

Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico

María Laura Distéfano, Sebastián Urquijo, Susana González de Galindo

Resumen

Para mejorar el dominio del lenguaje simbólico de ingresantes universitarios a la carrera de Matemática, se diseñó, implementó y evaluó una intervención educativa. Participaron 34 sujetos, de quienes se determinó el dominio del lenguaje simbólico y el razonamiento abstracto. Luego de la intervención, los resultados confirman que la participación en una experiencia educativa orientada específicamente a la enseñanza del lenguaje simbólico produce una mejora significativa en su uso y comprensión.

Abstract

An educational intervention was designed, evaluated and implemented, to improve the domain of symbolic language in freshmen to the University Programs in Mathematics. Data was obtained from 34 individuals, controlling the ability to manipulate symbolic language and abstract reasoning. After intervention, the results confirm that being involved in an educational experience, focused specifically on the teaching of symbolic language produces a major improvement in its comprehension and use.

Resumo

Para melhorar o domínio da linguagem simbólica de ingresantes universitários à carreira de Matemática, desenhou-se, implementou e avaliou uma intervenção educativa. Participaram 34 sujeitos, de quem determinou-se o domínio da linguagem simbólica e o raciocínio abstracto. Depois da intervenção, os resultados confirmam que a participação numa experiência educativa orientada especificamente ao ensino da linguagem simbólica produz uma melhora significativa em seu uso e entendimento.

1. Introducción

En el desempeño de la práctica docente con alumnos de primer año de carreras universitarias que cursan materias de Matemática y, particularmente Álgebra, se observa una dificultad recurrente con el manejo del lenguaje simbólico propio de la disciplina. Creemos que podría deberse al hecho de que los alumnos desconocen el significado y el uso apropiado de muchos de los símbolos matemáticos, y a que no están habituados a la lectura y la escritura simbólica. Esto deriva en problemas académicos, como por ejemplo, la comprensión de la bibliografía específica, ya que deben enfrentar una lectura compuesta mayoritariamente por símbolos.

Por otra parte, un objetivo prioritario de las clases es que los alumnos expresen correctamente las resoluciones de los ejercicios. Sin embargo, la dificultad para leer, escribir y entender el lenguaje simbólico complica esta tarea. Para quienes trabajamos en Matemática resulta impensable escribir una demostración, actividad

primordial del quehacer cotidiano de esta ciencia, sin utilizar el simbolismo algebraico, instrumento con el que se puede expresar de manera concisa y unívoca el pensamiento y las ideas matemáticas. Sin un manejo apropiado del lenguaje simbólico, no es posible introducir al alumno en el desarrollo de la habilidad *demostrar*.

Se debe partir del hecho de que los estudiantes han adquirido, durante los primeros años de escolarización, el lenguaje simbólico utilizado en las operaciones aritméticas. Durante su educación en el nivel medio, han tenido entrenamiento en la traducción algebraica de problemas que conducen a la formulación de ecuaciones. En el nivel universitario, observamos que los estudiantes tienen diversas dificultades, entre ellas expresar propiedades matemáticas en forma simbólica, generalizar, o suponer que el uso de letras está asociado exclusivamente a la representación de incógnitas. Es frecuente que pretendan demostrar la validez de una propiedad mediante un ejemplo concreto, sin percatarse que de esa manera no se contempla la totalidad de los casos posibles.

Si se tiene en cuenta que un aspecto fundamental del lenguaje algebraico es la posibilidad de expresar simbólicamente la generalización de problemas y que esto permite la evolución de la Aritmética al Álgebra (Malisani, 1999), puede considerarse de relevante importancia su enseñanza sistemática al iniciar la formación en esta última.

Es a partir de estas situaciones particulares y suponiendo que podrían deberse a una formación deficiente en el dominio del lenguaje simbólico, que surge la propuesta de investigar los efectos de la enseñanza sistemática de este lenguaje. Se debe destacar que esta propuesta se diferencia de un curso de Lógica en el sentido de que, además del manejo de los símbolos básicos, para una primera aproximación al Álgebra también le concede importancia al aspecto semántico.

Para referirnos al lenguaje simbólico es necesario partir de algunas definiciones elementales provenientes de la semiótica. Para ello se considera que un signo es todo objeto o hecho físico que hace referencia a otra cosa. Entre los mismos se encuentran los *símbolos*, o signos convencionales, en los que la relación entre el significante y el significado es arbitraria, pues no hay ninguna relación natural o analógica que los ligue (Gianella, 1996). El símbolo se caracteriza porque la materialidad observable de la imagen alude a un significado ideal, lo que permite añadir al signo el componente de la abstracción. Dado que el símbolo es una convención semiótica, que aparece una vez que un grupo ha decidido usarlo como vehículo de expresión, para formar parte de ese grupo es necesario conocer el significado y el uso de ese símbolo. En el caso de la comunidad matemática, el sistema simbólico que le es propio debe ser transmitido expresamente a los alumnos que pasan a formar parte de dicha comunidad, es decir, es necesario convertirlos en *intérpretes*.

La noción general de competencia comunicativa [...] requiere tener conciencia de las convenciones concretas, dependientes del contexto, conversacionales o escritas, vigentes, cómo influyen sobre lo que se comunica y cómo han de utilizarse de acuerdo al contexto. [...] Si hemos de considerar las matemáticas como un lenguaje, la competencia comunicativa se convierte en una cuestión importante y la comunicación significativa en una preocupación fundamental (Pimm, 1990, p.27, p.30).

Es decir que el dominio eficaz del lenguaje simbólico adquiere relevancia no sólo desde las posibilidades específicas del quehacer matemático, sino también desde un aspecto comunicacional, vital en todo proceso de enseñanza y aprendizaje. Los alumnos deben ser conscientes que en la comunicación matemática, tal como afirma Guzmán (1997), “*lo que interesa son las situaciones claras, unívocas, que para todos y en todas las circunstancias signifiquen lo mismo*”.

Existe una diferencia fundamental entre la Matemática y otras ciencias que radica en el hecho de que los objetos matemáticos son abstractos y por consiguiente no manipulables como un objeto físico. Por lo tanto, no se puede acceder a ellos sin utilizar un sistema semiótico de representación. Para Duval (2006), los sistemas semióticos tienen un rol clave en el trabajo con objetos matemáticos que va más allá de la designación de los objetos o de la comunicación. Son esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento, pues ningún tipo de actividad matemática puede ser ejecutada fuera de un contexto de representación. Los procesos matemáticos siempre implican sustituir una representación semiótica por otra. La semiosis es, por tanto, considerada como requerimiento para garantizar un primer paso hacia la noesis, tal como afirman Duval (2004, 2006) y D'Amore (2003, 2005). De acuerdo con estos autores, no puede haber noesis sin semiosis, es decir, no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste. La semiosis determina las condiciones de posibilidad y de efectivización de la noesis.

Debe tenerse en cuenta que no todo sistema semiótico constituye un registro semiótico, sino sólo aquellos que permiten una transformación de las representaciones (Duval, 2006). Existen dos tipos de transformaciones, aquellas que se realizan entre representaciones dentro de un mismo registro (*tratamientos*) y las que se realizan entre representaciones pertenecientes a dos registros diferentes (*conversiones*). Es a través de los tratamientos y especialmente de las conversiones, que se tiene acceso a la comprensión de la Matemática y a los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad en esta ciencia.

Sin embargo, las transformaciones entre las distintas representaciones no siempre son inmediatas ni evidentes, particularmente las conversiones. Éstas constituyen la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales (Duval, 2004). Duval (1998, 2006) atribuye tal dificultad al fenómeno que denomina de *no-congruencia*, el cual tiene lugar entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes y tales que la transformación entre ellas no es inmediata ni transparente.

Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios. (...) la conversión, en caso de no congruencia, presupone una coordinación entre los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente. (D'Amore, 2005, p. 32).

Las conversiones resultan de fundamental importancia en el proceso de aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar las mismas favorece la coordinación de distintos registros semióticos, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las traducciones entre el lenguaje coloquial o natural y el simbólico, en ambos sentidos, constituyen conversiones, que en la mayoría de los casos resultan no congruentes, lo que da lugar a dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes, tal como afirma Duval (2006, p. 114):

Y en el aula tenemos una práctica muy específica de uso simultáneo de dos registros. Se habla en lenguaje natural, mientras se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran hacer el tratamiento simbólico transparente.

Lo expuesto soporta la idea de que el manejo adecuado de símbolos matemáticos depende del aprendizaje y del entrenamiento en su uso. Sin embargo, no se puede obviar el hecho de que autores como De Vega (1998) o Sternberg (1986) informan que la capacidad de razonamiento abstracto presenta asociaciones con el manejo de símbolos. Por lo tanto, para favorecer la validez de esta investigación, se consideró relevante tener en cuenta los efectos de esta capacidad.

Las consideraciones expuestas anteriormente justificarían la necesidad y la importancia de enseñar a los alumnos el manejo de distintos registros semióticos utilizados en Matemática y entrenar o ejercitar la habilidad de realizar transformaciones entre las distintas representaciones. En función de ello, este estudio se propuso diseñar, implementar y evaluar los resultados de una intervención educativa para la enseñanza y el entrenamiento en el uso del lenguaje simbólico, orientado específicamente a la adquisición de la habilidad de efectuar conversiones entre dicho lenguaje y el lenguaje coloquial, en ambos sentidos.

2. Metodología

2.1. Sujetos

Partiendo de una población de 62 sujetos, ingresantes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, inscriptos para cursar la asignatura Álgebra Lineal I, se constituyeron dos grupos de 25 alumnos, ninguno de ellos recurrente de la asignatura, pareados en función del dominio inicial del lenguaje simbólico y de la capacidad de razonamiento abstracto. Uno de los grupos fue expuesto a la intervención educativa (Grupo con intervención) y el otro grupo no (Grupo de control sin intervención). Al finalizar la experiencia, se obtuvieron datos de 34 de ellos (17 de cada grupo).

2.2. Instrumentos

Para determinar el dominio inicial del lenguaje simbólico se utilizó una *Prueba de lenguaje simbólico* elaborada para tal fin. La misma fue validada previamente sometiéndola a consideración de docentes de la asignatura, quienes, teniendo en cuenta los objetivos establecidos para esta prueba, estuvieron de acuerdo con los ítems incluidos. En ella se requería de la traducción de expresiones del lenguaje coloquial al simbólico y otras en el sentido inverso. Todos los ítems involucraban conversiones no-congruentes. Las proposiciones enunciadas referían a contenidos curriculares correspondientes a la escuela media, de modo que su contenido conceptual no resultara un obstáculo en el desarrollo del ejercicio. En el encabezado del instrumento se colocó una lista con todos los símbolos necesarios, con sus correspondientes significados, para la resolución de los distintos ítems propuestos,

de modo que el hecho de no recordar alguno de ellos no resultara un factor de error en las resoluciones.

Este instrumento se administró en ambos grupos en dos ocasiones, al inicio de la experiencia (pre-test) y al finalizar el último encuentro de la intervención (post-test).

Por otra parte, para contribuir a la homogeneidad de ambos grupos se evaluó la capacidad de razonamiento abstracto de los sujetos utilizando la *Escala de Razonamiento Abstracto del Test de Aptitudes Diferenciales (DAT)* (Bennett et al., 1992).

3. Procedimiento

Los sujetos del Grupo con intervención recibieron formación sistemática sobre lenguaje simbólico, en tres encuentros presenciales de 90 minutos de duración cada uno. Estos encuentros se realizaron de manera separada del dictado de la asignatura y fueron implementados dentro de las dos primeras semanas del ciclo lectivo. El Grupo sin intervención no tuvo actividad adicional en ese período.

El material didáctico utilizado en la intervención educativa presenta algunos símbolos básicos, con ejemplos de su uso y algunas reglas para su correcta aplicación. La experiencia estuvo restringida a un número reducido de símbolos ($\in, \notin, \wedge, \vee, \subset, \supset, \forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) que forman parte de lo que Pimm (1990) denomina *logogramas*. Son aquellos símbolos que han sido inventados especialmente para referirse a conceptos totales, sustituyen a palabras completas, y no se utilizan fuera de un contexto matemático. Esta restricción estuvo basada, por un lado, en seleccionar los símbolos que se consideraron de mayor necesidad para la introducción al estudio del Álgebra y, por otra parte, en el hecho de que los alumnos eran ingresantes y no poseían aún los conocimientos necesarios para incluir los símbolos que corresponden a conceptos más avanzados. Como en la Prueba de lenguaje simbólico, las propiedades y proposiciones con las que se trabajaron, correspondían a contenidos de la escuela del nivel medio, con el objetivo de que resultaran conocidas por el alumno y que su contenido semántico no complejizara la situación de aprendizaje del lenguaje simbólico.

La ejercitación correspondiente a los contenidos desarrollados en el material didáctico se elaboró con actividades que tienen dificultad creciente, de manera que los alumnos fueran adquiriendo de forma gradual las habilidades de lectura y escritura con símbolos.

Las tareas propuestas fueron de diversos tipos, a los efectos de no sistematizar la ejercitación, de favorecer la búsqueda de resoluciones, de convertir en dinámica la actividad y de variar el nivel de dificultad. En tal sentido, se elaboraron ejercicios de respuesta cerrada, de respuesta abierta, de completamiento, de doble alternativa y de apareamiento o correspondencia. En el Apéndice se muestran algunos ejemplos de esta ejercitación.

Durante el trabajo para efectuar conversiones del lenguaje coloquial al simbólico, el objetivo fue que los alumnos observaran que la expresión resultante no fuera ambigua sino que, por el contrario, contuviera todos los datos de manera precisa y completa. Cuando se abordaron las conversiones en el sentido inverso, se puso el énfasis en que la traducción no fuera símbolo a símbolo (que es lo que los

alumnos tienden a hacer, como si se tratara de una conversión congruente), sino en el sentido general de la afirmación, es decir que se atendiera al contenido semántico de la propiedad a expresar.

Debe tenerse en cuenta que el trabajo implementado en esta experiencia no corresponde a un curso de lógica, si bien se utilizan conceptos provenientes de ella. La lógica maneja símbolos y estructuras, independientemente del contenido. En este caso se focalizó también en el aspecto semántico, como un modo de establecer el nexo entre la expresión coloquial y la simbólica.

También se ejercitó la negación de expresiones, como una herramienta preparatoria para el aprendizaje de los métodos de demostración, ya que tanto los razonamientos por el contrarrecíproco como por el absurdo requieren la negación de enunciados.

4. Resultados

El análisis descriptivo de los resultados de la administración del pre-test para establecer los conocimientos previos de cada sujeto sobre el lenguaje de símbolos y del DAT para evaluar la capacidad de Razonamiento Abstracto, se presentan en la Tabla I.

Grupo	Pre-test Dominio del lenguaje				Razonamiento Abstracto			
	Media	Máximo	Mínimo	DS	Media	Máximo	Mínimo	DS
Sin intervención	3.15	7.00	0.50	1.66	66.00	99	15	26.18
Con intervención	2.94	4.50	0.50	1.11	66.53	99	30	25.83

Tabla I. Estadísticos descriptivos del Pre-test y de la capacidad de Razonamiento Abstracto en cada grupo

El análisis de comparación de medias para dos muestras independientes confirmó la ausencia de diferencias estadísticamente significativas entre los grupos al inicio de la experiencia, tanto en el dominio del lenguaje simbólico ($t=0.425$; $p=0.674 > 0.05$) como en la capacidad de razonamiento abstracto ($t=-0.059$; $p=0.953 > 0.05$). Estos resultados permiten inferir la homogeneidad de los grupos al comienzo de la experiencia.

Luego de la intervención educativa, se procedió a determinar nuevamente el nivel de dominio del lenguaje simbólico de todos los sujetos de la investigación (post-test). Los resultados se presentan en la Tabla II.

Grupo	Media	Máximo	Mínimo	DS
Sin intervención	4.12	7.00	1.50	1.68
Con intervención	7.68	9.50	5.50	1.21

Tabla II. Estadísticos descriptivos del dominio del Lenguaje Simbólico en el Post-test para cada grupo

El análisis de las diferencias de medias para dos muestras independientes, mostró una diferencia significativa entre ambos grupos ($t=-7.079$; $p=0.0 < 0.05$), confirmando los efectos positivos de la intervención.

Con el objeto de analizar detalladamente los resultados de la intervención pedagógica se calculó para cada alumno un diferencial de aprendizaje, consistente en la resta entre la puntuación obtenida en el post-test y la puntuación obtenida en el pre-test, a fin de conocer la diferencia de conocimientos específicos obtenidos durante el desarrollo de la intervención. De esta manera se obtuvo información sobre el nivel de evolución o progreso en el dominio de una habilidad y no en los valores absolutos obtenidos en un determinado momento. En la tabla III se presentan los valores de los estadísticos descriptivos del diferencial de aprendizaje en cada grupo.

Grupo	Media	Máximo	Mínimo	DS
Sin intervención	0.97	3.50	-2.00	1.51
Con intervención	4.73	7.50	2.00	1.54

Tabla III. Estadísticos descriptivos del diferencial de aprendizaje del dominio del lenguaje simbólico para cada grupo

Se realizó una prueba t de diferencias de medias para muestras independientes, confirmando la existencia de diferencias estadísticamente significativas en las puntuaciones medias de los diferenciales de aprendizaje de cada grupo ($t=-7.179$; $p= 0.0 < 0.05$).

Como el puntaje obtenido por cada alumno en el post-test podía ser mayor, igual o menor que el puntaje alcanzado en el pre-test, la resta entre ambos podía tomar valor positivo, cero o negativo. De esta manera, los valores que tomó dicho diferencial se agruparon en tres subconjuntos para su análisis: diferenciales positivos, diferenciales nulos y diferenciales negativos. Así, un diferencial positivo evidenció aprendizaje del tema, el diferencial nulo indicó que no hubo modificaciones en relación con los saberes con que el alumno contaba al inicio de la experiencia y un diferencial negativo podría suponer que, al resolver las actividades del pre-test, no se aplicaron conocimientos sino que la resolución pudo haber sido realizada de manera arbitraria o azarosa. Resulta entonces de interés analizar el modo en que los diferenciales se distribuyeron en cada grupo respecto de las categorías mencionadas.

De acuerdo con Duval (1998, 2001, 2004, 2006), la coordinación entre los distintos registros semióticos es de capital importancia para el aprendizaje de la Matemática, razón por la cual esta investigación puso especial énfasis en la adquisición de la habilidad para realizar dichas conversiones representadas por las traducciones en ambos sentidos. Por lo tanto, se exploraron por separado las respectivas distribuciones concernientes a las traducciones del lenguaje simbólico al coloquial y del coloquial al simbólico calculándose en cada caso un diferencial (diferencial parcial). Este análisis fue considerado de interés particular debido a que estas dos tareas de traducción están asociadas a las conversiones entre representaciones en distintos registros semióticos. Los porcentajes de los diferenciales parciales se calcularon como el promedio entre los porcentajes de los diferenciales de cada uno de los tres ítems de ambos tipos de traducciones. Los resultados del diferencial total y de los diferenciales parciales se presentan en la Tabla IV.

Grupo	Aprendizaje del lenguaje simbólico			Traducción del lenguaje simbólico al coloquial			Traducción del lenguaje coloquial al simbólico		
	Positivo	Negativo	Nulo	Positivo	Negativo	Nulo	Positivo	Negativo	Nulo
Sin intervención	64.7 %	17.6 %	17.6 %	17.6 %	5.9 %	76.5 %	19.6 %	11.8 %	68.6 %
Con intervención	100 %	0%	0 %	68.6%	3.9 %	27.5 %	51%	5.9 %	43.1 %

Tabla IV: Distribución, en cada grupo, del diferencial de aprendizaje total y los diferenciales parciales en las categorías establecidas.

A los efectos de analizar si las proporciones en las que se distribuyen los porcentajes son significativas, se efectuó un test chi-cuadrado para proporciones en cada caso. Para el Aprendizaje del lenguajes simbólico (diferencial total) se obtuvo que existen diferencias significativas ($p=0.026 < 0.05$).

5. Discusión de los resultados

Los resultados evidenciarían mejoras significativas en el dominio del lenguaje simbólico luego de una intervención educativa. Las pruebas efectuadas sobre las puntuaciones correspondientes al post-test de dominio del lenguaje simbólico y sobre el diferencial de aprendizaje, permiten aportar evidencias empíricas de las diferencias entre los grupos en ambos casos. La media de las puntuaciones en el post-test de los sujetos que participaron de la intervención fue significativamente mayor que la media de las puntuaciones de los sujetos que no estuvieron expuestos a ninguna intervención específica sobre el lenguaje simbólico. Esto confirmaría que la participación en una experiencia educativa orientada específicamente a la enseñanza del lenguaje simbólico produce una mejora significativa en el dominio del mismo. Debe destacarse la magnitud de esta mejora, ya que mientras que los sujetos que no participaron de la experiencia incrementaron su dominio del lenguaje simbólico menos de un punto en una escala de diez, los sujetos que recibieron formación sistemática, mejoraron su desempeño en casi cinco puntos en la misma escala. Los valores máximo y mínimo obtenidos en el grupo sin intervención no se modificaron, o variaron levemente, mientras que en el grupo con intervención aumentaron en cinco puntos.

El análisis de los diferenciales de aprendizaje permite una evaluación más detallada de los efectos de la intervención educativa. El diferencial de aprendizaje promedio del grupo con intervención supera al del grupo sin intervención en casi cuatro puntos con una desviación estándar semejante. La ausencia de diferenciales negativos indica que ningún estudiante de los que participaron de la experiencia tuvo un desempeño inferior en el post-test, mientras que en el grupo sin intervención sí los hubo en estas condiciones. La diferencia entre el pre-test y el post-test indica que, en términos de la evolución en el dominio del lenguaje simbólico, el grupo con intervención superó en cuatro puntos al grupo sin intervención.

Resulta importante destacar que durante el período de tiempo transcurrido entre la administración del pre-test y del post-test, todos los sujetos asistieron a las clases regulares de las asignaturas programáticas, familiarizándose con el lenguaje simbólico, lo que permitiría explicar los avances en el dominio del lenguaje simbólico de los alumnos que no participaron de la intervención educativa. Sin embargo, si bien este valor de los diferenciales positivos en el grupo sin intervención puede resultar elevado a primera vista (64.7%), no debe dejar de considerarse que la

media de dicho grupo fue $\bar{x}_{si}=0.97$, mientras que la del grupo con intervención fue $\bar{x}_{ci}=4.73$, y esta diferencia resultó estadísticamente significativa. Esto permite concluir que si bien el grupo sin intervención ha mostrado en más de la mitad de los casos progresos en el aprendizaje y dominio del lenguaje simbólico, en términos cuantitativos ese aprendizaje es significativamente menor que el del grupo con intervención.

Analizando las distribuciones para los dos tipos de traducción, puede decirse que, en ambos casos, la intervención educativa permitió a más de la mitad de los alumnos mejorar la habilidad de la traducción del lenguaje simbólico al lenguaje coloquial y viceversa.

Respecto de la distribución de los diferenciales de aprendizaje positivos, nulos y negativos en las traducciones de lenguaje simbólico a coloquial, es destacable el hecho de que la mayoría de los sujetos del grupo sin intervención (76,5%), obtuvo en estas traducciones un diferencial nulo, lo cual indica que no hubo aprendizaje, mientras que en el grupo con intervención este porcentaje se limitó tan sólo a un 27.3%. El diferencial positivo muestra una relación inversa a la anterior en esta tarea, puesto el 17.6% del grupo sin intervención mejoró, en tanto que en el grupo con intervención el beneficio se observó en el 68.6%. Esto muestra una evolución notable en el grupo con intervención, evidenciando las mejoras en el dominio de la lectura y traducción de expresiones simbólicas.

En este tipo de traducción, el error observado con mayor frecuencia fue la transcripción símbolo a símbolo, en lugar de tener en cuenta el contenido semántico de las expresiones presentadas en lenguaje coloquial. En términos de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1998, 2006), realizaron conversiones pretendidamente congruentes entre representaciones de distintos registros semióticos, cuando en verdad éstas eran no-congruentes. Los alumnos buscaron mantener la correspondencia semántica entre las unidades significantes y la igualdad de orden entre dichas unidades, evidenciando el fenómeno de no-congruencia que, según D'Amore (2005), resulta uno de los obstáculos más estables en el aprendizaje de la Matemática.

Es preciso destacar que la Prueba de lenguaje simbólico incluía una lista con todos los símbolos necesarios para su resolución acompañados de su significado. A pesar de ello, los resultados permitirían sustentar la idea de que conocer el significado de un símbolo no es suficiente para comprender su uso ni para leer correctamente una expresión simbólica. Esta observación es acorde con la afirmación de D'Amore (2005) en la que expresa que la coordinación entre los registros para efectuar conversiones no-congruentes no es de construcción espontánea, puesto que la sola descripción de los significados de los símbolos no bastó para que las conversiones requeridas en la prueba fueran correctamente resueltas.

En el caso de las traducciones del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico, se mantiene la misma relación. El porcentaje de diferenciales nulos en el grupo sin intervención es elevado (68.6%), mientras que en el grupo con intervención se limita al 43.1%. El porcentaje de diferenciales positivos, es menor en el grupo sin intervención (19.6%) que en el grupo con intervención (51%), poniendo de manifiesto la mejoría que en la escritura de expresiones simbólicas. La diferencia del desempeño de ambos grupos disminuyó en este caso. Este hecho podría explicarse

porque el uno de los incisos del ejercicio presentaba un problema cuya traducción simbólica daba lugar a una ecuación y la habilidad de traducir problemas a ecuaciones es una de las actividades más ejercitadas en la educación preuniversitaria, lo que implicaría que una importante cantidad de alumnos la resolviera correctamente.

6. Conclusiones

Este estudio tuvo como objetivo principal el diseño, la implementación y la evaluación de una intervención educativa para enseñar de manera sistemática el uso del lenguaje simbólico. Los primeros análisis permiten afirmar que los alumnos que ingresan a las carreras de Matemática lo hacen con escaso conocimiento y habilidad en el uso y manejo del lenguaje simbólico. Se comprobó que el sólo hecho de conocer el significado literal de un símbolo no es suficiente para utilizarlo correctamente, ni para la lectura ni para la escritura de expresiones simbólicas de manera apropiada.

Los resultados de las pruebas efectuadas confirmaron las diferencias de la evolución en el dominio del lenguaje simbólico en los alumnos que participaron de dicha intervención, demostrando un desempeño superior en la lectura, la escritura y la aplicación del lenguaje simbólico. Por lo tanto, este estudio provee evidencias empíricas de que es posible enseñar de manera sistemática, en un tiempo relativamente breve, mejorando significativamente el dominio del lenguaje simbólico, herramienta propia y fundamental del quehacer matemático.

Bibliografía

- Bennett, G.; Seashore, H.; Wesman, A. (1992). *Tests de aptitudes diferenciales. Forma T*. Paidós, Buenos Aires.
- D'Amore, B. (2003). *La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución*. Conferencia dictada en el V Simposio de Educación Matemática, 6 de mayo de 2003, Chivilcoy, Bs. As., Argentina. Emat Editora, Chivilcoy.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Reverté, México.
- De Vega, M. (1998). *Introducción a la psicología cognitiva*. Alianza, Madrid.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (173-201). Grupo Editorial Iberoamericano, México.
- Duval, R. (2001). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics*. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht, Netherlands.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, Colombia.
- Duval, R. (2006). "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 61: 1, 103-131.
- Gianella, A. (1996). *Lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia*. El ateneo, Buenos Aires.
- Guzmán, M. de (1997). "Del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático". *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"*, 38, 19-36
- Malisani, E. (1999) "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento Algebraico. Visión histórica". *Revista IRICE*, 13, 105-134

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Morata, Madrid.
 Sternberg, R (1986). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Labor, Barcelona.

Apéndice

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, parte de la ejercitación incluida en el material utilizado durante la intervención educativa.

- Ejemplo 1:

Completar cada expresión para que resulten equivalentes:

En palabras	En símbolos
a) Todos los númerosson que 1 $\in \mathbb{N} \ n \geq 1$
b) son mayores que 0 y menores que 1	$\exists x \in \mathbb{R}$
c) Cada número entero es que su $x < x + 1$
d) Existe un único número real que $x^2 = 0$
e) Algunos números naturales son $x = 2.k, \ k \in \mathbb{N}$
f) Si se multiplica un número real positivo por uno negativo se obtienesi $x > 0 \wedge$ $\Rightarrow \ x \cdot y < 0$

- Ejemplo 2:

Unir cada expresión de la columna izquierda con alguna que sea equivalente en la columna derecha.

I- $\forall a \in \mathbb{R} \ \forall b \in \mathbb{R} \ a + b = b + a$

II- $\forall x \in \mathbb{N} \ x > 0$

III- $\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists p \in \mathbb{Z} \ p = 3.n$

IV- Existe un número real a tal que su producto por cualquier otro número real da a .

V- Para todo número real, existe un número entero mayor que él.

a) $\exists p \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{Z} \ p = 3.n$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists p \in \mathbb{Z} \ x < p$

c) $\exists a \in \mathbb{R} : a \cdot b = a \ \forall b \in \mathbb{R}$

d) $\forall a \in \mathbb{Z} \ \forall b \in \mathbb{Z} \ a + b = b + a$

e) $\exists x \in \mathbb{N} \ x \leq 0$

f) $\exists p \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{R} \ x < p$

g) $\exists x \in \mathbb{N} \ x > 0$

h) $\exists a \in \mathbb{R} : a \cdot b = a$

i) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a + b = b + a$

j) $\forall m \in \mathbb{Z} \ \exists q \in \mathbb{Z} \ q = 3.m$

- Ejemplo 3:

Escribir simbólicamente las siguientes expresiones:

a) Todo número entero sumado a su opuesto da cero.

b) Cualquier número real sumado a cero da el mismo

c) No todos los números enteros son positivos.

- d) Existe un único número entero mayor que 2 y menor que 4.
- e) Ningún número real es mayor que sí mismo.
- f) No existe ningún número entero mayor que 2 y menor que 3.

• Ejemplo 4:

Escribir en lenguaje coloquial las propiedades expresadas en forma simbólica:

- a) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x - 1 < x$
- b) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad x : x = 1$
- d) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x < 0$
- e) $\nexists n \in \mathbb{N} \quad n < 1$
- f) $\forall x \in \mathbb{N} \quad x = 2.k \vee x = 2.k + 1 \quad , \quad k \in \mathbb{N}$

• Ejemplo 5:

Determinar la verdad o falsedad de las expresiones dadas. Para las que resulten ser verdaderas, mostrar un ejemplo y para las falsas, dar un contraejemplo.

- a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x.y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$
- b) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad z = (x + y) / 2$
- c) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{N} \quad a \leq b$
- d) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

María Laura Distéfano. Profesora en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata. mldistefano@fi.mdp.edu.ar

Sebastián Urquijo. Licenciado en Psicología. Ms. en Psicología Educacional. Dr. en Psicología Educacional. Docente e investigador del Centro de Investigación en Procesos Básicos, Metodología y Educación, Facultad de Psicología, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. CONICET. urquijo@mdp.edu.ar

Susana González de Galindo. Licenciada en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina. sgalindo@fbqf.unt.edu.ar