REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 161-175
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Imágenes fractales con GeoGebra

Fabián Vitabar

Resumen

La Geometría Dinámica nos ofrece la posibilidad de visualizar casi instantáneamente los gráficos generados por expresiones matemáticas. Esto permite generar imágenes muy agradables y coloridas (como los fractales), cuya creación implica un desafío que obliga al “artista” a poner en juego los conocimientos matemáticos necesarios para lograr un fin. En este artículo veremos cómo generar estas imágenes al nivel de la enseñanza media, usando GeoGebra. Además del conocimiento matemático (geometría analítica, álgebra lineal, análisis real y complejo) buscaremos generar situaciones problemáticas motivadoras, que facilitan el otorgamiento de sentido a los contenidos, a la vez que incentiven la autonomía del alumno en la construcción del conocimiento matemático.

Abstract

The Dynamic Geometry can show us -almost instantly- the graph associated to a mathematical expression. We can generate beautiful and colourful images (as fractals), leading the “artist” to use his mathematical knowledge to create its. In this paper we'll see how to create these images at high school, using GeoGebra. In addition to mathematical knowledge (analytic geometry, linear algebra, real and complex analysis) we'll try to propose good problematic situations, giving sense to contents and promoting the student's autonomy in his knowledege construction.

Resumo

A geometria dinâmica possibilita-nos visualizar quase instantaneamente os gráficos gerados por expressões matemáticas. Isto permite gerar imagens muito agradáveis e coloridas (fractais, por exemplo), cuja criação implica em um desafio que obriga o “artista” a lançar mão dos conhecimentos matemáticos necessários para atingir um determinado objetivo. Neste artigo veremos como gerar estas imagens ao nível do ensino médio usando o software GeoGebra. Além do conhecimento matemático (geometria analítica, álgebra linear, análise real e complexa), procuraremos propor situações problemáticas motivadoras, tornando significativa a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e incentivando a autonomia do aluno na construção do seu conhecimento matemático.

1.Introducción

Uno de los desafíos que ha debido enfrentar la Didáctica de la Matemática, ha sido el de contribuir a que las prácticas de enseñanza permitan a los alumnos otorgarle sentido a los objetos matemáticos. Esto implica (entre otras cosas) que los estudiantes sean capaces de relacionar los entes abstractos con problemas concretos (y cuanto más cotidianos, mejor) para los cuales el nuevo conocimiento significa un aporte sustancial.

Los procesos que ha sufrido la Matemática como tal, especialmente en lo referido a su enseñanza sobre mediados del Siglo XX, han provocado en nuestro sistema educativo formal[1] una despersonalización hasta "violenta" de estos saberes, y estas tradiciones nos han empujado a que nos parezca obvio que cuanto más abstracta, pura y desarraigada sea la manipulación de los objetos matemáticos, de mayor "calidad" será su aprendizaje.

Basta remontarnos en el tiempo para aceptar que muchos de los componentes que han hecho de la Matemática (y en especial, de la Geometría) una disciplina *hermosa* se vinculan con su aplicación en el arte y en la arquitectura. Los estudios de las proporciones (en especial, la *Divina Proporción*), las regularidades, las simetrías, los patrones, han sido motivo de deslumbramiento para muchas generaciones: y el interés en lograr dominar esta explicación oculta tras tanta belleza, ha motivado al estudio profundo de muchos conceptos matemáticos.

¿Quién no se ha maravillado frente a una figura con varios ejes de simetría? ¿O un bonito polígono estrellado? ¿Y una envolvente de rectas?

Por otra parte, la misma enseñanza de la Matemática se ha topado desde hace unos años con un conjunto de posibilidades originales, en el marco de los procesos de incorporación de TIC a las actividades de aula. En particular, la Geometría Dinámica ha implicado un cambio de características hasta revolucionarias para la Didáctica de la Matemática.

Sin detenernos en estas bondades, nos interesará en este artículo mostrar algunas de las posibilidades que ofrece la Geometría Dinámica (en especial, el software GeoGebra[2]) para generar imágenes estéticamente agradables como los **fractales**, en una suerte de combinación del arte digital con la Gometría Dinámica, haciendo también énfasis en las oportunidades de aprendizaje de la matemática que esto conlleva. Si bien veremos que los contenidos matemáticos asociados nos abren las puertas para profundizar en campos de conocimiento más desafiantes, nos restringiremos a la aplicación de los contenidos que son abordados en los programas de enseñanza secundaria.

2. Las imágenes fractales

Recuerdo cuando, hace varios años, conocí esas imágenes "generadas informáticamente" que resultaban tan hermosas, con diseños que se repetían a variadas escalas. Habiéndome informado que se trataba de *fractales*, y que estaban cercanamente relacionadas con la matemática, quise profundizar un poco más. Pero las explicaciones más accesibles que encontré hacían referencia a

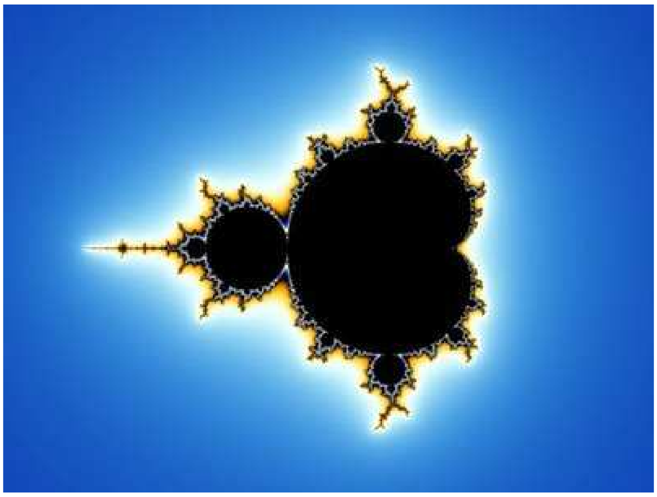


Ilustración 1. Conjunto de Mandelbrot

[1] Se toma cono referencia en este artículo el sistema educativo formal de Uruguay.
[2] http://www.geogebra.org

algunos conjuntos más "sencillos" (y no por eso menos interesantes), pero que no se parecían a los diseños tan bonitos que esperaba; estos últimos aparecían junto con conceptos matemáticos bastante más engorrosos, que ofrecidos a un inexperto (como yo) lograban empañar un poco la belleza de las imágenes.

Intentaremos entonces mostrar un posible camino que nos permita llegar a la creación de estas imágenes, recurriendo al conocimiento matemático necesario para provocarlas, pero preocupados más bien por su aprovechamiento *ad hoc*, y no tanto en su profundización.

En el caso de los alumnos de enseñanza media, esta actividad puede ser útil para ver aplicaciones de algunos contenidos curriculares; y los estudiantes más avanzados podrán profundizar mucho más en estos mismos conceptos.

Además de ir enunciando los contenidos matemáticos vinculados, iremos viendo a la par cómo trabajar con ellos en GeoGebra.

2.1. ¿Qué es un fractal?

El término *fractal* fue acuñado por el matemático polaco Benoît Mandelbrot, y hace referencia a la idea de "partido" o "fracturado". Si entramos en formalidades, Mandelbrot definió un fractal como *"un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica".*

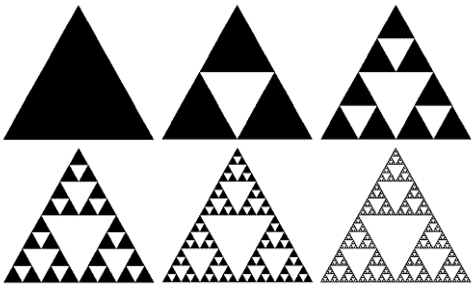


Ilustración 2. Triángulo de Sierpinski

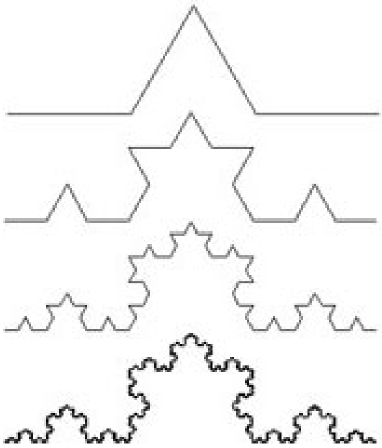


Ilustración 2. Curva de Koch

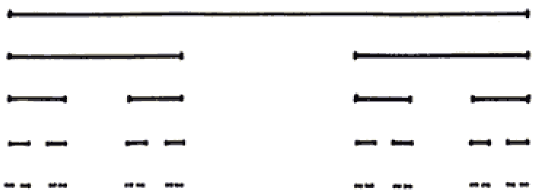


Ilustración 3. Conjunto de Cantor

Nos hemos propuesto no marearnos con estos conceptos avanzados, pero esta idea es suficiente para pensar en figuras que, por ejemplo, tienen área finita y perímetro infinito (¡!). Quizás algunos conjuntos ya clásicos pueda resultar familiares, y que podrían servir de ejemplos bastante sencillos para estas características (como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, o la curva de Koch).

2.2. ¿Qué es una imagen fractal?

Los ejemplos anteriores pueden confrontarse con la definición de fractal, y ver que la cumplen efectivamente, sólo recurriendo a las cualidades geométricas con las cuales fueron construidos. Pero hay otros conjuntos fractales que se definen de una manera un poco más elaborada, y no es tan intuitivo verificar que efectivamente lo son; justamente, algunos de estos son los que pueden generar esas imágenes tan coloridas. Indaguemos un poco más.

Podemos pensar el plano cartesiano, como el conjunto de los afijos de los números complejos. De ese modo, cada punto será para nosotros un número... lo interesante de la generación de estas imágenes será decidir de qué color pintar cada punto del plano para obtener lo que deseamos. Hacia allí vamos.

Consideremos una función f que a cada punto del plano complejo, le asigne otro. Si aplicamos reiteradamente esta función, iremos obteniendo un número complejo al cabo de cada iteración. Supongamos que seguimos iterando, infinitamente... ¿a qué tenderá nuestra sucesión? Básicamente, podrían suceder tres cosas:

- Que los puntos se vayan “acercando” a cierto punto especial
- Que los puntos se alejen exageradamente del origen de coordenadas
- O que tengan algún comportamiento extraño, yendo y viniendo, que no se ajuste a ninguna de las dos categorías anteriores.

Justamente, eligiendo una función f adecuada, podremos decir que el conjunto de los números complejos tales que esta sucesión converge (a algún punto del plano complejo), será un fractal.

Aún tendremos que ver cómo usar este criterio para decidir el color de cada punto, pero veremos que esto estará asociado a cuál es el punto al que la sucesión se acerca (si es que esto sucede), y qué tan rápidamente lo hace.

3. El aporte de la informática

Naturalmente, pensemos que si para cada punto del plano tenemos que iterar una función una cierta cantidad de veces (aún no sabemos cúantas), y de acuerdo a ese comportamiento pintar (¡sólo ese punto!) de un determinado color, para después seguir con otro... el trabajo parece muy arduo.

Aquí se vuelve sustancial al aporte de las TIC, ya que nos permite realizar tareas que serían inviables de otro modo, y gracias a las cuales podemos pretender usar conocimientos matemáticos más avanzados. No se trata simplemente de hacer lo mismo que hacíamos antes pero con la computadora, ni tampoco implica hacer más sencilla una tarea habitual: implica lograr algunas cosas que hasta entonces eran impensadas.

3.1. ¿Por qué GeoGebra?

Hay muchos programas informáticos que son capaces de generar estas imágenes, pero hay algunas características de GeoGebra que lo hacen especial.

Primero, que se trata de un software libre y llevado adelante por una comunidad de técnicos y educadores en matemática pensado especialmente para el ámbito del aula. No está concebido ni para el ingeniero, ni para el matemático: está concebido para el alumno que aprende matemática.

Segundo, que nos ofrece la posibilidad de visualizar simultáneamente un mismo objeto en varios registros de representación. En nuestro caso, será esencial poder asociar un punto del plano, al número complejo correspondiente. A esto se suma la potencialidad gráfica del programa.

Tercero, que nos ofrece una planilla de cálculo integrada en la que será muy práctico realizar las iteraciones de la función generatriz del fractal.

Obviamente, también encontraremos algunas limitaciones, que tendremos que subsanar de la mejor manera. Una de ellas puede ser que el algoritmo que utilizaremos para crear las imágenes será quizás demasiado exigente para el programa (o el equipo en el que funcione). O también, que tendremos que crear hábilmente algunas herramientas específicas para que el software realice lo que necesitamos. Intentaremos plantearlas aquí de la manera más sencilla posible.

3.2. Algunas herramientas indispensables

Una cuestión crucial es la posibilidad de colorear cada punto de acuerdo a un criterio bien definido. Veremos cuál será ese criterio, pero ejemplificaremos cómo opera GeoGebra para pintar un punto de un cierto color.

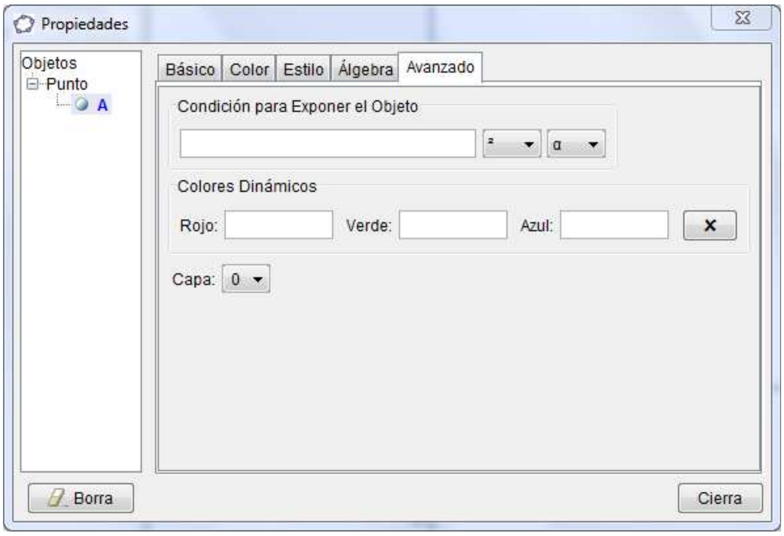


Ilustración 3. Cuadro de propiedades de un objeto

GeoGebra cuenta con la propiedad de *color dinámico*. Esto es, que cualquier objeto puede recibir un color dado por sus componentes en los colores básicos Rojo, Verde y Azul. De ese modo, si asignamos a un punto el 0% en sus tres componentes, se verá negro. Si asignamos el 100% en las tres, se verá blanco. Y de allí en adelante podemos generar una inmensa gama de colores.

Para definir el color de un punto, basta seleccionar el punto con el botón derecho del ratón, elegir la opción *Propiedades* y luego la pestaña *Avanzado*. Allí se verán los cuadros correspondientes para las tres componentes de color.

GeoGebra reconocerá los valores entre 0 y 1 como el porcentaje que asignará de cada color (el 1 corresponde al 100%). Si se ingresa un número que no pertenezca a ese intervalo, GeoGebra lo convertirá usando una función interna, que en principio no nos va a interesar demasiado, ya que tendremos la precaución de usar siempre números del intervalo [0,1]. De todos modos, para los más curiosos, la función utilizada por GeoGebra es:

$$f : \mathrm{C} \rightarrow [0,1] \,/\, f(x) = (-1)^{[x]}\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

siendo [x] la función parte entera de x.

Pero la mayor potencia de esta herramienta está en que las componentes de cada color pueden ser variables, y depender de algún objeto ya creado. En particular, pueden depender de la posición del mismo punto. Por ejemplo, el siguiente dibujo se ha obtenido asignando al punto P las siguientes componentes de color:

Rojo(P)=sin(x(P)); Verde(P)=cos(y(P)); Azul(P)=0.7[3]

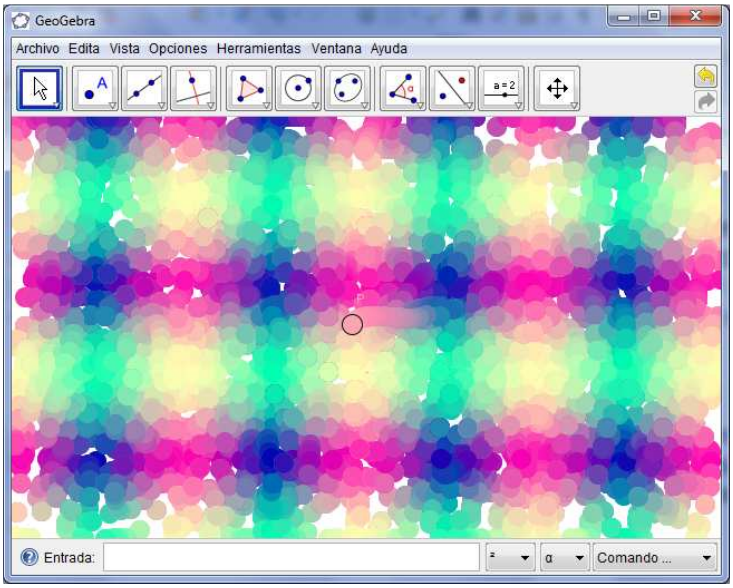


Ilustración 4. Ejemplo de aplicación del color dinámico

Habiendo activado el rastro del punto (con un clic derecho sobre él), hemos logrado que al moverlo fuera dejando en la pantalla una estela de colores según cada posición. También hemos considerado un tamaño bastante grande para el punto, de modo que se aprecie bien el efecto deseado.

Otra función de GeoGebra que nos será de utilidad, es la *Vista hoja de cálculo*, que puede activarse desde el menú *Vista.*

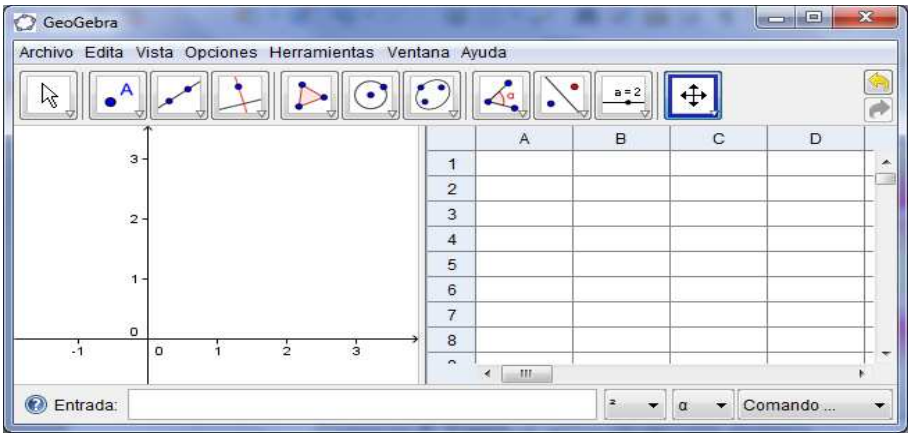


Ilustración 5. Vista hoja de cálculo

[3] Nótese que la función x() devuelve la abscisa de un punto, mientras que y() devuelve su ordenada.

Allí veremos una planilla de cálculo como otras que quizás conozcamos, donde cada celda está identificada con un nombre (por ejemplo, B3). En cualquiera de esas celdas podemos escribir un comando, una función, un número, un objeto geométrico, y GeoGebra lo identificará con el nombre de la celda. De ese modo, si en la celda B3 escribimos **(-2, 6)** GeoGebra creará un punto llamado B3 de coordenadas (-2, 6), que también representará simultáneamente en las vistas algebraica y gráfica.

A propósito, si deseáramos que GeoGebra considerara ese punto como el número complejo asociado, bastará indicárselo haciendo clic con el botón derecho sobre el punto (o su celda), y luego *Propiedades*, eligiendo la pestaña *Álgebra* seleccionaremos *Número complejo*.

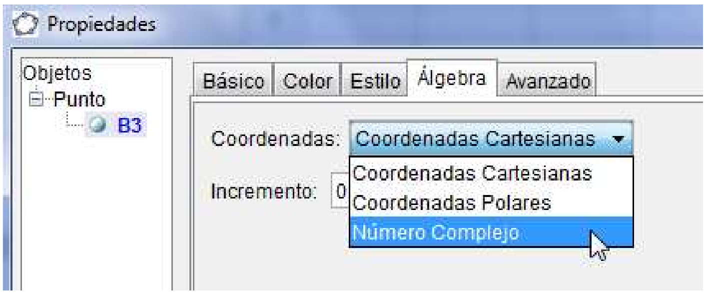


Ilustración 6. Propiedades algebraicas de un objeto

A partir de entonces, en la celda correspondiente veremos la notación binómica del complejo, en lugar de la cartesiana.

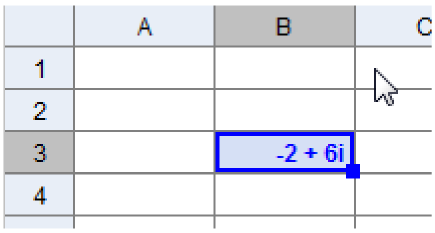


Ilustración 7. Vista de la hoja de cálculo

En la misma hoja de cálculo podemos realizar operaciones con números complejos, e ingresando las fórmulas correspondientes (refiriéndonos a los números por la celda que ocupan), veremos los resultados en las celdas. Si nos interesa conocer la fórmula que dio origen al número visible, basta posar unos segundos el puntero sobre la celda y se mostrará la fórmula. En el siguiente ejemplo, hemos agregado el complejo **3 – i** en la celda B2 y lo hemos sumado al complejo B3, colocando en la celda B4 la expresión **= B2 + B3**

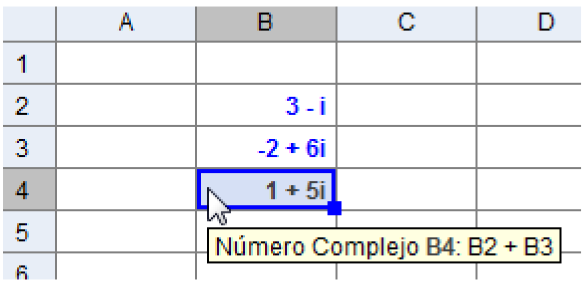


Ilustración 8. Operaciones con complejos

4. Comencemos a dibujar

Ya estamos en condiciones de iniciar nuestro dibujo de una imagen fractal. Comenzaremos eligiendo una función adecuada y sencilla, para que los cálculos internos que deba realizar el programa no sean demasiado exigentes. Luego veremos el criterio de asignación de color a cada punto, utilizando la función elegida.

4.1. El fractal de Newton

Puede haber muchísima variedad en la función que uno elija para generar una imagen fractal, pero las que se agrupan bajo el título de fractales de Newton son bastante sencillas. Responden a una expresión de la forma:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

Aquí *p* es una función polinómica compleja, y se cumple la curiosidad de que los puntos atractores (aquellos candidatos a ser puntos de convergencia de la sucesión que se obtiene al iterar muchas veces la función, sobre un punto determinado), son precisamente las raíces de *p*.

Pongamos por ejemplo que utilizamos el polinomio $p(z)=z^3-1$. Tendremos pues tres raíces complejas, candidatas a ser atractores de cada punto del plano. De modo que implícitamente estamos considerando algunas regiones: los complejos que, luego de varias iteraciones, convergan hacia la primera raíz, pertenecerán a la primera región. Análogamente con la segunda y tercera raíces.

Y si identificáramos cada región con un color, estaríamos casi estableciendo un criterio para pintar todos los puntos del plano... Por ahí seguiremos, pero con calma.

4.2. ¿De qué color pintamos cada punto?

Lo importante es ver cómo va quedando armado el procedimiento. Dado un punto, iteraremos varias veces (ya decidiremos cuántas) la función sobre él. Atendiendo a la imagen obtenida luego de las iteraciones, observaremos a cuál punto atractor se ha acercado, y en función de esa distancia lo pintaremos.

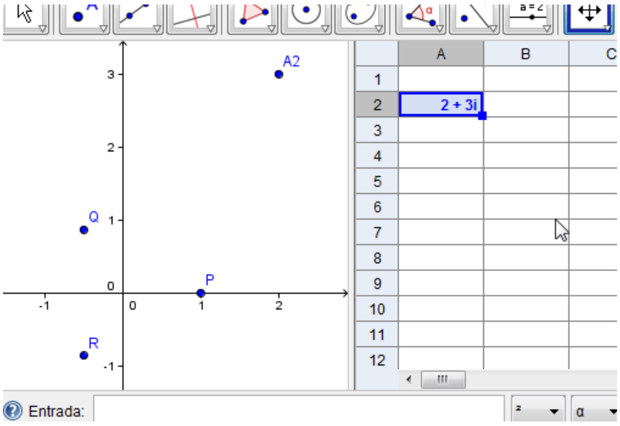
Veamos cómo hacerlo en GeoGebra.

Consideremos un número complejo A2 variable (asociado, inevitablemente, a la celda A2). Por ejemplo, escribamos A2=2+3i.

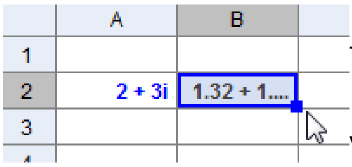
Necesitaremos también definir los tres puntos atractores, que al ser las raíces del polinomio ya mencionado, coinciden con las tres raíces cúbicas de la unidad. Los llamaremos P, Q y R, y para hacerlo más sencillo los introduciremos utilizando la notación polar, como sigue:

P=(1;0)
Q=(1; 2 pi/3)
R=(1; 4 pi/3)

Por el momento, nuestra pantalla tiene el siguiente aspecto:



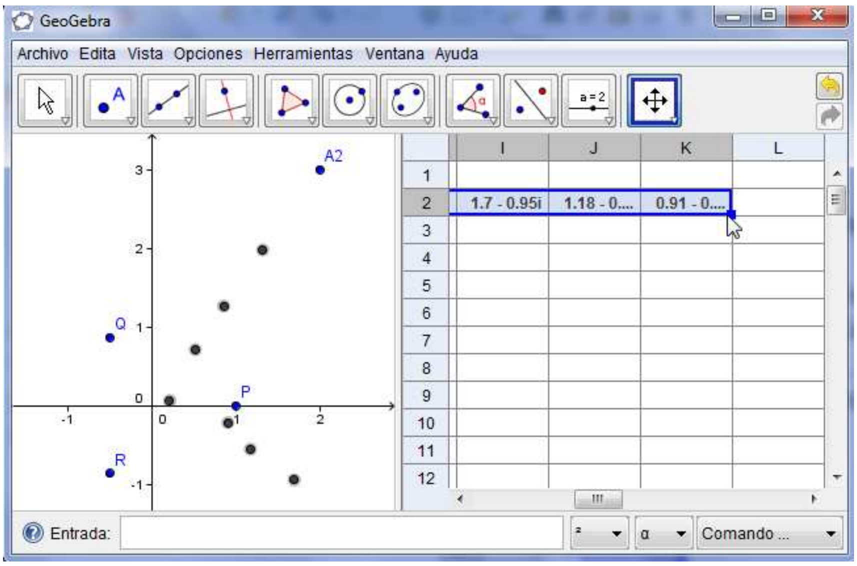
Ahora debemos iterar la función sobre el punto A2, para analizar su comportamiento. Aprovecharemos la hoja de cálculo, e iremos calculando las sucesivas iteraciones en la fila 2, hasta alcanzar un número que nos preestablezcamos (10, por ejemplo).



En la celda B2 ingresaremos la expresión de la función: **=A2–(A2^3–1)/(3 A2^2)**.

Para continuar iterando la función no es necesario volver a escribirla, basta copiar la fórmula hacia las celdas de la derecha, para que GeoGebra actualice las variables en la fórmula. Para ello, seleccionando la celda B2, arrastramos desde el pequeño cuadrado azul que se ve en el extremo inferior derecho de la celda, hasta alcanza la columna K.

Habrán aparecido también todos los puntos resultantes de cada iteración representados en la vista gráfica. Si movemos el punto A2, veremos moverse toda la lista de puntos, y también podremos apreciar cómo se acercan a uno u otro atractor dependiendo de la posición de A2.

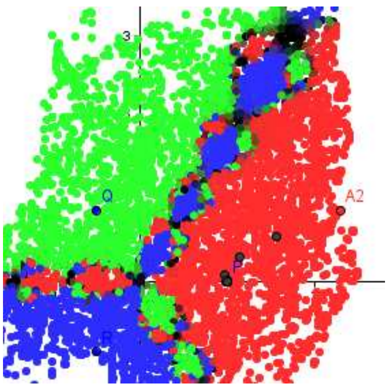


Las imágenes fractales más "profesionales" tienen en cuenta varias cosas para asignar el color de cada punto: no sólo a qué atractor corresponden, sino también la velocidad de convergencia (es decir, cuántas iteraciones son necesarias para que se acerquen al atractor menos de una distancia estipulada).

En nuestro trabajo no nos detendremos en la velocidad de convergencia, simplemente asignaremos el color en función de la cercanía a cada atractor luego de varias iteraciones. Nos ayudará el hecho de haber elegido un polinomio con tres raíces (tres atractores, P, Q y R), ya que asignaremos un color a cada uno. Para que sea evidente a qué región pertenece el punto (A2, en nuestro ejemplo), buscaremos asignar el color dinámico de tal manera que cuanto más cercano esté el punto (K2, en nuestro ejemplo) de un atractor, la intensidad de la componente de color correspondiente sea mayor; y si está alejado, que la componente se vaya anulando.

Fijemos ideas pensando que al atractor P asociaremos el color rojo. Estamos necesitando una función que, según la posición del punto K2 sea cercana a P, ofrezca una imagen cercana a 1; mientras que cuanto más se aleje de P, será más cercana a 0. Aprovechando algunas herramientas del análisis real, elegiremos la función dada por **Rojo(A2) = $e^{-\mathrm{dist}(P,K2)}$**, que en la sintaxis de GeoGebra quedará expresada como **exp(-Distancia[P,K2])**. Obsérvese que esta función cumple con las pretensiones planteadas.

Con esta idea, podemos completar los cuadros del color dinámico de A2 de esta manera: Rojo = $e^{-\mathrm{dist}(P,K2)}$, Verde = $e^{-\mathrm{dist}(Q,K2)}$, Azul = $e^{-\mathrm{dist}(R,K2)}$. De nuevo, si activamos el trazo del punto A2 y lo agitamos pacientemente por la pantalla, veremos la imagen fractal ir apareciendo tímidamente.



Bueno... podemos decir que ¡hemos creado una imagen fractal! Aunque, a decir verdad, está un poco desprolija. ¿Habrá una manera más sencilla de colorear cada punto?

4.3. Ahorrando trabajo

Después de la técnica que hemos desarrollado, es lógico pensar que sería conveniente contar con algún método que pudiera hacer este trabajo automáticamente, y mejor aún si hubiera varios puntos "pintando" la pantalla en forma simultánea. Veremos cómo aprovechar las herramientas de GeoGebra para alcanzar estos dos objetivos.

Para ello, definiremos un conjunto de puntos, creados con la misma idea y propiedades con que hemos creado a A2, pero todos con la misma abscisa (dependiente de un parámetro *a* que luego haremos variar), y muy próximos uno de otro... nos quedará una especia de hilera "vertical" de puntos.

Tendremos un par de precauciones previas. Dejaremos a la vista sólo el punto A2, y ocultaremos el resto para evitar confusiones. Asimismo, reduciremos el tamaño de A2 al mínimo, para que la imagen final sea de una buena resolución.

Ahora sí, definamos el parámetro *a* que será la abscisa de nuestra hilera de puntos. Lo definimos como un deslizador en el intervalo [-3, 3] (esto puede variarse a gusto, de acuerdo con el tamaño de la imagen que quiera lograrase), con un incremento del 0.02 y una velocidad de 0.2.

Aprovechando *a*, definimos en la celda A1 el punto (a, 3). Basta mover el deslizador para constatar que el nuevo punto A1 se mueve en simultáneo. Este punto A1 será un extremo de nuestra hilera: a partir de él, y hacia abajo, iremos colocando los nuevos puntos. El primero en agregarse será A2, que lo redefinimos escribiendo A2=A1+(0,-0.03), lo cual puede interpretarse como una suma de complejos. Obsérvese que esta forma de definir A2 lo hace depender de *a* indirectamente, y al mover el deslizador, se desplaza A2.

Toda la fila 2 de la hoja de cálculo tiene la información necesaria para que el punto A2 funcione correctamente, y además, éste se ha ubicado “un poquito más abajo” del punto A1. Si copiamos la fila 2 en las filas subsiguientes, obtendremos los puntos que necesitamos uno debajo del otro, y se heredarán las propiedades definidas. Seleccionando el rango desde A2 hasta K2, y tomando desde el cuadro azul del extremo inferior derecho, extendamos la selección hasta la línea 200 (puede ser más o menos, según se desee).

Ya está casi listo. Si movemos el deslizador *a*, irá apareciendo el fractal; pero si activamos la animación automática del deslizador (con clic derecho sobre él), la imagen se irá formando lentamente.

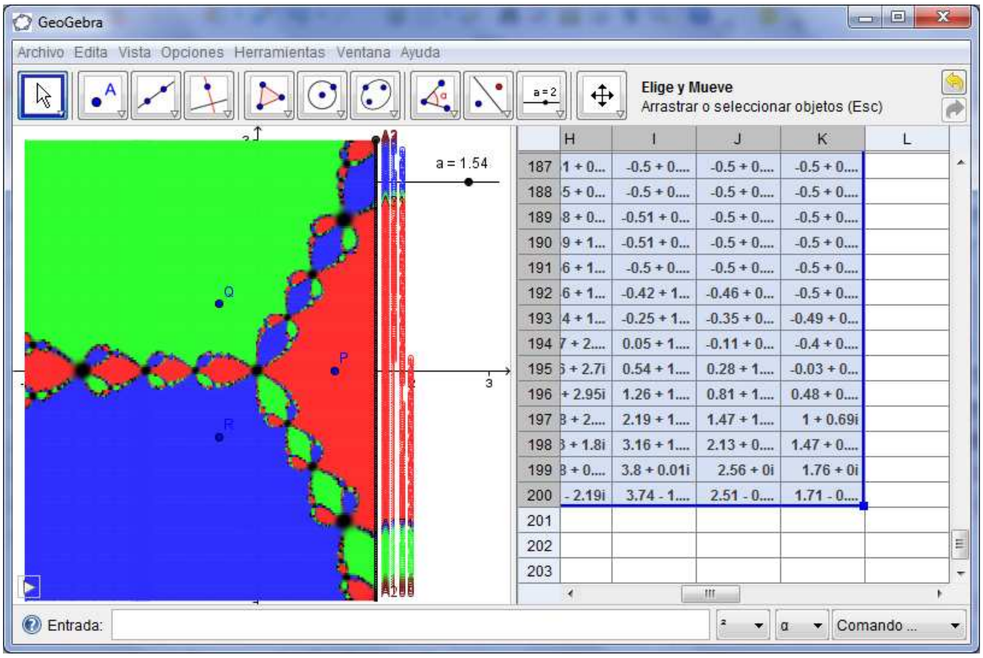
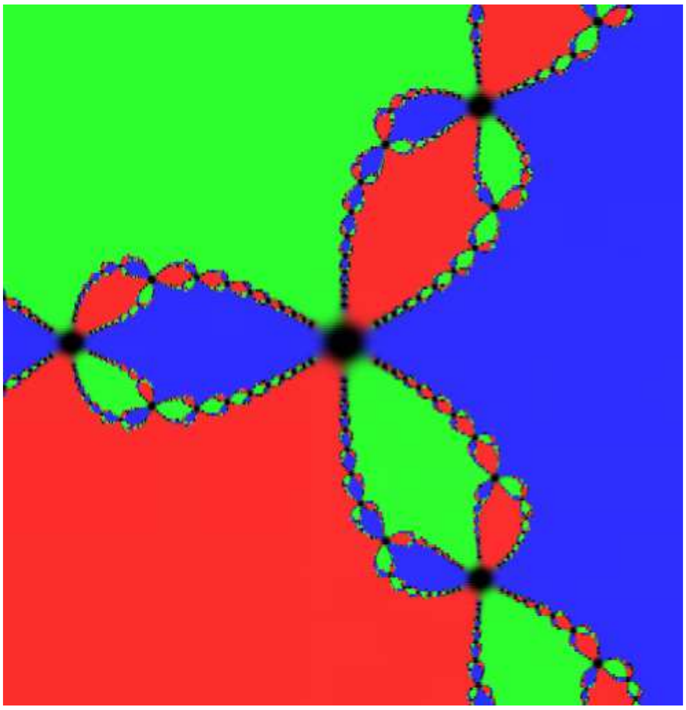


Ilustración 9. "Barrido" de la imagen fractal

Los pequeños coeficientes utilizados se pueden modificar, y eso hará variar la calidad y el tamaño de la imagen resultante, como veremos en breve.

GeoGebra nos permite exportar la vista gráfica en un archivo JPG, de modo que luego es sencillo compartir las imágenes generadas:



4.4. Algunas variantes

Ahora que hemos logrado un archivo en GeoGebra capaz de dibujar una imagen fractal, es el momento de guardarlo, para comenzar a "jugar" con él y así obtener muchísimas nuevas imágenes.

Para ello deberemos ir variando algunos de los parámetros componentes.

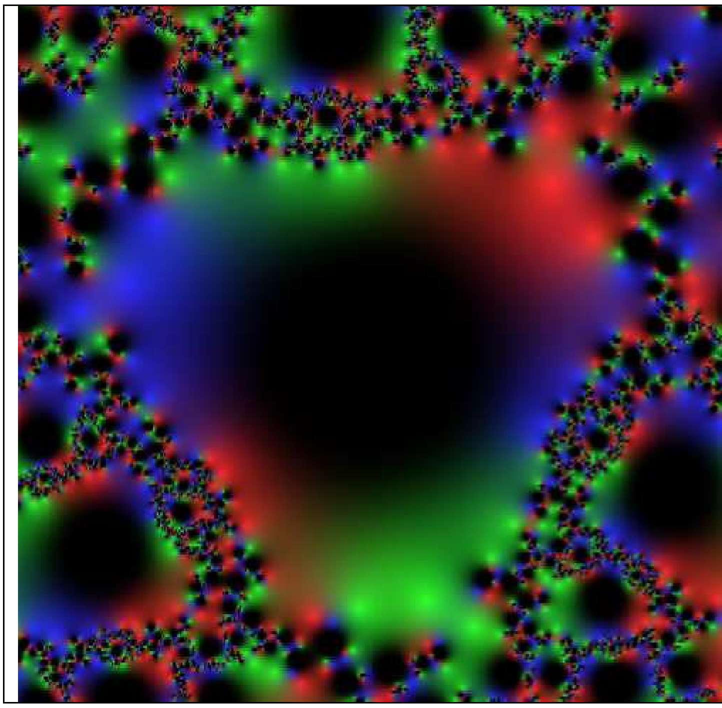
Podemos cambiar el polinomio inicial, ofreciendo nuevos puntos atractores (aunque se simplifica bastante la tarea si se consideran polinomios de tercer grado, de modo que haya sólo tres atractores, uno por color).

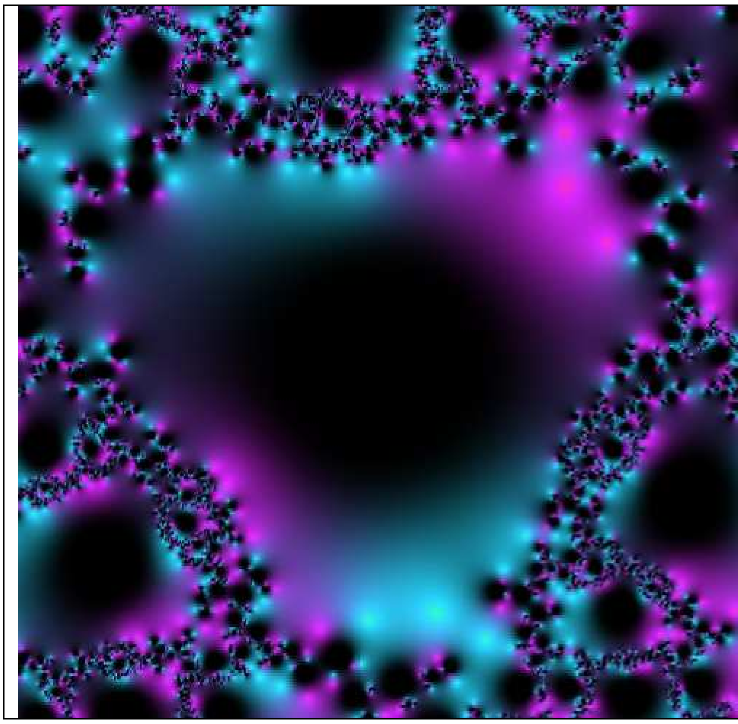
También podemos alterar el polinomio inicial multiplicando el segundo término de la función generadora por un coeficiente (complejo); esos pequeños retoques pueden provocar grandes variaciones en las imágenes.

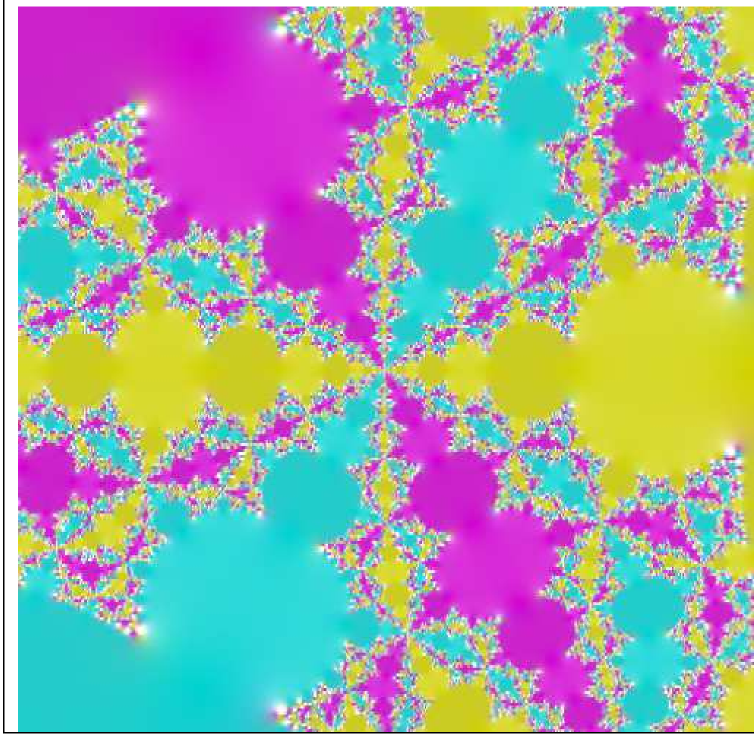
Otro ajuste puede estar en el criterio de asignación de color, abriendo aquí la posibilidad a lo que sea que la imaginación permita concebir. Si se logra idear una función que asigne las componentes de color teniendo en cuenta el tema de los atractores, podemos lograr imágenes muy llamativas.

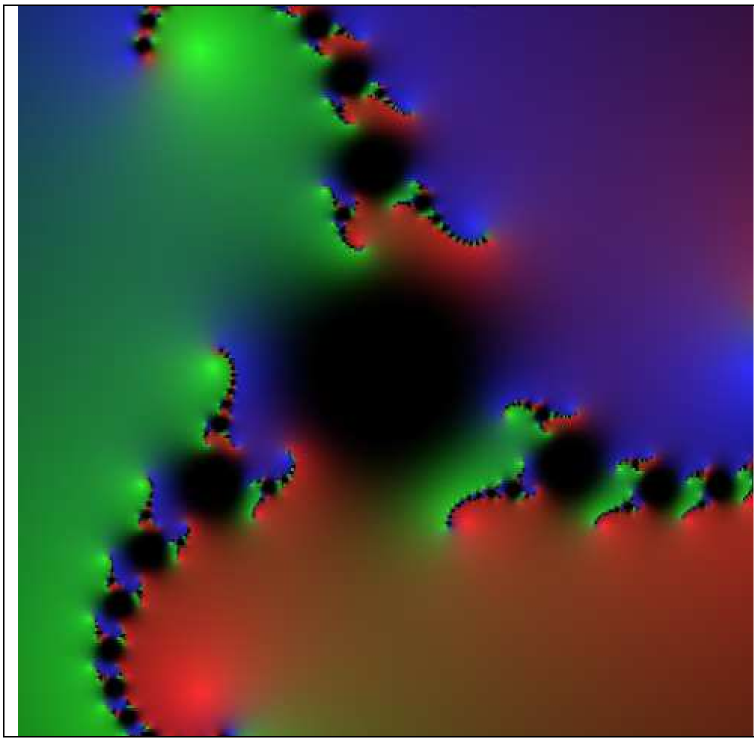
Y para quien se sienta aún más desafiado, podrá seguir buscando nuevas informaciones acerca de los fractales, e intentar utilizar esas funciones probando sus gráficos.

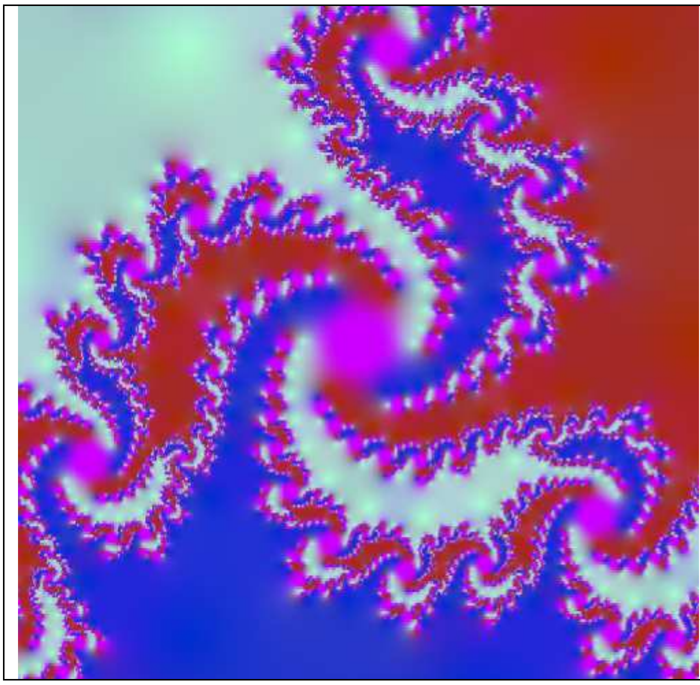
Estas imágenes se han creado todas con pequeñas variaciones de las que acabamos de mencionar, sin cambiar el polinomio inicial (sólo se ha mulitplicado por un coeficiente, o variado la asignación de colores).

	$z_{n+1} = z_n - (1+2i)\dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$

	$z_{n+1} = z_n - (1+2i)\dfrac{z_n^{\ 3} - 1}{3z_n^{\ 2}}$

	$z_{n+1} = z_n - 2\dfrac{z_n{}^3 - 1}{3z_n{}^2}$

	$z_{n+1} = z_n - \dfrac{i}{2} \cdot \dfrac{z_n{}^3 - 1}{3z_n{}^2}$



$$z_{n+1} = z_n - (1+i)\frac{z_n^{\,3} - 1}{3z_n^{\,2}}$$

5. Comentarios finales

Quizás pueda resultar interesante hacer el ejercicio de analizar qué conceptos matemáticos ha sido preciso poner en juego a lo largo de este proceso de creación de imágenes fractales.

Para quienes resulten ya conocidos, puede ser ésta una oportunidad para verlos en acción, y aprovechando el conocimiento de las propiedades asociadas podrán innovar creativamente, provocando nuevas imágenes.

Para los estudiantes que no estén habituados a estos conceptos, se habrán acercado por primera vez a ellos conociéndoles en una faceta agradable y motivadora, y sin dudas será más fácil en el futuro abordarlos desde ángulos más áridos.

En definitiva, se trata de la combinación cuidadosa de varias herramientas que están a disposición de nuestros estudiantes; quedan pendientes las posibles discusiones didácticas que puedan provocarse a partir de la implementación de este tipo de actividades.

Bibliografía

Mandelbrot, B. (1997): *La geometría fractal de la naturaleza.* Tusquets editores, Barcelona.

Geogebra. Web oficial (www.geogebra.org), consultado en setiembre de 2010.

Instituto GeoGebra de Cantabria (www.geogebra.es), consultado en septiembre de 2010.

Fabián Vitabar. Egresado del Instituto de Profesores Artigas (Montevideo, Uruguay), actualmente docente en cursos de enseñanza media y de Formación de Profesores. Dedicado especialmente al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática mediados por TIC. fvitabar@gmail.com