REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 145-160
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC):
Um Estudo Sobre a Influência do Software GeoGebra na Elaboração das Demonstrações Geométricas

Celine Maria Paulek, Michele Regiane Dias Veronez

Resumen	Presentamos algunos resultados de una investigación realizada en 1º año de un curso de licenciatura en Matemática, para analizar las influencias del *software GeoGebra* en las demonstraciones geométricas. Primeramente, abordamos algunas consideraciones respecto de la enseñanza y el aprendizaje de *Geometria* y miramos el uso del software. El estudio de áreas de regiones polígonales, particularmente del *paralelogramo,* es lo que vamos enfatizar, pero, nuestro objetivo está en las demostraciones geométricas elaboradas por los alumnos, antes y después de tener realizado una tarea utilizando *GeoGebra.* En la análisis buscamos evidencias de la influencia del *software* en las demonstraciones elaboradas. Por más que los alumnos no observen ciertos detalles de sus demostraciones, pudimos inferir que algunas de los que presentaron se deben al hecho de haber utilizado *GeoGebra.* Señalizamos, aún, que existe una necesidad de envolver los alumnos del curso de licenciatura con el uso de este *software de geometria dinâmica* a fin de contribuir para la elaboración y demonstración geométrica.
Abstract	We present some results of a survey among students of the 1st year of an undergraduate course in mathematics, in which we sought to analyze the influence of GeoGebra software in the geometrics statements prepared by the undergraduates. We initially discuss some considerations on the teaching and learning of geometry, and turn our attention to the use of dynamic geometry software. The study areas of polygonal regions, particularly the parallelogram, is what we bring to the fore in this work; however, we focus on geometrical proofs prepared by the students at first, and afterwards they perform a task using GeoGebra. In the analysis we sought evidence of the influence of the software on the demonstrations prepared by them. Although students do not have to work out many details in preparing their demonstrations, we can infer that some of those were presented due to the fact that they had experienced using GeoGebra. We signal, therefore, that there is need to involve undergraduate students in using this dynamic geometry software in order to contribute to the elaboration of geometrical proofs.
Resumo	Neste trabalho apresentamos alguns resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 1º ano de um curso de licenciatura em Matemática, na qual se buscava analisar as influências do software GeoGebra nas demonstrações geométricas elaboradas. Inicialmente abordamos algumas considerações sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria e direcionamos o nosso olhar para o uso de softwares de geometria dinâmica. O estudo de áreas de regiões poligonais, particularmente do paralelogramo, é o que trazemos à tona nesse trabalho, contudo, nosso foco está nas demonstrações geométricas elaboradas pelos alunos, antes e depois de terem realizado uma tarefa utilizando GeoGebra. Na análise buscamos evidências da influência do software nas demonstrações por eles elaboradas. Embora os alunos não tenham se atentado para diversos detalhes na elaboração de suas demonstrações, podemos inferir que alguns dos que foram apresentados se deve ao fato de terem vivenciado atividades utilizando o GeoGebra. Sinalizamos, portanto, que há necessidade de envolver os alunos do curso de licenciatura com o uso desse software de geometria dinâmica a fim de contribuir para a elaboração de demonstrações geométricas

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem de Geometria são focos de vários estudos e pesquisas. Andrade e Nacarato (2004) apresentam um levantamento das pesquisas que têm sido realizadas no âmbito da Geometria e salientam que muitas delas revelam que os alunos têm acentuada dificuldade na compreensão de conceitos geométricos. Os autores também sinalizam que é "significativo o número de trabalhos que vêm discutindo sobre o papel das provas e argumentações no ensino da Geometria, além de uma preocupação com discussões de aspectos epistemológicos do pensamento geométrico." (Andrade e Nacarato, 2004, p.61). No rol de pesquisas apresentadas por estes autores, há algumas realizadas com professores e, que nos levam a refletir sobre a formação de professores de matemática. Tal reflexão vem também amparada nas observações realizadas ao trabalhar com a disciplina de Geometria em um curso de licenciatura em Matemática e, com isso, identificar que os licenciandos não lidam com facilidade com as demonstrações geométricas.

Sendo assim, direcionamos nosso olhar para um curso de licenciatura em matemática, mais precisamente para o envolvimento dos licenciandos (futuros professores) com as demonstrações geométricas. Compreender um sistema axiomático e escrever demonstrações dentro desse sistema não é uma tarefa que os licenciandos realizam com tranquilidade. Dessa forma, buscou-se meios de tentar auxiliá-los neste aspecto.

O termo demonstrações é entendido aqui na mesma acepção proposta por Garnica (2002, p.98), que elas "têm, sempre, a função de convencer", por 'convencimento' entende-se "como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados".

Consideramos neste artigo o uso do software GeoGebra como uma possibilidade para o desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que este software possui características que podem vir a colaborar na elaboração das demonstrações geométricas. Muito embora algumas das pesquisas apresentadas em Andrade e Nacarato (2004) abordem experimentos com Geometria Dinâmica, os autores sustentam que há necessidade de mais pesquisas com esse enfoque.

A concepção de geometria aqui apresentada ancora-se nas ideias esboçadas por Guimarães, (Belfort e Belemain, 2003) de que o estudo em geometria inicia-se na exploração concreta e experimentação, passa pelo estabelecimento de conjecturas e resolução de problemas e segue até a elaboração de justificativas e provas formais. Na pesquisa realizada busca-se analisar as influências do software GeoGebra nas demonstrações geométricas elaboradas pelos licenciandos. Ao focar o estudo das demonstrações geométricas de áreas de regiões poligonais, particularmente do paralelogramo, evidencia-se a necessidade de nos cursos de Licenciatura em Matemática os licenciandos se envolverem com as demonstrações geométricas para além da compreensão, ou seja, deve-se incentivá-los a elaborar tais demonstrações.

2. Algumas considerações sobre o Ensino e a Aprendizagem de Geometria

Nas diversas pesquisas que discutem sobre a Geometria enquanto disciplina escolar têm-se buscado identificar o papel da Geometria no ensino e os avanços e retrocessos históricos acerca da inserção e exclusão da disciplina de Geometria nas escolas. Baldini (2004), Constantino (2006), Gravina (2001), são algumas das pesquisas que se inserem nesse contexto.

Pavanello (1993) retrata que durante muito tempo o ensino de Geometria foi um ponto falho do currículo escolar, pois, ou a deixavam como um último conteúdo (que quase sempre não era trabalhado por falta de tempo), ou a retiravam do currículo. Todavia, essa conduta não foi totalmente aceita por todos. Pavanello retrata este fato:

> a inquietação com o abandono da geometria – abandono este que é, na verdade, um fenômeno mundial – parece estar ligada a questões de ordem educacional. O estudo da geometria não foi considerado durante séculos, como indispensável à formação intelectual dos indivíduos e ao desenvolvimento da capacidade de hábitos de raciocínio? Privar indivíduos deste estudo não acarretaria prejuízos à sua formação? (Pavanello, 1993, p.7)

É possível encontrar no trabalho de Lorenzato (1995) duas causas relevantes para a ausência da Geometria nas nossas salas de aula. Seja porque os professores não conhecem a geometria suficientemente para ensinar com segurança, seja pela dependência que a maioria deles têm do livro didático, no qual a Geometria aparece como um aglomerado de fórmulas e definições.

> Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (Lorenzato, 1995, p.3-4)

Guimarães, Belfort e Bellemain (2003) colocam que se observarmos a evolução dos currículos ao longo de um período suficientemente longo, veremos que a ênfase oscila entre abordagens privilegiando “mais figuras e exploração/menos geometria formal” por um lado e “menos figuras/mais provas e dedução” por outro. Esse processo dialético envolvendo o trabalho exploratório com figuras, culminando na elaboração de provas, que pode ser observado tanto na evolução histórica da Geometria como no processo mental dos matemáticos em atividade, parece ter evidenciado algumas dificuldades para os formuladores de currículos.

Apesar de existirem vários apontamentos sobre a necessidade de alterações na maneira de se trabalhar Geometria em sala de aula, percebe-se que muitos livros didáticos ainda tratam a Geometria de maneira inadequada, conforme afirmam os autores:

> Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. E ainda, quase não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos. Essas abordagens criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos. (Almouloud, S. A. et al, 2004, p.99).

Esta abordagem da Geometria feita de forma pontual, e normalmente separada dos demais conteúdos, acaba por dificultar a compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos geométricos. Mas não só os livros didáticos causam tais dificuldades. Mello (2002) pontua que a formação dos professores em relação à Geometria é precária e não contribui para que façam uma análise criteriosa sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, pois

> [...] ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina nem a constituição de significados que não possui ou a autonomia que não teve oportunidade de construir (Mello, 2002, p.8-9 apud Almouloud, S. A. et al, 2004, p.100).

Segundo Pavanello (2004), até mesmo nos cursos superiores de matemática é possível perceber uma acentuada dificuldade, por parte dos alunos, em compreender os processos da demonstração, ou até mesmo a incapacidade de usá-los. Para Guimarães, Belfort e Belemain (2003) os alunos ingressam no Ensino Superior sem conhecer muitos dos elementos que são relevantes para a sua carreira e, no entanto, precisam terminar seus cursos preparados suficientemente para desenvolver um bom trabalho. Caso contrário, inserem-se na profissão de professor com um sentimento de insegurança em relação a suas habilidades matemáticas.

Sendo assim, é importante que os cursos de licenciatura em Matemática proporcionem um ensino de Geometria que possibilite ao futuro professor conhecimento e compreensão dos conceitos da Geometria e também uma reflexão sobre o ensinar e aprender Geometria a partir de um estudo axiomático da mesma. O fato é que, mais do que apenas conhecimento, deve-se incutir nesses alunos competências específicas à construção de conhecimentos. Essas competências serão proporcionadas a partir da oportunidade dos alunos lidarem com questões profundas, e diretamente relacionadas com o currículo escolar, com ênfase especial no quesito demonstrações geométricas.

Na intenção de que os licenciandos em Matemática atinjam um nível de dedução formal[1], se faz necessário possibilitar a eles o desenvolvimento de seu pensamento geométrico para além da compreensão das demonstrações. Os softwares de geometria dinâmica podem ser um recurso para auxiliar os licenciandos e incentivá-los a elaborar demonstrações geométricas.

2.1. Demonstrações em Geometria e o uso de softwares de geometria dinâmica

A ideia de demonstrar esteve sempre vinculada à validação das ideias matemáticas, e segundo Hanna (1990 apud Loureiro e Bastos, 2002):

> o formalismo desenvolveu-se para eliminar a necessidade de recorrer à evidência intuitiva e ao julgamento humano, por serem ambos vistos como fontes potenciais de erros graves. Dentro do formalismo, a verdade de uma afirmação reside apenas nos axiomas e na consistência interna do próprio sistema. (p. 107)

O discurso dedutivo em matemática e o argumentativo de outras áreas do conhecimento possuem características bastante diferentes. Segundo Duval (1998 apud Loureiro e Bastos, 2002, p.117) “para raciocinar é necessário que os alunos descubram como se organiza o raciocínio dedutivo e porque ele não funciona da mesma forma que uma argumentação ou explicação em outras áreas do conhecimento (geologia, botânica, química, mecânica, história).” Esse autor acrescenta que descobrir e desenvolver diferentes formas de raciocínio são também objetivos do ensino da Geometria.

[1] De acordo com o modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, no nível de dedução informal os alunos acompanham e formulam argumentos informais, porém não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. No nível de dedução formal os alunos compreendem o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático e são capazes de construir demonstrações (Crowley, 1994).

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) pontuam que no Ensino Fundamental a Geometria é estruturada de modo a possibilitar aos alunos uma reflexão através das experimentações e deduções informais, e que no Ensino Médio é necessário que haja um aprofundamento de tais ideias, de modo que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo e compreender o significado de postulados e teoremas. Frisa-se que não se trata de memorizar postulados e demonstrações, mas analisar como a ciência matemática procede à validação e apresentação de seus conhecimentos, e assim propiciar ao aluno o desenvolvimento de seu pensamento lógico dedutivo e também da linguagem matemática. Pontua-se também a importância de que o aluno compreenda a necessidade da existência de axiomas para, a partir deles, estabelecer uma cadeia dedutiva que leve a provar as demais afirmações, criando assim a Geometria axiomática (BRASIL, 2002).

As Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2006) apresentam, a respeito da Geometria, a necessidade de possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas de seu cotidiano e também apontam o Ensino Médio como uma oportunidade para os alunos estudarem e admirarem a parte matemática que aborda os teoremas e as argumentações dedutivas.

Possibilitar ao aluno a leitura de uma figura e incentivá-lo a usá-la para conjecturar ou entender uma demonstração é parte importante do trabalho de ensinar Geometria. A importância das demonstrações em Geometria e as dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender e elaborar tais demonstrações levaram vários pesquisadores a proporem o uso de softwares de geometria dinâmica. Para Guimarães, Belfort e Belemain (2003) esses softwares podem oferecer novas representações de objetos geométricos que, de alguma forma, "concretizam" a figura formal.

Segundo Ferreira, Soares e Lima (2008, p. 383) "os objetos matemáticos construídos nesses ambientes, segundo suas propriedades, podem ser manipulados diretamente na tela do computador dinamizando-se as configurações". Os mesmos autores pontuam ainda que a movimentação dos objetos geométricos, favorecida pelo software de geometria dinâmica, revela os invariantes geométricos decorrentes da construção feita. Essa característica viabiliza trabalhar com as demonstrações em ambiente dinâmico, no qual o aluno pode investigar e conjecturar muito mais do que utilizando apenas lápis e papel. Hoyles e Jones afirmam que o uso de softwares de geometria dinâmica

> [...] acompanhados de tarefas adequadas, podem proporcionar oportunidades para que desenvolvam bases para uma apreciação mais completa da natureza e propósito da demonstração matemática. [...] Deste modo, acreditamos que podemos desenvolver uma apreciação flexível dos papéis da demonstração que incluem iluminação, descoberta e comunicação, paralelamente com os da verificação e rigor. (Hoyles e Jones 1998 apud Loureiro E Bastos, 2002, p. 125)

Estes autores vêem como positiva a utilização de softwares de geometria dinâmica, mas frisam a importância dessa utilização vir acompanhada de tarefas, uma vez que o livre acesso ao software pode não trazer resultados positivos. Essas tarefas podem tanto ajudar no sentido de proporcionar que se estabeleçam contraexemplos para as falsas conjeturas que podem emergir no decorrer do seu desenvolvimento, como ajudar a investigar as propriedades que são comuns na solução de casos particulares.

Alguns dos principais benefícios e aplicações da geometria dinâmica, segundo King e Schattschneider (1997) citados por Santos e Martinez (2000) são:

- precisão e visualização: a construção da geometria é feita pelo estabelecimento de relações geométricas entre os elementos (perpendicularismo, paralelismo, pertinência, ângulo, etc.). Pode-se medir ângulos e distâncias e calcular-se relações com precisão, permitindo facilmente a verificação empírica de hipóteses e teoremas. Os conceitos de um teorema podem ser compreendidos por visualização. A precisão também é importante porque construções imprecisas podem conduzir a conclusões errôneas já que é natural o julgamento humano ser fortemente influenciado pelas formas percebidas visualmente.
- exploração e descoberta: a manipulação de construções permite que se explore a Geometria e novas relações e descober propriedades. Muitas vezes, os próprios alunos "re-descobrem" teoremas em aula. O professor precisa estar preparado para responder a perguntas inesperadas. Da mesma forma que as planilhas eletrônicas permitem responder a perguntas do tipo "e se..." referentes a fórmulas e manipulações numéricas, a Geometria Dinâmica o faz para as relações gráficas.
- provas de teoremas: embora a geometria dinâmica não possa provar teoremas, a capacidade de experimentação de hipóteses que proporciona pode motivar a busca pela prova de um teorema, pois induz à convicção de sua validade. Da mesma forma, pode ajudar e sugerir caminhos para a prova formal. (p. 3)

É possível encontrar vários softwares de geometria dinâmica que contemplam os benefícios e aplicações supracitados. Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, apresentada parcialmente neste trabalho, foi utilizado o software GeoGebra[2] que, segundo Cavalcante (2010), congrega recursos da geometria, álgebra e cálculo. Gravina (2010) complementa ainda que

> Na tela do *software*, tem-se, em linguagem clássica da Geometria, recursos para construção de objetos geométricos, a partir das propriedades que os definem. O processo de construção é feito mediante escolhas de primitivas que são disponibilizadas nos diferentes *menus,* pontos, retas, círculos, retas paralelas, retas perpendiculares, transformações geométricas, por exemplo. A base inicial de *menus* pode ser expandida com a inclusão de rotinas de construção, as macroconstruções. (p. 1).

Este software tem como diferencial a possibilidade de serem inseridas diretamente equações e coordenadas, podendo assim representar um mesmo objeto de diferentes maneiras: representações geométrica e algébrica.

3. O contexto investigativo e a caracterização da pesquisa

A pesquisa realizada ocorreu em uma turma de 1º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, durante 07 (sete) aulas da disciplina de Geometria. Uma das pesquisadoras era professora da disciplina, não havendo assim influência da presença de um membro externo à rotina dos alunos. Vale frisar que os alunos tiveram contato com a elaboração de demonstrações geométricas antes do início desta pesquisa. Em relação ao software GeoGebra, praticamente todos os alunos já

[2] Este software foi escolhido por suas posibilidades, por ser gratuito e por estar presente em todas as escolas da rede pública do Estado do Paraná.

conheciam e sabiam trabalhar com o software. Porém, antes do desenvolvimento da tarefa relacionada à pesquisa a professora abordou as principais ferramentas deste software.

Os dados que proporcionaram a realização da análise das demonstrações dos alunos foram coletados em dois momentos. No primeiro momento foi solicitado aos alunos que deduzissem uma relação que viabilizasse calcular a área de um paralelogramo (Figura 1). A intenção era compreender que procedimentos os alunos usariam para obter tal relação.

1. Seja ABCD um paralelogramo. Deduza uma relação que descreva a área desse paralelogramo. (Descreva todo o desenvolvimento da sua dedução).

Figura 1. Atividade 1. Fonte: Autoria própria

Depois dos alunos terem escrito a relação solicitada na Atividade 1, eles, utilizando o software GeoGebra realizaram a tarefa apresentada na Figura 2. Essa tarefa possibilitou que eles construíssem paralelogramos, calculassem e comparassem áreas e buscassem justificativas quanto às regularidades encontradas.

- Abra um arquivo novo.
- Crie um paralelogramo *ABCD*. Para isso, crie a reta *a* passando por *AB* e uma reta *b* paralela a reta *a* passando por um ponto *C* não pertencente a reta *a*.
- Trace a reta *c* passando por *B* e *C*.
- Trace uma reta *d* paralela a reta *c* passando por *A*. Marque o ponto *D* de interseção das retas *b* e *d*. Assim temos o quadrilátero *ABCD*, paralelogramo por construção.
- Trace uma reta *e* perpendicular a reta *a* passando por *C* e uma reta *f* perpendicular a reta *a* passando por *D*.
- Marque o ponto *E* de interseção de *e* e *a* e o ponto *F* de interseção de *a* e *f.*
- Com a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro” meça *AB* e *CE*.
- Crie um campo de texto dinâmico que represente $\overline{AB} \cdot \overline{CE}$, utilizando a ferramenta “inserir texto” e digitando: *“AB*CE=”+distânciaAB*distânciaCE*. (lembre-se de selecionar a opção fórmula Latex)
- Utilizando a ferramenta “polígono” determine os polígonos *ABCD*, *DCEF* e meça suas respectivas áreas.
- Movimente os vértices do paralelogramo. O que acontece com os valores das áreas de *ABCD*, *DCEF* e do campo da fórmula $\overline{AB} \cdot \overline{CE}$? Por que isso acontece?

  A partir desta atividade, o que é possível dizer sobre a área do paralelogramo?

Figura 2. Roteiro da Tarefa Realizada no Software GeoGebra
Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010).

Na Figura 3, foi solicitado aos alunos que elaborassem uma demonstração para a área do paralelogramo. Os dados coletados, a partir das considerações dos alunos compuseram o segundo momento de coleta de dados. A busca por indícios da influência da tarefa realizada no GeoGebra na escrita da demonstração solicitada na Figura 3, aconteceu por meio da comparação entre o que os alunos escreveram na Atividade 1 e a demonstração apresentada na Atividade 2, ou seja, nas atividades antes e depois da realização da tarefa com o GeoGebra.

1. Demonstre que a área de um paralelogramo é o produto da medida de qualquer base pela altura correspondente, ou seja, $A(ABCD) = b \cdot h$.

Figura 3. Atividade 2. Fonte: Autoria própria

Ao observar os diferentes processos utilizados pelos alunos nas suas demonstrações, foi possível categorizá-las em três grupos e então escolher, aleatoriamente, os registros escritos de uma dupla de cada grupo categorizado para procedermos à análise.

4. Análise das demonstrações elaboradas pelos alunos: impactos do uso do GeoGebra

Buscou-se identificar, por meio dos registros das Atividades 1 e 2 realizadas pelos alunos em duplas, definidas como A, B e C, se houve influência do GeoGebra na demonstração elaborada por eles.

4.1. Análise das Demonstrações da Dupla A

Na Atividade 1 a dupla A encontrou a relação solicitada dividindo o paralelogramo em dois triângulos retângulos e um retângulo (Figura 4) e adicionando as áreas dos três polígonos obtidos. Na Atividade 2 a dupla também dividiu o paralelogramo em dois triângulos retângulos e um retângulo, mas diferentemente do que foi realizado na Atividade 1, não adicionam as áreas dos três polígonos; criam um novo triângulo retângulo congruente aos outros dois de modo a formar um retângulo (Figura 5) e portanto demonstram o que era pedido.

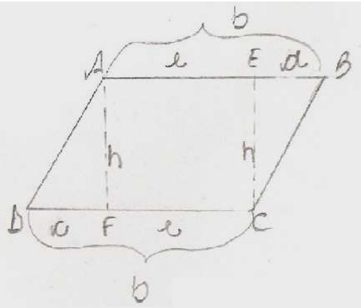

Figura 4. Desenho feito pela dupla A na Atividade 1

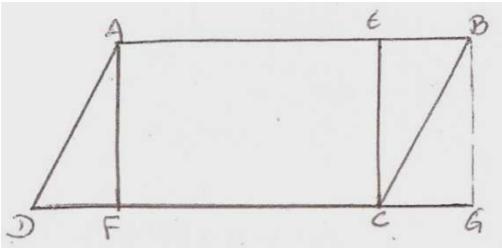

Figura 5. Desenho feito pela dupla A na Atividade 2

Analisando a demonstração escrita pelos alunos (Figura 6) podemos observar que na Atividade 1 os alunos consideram o paralelogramo e traçam as alturas, logo em seguida utilizam a palavra “assim”, o que nos leva a considerar que a afirmação seguinte decorre da anterior. No entanto, como isto não procede, os alunos mostram dificuldade em desenvolver uma sequência coerente e formal de afirmações.

Verifica-se que os alunos consideram congruentes a AE y FC, ao chamar ambos os segmentos de *e*, mas não justificam tal fato. Quando adicionam as áreas dos três polígonos da figura misturam a identificação do polígono com o cálculo da área, mostrando erros ao utilizar os símbolos matemáticos. Nesse caso, há falta do sinal de igualdade e uso errôneo das setas. Ainda é possível observar que os alunos utilizam relações para o cálculo da área de retângulos e triângulos como base para concluir a relação que descreve a área do paralelogramo, mas não explicitam na demonstração que assumem tais relações e porque as assumem como verdadeiras.

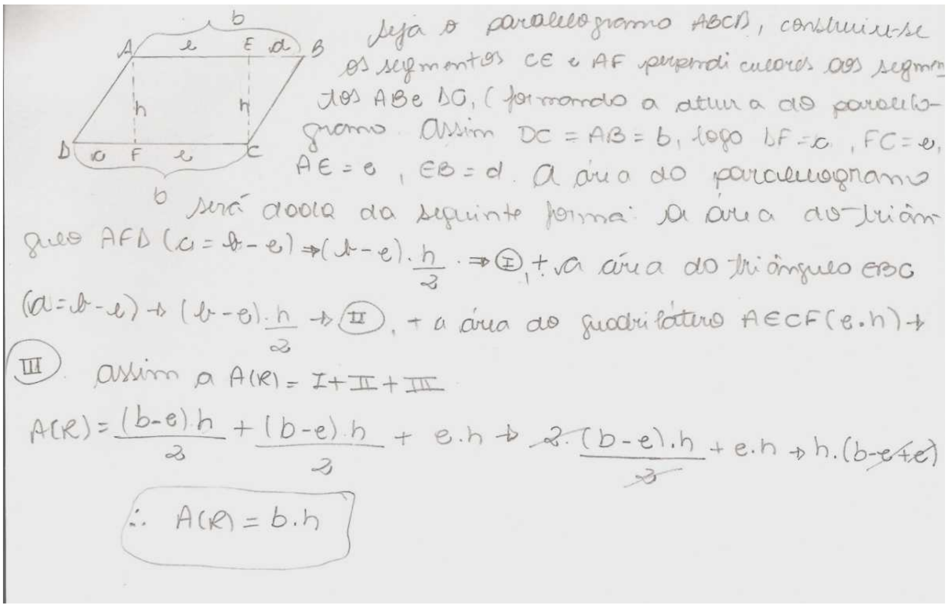

Figura 6. Registros escritos da dupla A na Atividade 1.

Na Atividade 2, verifica-se que os alunos dividem novamente o paralelogramo em um retângulo e dois triângulos, mas chamam o retângulo apenas de quadrilátero. Em um momento posterior utilizam o fato de ele ser retângulo, o que nos remete novamente à falta de formalidade. Em seguida consideram os triângulos CEB e AFD como congruentes e apontam o caso de congruência, contudo, na hora de justificá-lo afirmam apenas que CB e DA congruentes por serem paralelas, mas não afirmam que CB e DA são lados opostos de um paralelogramo, o que justificaria a congruência.

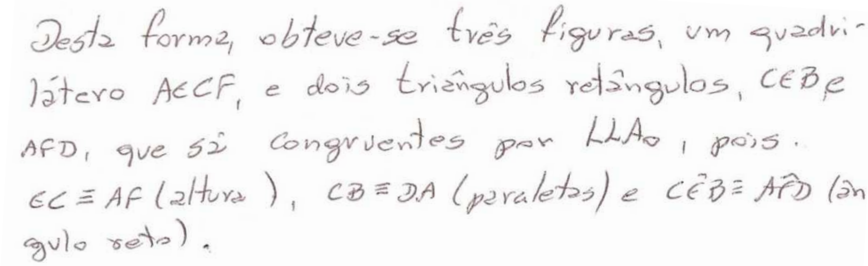
Desta forma, obteve-se três figuras, um quadrilátero AECF, e dois triângulos retângulos, CEB e AFD, que são congruentes por LLAo, pois. EC ≡ AF (altura), CB ≡ DA (paralelas) e CÊB ≡ AF̂D (ângulo reto).

Figura 7. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

Quando os alunos constroem o triângulo BCG é possível verificar a busca de uma sequência lógica e formal. Embora não tenham utilizado a construção de retas e demarcação de pontos de modo a obter segmentos e ângulos congruentes, mencionam tais congruências para poder concluir que $ADF \equiv BCG$ e assumem como necessário criar este triângulo congruente para poder dar continuidade à demonstração.

Por construçã, criou-se o triângulo CGB, de forma que $CG \equiv EB$, $BG \equiv EC$, $\hat{G} \equiv \hat{E}$.

Figura 8. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

A finalização da demonstração elaborada na Atividade 2 mostra-se mais detalhada que na Atividade 1, porém este detalhamento nos permite perceber que os alunos não conseguiram escrever uma demonstração com um sistema lógico subjacente, há um excesso de informações e redundâncias (Figura 9).

O que originou um quadrilátero EBGC, cuja área é obtida por: $A(EBGC) = b.h$, como $BGC \equiv AFD$, pode-se afirmar a área do quadrilátero ABGF é igual a área do paralelogramo ABCD. Portanto, $A(ABCD) = b.h$. (Pois esta seria a soma do quadrilátero $A(AECF)$ com os triângulos $A(CEB)$ e $A(AFD)$, como os triângulos sã congruentes, a soma de suas áreas é o mesmo que 1quadrilátero $\therefore b.h$.

Assim: $A(ABCD) = A(ABGF)$, como: $A(ABGF) = b.h$ tem-se $A(ABCD) = b.h$, como se queria demonstrar.

Figura 9. Registros escritos da dupla A na Atividade 2.

Observando as duas demonstrações escritas pela dupla A, percebe-se que houve influência do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2 quando os alunos consideram os triângulos CEB e AFD como congruentes e apontam o caso de congruência, mesmo que a justificativa da congruência não esteja totalmente satisfatória. A construção do triângulo BCG também pode ter sido inserida na demonstração sob influência das construções realizadas no GeoGebra, mesmo que não tenham sido citados os passos da construção.

4.2. Análise das Demonstrações da Dupla B

A dupla B utilizou o mesmo procedimento para realizar as Atividades 1 e 2, mas é possível perceber particularidades em ambas. Na Atividade 1 os alunos iniciam a demonstração sem escrever que consideram *ABCD* como um paralelogramo, o que pode ser apontado como uma falha, visto que toda a demonstração baseia-se nesse paralelogramo.

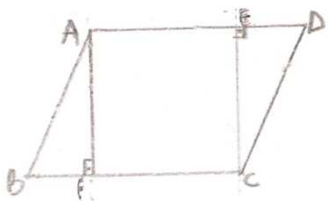

Figura 10. Desenho feito pela dupla B na Atividade 1.

Na demonstração elaborada por essa dupla (Figura 11) verifica-se um possível erro conceitual. Os alunos consideram a reta perpendicular ao ponto passando pelo lado do paralelogramo e não a reta perpendicular ao lado do paralelogramo passando pelo ponto, o que nos leva a crer que eles não compreendem corretamente o conceito de retas perpendiculares. Embora tenham apresentado este erro conceitual, verifica-se que eles buscam detalhar os passos da construção, o que é importante na demonstração.

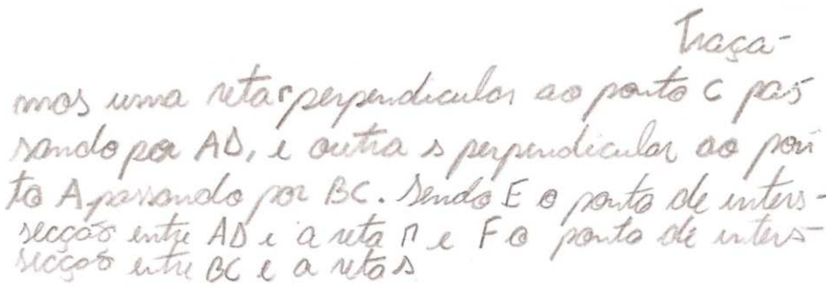
Traçamos uma reta r perpendicular ao ponto C passando por AD, e outra s perpendicular ao ponto A passando por BC. Sendo E o ponto de intersecção entre AD e a reta r e F o ponto de intersecção entre BC e a reta s

Figura 11. Registros escritos da dupla B na Atividade 1.

Na Figura 12 percebe-se que os alunos consideram os triângulos ABF e EDC como sendo congruentes e indicam o caso de congruência, porém não explicitam como concluem que tais lados e ângulos são congruentes. Eles denominam erroneamente os triângulos, pois consideram a congruência como $f: \{A, B, F\} \rightarrow \{E, D, C\}$ e a congruência correta seria $f: \{A, B, F\} \rightarrow \{C, D, E\}$

Observa-se ainda que os alunos utilizam as expressões já conhecidas para cálculo da área do retângulo e do triângulo, mas não explicitam porque podem considerar essas expressões como verdadeiras, deixando falha a sequência de informações na demonstração.

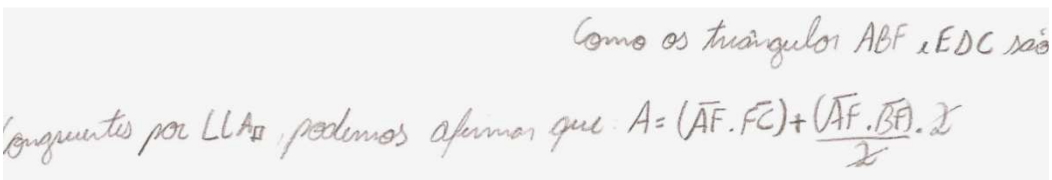
Como os triângulos ABF e EDC são congruentes por LLA, podemos afirmar que $A = (\overline{AF}.\overline{FC}) + \frac{(\overline{AF}.\overline{BF})}{2}.2$

Figura 12 – Registros escritos da dupla B na Atividade 1.

Na Atividade 2, observa-se que os alunos definem o paralelogramo que será a base da demonstração e ao traçar as perpendiculares às bases não cometem o mesmo erro da demonstração anterior:

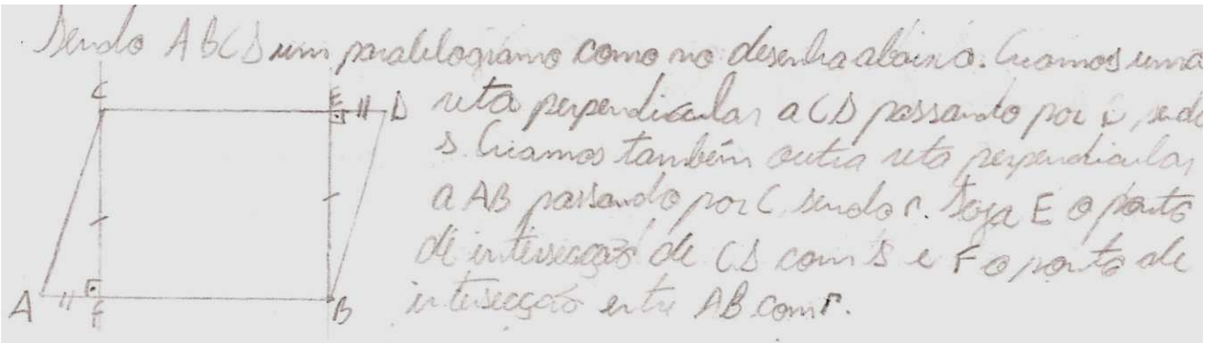

Figura 13 – Registros escritos da dupla B na Atividade 2.

Em relação à congruência dos triângulos ACF e BDF, verifica-se os mesmos erros apresentados na Atividade 1. Na conclusão da demonstração, observa-se que os alunos buscam deixar mais claro a área de cada polígono a ser adicionado a fim de obter a área desejada, no entanto, não explicitam que as fórmulas utilizadas foram anteriormente demonstradas.

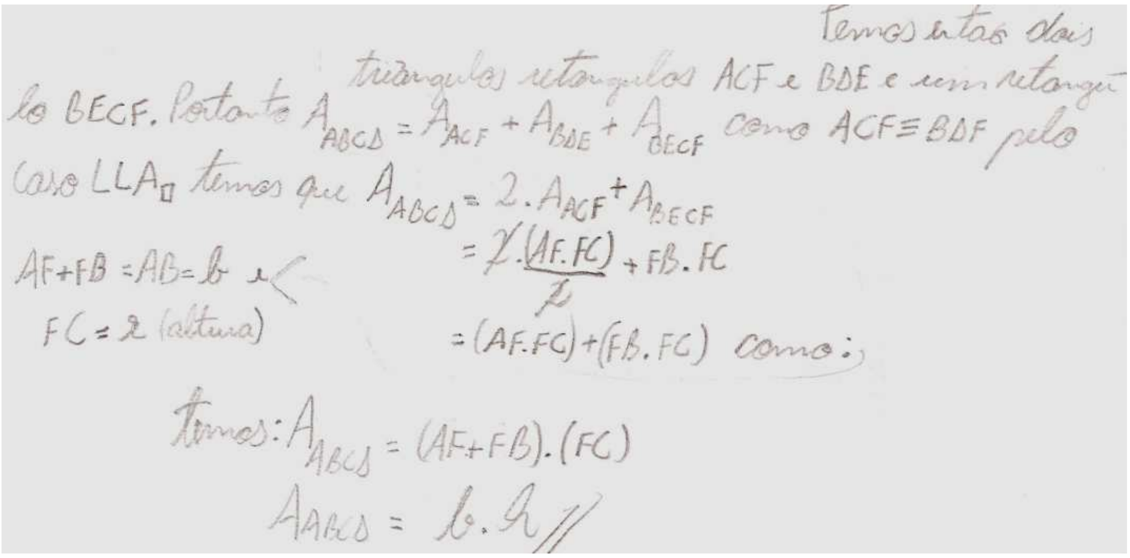

Figura 14 – Registros escritos da dupla B na Atividade 2.

Ao observar as duas demonstrações escritas pela dupla B, podemos verificar algumas possíveis influências do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2, sendo que a primeira é ao iniciar a demonstração considerando *ABCD* como sendo um paralelogramo. Como no GeoGebra o paralelogramo utilizado foi construído passo-a-passo, acredita-se que isso pode ter levado os alunos a especificarem o quadrilátero com o qual trabalharam. Outro avanço percebido refere-se às retas perpendiculares, quando os alunos escrevem que a reta é perpendicular a um lado do paralelogramo e passa por um ponto específico, não cometendo o mesmo erro da demonstração escrita na Atividade 1.

4.3. Análise das Demonstrações da Dupla C

Na Atividade 1 esta dupla encontrou a relação solicitada dividindo o paralelogramo em dois triângulos e um retângulo, como mostra a Figura 15, para então calcular a área de cada triângulo e do retângulo e adicioná-las para obter a área do paralelogramo.

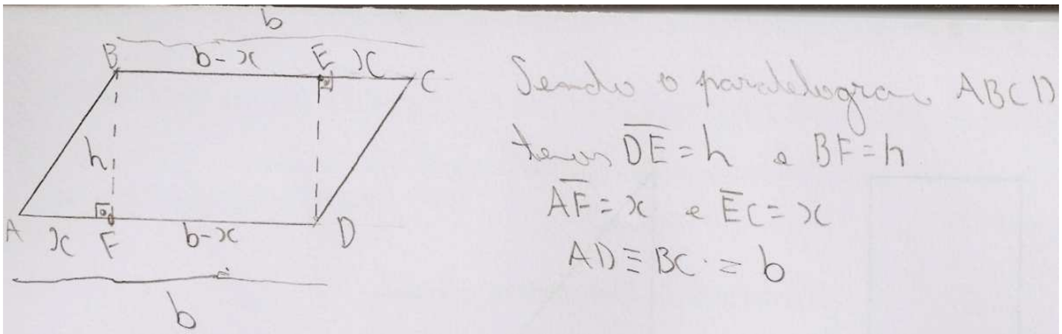

Figura 15. Registros escritos da dupla C na Atividade 1.

Ainda na Figura 15, observa-se algumas falhas, pois os alunos consideram os segmentos DE e BF como sendo h (que nós interpretamos como altura), mas não descrevem como traçar esta altura e tampouco explicitam que as alturas devem ser traçadas passando pelos pontos D e B. É possível verificar ainda que, após traçar a altura, consideram os segmentos EC e AF como congruentes, mas não justificam tal congruência.

Para concluir a demonstração somam a área dos dois triângulos (considerando bases e alturas congruentes) e a área do retângulo (Figura 16).

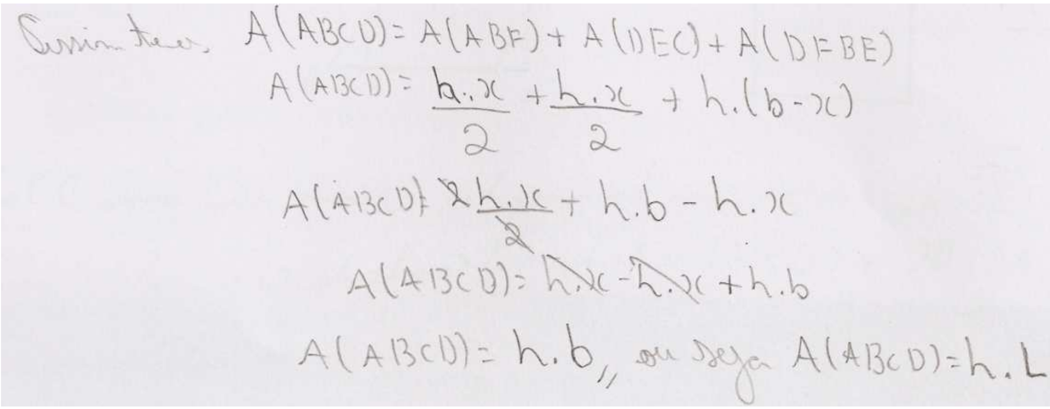

Figura 16. Registros escritos da dupla C na Atividade 1.

Outra falha é percebida na conclusão da demonstração. Os alunos generalizam a base como sendo L (que entendemos como lado), mas não explicam o que seria este L. É possível perceber que as ideias dos alunos são bastante pertinentes, mas em alguns momentos a formalização de tais ideias não ficam explícitas.

Na Figura 17 apresenta-se a demonstração feita pela dupla C na Atividade 2. Nessa atividade os alunos utilizam procedimentos distintos dos utilizados na Atividade 1. Eles dividem o paralelogramo em dois triângulos e a partir disso constroem a demonstração.

Para provar a congruência dos triângulos *ABD* e *CDB*, os alunos utilizam e justificam corretamente o caso de congruência, mas erram ao denominar os triângulos, pois consideraram $f: \{A, B, D\} \rightarrow \{D, B, C\}$ e a congruência correta seria $f: \{A, B, D\} \rightarrow \{C, D, B\}$.

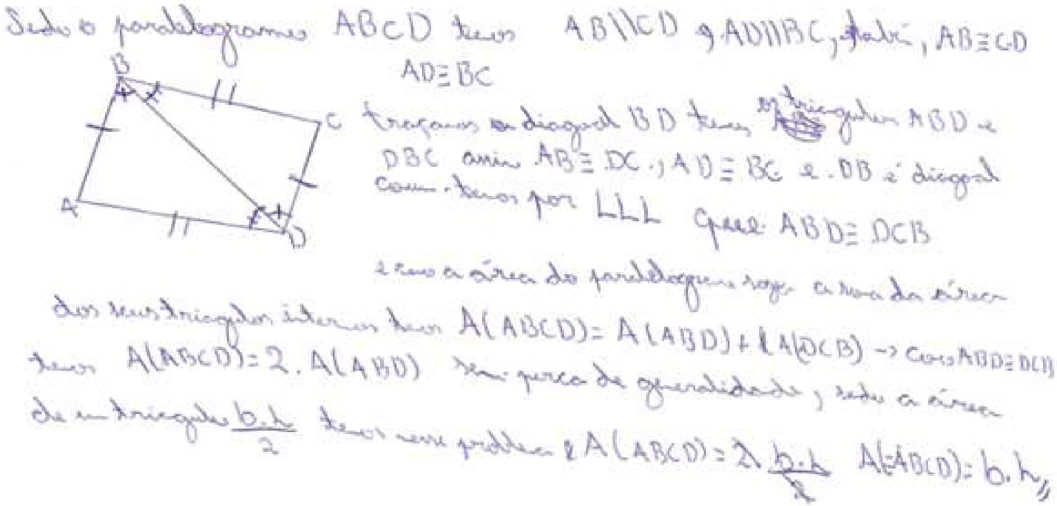

Figura 17. Registros escritos da dupla C na Atividade 2.

Em seguida os alunos adicionam as áreas dos dois triângulos congruentes, utilizando a expressão $\frac{b \cdot h}{2}$ para o cálculo da área de um triângulo, mas não explicitam porque podem utilizar tal expressão, e assim concluem a demonstração.

Analisando as demonstrações escritas pela dupla C, observa-se a influência do GeoGebra na demonstração escrita na Atividade 2, no momento em que os alunos buscam explicitar as características do paralelogramo, o que pode ser fruto da construção realizada no software. Outro avanço identificado diz respeito a congruência de triângulos, quando os alunos deixam claro o caso de congruência de triângulos e as congruências entre quais lados dos triângulos permitiram afirmar que os triângulos eram congruentes.

5. Considerações Finais

O propósito desta pesquisa era investigar se, após realizar a tarefa no software GeoGebra, os alunos seriam capazes de escrever uma demonstração com uma linguagem adequada, bem como justificar suas afirmações.

Ao analisar as Atividades 1 e 2 verifica-se alguns avanços nas demonstrações elaboradas pelos alunos. Esses avanços foram identificados devido aos procedimentos utilizados por eles nas demonstrações aparecerem de forma detalhada. Este detalhamento permitiu que identificássemos a dificuldade que eles têm de limitar o que é necessário escrever, pois a escrita em alguns casos ficou redundante.

Verificou-se nas demonstrações a presença de afirmações sem uma justificativa que as sustentassem e, em alguns casos, a falta de qualquer justificativa, tanto na Atividade 1 quanto na Atividade 2. Porém, a incidência dessas falhas foi menor na Atividade 2, o que nos permite inferir que o uso do GeoGebra pode ter facilitado a enunciação de justificativas para as conclusões obtidas.

Não se pode deixar de considerar a acentuada dificuldade, apresentada pelos alunos, em compreender os processos de uma demonstração e, consequentemente, de escrevê-la. E ainda, vale pontuar que em alguns momentos não foi possível identificar se os erros apresentados nas demonstrações decorrem da dificuldade de escrever a demonstração ou se são erros conceituais relacionados a conteúdos de Geometria estudados anteriormente.

Outro aspecto observado foi a descrição das construções utilizadas nas demonstrações, pois a tarefa desenvolvida no GeoGebra continha passos para a construção das figuras a serem analisadas e acreditava-se inicialmente que essa descrição seria transferida para a demonstração escrita pelos alunos. Em algumas demonstrações, ou em partes delas, houve um avanço na descrição das construções, mas em algumas demonstrações a atividade realizada no GeoGebra parece não ter influenciado nesse aspecto.

Pode-se dizer que a tarefa realizada no software GeoGebra influenciou nas demonstrações geométricas elaboradas pelos alunos, mas vemos que ainda há vários aspectos em que a atividade no software permitia que os alunos percebessem diversos elementos (e consequentemente os utilizassem ao escreverem a demonstração), mas não os perceberam (ou não os colocaram na demonstração), o que fez com que as expectativas quanto ao uso do GeoGebra fossem apenas parcialmente confirmadas.

Bibliografia

Almouloud, S. A. et al. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*. Nº 27, pp. 94-108.

Andrade, J. A., Nacarato, A. M. (2004). Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista.* Ano 11, Número 17, dez., pp. 61-70.

Baldini, L. A. F. (2004). *Construção do conceito de área e perímetro: uma seqüência didática com auxílio de software de geometria dinâmica.* 211 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2004.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília.

______ Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC.

Cavalcante, N. I. dos S. (2010). *O Ensino de Matemática e o Software GeoGebra: Discutindo Potencialidades Dessa Relação Como Recurso Para o Ensino de Funções.* In VI EPBEM – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010.

Constantino, R. (2006). *O ensino de Geometria no ambiente Cinderela.* Dissertação de Mestrado, Maringá: UEM.

Crowley, M. L. (1994). O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual.

Ferreira, E. B., Soares, A. B., Lima, J. C. (2008). O resgate das demonstrações: uma contribuição da Informática à formação do professor de Matemática. In *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional* (ABRAPEE). Volume 12. Número 2 *Julho/Dezembro,* pp. 381-389.

Garnica, A. V. M. (2002). As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema,* 18, pp. 91-122.

Gerônimo, J. R.; Barros, R. M. O.; Franco, V. S.; (2010). *Geometria Euclidiana Plana:* um estudo com o software GeoGebra. Maringá: EDUEM.

Gravina, M. A. (2010). *O software GeoGebra no Ensino de Matemática.* In anais III Semana de Matemática - Campos dos Goytacazes/RJ 23 a 25 de Setembro.

Gravina, M. A. (2001). *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotetico dedutivo.* Tese (Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.

Guimarães, L. C.; Belfort, E.; Bellemain, F. (2003). Geometria: uma volta ao futuro via tecnologia? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., São Paulo. *Anais...* São Paulo: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

Lorenzato, S. (1995). Porque não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista.* Blumenau: SBEM, Ano III, n. 4. pp.3-13.

Loureiro, C., Bastos, R. (2002). *Demonstração - uma questão polémica.* In: M. J. Saraiva, M. I. Coelho e J. M. Matos (Orgs.), Ensino e Aprendizagem da Geometria. pp. 105-128, 2002. Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE). Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/CL.pdf> . Acesso em 11 novembro 2011.

Pavanello, R. M. (2004). *Por que ensinar /aprender geometria?* In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. *Anais eletrônicos...* São Paulo, 2004. Disponível em: http:// www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc. Acesso em: 13 de setembro de 2011.

______ (1993). O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências**.** *Revista Zetetiké.* Campinas: UNICAMP, Ano 1, n. 1.

Santos, E. T., Martinez, M. L. (2000). *Software para Ensino de Geometria e Desenho Técnico.* Ouro Preto: Graphica, 9 p.

Celine Maria Paulek Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória (2009), e Especialização em Ensino da Matemática na Perspectiva da Educação Matemática pela Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória (2012). Atualmente é professora colaboradora da Universidade Estadual do Paraná.

celemaria03@yahoo.com.br

Michele Regiane Dias Veronez Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2002) e mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2005). Desenvolveu projeto de extensão vinculado à Secretaria de Ciência e Tecnologia - SETI no programa USF, subprograma Apoio às Licenciaturas nos anos 2007 a 2010. Atua em projeto de pesquisa, vinculado à Fundação Araucária. É aluna de doutorado do Programa de Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. **miredias@uol.com.br**