UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 163-168
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

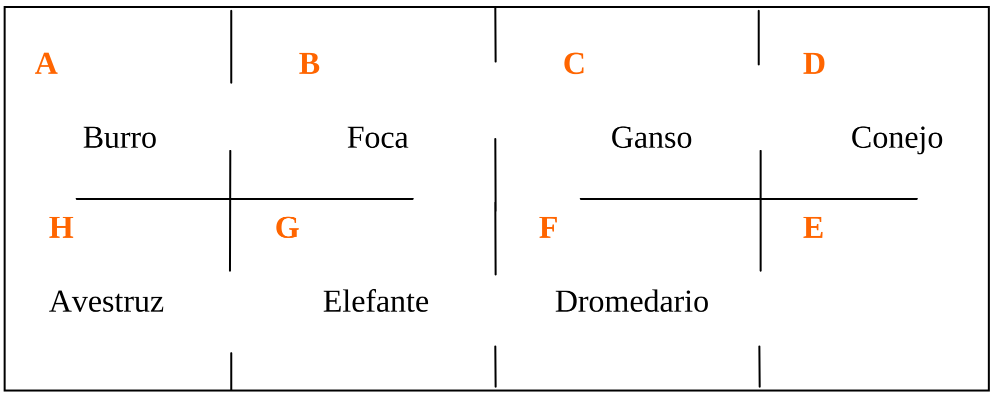
Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Optimización en el zoológico

Problema

En un zoológico, las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura:



Hallar el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal, teniendo en cuenta que un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente y que nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula.

Este problema lo conocí conversando sobre problemas de optimización con el Dr. André Antibí (IREM de Toulouse) y lo incluí en la conferencia sobre *Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica*, que tuve el agrado de impartir en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) que se realizó en junio último en Recife, Brasil. Lo consideré muy pertinente al tratar el tema, por ser un problema provocador, estimulante de la intuición optimizadora, que se percibe abordable por alumnos de educación básica – desde el quinto o sexto grado de primaria, o antes – y que ilustra una forma de responder adecuadamente a la pregunta que nunca debe faltar en un problema de optimización *¿cómo sabes que has obtenido un óptimo?*

Ciertamente, una dificultad es llegar a ubicar los animales en los lugares correspondientes, pero una dificultad mayor es hacerlo en el menor número de movimientos y estar seguros de que tal número es efectivamente el mínimo; es decir, de que no hay otra secuencia que lleve a la ubicación pedida de los animales, que tenga un menor número de movimientos. Ahora cumplo con publicar una solución de este problema, promesa hecha a varios de los colegas que luego de mi conferencia me lo pidieron, por haber llamado particularmente su atención.

Evidentemente, el ensayo y error es un camino natural para resolver este problema. Luego de experimentar algunos movimientos, es fundamental pasar a practicar el ensayo y error más reflexivamente. Si se tiene en cuenta desde el primer momento que el número de movimientos debe ser el menor posible, es lógico pensar en cómo tener idea de cuál es este número. A continuación expondré una solución[1]

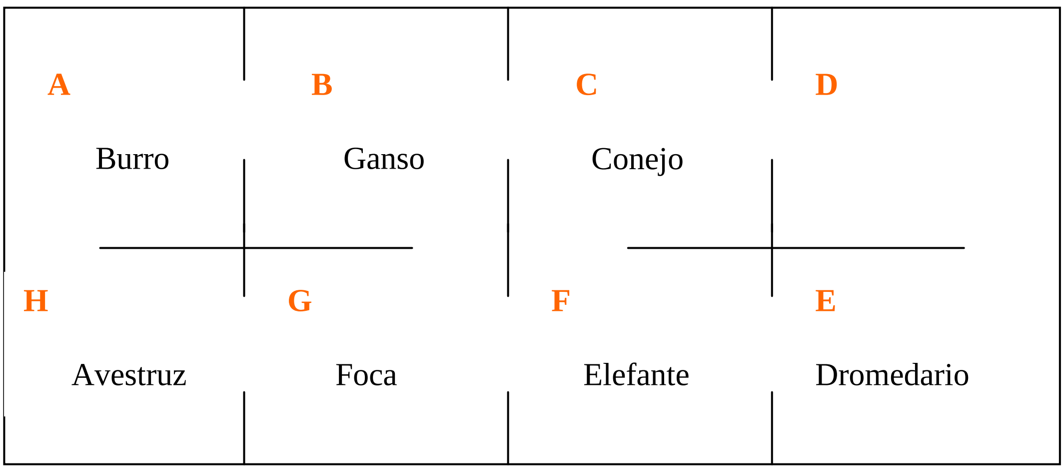
Solución

1. Observando la ubicación de los animales, analicemos cuál es el menor número de movimientos que necesita cada animal para pasar de la jaula en la que está inicialmente, a la jaula que le corresponde:

   - El avestruz necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra A.
   - El burro necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra B.
   - El conejo necesita al menos 1 movimiento para ser trasladado a la jaula con la letra C.
   - El dromedario necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra D.
   - El elefante necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra E.
   - La foca necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra F.
   - El ganso necesita al menos 2 movimientos para ser trasladado a la jaula con la letra G.

Por lo observado, para que cada animal se ubique en su jaula correspondiente se necesitan al menos 1+1+1+2+2+2+2 = 11 movimientos. El problema estará resuelto si obtenemos una secuencia de 11 movimientos que nos conduzca a la ubicación de cada animal en su jaula correspondiente. Para ello, cada animal debe hacer solamente el número mínimo de movimientos anotados.

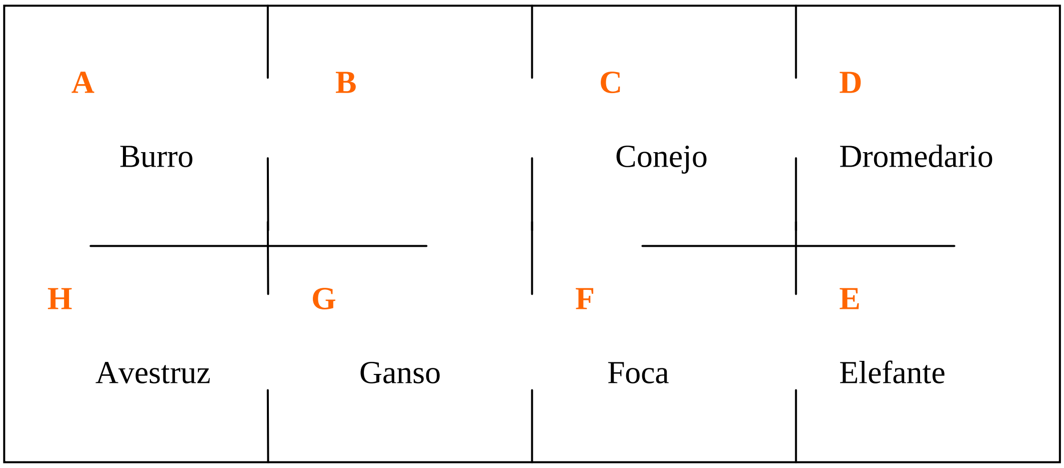
2. Movemos al dromedario, elefante, foca, ganso y conejo (en ese orden) en sentido antihorario. Así obtenemos la siguiente ubicación de los animales:



[1] Basada en la que hizo en el 2007 el alumno universitario Jorge Tipe.

Hasta ahora hemos hecho 5 movimientos. Notemos que el conejo ya está en la jaula con la letra C y realizó 1 movimiento; si lo movemos, ya no lograríamos ubicar con 11 movimientos a todos los animales en sus jaulas correspondientes.

3. Movemos al dromedario, al elefante, a la foca y al ganso (en ese orden) en sentido antihorario. Ahora tenemos la siguiente ubicación de los animales:



Hemos hecho 4 movimientos más; o sea 9 en total. Notemos que el conejo, el dromedario, el elefante, la foca y el ganso ya están en sus jaulas correspondientes y han realizado el número mínimo de movimientos, según lo observado en el paso 1.

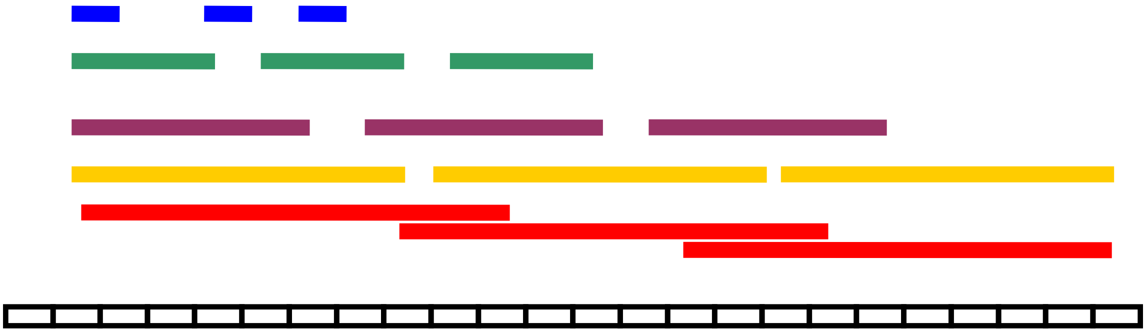
4. Movemos al burro y al avestruz (en ese orden) de la única forma posible; es decir, el burro a la derecha y después el avestruz hacia arriba. Con esto ya conseguimos que todos los animales estén en sus jaulas correspondientes y el número total de movimientos realizados es 11 (5 + 4 + 2). Notemos también que todos los animales han realizado solo el número mínimo de movimientos, según lo observado en el paso 1.
5. Hemos mostrado así una secuencia de 11 movimientos que conducen a la ubicación de los animales en sus jaulas correspondientes y por lo anotado en los pasos 1 y 2, es imposible que haya una secuencia con menor número de movimientos. Así, concluimos que 11 es el número mínimo de movimientos.

Comentarios

a) Éste es un problema que ilustra un método de resolver algunos problemas de minimización: encontrar lógicamente una cota inferior *k* del conjunto de posibles valores de la función objetivo y luego mostrar un caso particular que corresponde precisamente al valor *k*. Así, el mínimo es tal número *k*. Notemos que en este caso la cota inferior *k* es el número 11, pues el número *n* de movimientos que conduzca a la ubicación final de cada animal en la jaula con la letra de la inicial de su nombre, tiene que ser mayor o igual que 11, ya que 11 es la suma de los números mínimos de movimientos que se tendría que hacer con cada animal para pasarlo de su ubicación inicial a la final (Lo anotado en los pasos 1 y 2). Es decir, se ha visto lógicamente que para todo *n*, debe cumplirse que $n \geq 11$ y se ha encontrado una secuencia que tiene precisamente 11 movimientos. Evidentemente, es imposible que exista una secuencia con un número menor de movimientos y en consecuencia 11 es el mínimo.

b) Análisis similar puede emplearse para resolver el problema siguiente:

Si se dispone de reglitas de longitudes 1, 3, 5, 7 y 9 centímetros, respectivamente, 3 de cada una de ellas, ¿Cuál es el menor número de reglitas que se puede usar para cubrir exactamente, poniendo una a continuación de otra, un caminito rectilíneo de 24 centímetros de longitud? [2]



Evidentemente, 1 y 2 son cotas inferiores para el conjunto de posibles valores, pues es imposible cubrir el caminito con un número de reglitas menor que 1 ó 2, pero realmente no resultan cotas inferiores significativas. Como tomar 2 reglitas de la mayor longitud (9 cm) es lo que puede minimizar el número total de reglitas a usar y eso da a lo más 18 cm, es evidente que necesitamos por lo menos una reglita más; sin embargo, siendo 24 un número par y 18 también, será imposible cubrir exactamente el caminito de 24 cm con solo una reglita más, ya que todas tienen longitud impar. Para cubrir los 6 centímetros que faltan (24 – 18) necesariamente debe emplearse por lo menos dos reglitas, y en consecuencia la cota inferior realmente significativa es 4. No es difícil encontrar combinaciones de 4 de las reglitas para obtener el caminito de 24 centímetros de longitud. (Por ejemplo, dos de 9cm y dos de 3 cm cada una; ó dos de 9 cm, una de 1 cm y una de 5 cm.) En consecuencia, 4 es el mínimo número de reglitas.

c) El método usado es uno de los diversos que recomiendo usar al resolver problemas de optimización, según las características propias de cada problema.[3] Estos son:

I. Identificar casos y usar cuadros

II. Hacer representaciones gráficas y visualizaciones geométricas

III. Usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica

IV. Si se busca un camino para llegar a determinado objetivo, “pensar en el camino inverso”

V. Usar diagramas de árbol

---

[2] Para hacer lúdico y dinámico este problema, se pueden emplear reglitas y caminito de cartulinas de colores, escogiendo una unidad de longitud mayor que el centímetro; por ejemplo que las reglitas sean de longitudes 3cm, 9cm, 15 cm, 21 cm y 27 cm y que el caminito a cubrir sea de 72 cm de longitud. Tanto las reglitas como el caminito deben ser todos del mismo ancho, digamos 5 cm. Sobre este problema y una variación interesante, que presentamos en el PME 34, hicimos un comentario amplio en el número 19 de UNION.

[3] Ejemplos concretos de uso de estos métodos puede encontrarse en el texto de la conferencia, publicado en las actas de la XIII CIAEM.

VI. Identificar situaciones equivalentes en el conjunto en el que se busca el máximo o el mínimo

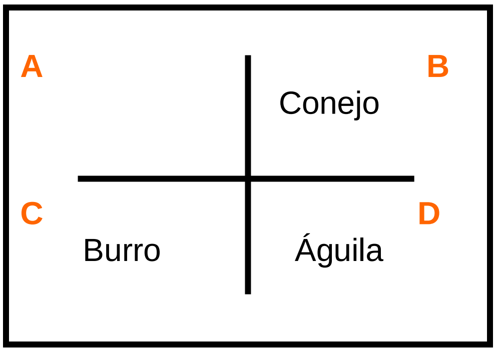
VII. Definir una función objetivo, graficarla y hacer operaciones con el apoyo del álgebra y del análisis.

VIII. Encontrar lógicamente una cota inferior k del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el mínimo es k.

Similarmente, encontrar lógicamente una cota superior M del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el máximo es M.

d) Será atractivo para los niños resolver problemas como el de las jaulas y los animales empleando material concreto; por ejemplo, figuras de los 7 animales ubicadas en casillas correspondientes a las 8 jaulas dibujadas en una hoja de papel, o figuras en 7 láminas cuadradas, por ejemplo de 2cm x 2cm, ubicadas en una caja rectangular de 4cm x 8cm. Así, los movimientos se realizan de manera más concreta.

e) El problema es una invitación a crear otros problemas similares, más sencillos o más complejos, y examinar su solución. Resulta interesante y aleccionador, como formación matemática, crear problemas similares con menor número de animales y de jaulas y examinar si la solución existe.
Por ejemplo, si el águila, el burro y el conejo están inicialmente ubicados como se muestra en la siguiente figura, es posible ubicarlos, luego de una secuencia de movimientos, de modo que cada animal esté en la jaula cuya letra coincide con la inicial de su nombre. (¿Cuál es el número mínimo de movimientos?)



Pero… ¿se logrará esa ubicación final, cualquiera que sea la ubicación inicial de los tres animales, cada uno en una de estas cuatro jaulas? ¿Por qué?

Algunas otras preguntas:

- ¿Y qué pasa con seis jaulas y 5 animales?
- ¿Y con 2n jaulas y 2n – 1 animales?
- ¿Influye para la respuesta que las 2n jaulas cuadradas formen un rectángulo o un cuadrado?

Los lectores quedan invitados a buscar respuestas y así ir haciendo matemáticas, examinando casos de existencia de soluciones, haciendo conjeturas y generalizaciones, dando ejemplos y contraejemplos…