UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 63-70
ISSN: 1815-0640

La resolución de problemas y la enseñanza de la matemática elemental

Aikaterini Konstantinidou, Pere López Cuesta

Resumen

La resolución de problemas no tendría por qué ser privativa de la Educación Secundaria y niveles superiores. Argumentamos en este artículo, la conveniencia de introducirla en Educación Primaria[1]. Los niños y niñas de estas edades utilizan espontáneamente estrategias de sentido común para resolver problemas de la vida cotidiana. Estas estrategias no tendrían que desaparecer en las clases de matemáticas, y podrían ser aprovechadas por el profesor para, perfeccionándolas, utilizarlas en la resolución de problemas.

Abstract

Problem solving should not be exclusive of secondary education and upper educational levels. In this paper, we argue the convenience of introducing problem solving in primary education. Children of these ages spontaneously use common sense strategies to solve problems of everyday life. These strategies should not disappear in math classes, and could be exploited by the teacher, refining them, to use them in problem solving.

Resumo

La resolución de problemas no tendría por qué ser privativa de la Educación Secundaria y niveles superiores. Argumentamos en este artículo, la conveniencia de introducirla en Educación Primaria. Los niños y niñas de estas edades utilizan espontáneamente estrategias de sentido común para resolver problemas de la vida cotidiana. Estas estrategias no tendrían que desaparecer en las clases de matemáticas, y podrían ser aprovechadas por el profesor para, perfeccionándolas, utilizarlas en la resolución de problemas.

Introducción

Cuando hablamos de “resolución de problemas”, a menudo instintivamente pensamos en matemáticas de Educación Secundaria o niveles superiores. En general se piensa que la resolución de problemas es una parte especialmente dificultosa del aprendizaje de las matemáticas, una materia que ya de por sí tiene fama de ardua, por lo que, en general, se tiende a obviar en los niveles más elementales. Pero partiendo de la premisa de que en las primeras etapas de la

[1] En el Estado Español la educación se organiza de la siguiente forma:
-Educación Infantil: Hasta los 5 años.
-Educación Primaria: Desde los seis hasta los once años.
-Educación Secundaria Obligatoria (ESO): Desde los 12 hasta los 15 años.
-Bachillerato, que no es obligatorio y consta de dos cursos.
-Para acceder a la Universidad, tras aprobar el Bachillerato, se realiza una prueba de acceso (Selectividad).

enseñanza, el sentido común tendría que ser la base del razonamiento matemático, vamos a intentar argumentar que esto se podría conseguir precisamente a través de la resolución de problemas.

Sentido común

La expresión "sentido común" se puede interpretar de varias formas:

- Por un lado se aplica a una afirmación que es evidente para todo el mundo, que no necesita ser argumentada o demostrada. Este sentido, es, por lo tanto, análogo al de algo que es intuitivamente cierto. No obstante entre algo que es "de sentido común" o algo que es "intuitivo" hay una diferencia: La primera expresión se aplica a afirmaciones con las que todo el mundo estará de acuerdo, mientras que en la segunda puede haber ciertas diferencias según las capacidades intuitivas individuales.
- El conocimiento de sentido común también se refiere frecuentemente al conocimiento práctico, concreto, a la capacidad de resolver problemas reales, de la vida cotidiana, oponiéndose por lo tanto, al conocimiento abstracto, formalizado, propio de las matemáticas[2].
- Otra forma de entender esta distinción entre sentido común y conocimiento científico es atendiendo a los tipos de razonamiento empleados en cada caso.

En la vida cotidiana frecuentemente realizamos razonamientos de tipo *plausible*[3], es decir que llevan a conclusiones válidas en la mayoría de los casos, pero que algunas veces pueden dar lugar a conclusiones erróneas. Por ejemplo, esto sucede, a veces en razonamientos de tipo inductivo. Por el contrario el razonamiento empleado en matemáticas debe llevar siempre, sin excepciones, de premisas ciertas a conclusiones igualmente ciertas.

Enseñanza de la matemática y sentido común

En la enseñanza de la matemática se da una progresiva abstracción y formalización a lo largo de las diferentes etapas, una trayectoria, por tanto, que va del uso normal del razonamiento de sentido común en Educación Infantil y Primaria a formas de razonamiento cada vez más rigurosas y formales.

Es a partir de la Educación Secundaria que en la enseñanza de la matemática se debe ir, poco a poco, poniendo en duda ciertas certezas del sentido común, viendo como algunas veces, conclusiones "evidentes", "de sentido común", no son válidas. Se tendría entonces que empezar a enseñar a los alumnos, a tener una actitud vigilante respecto del sentido común, pero esto sólo a partir de la E. Secundaria.

El problema está en que esta actitud frecuentemente se hipertrofia hasta convertirse en una desconfianza radical respecto del sentido común que puede acabar impregnando la enseñanza de la matemática incluso en los niveles más elementales.

---

[2] *Common sense: practical good sense gained by experience of life, not by special study. (Sentido común: Buen sentido práctico, conseguido por experiencia en la vida, no por estudio especial)* (Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English). Citado en Keitel, C. Kilpatrick, J. (2005): *Mathematics Education and* Common *Sense.*

[3] Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Pag. 13

Hemos encontrado, a menudo, en nuestras clases, alumnos con problemas de este tipo. El razonamiento de sentido común es la forma natural, espontánea, de razonar, y la desconfianza hacia este tipo de razonamiento corre el peligro de convertirse en desconfianza hacia el propio razonamiento, en dudas respecto de las propias capacidades, y por lo tanto, incluso, en sentimientos negativos en la propia autoestima.

Creemos que esta dialéctica sentido común – rigor matemático, tendría que tenerse en cuenta a la hora de planificar las clases, por lo menos en los niveles no universitarios. Se tendría que aprender a dosificar y relativizar el rigor en cada nivel de la enseñanza, de forma que no produzca un menoscabo irremediable de la confianza normal de los estudiantes en su propio razonamiento. Creemos que el sentido común es imprescindible para dar sentido a los contenidos matemáticos elementales.

Sentido común y resolución de problemas

En nuestra opinión la resolución de problemas podría tener en este sentido una importancia capital:

El razonamiento que se emplea para resolver un problema de matemática elemental es esencialmente del mismo tipo que el que se emplea en la vida cotidiana para resolver dificultades, superar obstáculos, retos, vencer en un juego de mesa, resolver un rompecabezas... Los niños, desde que aprenden a hablar, al mismo tiempo que construyen significados, aprenden patrones de razonamiento sencillos que usan espontáneamente para resolver problemas en la vida cotidiana.

Se podría afirmar entonces que el razonamiento heurístico[4] empleado para resolver problemas de matemática elemental forma parte del razonamiento de sentido común.

Algunos de estos patrones son *razonar por prueba y error*, *descubrir y usar pautas o regularidades, razonar usando analogías, usar modelos sencillos de la situación (esquemas, dibujos...), analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema...*

Cuando a nuestros alumnos de la asignatura “Didáctica de la Matemática I” les pedimos que buscaran ejemplos de problemas de la vida cotidiana, no necesariamente de Matemáticas, y explicaran también cómo resolverlos, estos son algunos de los que aparecieron:

Problema: “Una persona acaba de llegar a un país extranjero y tiene que ir desde el aeropuerto a su hotel”.
Solución: “Consultar un plano del transporte público” *(usar un modelo sencillo de la situación).*

Problema: “Un niño/a quiere las golosinas que están en un estante alto en la cocina pero no puede llegar a ellas”.
Solución: “Agarrar una silla y subirse para poder llegar”*, (analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema).*

[4] Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Pag. 173

Problema: "Un niño está en el supermercado con su madre y se pierde".
Solución: "Buscarla, mirando en diferentes lugares hasta encontrarla" *(prueba y error).*

Problema: "¿Cómo colocar los muebles en una habitación?"
Solución: "Podemos hacer un croquis de cómo queremos que quede la habitación" *(usar un modelo sencillo de la situación).*

Problema: "Un niño ha perdido la tempera de color verde, pero le quedan muchos otros colores. ¿Qué hará para conseguir el color verde?"
Solución: "Puede ir probando, mezclando temperas de otros colores hasta conseguir el color deseado" *(prueba y error).*

Problema: "Necesito tomar un taxi"
Solución: "Para hallar uno me ayudará tener en cuenta que he observado que en esta ciudad los taxis son de color amarillo" *(descubrir y usar pautas o regularidades)*

Problema: "La María ha perdido su libreta de matemáticas".
Solución: "Ir mirando en los lugares donde normalmente la utiliza" *(prueba y error).*

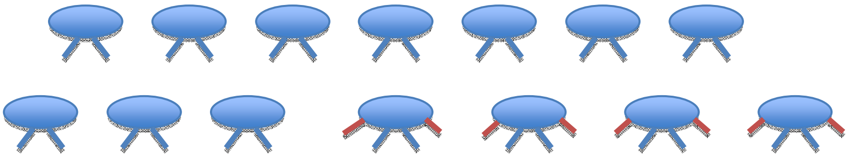
Problema: "Acabo de llegar a una ciudad desconocida y necesito llegar a una dirección"
Solución: "Recordar lo que hice cuando anteriormente me encontré en una situación parecida, para poder resolver este caso análogamente: Buscar alguna persona del país que conozca mi idioma para poder preguntarle" *(razonar usando analogías).*

Se tendría que intentar que estos patrones de razonamiento espontáneos, no se acaben perdiendo y rechazando al entrar en las clases de matemáticas de Educación Primaria. Que los niños no acaben "aprendiendo" que el razonamiento matemático es un tipo de razonamiento extremadamente sofisticado que no tiene nada que ver con el razonamiento que utilizamos en la vida cotidiana. Esta es una creencia muy extendida que hemos observado entre nuestros alumnos, y que forma parte de la creencia igualmente extendida de que las matemáticas son una materia "muy difícil" o sólo apta para talentos superiores.

Veamos ahora algunos ejemplos de problemas de matemática elemental que pueden resolverse usando estos mismos patrones de razonamiento de sentido común:

Problema: "20 bombones cuestan 25 €, ¿Cuánto cuestan 12 bombones?"
Solución: "Para saber cuánto cuestan 12 bombones necesito saber primero cuanto cuesta 1 bombón. Un bombón cuesta 25/20 = 1,25 €. Por tanto 12 bombones cuestan 12x1,25= 15 €" *(analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema).*

Problema: "Mi abuelo dice que en su corral tiene gallinas y conejos. En total puede contar 7 cabezas y 22 patas. ¿Cuántos animales tiene de cada clase?".
Solución: "Dibujo 7 animales con 2 patas cada uno. Cuento 14 patas. A continuación voy añadiendo pares de patas hasta llegar a 22".



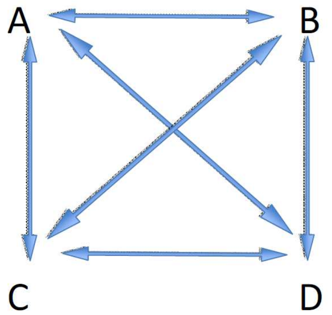
(Usar un modelo sencillo de la situación).

Problema: "Quiero comprar 20 pasteles. Tengo 55€ para gastar y hay pasteles de dos clases: De nata, que van a 2€, y de chocolate, a 3. ¿Cuántos puedo comprar de cada clase?".
Solución: "Voy probando cantidades de pasteles de nata y chocolate, y compruebo en cada caso cuanto dinero me gastaría:
Si comprara 10 de cada clase me gastaría: 10x2=20 por un lado más 10x3=30 por otro, en total 50€. Si compro 8 de nata y 12 de chocolate me gastaría 8x2=16 más 12x3=36, en total 52€. Si compro 5 de nata y 15 de chocolate gastaría 5x2=10 mas 15x3=45, en total 55€, por tanto estas serían las cantidades que podría comprar de cada clase" *(prueba y error).*

Problema: "En mi barrio se ha convocado un torneo de ping-pong al que se han inscrito 59 jugadores. El torneo se disputará por el método de eliminatorias, es decir cada 2 jugadores juegan un partido, el ganador pasa a la eliminatoria siguiente, y el perdedor queda eliminado. Si en una eliminatoria hay un nº impar de jugadores, uno de ellos, por sorteo, pasa directamente a la eliminatoria siguiente. Queremos saber cuantos partidos se tendrán que jugar en total"
Solución: "Para simplificar el problema pruebo a ver que pasaría si hubiera menos jugadores:
Si hubiera sólo 2 jugadores, con un partido bastaría.
Si hubiera 3 jugarían dos de ellos, y el ganador con el 3º, por lo tanto 2 partidos.
Si hubiera 4 jugarían 2 parejas, y los ganadores volverían a jugar, en total 3 partidos.
Si hubiera 5 jugarían 2 parejas y el 5º pasaría a la eliminatoria siguiente. Tras estos 2 partidos quedarían 3 jugadores que ya hemos visto anteriormente que necesitan de 2 partidos para que haya un vencedor, en total 4 partidos.
Observamos una pauta: En cada caso el nº de partidos es igual al nº de jugadores menos uno. Comprobemos que para 6 jugadores se sigue cumpliendo esta regla:
Si hubiera 6 jugadores jugarían primero 3 parejas, quedarían entonces 3 jugadores que necesitarían de 2 partidos más, por lo tanto en total 5 partidos.
Si aplicamos esta regla al caso de 59 jugadores podemos concluir que se necesitará jugar 58 partidos" *(descubrir y usar pautas y regularidades).*

Problema: "Queremos saber cuantos partidos se tendrían que jugar si ese mismo torneo se disputara por el procedimiento de "liga", es decir aquel en que cada jugador ha de jugar con todos los demás, y en cada partido gana dos puntos, uno o ninguno según que gane, empate o pierda, respectivamente, siendo el vencedor del torneo aquel que sume más puntos al final".
Solución: "Simplifiquemos el problema y veamos que pasaría si en la competición jugaran sólo 4 jugadores A, B, C, D. Podemos razonar que cada jugador ha de jugar con los 3 restantes, por lo tanto 3x4=12 partidos. Pero si nos ayudamos de un dibujo nos damos cuenta que cada partido lo hemos contado 2 veces. Por ejemplo

el partido que juegan A y B es uno de los 3 partidos que ha de jugar A pero también uno de los 3 que ha de jugar B. Por lo tanto hemos de dividir por 2. 12/2 = 6 partidos.

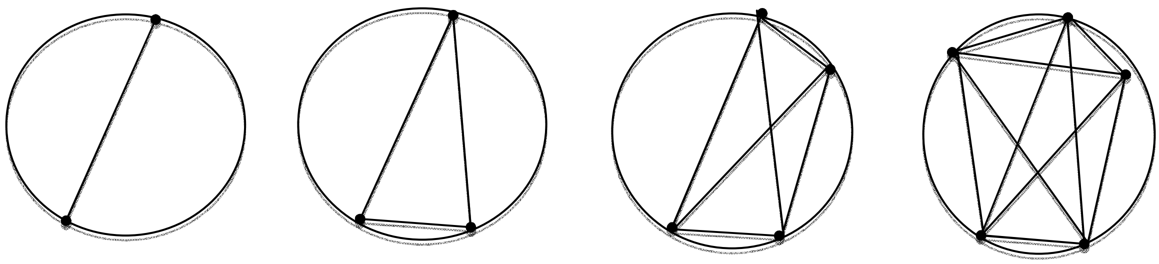


Hacemos un razonamiento análogo para el caso de 59 jugadores: Cada jugador tendría que jugar con todos los demás, por lo tanto cada jugador competirá en 58 partidos. Ahora hemos de multiplicar por el nº de jugadores y después dividir por 2 porque si no cada partido lo contaríamos 2 veces. Por lo tanto: 59x58=3422.
3422/2=1711 partidos" *(razonar usando analogías).*

Como hemos dicho anteriormente a partir de la Educación Secundaria se tendría que empezar a poner en cuestión algunas de las certezas del razonamiento de sentido común. Por ejemplo se puede introducir algún caso en que el patrón de razonamiento *descubrir y usar pautas y regularidades* (o como también se le llama *razonamiento inductivo*), falla, es decir lleva a conclusiones erróneas.

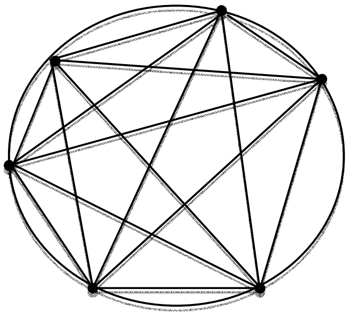
Por ejemplo:

Problema: "Sobre una circunferencia tenemos 43 puntos. Los unimos dos a dos mediante segmentos de recta de todas las formas posibles. Hallar cual es el nº máximo de partes en que queda dividido el círculo"[5].
Solución: "Para que el nº de partes en que queda dividido el círculo sea máximo basta darse cuenta de que los puntos de la circunferencia han de estar situados de manera que los segmentos que los unen no se corten más de 2 en un mismo punto interior del círculo.
Simplificamos el problema e intentamos hallar una pauta.
Si sólo tuviéramos 2 puntos, al unirlos, el círculo quedaría dividido en 2 partes, con 3 puntos quedaría dividido en 4 partes, con 4 puntos en 8 y con 5 puntos en 16 partes, como se muestra a continuación:



[5] Mason, J. Burton, L., Stacey, K. *Pensar matemáticamente.* Pág. 91

Observamos una pauta: El número máximo de partes es 2^{n-1} donde n es el número de puntos. Aplicando la pauta a nuestro caso tendríamos 2^{42} partes en que quedaría dividido el círculo. Pero si probamos que sucede para el caso de 6 puntos:



Comprobamos que no se verifica la pauta: El número máximo de partes en que queda dividido el círculo no es $2^5 = 32$ sino 31".

Esto nos llevará a poner en duda el resultado de los problemas resueltos anteriormente en que hemos aplicado este patrón de razonamiento y por lo tanto a revisar su resolución. Esta revisión pasará por intentar hallar un razonamiento que nos asegure que la pauta hallada es válida para cualquier caso, es decir una demostración de la validez general de la pauta.

Por ejemplo en el problema anterior del torneo disputado por el método de las eliminatorias, la demostración de la validez de la pauta hallada pasaría por darse cuenta de que en cada partido hay un jugador eliminado, y viceversa para cada jugador eliminado hay un partido donde ha sido vencido y por lo tanto eliminado, por lo tanto hay tantos partidos como jugadores eliminados, o sea tantos partidos como jugadores participantes en el torneo menos uno, y esto independientemente del nº de jugadores. Por lo tanto podemos concluir que la pauta hallada es válida.

Conclusiones

- En la Educación Primaria no solo es posible, sino conveniente introducir la Resolución de Problemas de Matemáticas.
- Se tendría que intentar que los alumnos percibieran los problemas de matemáticas como retos del mismo tipo que los que resuelven en su vida diaria: Ocupaciones cotidianas, juegos, adivinanzas, etc., no como un tipo de tarea que no tiene nada que ver con su vida normal fuera del aula de matemáticas.
- En consecuencia en su resolución se tendría que permitir y favorecer el uso del mismo tipo de estrategias de sentido común que usan los niños espontáneamente, aunque alguna de estas estrategias alguien la pueda considerar incorrecta desde un punto de vista estrictamente matemático.
- No sería sino al comenzar la Educación Secundaria que se puede empezar a perfeccionar algunas de estas estrategias, y a argumentar la necesidad de ir introduciendo mayor rigor en el razonamiento.

Bibliografía

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.España.

Gascón, J. (1997*).* Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad*. Revista SUMA*, 26,11-21.
Castelló, M. J., Codina, R., López, P. (2010) Cambiar las actitudes hacia las matemáticas resolviendo problemas. Una experiencia en Formación del Profesorado de Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*. Volumen 22. 65-76
De Guzmán, M. (1991): *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona.
Keitel, C. Kilpatrick, J. (2005): Mathematics Education and Common Sense. *En meaning in Mathematics Education*. Springer, Melbourne.
Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Labor, Barcelona.
Perelman, C., Olbrechts-Tyteca, L. (1988): *Traité de l'argumentation*. Editions de l'Université de Bruxelles. Bruselas.
Polya, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos, Madrid.
Polya, G. (1985): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.
Schoenfeld, A. (1985*): Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.
Stacey, K., Groves, S. (1999): *Resolver problemas: Estrategias*. Narcea, Madrid.

Aikaterini Konstantinidou. Grecia 1977. Licenciada en Física. Campus Mundet, Llevant, Pl. 1a. Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Argumentación y didáctica de las ciencias, Representaciones externas. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona**.** konstantinidou@ub.edu

Pere López Cuesta. Lleida 1945. Licenciado en Ciencias (Matemáticas). Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Arte y Matemáticas, Enseñanza de la Geometría, Matemática de la vida cotidiana. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona**.** plopez@ub.edu