio as pesquisas realizadas focavam os objetos e fenômenos de estudo fundamentalmente relacionados à Matemática escolar, sendo que a escola primária marca presença nas pesquisas durante todo o século XX e a escola secundária, a partir dos anos 60. No entanto, são agregados alguns aspectos da educação superior, a partir dos anos 80 e, como ressaltam Marcolini e Perales (2005, p. 25), é preciso que se perceba que as dificuldades na aprendizagem de Matemática enfrentadas pelos alunos das universidades não se devem somente a aspectos pedagógicos, técnicos ou àqueles inerentes aos próprios conceitos a serem ensinados; muitas destas são oriundas da maneira como se seleciona, articula e organiza o saber matemático com fins didáticos.

Conforme salienta Lima (2014, p. 235), as investigações a respeito da Didática do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática se tornaram cada vez mais frequentes a partir de 1985, ano que marca a constituição, durante um dos congressos do PME (*Psychology of Mathematics Education*), de um grupo de trabalho tendo como objetivo estudar o *Pensamento Matemático Avançado* e, mais especificamente, aprofundar as investigações cognitivas a respeito dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo. Para Cantoral (1993, p. 8), por meio de tais estudos, passa-se a buscar o maior número possível de dados empíricos a respeito de aspectos específicos do processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo com o objetivo de localizar as dificuldades dos estudantes em relação a este conteúdo, entender as causas das mesmas e explorar possíveis 'tratamentos' para elas.

Principalmente a partir dos anos 90, as pesquisas sobre o ensino superior de Matemática, e em particular do Cálculo, vem mostrando um crescimento tanto quantitativo quanto qualitativo bastante considerável. Em 1997 a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) decidiu organizar um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no nível universitário e, em 2001, Derek Holton publica o trabalho *The Teaching and Learning of mathematics at University Level* (Holton, 2001), em que apresenta reflexões pessoais a partir de tal estudo. Segundo o autor ensino e pesquisa são inseparáveis para a acumulação de conhecimento, o progresso da ciência, da tecnologia e da civilização; e a disseminação de resultados de pesquisas e de estratégias de ensino podem trazer muitas contribuições para tal progresso. Ainda nesta década foi criada a *International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICMT), procurando atender a demanda por mais pesquisas específicas ao nível superior de ensino. A

ICMT encoraja a comunicação entre matemáticos e educadores matemáticos e promove fóruns entre diferentes culturas. Essas conferências acontecem sempre de quatro em quatro anos e são de grande interesse tanto para professores de matemática quanto para aqueles que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática do nível universitário. Já foram realizadas Já foram realizadas três reuniões e como destaque, salientamos que na segunda delas, ocorrida em 2002, Holton coordenou o painel de discussões intitulado *Teaching undergraduate mathematics, based on the corresponding ICMI study*; e que a terceira, reuniu um grande número de professores universitários de cinquenta e dois diferentes países, recebendo seiscentas propostas de trabalhos a serem apresentados das quais, após analisadas pelo Comitê Internacional, trezentos e cinquenta figuram nos anais do evento.

A atuação do grupo de trabalho *As dificuldades dos estudantes em Cálculo*, constituído no sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) realizado em 1992, também contribuiu para o aumento de investigações referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Este grupo de trabalho, que reuniu pesquisadores e docentes de diversos países, se constituiu com o objetivo de buscar respostas para questões como: Quais os principais objetivos de um curso de Cálculo? Como devem ser relacionar os procedimentos algorítmicos e as reflexões conceituais em um curso de Cálculo? Quais as dificuldades específicas encontradas no ensino e na aprendizagem de cada um dos conteúdos do Cálculo e quais as razões para tais dificuldades?Quais as concepções do Cálculo e de seu ensino que têm fundamentado as diferentes experiências que vêm sendo realizadas nas salas de aula?

Como destaca Lima (2014) com base em Giménez e Machín (2003), a maioria dessas perguntas não foram totalmente respondidas e têm guiado as investigações que vêm sendo realizadas neste ramo e que, segundo Artigue (1998) têm agrupado as dificuldades relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática em três categorias principais, sendo elas: (i) as dificuldades ligadas a complexidade matemática dos objetos básicos deste campo conceitual; ii) as dificuldades ligadas à conceitualização da noção de limite e iii) as dificuldades ligadas a necessário ruptura com modos característicos do pensamento algébrico. Há também, de acordo com Giménez e Machín (2003), dificuldades com os processos envolvendo infinito, presentes nos conceitos básicos de derivada e integral, além de outras questões referentes ao estudo de funções, ao conceito de infinito e aos diversos tipos de representações semióticas inevitavelmente presentes na abordagem destas áreas da Matemática.

No Brasil, conforme relata Lima (2012), um importante passo para a consolidação deste tipo de investigação, foi dado em novembro de 2000, com a criação do Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (G4), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Convém salientar que apesar do crescimento que se tem observado em relação às investigações referentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática, e especificamente de Cálculo, nos cursos universitários, ainda é muito pequena a parcela de professores que tenham sua prática em sala de aula alterada em função dos resultados obtidos por essas investigações e para isso concorre uma gama muito grande de motivos, que não cabe aqui ser abordada.

Ao ouvir inúmeras vezes de professores universitários que os estudantes são reprovados em Cálculo porque, atualmente não estudam efetivamente essa disciplina, que da maneira como este assunto era ensinado na época em que eles eram estudantes esses problemas observados atualmente não aconteciam ou ainda que os livros adotados anteriormente faziam com que os alunos aprendessem de verdade, um dos autores deste artigo desenvolveu a pesquisa de doutorado *A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994*, procurando investigar qual era, afinal, o Cálculo ensinado antigamente e que hoje em dia não se ensina mais. No que tais cursos diferiam dos atuais? No conteúdo? No nível de rigor simbólico-formal? Nos tipos de preocupações didáticas dos professores? Nos livros-textos adotados? Mas, se essa forma de trabalhar com tal conteúdo dava bons resultados, por que foi substituída? Por que os professores passaram a buscar maneiras diferenciadas de trabalhar com este assunto se a maneira como faziam antigamente funcionava tão bem? A partir de que momento seu processo de ensino e de aprendizagem se tornou tão complicado e por que razão isto ocorreu? Para as considerações neste artigo, tomam-se por base, na maioria das vezes, dados presentes em Lima (2012).

Para o estudo realizado, o autor optou por analisar a trajetória do curso inicial de Cálculo ministrado aos graduandos em Matemática na Universidade de São Paulo por ter sido nesta instituição que foi implantado, em 1934, o primeiro curso superior do país destinado à formação de matemáticos e também porque, durante muito tempo, aquilo que era posto em prática por tal universidade servia de modelo para outras instituições de ensino superior e para outros cursos que passaram a funcionar no Brasil. Assim, o objetivo principal da investigação não foi "analisar como era o Cálculo na USP entre 1934 e 1994 e sim perceber como era o Cálculo que se ensinava neste período. O curso da USP não é somente característico daquela instituição; é um curso de uma universidade que, em certa época, foi referência e parâmetro para outras. O ano de partida do estudo, 1934, se justifica por ter se dado neste ano, na USP, a implantação do primeiro curso superior de Matemática do país. Já o ano de 1994 foi escolhido como ponto final para a investigação por ter sido nesta data que, oficialmente, a primeira disciplina de Cálculo (conhecida, normalmente, como Cálculo I) cursada pelos alunos da Licenciatura em Matemática se tornou diferenciada daquela oferecida aos alunos do Bacharelado, tornando explícita uma diferenciação entre o curso inicial de Cálculo que se julgava necessário para formar o professor daquele considerado adequado para formar o bacharel.

Com base nos dados obtidos por meio da referida investigação, se pode afirmar que, ao contrário do que pensavam e afirmavam alguns dos professores ouvidos por Lima antes do início de seu estudo, a maneira como o Cálculo era ensinado antigamente não era 'perfeita'.

> Mesmo quando ainda nem se ensinava efetivamente esta disciplina, e sim Análise Matemática, os estudantes já enfrentavam problemas no curso em que viam pela primeira vez os conceitos de limite, derivada e integral, problemas estes oriundos, predominantemente, da abordagem extremamente formal e rigorosa dada aos conteúdos. A própria disciplina de Cálculo surgiu no curso de Matemática da USP como uma tentativa de amenizar estas dificuldades enfrentadas pelos estudantes, demonstrando que, mesmo antes de existir, de fato, na graduação em Matemática, o ensino de tal disciplina já inspirava cuidados. [...] Não há como afirmar, portanto, que os problemas observados atualmente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo sejam decorrentes do fato de não se abordar este conteúdo da forma como isto era feito antigamente [...]. Ao contrário; as mudanças observadas, ainda que em

> muitos casos possam não ter sido bem sucedidas, tiveram como objetivo exatamente tentar minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes; foi por esta razão que novas orientações foram dadas à disciplina e novas metodologias de ensino foram testadas (LIMA, 2012, p. 421).

Com relação aos manuais adotados como referências nos cursos de Cálculo analisados, embora estes também não conseguissem garantir total sucesso no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos fundamentais desta disciplina, realmente traziam alguns tipos de preocupações didáticas ligadas a aspectos importantes para o desenvolvimento do campo de conhecimento em questão e que na maioria dos livros atuais são deixados de lado ou não recebem o merecido destaque.

É exatamente este viés que será destacado nesse artigo. Serão discutidos alguns cuidados de caráter didático manifestados pelos autores das apostilas, notas de aula e livros adotados como referência nos cursos analisados e que se consideram fundamentais de serem levados em conta pelo professor que irá ministrar uma disciplina introdutória de Cálculo para os estudantes universitários. Antes de tratar-se especificamente dessas preocupações didáticas, apresentam-se algumas considerações a respeito dos modelos de ensino de tal disciplina observados durante o período analisado por Lima (2012) e também a respeito dos contextos que levaram os professores a adotarem tais livros como referência.

2. Os modelos de cursos de Cálculo difundidos pela USP entre as décadas de 1930 e 1990 e os livros adotados como referência

O processo de aritmetização da Análise ocorrido durante o século XIX e guiado por uma busca pelos fundamentos daquela área de conhecimento que se conhecia como Cálculo exerceu grande influência tanto no desenvolvimento da Matemática como ciência quanto no ensino, especialmente o universitário. Conforme salienta Lima (2014, p. 133), “a partir desse processo, a maneira considerada como sendo a mais adequada, e também a que estava em maior consonância com o rigor exigido pela Matemática, para se apresentar as noções fundamentais do Cálculo passou a ser por meio da definição weierstrassiana de limite”. Era de se esperar, portanto, que ao ser contratado, em 1934, para atuar no processo de implantação da graduação em Matemática na recém-fundada Universidade de São Paulo, o analista italiano Luigi Fantappiè (1901-1956) introduzisse na instituição um curso com esta orientação. Assim como nas universidades europeias, em que, conforme a Análise Matemática foi se constituindo como uma nova área da Matemática deixou-se de oferecer uma disciplina efetivamente de Cálculo, ensinando-se aos alunos apenas a Análise, trabalhada por meio dos refinamentos introduzidos por Weierstrass (1815-1897) à teoria dos limites desenvolvida por Cauchy (1789-1857), na USP também se adotou, inicialmente, essa ideia que foi sendo difundida também por universidades fundadas posteriormente e pelas escolas politécnicas que já existiam antes da fundação da Universidade de São Paulo e que ensinavam Cálculo segundo a concepção de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite.

Em seus cursos na USP, Fantappiè adotava um manual coerente com esta orientação proposta para a disciplina: o livro *Lezioni di Analisi* de Francesco Severi, publicado em 1933 e que adota, em um texto bastante formal, a concepção weierstrassiana de limite para fundamentar o conteúdo apresentado. O docente, durante sua atuação na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo, também produziu, com o auxílio de seu assistente Omar Catunda (1906-1986), notas de aula datilografadas relativas aos seus cursos de Análise Matemática. Esse material certamente não reflete de maneira exata a forma como os conteúdos eram apresentados em aula por Fantappiè, uma vez que apostilas, notas de aula e livros didáticos redigidos ou adotados por um docente não dizem exatamente como este atua em sala de aula; dão apenas indicações. De qualquer forma, a análise das notas do curso de Fantappiè, evidencia que, de fato, "o matemático trouxe aos cursos de Cálculo, ministrados em São Paulo, o que estava em voga na escola matemática italiana, considerada na época avançada e bem conceituada" (Lima, 2012, p. 125). É, possivelmente, nas notas de aula do curso de Fantappiè que aparecem, pela primeira vez em um material redigido no Brasil, o conceito de função de acordo com a formulação proposta por Dirichlet (1805-1859) e também o tratamento da noção de limite segundo a concepção weierstrassiana. Foi Fantappiè, de acordo com Táboas (2005, p. 54), quem "apresentou a Análise Matemática aos jovens universitários de São Paulo" e foi o responsável pela reorientação do ensino do Cálculo no Brasil. Segundo destaca Lima (2006, p.81) "em algumas escolas de nível superior, mesmo sob o nome de Cálculo [e não Análise Matemática], o ensino dessa disciplina passou a seguir os padrões impostos pela comunidade italiana aqui instalada a partir de 1934".

Essa reorientação dos cursos de Cálculo, que valorizou, desde o primeiro contato dos estudantes com as noções de função, limite, derivada e integral um tratamento analítico caracterizado por um alto nível de rigor simbólico-formal, acabou dificultando que o aluno pudesse vivenciar um aprendizado progressivo e continuado até que atingisse um grau de amadurecimento matemático que o permitisse efetivamente compreender uma abordagem tão formal daquilo que estava sendo trabalhado.

Após o regresso de Fantappiè para a Itália em 1939, alguns docentes da FFCL da Universidade de São Paulo, cientes das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao cursarem, logo ao ingressar no ensino superior, um curso de Análise Matemática segundo os moldes das universidades europeias, pouco a pouco, passaram a questionar esse modelo e a propor uma reorientação para a disciplina. Neste processo, duas figuras centrais foram Omar Catunda, que assumiu a cátedra de Análise Matemática com a saída de Fantappiè, e sua assistente, a professora Elza Furtado Gomide (1925-2013). Na entrevista concedida a Lima (2012), Gomide afirmou que, desde que começou a ministrar aulas teóricas de Análise, ainda na função de auxiliar de Catunda, passou a refletir, com o apoio do catedrático, sobre a possibilidade de dar um direcionamento diferente à disciplina e permitir com que os alunos, ao ingressarem na universidade, assistissem, primeiramente, um curso de Cálculo Diferencial e Integral para somente depois cursarem Análise Matemática. Segundo ela, a Análise é a crítica, a justificativa do Cálculo e, portanto, não fazia sentido esperar que os alunos compreendessem diretamente a crítica de algo que ainda nem conheciam.

Essa ideia já estava sendo colocado em prática pelas universidades norte-americanas, que, ao contrário do que ocorria na Europa, ofereciam ao estudante, em um primeiro momento, um curso denominado Cálculo no qual se "trabalhava de maneira mais manipulativa com os conceitos, com ênfase em seus significados, nos procedimentos algorítmicos envolvendo tais conceitos e na maneira como os mesmos poderiam ser utilizados na resolução de alguns problemas matemáticos" (Lima, 2014, p. 136), para, posteriormente, em uma disciplina denominada Cálculo Avançado, retomar os conteúdos já estudos, mas agora "de maneira analítica, com um nível mais elevado de rigor simbólico-formal, em uma abordagem semelhante àquela presente na disciplina Análise Matemática do modelo europeu" (p. 136). Gomide se tornou, de fato, professora das turmas de primeiro ano em que Catunda foi aos Estados Unidos aperfeiçoar sua formação e, quando o catedrático retornou ao Brasil e a docente apresentou a ele sua sugestão de primeiramente ensinar Cálculo para depois ensinar Análise, como propunha o modelo norte-americano, ele que havia acabado de presenciar o mesmo funcionando, encampou a ideia.

Ao começar a lecionar, Gomide passou a adotar o livro *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy que, segundo ela, "entrava mais diretamente no Cálculo". Este manual, apesar de adotar um nível de rigor bastante alto, assim como acontecia nos textos de Fantappiè, trabalha com os conteúdos, utilizando predominantemente a linguagem natural e estabelecendo uma conversa com o leitor, deixando a impressão de que, talvez, a 'transmissão das informações', com o auxílio de tal livro, pudesse ocorrer de maneira mais eficiente do que se apelando a manuais excessivamente formais. Além disso, no prefácio da obra, Hardy destaca que a mesma foi concebida para ser utilizada, essencialmente, por alunos do primeiro ano da universidade, o que dá indícios de que, ao concebê-la, o autor levou em consideração a maturidade matemática dos seus leitores em potencial e procurou adotar um nível de rigor adequado para iniciantes no ensino superior**.**

Segundo D´Ambrosio, em relação às aulas ministradas por Fantappiè e posteriormente por Catunda antes desta reorientação da disciplina, o curso dado por Gomide "era rigoroso, mas com um rigor que hoje eu classificaria como moderado. [...] Neste curso, toda a parte do que hoje é chamado Cálculo era coberta e já tínhamos uma introdução à Análise, que começava de fato, e aí era pesada, no segundo ano" (D´Ambrosio, entrevista, 2009).

Conforme já destacado, Catunda, que permanecia como chefe da cátedra de Análise na FFCL da USP também era favorável a esta nova orientação para a disciplina ministrada aos alunos ingressantes e nas apostilas de Análise Matemática escritas por ele e que começaram a ser editadas em 1952, percebe-se, pela primeira vez, de maneira explícita, um esforço em redirecionar a abordagem dos conteúdos trabalhados na disciplina, em aproximá-la, de fato, do Cálculo, de um tratamento, inicialmente, mais manipulativo e menos abstrato. "O redirecionamento na forma de apresentar aos alunos do primeiro ano os conceitos fundamentais do Cálculo se deu de forma lenta e gradual e, neste processo, talvez a redação das apostilas de Catunda tenha sido um dos primeiros frutos das reflexões iniciadas por Gomide" (Lima, 2012, p. 143). Tais apostilas deram origem, em 1962, ao livro *Curso de Análise Matemática*, que fez de Catunda pioneiro na publicação de um manual brasileiro de Análise Matemática em conformidade com o rigor imposto na Matemática a partir do século XIX. Esses materiais de Análise escritos por Catunda exerceram, durante muito tempo grande influência no ensino superior brasileiro; eram, inicialmente, as únicas opções de bibliografia em português referente a este assunto.

Este processo de redirecionamento na disciplina de Análise ministrada aos alunos do primeiro ano, que se iniciou na década de 1950 com as reflexões de Gomide e Catunda, foi lento e gradual e culminou com a introdução, em 1964, no currículo do curso de Matemática da USP, de uma disciplina de Cálculo precedendo a de Análise. Convém salientar, no entanto, conforme explicita Lima (2014), que a introdução de tal disciplina não foi consequência apenas das reflexões dos docentes supracitados com base nas dificuldades enfrentadas pelos estudantes que, ao ingressarem na universidade, estudavam diretamente Análise: O que se passava na USP era reflexo de algo que ocorria mundialmente: o modelo europeu, predominante até então, perdia espaço para norte-americano que passou a ser amplamente divulgado por meio de livros didáticos que, pouco a pouco, foram adotados em diversos países.

Embora tenha havido uma mudança de nomenclatura na disciplina que o aluno cursava ao ingressar na universidade, na prática, durante muito tempo, os programas das disciplinas continuavam sendo muito mais próximos a um curso de Análise ou, pelo menos, de um curso voltado para a Análise e não para o Cálculo; ainda demorou até que sua estrutura se tornasse próxima da que se conhece atualmente.

Em 1964, pela primeira vez, um manual efetivamente de Cálculo foi adotado como referência para a disciplina ministrada aos alunos ingressantes; trata-se do livro *Calculus with Analytic Geometry* de Murray H. Protter e Charles B. Morrey Jr. A adoção de tal obra é mais um indício a ratificar a já destacada influência exercida, a partir do início da década de 1960, nas reformulações dos cursos brasileiros de Cálculo e de Análise, pelo modelo de ensino de Cálculo em vigor nos Estados Unidos e pelos manuais norte-americanos que, a partir daquele momento, se tornaram cada vez mais populares no país. Conforme os autores destacam no prefácio da obra, na época, as universidades norte-americanas ofereciam dois cursos de Cálculo, um para alunos iniciantes e outro para alunos que já possuíam conhecimentos sobre o assunto e o referido manual havia sido pensado para auxiliar na condução de cursos do primeiro tipo e que, por esta razão, os tópicos apresentados foram escolhidos levando em consideração o que a maioria dos estudantes do primeiro ano de um curso universitário precisaria saber de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica, o que estava em concordância com o que Gomide propôs para o ensino da disciplina no início da década de 1950:

A partir do momento em que, de fato, começou a existir uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral destinada aos alunos ingressantes do curso de Matemática da USP, alguns livros soviéticos se tornaram populares, especialmente durante a década de 1960 e início de 1970, entre estudantes e professores. Dois deles foram *Calcul Différentiel et Integral* de Piskunov (1969) e *Problems in Mathematical Analysis* de Demidovitch (1977), utilizados predominantemente durante as aulas de exercícios. A utilização de tais manuais se ampliou na mesma medida em que, numa interpretação equivocada do que propuseram, por exemplo, Catunda e Gomide com base nas dificuldades enfrentadas pelos alunos e no modelo norte-americano, pouco a pouco, o curso inicial de Cálculo passou a enfatizar, ao menos nos exercícios e nas avaliações, cada vez mais, os procedimentos algorítmicos, as técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais. Começa-se, a partir de meados dos anos 1960, se evidenciar aquilo que Rezende (2003) denomina de *conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede*: enquanto nas aulas prevalecia a sistematização do conteúdo com base em elevado nível de rigor simbólico-formal, nos exercícios e nas avaliações o foco eram as técnicas de cálculo. Esta prática pode acarretar que o aluno não valorize os conceitos e seus significados, mas sim os procedimentos operatórios associados a eles cobrados nas avaliações.

No início da década de 1970, outro livro que passou a ser utilizado como referência foi *Cálculo: um curso universitário* de Edwin Moise, que propunha uma maneira diferenciada de trabalhar com os conteúdos da disciplina: uma apresentação em espiral, na qual cada conceito é trabalhado, desde o início do manual, em diversos momentos e, a cada vez que o assunto é retomado, sua abordagem vai sendo aprofundada e novos detalhes e novos aspectos vão sendo incorporados às ideias anteriormente apresentadas. Conforme destaca o autor no prefácio da obra, os objetos matemáticos vão sendo introduzidos por meio de “uma série de formas diferentes, em ordem crescente de dificuldade, generalidade e exatidão” (Moise, 1972 – prefácio). Além disso, também no prefácio, Moise justifica esta sua opção pela abordagem em espiral argumentando que ela pode permitir com que os alunos percebam “os processos pelos quais ideias especiais são generalizadas e ideias heurísticas se tornam concretas e exatas” (idem), já que, é preciso se levar em consideração que os conceitos centrais do Cálculo são profundos e que, portanto, o professor não deve esperar que eles “possam ser aprendidos todos de uma vez, nas formas pelas quais um matemático moderno pensa a respeito deles” (Ibid.).

Também no início da década de 1970, conforme salienta Lima (2014) com base em Pimenta e Anastasiou (2002) e Fisher (2009), quando a concepção de conhecimento como um acúmulo de informações que poderiam ser transmitidas de um sujeito que sabe (professor) para outro que aprender (aluno) começou a ser questionada e gradativamente substituída pela ideia de que se deveria levar em consideração a relação, mediada pelo professor, entre o aluno e o conteúdo a ser conhecido, as aulas na universidade passaram a, pouco a pouco, enfatizar a parceira entre professores e estudantes na busca pelo conhecimento. E, nesse contexto, passou-se a valorizar os processos de ensino e de aprendizagem baseados na construção do conhecimento pelo próprio estudante, conduzida, sobretudo por discussões e trabalhos em grupos. No ensino do Cálculo na Universidade de São Paulo, também é possível perceber os reflexos dessas idéias na experiência posta em prática por uma equipe de professores que adotou uma metodologia de ensino baseada no trabalho em grupo mediado por roteiros de estudos, discussões e debates e, finalmente, a institucionalização do objeto matemático estudado.

Essa experiência com os roteiros, embora tenha sido bem vista por muitos estudantes, conforme atestam os dados presentes em Lima (2012), durou apenas três anos, de 1975 a 1978, e chegou ao fim quando os professores nela envolvidos passaram a se dedicar a outros projetos e a nova equipe responsável pelo ensino de Cálculo optou, provavelmente pelo grande volume de trabalho ocasionado por esta metodologia alternativa, por retomar a forma tradicional de ensino, baseada predominantemente em aulas expositivas.

Durante a década de 1980, orientações diferentes de condução da disciplina inicial de Cálculo passaram a coexistir, sendo algumas mais próximas efetivamente desta área, outras mais próximas da Análise e outras ainda equilibrando aspectos destas duas tendências. Nesta década, alguns livros utilizados como referência foram: *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold, as apostilas de Cálculo do professor Guidorizzi, que, posteriormente, foram reformuladas e deram origem ao seu livro *Um Curso de Cálculo*, que também foi indicado como referência em muitas ocasiões e o manual *Cálculo Diferencial e Integral* de Roberto Romano. Apesar da convivência quase que simultânea de disciplinas de Cálculo conduzidas com orientações tão diferentes, para alguns professores, conforme evidencia Lima (2012, pp. 195-196), "durante a década de 1980, tal curso começou a perder muito do rigor que o havia caracterizado até então e este fato não os agradava". Visando tentar reverter essa situação, um grupo de docentes optou por utilizar como referência básica na disciplina inicial de Cálculo o livro *Cálculo Infinitesimal* de Michael Spivak que enfatiza a fundamentação dos principais resultados da Análise e não os procedimentos algorítmicos.

Essa experiência de ensinar Cálculo utilizando como referência o manual de Spivak durou aproximadamente dois anos, tendo chegado ao fim logo no início da década de 1990, uma vez que, ao que indicam os dados analisados, a grande maioria dos estudantes envolvidos em tal experiência não conseguia acompanhar um curso como aquele que estava sendo proposto. Mas o problema não foi o livro adotado, já que o mesmo apresenta uma abordagem bastante cuidadosa para o conteúdo e traz diversos tipos de cuidados do ponto de vista didático. A questão é como o texto foi utilizado em tal experiência: tentou-se, em sala de aula, reproduzir a apresentação proposta pelo manual e essa, por si só, embora matematicamente interessante, não basta "já que adota um nível de rigor e formalismo que possivelmente não é adequado à maturidade matemática da maioria dos ingressantes no ensino superior" (Lima, 2012, p. 387).

Nos anos 1990, os cursos iniciais de Cálculo ministrados aos alunos da Matemática da USP foram tornando-se, pouco a pouco, cada vez mais semelhantes aos atuais, sendo que há alguns nos quais se enfatiza exclusivamente as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais e outros nos quais, embora a apresentação dos conteúdos segundo elevado nível de rigor simbólico-formal também esteja presente, são os procedimentos algorítmicos que são cobrados e, portanto, passam a ser valorizados pelos estudantes. A partir de 1994, o curso de Cálculo I ministrado aos alunos da Licenciatura passou a ser diferente daquele ministrado aos alunos do Bacharelado e enquanto na disciplina destinada aos futuros professores passou a haver uma preocupação em sanar algumas deficiências relativas a conteúdos matemáticos da educação básica para, posteriormente, enfatizar, dentre os diversos conceitos do Cálculo, aqueles mais importantes para a formação do professor, a disciplina ministrada aos alunos do Bacharelado não sofreu nenhuma grande mudança.

Na sequência, apresentam-se algumas preocupações didáticas presentes nos manuais que foram adotados como referências nos cursos ministrados na USP entre as décadas de 1930 e 1990 e que, em geral, não são observadas nos livros utilizados atualmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

3. Preocupações didáticas presentes em livros adotados nos cursos investigados

Conforme o exposto na introdução deste artigo, as investigações referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática estão intimamente relacionadas às pesquisas a respeito do *Pensamento Matemático Avançado*, que Dreyfus (1991) e Tall (1991) consideram como sendo o tipo de pensamento, que pode se manifestar em diferentes níveis educacionais e que está envolvido no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos complexos. Giménez e Machín (2003, p. 136) salientam que os processos cognitivos presentes no Pensamento Matemático Avançado englobam uma série de processos matemáticos, dentre os quais, destaca-se a abstração, a análise, a categorização, o estabelecimento de conjecturas, a generalização, a síntese, a definição, a demonstração e a formalização. Para Tall (1991), que faz a distinção entre o nível elementar e o nível avançado de Matemática, na transição do nível elementar para o nível avançado, os processos de definir, demonstrar e formalizar, embora estejam também presentes no pensamento matemático elementar, se tornam ainda mais importantes. Segundo este autor, a mudança do nível elementar da Matemática para o avançado passa a exigir que o aluno não mais descreva os objetos matemáticos, mas sim que os defina. Como pontua Henriques:

> Pode considerar-se que no centro da transição da Matemática elementar para a avançada está a ideia de construir conceitos a partir da definição em vez de encontrar propriedades a partir de conceitos já existentes. [...] Na Matemática elementar a descrição é construída a partir de experiências sobre o objeto, enquanto na Matemática avançada as propriedades dos objetos são construídas a partir da definição. (HENRIQUES, 2010, pp. 17-18).

Conforme destacam Giménez e Machín (2003, p. 141), a apresentação de uma definição por parte dos professores ou dos livros didáticos e a memorização desta, por parte do aluno não garante a ele, de forma alguma, a compreensão dos significados de tal definição. Os pesquisadores salientam que, apesar dos autores de livros didáticos e de muitos professores suporem que a aprendizagem dos conceitos matemáticos se dá por meio das definições dos mesmos e que, durante a resolução de problemas são tais definições que são ativadas nas mentes dos estudantes e controlam o processo, as investigações mostram que a compreensão dos objetos matemáticos, por parte dos alunos, se dá por meio de suas experiências com situações diversas envolvendo tais objetos. Assim, Giménez e Machín (2003) destacam que é preciso então que: “se eduque progressivamente os hábitos dos estudantes, sobretudo daqueles que vão realizar estudos de Matemática não elementar, de forma que as definições façam parte de suas experiências e, portanto, de seus esquemas conceituais” (pp. 141-142).

Considerando-se a importância que as definições matemáticas adquirem nas aulas do ensino superior, destacam-se, nesta seção, algumas preocupações didáticas diretamente relacionadas às definições de alguns objetos matemáticos fundamentais do Cálculo observadas naqueles manuais utilizados em cursos ministrados aos graduandos em Matemática na Universidade de São Paulo entre as décadas de 1930 e 1990 e que, em livros didáticos atuais nem sempre estão presentes.

O manual *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy, adotado por Gomide no curso de Análise que esta docente ministrava para os alunos do primeiro ano em meados da década de 1950, evidencia, em alguns momentos, o cuidado do autor em explicitar aos leitores quais são aqueles elementos de fato essenciais para a caracterização de um determinado objeto matemático e que, portando, devem constar na definição do mesmo. Por exemplo, a representação de uma função por meio de uma expressão analítica é algo obrigatório e que deve fazer parte da definição de função? A este respeito, Hardy destaca que, embora muitas funções importantes tenham como característica especial o fato da relação entre a variável independente x e a variável dependente y poder ser “expressa por meio de uma *fórmula analítica*, a partir da qual o valor de y correspondente a um determinado valor de x pode ser calculado pela substituição direta do último" (Hardy, 1955, pp. 40-41 – tradução nossa), tal característica não é essencial à noção de função e, portanto, não deve estar presente na definição de tal objeto matemático. Hardy considera então, para exemplificar, a relação que associa a cada número natural x seu maior fator primo, denotado por y. Embora exista, neste caso, uma relação funcional, não há uma fórmula analítica que possibilite, a partir de um dado valor de x, obter, por meio de substituição direta em tal fórmula, o valor de y correspondente.

O livro *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold, utilizado em cursos ministrados na USP durante a década de 1980, traz preocupações a este respeito e o autor também volta sua atenção, em determinado momento, para este fato da existência de uma fórmula relacionando as variáveis independentes e dependentes de uma função não ser algo essencial a este conceito matemático. O autor afirma que: "intuitivamente, consideramos que uma quantidade y é uma função de outra quantidade x se existir alguma regra por meio da qual é designado um único valor para y para cada valor correspondente de x" (Leithold, 1977, p. 50), mas ao contrário do que indica a intuição, para existir uma relação funcional entre x e y, não é necessário que tais variáveis estejam relacionadas por meio de uma expressão analítica. A relação pode ser apresentada, por exemplo, segundo o autor, por meio de uma tabela. E então Leithold destaca que uma das finalidades das definições matemáticas é exatamente estabelecer o que, de fato, caracteriza determinado conceito, diferenciando aquilo que efetivamente é próprio do objeto matemático em questão daquilo que se pode observar em exemplos ou casos particulares a ele relacionados.

Calculus, de Michael Spivak, livro adotado em cursos ministrados na USP na década de 1990, também traz considerações a este respeito e, assim como na obra de Leithold, há a preocupação de esclarecer ao leitor que a definição formal de determinado objeto matemático não pode levar em consideração as imprecisões provenientes da noção intuitiva do mesmo. Em relação também ao conceito de função, Spivak inicia sua abordagem afirmando que irá definir, provisoriamente, função real de uma variável real como sendo "uma regra que associa a cada um de certos números reais um número real" (Spivak, 1975, p. 47 – tradução nossa). Em seguida, após apresentar diversos exemplos, destaca que o leitor deve perceber que:

> Uma função é uma *regra qualquer* que faça corresponder números a certos outros números, não necessariamente uma regra que pode ser expressa mediante uma fórmula algébrica, nem sequer mediante uma condição uniforme aplicável a todo número; nem é necessariamente uma regra que tenha alguma aplicação na prática. Mais ainda, a regra pode prescindir de alguns números e pode, inclusive, não estar totalmente claro a que números a função pode ser aplicada. (SPIVAK, 1975, pp. 48-49 – tradução nossa).

O autor salienta então que, embora tenha definido provisoriamente função como uma regra, o que isto quer dizer não está totalmente claro, mas, na verdade,

> O que realmente importa perguntar a respeito de uma função não é "o que é uma regra?" ou "o que é uma associação?" e sim "o que nos falta saber a respeito de uma função para que saibamos tudo sobre ela?". A resposta a última

> questão é fácil: para todo número x falta saber qual é o número $f(x)$ correspondente. (Idem, p. 57 – tradução nossa).

E então, por meio de um exemplo envolvendo pares ordenados e uma tabela de valores, Spivak finalmente apresenta a definição de função:

> Uma **função** é uma coleção de pares de números com a seguinte propriedade: se (a, b) e (a, c) pertencem ambos a coleção, então $b = c$; em outras palavras, a coleção não deve conter dois pares distintos com o mesmo primeiro elemento. (Ibid., pp. 57-58 – tradução nossa – grifo do autor).

Um aspecto bastante importante do ponto de vista conceitual e que, na medida em que a disciplina ministrada aos ingressantes no ensino superior passou a e se aproximar do Cálculo e se afastar da Análise e a adotar, consequentemente, manuais também de acordo com esta nova orientação, pouco a pouco foi sendo deixado de lado, diz respeito à necessidade de, para fazer sentido definir $\lim_{x\to a} f(x)$, a precisar ser um ponto de acumulação do domínio da função f. Até meados da década de 1960, essa questão era trabalhada pelos autores dos livros adotados como referências nos cursos ministrados; está presente nas notas de aula de Fantappiè, nas apostilas e nos livros de Catunda e no manual de Hardy. Por sua vez, tal discussão não aparece explicitamente nos livros de Protter e Morrey (1962), Moise, Piskunov, Leithold e nem mesmo no manual de Spivak que, conforme já foi destacado, foi utilizado, durante a década de 1990, em uma tentativa de, segundo o grupo de docentes envolvidos em tal experiência, retomar o rigor que havia caracterizado o curso de Cálculo da USP inicialmente e que estava, pouco a pouco, se perdendo. Na obra de Guidorizzi, essa questão merecia destaque nas apostilas que foram bastante utilizadas nos cursos de Cálculo ministrados em meados da década de 1970 e início da década de 1980, mas, deixou de ser discutida no primeiro volume do livro a que tais apostilas deram origem e que, desde então, tem sido constantemente adotado como referência nas disciplinas de Cálculo de diversas universidades brasileiras.

Refletindo o progressivo estabelecimento do modelo que preconizava inicialmente se ensinar Cálculo, sem, em um primeiro momento, se preocupar tanto com a formalização dos conceitos, os manuais que passaram a ser escritos com esta orientação optaram por, no curso destinado a alunos ingressantes, trabalhar apenas com funções de uma variável real, opção esta que, em geral, é informada aos leitores, de maneira bastante breve, nos inícios das obras. Desta forma, como em um intervalo da reta real todo ponto é de acumulação, não é necessário explicitar, ao definir $\lim_{x\to a} f(x)$, que a é um ponto de acumulação do domínio, pois tal condição é automaticamente satisfeita. E então, observa-se que, se o aluno não prestar a devida atenção à informação dada pelo autor de que no contexto da obra trabalhar-se-á apenas com funções de uma variável real e principalmente se não for auxiliado a perceber quais as implicações trazidas por tal observação, possivelmente poderá cometer enganos como dizer que, sendo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, então $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{5}{2}$, ao invés de perceber que, em tal situação, sequer faz sentido fazer referência a $\lim_{x\to 3} f(x)$, uma vez que 3 não é ponto de acumulação do domínio da função considerada.

Ao apresentarem-se considerações a este respeito, não se está, de forma alguma, afirmando que é necessário trabalhar com o conceito de ponto de acumulação de um conjunto, em um curso inicial de Cálculo, da mesma forma como se trabalha com esta ideia, usualmente, em uma disciplina de Análise. Em um contato inicial do estudante com o conceito, ele pode ser apresentado intuitivamente, da mesma forma como aparece, por exemplo, nas apostilas escritas por Guidorizzi durante a década de 1970. Neste material o autor apresenta, por meio da linguagem natural, a ideia de ponto de acumulação de um conjunto A afirmando que: "grosso modo, dizer que p é ponto de acumulação de A significa dizer que é possível encontrar pontos de A, *diferentes* de p, que estão tão próximos de p quanto se queira" (Guidorizzi, 1979, p. 46)". Em seguida, define, formalmente, o que é ponto de acumulação de um subconjunto dos números reais e, então, após apresentar exemplos e exercícios nos quais se discute como determinar os pontos de acumulação de um dado conjunto, o autor dá início a introdução da noção de limite, inicialmente por meio de exemplos geométricos, para, após algumas discussões formalizá-la e relacioná-la ao conceito de ponto de acumulação:

> Seja f uma função e p um ponto de acumulação do domínio de f. Dizemos que f *tem limite l em p* se para todo $\varepsilon > 0$ dado existir um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Tal número l quando existe é único e será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$ (lê-se limite de $f(x)$ quando x tende a p). (GUIDORIZZI, 1979, pp. 48-49).

Outro tipo de preocupação didática que está presente em três dos manuais analisados é evidenciar a diferença entre a definição de determinado objeto matemático e uma aplicação para a mesma. No livro de Hardy, por exemplo, antes da apresentação da definição da derivada, encontra-se o seguinte comentário:

> Apresentamos a noção de derivada ou coeficiente diferencial por meio de considerações geométricas. Mas, no conceito propriamente dito, não há nada geométrico. A derivada $\phi'(x)$ de uma função $\phi(x)$ pode ser definida, sem referência a qualquer tipo de representação geométrica de $\phi(x)$, pela equação
>
> $$\phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h};$$
>
> e $\phi(x)$ tem ou não derivada, para um valor qualquer de x, de acordo com a existência ou não desse limite. A geometria das curvas é apenas uma das muitas áreas da matemática na qual a idéia de derivada encontra aplicação. (HARDY, 1955, p. 213).

No manual de Moise também se detecta uma observação que evidencia preocupações a este respeito. Ao introduzir a ideia de integral definida por meio do limite de somas, o autor destaca:

> Até agora nesse livro, definimos a integral definida em termos de área, sendo as áreas acima do eixo x contadas positivamente e as abaixo, negativamente. Uma pequena dificuldade com esse esquema é que ele se baseia num conceito intuitivo (de área) e não numa teoria exata. Assim temos, no mínimo, algo inacabado. Mas existe uma objeção muito mais importante ao conceito de

> integral como área: ele é muito especial e dá ênfase às ideias erradas. Na maior parte do tempo quando calculamos uma integral definida, fazemos isso não para achar a área de uma região plana, mas sim para achar o limite de uma soma amostral. (MOISE, 1972, p. 303).

Spivak (1975), ao trabalhar com o conceito de integral, também evidencia uma preocupação desse mesmo tipo: visando evitar que, em razão da motivação geométrica adotada por ele ao apresentar as noções de somas superiores e de somas inferiores, o aluno, erroneamente, interiorize a ideia de que a noção de área é fundamental para a definição de tais somas, o autor salienta que se deve observar que, apesar da motivação geométrica adotada no manual, a definição formal de somas superiores e de somas inferiores não faz qualquer menção ao conceito de área.

Preocupações como essas manifestadas por Hardy (1955), Moise (1972) e Spivak (1975) em suas obras são pertinentes do ponto de vista didático, uma vez que, conforme salienta Lima, é comum, nos cursos de Cálculo, os alunos confundirem uma aplicação com a definição de determinado ente matemático ou até mesmo tomarem a aplicação como sendo a própria definição do objeto em questão. Observa-se, por exemplo, que muitos alunos tomam como definição de derivada de uma função em um determinado ponto o coeficiente angular da reta que, no ponto considerado, é tangente ao gráfico dessa função, quando, na realidade, essa é uma interpretação geométrica e não uma definição de tal ente matemático. Da mesma forma, muitos alunos definem integral como área quando, na realidade, o cálculo de áreas é somente uma das diversas aplicações do conceito de integral definida.

Reflexões destacando que ao se calcular a derivada de uma função não necessariamente busca-se o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função em determinado ponto (pode-se estar buscando, por exemplo, a velocidade de uma partícula da qual se conhece a função horária da posição) ou também que ao integrar uma função não necessariamente está sendo determinada a medida da área de uma região (pode-se, por exemplo, estar sendo calculado o trabalho realizado por uma força variável) poderiam estar presentes, explicitamente e de maneira enfática, em toda disciplina inicial de Cálculo e nos livros adotados como referências para as mesmas.

Outro exemplo de preocupação didática a ser destacada está presente no manual de Spivak (1975), na abordagem de diversos conteúdos, mas com maior ênfase na apresentação das noções de função e de limite. Inicialmente o autor apresenta uma definição provisória que, em seguida, é detalhadamente discutida e criticada, deixando explícita ao leitor, em razão das limitações detectadas na definição provisória, a necessidade de se introduzir uma definição matemática formal do objeto que está sendo discutido. Para esse autor, é importante que o leitor perceba que partir de uma definição provisória e chegar àquilo que, de fato, é a definição formal de determinado ente matemático, não é um trabalho que consiste apenas em encontrar sinônimos para termos que trazem dificuldades; essa transição deve servir para que fique evidente "como as ideias intuitivas podem ser incorporadas à matemática rigorosa" (Spivak, 1975, p. 57). Nessa preocupação evidenciada por Spivak, manifesta-se a necessidade da existência de uma relação dialética entre intuição e rigor nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo ou de qualquer outro conteúdo matemático. O estabelecimento de uma definição formal para determinado objeto não deve ser visto como um momento a partir do qual o aluno irá deixar de lado as características e as conjecturas levantadas, por meio de uma abordagem mais intuitiva, relativas ao ente matemático em questão. A definição formal não é uma substituição da noção intuitiva, mas sim uma forma precisa, do ponto de vista da linguagem e do rigor da Matemática, de expressar a ideia central nela presente e, por essa razão, o estudante pode (e deve) continuar levando em consideração aquilo que compreendeu recorrendo à intuição.

Esse processo de transição de uma definição provisória para a definição formal pode ser ilustrado por meio do procedimento adotado por Spivak (1975) ao trabalhar com a noção de limite. Depois de utilizar, em diversos exemplos, a definição provisória anteriormente apresentada, passa a destacar os problemas existentes na mesma, e após uma argumentação por meio da qual começa a fornecer aos leitores pistas relativas aos aspectos que deverão ser levados em consideração para a formalização da noção que está sendo estudada, constrói, passo a passo, a definição formal de limite de uma função. A descrição detalhada de tal procedimento encontra-se nas páginas 109 e 110 do manual supracitado.

Destaca-se que um dos professores envolvidos na experiência adotada na USP de ministrar Cálculo tomando-se como referência o manual de Spivak adotava em suas aulas uma estratégia bastante semelhante à do autor, mas, ao invés de recorrer às definições provisórias, lançava mão de demonstrações provisórias ou de “rascunhos” de demonstrações, como ele mesmo as denominava. Lima (2012), durante a coleta de dados para sua tese de doutorado, teve acesso ao caderno de um aluno desse professor e pôde observar, por exemplo, como o docente demonstrava que, sendo $f(x) = x^2$, então $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$:

Rascunho:

Sei que $|x-2| < \delta$. Quero $|x^2 - 4| < \varepsilon$

$|(x-2).(x+2)| = |x-2|.|x+2| < \varepsilon$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$$

Não pode ser, pois δ não pode ser dado em função de x. Portanto, faz-se:

Seja δ tal que $|x+2| < M$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4$$

Se $|x-2| < 1$, então $|x+2| < 5$. Quero $|x-2| < \delta$. Portanto $\delta < 1$ e $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, temos:

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x-2).(x+2)| = |x-2|.|x+2| =$$

$$= |x-2|.|x-2+4| \leq |x-2|.(|x-2|+4) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{5}.(1+4) = \frac{\varepsilon}{5}.5 = \varepsilon.$$

Observa-se que, do ponto de vista didático, esse processo detalhado de construção de uma definição formal a partir de uma definição provisória ou mesmo de uma demonstração a partir de um rascunho parece favorecer ao estudante a compreensão do papel de cada um dos elementos e símbolos presentes na mesma. Esse tipo de abordagem evidencia a possibilidade de, de maneira exequível, se apresentar o Cálculo por meio de um tratamento que considere o rigor simbólico-formal da Matemática, mas nem por isso seja incompreensível para o aluno.

4. Considerações finais

Conforme destacado na introdução desse trabalho, não se confirma a ideia manifestada por alguns professores de um dos autores desse artigo de que, atualmente, os alunos enfrentam dificuldades nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral devido à forma com que esse conteúdo é trabalhado e aos livros que, hoje em dia, são indicados como referências. É comum observar pessoas que construíram sua formação já há algum tempo e que vivenciaram experiências educacionais bastante diferentes das observadas no presente momento supervalorizarem tais experiências, sem qualquer tipo de análise crítica aprofundada a respeito das mesmas. De maneira análoga, observa-se que muitas pessoas que estão se formando nos dias atuais têm a tendência de rechaçar, também sem antes analisá-las criticamente, práticas adotadas em contextos educacionais anteriores àqueles que estão vivenciando. É preciso ponderação de ambas as partes para que, na busca por práticas que possam efetivamente garantir a aprendizagem dos alunos do mais diversos níveis educacionais, possa-se levar em consideração não somente os erros do passado, mas também seus acertos, e não somente os avanços trazidos pelas tendências em vigor no momento, mas também suas limitações e retrocessos em relação àquilo que já havia sido posto em prática em algum momento.

No caso específico do processo de ensino do Cálculo Diferencial e Integral, se, por um lado, pode-se perceber, analisando a implantação e o desenvolvimento dessa disciplina no ensino superior brasileiro, que realmente em um primeiro contato dos alunos com tal conteúdo deve-se valorizar a construção, por parte dos mesmos, de significados para os conceitos centrais desse campo de conhecimento e também a manipulação dos mesmos, por outro se pode notar que, pouco a pouco, interpretações equivocadas dessa ideia acabaram ocasionando a transformação de muitos cursos iniciais de Cálculo ministrados no país segundo duas orientações distintas; (i) transformar tais cursos em coletâneas de técnicas, esvaziando-os daquelas discussões conceituais que são centrais mesmo em um contato inicial do estudante com a disciplina ou (ii) transformar tais cursos em uma série de teoremas seguidos de suas demonstrações sem dar ao aluno qualquer possibilidade de compreensão efetiva daquilo que está sendo apresentado e, contraditoriamente, cobrando do mesmo apenas o domínio de técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais. Da mesma forma, observa-se que, paulatinamente, grande parte dos livros de Cálculo que foram sendo produzidos por autores nacionais e internacionais e que passaram a ser adotados como referências nas universidades brasileiras, visando adequar à apresentação do conteúdo a um nível de rigor mais compatível à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior, acabaram deixando de lado preocupações didáticas importantes, dentre as quais aquelas explicitadas nesse artigo e presentes em textos utilizados como referências em cursos de diferentes épocas.

É importante salientar que a busca contínua por estratégias que possam minimizar os problemas observados nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, não necessita nem de uma supervalorização e nem de uma subvalorização das experiências e práticas já adotadas e/ou vivenciadas em diferentes épocas, bem como dos manuais utilizados como referências durante as mesmas. É preciso que se tome consciência de que, conforme pontua Rezende (2003) e complementa Lima (2012), a disciplina inicial de Cálculo necessita, no Brasil especificamente desde a implantação do curso de Análise Matemática na USP em 1934, de uma identidade.

A construção de tal identidade é urgente e pode ser beneficiada tanto por preocupações, especialmente do ponto de vista didático-pedagógicas, observadas em experiências e manuais adotados em cursos do passado, quanto em resultados de pesquisas recentes, livros atuais e práticas em vigor que têm se mostrado eficientes para que o aluno, de fato, tenha condições de construir conhecimentos relativos ao Cálculo. É preciso, dentre outros fatores importantes, que o curso inicial de Cálculo permita que o rigor e a intuição estabeleçam uma relação dialética, que a aprendizagem relacional da Matemática seja valorizada pelo docente e perseguida pelo aluno e que se busquem, tanto nas aulas quanto nos textos que servem de referência para as mesmas, maneiras adequadas de contextualizar aquilo que está sendo trabalhado, isto é, formas de possibilitar uma abordagem na qual os conceitos estudados sejam efetivamente compreendidos pelo aluno em seu ambiente de origem, que é o ambiente matemático, e na qual estejam vinculados a outros conhecimentos de forma articulada, mostrando-se, assim, efetivamente necessários ao contexto matemático e não como algoritmos isolados.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los câmbios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), vol. 1, n. 1, 40 – 55. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf

CANTORAL, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo baseada en La cognición. *Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matematica Educativa*, Universidad de Panamá, Panamá. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf

D´AMBROSIO, U. (2009). *Entrevista concedida a Gabriel Loureiro de Lima*. São Paulo, 18 de fevereiro.

DEMIDOVITCH, B. (1977). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática* . Editora Mir, Moscou.

DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

FISCHER, B. T. D. (2009). Docência no ensino superior: questões e alternativas. *Educação*, vol. 32, n. 3, 311 – 315. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5778/4199

GASCÓN, J. (1997). *Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. Revista SUMA*, 26, 11-21.

______. (2009). El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 11, n. 2, 273 – 302. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2184/1805

GIMÉNEZ, C. A; MACHÍN, M. C (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. X, n. 2.

GUIDORIZZI, H. L. (1979). *Um Curso de Cálculo (capítulos 2 e 3).* São Paulo.

HARDY, G. H. (1955). *A Course of Pure Mathematics*. University Press: Cambridge, Tenth Edition.

HENRIQUES, A. C. C. B. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. Tese de doutorado. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Acesso em 21 de novembro de 2014 em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2465/1/ulsd059643_td_Ana_Henriques.pdf

HOLTON, D. (2001). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series*: Vol.7.

LEITHOLD, L. (1977). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução de Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. Editora Harper & Row do Brasil Ltda, São Paulo.

LIMA, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento de 1934 a 1994.* Tese de doutorado. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática – PUC-SP. São Paulo.

______. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de Cálculo na graduação em Matemática da USP. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 16, n.1, 125-149. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16741/pdf

LUCAS, C. O.; FONSECA BOM, C.; GASCÓN, J.; CASAS, J. M. (2014). Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 16, n. 3.

MARCOLINI, M. e PERALES, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para La educación universitária. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), vol. 8, n. 1, 25 – 68. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://www.clame.org.mx/relime/200502a.pdf

MOISE, E. E. (1972). *Cálculo: um curso universitário – volume 1* – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. das G. C. (2002). *Docência no Ensino Superior*. Editora Cortez (coleção Docência em Formação v. 1), São Paulo.

PISKUNOV, N. (1969). *Cálculo Diferencial e Integral – tomo 1*. Editora Mir, Moscou.

PROTTER, M. H. e MORREY JR, C. B. (1962). *Calculus with Analytic Geometry: a first course*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

REZENDE, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* Tese de doutorado. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SILVA, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, vol.13, n. 3, 393 - 413. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7101/5993

SPIVAK, M. (1975). *Cálculo Infinitesimal***.** Reverte, Barcelona.

TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

TÁBOAS, P. Z. (2005). *Luigi Fantappiè: influências na Matemática brasileira. Um estudo de História como contribuição para a Educação Matemática*. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo.

Benedito Antonio da Silva
beantonio.silva@gmail.com
Rua Dr. Diogo de Faria, 561 - Ap. 62 - Vila Clementino, São Paulo – SP, Brasil.
CEP: 04037-003
Tel (11) 5575.1943.
CV: graduado, mestre e doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente em investigações sobre o processo de ensino e aprendizagem das noções do Cálculo, sob o ponto de vista das componentes: saber, aluno e professor dos diferentes níveis de ensino. Orientou as teses premiadas com Menções Honrosas na área de Ensino no Prêmio Capes de Teses 2013 e Prêmio Capes de Teses 2014.

Gabriel Loureiro de Lima
gllima@pucsp.br
Rua Bragança Paulista, 41 – Jardim Pacaembu, Jundiaí-SP, Brasil.
CEP: 13218-250
Tel (11) 4533-8330 ou (11) 9-9507-4935.
CV: bacharel, licenciado e mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do Departamento de Matemática da PUC-SP e coordenador do Curso de Matemática-Licenciatura, da mesma instituição. Tem como principal área de interesse o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Sua investigação de doutorado, orientada pelo Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, recebeu menção honrosa na área de Ensino no Prêmio Capes de Teses 2013.