REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 31-55

Dificuldades de aprendizagem de Área e Perímetro na perspectiva da Produção de Significados

Marcílio Dias Henriques, Amarido Melchiades de Silva

Fecha de recepción: 23/03/2013
Fecha de aceptación: 15/11/2013

Resumen	En este artículo presentamos un estudio en el que discutimos el aprendizaje de perímetro y área de figuras geométricas, y señalamos algunos caminos de tratar las dificultades de aprendizaje de estas nociones geométricas, caminos que producimos y describimos en algunas de nuestras investigaciones anteriores, en la cuales utilizamos el Modelo de los Campos Semánticos como marco teórico. Vamos a mostrar también algunos resultados de estas investigaciones, que nos han permitido elegir a las características deseables para el desarrollo de tareas educativas que involucran área y el perímetro, basado en el proceso de producción de significados. **Palabras clave**: figuras geométricas, modelo de campos semánticos.
Abstract	This article presents a study in which we discussed the learning of perimeter and area of geometric figures, and point out some ways to treat learning difficulties these geometric notions, such paths we created and described in some of our previous research, in which we use the Model of Semantic Fields as theoretical referential. We'll show also some results of these investigations, which allowed us to elect desirable characteristics to the development of educational tasks involving area and perimeter, based on the process of production of meanings. **Keywords**: geometric figures, Model of Semantic Fields.
Resumo	Neste artigo, apresentamos um estudo no qual discutimos acerca da aprendizagem de perímetro e de área de figuras geométricas, e apontamos alguns caminhos para o tratamento de dificuldades de aprendizagem destas noções geométricas, caminhos que criamos e descrevemos em algumas de nossas investigações anteriores, nas quais utilizamos o Modelo dos Campos Semânticos como aporte teórico. Exibiremos, também, alguns resultados dessas investigações, que nos permitiram eleger características desejáveis à elaboração de tarefas educacionais envolvendo área e perímetro, com base no processo de produção de significados. **Palavras-chave:** figuras geométricas, Modelo dos Campos Semânticos.

1. Introdução

Para que possam ser estabelecidos parâmetros gerais que sirvam de suporte à caracterização ou à adoção de determinada *educação geométrica*, no âmbito da escola básica, faz-se necessário identificar os objetivos e os elementos que lhe integrariam o currículo (Jones, 2000; Hoyles, Foxman e Küchemann, 2002).

O desenvolvimento curricular, estando intimamente relacionado com os processos de aprendizagem e de ensino, deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesses processos (Lins, 2001). Compreendemos que tais limites podem ser identificados e analisados mediante o estudo das dificuldades de aprendizagem de determinado tema.

No presente artigo, estamos interessados em discutir e refletir acerca da aprendizagem de perímetro e de área de figuras geométricas, além de apontar alguns caminhos para o tratamento de dificuldades de aprendizagem destas noções, que foram criados e descritos em nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2009, 2012), nas quais utilizamos como aporte teórico o Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1994, 2004). Desta forma, apresentaremos, nas seguintes seções, uma revisão crítica da literatura acerca dos temas *medidas*, *Geometria Escolar* e, mais especificamente, *dificuldades de aprendizagem de área e perímetro*, apresentando também algumas alternativas para o tratamento destas dificuldades, ao exibirmos resultados de algumas de nossas pesquisas anteriores. Importa-nos ainda observar que este trabalho é parte integrante de um projeto maior em desenvolvimento no interior do NIDEEM/UFJF[1] e que tem o propósito de investigar as possibilidades de reestruturação do currículo de Matemática da Educação Básica, pelo prisma da *produção de significados* (Lins, 1997; Silva, 2003).

2. Medidas *versus* Geometria Escolar: a questão do currículo

Ao compulsarmos alguns documentos de orientação curricular em Matemática, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e os Princípios e Normas (NCTM, 2007), encontramos o tema *Medidas* relacionado aos conteúdos da Geometria da escola básica, embora apresentados em seções ou capítulos apartados. Talvez por esta razão pudéssemos considera pertinente a seguinte questão: *O tema Medidas integraria os currículos de Geometria Escolar?*

Tal discussão está intimamente ligada à gênese de nosso interesse em pesquisar sobre as dificuldades discentes relacionadas à distinção e à associação entre área e perímetro de figuras geométricas euclidianas planas.

Quando dissemos que o tema Medidas está relacionado à Geometria Escolar, estamos entrando no controvertido campo do *design* curricular, e nele inserindo a nossa parcela de questionamentos. *Que relações existem entre Medida e Geometria? Há apenas uma estreita ligação entre elas? De que modo esta suposta ligação e aquelas possíveis relações influenciam a aprendizagem de medidas, especialmente das medidas de comprimento e de área?* Vamos, agora, delinear um caminho para tentar responder a estas questões. E este caminho passa necessariamente pela questão curricular. Embora a nossa concepção de currículo envolva também outros aspectos igualmente importantes, como objetivos, metodologias e produção de significados (sobre isto trataremos mais adiante), fixaremos nosso foco apenas nos conteúdos curriculares, como ponto de partida desta discussão.

[1] Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil (ver o site: http://www.ufjf.br/nideem).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998, p. 51) afirmam que "o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas". Esta distinção de campos de aprendizagem – *noções geométricas* e *medidas* – figura explicitamente naquele documento (Brasil, 1998), quando são apontados os quatro blocos de conteúdos nos quais se deve dividir a Matemática Escolar: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Formas, Tratamento de Informações. O bloco Espaço e formas é o que constitui o arcabouço da Geometria Escolar, sugerido nos PCN. Uma divisão similar a esta é encontrada em outro importante documento, intitulado Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), que divide os conteúdos matemáticos em cinco grandes categorias: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e, finalmente, Análise de Dados e Probabilidade.

Um dos assuntos que quase sempre se leva em consideração, nas pesquisas sobre a geometria escolar, é o currículo. Entretanto, parece não haver concordância entre os pesquisadores, acerca daquilo que possa ser considerado elemento curricular de Geometria. Muito pelo contrário, o que se observa a esse respeito é que existe ampla divergência quanto aos detalhes e quanto à natureza da Geometria que deveria ser ensinada, desde a escola primária até a universidade. (Usiskin, 1994)

No esforço de fundamentar uma opção ou intenção curricular, alguns pesquisadores lançaram mão de categorizações das "geometrias" escolares. Por exemplo, Houdement e Kuzniak (2003) propuseram que a geometria elementar parece ser dividida em três paradigmas[2] diferentes, caracterizando três diferentes formas de geometria: Geometria Natural, Geometria Axiomática Natural e Geometria Axiomática Formalista. O referencial teórico desenvolvido por estes pesquisadores especifica a natureza dos objetos geométricos, a utilização de diferentes técnicas e modos de validação concebidos em cada um destes paradigmas, sendo os dois primeiros os que mais se relacionam a escola básica, por englobarem, respectivamente, objetos materiais (incluindo suas representações gráficas) e objetos ideais, como aqueles da Geometria Euclidiana. (Houdement, 2007)

Segundo os estudos da *International Commission on Mathematical Instruction* (1994), houve, no passado, e ainda há, na atualidade, fortes desacordos sobre objetivos, conteúdos e métodos para o ensino de geometria, em diferentes níveis. Esta constatação é corroborada por trabalhos mais recentes, como os de Jones (2010) e de Hoyles, Foxman e Küchemann (2002). Allendoerfer (1969, apud Usiskin, 1994, p. 28) já havia notado esse dilema fundamental, subjacente ao problema do currículo, quando asseverou que "em geometria não há concordância nem mesmo quanto ao seu objeto". Esta mesma falta de consenso impulsionou um estudo encomendado pela UNESCO sobre a geometria escolar, desenvolvido por Morris (1986) e amplamente divulgado na Europa, na década de 1990.

Uma parcela considerável do desenvolvimento da geometria, ocorrido durante o século XX, foi inspirada na obra de Felix Klein (1849-1925), que propôs que a

[2] A noção de paradigma utilizada por esses autores é a de Kuhn (1998).

geometria deve ser vista como *o estudo das propriedades de um espaço que são invariantes sob um determinado grupo de transformações*. Com esta definição, tornou-se possível classificar as diversas geometrias relacionadas em "famílias", variando desde a topologia, como a mais geral, passando pelas geometrias projetiva e afim, até a geometria euclidiana, que tem maior número de propriedades invariantes, quando comparada às demais geometrias. Esta forma de ver a geometria e seus desenvolvimentos posteriores estimulou a demarcação de muitas geometrias mais. (Jones, 2000) Neste ponto, vemos o desenvolvimento da geometria na perspectiva dos matemáticos, e não em outra perspectiva[3].

Os PCN de Matemática (Brasil, 1998) nos oferecem um bom exemplo da influência de tal desenvolvimento sobre as orientações curriculares, ao apresentar a Matemática a ser ensinada nas escolas, da seguinte maneira:

> Fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (Brasil, 1998, p. 25)

A existência e a aceitação desta “pluralidade dos modelos geométricos” parecem influenciar as perspectivas de ensino e de aprendizagem da geometria, em diversos países, de tal sorte a estimular uma constante reestruturação curricular, pela revalorização da geometria no âmbito da escola básica. Esta hipótese é corroborada por um documento de orientação curricular do Ministério da Educação de Portugal, no qual Abrantes, Serrazinha e Oliveira (1999) afirmaram:

> O lugar da geometria nos currículos tem sido alvo de grande controvérsia, um pouco por todo o mundo. Nos últimos anos, observa-se uma tendência geral no sentido da revalorização da geometria nos programas de Matemática. No entanto, quer os conteúdos a incluir, quer as metodologias a utilizar, continuam a ser questionados. (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999, p. 57)

Na introdução do capítulo VI de sua obra, intitulado *Outras Geometrias*, Veloso (2000) chama a atenção para a necessidade de se fazer uma pausa, no percurso de aprendizagem dos ensinos fundamental e médio, para reflexão acerca das concepções sobre a geometria; e justifica a sua preocupação:

> Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com “outros pontos”, “outras rectas”, “outros triângulos”, “outras distâncias”. Numa palavra, devem tomar contato com *outras geometrias*. Por isso intitulamos assim este capítulo. Nele apresentaremos algumas dessas outras geometrias que ao longo dos últimos dois séculos – por vezes até anteriormente, de maneira não explícita – foram tomando o seu lugar ao lado da geometria euclidiana. [...] Não estamos a propor que *todos* os alunos, no futuro, experimentem trabalhar em *todos* esses tópicos. Mas que

[3] Esta diferenciação, que entendemos ser necessária, está calcada na distinção entre a matemática do matemático e a matemática escolar, concebida por Lins (2004).

> alguma vez, na sua vida escolar, tenham saído dos limites hoje estreitos da geometria euclidiana, por pouco tempo que seja. (Veloso, 2000, p. 311)

Consideramos esta perspectiva de Veloso (2000) bastante coerente com a *ótica* que o nosso referencial teórico nos oferece, isto é, a ótica da legitimação, na escola, dos diferentes modos de produção de significados para os temas estudados (como, por exemplo, os geométricos). Supomos que isto possa interferir diretamente no modo como os alunos aprendem geometria.

Um importante estudo comparativo de currículos, desenvolvido por Hoyles e colaboradores (2002), encontrou uma considerável variação nas abordagens atuais para a geometria escolar, em diferentes países. A diversidade de abordagens e tratamentos teórico-metodológicos de tais currículos parece estar relacionada à concepção da natureza da geometria. Costa (2000), discutindo os fundamentos curriculares de geometria escolar, afirma:

> Sob a égide de “geometria”, podemos apontar tanto para matemáticas aplicadas como para matemáticas teóricas e podemos utilizar tanto a intuição como a axiomática. Contudo é esta grande versatilidade, tão fascinante para os matemáticos, que parece desorientar os estudantes na aprendizagem da geometria, bem como as tentativas para ensinar, por parte dos professores. (Costa, 2000, p. 159)

Por um lado, vemos que não existe uma concordância no que se deva ensinar e aprender na escola, quando o tema é a Geometria. Mas, por outro, a possibilidade de eleger este ou aquele assunto a ser tratado em determinada aula ou em certo programa de Geometria soa-nos como algo no mínimo interessante e legítimo, pois dá ao professor a liberdade para desenvolver tarefas que criem para os alunos uma *demanda de conhecimento*[4] de temas geométricos.

Esta liberdade, que entendemos desejável, talvez seja a razão mesma da falta de consenso sobre o currículo de geometria da escola básica. Além disso, como asseveraram Mammana e Villani (1998), “[...] é imprópria a alegação de que é possível elaborar um currículo de geometria que tenha validade universal”.

Entretanto, documentos oficiais de muitos países e instituições parecem ter como um de seus objetivos a uniformização do trabalho dos professores de matemática, ao menos no que tange a escolha dos conteúdos a serem ensinados e aprendidos. Um exemplo disto são os PCN de Matemática para os 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), que ressaltam o estudo das *Grandezas e Medidas* como instrumento que permite se estabeleçam interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, do Tratamento de Informações e de outros campos de estudo. Observemos o que orientam os PCN (Brasil, 1998) quanto à descrição e ao tratamento da categoria “Grandezas e Medidas”:

> Neste bloco serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica, etc.). [...] Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas

[4] Para o termo *demanda de conhecimento* atribuímos, aqui, o sentido de *situação problemática* de Majmutov (1983), que se aproxima da noção de *zona de desenvolvimento proximal* de Vygotsky (1994); para a noção de *conhecimento*, adotamos o sentido proposto por Lins (1993).

> medidas não diretamente acessíveis, que envolvem, por exemplo, conceitos e procedimentos da Geometria e da Física. (Brasil, 1998, p. 52)

Sob a denominação de *Medidas*, são comumente tratadas as mensurações de grandezas diversas que podem ser ensinadas e aprendidas na escola, como o tempo de percurso de um móvel, a massa de um corpo, a temperatura de um *quantum* de determinada massa, o comprimento de uma figura plana ou a área da superfície de um objeto tridimensional. (NCTM, 2007). Owens e Outhred (2006), discutindo a complexidade da aprendizagem de *medidas geométricas*, concluíram:

> Para comprimento, área e volume, a organização espacial das unidades, em uma, duas ou três dimensões, respectivamente, é fundamental para a compreensão da medição de quantidades [destas grandezas]. Por outro lado, a estrutura espacial não é imprescindível para [a compreensão da medição de quantidade de] massa, temperatura e tempo, exceto em termos de leitura de uma escala. (Owens e Outhred, 2006, p. 100, tradução nossa)

O trabalho de Abrantes e colaboradores (1999) reforça a perspectiva da conexão da aprendizagem do tema *Medidas* com a aprendizagem dos temas geométricos, como podemos ver no trecho:

> A medida é um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria Matemática, quer na ligação a outras disciplinas. Na medida, estão interligados conceitos geométricos, aritméticos, trigonométricos, bem como a capacidade de formulação e de resolução de problemas e várias destrezas. Há uma forte ligação deste tópico à geometria (por exemplo, o perímetro e a área são características mensuráveis de certas figuras geométricas). (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999, p. 64)

Segundo Battista (2007), a noção de *medidas* desempenha um papel essencial na construção da intrincada teia de concepções, raciocínios e aplicações geométricos. Uma parcela considerável das pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem de *medidas* está focada na compreensão que os estudantes desenvolvem acerca de grandezas como a amplitude angular, comprimento, área e volume (ver, por exemplo, Lehrer, 2003; Battista, 2007). Entretanto, entendemos que, em tais pesquisas, é insuficiente a discussão feita sobre a natureza dos elementos geométricos, cujas medidas e suas formas de aprendizagem pelos alunos são investigadas. Estamos nos referindo, mais uma vez, à diversidade das geometrias e, portanto, das *naturezas geométricas*, euclidianas ou não. Isto por entendermos que devemos, em sala de aula, ampliar as possibilidades de produção de significados (portanto, de distintos campos semânticos) para os elementos geométricos que são constituídos pelos estudantes em determinadas atividades.

Já existem propostas de introdução de temas de geometrias não-euclidianas no ensino fundamental (por exemplo, Martos, 2002), como também estudos das dificuldades em implementar, na prática, tais propostas (Lovis e Franco, 2011). Mas o que tem se mostrado comum às pesquisas, às orientações curriculares oficiais e aos livros didáticos, para este nível de ensino, é o trabalho com a Geometria Euclidiana. Por esta razão, não inovamos, mas envolvemos, em nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), apenas as noções de elementos da Geometria Euclidiana, e não aqueles de outras geometrias. Faz-se mister destacar que, não obstante elegermos tais elementos, assumimos, como nosso pressuposto de trabalho, que objetivos (curriculares e político-pedagógicos) devem orientar conteúdos e métodos. Tal afirmação equivale a dizer que não colocamos o foco de nossas atenções nos conteúdos curriculares, mas sim nos objetivos que norteiam a nossa prática de professores da educação básica, sempre embasada em nossos pressupostos teórico-epistemológicos e metodológicos.

Além de influenciar o modo como operamos ao *ensinar* e como vemos o *aprender* dos alunos, em nossas salas de aula, a existência de clareza de objetivos e pressupostos nos propicia a possibilidade de criarmos um currículo dinâmico, adaptável às necessidades discentes e pedagógicas, sem nos engessarmos a um programa inflexível, centrado em conteúdos, ou a cronogramas pré-estabelecidos por outrem, quando não impostos por um sistema ou uma instituição de ensino.

E mesmo quando se tem a clareza acerca de *que conteúdo se deve ensinar*, advêm outras questões, não menos relevantes, quais sejam: *como os alunos aprendem certo conteúdo* e, ainda, *quais estratégias seriam facilitadoras deste aprendizado*. Não obstante a possibilidade de obtermos respostas para tais questionamentos, continuaríamos desprovidos de um suporte suficiente para que pudéssemos *ler* os processos de produção de significados e, então, intervir na dinâmica de tal processo; porquanto concordamos com Lins (2002), quando analisa a questão dos conteúdos de ensino e afirma:

> O que nós e este pequeno mas crescente número de pesquisadores procura, é caracterizar o que seja “Matemática” quando nos referimos à atividade profissional do professor de “Matemática”. Não é apenas o conteúdo da Matemática “do matemático”, mas não é também – cada vez entendemos melhor – a Matemática “do matemático” mais uma compreensão do que seu ensino possa envolver – seja em termos de estágios de desenvolvimento intelectual, seja em termos de estratégias de ensino. Mais do que uma taxonomia – não importa quão ampla ela seja – precisamos de categorias básicas que nos permitam ver esta Matemática da sala de aula acontecendo enquanto ela acontece, isto porque, como já apontaram diversos pesquisadores, os fenômenos da educação são complexos demais para serem cristalizados . (Lins, 2002, p. 23)

Quanto à relação entre Geometria e Medidas, aceitamos o fato de haver uma interdependência entre estes elementos curriculares, no que diz respeito à sua aprendizagem no ensino fundamental, fato esse estudado por alguns dos pesquisadores que citamos acima, como, por exemplo, Owens e Outhred (2006). Desta foram, acreditamos que o desenvolvimento das noções que envolvem estes dois temas curriculares depende de estímulos dados na idade escolar, através da educação formal, baseada em pressupostos teóricos e em observações práticas, que por sua vez geram pesquisas e novas propostas de intervenção.

Consideramos ser legítimo, portanto, assumir que o tema *Medidas* integra o currículo da *Geometria* da escola básica, pelo fato de existir intrínseca relação entre estes temas, conforme vimos anteriormente. A partir deste nosso posicionamento – trabalhar com medidas geométricas é, também, trabalhar com Geometria – vamos buscar explicitar e entender as dificuldades de aprendizagem de medidas de área e de perímetro de figuras euclidianas planas, dificuldades que temos reincidentemente observado ao lecionar para turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e para classes do Ensino Médio de escolas públicas da cidade de Juiz de Fora (Minas Gerais, Brasil). E se buscamos identificar e compreender tais “problemas” de aprendizagem, nada mais nos moveu nesta direção senão o desejo criar caminhos de intervenção didática, minimizando ou mesmo eliminando sua incidência, no momento em que surjam e sejam percebidos (Henriques e Silva, 2012).

Para tratar de tais dificuldades de aprendizagem e das possíveis alternativas para diminuir a sua ocorrência, empenhamos toda a discussão desenvolvida na seção seguinte.

2. Aprendizagem de área e perímetro: dificuldades e perspectivas

Como podemos avaliar a partir do que foi discutido na seção anterior, há uma complexidade subjacente ao processo de aprendizagem de medidas geométricas, que torna necessária uma busca por identificarmos os elementos característicos de tal processo, não somente relativos aos seus condicionantes pedagógicos, mas especialmente no que respeita os aspectos cognitivos que o constituem. Iniciamos, então, essa busca.

Ao elaborar uma revisão da literatura acerca da compreensão do tema *medidas de comprimentos e áreas* por crianças recém-ingressas na escola, Clements e Stefhan (2004) estudaram em profundidade o desenvolvimento desta compreensão, e puderam afiançar:

> As crianças pequenas encontram e discutem quantidades, com naturalidade [...]. Elas primeiramente aprendem a usar as palavras que representam quantidade ou magnitude de uma determinada grandeza. Em seguida, elas comparam dois objetos diretamente e reconhecem a igualdade ou a desigualdade [...]. Neste momento, elas estão prontas para aprender a medir, ligando o número à quantidade: **Medida** é definida como a atribuição de um número a quantidades contínuas. (Clements e Stefhan, 2004, p. 301, tradução e grifo nossos)

Segundo Jones e Mooney (2003), o trabalho com medidas na escola básica, embora muitas vezes seja iniciado através de atividades em contextos espaciais, frequentemente é abandonado com muita rapidez, e é provavelmente vivido pelas crianças como *mais uma forma de fazer cálculos*. Para evitar esta situação, as primeiras experiências (escolares) dos alunos com a geometria deveriam enfatizar o estudo informal das formas físicas e suas propriedades, com o objetivo principal de desenvolver a *intuição geométrica* e o *conhecimento dos estudantes* sobre o seu ambiente espacial. (Jones e Mooney, 2003).

Para nos referirmos mais especificamente aos temas *área* e *perímetro*, destacamos o trabalho de Alsina i Pasttels (2009). Nele são sugeridas tarefas manipulativas no *Geoplano*, através das quais estudantes de 6 a 9 anos de idade poderiam desenvolver habilidades que vão desde a percepção de propriedades de figuras geométricas planas (como polígonos), até a distinção entre a medida do perímetro e a medida da superfície destas mesmas figuras.

Tanto em sugestões práticas como esta, de Alsina i Pasttels (2009), quanto em estudos como o Jones e Mooney (2003), há um grande número de aspectos teóricos e epistemológicos a serem considerados, na análise do processo de aprendizagem de tópicos de geometria escolar, possivelmente também ligados ao seu ensino e às concepções docentes sobre ambos os processos e sobre a própria natureza da geometria que se pretende ensinar.

Discutiremos, agora, alguns destes aspectos, relacionados à aprendizagem das noções que envolvem área e perímetro de figuras geométricas planas, e a *medidas* destas grandezas. Na base dessa discussão está o nosso esforço em compreender as razões de alguns *obstáculos* e *limites epistemológicos*[5] discentes que têm se mostrado muito frequentes em nossas aulas de Geometria, ao lecionar para turmas da educação básica.

2.1. Algumas dificuldades na aprendizagem de perímetro e área

Uma das dificuldades dos estudantes, que com muita frequência temos observado em nossas salas de aula do ensino fundamental e do ensino médio, é a confusão entre as ideias de área e de perímetro, quando eles resolvem problemas usuais de geometria euclidiana plana. E parece que não estamos sozinho nesta constatação. Trabalhos como os de Nunes (1995), Chappell e Thompson (1999), Malloy (1999), French (2004), Baldini (2004), D'Amore e Fandiño Pinilla (2006), Owens e Outhred (2006) e Hernández (2008) apontam tal dificuldade e procuram identificar sua gênese.

Ao descrever, a seguir, alguns destes (e outros) trabalhos, relacionados ao estudo de dificuldades dos estudantes na aprendizagem de perímetro e de área de figuras planas, buscamos identificar características que nos favorecessem na elaboração das tarefas desenvolvidas e aplicadas em algumas de nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011).

Antes de propor uma aplicação do Modelo de van Hiele para o trabalho com perímetro e área nos anos finais do ensino fundamental, Malloy (1999) afiançou que, embora uma considerável parcela dos alunos deste nível educacional possa resolver problemas de deduzir e aplicar fórmulas de *área* e de *perímetro* de algumas figuras geométricas (como retângulos, quadrados e triângulos), eles não têm conseguido conceituar plenamente os significados de ambos os termos, e acabam por fazer confusão entre tais fórmulas, encontrando a área de uma figura quando se pede o seu perímetro, e vice-versa.

Baltar (1996), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer *medidas* de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir medidas de área das medidas de perímetro.

Santos (2008), em sua pesquisa de mestrado, cuja metodologia se baseou em uma análise qualitativa sob a ótica da Didática da Matemática francesa, concluiu que a não resolução de certas tarefas – propostas aos estudantes por autores de certos livros didáticos e que envolvem as noções de área e perímetro – indica dificuldades que podem estar associadas à forma como se dá a passagem entre os *níveis de conhecimento*, às mudanças de *registros de representação semiótica* e às *mudanças de quadros* envolvidas nas tarefas.

[5] Os termos obstáculo epistemológico e limite epistemológico expressam dificuldades inerentes ao processo de produção de significados, segundo o sentido proposto por Lins (1993) e que assumimos neste trabalho, deste ponto em diante. Sobre isto, trataremos no Capítulo 3.

Embora não seja nosso interesse trabalhar com estas noções da Didática francesa, consideramos pertinente levantar a questão da influência das abordagens dos temas geométricos trazidas pelos livros didáticos. Por exemplo, Kordaki (2003) destaca que os alunos enfrentam dificuldades relacionadas à introdução prematura da abordagem quantitativa de área, privilegiando o uso das fórmulas para se calcular a área de figuras planas e negligenciando uma abordagem qualitativa, que enfatize o conceito de conservação.

Se voltarmos nosso olhar para as avaliações em larga escala, divisaremos, por exemplo, a Prova Brasil. Esta avaliação, que se insere no Plano de Desenvolvimento da Educação do Ministério de Educação e integra o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Brasil, 2008), foi aplicada a mais de nove milhões de estudantes brasileiros do 5º e do 9º anos do ensino fundamental, em cada uma de suas duas edições, ocorridas nos anos de 2005 e 2007. Da totalidade dos alunos avaliados, 67% erraram uma questão simples que envolvia o cálculo do perímetro de um polígono desenhado em uma malha quadriculada, o que demonstrou que os estudantes “confundiram perímetro com área” (Brasil, 2008, p. 127). Vale ressaltar que a elaboração de questões de avaliações em larga escala, como esta, tem critérios muitíssimos rígidos e objetivos, a ponto de cada item (questão) estar relacionado a um único descritor (tema disciplinar) da matriz de referência, por exemplo, o descritor (da matriz de Matemática) “resolver questões que envolvem o cálculo do perímetro de uma figura plana poligonal” (Brasil, 2008). Entendemos que estas avaliações, embora nos deem pistas do quadro geral de determinado grupo de alunos, envolvendo certo tema, não nos permitem conhecer quais sejam as dificuldades discentes, tampouco avaliar suas possíveis causas.

Um sistema internacional de avaliação em larga escala, que também avalia estudantes do 5º e do 9º anos da escolaridade básica, o TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study)*, em sua versão 2007 aplicada na Suécia, foi analisado pela Agência Nacional de Educação daquele país, em parceria com a Universidade de Gotemburgo. Não obstante o fato de classificarem a Suécia entre os quinze de melhor pontuação no *ranking* da avaliação de conhecimentos matemáticos, os resultados mostraram que os conceitos de perímetro e área são frequentemente confundidos pelos alunos suecos. E revelaram ainda que muitos alunos não estão familiarizados com o caráter aditivo do conceito de área e por isso não são capazes de calcular áreas de figuras compostas. No mesmo documento, afirma-se que o desconhecimento do caráter aditivo da área acomete os estudantes, provavelmente, devido à falta de experiências conceituais, que por sua vez resulta de uma abordagem de ensino predominante processuais, ou seja, de aplicação de fórmulas destituídas de compreensão. (Skolverket, 2008)

Segundo French (2004), a dificuldade de dissociar área e perímetro pode surgir de uma simples confusão de palavras ou mesmo originar-se de conceitos profundamente errôneos, os quais fazem os estudantes pensarem que perímetro e área estão ligados de um modo tão elementar, que o aumento de uma dessas grandezas conduz necessariamente ao aumento da outra.

Para se evitar o surgimento de tal dificuldade, Yeo (2008) destacou a necessidade de se primar por uma aprendizagem através do desenvolvimento de um conhecimento conceitual e relacional destes temas, e ressaltou um grave obstáculo a esta prática: o fato de os próprios professores confundirem os conceitos de perímetro e de área.

D'Amore e Fandiño Pinilla (2006) sustentam que dificuldades estabelecidas na escola básica, acerca de questões ligadas a área e perímetro, persistem para muitos estudantes, até mesmo entre aqueles que já estão na universidade. Após a análise de tarefas aplicadas e entrevistas realizadas com professores e estudantes, D'Amore e Fandiño Pinilla (Ibidem) concluíram que, na construção de um conhecimento das relações entre *perímetro* e *área,* os alunos revelam obstáculos que não são apenas epistemológicos – como estabeleceram muitos dos trabalhos neste campo de investigação – mas que apresentam também uma natureza didática.

Os *Princípios e Normas* (NCTM, 2007), apoiando-se nas pesquisas de Lindquist e Kouba (1989), apontam dificuldades que muitos alunos do ensino fundamental apresentam na compreensão das ideias de perímetro e de área, fato que tais pesquisadores entendem ser decorrente da utilização, pelos alunos, de fórmulas como $P = 2\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{l}$ ou $A = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{l}$, sem que estes tenham compreendido de que modo estas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida utilizada.

Outhred e Mitchelmore (1992, apud D'Amore e Fandiño Pinilla, 2006), estudando dificuldades específicas de conceitualização de área e perímetro, mostraram que é apenas uma ilusão a atividade de ensinar tomada como garantia de que, se uma criança calcula a área de um retângulo, ela está automaticamente aprendendo a medir ou calcular a área de qualquer outra figura geométrica.

Em uma de nossas investigações anteriores (Henriques e Silva, 2009), pudemos verificar que muitos estudantes dos anos finais do ensino médio (ou secundário) utilizam sempre o mesmo procedimento de cálculo ou a mesma fórmula para calcular a área de *qualquer* figura geométrica plana, poligonal ou não poligonal.

Entendemos ser pertinente considerar as possibilidades de existência e de identificação das dificuldades que citamos na revisão acima, o que é corroborado pela seguinte afirmação de Bellemain (2003):

> A consideração pelos professores de que não há dificuldades conceituais de aprendizagem significativas com respeito aos conceitos de área e perímetro é preocupante, pois se os professores não percebem as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem desses conteúdos, terão pouca chance de intervir para sua superação. (Bellemain, 2003, p. 17)

2.2. Algumas perspectivas para a aprendizagem de perímetro e área

Como podemos observar, através desse quadro de referência das pesquisas sobre as dificuldades de aprendizagem das noções de área e perímetro de figuras geométricas planas, o tema é de extraordinária complexidade, o que exige atenção e profundidade nas tentativas de tratamento e prevenção de tais dificuldades, através de propostas didáticas. Discutiremos, agora, algumas destas propostas.

Os Princípios e Normas (NCTM, 2007) trazem sugestões de atividades para que os professores trabalhem habilidades de alunos da pré-escola até o 2º ano do ensino fundamental, relacionados à medição de comprimentos e de áreas de figuras planas, sem recorrerem ao rigor, mas sim à estimativa, dirigindo a atenção dos estudantes para as grandezas, para o processo de medição e para o valor das unidades de referência.

Já segundo Chappell e Thompson (1999), os estudantes precisam de tarefas nas quais possam analisar o perímetro e a área ao mesmo tempo para distinguirem claramente os dois objetos. Estes pesquisadores afirmam, ainda, que os alunos precisam construir representações visuais de figuras com determinadas áreas e perímetros, criar problemas relacionados com estas palavras e justificar as propriedades figurais observadas.

Estudos conduzidos por Outhred e Michelmore (2000) mostraram a necessidade de que os conceitos de área e perímetro sejam trabalhados de forma a articular os *conhecimentos declarativos* dos alunos e os seus *conhecimentos de procedimentos*, visando a uma aprendizagem significativa. Em contraposição a estas pesquisas, a posição que assumimos não tende ao pragmatismo, nem à visão de *campos conceituais*[6] e nem ainda a uma articulação entre estas concepções. Concebemos que o ensino e a aprendizagem das noções de área e perímetro (como de um outro tema qualquer, matemático ou não) devem ser calcados na produção de significados (Henriques, 2011), como modo de ler os processos cognitivos e de intervir nestes processos, dentro dos quais o sujeito do conhecimento constitui novos objetos, como, por exemplo, área e perímetro, sem que tal constituição (ato de conhecer) tenha sua legitimidade colocada em cheque, isto é, sem concepções prévias nem juízo de valor. A perspectiva da produção de significados favorece a criação de um espaço comunicativo, dentro do qual a possibilidade de negociação de significados deve existir (Lins, 2004).

Chamorro (1997) analisou distintos aspectos que determinam os ambientes de aprendizagem relacionados a medidas em geral. Entre os diversos exemplos que o autor apresentou, aparece com destaque a dificuldade de identificar as relações entre perímetro e área. Sobre isto, afirmou Chamorro (1997):

> Em se tratando de superfície, por causa da medida produzida, convergem múltiplos obstáculos conceituais. Entre estes, está a relação que as unidades de superfície mantêm com as unidades de comprimento, sendo que a primeira subsidia a segunda, como produto da medida. Tais relações podem ser compreendidas começando pelas relações espaciais, as quais, por sua vez, deveriam ser coordenadas com as relações multiplicativas. A coordenação entre a linearidade de cada uma das dimensões e a linearidade das superfícies deve poder ser garantida através de um modelo geométrico que ajude a visualização de tais relações. (Chamorro, 1997, p. 45, tradução nossa)

Para construir a noção geométrica de área, é preciso estabelecer relações entre as fórmulas de área e de perímetro e os invariantes geométricos das figuras. E é necessário, também, desenvolver um trabalho geométrico sobre o tratamento destas figuras em casos não prototípicos ou não padronizados, isto é, um tratamento diverso do que encontramos na maioria dos livros didáticos de Matemática. (Teles, 2009; Baltar, 1996)

---

[6] Ver Vergnaud (2008).

Em um documento de divulgação da matriz de referência e dos resultados da *Prova Brasil* (Brasil, 2008), aparecem sugestões de como os professores podem trabalhar com a habilidade (dos alunos) de calcular a área de figuras planas poligonais:

> Durante o trabalho com a habilidade em questão, tanto o perímetro quanto a área podem ser encadeados, possibilitando, assim, destacar-se a diferença entre os dois conceitos. As mesmas atividades utilizadas para conceituação de perímetro podem ser aqui abordadas. Entretanto, cabe ao professor tomar figuras geométricas bastante ilustrativas e que permitam a contagem de unidades de áreas. Essa é uma tarefa que atrai o aluno, pois um quadro que apresente regularidades e atratividade visual coaduna com o cálculo preciso, enquanto aqueles quadros ou formas geométricas não regulares remetem à idéia de estimativa. (Brasil, 2008, p. 129)

Aceitamos a ideia do trabalho com unidades de área como algo um tanto natural para os estudantes e, portanto, mais favorável à aprendizagem da noção de área de polígonos. Entretanto, a proposição de tarefas que envolvam a noção multiplicativa de área parece ser bastante importante para o desenvolvimento da própria noção de estimativa, no cálculo da área de figuras planas poligonais (Abrantes, Serrazinha e Oliveira, 1999). Em sua dissertação de mestrado, fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brosseau e na metodologia da Engenharia Didática de Artigue, Baldini (2004) mostrou uma utilização do *software Cabri Géometrè II* contribuindo significativamente para a construção dos conceitos de área e perímetro. Na sequência didática que a pesquisadora elaborou e aplicou aos estudantes (sujeitos da pesquisa), há 30 *atividades*, entre as quais 5 relacionam os conceitos de área e perímetro. Como exemplo, vejamos apenas duas destas *atividades*:

> **Atividade 24:** Verificar se existe alguma relação entre área e perímetro de uma mesma figura. **Objetivos:** Calcular e relacionar área e perímetro de uma mesma figura; compreender que não existe nenhuma relação de proporcionalidade entre área e perímetro de uma mesma figura; ou seja, que área e perímetro não variam num mesmo sentido. [...] **Atividade 26:** Cálculo de área a partir do perímetro e cálculo do perímetro a partir da área. **Objetivos:** Calcular área de um quadrado conhecendo o seu perímetro; calcular o perímetro de um quadrado conhecendo sua área. (Baldini, 2004, p. 125, grifos da autora)

Assumimos a posição de considerar que “atividades” como estas – que trabalham simultaneamente as noções de área e de perímetro – são mais favoráveis à sua aprendizagem, que outras tarefas que envolvem apenas um destes temas. Este posicionamento se funda na perspectiva defendida por Lins (1993), segundo a qual a prática tradicionalmente adotada, quanto ao ensino de matemática, esconde os saltos entre diferentes campos semânticos e confiam numa passagem “suave” entre noções distintas, relacionadas a um mesmo elemento. Por exemplo, quando são estudados a área e o perímetro de um triângulo. Não é raro encontramos, em livros didáticos avalizados pelo Ministério da Educação brasileiro, através de publicações do Programa Nacional do Livro Didático[7], estes temas sendo tratados em capítulos distintos e, em algumas obras,

[7] Ver Brasil (2010).

distantes um do outro, na ordenação de seus capítulos. Desta forma, as noções de área e de perímetro são trabalhadas separadamente e em momentos distintos de um mesmo ano letivo, por professores que seguem as sugestões dos autores de determinados livros didáticos, talvez assim não oferecendo a muitos alunos a oportunidade de comparar tais noções, associadas a figuras geométricas, e de perceber as relações existentes entre elas.

Com base na noção de signos como mediadores das interações (sociais, culturais) que geram o desenvolvimento cognitivo (Vygotsky, 1994), Nunes (1995) explicita as duas alternativas mais usuais para se representar o conceito de área de figuras planas. A primeira alternativa envolve medir o comprimento e a largura de certa figura (um retângulo, por exemplo) e utilizar tais medidas para calcular a área desta figura, através de uma fórmula, que neste caso corresponde ao produto das medidas. A segunda alternativa envolve começar por unidades de área (por exemplo, centímetros quadrados), que se forem arrumadas em linhas e coluna, sobre a figura a ser medida (novamente, consideremos o retângulo), a área desta figura é calculada pela multiplicação do número de unidades numa linha vezes o número de linhas. Estas duas alternativas – explica a pesquisadora – diferem basicamente em relação ao número variáveis envolvidas em cada concepção de produto de medidas: três variáveis na primeira e duas na segunda concepção. Vejamos a metodologia que Nunes (1995) utiliza em sua pesquisa:

> Pedimos a pares de crianças inglesas, dos 8 aos 10 anos, para resolverem alguns problemas de áreas. Os pares de alunos foram distribuídos aleatoriamente por uma de duas condições. Na primeira condição, foram-lhes dadas réguas como instrumento de medida. Na segunda condição, foram-lhes dados tijolos de 1 cm^2, mas não lhes demos tijolos suficientes para cobrir completamente as figuras, para que a solução de simplesmente cobrir a figura e contar o número de tijolos não fosse possível. (Nunes, 1995, p. 17)

E observemos alguns resultados desta pesquisa (Nunes, Ibidem):

> O desempenho dos alunos, nestes problemas, diferiu em função do sistema de signos que tinham disponível na situação experimental: réguas ou unidades de área. As diferenças foram observadas quer quanto ao número de respostas correctas, quer quanto ao tipo de concepção utilizada na resolução do problema. As crianças que tinham a sua disposição unidades de área tiveram um desempenho significativamente superior ao das que tinham réguas. Os alunos que tinham régua como instrumento de medida costumavam, mais frequentemente, adicionar as medidas do que multiplicá-las. Eles calculavam ora o perímetro, ora o semi-perímetro. [...] Os alunos que tinham unidades de área como instrumentos de medida frequentemente descobriam uma fórmula para resolverem o problema, número de tijolos numa linha vezes o número de linhas, e usavam-na com sucesso para ultrapassar o facto de faltarem tijolos. (Nunes, 1995, p. 18)

É importante destacar que há, nestas conclusões de Nunes, indícios de uma abordagem com bases eminentemente piagetianas, na revelação da concepção de conhecimento *a priori*, quando a autora se refere às “respostas corretas” dos sujeitos de pesquisa. De fato, Nunes (1995), em sua abordagem, entende serem compatíveis as teorias de Vygotsky e de Piaget. Mas nós consideramos que isto é impraticável, pois os pressupostos de um são diversos dos pressupostos do outro. Por exemplo, no que concerne ao desenvolvimento cognitivo humano, enquanto

Piaget se refere a *estágios*[8] e a mecanismos de passagem entre estágios, Vygotsky fala de *processos* cognitivos que, uma vez postos em marcha, são a causa de sua própria mudança (Lins, 1999). Embora este ponto de discordância nossa com a abordagem de Nunes (1995), sua pesquisa nos ajuda a pensar acerca da confusão discente entre *área* e *perímetro*, além de nos informar da importância da mediação de instrumentos ou ferramentas na aprendizagem destes temas. E esta informação influenciou-nos no processo de elaboração das tarefas educacionais envolvendo área e perímetro (Henriques, 2012; Henriques, 2011).

Em uma pesquisa mais recente, Owens e Outhred (2006) investigaram a *compreensão* de jovens alunos acerca da quantificação de uma superfície plana, e chegaram às seguintes conclusões: *i)* os alunos parecem considerar duas quantidades, o número de quadrados (unidades de área) ao longo do comprimento e o número destes quadrados ao longo da largura de um retângulo, sem reconhecerem estas quantias como o número de quadrados numa linha e o número de linhas; *ii)* poucos alunos utilizam a multiplicação para enumerar os elementos em uma malha quadriculada; *iii)* a metade dos alunos conta elemento a elemento, e 38% deles utilizam a adição, repetidamente; *iv)* o conhecimento discente de estruturas em malha (matriz retangular) proporciona bases para uma alternativa de trabalho com unidades de área necessárias para se cobrir um retângulo; *v)* desenhar uma matriz de unidades quadradas, usando dois conjuntos de linhas paralelas, revelou-se algo mais difícil do que o esperado, para os alunos, o que sugere que a estrutura de tesselação (estrutura de malhas), embora não seja óbvia para eles, precisa ser aprendida. Mas a maneira de se operacionalizar esta aprendizagem parece estar imbricada a alguns fatores ligados ao comportamento cognitivo dos estudantes.

Clements e Stefhan (2004) investigaram quais atividades contribuem para que os alunos aprendam a noção de área, e concluíram: em primeiro lugar os alunos devem experimentar cobrir várias superfícies planas com uma unidade de medidas, percebendo que as regiões devem ser cobertas sem sobreposição das unidades entre si e sem lacunas entre elas; em segundo lugar, devem aprender a estrutura de malhas (matrizes), o que demonstrou ser um processo que demanda muito tempo, mas com resultados muito significativos; terceiro, os alunos devem aprender que o comprimento dos lados de um retângulo pode ser determinado pelo número de unidades em cada linha e o número de linhas na matriz; em quarto lugar – e isso geralmente é apropriado apenas nas séries intermediárias e mais avançadas – as crianças podem aprender a multiplicar as duas dimensões como um *atalho* para a determinação do número total de quadrados. (Clements e Stefhan, 2004)

A partir dos aportes desta última pesquisa (Clements e Stefhan, 2004), detacamos dois modos de proceder do professor, em sala de aula, que nos parecem suficientes para que se crie um campo favorável ao desenvolvimento

---

[8] A noção piagetiana de estágios de desenvolvimento cognitivo nos permite entender como a teoria de Piaget favorece uma *leitura pela falta*. Exemplificando isto, Lins (1999, p. 78) escreveu o que parece ser a fala de um professor fictício do ensino tradicional, em concordância com os pressupostos piagetianos: “eu, que já me desenvolvi (já aprendi), e que sei que você é igual a mim, posso ver o que falta em seu desenvolvimento, ver o que você ainda não é”.

cognitivo dos alunos, acerca das noções de área de figuras planas. O primeiro desses modos didáticos é a comparação de formas planas, envolvendo também decomposição e composição de figuras. O segundo modo é a associação das unidades de área às superfície a serem medidas, o que permite a estruturação das malhas de unidades, que também aceitamos como um processo cognitivo de moroso desenvolvimento e de difícil intervenção docente.

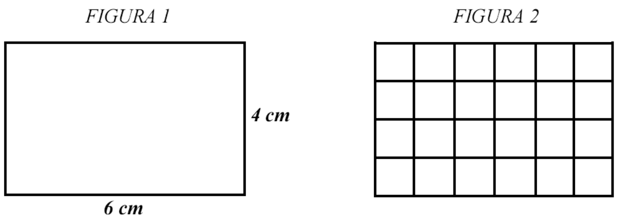
Clements e Stefhan (2004) ainda defendem que, para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem de áreas, o professor não deve focar os procedimentos de cálculo, mas sim os significados que tais processos trazem para os alunos. Para estes pesquisadores, pode ser um exagero o argumento básico de Piaget, de que as crianças devem aprender antes a conservar comprimentos para que possam produzir sentido para os sistemas de medições, como as réguas (físicas) ou ferramentas computacionais. (Clements e Stefhan, 2004). Em nossa mais recente investigação acerca do tema ‘aprendizagem de área e perímetro’ (Henriques e Silva, 2012), tivemos como sujeitos de pesquisa alunos do 9º ano do Ensino Fundamental (Educação Básica) de duas escolas públicas da cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil; para a coleta de dados, utilizamos a videografia e também os registros escritos das alunas, em fichas que continham as tarefas; após a transcrição das entrevistas gravadas, analisamos as falas e escritas através do Método de Leitura Plausível (Silva, 2003). Procedimentos semelhantes a estes podem ser adotados em sala de aula, sobretudo ao trabalhar com registros escritos.

Ao nos lançarmos a elaborar tarefas educacionais (Henriques e Silva, 2012), tivemos ainda o objetivo de investigar o próprio processo de produção de tarefas que possuam determinadas características gerais, ou seja, tarefas que: *i)* estimulem a produção de significados dos alunos; *ii)* ampliem as possibilidades discentes de desenvolver e utilizar estratégias de resolução das tarefas; *iii)* possibilitem que vários elementos do pensamento matemático estejam em discussão, como a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, etc.

A seguir, apresentaremos duas das tarefas utilizadas em nossa pesquisa de campo (Henriques e Silva, 2012) e seus objetivos específicos.

Tarefa 1

Os dois retângulos abaixo são iguais. Observe.



Considerando as Figuras 1 e 2, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a medida da área do retângulo?

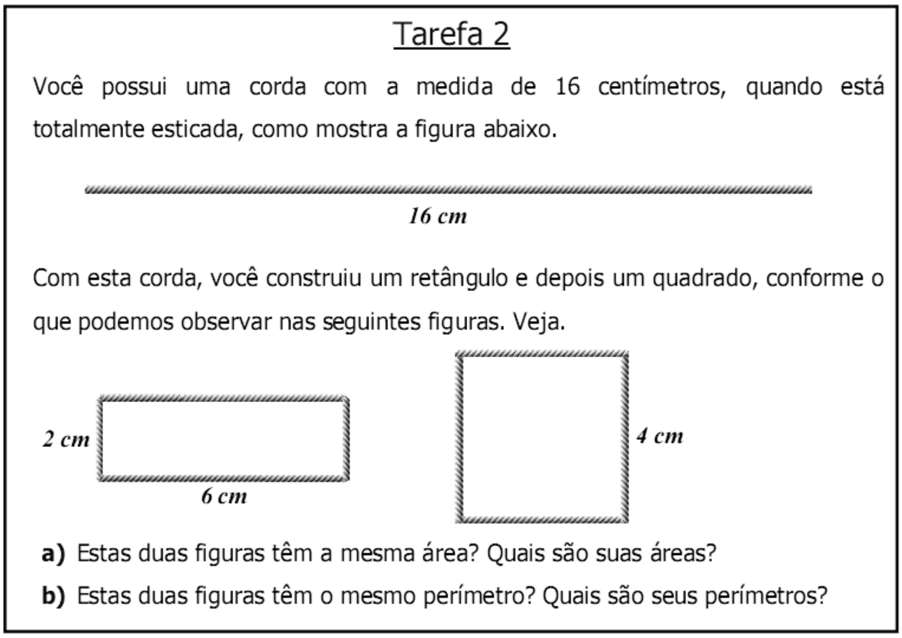
b) Qual é a medida do perímetro do retângulo?

Figura 1. Tarefa 1 sobre e Perímetro

A Tarefa 1 do produto educacional, apresentada abaixo (Figura 1), foi elaborada para atender aos seguintes objetivos: permitir que o professor ou pesquisador identifique de que maneira o aluno opera ao pensar em área e perímetro (por exemplo, com a multiplicação de grandezas lineares ou com a contagem de unidades de área); vislumbramos a perspectiva de, através de uma intervenção orientada, fazer com que os sujeitos pensem e falem a partir das duas figuras, caso não o façam espontaneamente.

A produção de significados dos sujeitos de pesquisa para a Tarefa 1, além de demonstrar que tal tarefa pode revelar dificuldades de aprendizagem das noções de área e de perímetro, evidenciou que os sujeitos operam de maneiras diferentes. (Henriques e Silva, 2012)

A segunda tarefa que aplicamos foi a seguinte:


Tarefa 2

Você possui uma corda com a medida de 16 centímetros, quando está totalmente esticada, como mostra a figura abaixo.

16 cm

Com esta corda, você construiu um retângulo e depois um quadrado, conforme o que podemos observar nas seguintes figuras. Veja.

2 cm *6 cm* *4 cm*

a) Estas duas figuras têm a mesma área? Quais são suas áreas?

b) Estas duas figuras têm o mesmo perímetro? Quais são seus perímetros?

Figura 2. Tarefa 2 sobre e Perímetro

O principal objetivo da Tarefa 2 foi estimular os estudantes a explicitarem seus conhecimentos sobre perímetro, área e relação área-perímetro, segundo possíveis significados produzidos pelos sujeitos. Com esta tarefa (Figura 2), vislumbramos, ainda, a ideia de fixar o perímetro (com um exemplo que tenda ao físico, como uma corda, embora desenhada), com a intenção de gerar, nos sujeitos, o desconforto de obter medidas de área diferentes, para uma mesma medida de perímetro.

A partir da análise dos registros da aplicação da Tarefa 2, encontramos a confusão entre perímetro e área, reincidentemente, na produção de significados de um dos alunos, que parece considerar que as figuras foram feitas com a mesma corda e que, por esta razão, teriam áreas com mesma medida. Já outro sujeito de pesquisa opera com a noção multiplicativa de área, discordando daquela aluna quanto à semelhança das áreas das figuras dadas.

Toda a revisão de literatura, que fizemos em pesquisas anteriores (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011) e que sintetizamos acima, permite-nos eleger elementos constituintes de tarefas geométricas elaboradas com o objetivo central de nos permitir identificar as dificuldades de aprendizagem de área e perímetro, desde que tais elementos sejam coerentes com os nossos pressupostos e objetivos. Ao sustentar esta desejável coerência no processo de desenvolvimento das tarefas, o Modelo dos Campos Semânticos é o referencial teórico que utilizamos em nossas investigações. Na seguinte seção, passaremos a explicitar este referencial e algumas consequências desta abordagem em nossas pesquisas e práticas.

3. Uma nova abordagem para dificuldades de aprendizagem em Geometria

A diferença fundamental que se estabelece entre as últimas pesquisas que realizamos (Henriques e Silva, 2009, 2012; Henriques, 2011) e todas as outras acima citadas – que também investigam um caminho para a solução das dificuldades de aprendizagem de perímetro e área – está na perspectiva que adotamos, a partir do nosso referencial teórico, o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Como veremos mais adiante, este referencial nos proporciona um olhar diferente das teorias piagetianas e do modelo de Van Hiele, que analisam os processos cognitivos pela falta[9], mas também diferente dos trabalhos baseados no arcabouço da Didática Francesa, na qual as caracterizações epistemológicas são distintas daquelas trazidas pelo modelo teórico que adotamos. Este modelo nos possibilita identificar quais significados cada sujeito produz, no interior de uma certa atividade, para um determinado objeto que está sendo constituído por este sujeito.

Outro diferencial importante está no fato de valorizarmos os significados não-matemáticos produzidos pelos alunos, na escola ou fora dela. E esta diferença parece ter maior relevo, quando explicitadas as possíveis consequências da legitimação (ou não) dos significados não matemáticos na escola, nas considerações de Lins e Gimenez (1997):

> É preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são *mais um* modo de produzir significados, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são diferentes. Apenas assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. (Lins e Gimenez, 1997, p. 165)

Uma diferenciação semelhante a esta diz respeito ao caráter internalista da Matemática dos matemáticos, ou seja, aquele que a diferencia da Matemática do cotidiano, do cidadão comum. Para exemplificar, Lins (2004, p. 95) pondera que "quando o matemático define um objeto, não cabe a discussão de se esta definição corresponde bem ou mal a *algo* fora da própria matemática". É nesta direção que o MCS permite comparar e distinguir significados matemáticos e não-matemáticos.

Quanto à Geometria, é imensa a gama de informações e habilidades que os alunos levam às salas de aulas, fruto das suas experiências cotidianas, fora do

[9] Por exemplo, o modelo dos Campos Conceituais de G. Vergnaud, como ressalta Lins (2008, p.534).

ambiente escolar. Por exemplo, muitos daqueles que ajudam ou acompanham seus pais, nos trabalhos da construção civil, serão capazes de estimar uma quantidade de piso quadrangular, em metros quadrados, necessários para cobrir o chão de um determinado cômodo. Outro exemplo: os jovens com extraordinária habilidade para confeccionar papagaios. Mas de que forma pode a escola considerar legítimos os conhecimentos geométricos produzidos não-oficialmente?

A resposta a esta questão é dada por Lins e Gimenez (1997), quando afirmam que "a rua" não se caracteriza *a priori* pelas coisas que se faz na rua, mas sim por seus significados próprios; e seguem exemplificando:

> [...] não é "fazer papagaios (pipas)" que caracteriza a rua, e, sim, os significados (da rua) que se produza numa atividade que envolva aquela tarefa. Quando um arquiteto ou um físico fazem papagaios, é quase certo que os significados produzidos não sejam os mesmos, nem entre si nem com relação os produzidos pela criança na rua. O que queremos dizer com isso é que não basta trazer para a escola a tarefa para produzir com base nela apenas significados da escola. Qual o sentido de dizer "Vamos fazer papagaios!" com a intenção única de falar de simetria, triângulos, cálculo de hipotenusas e de áreas, e – pior ainda – para terminar fazendo o mesmo papagaio de sempre? Alguns dos significados básicos que os papagaios têm na rua estão ligados à beleza e ao equilíbrio. Porque não colocar o desafio de fazer um papagaio diferente *mas que seja tão bom quanto o comum*? Numa situação dessas, é preciso discutir e explicar: i) o que é que faz o papagaio comum funcionar; ii) qual é o "papagaio dos sonhos", o que envolve discussões sobre beleza, forma e tamanho. Num processo como esse, afirmações sobre a "geometria" do papagaio seriam feitas e possivelmente gerariam outras, abrindo-se a possibilidade da intervenção *legítima* do professor para trazer novas possibilidades. (Lins e Gimenez, 1997, p. 27)

Os pesquisadores (Ibidem, p. 27) asseguram que explorar o item (i) da citação acima, juntamente com uma intervenção legítima do professor, é o suficiente para que se constitua um conjunto de instrumentos que vão participar da organização da atividade de produzir novos papagaios. Desta forma, os alunos serão capazes de produzir, nessa atividade, significados matemáticos e não-matemáticos, que coexistirão e terão legitimidade comum.

Segundo o MCS, "conhecimento é entendido como uma crença – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para a sua crença-afirmação" (Lins, 1993, p. 88). Esta concepção epistemológica está fortemente ligada à ideia, defendida por Lins (1999), de que conhecimento é algo do domínio da enunciação, entendendo-se que não há conhecimento, por exemplo, nos livros (objetos físicos), pois nestes há apenas enunciados.

Da caracterização de conhecimento, citada acima, decorre a noção de que diferentes justificações para uma mesma crença-afirmação constituem conhecimentos distintos (Lins, 1994). E a noção de conhecimento está ligada à noção de significados. De acordo com o MCS (Lins, 1999), *significado* é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto, no interior de uma *atividade* – assumimos para este termo o sentido proposto por Leontiev (2006, p. 68). Assim, *produzir significados* é produzir ações enunciativas a respeito do objeto, no interior da atividade (Silva, 2003). Ao discutir os limites criados nos processos de produção de significados (LINS, 2001), o MCS permite que sejam tratadas as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentem.

O método de leitura dos processos cognitivos – criado a partir das noções-categorias do Modelo dos Campos Semânticos e que nos possibilita identificar as produções de significados dos alunos, no momento em que elas ocorrem – foi denominado *Método de Leitura Plausível* (Silva, 2003). Além de nos permitir uma leitura do outro através de suas legitimidades, a importância desse método reside no fato de nos possibilitar a interação com os sujeitos, de modo que consigamos intervir intencionalmente em sua produção de significados. Nisto consiste o processo de negociação de significados.

Os resultados de alguns de nossos estudos (Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), baseados nos aportes do MCS, permitem-nos afirmar que é possível observar as dificuldades de aprendizagem de perímetro e área, através de tarefas geométricas com características específicas que tenham consonância com os pressupostos da produção de significados. Além disso, tais investigações colocaram em evidência que estudantes produzem diferentes significados para os mesmos objetos geométricos.

Em uma investigação recente (Henriques e Silva, 2012), projetamos produzir uma série de tarefas orientadas por objetivos e pressupostos teóricos bem definidos. No caminho de esboçar tal protótipo de tarefas, nosso principal interesse residiu em compreender como elaborar tarefas que permitam aos estudantes associarem os conhecimentos prévios aos novos conhecimentos que estão sendo produzidos pelos próprios estudantes. Em suma, através dessa pesquisa pudemos concluir que tarefas como essas podem tornar visíveis ao professor/pesquisador as dificuldades de aprendizagem de tal modo que, ao se tornarem objeto de atenção destes alunos, tais dificuldades possam ser superadas, a partir de intervenções de seu professor e de interações com seus colegas de classe.

4. Uma síntese e considerações finais

Com base na revisão de literatura empreendida acima e nos resultados de nossas pesquisas (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011; Henriques e Silva, 2009), sintetizamos nosso posicionamento acerca das dificuldades de aprendizagem de perímetro e área, através dos seguintes tópicos:

- avaliamos que a principal dificuldade observada no processo de aprendizagem de área e de perímetro é a confusão que os alunos estabelecem entre estas grandezas geométricas, o que inclui a não dissociação entre suas medidas;
- aceitamos que o trabalho simultâneo com área e perímetro favorece a aprendizagem destas noções;
- admitimos o fato de que um sujeito saber calcular a área de um tipo de figura plana (um retângulo, por exemplo) não garanta que ele tenha aprendido a calcular a área de uma outra figura qualquer;
- concordamos com a afirmação (já muito bem endossada pelas pesquisas) de que a mudança de dimensão gera dificuldades na medição de certas grandezas, como comprimento e área de figuras planas;

- assumimos com válida a ideia de comparação entre objetos (figuras) mensuráveis para a aprendizagem de área e perímetro;
- atentamos para o fato de que a área de uma figura não é sempre reconhecida como uma de suas características (isto nos ajuda a pensar na gênese das possíveis dificuldades no processo cognitivo dos alunos que aprendem sobre perímetro e área);
- consideramos relevante o fato de muitos estudantes avaliarem que o aumento do perímetro de uma figura implica necessariamente em um aumento de sua área, e vice-versa;
- entendemos ser razoável considerar a estrutura de malhas (quadriculadas, triangulares, etc.) favorável à aprendizagem da noção multiplicativa de área, mas potencialmente geradora de dificuldades de aprendizagem, como aquelas citadas ao longo deste capítulo;
- damos foco para o caráter aditivo de área, a expressar-se na utilização de diferentes unidades de área e na decomposição e composição de figuras;
- não aceitamos as noções de concepções errôneas, de conhecimento *a priori* e de níveis de desenvolvimento do pensamento por faixa etária;
- não assumimos a necessidade de uma variedade de representações para o aprendizado de área e perímetro, mas sim de uma diversidade de experiências e de tarefas – que favoreçam a multiplicidade de significados produzidos pelos alunos – e também de intervenções docentes que objetivem a negociação destes significados.

Estes posicionamentos não são senão um ponto de partida para outros estudos, muito embora ampliem, para o professor que ensina sobre área e perímetro de figuras geométricas, o horizonte para compreensão do *modus operandi* de seus alunos e das dificuldades que surge na aprendizagem de tais temas.

Importa-nos ainda ressaltar que as tarefas que elaboramos em nossas investigações mais recentes (Henriques e Silva, 2012; Henriques, 2011) não se enquadram na categoria de tarefas de fixação de conteúdos, ou na tipologia de simples exercícios. Elas foram criadas com o objetivo de gerar situações que permitissem ao professor-pesquisador observar e entender os modos segundos os quais os estudantes operavam, ou seja, as maneiras pelas quais eles constituíam em objetos as noções de área e de perímetro. Ao modificar tal série de tarefas, reorganizá-la ou mesmo criar outras tarefas, para utilizá-las em sua sala de aula, o professor deve ter clareza de seus objetivos e estar atento à produção de significados dos alunos, dando-lhes possibilidades diversas de expressão, e intervindo quando julgar necessário, organizando a aplicação das tarefas sem a preocupação com critérios de categorização discente que envolvam juízo de valor.

Embora ainda outras pesquisas sejam necessárias para que possamos compreender melhor os processos cognitivos ligados à aprendizagem de área e perímetro, entendemos que as ações docentes de levantar tais dificuldades e intervir de modo orientado, a partir de uma série de tarefas elaboradas com este propósito, constituem um elemento-chave para que orientemos o nosso trabalho, em sala de aula, envolvendo tópicos de Geometria, de modo coerente com os pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos.

Bibliografia

Abrantes, P.; Serrazina, L.; Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento de Educação Básica.

Alsina i Pastells, A. (2009). *Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos para crianças de 6 a 12 anos*. Trad. de Vera Lúcia de Oliveira Dittrich. Curitiba, Brasil: Base Editorial.

Baldini, L. A. F. (2004). *Construção do conceito de área e perímetro: uma seqüência didática com o auxílio do software de Geometria dinâmica*. Londrina, Brasil: Universidade Estadual de Londrina.

Baltar, P. M. (1996).*Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étuide del'acquisition des relations entre lês longueurs et les aires au collège.* Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Battista, M. (2007).The development of Geometric and spatial thinking. In: F. K. Lester, Jr. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* NCTM/Information Age Publishing, pp.843-908. Charlotte, NC.

Bellemain, P. M. B. (2003).A aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2., 2003, Santos. *Anais...* Santos, São Paulo.

Brasil. Ministério da Educação (2010).*Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011: Matemática.* Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação (2008). *PDE: Plano de desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.* Brasília: MEC, SEB; INEP.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* (Terceiro e Quarto Ciclos). Brasília: MEC/SEF.

Brousseau, G. (1983).Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198. Grenoble: RDM.

Chamorro, M. C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental.* Doctoral thesis. Madrid: UNED.

Chappell, M.; Thompson, D. (1999).Perimeter or Area? Which measure is it? *Teaching Mathematics in the Middle School*, NTCM, v.1, n. 5, p. 20-23. Reston, VA.

Clements, D.; Stefhan, M. (2004). Measurement in Pre-K to Grade 2 Mathematics. In: Clements, D.; Sarama, J.; DiBiasi, A.-M. (Eds.). *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates.* Mahwah, NJ. p. 299-320.

Costa, C. (2000). *Visualização, veículo para a educação em geometria.* Coimbra: Escola Superior de Coimbra. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2011.

D'Amore, B.; Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers and students. *Mediterranean journal for research in mathematics education* (Cyprus Mathematical Society). v. 5, n. 2. p.1-29. Nicosia, Cipro: Università di Cipro.

French, D. (2004). *Teaching and learning geometry.* London: Continuum.

Henriques, M. D. (2011). *Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro.* 218 p. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora (MG).

Henriques, M. D.; Silva, A. M. (2012). Dificuldades de aprendizagem de área e perímetro na escola básica. In: *Simpósio de Educación Matemática*, 12, 2012. Chivilcoy. *Memorias…* Chivilcoy, Argentina: EDUMAT, v.1. p. 579-601. CD-ROM.

Henriques, M. D.; Silva, A. M. (2009). Significados producidos por estudiantes secundarios brasileños para área de figuras planas. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 6., 2009, Puerto Montt. *Actas…* Puerto Montt, Chile: FISEM. v.1, p. 580-585.

Hernández, B. (2008). *Creative ideas for teaching area and perimeter: ideas for teaching math.* About.com. Disponível em: http://homeschooling.about.com/od/basicmath/qt/teachingarea.htm. Acesso em: 21/11/2009.

Houdement, C. (2007). Geometrical working space, a tool for comparison. In: Conference of The European Society for the Research of Mathematics Education, 5., 2007, Chipre. *Proceedings…* University of Cyprus. p. 972-981.

Houdement, C.; Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 3., 2003, Bellaria. *Proceedings…* Bellaria, Italy.

Hoyles, C.; Foxman, D.; Küchemann, D. (2002). *A Comparative Study of Geometry Curricula.* London: Qualifications and Curriculum Authority.

International Commission on Mathematical Instruction. (1994). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion document for an ICMI study,* L'Enseignement Mathématique, vol. 40, pp. 345-357. Catania, Italia: ICMI.

Jones, K. (2010). Linking geometry and algebra in the school mathematics curriculum. In: Usiskin, Z.; Andersen, K.; Zotto, N. (Eds.). *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry.* Charlotte, NC: Infoage. p. 203-216.

Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In: Barton B. (Ed.), *Readings in Mathematics Education.* Auckland, New Zealand: University of Auckland. p 75-90.

Jones, K; Mooney, C. (2003). Make Space for Geometry in Primary Mathematics. In: THOMPSON, I. (Ed.). *Enhancing Primary Mathematics Teaching,* London: Open University Press. p 3-15.

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, n. 52, p. 177-209.

Kuhn, T. S. (1998). *A estrutura das revoluções científicas.* 5 ed. São Paulo: Perspectiva.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In Kilpatrick, J.; Martin, W.; Schifter, D. (Eds.). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM. p. 179-192.

Leontiev, A. N. (2006). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotsky, L. S. (Dir.), *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone. p. 59-83.

Lins, R. C. (2004). Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M.A.V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo, Brasil: EDUNESP. p. 92-120.

Lins, R. C. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In: Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R. (Eds.). *Perspectives on School Algebra.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. p. 37-60.

Lins, R. C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: Editora da UNESP.

Lins, R. C. (1997). Luchar por la supervivencia: la producción de significados. *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, v. 1, n. 14, p. 39-46. Barcelona: Graó.

Lins, R. C. (1994). O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Revista Dynamis.* abril/junho. v.1, n. 7, p. 29-39. Blumenau: FURB.

Lins, R.C. (1993). Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa. *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, Ano 1, n.1, São Paulo: SBEM-SP.

Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, Brasil: Editora Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Lindquist, M. M.; Kouba, V. L. (1989). Measurement. In: Lindquist, M. M. (Ed.). *Results from the Mathematics Assessment of the Natonal Assessment Of Educational Progress.* Reston, Va: NCTM. p. 35-43

Lovis, K. A.; Franco, V. S. (2011). Geometria Hiperbólica: resistências e dificuldades em compreendê-la. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. *Anais...* Recife, Brasil: UFPE.

Majmutov, M. I. (1983). *La enseñanza problémica***.** La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and Area Through the van Hiele Model.In: *Mathematics Theching in the Middle School*, vol. 5, n. 2, p. 87-90, NCTM.

Mammana, C.; Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study.* Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Martos, Z. G. (2002). *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental.* 147 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: IGCE/UNESP.

Morris, R. (1986). *Studies in mathematics education volume 5: Geometry in schools.* Paris: Unesco.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM. (Trabalho original, em Inglês, publicado em 2000).

Nunes, T. (1995). Sistema de signos e aprendizagem conceptual. In: *Quadrante*, vol. 4, n. 1, p.7-24. Lisboa: APM.

Nunes, T.; Light, P.; Mason, J. (1993). Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction*, v. 3, n. 1, p. 39-54. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/search>. Acesso em: 15 fev. 2010.

Owens, K; Outhred, L. (2006). The complexity of learning Geometry and Measurement. In: Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.). *Handbook of Research on the*

Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. Rotterdam: Sense Publishers. p.83-115.

Santos, C. A. B. (2008). *Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro.* 152 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

Silva, A. M. da (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro, Brasil: UNESP.

Skolverket (2008). *TIMSS 2007. Swedish Pupils' Mathematical Knowledge (Trends in International Mathematics and Science Study), an analysis.* (Report 323, 2008). Stockholm: Skolverket.

Teles, R. A. M. (2009). Um estudo sobre fórmulas de área em livros didáticos brasileiros. In: Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 6., 2009, Puerto Montt. *Actas...* Puerto Montt, Chile: FISEM. v.1., p. 499-504.

Usiskin, Z. (1994). Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: Lindiquist, M. E Shulte. A. P. *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo: Atual. p.21-37. (Trad. Hygino H. Domingues).

Vergnaud, G. (2008). *Atividade humana e conceitualização.* Porto Alegre: Comunicação Impressa.

Veloso. E. (2000). *Geometria: temas actuais: materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vygotsky, L. S. (1994). *A formação Social da Mente.* São Paulo, Martins Fontes.

Yeo, J. K. H. (2008). Teaching Area and Perimeter: Mathematics-Pedagogical-Content Knowledge-in-Action. In: Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 31., 2008. *Proceedings...* MERGA. p. 621-627.

Marcílio Dias Henriques. Professor do Instituto Estadual de Educação de Juiz de Fora (Minas Gerais, Brasil). Pesquisador do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Primeiro secretário da Diretoria Regional Minas da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2010-2013). Possui Especialização em Educação Geométrica (UFJF/2008) e Mestrado em Educação Matemática pela UFJF (2011). mdhenriques@oi.com.br

Amarildo Melchiades da Silva. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (Brasil). Pesquisador-coordenador do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da UFJF. Diretor da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Minas (2010-2013). Possui Doutorado em Educação Matemática pela UNESP/Rio Claro (2003) e Pós-doutorado em Educação Matemática pela Rutgers University (2012). **xamcoelho@terra.com.br**