UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 141-149

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady

Problema

Si la función h está definida por $h(x) = f(x)\ g(x)$, siendo f y g funciones reales continuas, cuyos dominios son todos los números reales, ¿siempre ocurrirá que algunos puntos de los gráficos de f y de g son también puntos del gráfico de h?

Este problema (al que nos referiremos como *Problema 2*) fue propuesto como la segunda de tres partes de un problema, a profesores de matemática en ejercicio docente, en el primer curso de Análisis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP.

La primera parte de la cuestión fue el siguiente problema (al que nos referiremos como *Problema 1*):

> En la figura se muestran representaciones gráficas de las funciones u y v.
>
> Marcar algunos puntos de las gráficas mostradas que son también puntos de la gráfica de la función w definida por $w(x) = u(x)\ v(x)\ \forall x \in Dom\ u \cap Dom\ v$.
>
> Usar Q_1, Q_2, …,Q_n para representar tales puntos y explicar cómo obtuvo cada uno de ellos.

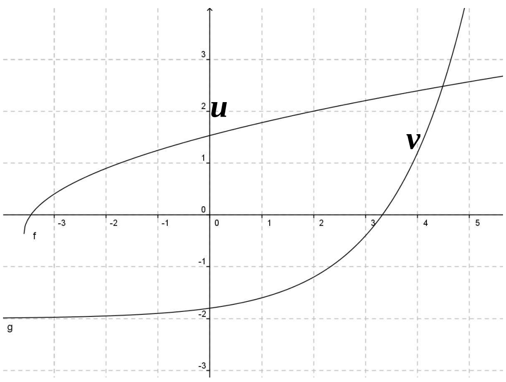

Figura 1

Y en la tercera parte se pidió crear un problema inspirado en las dos partes anteriores.

La primera parte (*Problema* 1) es una variación sencilla de un problema ideado por Régine Douady (1998)[1] que la Dra. María José Ferreyra Da Silva lo mostró y

[1] Esta referencia la da María Cristina S. de Maranhão, en Anna Franchi et al (2012). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC

comentó en una exposición que hizo en un seminario desarrollado en Julio del 2012 en la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el marco del VI Congreso IBEROCABRI. El problema que presentó la Dra. Ferreyra Da Silva, al que llamaremos *Problema de Douady,* es el siguiente:

A continuación se representan los gráficos de las funciones f y g en un plano cartesiano. Marque, sobre el mismo plano cartesiano, seis puntos que correspondan al gráfico de la función h definida por $h(x) = f(x)\, g(x)$.

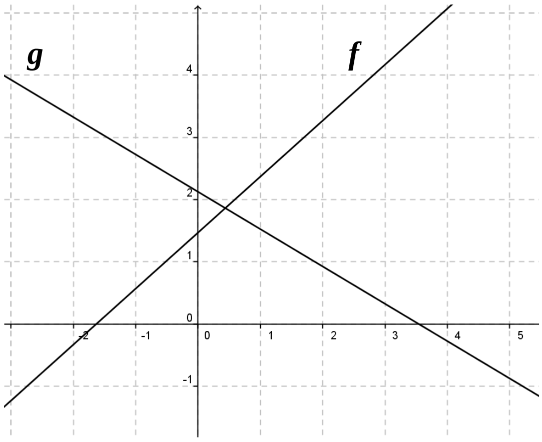

Figura 2

(La Dra. Ferreyra aclaró que la idea era obtener tales puntos **sin hacer cálculos aritméticos aproximados**)

Como se puede ver, el *Problema 2* también es una variación del problema de Douady. Precisamente, el propósito de este artículo es brindar elementos de análisis y reflexión sobre la variación de problemas dados, teniendo como marco que variar problemas es también una manera de crear problemas[2]. Más aún, posiblemente es la manera más frecuente usada por los profesores para crear problemas, sobre todo para evaluaciones.

Una mirada general

Para referirnos en general a las variaciones de los problemas matemáticos, consideremos que éstos tienen cuatro elementos fundamentales:

Información

Requerimiento

Contexto

Entorno matemático

Parece claro lo que se considera en la información y en el requerimiento y pasaremos a aclarar más los otros elementos.

[2] Varios autores y en particular Silver(1994), al referirse a la creación de problemas aluden tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de problemas dados.

Suele llamarse “problema contextualizado” a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana; sin embargo, acá consideraremos que el contexto también puede ser formal o estrictamente matemático. En ese sentido, podemos afirmar que en un problema, el *contexto* puede ser *intra matemático* o *extra matemático*, refiriéndonos con estos últimos a aquellos más vinculados a situaciones reales. Los primeros, como su nombre lo indica se circunscriben a lo matemático (Por ejemplo, el problema de hallar el dominio de una función, de graficar una ecuación de dos variables, de hallar los factores primos de un número natural, etc.).

El elemento *entorno matemático* se refiere a los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. Ciertamente esto es relativo, pues depende del camino que se siga para resolver el problema. En todo caso, como estamos adoptando estos elementos para modificar un problema, un paso fundamental previo a la variación es la solución o intento de solución del problema y allí se precisa el entorno matemático. Es claro que puede ocurrir que el problema no se resuelva precisamente por no encontrar el entorno matemático adecuado (como ocurrió durante mucho tiempo con algunos problemas famosos – quizás el más conocido es el de la conjetura de Fermat), pero quien resuelve un problema o intenta resolverlo, se apoya en un conjunto de conceptos matemáticos al que llamaremos *entorno matemático*.

Diremos entonces, que se tiene una ***variación de un problema*** *dado, si se ha modificado la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático de tal problema. Es decir, si se modifica uno o más de estos cuatro elementos considerados en el problema.*

Ciertamente, lo interesante desde el punto de vista matemático y didáctico está en el desafío a la creatividad para hacer modificaciones que lleven a la formulación de un nuevo problema que sea matemática y didácticamente valioso. Habría que precisar lo que esto último significa para atenuar la apreciación subjetiva, pero por ahora dejémoslo a ese nivel, teniendo en cuenta que estos criterios lindan con la belleza de la matemática y sobre esto se ha escrito mucho y hay diversos puntos de vista[3]

Volvamos al problema de Douady

Resolvamos el problema, como paso previo para comentar las variaciones hechas y las que se pudieran hacer. Para no romper la secuencia de las reflexiones y comentarios sobre la variación de problemas como una forma de crear problemas, en el apéndice de este artículo hacemos una exposición detallada de una solución **sin hacer cálculos aritméticos aproximados, lo cual incluye no intentar expresiones algebraicas de las funciones.** En verdad, esa es la novedad y el atractivo de este problema. Otra razón para poner la solución en el apéndice es contribuir a que el lector resuelva por cuenta propia el problema antes de continuar con la lectura de este artículo.

[3] Un resumen de puntos de vista interesantes y de criterios para considerar la belleza de las matemáticas lo encontramos en Wells, D (1990). Are these the most beautiful? *The mathematical intelligencer, 12(3)*, 37-41.

Veamos entonces los elementos de este problema.

La información:

- Los gráficos de dos funciones, *f* y *g*, presentados en un mismo plano cartesiano. Los gráficos se intersecan y parecen corresponder a funciones afines, la *f* se muestra creciente y la *g* decreciente.
- La definición de una función *h*, como el producto de las funciones *f* y *g*.

El requerimiento:

- Marcar, sobre el mismo plano cartesiano, seis puntos que correspondan al gráfico de la función *h*. Indicación expresa de no hacer cálculos aritméticos aproximados.

El contexto:

- Intra matemático

El entorno matemático:

- Funciones, rectas como gráfico de funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El Problema 1 como variación del Problema de Douady

La Información:

- Los gráficos de dos funciones, *u* y *v*, presentados en un mismo plano cartesiano, ambas crecientes. Los gráficos no corresponden a funciones afines. Los gráficos se intersecan en un punto. El 0 y el 1 pertenecen a los rangos de ambas funciones.
- La definición de una función *w*, como el producto de las funciones *u* y *v*.

Se percibe claramente que hay modificaciones en la información. La más importante es considerar funciones que no son afines, lo cual le da un carácter más general al problema y tiene la ventaja de no invitar a encontrar expresiones algebraicas para las funciones *u* y *v*.

El requerimiento:

- Encontrar algunos puntos de los gráficos mostrados, que también sean puntos del gráfico de la función *w*.

Hay también modificaciones en el requerimiento, pues no se pide explícitamente seis puntos y se especifica que los puntos a encontrar sean puntos de los gráficos mostrados. Esto rescata lo esencial del problema de Douady y evita la obtención de puntos usando la simetría respecto al eje de abscisas, que ya requiere el uso de una forma de medir distancias o de hacer aproximaciones.

El contexto:

- Intra matemático

No hay variación.

El entorno matemático:

- Funciones, gráfico de funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El entorno matemático se ha ampliado al considerar funciones cuyos gráficos no son rectas.

El Problema 2 como variación del Problema de Douady

La información

- Dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, de las que solo se conoce que son continuas y tienen como dominio es todo R.
- La definición de una función *h*, como el producto de las funciones *f* y *g*.

La variación es clara, pues ya no se da información gráfica.

El requerimiento:

- Examinar si siempre ocurrirá que algunos puntos de los gráficos de *f* y de *g* son también puntos del gráfico de *h.*

La variación es evidente. Recogiendo la idea básica del Problema de Douady, se pasa a hacer un análisis de carácter general. A pensar en una demostración si se conjetura una respuesta afirmativa, o a imaginar posibles gráficos de *f* y de *g*, buscando un (contra)ejemplo, si se conjetura una respuesta negativa.

El contexto:

- Intra matemático

El entorno matemático:

- Funciones reales de variable real y continuas, cuyos dominios son todos los números reales, gráficos de tales funciones, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas ordenadas, determinación de puntos del gráfico de una función conociendo sus respectivas abscisas, multiplicación de funciones, propiedades de la multiplicación de números reales.

El entorno matemático se ha ampliado. Se requiere más conocimientos sobre funciones para resolver el problema.

Comentarios

1. Es muy importante no perder de vista que los problemas 1 y 2 conforman una secuencia en un mismo problema de tres partes. En ese sentido, resolver el *Problema 1* prepara para resolver el *Problema 2*.

2. Resolver ambos problemas brinda experiencias de análisis que contribuyen a tener elementos para responder a la tercera parte, que – como ya se dijo – es la creación de un problema inspirado en las partes anteriores. De los 9 profesores a

los que se les propuso esta secuencia en tres partes, 7 de ellos crearon problemas. Al analizas tales nuevos problemas como variaciones del Problema 1, observamos que todos modificaron la información y 3 de ellos (los participantes 1, 8 y 9) modificaron también el requerimiento. El participante 1 pidió no solo encontrar algunos puntos del gráfico de una función suma, siendo los sumandos funciones afines, sino pidió además “trazar la gráfica de la función suma”; el participante 9 pidió también encontrar puntos del gráfico de una función suma, siendo los sumandos funciones no afines, y el participante 8 hizo requerimientos usando expresiones algebraicas de las funciones.

3. Quienes no crearon un problema, fueron los que no resolvieron adecuadamente las partes primera y segunda.

4. Sería materia de otro artículo analizar las soluciones de los problemas, tanto de los propuestos como de los que ellos mismos crearon; sin embargo detengámonos un poco en las soluciones del problema de la segunda parte, o sea del *Problema 2*, que es el planteado al inicio del artículo.

   Los participantes 3 y 9 lo resolvieron muy bien (respuesta y justificación); el participante 1 respondió bien y dio dos buenas razones y una razón no pertinente; los participantes 6 y 7 respondieron bien pero no justificaron correctamente; y cuatro participantes respondieron que sí y pretendieron justificar.

   Quienes lo resolvieron muy bien, respondieron que no y dieron respectivos ejemplos. El participante 9 dio como ejemplos $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ y $g(x) = -1$ (constante). Como ninguna de estas funciones tiene gráfico que interseca a las rectas y = 0 e y = 1 (el rango de *f* es el intervalo]0; ½] y el de *g* es el número -1), es imposible que su producto tenga un gráfico con algunos puntos coincidentes con puntos de los gráficos de *f* ó de *g*. El participante 3 dio ejemplos muy sencillos: *f* y *g* funciones constantes, con $f(x) = 2$ y $g(x) = 3$. Es claro que la función *h*, producto de ambas, es la función constante $h(x) = 6$ y ningún punto de su gráfico es punto del gráfico de alguna de las funciones *f* ó *g*.

5. El problema creado por el participante 1, usando funciones afines, fue propuesto a alumnas de primer ciclo universitario de profesorado de educación inicial y primaria, como parte de una secuencia de problemas sobre gráficos de funciones afines, y encontramos reacciones positivas. Cabe mencionar que una de las soluciones del problema fue más sencilla que la solución que dio el participante 1.

Reflexiones finales

a) Para concluir, destaco una vez más la importancia de crear problemas y del reto que tenemos los que enseñamos matemáticas, de estimular a nuestros alumnos a desarrollar esta habilidad. Es particularmente importante en los cursos de formación de futuros docentes o de docentes en ejercicio, como una manera de potenciar sus competencias didácticas y matemáticas.

b) Los análisis hechos en relación a los problemas creados a partir del Problema de Douady, nos ilustran la estrecha relación que hay entre resolver problemas y crear problemas.

c) Al considerar la información, el requerimiento, el contexto y el entorno matemático de un problema, estamos proponiendo un esquema de análisis para los problemas nuevos obtenidos por variación de problemas dados, que también sirve de pauta para construir estos nuevos problemas. Es evidente que la creatividad, el conocimiento matemático, el propósito con el que se pretende crear el problema y el criterio didáctico para su aplicación, juegan un papel sumamente importante y la interrelación entre ellos, que se irá fortaleciendo con la experiencia, la reflexión y el análisis individual y en grupos, llevará a construir problemas con gran belleza matemática y gran potencialidad didáctica.

d) En este problema y sus modificaciones el contexto se ha mantenido como intra matemático y tiene una gran riqueza para la profundización en el manejo de conceptos matemáticos relacionados con las funciones y las propiedades de las operaciones con números reales. Es un reto encontrar contextos extra matemáticos relacionados con estos problemas.

Apéndice

Solución del Problema de Douady

Ante la indicación de no hacer cálculos aritméticos aproximados – y esa es la novedad del problema – debemos encontrar los seis puntos sin hacer estimaciones para hallar las ecuaciones de las rectas que se representan en la Figura 2.

Como se debe encontrar puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas son $(x;f(x)g(x))$, es decir, cuya ordenada es el producto de las ordenadas de puntos que ya están representados, identifiquemos puntos de los gráficos de f y de g cuyas ordenadas son números reales particularmente importantes en la multiplicación. Evidentemente uno de ellos es el 0, por la propiedad

$$a \text{ x } 0 = 0 \text{ x } a = 0 \text{ para todo número real } a. \qquad (1)$$

Otro número a tener en cuenta es el 1, por la propiedad

$$a \text{ x } 1 = 1 \text{ x } a = a \text{ para todo número real } a. \qquad (2)$$

Los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada 0, son los puntos de intersección con el eje X (recta de ecuación $y = 0$) y entonces, por aplicación de la propiedad (1), estos puntos también serán puntos del gráfico de h (**A** y **B** en la Figura A)

Punto A: Intersección del gráfico de f con el eje X, pues en ese punto, de abscisa x_1, se tiene $f(x_1) = 0$, y en consecuencia

$$h(x_1) = 0.\ g(x_1) = 0 = f(x_1).$$

Así, **A** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son

$$(x_1;\ h(x_1)) = (x_1;\ 0).$$

Punto B: Intersección del gráfico de g con el eje X, pues en ese punto, de abscisa x_2, se tiene $g(x_2) = 0$ y en consecuencia

$$h(x_2) = f(x_2).0 = 0 = g(x_2).$$

Así, **B** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son

$$(x_2; h(x_2)) = (x_2; 0).$$

Por otra parte, los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada 1, son los puntos de intersección con la recta de ecuación $y = 1$ (M, de coordenadas (r; g(r)) en el gráfico de g y N, de coordenadas (s; f(s)) en el gráfico de f, en la Figura A) y por aplicación de la propiedad (2), estos puntos, nos sirven para determinar, respectivamente, los puntos **C** en el gráfico de f y **D** en el gráfico de g, que son puntos del gráfico de h.

Punto C: Punto (r, f(r)), del gráfico de f, donde r es tal que g(r) = 1, pues en tal punto

$$h(r) = f(r).1 = f(r).$$

Así, **C** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son (r; h(r)) = (r; f(r)).

Punto D: Punto (s, g(s)), del gráfico de g, donde s es tal que f(s) = 1, pues en tal punto

$$h(s) = 1.\ g(s) = g(s).$$

Así, **D** es el punto de la gráfica de h cuyas coordenadas son (s; h(s)) = (s; g(s)).

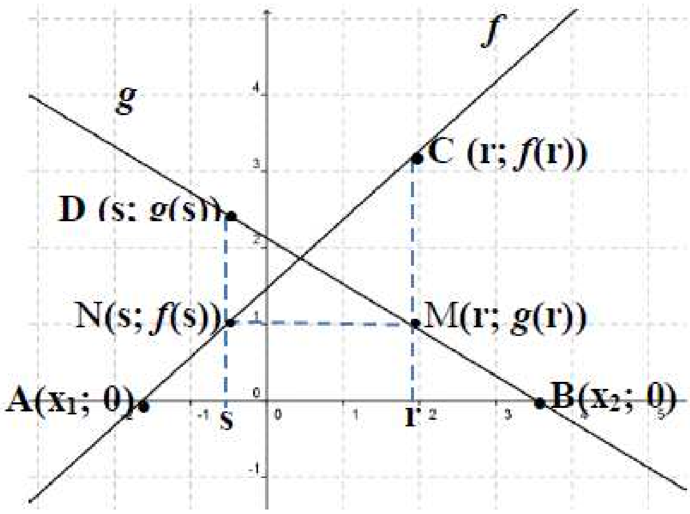

Figura A

Tenemos ya cuatro puntos del gráfico de h. Para los otros dos que pide el problema, requerimos otro número particularmente importante en la multiplicación y recordamos al **-1**, por la propiedad

$$\boldsymbol{a \times (-1) = (-1) \times a = -a} \ \textbf{ para todo número real } \boldsymbol{a}. \qquad (3)$$

Recordamos también que en la recta real, los números ***a*** y **– *a*** están representados en puntos simétricos respecto al punto que representa al 0.

Los puntos de los gráficos de f y de g que tienen ordenada -1, son los puntos de intersección de estos gráficos con la recta de ecuación *y* = -1 (P, de coordenadas (k;g(k)) en el gráfico de g y Q, de coordenadas (z; f(z)) en el gráfico de f, en la Figura B) y por aplicación de la propiedad (3), estos puntos, nos sirven para determinar, respectivamente, los puntos **E** de coordenadas (k; -f(k)) y **J** de coordenadas (z; -g(z)), que son puntos del gráfico de h.

Punto E: Punto (k, -f(k)), donde k es tal que g(k) = -1, pues tal punto es el simétrico respecto al eje X del punto S del gráfico de f cuyas coordenadas son (k; f(k)). Así, las coordenadas de **E** son

$$(k, -f(k)) = (k; f(k)\,(-1)) = (k; f(k)\,g(k)) = (k;\ h(k))$$

Y en consecuencia es un punto del gráfico de la función h.

Punto J: Punto (z, -g(z)), donde z es tal que f(z) = -1, pues tal punto es el simétrico, respecto al eje X, del punto T del gráfico de g cuyas coordenadas son (z; g(z)). Así, las coordenadas de **J** son

$$(z, -g(z)) = (z; (-1)g(z)) = (z; f(z)g(z)) = (z;\ h(z))$$

Y en consecuencia es un punto del gráfico de la función h.

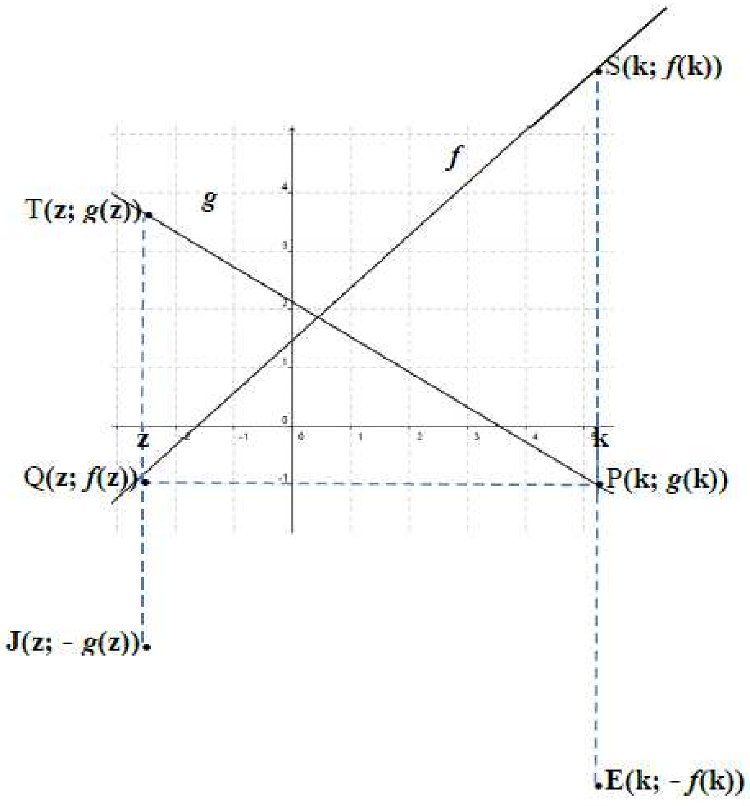

Figura B