UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 9-31

www.fisem.org/web/union

Firma Invitada:

Agujeros negros numéricos y otras joyitas matemáticas como herramientas para la resolución de problemas (RdP´s)

Sixto Romero Sánchez

"Una mirada matemática de las cosas es siempre posible y que, como en una novela o una canción, pueda aparecer la emoción, el misterio y la belleza"

Resumen	Se puede pensar que es redundante mencionar la Resolución de Problemas (RdP´s) cuando se habla de hacer matemáticas. El proceso de creación matemática es un proceso basado en la resolución de problemas. Puede ser que este término sea muy fuerte pero sea creación o descubrimiento, la RdP´s es el proceso natural asociado. *¿Quién duda que la Matemática ha avanzado a través de la historia a partir del planteamiento y abordaje de problemas?* En este trabajo a partir de lo que denomino Joyitas Matemáticas podemos conseguir que el/la estudiante mejore sus actitudes y concepciones utilizando la RdP´s como vehículo del aprendizaje matemático
Abstract	You may think it is redundantly to mention Problem Solving when talking about doing mathematics. The process of mathematical creation is a process based on problem solving. It may be that this term is very strong but is creation or discovery, Problem Solving is the associated natural process. Who doubts that mathematics has advanced through history from the approach and addressing problems? In this work, from what I call "Joyitas Matemáticas" we can get him / the student to improve their attitudes and conceptions as using Problem Solving vehicle's mathematical learning
Resumo	Você pode pensar que é redundante falar de Resolução de Problemas (RdP´s) quando se fala em fazer matemática. O processo de criação matemática é um processo baseado na resolução de problemas. Pode ser que este termo é muito forte, mas é a criação ou descoberta, da RdP´s é o processo natural associado. Quem duvida que a matemática tem avançado ao longo da história da abordagem e resolução de problemas? Neste trabalho, a partir do que eu chamo de "Joyitas Matemáticas "que pode levá-lo / a aluno a melhorar suas atitudes e concepções como a utilização de aprendizagem matemática do veículo de RdP´s.

1. La Resolucion de Problemas (RdP´s) como vehículo del aprendizaje matematico

1.1 . Introducción

Se puede pensar que es redundante mencionar la Resolución de Problemas (RdP´s) cuando se habla de hacer matemáticas. El proceso de creación matemática es un proceso basado en la resolución de problemas. Puede ser que este término fuese muy fuerte pero sea creación o descubrimiento, la RdP´s es el proceso natural asociado. ***¿Quién duda que la Matemática ha avanzado a través de la historia a partir del planteamiento y abordaje de problemas?*** Estos dos procesos que podemos resumir como resolución de problemas, han impulsado su enorme crecimiento y, lo que es más importante, caracterizan la labor del matemático como tal. Este puede ser un motivo más que suficiente para que la RdP´s esté presente en la enseñanza. Y no debe estar de forma anecdótica, sino como caracterizadora del proceso de formación matemática de los alumnos. Habrá ejercicios, en particular, y otras estrategias metodológicas, pero, en general, deberán provenir del planteamiento y enfrentamiento a problemas: será su resolución lo que motive la dedicación a otras tareas, incluyendo en éstas la presentación de conceptos. Ahora bien, para llevar esto a cabo, el profesor necesita ser consciente de lo que conlleva hacer RdP´s en el aula; en particular, ha de tener claro para qué lo hace (que puede conseguir, cuál es su finalidad) y en algunos elementos propios del proceso (fases y hallazgos) que puedes ayudar a los alumnos a progresar como resolutores.

1.2. Finalidad

La respuesta a la cuestión de la finalidad de la RdP´s es aludir a las recomendaciones de los diseños curriculares. Es una respuesta administrativa que todo matemático debe tener en cuenta y ponerlo en práctica desde la óptica de la Educación Matemática. Desde el punto de vista de las actitudes y concepciones el papel de la RdP´s como vehículo del aprendizaje matemático, entre otras, hay que destacar que:

en niveles sucesivos. En este proceso los alumnos crean su conocimiento matemático, pero además, en ocasiones, llegan a obtener resultados que no suelen aparecer en los manuales.

a) *Proporciona una visión integral e integrada de la Matemática.*

Los núcleos temáticos no son compartimentos estancos.

b) *Facilita la introducción significativa de nuevos conceptos.*

c) No debe emplearse la RdP´s exclusivamente a la hora de aplicar los conocimientos *Desarrolla una actitud abierta.*

No se puede pretender desarrollar una actitud abierta si las tareas matemáticas propuestas por el profesor se caracterizan por tener una única forma de abordarse, una única solución y una única manera de entender el enunciado.

d) *Establece diferentes etapas de dinamización en la evolución del conocimiento.*

Algunos problemas ponen de manifiesto que diferentes procedimientos pueden conducir a solucionar la misma situación, incluso pudiendo plantearse el mismo problema previamente adquiridos, sino como vehículo introductorio.

e) *Pone de relieve los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa.*

Los alumnos deben ser capaces de llevar a cabo procesos inductivos y deductivos según convengan. Importante, y por qué no riguroso, es que los alumnos entiendan qué significan rigor y cómo puede aplicarse.

f) *Muestra la utilidad de la Matemática en la vida.*

g) *“Desea” que el alumno no establezca el centro educativo como un mundo paralelo al real*.

h) *Desarrolla estrategias para cualquier ciudadano*

Las estrategias de descubrimiento empleadas en los problemas matemáticos son extensibles a los problemas de la vida real, por lo que los alumnos se convierten en individuos más competentes y capaces de enfrenarse a situaciones nuevas.

Los apartados anteriores conforman lo que serían las características deseables para la reflexión en cualquier alumno aunque existen más.

Por último, una característica que debe estar presente en toda persona:

i) *Favorece la capacidad reflexiva del alumno*

No sólo es importante que los alumnos se enfrenten a problemas, sino que sean capaces de discutir sus propios procesos de resolución.

1.3. Fases en la RdP´s

Sobre las diferentes fases de la RdP´s mucho se ha escrito; no obstante de manera general se entiende que cualquier resolutor puede viajar por momentos en los que trata de comprender el enunciado, otros en los que intenta elaborar un plan, que a continuación ejecuta, y por otros momentos en los que revisa lo que ha hecho o trata de extender o generalizar el problema. Es de todos conocido el modelo descriptivo de Polya cuando en 1945 establece las necesidades para aprender a resolver problemas. El principal fin del citado autor es el de ayudar a que el alumno adquiera la mayor experiencia en la tarea de la RdP´s, por lo que el enseñante debe ser el guía que en todo momento dejará asumir al alumno la parte de responsabilidad que le corresponde. Polya considerado el padre de la Heurística matemática, estableció las cuatro fases en la RdP´s:

a) ***Comprensión***: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

b) ***Planificación***: ¿Se ha hallado un problema semejante? ¿Existe alguno relacionado con éste?¿Se puede enunciar de otra forma? ¿Se han utilizado todos los recursos?

c) ***Ejecución***: ¿Hay corrección en los pasos iniciados?

d) ***Verificación***: examinar la solución obtenida y verificar el razonamiento y resultado cuando sea posible

Son muchas las etiquetas que se han colocado a las fases, hoy día existe cierto consenso en que, bajo una denominación u otra, son las anteriormente citadas. En cuanto a los hallazgos o heurísticos, Schoenfeld (1980) considera que "…*un hallazgo* es una *insinuación o sugerencia general o estrategia, independiente de cualquier tópico particular o materia de estudio, que ayuda al resolutor a aproximarse y comprender un problema y ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo…"* Con esta definición Carrillo (2001) propone la siguiente lista de heurísticos, clasificados en función de las diferentes fases por las que transita un resolutor cuando se enfrenta a un problema.

1.3.1. Hallazgos para la fase de comprensión

- Imaginar mentalmente la situación. Releer el enunciado. Seleccionar el material adecuado. Disponer de un modelo manipulativo. Utilizar algún tipo de esquema gráfico (dibujar un diagrama**).**

- Ejemplificar
- Expresar en otros términos
- Formular con otras palabras la situación descrita en el enunciado.
- Introducir notación adecuada.

1.3.2. Hallazgos para la fase de planificación y exploración

- Simplificar
- Estimar
- Buscar regularidades con intención de generalizar
- Tantear aleatoria o sistemáticamente
- Considerar problemas equivalentes
- Buscar contraejemplos
- Asumir la solución.
- Planificar de forma jerárquica la solución
- Descomponer el problema
- Explorar problemas similares
- Conjeturar.

1.3.3. Hallazgos para la fase de ejecución

- Registrar todos los cálculos
- Resaltar los logros intermedios
- Actuar con orden y precisión
- Explicar el estado de la ejecución

1.3.4. Hallazgos para la fase de verificación

- Analizar la consistencia de la solución
- Expresar de otra forma la solución
- Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera.
- Analizar la consistencia del proceso.
  Describir esquemáticamente el trabajo. Analizar la corrección de cada paso. Evaluar la conveniencia de cada estrategia.
- Generalizar.

A modo de resumen: para resolver bien los problemas se debe poseer un conocimiento profundo de la materia, dominar una serie de estrategias y ser capaz de regular el proceso de resolución en cuanto a la aplicación de sus conocimientos y estrategias.

Se insiste mucho en que los estudiantes ***hagan***, lo que es muy importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también reflexionen sobre lo que **hacen**. Si pretendemos mejorar la capacidad de nuestros alumnos ante la resolución de problemas, hemos de propiciar las ocasiones en las que reflexione sobre su proceder.

1.4. Dominios inexplorados

La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares, y concebida por diferentes estatus: enseñantes, pedagogos, autores de manuales escolares e investigadores en didáctica de las matemáticas. Se dirige a un público variado y puede ser entendida de varias formas.

Con este trabajo quiero poner de manifiesto como en la vida diaria podemos encontrar bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado.

Se propone como actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situación problemática. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. Los referentes que expondremos servirán para la motivación para el alumno y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Hay muchos dominios matemáticos casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Por ejemplo, estaría bien explorar y trabajar en:

- Teoría de Grafos y Optimización
- Teoría del Caos
- Topología
- Tratamiento de la Información
- Teoría de códigos y criptografía
- Modelos matemáticos
- Fractales, etc.

Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal.

En este sentido me permito hacer referencia al Proyecto Klein. La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos y la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Félix Klein (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un congreso internacional de educación matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996. En España, por ejemplo, la representación ante ICMI se estructura a través de una subcomisión del CEMAT, siguiendo el modelo IMU/ICMI.

Hace 102 años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, el

Profesor, Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito. Se pueden mencionar las múltiples traducciones (la más antigua en castellano que conocemos, la emprendida por el precursor del CSIC en 1927, que se encuentra en vías de digitalización en este momento) y ediciones de la misma –dos recientes: en castellano, la de la editorial Nivola, en el año 2006, o la de la popular editorial Dover, en 2004, en inglés. Pero, sobre todo, constituye una de esas raras ocasiones en las que un investigador de primera fila escribe una obra específicamente dirigida a facilitar a los profesores de secundaria una visión estimulante y viva sobre el contenido del currículo.

Félix Klein trataba de remedar, en su obra, la falta de conexión –«…*desde principios del siglo XIX…*»– entre la enseñanza de las matemáticas no universitarias y los resultados de la investigación. Pero han pasado más de cien años desde entonces y a lo largo del siglo XX las matemáticas han soportado una crisis de fundamentos, se han abierto, con el advenimiento de los computadores, a nuevos ámbitos de actividad, han logrado resolver problemas centenarios… Distintas ramas de las matemáticas, como la Estadística y la Investigación Operativa, han surgido (y otras han desaparecido en la práctica) en este periodo, así como nuevos e inimaginables –hace cien años– ámbitos de aplicación…

El *Proyecto Klein* es una iniciativa conjunta de IMU/ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro citado anteriormente.

Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. Se persigue, en definitiva, acercar al currículo escolar los múltiples –y en muchos casos, insospechados– ámbitos de presencia de las matemáticas en la sociedad actual, alcanzados gracias a la investigación desarrollada durante los últimos cien años y que, por tanto, no pudieron ser reflejados en la obra original de Klein. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos.

El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos. Entre otras acciones está prevista la organización de una serie de “Conferencias Klein” para facilitar la difusión del proyecto y la participación en el mismo de distintos colectivos.

Tras la aprobación del proyecto por los comités ejecutivos de ICMI e IMU en marzo y abril de 2004, respectivamente, se ha procedido a constituir ***La Comisión Klein.*** Es una comisión que ha de diseñar y llevar a término, en los próximos cuatro años, dicho proyecto, formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador –W. Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda– consensuado por ambas partes. La Comisión Klein está constituida en la actualidad por los profesores:

- Michèle Artigue, Universidad de Paris VII, Francia
- Ferdinando Arzarello, University de Turín, Italia
- Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney, Australia
- William McCallum, Universidad de Arizona, USA
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España
- Christiane Rousseau, Universidad de Montreal, Canadá
- Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg, Alemania

Se estima que la comisión mantendrá un par de reuniones anuales, y que organizará dos o tres conferencias para recabar ideas y/o difundir la marcha de sus trabajos. Además la comisión distribuirá sus miembros en algunas subcomisiones creadas para atender diversos aspectos concretos (creación de una serie de DVD’s, desarrollo de una wiki, etc.) del trabajo. Dichas subcomisiones deberán, establecer un calendario de reuniones. La primera reunión tuvo lugar en Madeira, en Octubre de 2009 y el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos de Castro Urdiales (Santander-España) organizó la segunda el 2 y 3 de junio de 2010, con el objetivo de que la comunidad matemática española se involucre en el proyecto y haga sugerencias explícitas que ayuden al equipo a responder las preguntas que se plantea, tales como "*¿Cuáles son los desarrollos matemáticos del Siglo XX que los profesores de secundaria deberían conocer, y cómo se les pueden hacer accesibles?*".

La Comisión aprobó la realización de un libro de cerca de 300 páginas, con el objetivo de inspirar a los profesores de secundaria en la tarea de acercar a sus estudiantes a un panorama más completo sobre el creciente y complejo papel de las matemáticas en el mundo de hoy. Ese libro estaría acompañado por diversos recursos audiovisuales y web.La duración estimada del proyecto es de cuatro años.

El libro no pretende ser enciclopédico ni la última palabra en cada campo, pero con independencia de la estructura que finalmente se adopte en cada uno de sus capítulos, el texto tratará de enfatizar las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y ciertos temas genéricos (como el impacto de los ordenadores). No habrá un capítulo dedicado específicamente a la didáctica de las matemáticas, pero su presencia se hará notar implícitamente en muchas ocasiones.

La Comisión Klein quiere recabar la participación activa de todos aquellos que trabajan alrededor de las matemáticas, ya sean investigadores o docentes, en este proyecto que acaba de comenzar. Además de estar abierta a la recepción de comentarios por escrito, la Comisión planea organizar diversas "Conferencias Klein" en diversos lugares del mundo, donde espera recabar sugerencias y percibir la reacción de los asistentes a las mismas sobre los materiales, en fase de desarrollo y consulta, que presente. La redacción final del libro correrá a cargo de autores invitados, de probada capacidad narrativa y divulgadora. En este contexto, la Comisión quiere invitar ahora a enviar comentarios sobre la siguiente elección de títulos para los capítulos del libro:

- Introducción
- Capítulos temáticos
  - Aritmética
  - Lógica
  - Algebra y Estructuras
  - Geometría
  - Funciones y Análisis
  - Matemática Discreta y Algorítmica
  - Matemáticas de la Computación
  - Probabilidad y Estadística
- Capítulos misceláneos
  - Interdisciplinariedad (esto es, conexiones internas)
  - Las matemáticas como disciplina viva en la ciencia y la sociedad
  - ¿Cómo trabajan los matemáticos?

2. Modelización Matemática

En la presentación ulterior de varios ejemplos para diferentes niveles de enseñanza, cada uno de ellos ilustrativo de los diferentes niveles de complejidad que pueden aparecer en el proceso de matematización, se puede hacer de forma explícita el marco teórico que fundamenta globalmente cada uno de los pasos dados, los enfoques adoptados o los resultados obtenidos.

Modelar matemáticamente significa que con el desarrollo de los ejemplos se pone también de manifiesto las conexiones entre la resolución de problemas y el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas; en definitiva, conseguir el descubrimiento o la creación de modelos y teorías, es uno de los objetivos.

En cuanto al papel que asume el alumno o alumna en el proceso, es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, sólo hay una diferencia: el nivel de los conocimientos con los que se trabaja (los casos que se van a estudiar pueden corresponder a diferentes niveles de enseñanza: Secundaria, ESO, Bachillerato e incluso Universidad).

Soy consciente de la dificultad que entraña tratar este tema en determinados niveles de enseñanza pero me gustaría formular y fundamentar algunas ideas para justificar el concepto de modelización:

- *¿Qué aspectos del proceso de creación y/o descubrimiento en Matemáticas debemos focalizar para que al ser llevados al aula podamos conseguir los objetivos didácticos que nos hayamos planteado?*

- *¿Podemos en Secundaria o Bachillerato, con el alumnado de estas edades, vivir el proceso utilizando como marco teórico algunas ideas sobre el mismo junto con los modelos de RP?*

Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:

- Profundizar en los métodos propios de investigación en matemáticas: la particularización, la búsqueda de leyes generales, la construcción de modelos, la generalización, el uso de analogías, conjeturas y demostraciones.
- Utilizar modelos matemáticos para la mate matización de la realidad y la resolución de problemas, experimentando su validez y utilidad, criticando sus limitaciones, mejorándolos y comunicando sus resultados y conclusiones.
- Practicar la resolución de problemas como la actividad más genuina en cualquier campo específico de las matemáticas.
- Acercar a los alumnos y alumnas a los conocimientos matemáticos priorizando el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de modelos explicativos, la indagación y el descubrimiento.
- Propiciar que los alumnos/as vean el verdadero rostro de las matemáticas, asumiendo en muchos momentos el papel de matemático investigador.
- Preparar a nuestros estudiantes para la invención, incrementando el gusto por ella y *regando sus gérmenes inventivos.*
- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza del conocimiento y quehacer matemático y sus resultados.

Estos planteamientos didácticos deben ir acompañados de una reflexión personal sobre las principales ideas que pueden ayudar a situarnos en cada momento o a explicarnos, de manera coherente, el tipo de situaciones que están pasando o que nos vamos encontrando.

Conviene recordar los distintos niveles de resultados, que podemos obtener en el tratamiento de la información a lo largo del proceso:

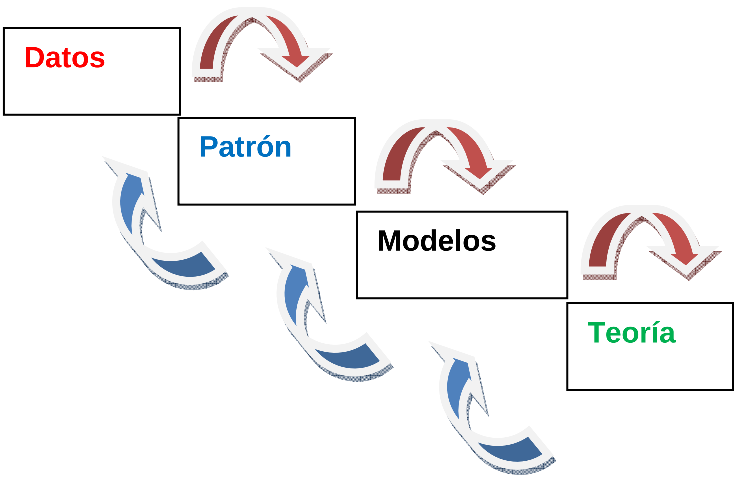


Figura 1. Tratamiento de la información

Si nos centramos en la construcción de modelos, nuestro marco de referencia sitúa esta tarea dentro del proceso de *matematización* de la realidad, caracterizado también por la puesta en práctica de estrategias de pensamiento útiles en cada fase.

3. Joyitas matemáticas

3.1. Joyita 1. En la RdP´s de Geometría: Problema de Dobögókó

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención. Con este problema de optimización de un caso de la vida real, presentamos el estudio y desarrollo de algunas formas geométricas y expresiones que aparecen en el espacio que configura el hábitat de unos pájaros en los jardines del Hotel Manreza en la provincia de Dobogókó en Hungría a unos 60 Kms. de Budapest como consecuencia de la observación directa del autor.

3.1.1. Contextualización del problema

3.1.1.1. Situación. Los jardines del Centro de Convenciones de Manresa (Dobogókó), un poblado de tilos, plátanos y una gran variedad de coníferas

Figura 2. Jardines del Centro de Convención Manreza (Dobogökó)

3.1.1.2. Información. Había carteles con información acerca de los hongos y los pájaros de ese entorno. Como una invitación a proteger a las aves se muestran al visitante algunos modelos de casitas que pueden ser construidas como refugios para aquéllas. En cada caso se incluye un croquis y las medidas para facilitar la construcción. La mayoría de los modelos tiene la forma de un paralelepípedo, salvo uno- particularmente interesante-que se asemeja a un prisma recto de base triangular.

Figura 3. Hábitat para pájaros

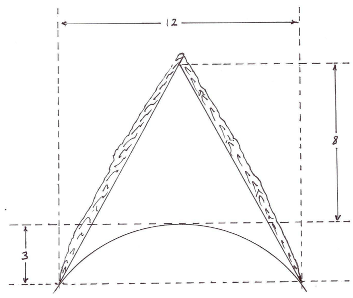


Figura 4. Croquis del hábitat

3.1.2. Cuestión: El problema de Dobogókó

Para la construcción de la casita- Ver Fig.3 y Fig.4- y como el refugio ha de adosarse a un tronco cilíndrico, con las medidas que aparecen en la Fig. 3, hallar el radio mínimo del tronco al que puede adherirse el refugio de modo que su altura sea de por lo menos de 8 centímetros.

3.1.3. Resolución. Sugerencias a las formas de resolución

Es importante que el alumno/a se ejercite en la toma de decisiones en función de criterios. Este es un problema que les puede proporcionar la oportunidad de decidir los criterios en función de los cuales un radio va a convenir más que otro. Respuestas basadas en que los pajaritos deben tener una vivienda amplia, o que el circulo de entrada sea suficiente estable para evitar que entren otros *inquilinos no deseables*. De cualquiera de las maneras debe tratarse de dirigir al alumno/a hacia criterios que puedan modelizarse matemáticamente, emergiendo el criterio de adosamiento al árbol (tronco cilíndrico). Esto debe dar motivos para, según el nivel de enseñanza donde nos encontremos, abordar el problema de diferentes maneras. En cualquier caso, una cuestión específica sería averiguar el radio mínimo con los datos que se han proporcionado.

También el alumno debe enfrentarse a este problema con la capacidad de discutir su propio proceso de resolución, intentando ver o descubrir las diferentes formas de resolución. Para ello debe tener claro las fases y los hallazgos citados ut-supra. En función de las diferentes fases por las que un alumno/a debe transitar en la RdP´s está claro que puede utilizar los hallazgos correspondientes. Haremos especial énfasis en algunos de éstos según sean en cada uno de los modelos de resolución que planteamos.

Modelo 1. Utilización del teorema de Pitágoras

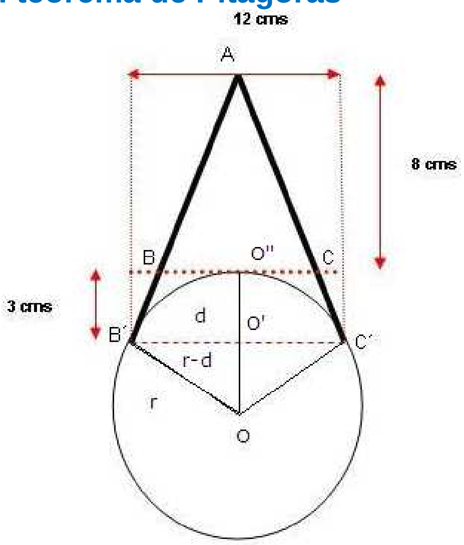


Figura 5. Esquema disposición del hábitat

Esta aproximación al problema trata de reunir el uso de incógnitas con varios temas geométricos y fórmulas del Teorema de Pitágoras.

En el triángulo OO'B', llamamos a B'C'= L. Como OO'= r-d y B'O'=L/2 se tiene

$$r^2 = (\frac{L}{2})^2 + (r-d)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2 + d^2 - 2rd \Rightarrow L^2 + 4d^2 - 8rd = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{L^2 + 4d^2}{8d}$$

Una primera restricción que determina el radio del tronco en que se sitúa la *casita* del croquis donde L=12 y d=3 se tiene que

$$r = \frac{12^2 + 4.3^2}{8.3} = \frac{144+36}{24} = \frac{180}{24} = 7.5$$

Modelo 2. Utilización del Teorema de Thales

En desarrollos anteriores no ha aparecido el número 8 que se refleja en el croquis de la Fig. 4 de los paneles informativos del jardín. Surge, por tanto, la pregunta, ¿por qué aparece en el croquis junto al árbol el número 8 que representa la altura del triángulo ABC en la Fig. 6?

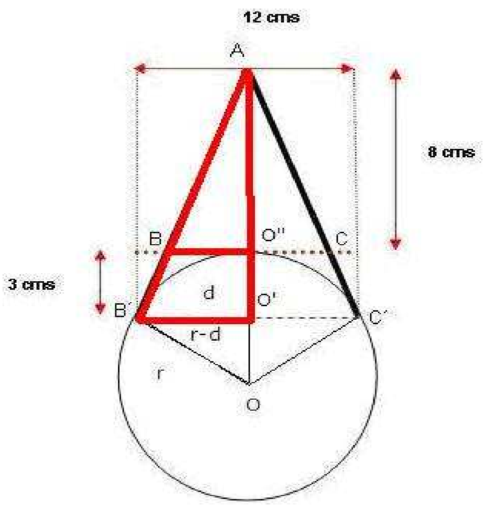


Figura 6. Esquema disposición del hábitat

Para dar respuesta a esta interesante cuestión e intentar justificar la presencia del número 8, apliquemos el teorema de Thales al triángulo AB'O' que aparece en la Fig.6. Con la identificación de los triángulos semejantes del croquis, se cumple que:

$$\frac{B'O'}{O'A} = \frac{BO''}{O''A}$$, por lo que tenemos $B'O' = O'A(\frac{BO''}{O''A})$

Por lo tanto se obtiene la siguiente relación

$\frac{L/2}{b} = \frac{d+h}{h}$, siendo h la altura del triángulo ABO'', y b la mitad de la base del triángulo ABC. Tomando los datos que aparecen en el croquis para $L=12$, y por lo tanto $d=3$ como se ha demostrado ut-supra, se tiene la relación entre h y b

$$h = \frac{3b}{6-b}$$

Al llegar a esta expresión en un intento de que el alumno/a pueda comprobar la consistencia de la heurística empleada puede ensayar dándole valores a b y su correspondiente h.

a) Por ejemplo, dándole a $h=8$ se tiene que $b=\dfrac{48}{11}$. Este resultado debe ser consistente ya que aplicando el teorema de Thales en la Fig.7, para los valores $h=8$ y $d=3$ se tiene

$\dfrac{AB}{AB'}=\dfrac{8}{11} \Rightarrow \quad AB=AB'(\dfrac{8}{11})$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AB'O' se obtiene $AB'=\sqrt{36+121}=\sqrt{157}$ por lo que $AB=(\dfrac{8}{11})\sqrt{157}$. De aquí podemos calcular

$$b=BO''=\sqrt{(AB)^2-(AO'')^2}=\sqrt{\frac{157.64}{121}-64}=\sqrt{64(\frac{157}{121}-1)}=8\sqrt{\frac{157-121}{121}}=8\sqrt{\frac{36}{121}}=\frac{48}{11}$$

Utilizando el Teorema de Thales se ve que el heurístico de consistencia en la fase de verificación hace que el valor de la altura $h=8$ en el triángulo ABC no sea un valor elegido al azar.

Modelo 3. Utilización del Cálculo Diferencial

Este problema podía ser tratado en nivel superior usando algunos conceptos de Cálculo Diferencial. De una manera genérica si trabajamos el proceso en 3D, y considerando a r como una función de dos variables L y d, se trata de una función escalar

$$r: R^2 \to R$$
$$(L,d) \to \frac{L^2+4d^2}{8d}$$

de dos variables reales definidas en todo R^2 excepto para $d=0$ (¡que justifica el hecho de la imposibilidad de construir una casita con un solo punto de tangencia con el árbol. ¡Se tendría una casita inestable!).

A partir de aquí podemos pensar en niveles superiores de enseñanza, por ejemplo en un primer curso de Universidad, y hacer ver a nuestros alumnos como a partir de un ejercicio sencillo de la vida real, caso u objeto, podemos llegar a introducirnos en estudio detallado de EXISTENCIA DE EXTREMOS (Máximos y mínimos) en CAMPOS ESCALARES:

a) Comprobación de los teoremas que permiten determinar si un punto crítico de un campo escalar es máximo, mínimo o punto de silla mediante una condición algebraica de la matriz jacobiana del campo escalar en el punto crítico.

b) Introducirnos en el Teorema de Taylor de segundo orden para campos escalares.

c) Deducción de criterios para la clasificación de los puntos críticos de campos escalares para funciones de varias variables, como el caso que nos ocupa a través de las formas cuadráticas y matriz Hessiana.

d) Utilización del método de los mínimos cuadrados como aplicación del cálculo de extremos relativos.

e) Existen ocasiones en las que interesa calcular los extremos relativos de una función escalar cuyo dominio ha sido restringido de alguna manera (¡puede ser nuestro caso: limitación del radio del cilindro (árbol)!). Tendríamos que proponer al alumno que utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

El modelo utilizado puede ser obtenido en tres dimensiones representando superficies cuyo estudio detallado sobrepasa el nivel de enseñanza secundaria.

3.1. JOYITA 2. En la RdP´s en la Aritmética de los números

La **teoría de números** es la rama de matemáticas puras que estudia las propiedades de los números, en particular los enteros, pero más en general, estudia las propiedades de los elementos de Dominios Enteros (Anillos conmutativos con elemento unitario y cancelación) así como diversos problemas derivados de su estudio. Contiene una cantidad considerable de problemas que podrían ser comprendidos por "no matemáticos". De forma más general, este campo estudia los problemas que surgen con el estudio de los números enteros. Tal como cita Jürgen Neukirch: *“La teoría de números ocupa entre las disciplinas matemáticas una posición idealizada análoga a aquella que ocupan las matemáticas mismas entre las otras ciencias.“*

Según los métodos empleados y las preguntas que se intentan contestar, la teoría de números ***se subdivide en diversas ramas:***

- Teoría elemental de números
- Teoría analítica de números
- Teoría de números aditiva
- Teoría algebraica de números
- Teoría geométrica de números
- Teoría combinatoria de números
- Teoría computacional de números

En la teoría elemental de números, se estudian los números enteros sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias. Son enunciados típicos el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler que lo extiende, el teorema chino del resto y la ley de reciprocidad cuadrática. En esta rama se investigan las propiedades de las funciones multiplicativas como la función de Möbius y la función φ de Euler; así como las sucesiones de números enteros como los factoriales y los números de Fibonacci.

Diversos cuestionamientos dentro de la teoría elemental de números parecen simples, pero requieren consideraciones muy profundas y nuevas aproximaciones, incluyendo las siguientes:

- Conjetura de Goldbach
- Conjetura de los números primos gemelos

- Último teorema de Fermat (demostrado en 1995)
- Hipótesis de Riemann sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, íntimamente conectada con el problema de la distribución de los números primos.

Lo importante, a nivel de secundaria y en todos los cursos, no son sólo las destrezas de cálculo y los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados para detectar posibles errores.

Presentemos algunos ejemplos que se pueden considerar como "joyitas" de naturaleza aritmética.

3.2.1. Agujeros negros numéricos

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Así como un agujero negro es un cuerpo con una gravedad tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz, también existen números que atraen a otros al efectuar ciertas operaciones.

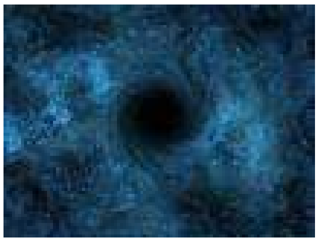
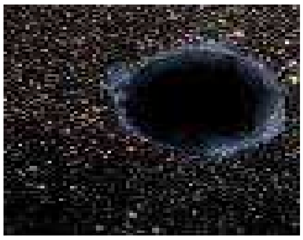




Figura 7. Agujeros negros

Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que "nos engañan"), pero todo tiene una explicación.

3.2.1.1. Un agujero negro el número 123

Otra cosa que tienen en común las matemáticas y el universo son los agujeros negros. En matemáticas un agujero negro sería un número que atrapa al resto de números sin que puedan escapar de él. Es el caso del número 123, que posee esa curiosa propiedad y vamos a ver por qué.

Voy a utilizar el fútbol como recurso didáctico para explicar el curioso número.

El Presidente del club de fútbol de mi ciudad, Huelva, al sur de España, Real Club Recreativo de Huelva, está preocupado por la baja afluencia de público al estadio denominado Nuevo Colombino, tras la trayectoria última de perder partidos de manera consecutiva.

Ha diseñado una estrategia para convencer a la gente para que vayan al campo: ***regalará la mitad de la recaudación*** del partido a uno de los aficionados que asistan al campo de fútbol.

El **sistema de sorteo** será el siguiente:

a) **Cada persona**, cuando entre en el estadio, elegirá **una cifra entre el 0 y el 9** (ambos incluidos), con la que se irá formando un número.
b) Así, si el primer espectador que entra en el estadio elige el **1**, el siguiente el **4**, el siguiente el **3**..., iremos formando el número:**143**... Este número tendrá tantas cifras como espectadores haya en el estadio.
c) Una vez que hayan entrado todos los aficionados, y tengamos ya el número completo, procederemos de la siguiente manera:

*Formaremos un nuevo número, cuyas **primeras cifras serán la cantidad de cifras pares** que contiene nuestro número, las **siguientes cifras serán la cantidad de cifras impares** que contiene el número, y **por último añadiremos el número total de cifras** (impares + pares).* Para fijar ideas veamos el siguiente ejemplo:

1). Escribamos un número cualquiera de la cantidad de cifras que sea,

1324567347769568320184

2). Contemos las cifras **pares**, las **impares** y el **total** de cifras y con estos 3 números formamos otro:

Éste caso concreto tiene 11 cifras **pares,** 11 **impares** y **22 cifras en total**. El nuevo número que se forma es 111**22**.

3). Contamos nuevamente las cifras **pares, impares** y **totales** de este número, obteniendo: **246.**

4). Se repite lo anterior y obtenemos 303.

5) Y así seguimos sucesivamente.

El premio consistente en la mitad de la recaudación se entregará a aquel aficionado cuyo número de butaca coincida con el número resultante de todo este proceso. (Todas las butacas del Colombino del 1 al 22.670). Con este sorteo, **el Presidente** consiguió durante unas jornadas que el estadio se volviese a llenar. Los aficionados estaban encantados con la posibilidad de llevarse a casa un estupendo premio. Pero poco a poco los asistentes han empezado a decrecer nuevamente:

Pues parece que los aficionados sólo volverán cuando el RECREATIVO DE HUELVA recupere el nivel deportivo de hace unos años. Porque está claro que el incentivo económico no ha bastado para recuperar el nivel de asistencia en el NUEVO COLOMBINO. Sobre todo cuando se ha dado a conocer el listado de los agraciados por el sorteo. Y es que todos los premios hasta la fecha han sido entregados al mismo espectador: El PRESIDENTE DE EL RECREATIVO DE HUELVA.

¿Cómo es esto posible?

Veamos qué es lo que ocurre una vez que se ha llenado el estadio.

Tenemos un número de 22.670 cifras que corresponde a todos los socios que han entrado:
2718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724
0766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290
4357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901
1573834187930702154089149934884167509244761460668082264800168477411
8537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520
449338265602976067371132007093287091**…………**

Hay distintas posibilidades, que pueden ser:

a) Que todos los espectadores hayan escogido una cifra impar: **022670****22670**

b) Que haya menos **impares** que **pares**, por ejemplo: **13258941****222670**

c) Que las cifras **pares** e **impares** sean iguales o muy parecidas: **11335****11335****22670**

d) Que haya más **impares** que **pares**, por ejemplo: **8573****1409****722670**

e) Que todos hayan escogido una cifra **par**: **22670****022670**

Así, vemos que el número que obtendremos después del primer proceso tendrá **entre 11 y 15 cifras**. En el caso de que este número tenga el mayor número de cifras posible, esto es, **15 cifras**, y siguiendo el mismo razonamiento, obtendremos tras el segundo proceso un número de **4** o **5 cifras**:

01515, 11415, **21315**, ..., **7815**, ..., **15015**

Nos ponemos nuevamente en el caso de que tenga el mayor número posible de cifras, en este caso, **5 cifras**. Aplicamos otra vez el procedimiento, y los posibles resultados ahora serán de **3 cifras**: **055**, **145**, **235**, **325**, **415**, **505**
Después de varias iteraciones, se llegará a un número de 3 cifras, que sólo puede ser **303** (si las 3 cifras son **pares**), 213 (si 2 son **pares** y una **impar**), **123** (si una cifra es **par** y 2 **impares)** o **033** (si las 3 cifras son impares).
En estos 4 casos al volver a hacer el cálculo se obtendrá inevitablemente… el 123.

¡Qué, curiosamente coincide con el número de asiento
del Presidente del Recreativo de Huelva!

3.2.2. JOYITA 3. Otro agujero negro el número curioso 6174

El número **6174** es conocido como la **Constante de Kaprekar** en honor de su descubridor el matemático indio Kaprekar. **Dattatreya Ramachandra Kaprekar** (1905- 1986) nació en Dahanu, cerca de Bombay. Se interesó por los números siendo muy pequeño. Desde 1930 hasta su jubilación en 1962, trabajó como profesor de escuela en Devlali, India. Kaprekar descubrió muchas propiedades interesantes en

Figura 8. Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905-1986)

Consideremos el número **6174**, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos.

Obtenemos así: 7641-1467=6174 que es el número con el que empezamos.

Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos, 9954-4599=5355

Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355

5553-3555=1998.

Nada especial. Seguimos con 1998:

9981-1899=8082

8820-0288=8532

8532-2358=6174.

¡Otra vez el dichoso número!

Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas:

¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?

Las respuestas a estos dos interrogantes las comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.

A medida que el estudiante se introduzca en la RdP´s pueden surgir interrogantes como el siguiente:

Si ello siempre ocurre, ¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174?

Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174?

Las respuestas a estos interrogantes las dan las siguientes afirmaciones, que se demostrarán a continuación.

1. Siempre es posible llegar al 6174.
2. El número máximo de pasos es siete.
3. El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos.

A pesar de que el número de pasos necesarios para obtener el 6174 depende de la relación entre los dígitos, es bueno aclarar que a partir del primer paso se obtiene un número completamente determinado.

Después de resuelto este interesante problema, siguen otras preguntas como las siguientes:

¿Qué ocurre si el entero es de 2,3, 5, 6 o cualquier otra cantidad de dígitos?

¿Es decir, en estos otros casos qué entero juega el papel que cumple 6174?

¿Ocurre lo mismo si el número se escribe en cualquier otra base diferente de la base 10?

Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética.

Examinar qué sucede con otros números de distinta longitud arroja más misterio que luz al asunto:

a) Si se prueba con los números de dos dígitos no se llega nunca a un número fijo, sino a un bucle cíclico del tipo **09, 81, 63, 27, 45, 09**

b) Con tres dígitos se llega a **495**

c) Para cuatro dígitos el número es el misterioso **6174**

d) Para cinco dígitos, no hay número fijo, sino tres ciclos (además de distinta longitud)

e) Para seis dígitos, se puede llegar al **549945**, al **631764** o a un ciclo de siete números.

f) Para siete dígitos tampoco hay número fijo, sino un único ciclo de nueve números.

g) Para ocho y nueve hay otro par de números en cada caso.

h) Con diez dígitos se puede llegar a tres valores distintos: **6333176664, 9753086421** y **9975084201**, o entrar en cinco ciclos cortos.

3.3. JOYITA 4. Matemáticas y cordones

Al igual que la física o la química, lo cierto es que las matemáticas están por todas partes en nuestra vida diaria y hay muchas formas de perderles el miedo.

¡Podemos empezar por atarnos los cordones de las zapatillas!

Figura 9. Diferentes formas de amarrar los cordones en zapatillas

¡No es una broma! Hay muchas matemáticas tras el sistema más universal de sujeción para los zapatos. Al fin y al cabo, se trata de pasar un cordón por una serie de agujeros en distintas combinaciones**.**

¿Cuántas hay? ¿Y cómo se calculan? ¿No es esto matemáticas?

En un zapato medio con seis pares de ojales hay casi dos billones de formas distintas de hacer pasar un cordón a través de todos los ojales. Claro que en la práctica, a la hora de atarse unas zapatillas, no todas esas combinaciones son prácticas ni cómodas. Algunas de ellas:

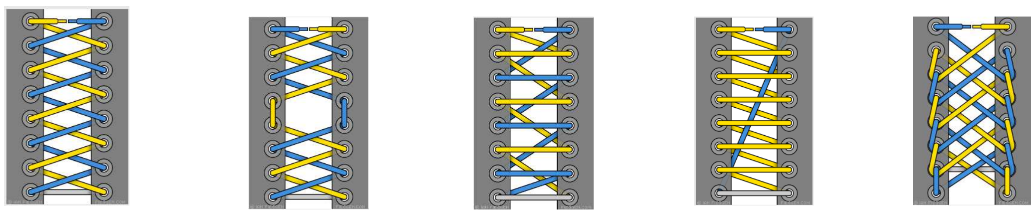


Figura 10. Cinco maneras diferentes formas de amarrar los cordones

Dos cuestiones podemos plantearnos:

a) Estética que muestra diferentes estilos (Óptica del comprador)

b) Más pertinente sería que tipo de encordonado requiere los cordones más cortos, y por consiguiente más barato (Óptica del Fabricante)

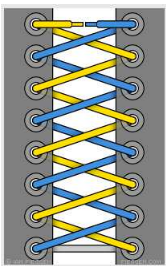
¿Qué pauta de encordonado entre todas las posibles, requiere los cordones más cortos?

Para contestar a esta cuestión: IDEALICEMOS EL PROBLEMA

Vamos a centrarnos en la longitud del cordón hasta los dos ojetes de la parte superior. La cantidad de cordón extra se necesita básicamente para hacer el nudo eficaz, y dado que es la misma para todos los métodos de encordonados, podemos ignorarla. Partiendo de un enfoque a lo bruto, la longitud del cordón puede calcularse en términos de los tres parámetros del problema:

1. El número "**n**" de pares de ojetes
2. La distancia "**d**" entre ojetes sucesivos
3. El espacio "**r**" entre los ojetes izquierdo y derecho correspondientes

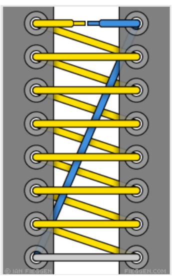
Caso 1: Con la ayuda del Teorema de Pitágoras (¿qué habría pensado Pitágoras de esta aplicación particular?) tenemos que la longitud del cordón es:



$$L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$$

Figura 11. Tipo Criss Cross Lacing

Caso 2: De la misma manera con la ayuda del Teorema de Pitágoras



$$L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$$

Figura 12. Tipo Shoe Shop Lacing

Podemos preguntarnos cuál de las longitudes es más pequeña para los dos modelos presentados. Para simplificar:

a) Si n=8, d=1 r=2, para el tipo Criss Cross Lacing:

$$L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$$
$$L = 2 + 14\sqrt{5}$$
$$L = 32,30492$$

b) Si n=8, d=1 r=2, para el tipo *Shoe Shop Lacing*

$$L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$$

$$L = 14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53}$$

$$L = 36,9324$$

Se observa que la longitud más corta es la del encordonado al estilo americano. Ahora bien, ¿podemos estar seguro de que esto será siempre así o por el contrario, es posible que el resultado dependa de los valores de “n”, ”d” y “r”?

¡Sólo un matemático se preocuparía por los diferentes casos que aparecerían dando valores distintos a “n”, “d” y “r”!

4. Reflexión final

He pretendido, tomando algunos ejemplos, unos originales y otros no, como podemos innovar en el dominio de la infraestructura escolar con la concepción y puesta en escena de lo que podrían ser los Laboratorios de Matemática Creativa con la RdP´s como herramienta para que los/as alumnos/as y los/as enseñantes validen diversos prototipos de materiales que den soporte al estudio de las Matemáticas para **MODELIZAR DIFERENTES SITUACIONES** y para realizar actividades creativas diversas.

En las páginas precedentes solo he mostrado, algunas actividades teóricas y/o prácticas y teniendo como herramienta la RdP´s de Problemas. La concepción y la puesta en obra se puede abordar con otras joyitas matemáticas que podemos encontrar trabajando con:

- La radio y el teatro matemáticos.
- Matemática y fotografía.
- Poesía y matemática.
- Videos matemáticos.
- Matemáticas y cine.
- Matemáticas en otras disciplinas.
- Matemáticas y cocina.

Son algunos de los campos dónde, hemos trabajado durante años en los que estudiantes y enseñantes, con imaginación han conseguido importantes **INNOVACIONES.**

A modo de conclusión final, en torno a procesos de innovación en el actual momento procesal de la Educación en mi país, en los diferentes niveles, cabe preguntarse:

¿Sucede con frecuencia…. pero que ya está todo inventado y no hay nada nuevo?

¿Habría que utilizar argumentos,…,cambios en los planteamientos educativos?

Si hay que administrar nuevos elementos en Educación Matemática......hay que tener en cuenta

¡La capacidad de
transformar la educación
y la sociedad!

para generar una cultura de la innovación. Para ello necesitamos

¡Nuevo lenguaje de la innovación!

un lenguaje fundamental para compartir ya que:"...***sin lenguaje es posible pensar, es difícil conocer y es imposible comprender***..." (Jorge Wagensberg).
Si "Innovar es introducir novedades en alguna cosa" , el reto podría ser pasar de

- La innovación como suceso

Figura 13. Innovación como suceso

- A la innovación como proceso

Figura 14. Innovación como proceso

En resumen, la innovación se inspira en ATREVERSE, superar los miedos y cambiar de perspectiva. *"El miedo nos indica que estamos entrando en un territorio desconocido, el miedo es la membrana que separa lo nuevo de lo conocido y constituye, así, un interesante indicador de que estamos a punto de abrirnos a algo superior al mundo que estamos acostumbrados"* (J. Kornfield).

Figura 15. Miedo a lo desconocido

Bibliografía

Atweh, B; Forsgaz, H; Nebres, B. (Eds). *Sociocultural Research on Mathematics Education. An International perspective.* 2001.

Bishop, A.J. *Second International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic. 2003.

Carrillo, J. *Resolución de Problemas. Huelva. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía* (España). 2001.

Hernán González G. *Innovar en educación matemática*. Santiago de Chile.2002

Knapp, Michael S. *Between Systemic Reforms and the Mathematics and Science Classroom: The Dynamics of Innovation, Implementation, and Professional Learning*. NISE. 1997. Univ. Wisconsin.

Lane, S. *The Conceptual Framework for the Development of a Mathematics Performance Assessment Instrument. Educational Measurement: Issues and practice.* Wiley Interscience. 2005.

Neukirch, J. *Algebraic Number Theory*. Springer, 1999.

Neukirch, J.; Schmidt, A; Wingberg, K. *Cohomology of Number Field.* Springer-Verlag.2 008.

Perie, M.; Marion, S.; Gong, B. *Moving Toward a Comprehensive Assessment System: A Framework for Considering Interim Assessments*.Vol. 28. Wiley Interscience.2009.

Romero, S. *Las matemáticas y la atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación para alumnos con NEE´s.* Rev. UNIÓN. 2007.

Romero, S; Castro, F. *Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior. El problema de Dobogókó*. Vol. 2. Modelling in Science Education and Learning. 2008. Valencia.

Romero. S. *Competencias Matemáticas y otras Áreas Interdisciplinares. III **J**ornadas de Educación Matemática. Competencias matemáticas y diferentes áreas del currículo. Huelva. 2010.*

Ruthven, K. *Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology*. In Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). International handbook of mathematics education. Kluwer.1996

Sierpinska, A; Kilpatrick;J. *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Kluwer Academic. 1997.

http://www.elboomeran.com/obra/496/ulises-perseo/

http://www.mathunion.org/icmi

http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm

http://ualmat.wordpress.com/videos-matematicos

http://video.google.es/videoplay?docid=513442171440946116#

http://www.catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine_Jungla.htm