

El método del Análisis Didáctico

Firma Invitada: Luis Rico Romero

<p>Resumen</p>	<p>Análisis didáctico es un término de uso común en Didáctica de la matemática. Este análisis es relevante en la disciplina desde sus inicios, ya que aporta un modo específico de abordar cuestiones didácticas primordiales. <i>Análisis didáctico</i> abarca un conjunto de conceptos y métodos con uso generalizado en los grupos de investigación de Didáctica de la matemática, que detallaremos en este estudio. Se sustenta en las reglas generales del análisis, tal y como éste se entiende desde la filosofía y la historia del pensamiento. Aborda problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. En lo que sigue presentamos nuestra interpretación del análisis didáctico desde la educación matemática.</p> <p>Palabras clave: Métodos de investigación; análisis conceptual; análisis de contenido; Didáctica de la matemática; análisis didáctico.</p>
<p>Abstract</p>	<p>Didactical analysis is a term commonly used in mathematics education. This analysis is relevant to the discipline since its inception, as it provides a specific mode of address key educational issues. The <i>Didactical analysis</i> encompasses a set of concepts and methods widely used in the research groups of mathematics education, we will detail in this study. This kind of analysis is based on their general rules, as they are understood from the philosophy and the history of thought. It addresses issues of teaching and learning of school mathematics. In what follows we present an interpretation of the training analysis from mathematics education.</p> <p>Keywords: Research Methods; conceptual analysis, content analysis, Didactic of Mathematics, Didactical analysis.</p>
<p>Resumo</p>	<p>Análise didática é um termo comumente usado em educação matemática. Essa análise é relevante para a disciplina desde a sua criação, uma vez que fornece um modo específico de endereços principais questões educacionais. <i>Análise didática</i> engloba um conjunto de conceitos e métodos utilizados nos grupos de pesquisa do ensino da matemática, iremos detalhar neste estudo. Baseia-se as regras gerais de análise, tal como é entendido a partir da filosofia e da história do pensamento. Aborda questões de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. A seguir, apresentamos a nossa interpretação da análise de formação de educação matemática.</p> <p>Palavras-chave Métodos de pesquisa, análise conceitual, análise de conteúdo, educação matemática, Análise didática</p>

Introducción

En una primera parte de este trabajo, nos centramos en las concepciones del análisis didáctico y de otras nociones asociadas a lo largo de la historia del pensamiento. En una segunda parte, consideramos el análisis conceptual y el análisis de contenido como métodos específicos en la investigación educativa. En la tercera parte, integramos las reflexiones y caracterizamos las nociones propias del análisis didáctico en Didáctica de la matemática. Rico y Fernández-Cano (2013) complementan ideas del trabajo que aquí se desarrolla.

1. Noción de análisis

“Análisis: *resolutio*, disolución, desmembramiento, investigación” (Klings, Baumgartner y Wild, 1977, p. 79).

La Real Academia Española considera el significado común del término *análisis* como: “Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos” (RAE, 1970, pp. 83). La Real Academia proporciona otras interpretaciones psicológicas o matemáticas; la idea nuclear en ellas es *descomponer algo en partes*.

Como complementaria se encuentra la noción de síntesis: Síntesis (del lat. *synthēsis*, y éste del gr. *συνθεσις*). “Composición de un todo por la reunión de sus partes. Suma y compendio de una materia u otra cosa” (RAE, 1970, pp. 1207).

1.1 Diversas concepciones

El análisis se ha considerado siempre como propio del método filosófico. En los Diálogos de Platón el término análisis se refería al proceso de indagación de los primeros principios mediante los cuales algo se puede probar. Esta concepción se denomina *regresiva* o *escrutadora* del análisis. La explicación o reconstrucción se muestran entonces como el correspondiente proceso de síntesis. La meta consiste en recuperar lo básico pero puede haber diversidad de caminos para hacerlo, cada uno de los cuales se denomina *análisis*.

Otra interpretación designa por análisis, en general, el desmembramiento de algo dado en las partes que lo constituyen, la reducción a sus condiciones, o la investigación de sus consecuencias. “Casi siempre la descomposición es entendida en un sentido lógico o mental. Se habla en este caso de análisis de un concepto en tanto que investigación de los subconceptos con los cuales el concepto en cuestión ha sido construido, o de análisis de una proposición en tanto que investigación de los elementos que la componen” (Ferrater, 1981, pp. 135-138). A su vez, la síntesis se produce sobre la base de los resultados previos del análisis. Con esta significación se usa en la mayoría de las ciencias, según la disciplina específica. Esta concepción del análisis es conocida como *disgregadora* o *reductiva* (Klings, Baumgartner y Wild, 1977, p. 79).

La filosofía analítica, con carácter previo al proceso de descomposición en partes, establece que aquello que deba analizarse debe transformarse a un lenguaje específico, expresarse mediante un enunciado que se pueda transcribir en forma lógicamente correcta. De aquí que también implique una dimensión *transformativa* o *interpretativa*.

En la práctica del análisis se reflejan las tres concepciones, si bien en grados y modos diferentes. Para analizar algo, en primer lugar hay que interpretarlo de algún

modo, traducirlo desde un enunciado inicial a algún lenguaje especializado lógico o científico, antes de articular sus elementos y estructuras relevantes, para así contribuir a la identificación de los principios mediante los cuales explicarlo. El análisis de un objeto se realiza a partir de la relación que existe entre los elementos que lo constituyen como un todo junto con el marco para su interpretación. Por análisis se entiende un método o conjunto de métodos que resuelven lo complejo en lo simple.

1.2 Consideraciones históricas

El método de análisis se desarrolló en la geometría griega bajo la influencia de Platón y de Aristóteles. En las definiciones de Sócrates se encuentran las raíces del análisis conceptual moderno, si bien el término ἀνάλυσις no está en los diálogos platónicos.

Platón transformó la definición socrática en su método de división, método de hipótesis vinculado, en el cual basó el análisis geométrico. En la teoría silogística de Aristóteles, por el contrario, las formas de análisis han implicado la *reducción*.

En el libro VII de la *Colección Matemática* de Pappus se encuentran las aproximaciones del análisis y la síntesis:

El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido.

Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos; y este método es la síntesis.

Hay dos clases de análisis, el propio de la investigación, que se llama teórico, y el que aplica para encontrar lo que se propone, y que se llama problemático. (Pappus, pp. 991-992)

Según esto, en la solución de un problema geométrico se analiza la proposición que se quiere demostrar, buscando determinadas condiciones que se deducen de su aceptación hipotética, hasta alcanzar enunciados verdaderos. Por ejemplo, la demostración del Teorema de Pitágoras en la proposición 147 del libro I de los *Elementos* de Euclides, es ejemplo paradigmático de este sistema. La prueba se produce cuando la proposición se infiere sintéticamente de las condiciones necesarias y suficientes encontradas. Análisis y síntesis son componentes necesarios de la prueba; pero el análisis, que precede, contiene la solución del problema y presupone la exposición del proceso de prueba.

A comienzos de la revolución científica, los trabajos de Descartes y de la escuela de Port-Royal utilizan los conceptos de análisis y síntesis para la discusión de los métodos y de las ideas de la época. El análisis es condición previa para la síntesis que le sigue.

Puede denominarse, en general, método al arte de disponer adecuadamente una secuencia de varios pensamientos bien para descubrir la verdad cuando la ignoramos o bien para darla a conocer a otros cuando ya es conocida.

Así, hay dos clases de métodos; uno, permite descubrir la verdad y se denomina *análisis* o *método de resolución* y, también puede denominarse *método de invención*; el otro permite hacer entender la verdad a otras personas cuando la verdad ya ha sido descubierta. Este último se denomina *síntesis* o método de *composición*, pudiendo ser también conocido como *método de enseñanza*.

El análisis, por lo general, sirve solamente para resolver alguna cuestión de ciencia y no para someter a este método el cuerpo completo de una ciencia. (Arnauld y Nicole, 1987, pp. 418)

Los autores manifiestan que el análisis o método de invención o resolución, se completa con la síntesis o método de enseñanza, siendo esta síntesis la vía para enseñar a otras personas aquellas verdades descubiertas por el procedimiento de análisis. Por sí solo, el análisis identifica las componentes necesarias para entender y descubrir la verdad, pero es el método de síntesis el que, por recomposición de los elementos y nociones básicas obtenidas por análisis, establece la vía para comunicar y transmitir las verdades analizadas. El ciclo análisis/síntesis tiene dos funciones primordiales: entender e instruir; de ahí que la componente didáctica integra toda actividad intelectual.

El papel de la geometría en el pensamiento de Descartes implica la ruptura de problemas complejos en otros más simples, que se resuelven más fácilmente. También es significativo su empleo del álgebra en el desarrollo de la geometría analítica, que permite transformar problemas geométricos en aritméticos de solución más sencilla. Al representar el valor desconocido que debe calcularse mediante 'x', puede verse el papel transformador que desempeña en el análisis la idea de tomar algo como dado y trabajar con ello regresivamente, lo cual muestra lo apropiado de ver el álgebra como un arte de análisis. Descartes, en su desarrollo de la geometría analítica, ejemplifica las tres concepciones del análisis señaladas, si bien enfatiza la concepción reductiva.

El positivismo lógico establece que toda proposición verdadera es analítica o empírica, rechazando la posibilidad de juicios sintéticos *a priori*. Características de la filosofía analítica son: el énfasis atribuido al análisis, el valor central asignado a tal análisis y el papel que juega el análisis lógico. En el siglo XX la filosofía analítica introdujo la concepción lógica interpretativa (Zalta, 2012).

La dimensión transformadora o interpretativa del análisis viene dada porque cualquier análisis de un enunciado supone su previa transformación en un marco dado. Esto implica transformarlo, de algún modo, a fin de que se puedan utilizar los recursos de una teoría o de un marco conceptual dados. El trabajo consistirá entonces en interpretar aquello que buscamos analizar como parte del proceso de regresión y descomposición.

1.3 El análisis en perspectiva didáctica

En el marco educativo en que nos situamos consideramos el análisis como método, como camino, como modo de entender y abordar nuestro trabajo de investigación. El método de análisis es sistemático y particular en sus intereses. La revisión histórica permite aproximarnos a distintas concepciones del método, apreciar su cercanía con la propia matemática y con su enseñanza y aprendizaje.

Para trabajar con la noción de análisis en Didáctica de la matemática consideramos diversas concepciones sobre el método de análisis, que hemos denominado: *escrutadora* o *regresiva*, *disgregadora* o *reductiva* e *interpretativa* o

transformadora. Estas concepciones no son incompatibles entre sí y trabajamos con todas ellas.

También valoramos los procesos de síntesis y su vinculación permanente con los correspondientes de análisis, la inseparabilidad dialéctica de ambos métodos, aunque sea adecuado diferenciarlos en el discurso metodológico. La necesidad de considerar los procesos de síntesis junto con los de análisis, muestra la sistematicidad de los razonamientos, que necesitan recopilar y resumir las ideas después de la disgregación y deconstrucción de los conceptos y de los juicios.

Destacaremos la especificidad del método de análisis didáctico en la Didáctica de la matemática y singularizaremos el método para la disciplina. Introduciremos nociones centradas en el análisis, vinculadas con el análisis didáctico y que le preceden. Estas nociones son el análisis conceptual y el análisis de contenido.

2. El análisis conceptual

Los conceptos son los componentes de nuestro pensamiento, aquello con lo que pensamos. Son cruciales para entender e interpretar procesos mentales y psicológicos tales como categorización, inferencia, memoria, aprendizaje y decisión. También son importantes en educación, singularmente en educación matemática (Bell, Costello y Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Pineda, 2012; Skemp, 1980). El análisis conceptual ejemplifica una de las concepciones del método de análisis, que hemos denominado regresiva o escrutadora. Un análisis conceptual encarna una definición.

En Ciencias de la Educación, el análisis conceptual es una herramienta metodológica para controlar la complejidad semántica, seleccionar opciones idóneas y disponer de un aparato teórico, adecuado para una investigación educativa. Resulta necesario que los investigadores en educación aprecien su utilidad y alcancen un nivel razonable de competencia en el análisis conceptual (Scriven, 1988).

El análisis conceptual aborda problemas importantes para el investigador, singularmente la precisión e inteligibilidad de los conceptos:

Para un enunciado coherente de un problema de investigación es imprescindible un conocimiento amplio del campo de estudio, un marco teórico sólido y unos conceptos precisos que permitan plantear cuestiones significativas (...) Una de las dificultades de la investigación en las disciplinas educativas es la polisemia de los conceptos centrales que se utilizan en esos estudios. Gran parte de esos conceptos proceden de la historia milenaria del pensamiento occidental y encierran sutilezas que la reflexión y la experiencia de multitud de pensadores han ido colocando en ellos. Como conocimiento científico los conceptos son públicos, son el tipo de cosas que muchas personas pueden compartir y comparten. La atribución arbitraria de significado o la desconsideración de significados centrales, son usos patológicos de los conceptos que han de quedar excluidos del trabajo científico (Rico, 2001, pp. 184-185).

Por medio del análisis conceptual se controla la precisión teórica de los conceptos. El análisis conceptual es un método no empírico. Los datos con que opera son descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones simbólicas. En el análisis conceptual se detecta la preocupación socrática por la naturaleza de las definiciones y del lenguaje, que trata de encuadrar los términos y sus

interconexiones. Principios orientadores de este análisis son la naturalidad, aplicabilidad, complejidad y simplicidad. En su realización se examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias), intersubjetivos (concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual. Contextualiza la definición dentro del área en que se inserta. Usa ejemplos y contraejemplos, en vez de la definición explícita. Emplea analogías y términos evocativos en vez de pruebas, axiomas o cuantificaciones.

Este método se sirve de la historia y variación de los términos. Permite una reflexión previa sobre la cuestión que se quiere investigar, determinando y caracterizando aquellos puntos clave que delimitan el problema en estudio y las ideas, conceptos y teorías sobre los que se aborda su resolución. Trata de eliminar las inconsistencias derivadas de la falta de precisión en el significado de los conceptos utilizados. En educación matemática hemos ejemplificado estos principios con varios conceptos, como son: el análisis conceptual de la noción de *modelo* (Rico, 2001), el análisis conceptual de las nociones de *número* y de *cantidad* (Maz, 2005) y el análisis conceptual de la noción de *representación* (Rico, 2009).

El análisis conceptual es una actividad esclarecedora para educadores e investigadores en Didáctica de la matemática. Revisa en profundidad los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sobre sus fundamentos e historia, sobre su génesis y desarrollo, sobre los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje. El estudio de la evolución histórica de los conceptos es fuente de información para el análisis conceptual (Sierra, 2010). También aporta argumentos para determinar qué conocimientos, procedentes de la matemática, de la filosofía y de la ciencia cognitiva, pueden estar en la base de la disciplina teórica de la educación matemática. Finalmente, el análisis conceptual se considera un precedente de la reducción teórica para responder a cuestiones de fundamento en educación matemática.

El análisis conceptual es un método para trabajar y profundizar sobre los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su uso. Por este motivo, al iniciar una investigación o intentar profundizar sobre un tema, deben analizarse los conceptos centrales, matemáticos y educativos, que lo constituyen.

3. El análisis de contenido

El análisis de contenido es un método para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. Su origen y antecedentes procede del trabajo de censores y del estudio hermenéutico de textos (Fernández-Cano, 2010). La técnica del análisis de contenido está destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias plausibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto (Krippendorff, 1990).

3.1 Método del análisis de contenido

Las técnicas de análisis de contenido trabajan la naturaleza del mensaje-discurso. Su finalidad es descubrir la estructura interna de la comunicación, estudiando para ello su contenido semántico. Cohen, Manion y Morrison (2011) subrayan que:

El término análisis de contenido indica el proceso de recogida y resumen de datos escritos –los contenidos principales de dichos datos y sus mensajes. De modo más preciso, [el análisis de contenido] define un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. Algunos autores lo definen como una técnica de investigación para elaborar inferencias válidas y replicables a partir de textos (u otros materiales escritos) en aquellos contextos en que se utilizan. Por texto se entiende cualquier material de comunicación escrita, que se supone deben ser leídos, interpretados y entendidos por otras personas distintas de aquella que los analiza. El análisis de contenido se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, desde documentos impresos a transcripciones de entrevistas, desde productos de los media hasta producciones escritas. Se utiliza frecuentemente para analizar un número considerable de textos, debido a su naturaleza sistemática, gobernada por reglas; también permite utilizar el análisis asistido por ordenador. Utiliza la categorización para reducir grandes cantidades de datos (p. 563).

Además de trabajar con la dimensión regresiva, el análisis de contenido incorpora la dimensión reductora, descomponiendo el contenido en sus unidades más simples para lo cual utiliza de modo sistemático la determinación de temas y la identificación de categorías. La aplicación del análisis de contenido a la investigación educativa puede ayudarnos a:

- Descubrir patrones en el discurso.
- Contrastar una hipótesis previa.
- Inferir significados interpretativos en un texto.

De manera general, el procedimiento para realizar un análisis de contenido sigue unas determinadas etapas; a saber:

- Delimitar el corpus de contenido (texto, discurso, producción escrita) a analizar.
- Concretar la unidad de análisis: palabra (nombre, verbo o adjetivo), frase o párrafo.
- Localizar o inferir en el texto las unidades de análisis.
- Denominar, definir e interpretar las categorías consideradas.
- Evitar en lo posible la categoría “OTROS”, para obviar indeterminaciones.
- Codificar y cuantificar mediante frecuencias o rangos las unidades de análisis previamente adscritas al sistema de categorías predeterminado (procedimiento deductivo) o inferir tal sistema de categorías sobre las unidades de análisis seleccionadas (sistema inductivo). Cada unidad sólo debe incluirse en una categoría.
- Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas, considerando sus unidades de análisis adscritas.
- Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga y con los agentes intervinientes (hablante/escritor u oyente/lector).

3. 2 Comparación entre los análisis conceptual y de contenido

La Tabla 1 compara el análisis conceptual y el análisis de contenido mediante diez descriptores (Fernández-Cano y Rico, 1996; Rico, 2001).

Tabla 1: Comparación entre el análisis conceptual y el análisis de contenido

Análisis conceptual	Análisis de contenido
<i>Unidad central de indagación</i>	
Término, concepto (p.e. modelo, cantidad, currículo,..)	Un texto, discurso, tarea escrita o comunicación.
<i>Sentido</i>	
Externo al concepto	Interno al texto
<i>Unidades básicas de análisis</i>	
Acepciones/definiciones del término	Unidades menores de discurso (p.e. palabra-término, verbo-adjetivo, palabra-frase.)
<i>Nivel de análisis</i>	
Único	Continuo: manifiesto \leftrightarrow latente
<i>Técnicas propias</i>	
Método del ejemplo/contraejemplo. Lenguaje evocativo y uso de analogías. Estructuración e interpretación de la red de significados del concepto.	Delimitación de la unidad básica. Establecimiento de categorías. Interrelación de categorías. Adscripción de unidades a categorías. Interpretación de categorías: nivel manifiesto y latente.
<i>Disciplina en que opera</i>	
Filosofía, Epistemología, Historia de la ciencia	Lingüística, Matemáticas, Psicología, Sociología, Didáctica
<i>Fin primordial</i>	
Fundamentar y clarificar términos y conceptos	Estudiar textos, tareas o relatos
<i>Concepción prioritaria sobre el análisis</i>	
Regresiva/ Escrutadora	Disgregadora/ Reductiva
<i>Secuenciación</i>	
Longitudinal: relevancia del devenir histórico	Transversal: relevancia de la ampliación del discurso
<i>Función auxiliar al método general</i>	
Definir términos. Clasificar teorías. Validar constructos	Técnica de recogida de datos. Técnica de análisis de datos

El análisis conceptual sustenta un primer nivel del análisis de contenido; ambos se sirven de la interpretación histórica del conocimiento matemático. En nuestro trabajo consideramos el primero como fundamento del segundo.

3.3 Análisis de contenido en las matemáticas escolares

El análisis de contenido se ha venido utilizando en educación matemática como un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares para la detección de sesgos). El grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (DDM-PN) ha trabajado el análisis de contenido en diversos estudios e investigaciones. Las categorías básicas utilizadas derivan de la noción de organizador curricular (Rico, 1997b) y de la noción de significado establecida para los conceptos matemáticos escolares (Rico, 2012).

Las categorías consideradas para analizar el contenido matemático en un documento escolar, son:

- Conceptual, que considera el momento histórico y el marco poblacional (el quién comunica y a quién comunica) donde se insertan.
- Formal y estructural, que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal, que proporcionan referencia a los contenidos utilizados.
- Representacional, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados.
- Fenomenológica, que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan y aquellas situaciones en las que se presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio.

El análisis de contenido matemático en educación consiste en un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman un texto de las matemáticas escolares. En nuestra experiencia hemos desarrollado una variante propia del análisis de contenido que ha surgido para diseñar tareas y elaborar textos de matemáticas escolares, basado en la reflexión curricular y en un sistema establecido de categorías didácticas, que se focalizan en los contenidos escolares. Esta modalidad del análisis de contenido en educación matemática se propone aportar al profesor conocimientos y capacidades para diseñar y evaluar textos de matemáticas, así como criterios para su ajuste a un sistema propio de categorías. Su finalidad es proporcionar principios para atender a la estructura interna de la matemática escolar en los textos, que se elaboran para su implementación durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, y también para evaluar las producciones recogidas en términos de las expectativas enunciadas (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Estos documentos muestran distintas organizaciones de los contenidos matemáticos escolares.

Utilizar las categorías mencionadas para realizar un análisis de contenido con textos históricos permite llevar a cabo una selección de registros con los que interpretar y desentrañar el conocimiento matemático que sus autores quisieron transmitir y así esclarecer el significado que, en un momento histórico concreto, se otorgó a determinados conceptos matemáticos en el sistema educativo (Maz, 2005; Picado, 2012; Sierra, 2010). De ahí que consideremos oportuno emplear también el término general “análisis del contenido matemático” en los casos específicos de estudios históricos.

4. Objeto y fines del análisis didáctico

El análisis didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido. Son objeto del análisis didáctico aquellos conceptos, conocimientos, normas, juicios, argumentos, textos y relatos que tienen su origen en la actividad propia de la comunidad de educadores matemáticos, textos que se ajustan a su organización y que regulan su práctica.

Las finalidades del análisis didáctico radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar. En esta reflexión, los procesos generales considerados se refieren, explícita o implícitamente, a la organización, trasmisión y adquisición de conocimientos estructurados mediante textos y documentos de matemáticas escolares.

Algunos rasgos relevantes de esta conceptualización del análisis didáctico son:

- trabajar desde unas dimensiones curriculares sobre las cuales erige sus componentes y elaborar unas categorías que sustentan y renuevan el discurso matemático escolar;
- trabajar y profundizar sobre los conceptos, usar técnicas de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su descripción y uso;
- completar los procesos de análisis con los de síntesis, según su finalidad educativa para organizar, secuenciar información y tomar decisiones fundadas;

- fundamentar un método preciso y reglado para comprender textos matemáticos escolares, es decir, para su estudio, diseño e interpretación;
- proporcionar una guía normativa para intervenir en la práctica y predecir con base en la investigación y la experiencia;
- establecer criterios para la formación inicial y permanente del profesorado en la planificación y evaluación de unidades didácticas.

Con carácter singular, destacamos que los currículos escolares y los planes de formación del profesorado de matemáticas son objeto de estudio para el análisis didáctico, en tanto se concretan en textos estructurados, relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Destacan el interés y la funcionalidad del análisis didáctico en los ámbitos de actuación identificados para la disciplina: curricular, profesional e investigador (Rico, 2012, pp. 51-54). El análisis didáctico lo utilizamos como método propio de la Didáctica de la matemática. Consideramos diversas componentes y categorías para su dominio técnico y su aplicación en la práctica,.

4.1 Sobre el concepto de currículo

El discurso matemático escolar lo enmarcamos en el diseño y puesta en práctica de un plan de formación, es decir, en un marco curricular (Stenhouse, 1984, pp. 25-30). Por esta razón las categorías del análisis didáctico las vamos a sustentar en el marco teórico elaborado para el concepto de currículo, en su interpretación sistémica en niveles y dimensiones, y en la noción de los organizadores del currículo. Resumimos brevemente algunas de esas nociones básicas para interpretar las categorías mencionadas. Por currículo entendemos todo plan de formación cuya determinación viene dada por unos sujetos a quienes hay que formar; las finalidades formativas que se pretenden y las necesidades a las que se quiere atender; la institución, el personal y los recursos con los que se lleva a cabo la formación; el tipo de formación que se quiere proporcionar: las normas y códigos, los valores, los conocimientos y capacidades, las habilidades y técnicas, las actitudes y destrezas; finalmente, el sistema de evaluación del plan de formación, determinado por unos criterios e instrumentos. Si bien las nociones educativas que consideramos son generales, nuestro campo de estudio y los documentos citados refieren al currículo escolar de matemáticas (Rico, 1990, pp. 26-28).

Un currículo viene establecido por sus finalidades. Como plan de formación, todo currículo responde a cuatro cuestiones: ¿Cuál formación/conocimiento? ¿Para qué dicha formación? ¿Cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? ¿Con cuáles resultados? Los cuatro tipos de cuestiones responden a una diversidad de finalidades que varían de un currículo a otro. Las finalidades expresadas se pueden sintetizar en cuatro clases: conceptuales, cognitivas, formativas y sociales. Estos cuatro tipos de fines establecen las dimensiones que estructuran el concepto de currículo, con el cual venimos trabajando (Rico, 1997a, pp. 380-387). La reflexión conceptual y profesional sobre el currículo se puede llevar a cabo según distintos niveles: teleológico, institucional, académico, axiológico y práctico. Cada uno de estos niveles viene caracterizado por unas componentes que muestran los sujetos, instituciones, finalidades, disciplinas, valores y actividades profesionales del educador para planificar, implementar y evaluar el plan de formación considerado. Los niveles de reflexión conforman modos preferentes de abordar el estudio y el trabajo curricular (Rico, 1997a, pp. 408-410).

Dimensiones y niveles del currículo muestran su estructura sistémica. En nuestro marco, las dimensiones tienen carácter estructural mientras que los niveles atienden a distintas necesidades o funciones del currículo; no están limitadas salvo por su coherencia con el marco teórico en que se insertan.

Para llevar a cabo la planificación de un tema de matemáticas escolares consideramos que hay que atender las distintas dimensiones curriculares contempladas y contemplar, al mismo tiempo, la especificidad del tema matemático en estudio. En la dimensión conceptual hemos visto unas categorías específicas al contenido que contribuyen a su análisis. Para encontrar categorías que permitan reflexionar sobre las otras dimensiones del currículo que, al mismo tiempo, contemplen la especificidad del contenido es por lo que se introdujo la noción de organizador curricular (Rico, 1992, 1997b).

Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción de conocimiento matemático. (...) Los organizadores deben tener una base disciplinar adecuada, que permita su tratamiento objetivo. El conocimiento didáctico sobre cada uno de los contenidos del currículo de matemáticas ha de quedar estructurado mediante la aportación que hacen cada uno de los organizadores a dicho contenido (Rico, 1997b, pp. 45-46).

Consecuencia de la caracterización de los organizadores curriculares es su contribución al “análisis didáctico en profundidad de los distintos temas del currículo de matemáticas. Los organizadores se han escogido para satisfacer esta demanda” (p. 55). Tal y como se conciben, los organizadores son un sistema de categorías para analizar los textos de matemáticas escolares (Segovia y Rico, 2001, 88-101).

4.2 Análisis didáctico en el currículo de matemáticas

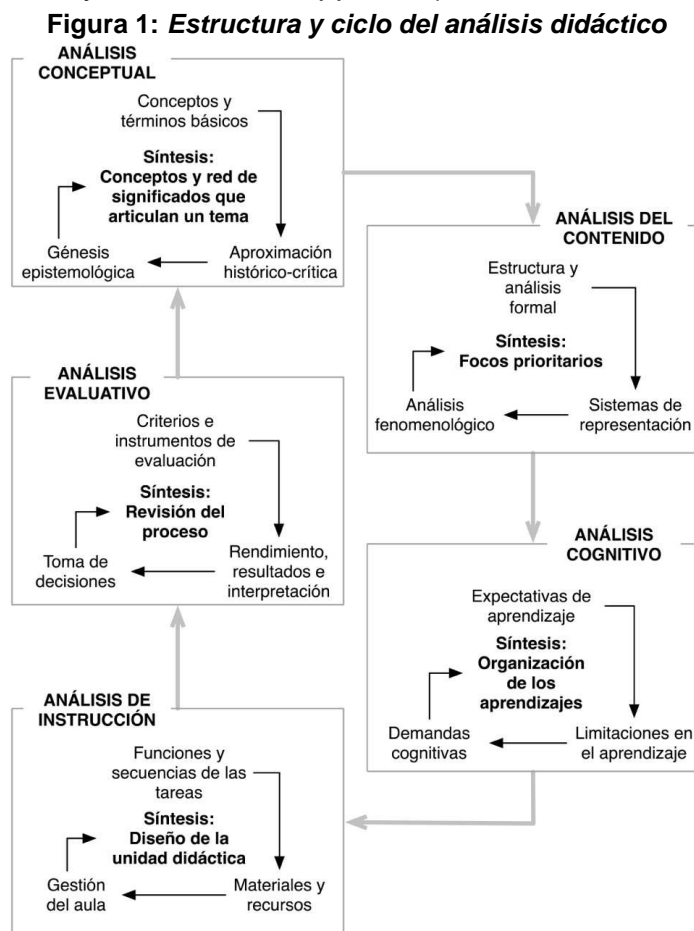
El análisis didáctico en matemáticas tiene como propósito establecer los significados de los conceptos y aprehender la intencionalidad educativa del discurso de las matemáticas escolares. En este sentido es un análisis interpretativo y transformador que maneja, de manera conjunta, categorías matemáticas y educativas. Para ello subraya la importancia del lenguaje, la precisión en las ideas y sus antecedentes, la veracidad y el rigor en los juicios. Este análisis trabaja mediante división de lo complejo en partes simples, para lo cual emplea un sistema elaborado de categorías. El orden y la coherencia, junto con la preocupación por la estructura, son atributos clave del análisis didáctico como método.

Entendemos que el análisis didáctico de los temas del currículo de matemáticas se inicia, en cada caso, con un análisis de contenido de los conceptos y procedimientos matemáticos que lo constituyen. A su vez, el análisis de un contenido matemático escolar requiere del análisis conceptual específico de las nociones básicas implicadas, incluidos sus precedentes, evolución histórica y fundamentos epistemológico (Romero, 1997, pp. 36-78). En cualquier tema de las matemáticas escolares, el análisis de contenido de los conocimientos que lo estructuran contribuye a delimitar y precisar la pluralidad y diversidad de sus significados, a establecer su alcance en cada caso. Hemos enumerado y descrito en el Apartado 3.3 las categorías que manejamos para el análisis del contenido de un texto de matemáticas escolares y para iniciar la planificación de un tema específico. Esas categorías señalan tipos de conocimiento, muestran aspectos formales-estructurales, tipos de representación, contextos y fenómenos. Proviene de la noción de significado de un concepto matemático (Rico, 2012, pp. 51-53). La síntesis

de conceptos, procedimientos y propiedades proporciona criterios para su resumen y organización, para la elección de nociones concretas, para precisar la estructura antes de planificar su enseñanza. Esta síntesis se presenta, usualmente, mediante un mapa conceptual que destaca las ideas principales manejadas y compendia sus relaciones (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2010, pp. 12-15).

4.3 Ciclo del análisis didáctico

El análisis de contenido matemático responde a una concepción reductiva o disgregadora, se propone establecer qué conocimientos son los que se consideran, se dirige a dar respuesta a la cuestión curricular inicial: ¿qué conocimientos? Nuestra aproximación contempla el análisis didáctico como un ciclo, como muestra la Figura 1. Este ciclo está constituido por cinco componentes: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo. El modelo general ajusta una dialéctica de análisis-síntesis. En el proceso subsiguiente consideramos las restantes dimensiones del currículo. Para ello diferenciamos, según esas dimensiones, nuevos tipos diferentes y complementarios de análisis, componentes todos ellos del análisis didáctico. Dichos análisis son: el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo. Técnicamente, conciernen a los organizadores con que los que venimos analizando los contenidos de las matemáticas escolares en programas de formación inicial de profesores de secundaria (Rico, 1992, p. 355). Estas categorías son herramientas para realizar el análisis de contenido de un tema concreto o de un texto matemático determinado (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2010, pp. 9-11).



4.4 Categorías para el análisis didáctico

A cada uno de los componentes del análisis didáctico le sigue el correspondiente proceso de síntesis, que recoge datos relevantes, a partir de los cuales cierra su ciclo y da paso al siguiente componente del análisis didáctico.

Así, mediante la síntesis posterior al análisis de contenido se destacan unos focos preferentes del conocimiento matemático escolar relativos al tema en cuestión. A partir de estos focos se establecen prioridades para su aprendizaje. La elección de los focos resulta del proceso previo de análisis-síntesis de los contenidos del tema que está en estudio. Esta elección da paso a modos concretos de entender e iniciar los procesos para el aprendizaje y desarrollo del tópico.

El análisis cognitivo se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. Las categorías con las cuales llevamos a cabo el proceso de análisis-síntesis cognitiva son de tres tipos. La primera de ellas se refiere a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, a su precisión y riqueza, a su alcance en el largo, medio y corto plazo, a su vinculación con los fines establecidos en distintos niveles del sistema educativo. Cada tema requiere, al menos, enunciar sus prioridades cognitivas, determinar su objeto y su alcance, organizar y relacionar dichas prioridades (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 63-107). La segunda de las categorías se centra sobre las dificultades de aprendizaje, hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas, y sobre los errores documentados o detectados en la práctica. Un análisis sobre las limitaciones previsibles en el aprendizaje de los escolares, acompañado de propuestas para su tratamiento, es parte de la actividad que se realiza mediante la componente cognitiva del análisis didáctico (Socas, 1997, pp. 125-154). La tercera de las categorías se centra en las demandas cognitivas, en las tareas mediante las cuales se reta al alumno a dar respuesta a diversas cuestiones cuyo propósito está en el logro de su aprendizaje y en la superación de los errores relativos al tema. Las tareas matemáticas sobre un tópico, sus variables y su relación con los contenidos y las expectativas establecidas, constituyen el tercer tipo de categorías cognitivas (Caraballo, 2010; Marín, 1997, pp. 195-207; Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 287-352).

La síntesis cognitiva tiene lugar al considerar la complejidad de las tareas según la profundidad de los contenidos que tratan, la diversidad de expectativas que atienden y las limitaciones cuya superación se proponen. Esta síntesis se expresa, en ocasiones, mediante propuestas para el aprendizaje expresadas en la articulación y complejidad de las tareas, que resumen los resultados de los análisis previos. De este modo, mediante las categorías expresadas, se indaga hasta dónde aprender y se escruta para qué aprender (Lupiáñez, 2009, pp. 461-466).

El análisis de instrucción supone la transformación y adaptación de las consideraciones realizadas en los dos análisis anteriores a las condiciones que se dan en un marco, para su interpretación. Este marco dado puede ser bien un aula o un centro, en el ámbito de la planificación que tiene que hacer un profesor o un departamento de matemáticas, o bien puede ser un proyecto de diseño de libros de texto u otros materiales escolares. El análisis de instrucción tiene por finalidad responder a la cuestión: ¿cómo y cuándo se lleva a cabo la formación? La concepción del análisis de instrucción es transformadora e interpretativa ya que

cualquier consideración que se haga sobre instrucción supone una adaptación de un programa concreto al marco de un aula, un centro o un proyecto.

Las categorías del análisis de instrucción consideran primero las funciones y tipos de tareas junto con su secuenciación (Marín, 1997, pp. 197-207); en segundo lugar los materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas (Coriat, 1997, pp. 155-175), y, tercero, como faceta interpretativa, la organización y gestión del trabajo en el aula.

La síntesis de instrucción se ocupa de compendiar los procesos de comunicación de los conocimientos, seleccionar las tareas y actividades, estimular las estrategias de intercambio y transmisión de ideas, todo ello referido a los conceptos y expectativas de aprendizaje previamente considerados para un tema concreto. La planificación de la secuencia de instrucción mediante una unidad didáctica es la clave de este momento de síntesis (Marín, 1997, pp. 195-228).

El análisis evaluativo atiende a la cuestión ¿cuáles han sido los resultados? Maneja tres tipos de categorías: en primer lugar los criterios e instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes; en segundo lugar, la interpretación de los rendimientos y resultados alcanzados; finalmente, la toma de decisiones para la revisión del proceso de enseñanza y aprendizaje que se infiere de los logros alcanzados (Rico, 1995, pp. 19-22). La síntesis evaluativa muestra los aprendizajes alcanzados, determina el desarrollo cognitivo de los escolares, enjuicia las fortalezas y debilidades del proceso de instrucción, previene sobre sus amenazas y señala sus oportunidades de mejora. Contribuye a tomar decisiones para la mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje del tema o tópico matemático en estudio. El análisis evaluativo necesita datos empíricos para mostrar los logros y fallos de la planificación realizada y de su puesta en práctica (Díez, 2012, pp. 66-91). A la conclusión del análisis evaluativo se lleva a cabo la síntesis conjunta del análisis didáctico.

4.5 Procedimiento del análisis didáctico

Las categorías presentadas estructuran el procedimiento del análisis didáctico. Hemos estudiado las categorías como organizadores del currículo, con fundamento en el marco curricular; conciernen al análisis conceptual y a los cuatro tipos de análisis-síntesis antes descritos: estructural, cognitivo, de instrucción y evaluador. El conjunto de las categorías organizan un procedimiento para un proceso complejo de análisis-síntesis, que denominamos análisis didáctico de un tema matemático.

El análisis didáctico comienza con una revisión histórica y epistemológica de los conceptos centrales implicados en el tema. Continúa con el análisis del contenido matemático escolar correspondiente, que se complementa con una síntesis que selecciona y organiza los conceptos y procedimientos relevantes que articulan el tema matemático en estudio y determina sus focos prioritarios. Prosigue con un análisis cognitivo centrado en el aprendizaje de tales contenidos, que genera una síntesis sobre expectativas de aprendizaje, establecidas según dichos criterios y que sirve para organizar los aprendizajes. Avanza con el análisis de instrucción, que, a su vez, produce una nueva síntesis, que se expresa en el diseño de la unidad didáctica del tema cuyo estudio se contempla. Finalmente, un nuevo análisis sobre evaluación de la enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos, da paso a una síntesis evaluadora del proceso. Esta descripción responde a un

procedimiento estructurado y cíclico en educación matemática, como muestra la Figura 1.

5. Conclusión

Análisis conceptual y análisis de contenido son métodos de investigación consolidados en la historia del pensamiento y también en la investigación educativa. Su adecuación a la Didáctica de la matemática ha hecho surgir en pocos años nuevas ideas, que han dado forma a sistemas de categorías propios, según diversos fundamentos teóricos y técnicos. En este trabajo hemos mostrado la articulación de un marco amplio de investigación en Didáctica de la matemática, que denominamos Análisis didáctico, que integra los análisis anteriores. Hemos mostrado su objeto de estudio, sus finalidades y la estructura en que se articula, basada en nociones como las de matemáticas escolares, texto, fines, dimensiones del currículo, y organizadores curriculares. Hemos destacado su carácter cíclico, la relevancia de la dialéctica análisis/ síntesis y aquellas funciones a las que atiende. La experiencia y la investigación de varias décadas de trabajo avalan y dan contenido a la reflexión teórica que aquí se presenta.

Bibliografía

- Arnauld, A. y Nicole, P. (1987). *La lógica o el arte de pensar*. Madrid: Alfaguara.
- Bell, A., Costello, J. y Küchemann D. (1983). *Research on Learning and Teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. NFER-NELSON, Windsor. UK.
- Caraballo, R. (2010). *Análisis de ítems de pruebas de evaluación de diagnóstico en competencia matemática para segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria en España, 2008-2009: Un estudio exploratorio*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Routledge, London. UK.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recurso y actividades: Un panorama. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE/Horsori, Barcelona. España.
- Descartes, R. (2011). *Discurso del método*. Gredos, Madrid. España.
- Díez, A. (2012) *Evaluación del rendimiento aritmético escolar. Un estudio comparativo*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Euclides (1991). *Elementos Libros I-IV*. Gredos, Madrid. España.
- Fernández-Cano, A. (2010). Drawing some evaluation patterns inferred from the biblical Gideon's passage. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*. 22(4), 327-343.
- Fernández-Cano, A. y Rico, L. (1996). *Prensa y Educación Matemática*. Síntesis, Madrid. España.
- Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía*. Alianza, Madrid. España.
- Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Crítica, Barcelona. España.
- González-Marí, J. L. (1998). *Números Naturales Relativos*. Comares, Granada. España.
- Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. LEA, Londres. UK.
- Honderich, T. (Ed.) (2001). *Enciclopedia Oxford de Filosofía*. Tecnos, Madrid. España.

- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Krings, H., Baumgartner, H. y Wild, C. (Eds.) (1977). *Conceptos fundamentales de filosofía*. Herder, Barcelona. España
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Marín, A. (1997). Programación de Unidades Didácticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE/Horsori, Barcelona. España.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España los siglos XVIII y XIX*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Pappus, (1970). Colección matemática. En F. Vera (Ed.), *Científicos Griegos Tomo II* (pp. 917-1015). Aguilar, Madrid. España.
- Picado, M. (2012). *El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Pineda, D. (2012). *La mente humana. Introducción a la filosofía de la psicología*. Cátedra, Madrid. España.
- Real Academia Española (1970). *Diccionario de la Lengua Española*. RAE, Madrid. España..
- Rico, L. (1991). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En S. Linares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 17-62). Alfar, Sevilla. España
- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Universidad de Granada, Granada. España.
- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *EMA* 1(1), 4-24.
- Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Síntesis, Madrid. España.
- Rico, L. (1997b). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE/Horsori, Barcelona. España.
- Rico, L. (1998). Concepto de currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 3, 7-42.
- Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*, (pp. 179-194). Universidad de Granada, Granada. España.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. Antecedentes del Análisis Didáctico en Educación Matemática. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Los autores, Granada. España.
- Rico, L. y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Los autores, Granada. España..
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares*. Síntesis, Madrid. España.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los número naturales. *Revista Suma* 58, 7- 23.
- Scriven, M. (1988). Philosophical inquiry methods in education. En M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education* (pp. 131-183). AERA, Washington. USA.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Sierra, M. (2010). *Trabajo original de investigación*. Universidad de Salamanca, Salamanca. España.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Morata, Madrid. España.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE/Horsori, Barcelona. España.
- Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.
- Zalta, E. (Ed.) (2012). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Center for the Study of Language and Information, Standford. CA, USA. Recuperado el 12 de enero de 2013, de <http://plato.stanford.edu/>

