UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 153-160
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

MONOGRÁFICO ESTADÍSTICA

Geometría, medias y aplicaciones

Problema

Cuando falleció Alberto, dejó para su hijo Carlos un terreno de forma rectangular y para sus hijas Paula y Amelia dos terrenos cuadrados. El de Paula tiene el mismo perímetro que el terreno de Carlos, y el de Amelia tiene la misma área que el terreno de Carlos. ¿Cuál de los terrenos cuadrados es más grande?

Este problema contextualizado, lo podemos enunciar en términos "puramente geométricos" de la siguiente manera:

> *Dado un rectángulo, siempre es posible determinar dos cuadrados: uno cuyo perímetro es igual al perímetro del rectángulo dado, y otro cuya área es igual al área del rectángulo dado. ¿Cuál de los dos cuadrados tiene sus lados de mayor longitud?*

Además:

> *¿Pueden, ambos cuadrados, tener sus lados de la misma longitud?*

Empecemos a analizar el problema, considerando un caso particular y "números pequeños":

- Supongamos que el rectángulo dado tiene 7 cm de largo y 5 cm de ancho.
- Entonces su perímetro es 24 cm y en consecuencia el cuadrado de igual perímetro tiene sus lados de longitud 6 cm.
- Por otra parte, su área es 35 cm^2 y en consecuencia el cuadrado de igual área tiene sus lados de longitud $\sqrt{35}$ cm.
- Es claro que el cuadrado de igual perímetro que el rectángulo dado, tiene sus lados de mayor longitud que el cuadrado de igual área que el rectángulo dado, pues $\sqrt{35} < 6$.

¿Cómo será en general?

Para simplificar la exposición omitiremos mencionar las unidades.

- Supongamos que el rectángulo dado tiene largo *a* y ancho *b*.
- Entonces su perímetro es $2.a + 2.b$ y en consecuencia el cuadrado de igual perímetro tiene sus lados de longitud $\frac{2a+2b}{4}$; o sea $\frac{a+b}{2}$.
- Por otra parte, su área es $a.b$ y en consecuencia el cuadrado de igual área tiene sus lados de longitud $\sqrt{ab}$.
- Ahora ya no es obvio que el cuadrado de igual perímetro que el rectángulo dado es más grande que el cuadrado de igual área que el rectángulo dado. Al considerar otros casos particulares, se puede verificar que se sigue cumpliendo la desigualdad observada en el caso particular que vimos, lo cual nos lleva a conjeturar que siempre debe cumplirse que:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \qquad (\alpha)$$

Para demostrar esta conjetura, observamos que con los números reales positivos *a* y *b* podemos hacer algunas operaciones algebraicas para obtener expresiones equivalentes a la de la conjetura, sin que se altere el sentido de la desigualdad. Así, tenemos:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow 4ab < (a+b)^2 \Leftrightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 < (a-b)^2$$

Como hemos llegado, por equivalencias, a una expresión verdadera para $a \neq b$, concluimos que la conjetura (α) es correcta y que la desigualdad se cumple siempre y cuando $a \neq b$; o, dicho de otra forma, que para todo par de números positivos *a* y *b*, siempre se cumple que:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad (\beta)$$

y que la igualdad se cumple si y solo si *a* = *b.*

Con este resultado, volvemos al problema original y concluimos que dado un rectángulo cualquiera de lados *a* y *b*, el cuadrado de igual perímetro que tal rectángulo, tiene sus lados de longitud mayor o igual que el cuadrado de igual área que dicho rectángulo. La igualdad se cumple únicamente en el caso que $a = b$; es decir, cuando el rectángulo dado es un cuadrado.

Así, considerando los terrenos heredados por Carlos, Paula y Amelia, el terreno cuadrado de Paula es más grande que el terreno cuadrado de Amelia, salvo que el terreno rectangular de Carlos sea también un terreno cuadrado, en cuyo caso los tres terrenos serán cuadrados del mismo tamaño.

Una ilustración gráfica

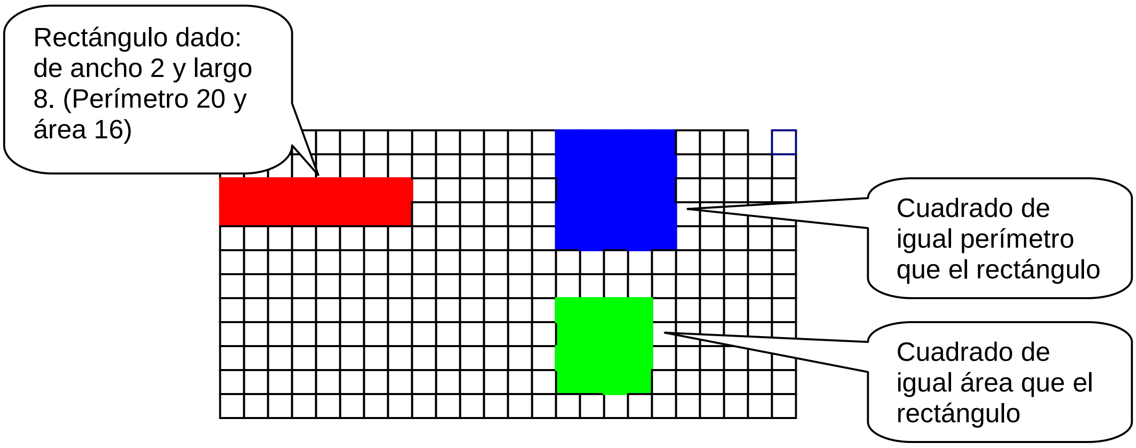

Figura 1

Una "*demostración visual*" de la desigualdad obtenida

Evidentemente, hay diferencia entre una ilustración y una demostración. Una ilustración presenta un caso particular, mientras que una demostración considera el caso general. No siempre es posible tener una "demostración visual" de proposiciones matemáticas y hay controversias en torno a las llamadas "demostraciones visuales"; sin embargo, considero interesante mostrar la Figura 2[1], que al observarla con detalle nos dice claramente que se cumple la desigualdad:

$$4ab \leq (a+b)^2 , \qquad (\gamma)$$

que es equivalente a la desigualdad (β).

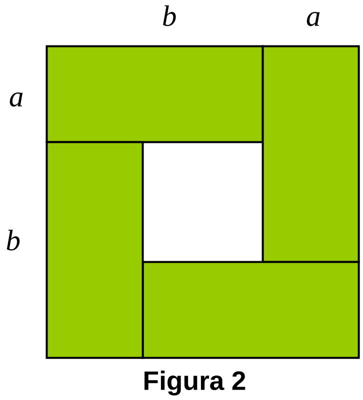

Figura 2

En la figura, los cuatro rectángulos son congruentes entre sí, de lados a y b. Es evidente que el área de la región de color verde, formada por los cuatro rectángulos, es menor que el área de la región cuadrada cuyos lados miden $a+b$; es decir:

$$4ab < (a+b)^2$$

[1] Vogel, D. (2010). Maximal, minimal, optimal… *Mathematik lehren*, 159, p. 9

Ciertamente, el cuadrado del centro, con lados de longitud $b-a$, se reducirá a un punto únicamente en el caso que $a=b$, y entonces serán iguales ambos miembros de la desigualdad anterior. Así vemos claramente la validez de la desigualdad (γ).

Una demostración geométrica

Usando dos teoremas acerca de triángulos rectángulos, obtenemos la desigualdad (β), con la ventaja de ser exactamente la desigualdad que da respuesta al problema inicialmente planteado, sobre la comparación de los tamaños de los cuadrados de igual perímetro y de igual área que un rectángulo dado.

Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, la altura respecto a la hipotenusa es media geométrica entre los segmentos en que esta altura divide a la hipotenusa.

Teorema 2: En todo triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo.

En la figura 3, tenemos un triángulo rectángulo ABC, recto en C. D es el punto medio de la hipotenusa, AE y EB son los segmentos en que divide a la hipotenusa la altura trazada desde C y *a* y *b* son las longitudes correspondientes de tales segmentos.

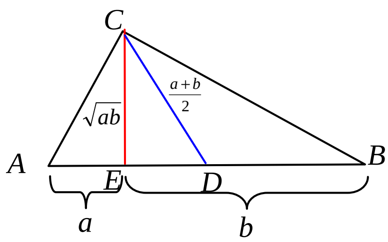

Figura 3

Por aplicación del teorema 1, afirmamos que para la altura considerada, que podemos llamar *h*, se cumple que

$$\frac{a}{h}=\frac{h}{b}$$

De esta igualdad obtenemos que $h=\sqrt{ab}$ es la longitud del segmento CE, como se muestra en la figura 3 (en rojo).

Por aplicación del teorema 2, la longitud del segmento que une C con D (la mediana respecto a la hipotenusa, mostrada de color azul) es $\frac{a+b}{2}$, y se ve claramente que $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$. Evidentemente, la igualdad se cumplirá únicamente si $a = b$; pues en tal caso el triángulo ABC es isósceles y coinciden la altura con la mediana respecto a la hipotenusa.

Media aritmética y media geométrica

Recordemos que la media aritmética de dos números *a* y *b* es la semisuma de ellos y que la media geométrica de los mismos es la raíz cuadrada de su producto; así, la desigualdad (β) expresa que

> *La media geométrica de dos números positivos cualesquiera a y b es menor o igual que su media aritmética. La igualdad se cumple sólo en el caso que a = b.*

Una primera pregunta que surge ante esta propiedad es *¿la desigualdad se cumple con n números positivos cualesquiera?* Considerando tres números, por ejemplo 2, 4 y 8, verificamos que se cumple la desigualdad, pues:

$$\sqrt[3]{2\times 4\times 8} \leq \frac{2+4+8}{3}.$$

Si la desigualdad se cumple para tres números positivos cualesquiera, podemos aplicarla para resolver un problema similar al originalmente planteado, ahora en la geometría tridimensional:

> *Dado un paralelepípedo rectangular, siempre es posible determinar dos cubos: uno cuya suma de las longitudes de sus aristas sea igual a la suma de las longitudes de las aristas del paralelepípedo dado, y otro cuyo volumen sea igual al volumen del paralelepípedo dado. ¿Cuál de los dos cubos tiene sus lados de mayor longitud? ¿Pueden, ambos cubos, tener sus lados de la misma longitud?*

Tratando de ver lo general en lo particular, consideremos que el paralelepípedo rectangular dado tiene aristas de longitudes (en cm) 2, 4 y 8. Así, la suma de las longitudes de sus 12 aristas es 4.(2 + 4 + 8); o sea 56 y en consecuencia el cubo cuya suma de longitudes de sus aristas es 56, tiene cada una de sus aristas de longitud $\frac{56}{12}$; o sea $\frac{14}{3}$, que es $\frac{2+4+8}{3}$ (aproximadamente 4,67).

Por otra parte, el volumen del paralelepípedo dado (en cm^3) es 2 x 4 x 8; o sea 64 y en consecuencia el cubo de volumen 64 tiene sus aristas de longitud $\sqrt[3]{64} = 4$. Vemos así que las aristas de este cubo son de menor longitud que las aristas del cubo anterior.

Para afirmar que siempre el cubo de igual volumen al del paralelepípedo rectangular dado tiene sus aristas de longitud menor que la del cubo cuya suma de las longitudes de sus aristas es igual a la suma de las longitudes de las aristas del paralelepípedo, debemos demostrar que para tres números positivos cualesquiera, su media geométrica es menor o igual que su media aritmética.

Como el lector podrá imaginar, esta desigualdad se cumple para *n* números positivos cualesquiera. Así:

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son *n* números reales positivos ($n \geq 2$), entonces:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Es un teorema muy importante, conocido como *Teorema de Cauchy de las medias,* que apareció en el año 1821 en su Cours d'Analyse[2]. Sus aplicaciones son diversas, en particular a algunos problemas de optimización, con la ventaja de facilitar sus soluciones sin recurrir al cálculo diferencial ni hacer uso del algoritmo de completar

[2] Esta información, y su demostración, están en Dörrie, H (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications

cuadrados, muchas veces desagradable para los alumnos. Un ejemplo muy sencillo lo tenemos en el siguiente problema:

> *¿Cuál es el máximo producto que se puede obtener con tres números positivos cuya suma es 48?*

Considerando *a, b* y *c* tales números, ya sabemos que su media geométrica es menor o igual que su media aritmética; es decir:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \qquad (\delta)$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$. Otra manera de leer esta desigualdad es que *el máximo valor obtenible de la media geométrica de tres números positivos, es su media aritmética*, y como en el problema dado, la suma de los números es conocida, ya es claro que el máximo valor de $\sqrt[3]{abc}$ es $\frac{48}{3} = 16$ y en consecuencia el máximo valor del producto es $16^3 = 4096$. Más aún, como la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$, queda claro que para que la suma sea 48, cada número debe ser igual a 16.

Como otra manera de leer la desigualdad (δ) es que *el mínimo valor obtenible de la media aritmética de tres números positivos es su media geométrica*, podemos resolver fácilmente el siguiente problema:

> *¿Cuál es la mínima suma que se puede obtener con tres números positivos cuyo producto es 512?*

Teniendo en cuenta, otra vez, que la igualdad se cumple únicamente si $a = b = c$, el lector puede llegar a la conclusión que la mínima suma obtenible es 24, que ocurre cuando los tres números son iguales a 8.

Media aritmética y media geométrica en estadística

Ciertamente, más allá de la relación tan valiosa que hay entre las medias geométrica y aritmética, es importante tener claridad sobre el uso de de estas "*medidas de tendencia central*" como suele llamarse en estadística a estos y otros representantes de un conjunto finito de datos. Por ejemplo:

> *Si Pedro en el 2007 tuvo un sueldo mensual de 2000 soles; en el 2008 tuvo un aumento del 10%; en el 2009 tuvo un segundo aumento del 15%; y en el 2010 tuvo un ascenso, que significó un nuevo aumento del 50%, ¿cuál fue su sueldo promedio en los años 2008, 2009 y 2010? y ¿cuál fue el aumento porcentual promedio que tuvo Pedro en estos tres últimos años?*

Para responder a las preguntas, observemos:

Sueldo en el 2007	2000
Sueldo en el 2008	2000 x 1,10 = 2200
Sueldo en el 2009	2200 x 1,15 = 2530
Sueldo en el 2010	2530 x 1,50 = 3795

Es claro que para obtener el sueldo promedio de Pedro en los años pedidos, basta sumar sus sueldos y dividir la suma entre 3; es decir, hallar la media aritmética de los sueldos correspondientes a los tres años:

$$\frac{2200+2530+3795}{3}=\frac{8525}{3}\approx 2841{,}66$$

Si Pedro hubiera ganado este sueldo en los años 2008, 2009 y 2010, el monto total recibido sería el mismo que el recibido según la información dada en el problema. En efecto, podemos verificar que

$$2200\times 12+2530\times 12+3795\times 12=102300$$

y

2841,66 x 36 = 102299,76

Los 24 centésimos de diferencia se deben a que la media aritmética no es exactamente 2841,66. Si usamos el cociente indicado, obtenemos exactamente 102300:

$$\frac{8525}{3}\times 36=8525\times 12=102300$$

Para responder a la segunda pregunta (¿cuál fue el aumento porcentual promedio que tuvo Pedro en estos tres últimos años?), recordamos que en el 2008 el aumento fue del 10%, en el 2009 del 15% y en el 2010 del 50%. La media aritmética de estos tres porcentajes es 25%. ¿Esta media cumple el papel de representar a los porcentajes de aumento recibidos por Pedro, en el sentido que si cada año hubiera recibido el 25% de aumento, su sueldo en el 2010 sería de 3795 soles? Veamos:

2000 x 1,25 x 1,25 x 1,25 = 3906,25

Obtenemos una cantidad que es 111,25 unidades mayor que el sueldo del 2010 correspondiente a la información dada en el problema (3795). Esto nos dice que la media aritmética **no** es la representante adecuada de los porcentajes de aumento. En cambio, si hallamos la media geométrica de 1,10 , 1,15 y 1,50, tenemos

$$\sqrt[3]{1{,}10\times 1{,}15\times 1{,}50}\approx 1{,}238$$

Lo cual nos indica un porcentaje promedio de 23,8% anual; es decir, si Pedro hubiera recibido el 23,8% de aumento cada año, en el 2010 tendría como sueldo

2000 x 1,238 x 1,238 x 1,238 = 3794,826544 ,

que podemos redondear a 3794,83 y vemos que difiere solo en 17 centésimos del sueldo en el 2010, según la información dada en el problema. La pequeña diferencia es consecuencia de haber hecho también un redondeo al obtener la raíz cúbica.

Así, en este caso, la media geométrica nos permite obtener un buen representante de los datos porcentuales considerados en el problema. Notemos que – como se ve claramente en la tabla de arriba – estos datos son factores de productos en el problema, y finalmente de un producto que es el sueldo del último año (2000 x 1,10 x 1,15 x 1,50 = 3795). En casos como éste, se aplica la media geométrica.

Algunos comentarios

1. Lo expuesto nos permite ver lo importante que son las conexiones entre los diversos conceptos de la matemática y las potencialidades didácticas que se generan al hacerse evidentes estas interrelaciones. Vemos así, que están interrelacionados conceptos de la geometría, de la aritmética, de la estadística y de la optimización y que facilitan el desarrollo de la visualización; de la intuición; de la capacidad de generalizar, viendo lo general en lo particular; y del tránsito entre registros verbales, algebraicos y geométricos.
2. Es interesante proponer a estudiantes de cuarto o quinto año de secundaria, a estudiantes universitarios y en cursos de capacitación a profesores de secundaria, secuencias de actividades que los lleven a resolver el problema de “demostrar visualmente” la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética de dos números positivos. Yo lo he experimentado con estudiantes universitarios, y llegaron a situaciones como la mostrada en la figura 2. Un reto mayor es el caso tridimensional, para la desigualdad considerando. tres números positivos.
3. Tenemos una muestra más de problemas matemáticos de optimización que son aplicables en la educación básica y que pueden ser resueltos sin recurrir al cálculo diferencial ni a algoritmos tediosos, sino a la interpretación cuidadosa de desigualdades, que además tienen referentes geométricos.