UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 4

Diciembre de 2005

Índice

Diciembre de 2005, Número 4, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tendrá una periodicidad trimestral, de modo que se publicarán cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 3 - 4
ISSN: 1815-0640

Editorial

Dedicamos este número de **UNIÓN** a la enseñanza de los algoritmos de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.

En los últimos años, tanto los currículos de los diferentes países, como las publicaciones en Educación Matemática, han planteado una enseñanza de los números y sus operaciones que aboga por conectar el aprendizaje numérico a la resolución de problemas, y por dedicar menos tiempo a los cálculos de lápiz y papel, en favor del cálculo mental, de la estimación y del uso de la calculadora.

También se señala la necesidad de fomentar que los alumnos desarrollen sus propias estrategias para efectuar las operaciones, sabiendo, con antelación, que algunas estrategias estarán cerca de los algoritmos tradicionales y otras no. Esto choca con la práctica más habitual en la enseñanza de las operaciones, que se ha caracterizado por presentar únicamente el algoritmo tradicional para cada operación. Numerosas investigaciones indican que, si se les da la oportunidad, los alumnos pueden inventar de forma natural, métodos de cálculo que tienen sentido para ellos.

La cuestión es que actualmente nos encontramos un panorama muy diverso en el aula. A pesar de las orientaciones curriculares o de las tendencias más recientes, la mayoría de los alumnos siguen aprendiendo los algoritmos tradicionales y realizando mucha práctica algorítmica por repetición. Son menos las aulas en las que se trabaja de manera frecuente con la calculadora, se fomenta el cálculo mental y la estimación, la búsqueda de diferentes estrategias de cálculo o en las que se permite a los alumnos inventar y operar con sus propios algoritmos, sin llegar a aprender los algoritmos tradicionales. En otras, por ejemplo, primero se deja a los alumnos desarrollar sus estrategias y posteriormente, se les presentan los algoritmos tradicionales.

Desde la revista **UNIÓN** queremos dejar patente el momento actual que estamos viviendo en el aprendizaje de los algoritmos. Es por ello que los artículos que pueden leer en este número reflexionan sobre algunas de estas cuestiones.

El trabajo de José Antonio Moscoso, nos muestra los cambios que se han planteado en la enseñanza de los números y las operaciones en México a partir de la reforma curricular de 1993, en la que se resalta, especialmente, la conexión de las operaciones aritméticas con la resolución de problemas. Bernardo Gómez realiza una revisión del tratamiento del cálculo mental en el aula, a lo largo de la historia en España y aporta ideas para su trabajo actual. José Antonio Fernández distingue entre la enseñanza de los algoritmos *sumisos* e *innovadores* y aporta ideas de cómo desarrollar en el aula estrategias significativas para los alumnos. En el artículo de

Jesús Mario Iglesias se defiende un tratamiento de los algoritmos no tradicionales en la escuela, apoyándose en el cálculo mental y uso de la calculadora. Dentro del Programa “Escuelas Efectivas” en Oruro (Bolivia), Elizabeth Chila y Frida Medrano muestran ejemplos de actividades que han desarrollado en sus aulas, en las que las matemáticas se integran con otras áreas y se trabajan algoritmos diferentes a los tradicionales. Por último, Josep Cabrera expone, después de una experiencia de aula, las ventajas que puede tener el seguir enseñado los algoritmos tradicionales en la primaria para posteriores conceptos matemáticos que se desarrollan en la Secundaria.

Existen distintos enfoques. Invitamos a la reflexión.

Alicia Bruno y Antonio Martín Adrián

Miembros del Comité Editorial de UNIÓN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 5 -16
ISSN: 1815-0640

En torno a la institucionalización del saber matemático en el aula: el caso de la reforma curricular mexicana de 1993

José Antonio Moscoso Canabal

Resumen

A partir de 1993 los maestros de educación primaria en México, deben impartir la asignatura de matemáticas según una propuesta curricular oficial que presentaba cambios importantes en el enfoque didáctico con respecto a propuestas anteriores. Esta propuesta se apuntaló con un curso nacional de actualización desde 1995. Este artículo trata de las características de esta reforma curricular, y de los alcances y limitaciones que los profesores reconocen específicamente en relación con la institucionalización de los saberes matemáticos en el aula.

Abstract

This research basically documents some of the new mathematics teaching techniques for elementary school proposed on the 1993 *Reform* and their acceptance among teachers.

La caracterización de la propuesta curricular

En México, después de un largo proceso iniciado en 1990, que incluyó una consulta nacional, una “prueba operativa” y los programas emergentes de 1992, la orientación general que se imprimió a los programas y materiales para la enseñanza de las matemáticas en el nivel de primaria, en 1993, se inscribe en una tendencia mundial que enfatiza la actividad de resolución de problemas como fuente del aprendizaje y como origen de una diversidad de significados de las nociones a enseñar (Ávila, 1991; Balbuena et. al., 1991). Aunque este enfoque es general y adopta interpretaciones particulares no siempre homogéneas, inclusive en los distintos materiales que componen la propuesta curricular oficial, es posible afirmar que supone cambios relativamente profundos con respecto a las prácticas de la enseñanza de las matemáticas que prevalecen en el aula.

En el área de matemáticas el acento de la reforma curricular se puso, no tanto en la incorporación de nuevos contenidos, sino más bien en la secuenciación de los que se habían venido trabajando y en la forma de trabajarlos como objetos de enseñanza al incorporar aspectos de los contenidos matemáticos no contemplados hasta ese momento, como por ejemplo: los distintos contextos semánticos y sintácticos en los que adquieren sentido la adición, la división o las fracciones. En síntesis, la parte más importante de la propuesta, con la cual se educa a niños y niñas de seis a doce años de edad, se centró en aspectos metodológicos de la enseñanza y en el enfoque de los cursos. (Mancera, 1991; Ávila, 1991; Balbuena, et. al. 1991). Precisemos algunos de los más importantes.

Sobre el enfoque

El principio didáctico y epistemológico según el cual es posible que los alumnos desarrollen determinados conocimientos al resolver problemas de matemáticas, se opone a una práctica muy antigua y arraigada en la que los problemas se plantean únicamente para *aplicar* conocimientos previamente enseñados (Block et al., 1995).

El hecho de partir de la resolución de problemas, supone que los alumnos tienen conocimientos previos con los que pueden abordar una situación didáctica nueva, conocimientos que no les han sido enseñados formalmente, lo cual podría entrar en contradicción con la tendencia a considerar como disponibles únicamente los conocimientos que han sido enseñados a los alumnos en la escuela.

La resolución de problemas, como enfoque, supone también una valoración positiva de los conocimientos precarios, incompletos, aún no bien formulados e incluso parcialmente falsos que los alumnos logran poner en juego en un proceso constructivo, lo cual entra en contradicción con la tendencia a reconocer como válidos únicamente los conocimientos que se expresan de manera explícita, con el lenguaje convencional, es decir, los conocimientos en su forma culturalmente institucionalizada (Block et al., 1995).

Por otra parte, si bien las consideraciones anteriores han sido identificadas como "constructivistas", es necesario precisar que, en el mismo nivel teórico, existen distintas interpretaciones del constructivismo cuando de enseñanza se trata[1]. Destaquemos dos: un acercamiento identificado como "constructivismo radical" que pone énfasis en el desarrollo de conocimientos informales a partir de la interacción con situaciones problemáticas, sin intervención del maestro (consideran a este como "organizador de situaciones" o, "facilitador de aprendizajes"). En este acercamiento se devalúa, o incluso se deja completamente de lado el problema de la conversión de conocimientos de los alumnos, implícitos, informales, en saberes culturales, institucionales. (Dentro de los cuales tienen cabida los algoritmos convencionales)

Otro acercamiento pone en primer plano el problema de la articulación entre los conocimientos informales con los formales. Es el caso, por ejemplo, de la Teoría de las situaciones didácticas (TSD), en la que el concepto de "institucionalización" da cuenta de la importancia de arribar, en un proceso de enseñanza, a conocimientos explícitos y formales, tal y como se reconocen en la cultura. En este caso, el papel del maestro va más allá de plantear las situaciones problemáticas y favorecer en sus alumnos la búsqueda de soluciones, pues es a él a quien corresponde destacar determinados conocimientos, y proporcionar la información necesaria en los momentos oportunos para asegurar que los alumnos vinculen sus conocimientos con los saberes institucionales, culturales (Brousseau, 1998).

[1] Sobre estas interpretaciones ver por ejemplo Coll, C. (1986, 1990), Lerner, D. (1998)

¿Qué postura frente a estos dos acercamientos se adoptó en las propuestas oficiales actuales para la enseñanza de las matemáticas, o en el enfoque asumido? Si bien no hay textos en los que puedan encontrarse respuestas muy explícitas a este pregunta, es posible inferir, de los planteamientos que se hacen en los "Libros para el maestro", que la respuesta es la segunda. Sin embargo, falta analizar en qué medida este acercamiento se ve reflejado en los otros materiales curriculares, libros de texto gratuito para los alumnos y ficheros de actividades didácticas de matemáticas.

Es posible que, cuando se reformularon los planes y programas de estudio, se haya considerado necesario cuestionar, nuevamente, las prácticas de enseñanza que tendían a privilegiar demasiado, o demasiado pronto, el dominio de saberes en su forma ya institucionalizada (como los algoritmos convencionales), o incluso, saberes reducidos a escrituras sintácticas, a reglas, a fórmulas con poco significado, y que por ello *el énfasis se haya puesto en la valoración del desarrollo de conocimientos no formales por parte de los alumnos*. A fin de cuentas de lo que se trató fue de "postergar el momento de la formalización para dar lugar al discernimiento" (Freudenthal, en Block y Fuenlabrada 1999:275).

Sobre la enseñanza de contenidos específicos

Un aspecto poco atendido cuando se habla de la propuesta oficial para la enseñanza las matemáticas en México es el hecho de que ésta no afecta únicamente a las consideraciones generales acerca de cómo enseñar (el enfoque, la metodología), las cuales pueden ser fácilmente trivializadas al identificarse con ideas vagas tales como propiciar la participación activa del niño. Dicha propuesta conlleva también ciertos cambios en la definición y en la organización misma de los contenidos que son objeto de enseñanza. En este aspecto se presentan también algunas oposiciones entre las prácticas comunes y las propuestas emanadas de la reforma. Destaquemos a título de ejemplo dos casos en los que esto es muy visible.

En el caso mexicano, para la enseñanza de los primeros números en primer grado, en todas las propuestas didácticas que conocemos dirigidas a alumnos pequeños, por lo menos desde principios del siglo XX hasta la reforma del '93, se proponía desarrollar una lección por cada número de la serie: el 1, el 2, el 3 (Block y Álvarez, 1999). En la propuesta vigente, se propone trabajar desde el principio con varios números a la vez, en rangos que se van ampliando, lo cual es coherente con la intención de trabajar a partir de situaciones problemáticas (pues no parece posible plantear un problema que haga intervenir a un solo número).

Otro ejemplo lo constituyen las operaciones aritméticas. En la propuesta vigente, además de afirmarse que la enseñanza no debe partir de los algoritmos usuales, sino del desarrollo de procedimientos informales a partir de la resolución de problemas, se plantea que, contra una idea que ha prevalecido durante mucho tiempo, las técnicas para resolver una operación no constituyen el único contenido importante del tema. Ahora se pone el acento en el hecho de que una operación aritmética puede asumir significados distintos dependiendo de las relaciones entre los datos. Se habla de numerosas estructuras sintácticas y semánticas de los problemas de suma y resta, de varios tipos de problemas de multiplicar y de dividir. Se insiste en que comprender una operación implica, además de conocer técnicas para resolverlas, poder reconocer su pertinencia en una gama amplia de problemas. En consecuencia, se dedican ahora numerosas lecciones para el estudio de estos aspectos de las operaciones.

En relación con este punto, el de los cambios en el nivel de la organización de los contenidos y el del papel que juegan en ello los problemas, cabe señalar que si bien los libros de texto oficiales y los ficheros de actividades didácticas ofrecen una importante plataforma a partir de la cual los maestros podrían operacionalizar las orientaciones que se dan, no se dispone siempre, para todos los temas y en todos los grados, de las secuencias didácticas más adecuadas para ello. Hay temas mejor logrados que otros, tanto desde el punto de vista de la calidad de las secuencias, como desde el punto de vista de su factibilidad, es decir, del grado en que es posible llevarlas a cabo en las condiciones de trabajo de los maestros. No sobra recordar, además, que aún en los casos en los que secuencias didácticas podrían considerarse satisfactorias, su puesta en práctica podría requerir de conocer y compartir los presupuestos que subyacen a las mismas.

Algunos aspectos relevantes de un proceso de aprendizaje de las matemáticas por adaptación (enfoque constructivista) (Block, 2001)

En la Teoría de las Situaciones Didácticas se distinguen dos momentos en un proceso de adquisición de un aspecto de conocimiento: el momento en el que podrían suceder aprendizajes por adaptación a un medio, el cual corresponde a un funcionamiento “adidáctico” de la situación, y el momento de “institucionalización”, que describe el proceso en el que el maestro, en tanto portador de un saber cultural, interviene en la situación para ayudar a tender un puente entre los conocimientos, siempre fuertemente contextualizados, y los saberes institucionales, que son objeto de enseñanza[2].

Una situación funciona de manera “adidáctica” cuando el alumno y el maestro logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y entre en un proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el maestro espera.

> Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro se rehúsa a intervenir como el que propone los conocimientos que quiere propiciar. El alumno sabe bien que el problema fue escogido para ayudarlo a adquirir un nuevo conocimiento, pero debe saber también que ese conocimiento está completamente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin apelar a razones didácticas. No solamente puede, sino debe, ya que no habrá adquirido verdaderamente ese conocimiento sino hasta que sea capaz de utilizarlo por sí mismo en las situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza (Brousseau, 1998:59).

[2] La situación “adidáctica” es siempre un momento o una fase de una situación didáctica. La diferencia con una situación “no didáctica” es que esta última no ocurre en un contexto de enseñanza.

La realización de una relación semejante con el problema requiere lo que Brousseau ha llamado un proceso de *devolución* al alumno de la responsabilidad matemática sobre la situación. Se trata bien de un proceso, y no de un acto instantáneo, habida cuenta de que la relación que prevalece normalmente entre los alumnos y el maestro no es de este tipo. Se requiere romper, o alterar un *contrato didáctico*[3] implícito que tiende a regular las relaciones entre ambos y según el cual el alumno espera que el maestro le enseñe, o, cuando se le plantea un problema, sabe que el maestro espera de él la aplicación de determinados saberes enseñados, y el maestro tiene efectivamente esa expectativa.

Por otra parte, una situación adidáctica es siempre específica de un conocimiento. Para dar lugar a un funcionamiento adidáctico, es necesario que el problema sea adecuado y esto significa, en primer lugar que implique dicho conocimiento como recurso óptimo de resolución. Además, el problema se debe poder abordar sin disponer aún de este conocimiento, de lo contrario, no se trataría de una situación de aprendizaje, sino de evaluación, o de aplicación. Debe poder abordarse sin el conocimiento, en el sentido de poder realizar aproximaciones a la solución, pero no de resolver el problema de manera óptima puesto que esto requeriría ya saber. O bien, puede resolverse una variante simple del problema a partir de conocimientos previos, pero, mediante el manejo de ciertas variables de la situación; se deben poder generar variantes para las cuales los conocimientos previos resultan insuficientes (Douady, 1983; Brousseau, 2000).

Finalmente, la situación adidáctica debe ofrecer al alumno una forma de control sobre el grado de éxito, o de error, de sus tentativas de resolución, es decir, una forma de validar por sí mismo, sin necesidad de la intervención del juicio de un tercero. Esta condición es fundamental para dar lugar a un diálogo entre el alumno y el problema, que permita, al alumno hacer evidentes los errores, un proceso de corrección o de reelaboración de recursos[4].

Una situación adidáctica normalmente está destinada a aplicarse varias veces, con el mismo grado de dificultad, o con uno mayor. Las repeticiones son una condición para permitir a los alumnos desarrollar nuevos recursos y cesan cuando los alumnos disponen ya de una estrategia que permite resolverla de manera sistemática. A esta estrategia subyace, en principio, un nuevo conocimiento.

Hablemos ahora del proceso de institucionalización. En un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los alumnos logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a éste no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. *Los alumnos no tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural*. Esto requiere de un proceso de institucionalización que, esta vez, corre a cargo del maestro.

[3] Sobre la noción de contrato didáctico, ver, por ejemplo, Brousseau, 1998.
[4] Brousseau distingue tres formas de validación: pragmática, semántica y sintáctica (Brousseau, 1998). Ver también (Block, 1991)

> Escoger ciertas preguntas entre las que ya se saben resolver, ubicarlas en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas un estatuto de saber más o menos importante, vincularlas a otras preguntas, a otros saberes, constituye a final de cuentas lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente del que podría dejarse a cargo del alumno, le corresponde al maestro, no es el resultado de una adaptación del alumno… (Brousseau, 1998:77).

Así, finalmente, "los dos tipos principales de juego" del maestro son la devolución y la institucionalización. Mediante la devolución el maestro pone al alumno en situación adidáctica. Mediante la institucionalización define las relaciones que puede haber entre las producciones "libres" del alumno con un saber cultural o científico, y con el proyecto didáctico, da lectura a esas actividades y les da un "estatuto" (Brousseau, 1998:92).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje en situación escolar se favorece mediante la alternancia sutil de momentos adidácticos y momentos propiamente didácticos, de institucionalización. Esta característica, que pone en primer plano la recuperación de los *saberes*[5] por enseñar, distingue este acercamiento de enfoques constructivistas ortodoxos, también llamados radicales, en los que los *saberes* objeto de la enseñanza se desdibujan por un supuesto de no intervención del maestro más que como "organizador de situaciones".

Utilización de los conceptos de "situación adidáctica" y de "institucionalización" en el análisis de las prácticas

Es posible identificar en las propuestas para la enseñanza de las matemáticas emanadas de la reforma del 93 en México, el propósito de ofrecer, a través de los distintos materiales, situaciones con las características necesarias para funcionar como "adidácticas" (Block y Álvarez 1999). Desde este punto de vista, el grado de "adidacticidad" de las situaciones planteadas por parte de los maestros constituye el indicador quizá más exigente del nivel de apropiación de los principales elementos del enfoque que subyace a las nuevas propuestas de enseñanza. No obstante, es importante considerar que una situación adidáctica constituye una especie de modelo ideal, de meta hacia la cual dirigir la relación didáctica en determinados momentos del proceso. En la práctica es imposible encontrar realizaciones "puras" de este modelo.

Cabe advertir también que la calidad de una situación no pasa únicamente por el hecho de ser utilizada en tanto situación adidáctica por lo que éste no debe ser el único parámetro para valorar las situaciones implementadas por los maestros. En todo caso, lo que interesará determinar son las interpretaciones, las modalidades y

[5] En Didáctica, según Block (2001), el *saber* "por enseñar", el que está señalado en los programas, es un producto cultural, establecido, avalado socialmente. Los *conocimientos* son aquellos que se manifiestan en la acción del alumno en situación de resolución de problemas, y, a diferencia de los saberes –puntualiza Block– pueden no ser identificados por el sujeto que los utiliza. Esta situación, en el contexto escolar, genera la necesidad de organizar la apropiación de los *saberes* específicos a partir de los *conocimientos* construidos.

las dificultades que aparecen en relación a la expectativa de funcionamiento "adidáctico" de las situaciones.

Con respecto a la institucionalización, se prevén dos fenómenos: las prácticas en las que no se tiende a incorporar el enfoque otorgarían un fuerte peso a los momentos de institucionalización; las prácticas en las que se intenta asumir el enfoque de manera relativamente profunda, podrían presentar carencias en el manejo de los momentos de institucionalización, debido a una tendencia ya detectada a considerar que, bajo el enfoque actual, el maestro no debe intervenir, no debe proporcionar información.

Multiplicidad de métodos, necesidad de equilibrios

Es importante destacar que desde la misma TSD se plantea que no existe ningún método que, por sí solo, permita generar en clase un proceso satisfactorio de aprendizaje (Brousseau, 1996). Los métodos (así como los tipos de contratos didácticos) son modelos que enfatizan cierto tipo de relación didáctica. Pueden ser, en el mejor de los casos, buenas guías para la acción, pero ninguno puede prever la gran cantidad de decisiones, de variantes en la relación didáctica que se van revelando necesarias en el desarrollo de una clase con un grupo particular, sobre un tema también particular. En general, es una combinación compleja de diversas formas de proceder las que funcionan en el aula, más o menos articuladas, más o menos orientadas por algunas líneas de fuerza.

En un proceso de enseñanza, deben guardarse equilibrios entre numerosos factores para permitir su funcionamiento: entre la cantidad de conocimientos nuevos, no institucionalizados, que entran en juego en un momento dado y el recurrir a saberes ya institucionalizados; entre las situaciones adidácticas para propiciar nuevos conocimientos y las situaciones de aplicación, o de profundización de conocimientos, entre otros.

Por último señalemos que un reto al utilizar herramientas didácticas en el estudio de las prácticas de enseñanza, sobre todo al disponer de un modelo sofisticado sobre los procesos de aprendizaje por adaptación, radica en no reducir el análisis a una simple verificación de lo que no se logra hacer todavía, sino en **"*comprender lo que legítimamente*** [los maestros] ***tenían necesidad de hacer*...**" (Brousseau, 1994:74).

¿Qué ha pasado con el pensamiento del profesor a más de una década de la reforma?

Con el propósito de contribuir a una evaluación integral del funcionamiento del curso nacional de actualización que se ofreció a las maestras y maestros mexicanos para apuntalar la última reforma curricular, se llevó a cabo en el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (DIE-CINVESTAV) y a solicitud de la Coordinación General de Actualización y

Capacitación para Maestros en Servicio (CGAyCMS)[6], entre noviembre del 2003 y junio del 2004, un proyecto de investigación denominado *Papel del taller "La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", en los procesos de apropiación de la propuesta curricular de 1993*. Entre los múltiples aspectos que conforman la problemática de la actualización profesional de los docentes en servicio, en dicho proyecto se dirigió la mirada hacia los procesos de apropiación de elementos de mencionada propuesta curricular en las prácticas de enseñanza de los maestros en el aula, con la idea de enriquecer su comprensión y, al mismo tiempo, mejorar los programas de actualización.

Identificar aportes del Taller en las prácticas docentes sobre la enseñanza de las matemáticas, así como aspectos problemáticos no resueltos, constituye una tarea compleja y dinámica, debido a que los maestros integran en sus prácticas elementos de muy diversa procedencia (Mercado, 2002), adaptándolos a sus necesidades y a sus concepciones acerca de los procesos implicados. Para la realización del estudio se optó por un acercamiento, no exento de limitaciones, pero que pareció suficientemente sólido y factible en el tiempo y con los recursos disponibles: cruzar dos fuentes de información, por una parte, lo que el mismo maestro expresa acerca de los aspectos de la propuesta curricular que ha incorporado y el papel que en ello ha jugado el Taller, y, por otra, lo que puede observarse directamente en sus clases.

Se contemplaron dos estrategias para la obtención de la información: la realización de entrevistas a profundidad a 21 maestros y la observación de 19 clases impartidas por 5 de los maestros entrevistados.

En general, en el análisis de las entrevistas se intentó recuperar en primer lugar el sentido otorgado por los maestros a cada una de las problemáticas abordadas.

A partir de las entrevistas, se seleccionaron a los cinco maestros que participaron en la segunda fase, la observación de sus clases, con base en la disposición que manifestaron para ser observados. También se consideraron sus antecedentes profesionales dado que interesaba tener cierta diversidad en la muestra. Al término del conjunto de observaciones, se realizó una última entrevista para profundizar en algunos aspectos, y para conocer la manera en la que planeaba continuar con el tema[7].

Para el análisis de las clases observadas se determinaron previamente aspectos amplios que interesaba analizar, derivados de determinadas categorías didácticas y, se intentó identificar, al interior de dichos aspectos, fenómenos particulares.

[6] El equipo de investigación estuvo coordinado por el Dr. David Block, como autores participaron: Martha Dávila, Silvia García, Patricia Martínez F., José Antonio Moscoso, Ligia Ramírez M., Margarita Ramírez B. y Diana Solares y como colaboradoras Laura Reséndiz y Minerva Reséndiz.

[7] A dos elementos de la muestra, con el propósito de consolidar la confiabilidad y validez del estudio, se les proporcionó el documento de análisis descriptivo de sus clases y entrevistas, y se sostuvo con ellos una entrevista más.

Algunos resultados en torno a la institucionalización del saber matemático en el aula

El *Taller* parece haber cumplido una importante función en la comprensión del enfoque oficial para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, tanto por sus contenidos explícitos, como por aquellos implícitos, que transmite mediante el tipo de experiencias que ofrece. No obstante, el presente estudio pone en evidencia numerosas lagunas e imprecisiones que es imperativo atender. Cabe recordar que en el *Taller* se priorizó el estudio de conocimientos específicos de matemáticas desde el punto de vista de su didáctica y solamente se dedicó un capítulo al estudio de cuestiones más generales sobre el enfoque.

Aportes

Probablemente la principal fuente de aprendizajes sobre el enfoque actual para la enseñanza de las matemáticas fueron las experiencias de aprendizaje que los maestros vivieron al estudiar el *Taller*. Estos son algunos de los descubrimientos que los maestros dicen haber hecho:

- Perder el miedo a las matemáticas, constatar que éstas pueden ser amenas, lúdicas.
- Descubrir que el uso de material concreto o representaciones icónicas, no son recursos exclusivos para los niños pequeños.
- Descubrir y valorar que algunas situaciones permiten ser comprobadas por uno mismo.
- Descubrir que el procedimiento de ensayo y error constituye una forma de abordar un problema, cuando no se conoce aún la resolución canónica.

    – En el caso de maestros que estudiaron el *Taller* en grupo, descubrir que existen diferentes maneras de abordar una misma situación y el valor de compartirlas.

Sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos, las siguientes apreciaciones fueron dominantes:

- Tener una mejor percepción de la capacidad que tienen los alumnos para enfrentar por sí mismos distintas tareas.
- Considerar la posibilidad de favorecer aprendizajes mediante la resolución de situaciones problemáticas (“no todo lo tiene que dar el maestro”)

    – Comprender algunas de las dificultades que pueden tener los niños frente a determinadas tareas cuando están en proceso de aprender, sobre todo cuando los mismos maestros cometieron errores en actividades propuestas en el Taller.

Carencias y recomendaciones

De los comentarios de los maestros vertidos en las entrevistas y, en menor medida, de las observaciones de las clases, se desprende la consideración de que el enfoque actual para la enseñanza de las matemáticas excluye prácticas que se suelen relacionar con "lo tradicional", tales como las intervenciones del maestro para aportar información, la introducción de algoritmos y, sobre todo, su ejercitación. Apuntaría a relativizar aserciones que se atribuyen al enfoque tales como "aprender a partir de la resolución de problemas", "el maestro no da el conocimiento, los alumnos lo construyen", "los procedimientos informales son valiosos", destacando que éstas corresponden a momentos de un proceso de aprendizaje antes poco advertidos, pero que no agotan lo que es un proceso de aprendizaje escolar. El estudio explícito de ciertas nociones de didáctica podría ser útil para este propósito.

A continuación se dan algunos ejemplos.

La noción de "momentos o fases en un proceso de aprendizaje de conocimientos de matemáticas" permitiría apreciar la existencia de distintos tipos de relación didáctica a lo largo de un proceso de enseñanza.

La noción de "Institucionalización de los conocimientos", además de devolver un lugar legítimo a una práctica importante de los maestros (seleccionar, entre lo que fue producido, aquello que deberá ser conservado, proporcionar información, establecer los puentes entre lo informal y lo institucional), podría permitir analizar las distintas interrogantes a las que da lugar: ¿Cuándo y cómo institucionalizar? ¿Cómo guardar cierto equilibrio entre los conocimientos informales de los alumnos y los conocimientos institucionales?

La noción de "momento del desarrollo de la técnica", (dentro del cual tienen cabida los diversos algoritmos desarrollados por los alumnos o sugeridos por el profesor) además de devolver su lugar a la necesidad de practicar y afianzar las técnicas que se van aprendiendo, permite ver que dicha práctica se puede enriquecer considerablemente cuando se tiene el propósito de mostrar los alcances y los límites de la técnica, o las adaptaciones que tiene que sufrir para evolucionar, abarcar más casos, demostrar su eficacia y economía.

Así mismo, también parece conveniente incluir textos y reflexiones sobre el carácter necesariamente ecléctico de las prácticas de la enseñanza y sobre el necesario interjuego entre distintos tipos de relación didáctica al interior de la clase. Sobre todo, parece necesario aclarar que ningún modelo puede pautar la conducción del maestro quien deberá siempre tomar decisiones y articular distintas estrategias. Los modelos que se proponen bajo cualquier enfoque proponen acercamientos amplios, grandes líneas de acción, dentro de las cuales hay un necesario y considerable margen para las decisiones del maestro.

Por último, cabe señalar que lo que se ha llamado “el nuevo enfoque para la enseñanza de las matemáticas”, contiene un conjunto de planteamientos que siguen siendo objeto de revisión y de precisión o de adaptación, tanto a nivel de quienes intentan llevarlo a la práctica (diseñadores de currículum, maestros) como de quienes lo asumen como objeto de estudio. Una consecuencia de esto es que “el enfoque”, sea cual sea su interpretación, no es hoy idéntico al que fue hace 10 años, cuando se estableció la reforma en México. Una tarea que podría ser útil consistiría en documentar algunas de las principales interpretaciones del citado enfoque, entre maestros[8], pero también entre investigadores, destacando qué presupuestos suficientemente importantes se comparten como para considerarlos variantes de un enfoque, y en qué casos se manifiestan posturas suficientemente alejadas para afirmar que constituyen otros enfoques.

Bibliografía

- Ávila, Alicia (1991) “La reforma a las matemáticas en primaria. Lo posible y lo necesario”. En Educación Matemática. Vol. 3, No. 3 Diciembre. Ciudad de México.
- ______ (2001a) “Los profesores y sus representaciones sobre la reforma a las matemáticas”.En Perfiles Educativos, Vol. XXIII, Num. 93, Tercera época. Ciudad de México.
- ______ (2001b) La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar. Tesis de doctorado. UNAM. Ciudad de México.
- Balbuena Hugo, D. Block, I. Fuenlabrada, R. Valencia, L. Ortega (1991) “Reflexiones en torno a la modernización educativa. El caso de las matemáticas en los primeros grados de la primaria”, en Educación Matemática, Vol. 3, No. 3, diciembre, p.p. 40-57.
- Block, David (1991) “Validación empírica del conocimiento en la clase de matemáticas en la primaria”. En Cero en Conducta, Año 6 (25). Educación y Cambio A. C. Ciudad de México.
- ______ (2001). La Noción de Razón en las Matemáticas de la Escuela Primaria. Un Estudio Didáctico. Tesis de doctorado, DIE-CINVESTAV-IPN, Ciudad de México.
- Block, David. A. M. Álvarez (1999) “Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas”. En Educación Matemática, Vol. 11 No. 1, Grupo Editorial Iberoamérica. Ciudad de México.
- Block, David, e Irma Fuenlabrada (1999) “Materiales curriculares de matemáticas para el nivel básico” en Encuentros de investigación educativa 95-98. DIE-CINVESTAV-IPN. Plaza y Valdés Editores. Ciudad de México.
- Block, David, M. Dávila, P. Martínez (1995) “La resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros”. En Educación Matemática, Vol. 7 No. 3, Grupo Editorial Iberoamérica. Ciudad de México.

[8] Ya se han realizado los primeros estudios en este sentido, como los de Ávila (2001ª, 2001b), Ramírez (2003) y Martiradoni (2004).

- Brousseau, Guy (1994) “Los diferentes roles del maestro”. En C. Parra e I. Saíz (comp.) Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones. Paidón. Argentina.
- ______ (1996) “L´enseignant dans la théorie des situation didactiques”. En Actes de VIIIe Ecole et Universite D´ete de Didactiques de Mathematiques. Francia: IREM de Clermont-Ferrand pp. 3-45.
- ______ (1998) Théorie des situation didactiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques. Paris: La pensée Sauvage.
- ______ (2000). “Educación y didáctica de las matemáticas”. En Educación Matemática, Vol. 12, No. 1. Grupo Editorial Iberoamérica. Ciudad de México.
- Coll, César (1986) Psicología genética y aprendizajes escolares. Compilación. Siglo XXI editores. España.
- ______ (1990) Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. Paidós,
- Douady, R. (1983) “Dialectique outil objet, jeux de cadres”. En. Cahier de Didactique des Mathématiques No. 3. Francia: IIREM de París.
- Lerner, Delia (1998) “La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición”. En José A. Castorina, E. Ferreiro, M.K. de Oliveira, D. Lerner. Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate. Paidós. Ciudad de México.
- Martiradoni, G. Zorobabel, (2004) El profesor, el saber a enseñar y el saber enseñado: un estudio de caso sobre la enseñanza de la multiplicación en segundo grado de primaria. Tesis de Maestría, DIE-CINVESTAV-IPN. Ciudad de México.
- Mercado, R. (2002) Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños. Fondo de cultura económica. Ciudad de México.
- Ramírez, B. Margarita (2003) El saber enseñado: protagonista discreto en la trama de acontecimientos en el aula. La proporcionalidad en sexto grado de primaria. Tesis de Maestría, DIE-CINVESTAV-IPN, Ciudad de México.

José Antonio Moscoso Canabal, nació en Playas de Catazajá Chiapas, el 14 de septiembre de 1961. Licenciado en Pedagogía por la Universidad Nacional Autónoma de México, Maestro en Ciencias con la Especialización en Investigaciones Educativas por el DIE-CINVESTAV-IPN. Actualmente trabaja en la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 271, Villahermosa Tabasco. México.
mocaja6109@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 17 - 29
ISSN: 1815-0640

La enseñanza del cálculo mental

Bernardo Gómez Alfonso

Resumen

Este artículo pretende ser una puesta al día de algunas ideas que han venido apareciendo en otros trabajos precedentes del autor sobre el cálculo mental. Tras explicar lo que se entiende hoy por cálculo mental y cuál es su diferencia con el cálculo estimado y el aproximado, se hace un repaso de las formas que históricamente se han propuesto para su enseñanza. Finalmente se presentan propuestas innovadoras para trabajar en el aula y para su discusión por la comunidad de profesores interesados en el tema.

El significado de los términos

El cálculo mental no debe confundirse con el cálculo estimado y éste no debe confundirse con el cálculo aproximado. Lo que diferencia estos tres tipos de cálculo es que en el cálculo mental se trabaja con datos exactos, mientras que en el cálculo estimado y el cálculo aproximado no. Estos dos últimos difieren en la procedencia de los datos: en el primer caso los datos son el resultado de un juicio o valoración y en el segundo proceden de la medición con instrumentos de medida que por muy finos que sean siempre tienen un margen de error.

Un ejemplo ayudará a aclarar esta distinción. En plena “guerra del agua” se discute acerca del caudal que podría o debería trasvasarse de una cuenca hidrográfica a otra. Una determinada comunidad reclama 400 hm^3 para cubrir sus necesidades. Para dar una idea de la magnitud de esta petición se puede hacer un cálculo estimado utilizando un referente familiar. Tómese como por ejemplo el estadio del Real Madrid e imagínese que es un recipiente que se puede llenar de agua. Haciendo una estimación de sus dimensiones se puede calcular su capacidad. En efecto, a la vista de las fotografías y dado que las medidas oficiales de un campo de fútbol son: 105x68 m^2, el estadio podría tener unas dimensiones que se pueden estimar en torno al doble de ancho y de largo que el campo de juego, además se ve que tiene el equivalente a unos diez pisos de altura y un piso debe tener unos 3 m de alto. Así, pues, el estadio podría tener un volumen de alrededor de 200x150x30=900.000 m^3, que es equivalente a 900 Dm^3, o lo que es lo mismo 0,9 Hm^3. Por tanto, para atender la demanda de agua que se solicita se podría decir que harían falta del orden de 40 estadios como el del Real Madrid (figura 1) llenos de agua.

Fig. 1 Estadio del Real Madrid CF.

Este tipo de cálculo es un cálculo estimado, con números estimados, que como se ve en el ejemplo suelen ser números redondos para aprovechar las ventajas de operar con números terminados en ceros en el sistema de numeración decimal. Sin embargo, si en vez de estimar los datos se hubiera hecho una medición de las dimensiones del estadio, utilizando cualquier instrumento de medida, es claro que por muy finos que sean éstos instrumentos siempre habrá un error. Este error obliga a trabajar con datos aproximados y el resultado también será aproximado, con un margen de error que es evaluable en función de la precisión del instrumento. En el cálculo aproximado se utilizan sobre todo números decimales, de modo que se suele pedir que se hagan los cálculos con una aproximación a un número de décimas, centésimas, milésimas…, determinado. Así ocurre cuando se pide, por ejemplo, hacer una división aproximando el cociente hasta las milésimas.

El cálculo mental

El cálculo mental se caracteriza por el uso de métodos de cálculo alternativos a los de columnas. Estos métodos encuentran su fundamento en las propiedades de las operaciones y en las propiedades de los números derivadas de los principios del sistema de numeración de base diez. Lo mismo ocurre con los métodos de cálculo escrito. Pero no hay nada en estas propiedades y principios que diga que unos son para hacer de cabeza y otros para hacer con lápiz y papel. Esto significa que los métodos de cálculo mental no son básicamente diferentes de los métodos de cálculo escrito; y por tanto, que no hay una línea divisoria entre ellos. En otras palabras, son los mismos métodos, pero es el uso mental o escrito que se hace de ellos lo que los denomina. Las siguientes imágenes (figuras 2 y 3) aclararán esta afirmación.

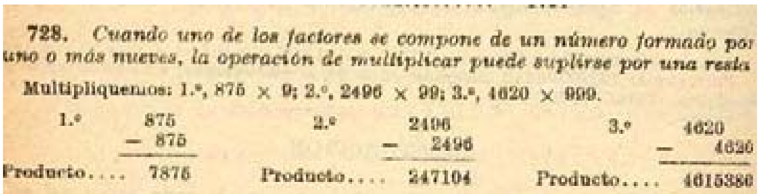
 728. Cuando uno de los factores se compone de un número formado por uno o más nueves, la operación de multiplicar puede suplirse por una resta. Multipliquemos: 1.º, 875 × 9; 2.º, 2496 × 99; 3.º, 4620 × 999. 1.º 875 − 875 Producto.... 7875 2.º 2496 − 2496 Producto.... 247104 3.º 4620 − 4620 Producto.... 4615380	*728. cuando uno de los factores se compone de un número formado por uno o más nueves, la operación de multiplicar puede suplirse por una resta.* Dalmau Carles. 1944, p. 340.

Fig. 2 Método de cálculo abreviado. Siglo XX

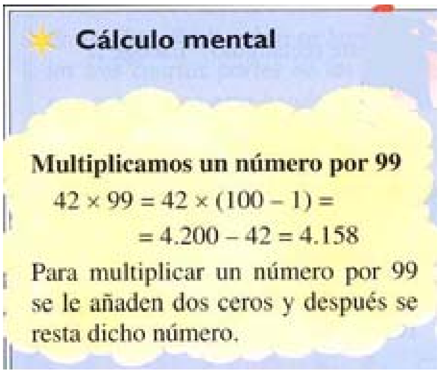
 Cálculo mental Multiplicamos un número por 99 42 × 99 = 42 × (100 − 1) = = 4.200 − 42 = 4.158 Para multiplicar un número por 99 se le añaden dos ceros y después se resta dicho número.	*Cálculo mental* *Multiplicamos un número por 99.* *42x99=42x(100 – 1) =* *4200 – 42 = 4.158* *Para multiplicar un número por 99 se le añaden dos ceros y después se resta dicho número.* Anaya.1993, p.128.

Fig. 3 Método de cálculo abreviado. En la actualidad.

La primera imagen (figura 2) recoge un método de cálculo abreviado tal y como aparece en un texto de larga tradición en España a lo largo del siglo XX. La segunda imagen (figura 3) recoge otra versión de este mismo método en la forma en que se encuentra en un texto actual de gran difusión en España. El método es el mismo, ya que en ambos casos se trata de efectuar un redondeo para multiplicar por un número formado sólo por nueves; sin embargo, la forma de aplicarlo cambia ya que en un caso se propone para multiplicar en columnas y con lápiz y papel y, en el otro, para ser efectuado de cabeza.

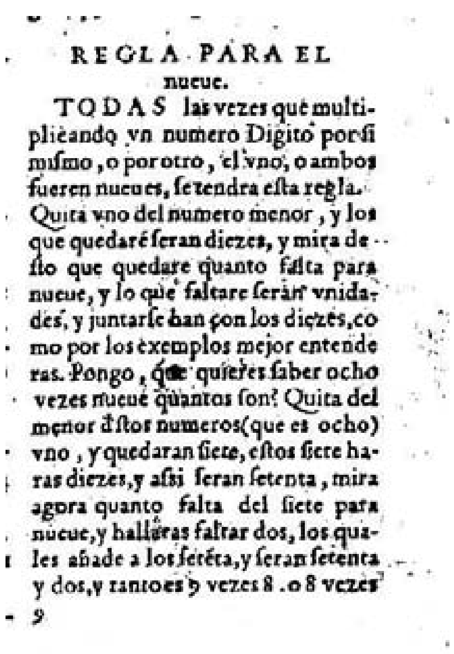
Los modelos de enseñanza de los métodos de cálculo mental

Lo que conocemos en la enseñanza escolar como cálculo mental no ha sido objeto de enseñanza hasta épocas recientes. No es que antes no se hiciera cálculo mental, sino que no se enseñaba como tal, no aparecía en los libros de texto, y no coincide con lo que actualmente se entiende por cálculo mental.

Una revisión de la forma en que los métodos de cálculo mental han sido presentados en los libros de texto a lo largo de la historia permite identificar cuatro modelos de enseñanza (Gómez, 1995, a):

1.- El método de las reglas breves

Prácticamente hasta el siglo XIX, la enseñanza del cálculo aritmético tenía un nivel de exigencia que hoy consideraríamos excesivo. Se trataba de formar expertos calculistas que conocieran varios métodos y pudieran usar el más adecuado en cada operación y situación. En esta época no se hace mención al cálculo Mental. El método de enseñanza consistía en presentar retóricamente y bajo la forma de reglas breves, multitud de métodos variados sobre una misma operación, estos métodos no se relacionan en ningún caso con las propiedades y principios que le dan fundamento y explicación.


REGLA PARA EL nueue.

TODAS las vezes que multiplicando vn numero Digito por si mismo, o por otro, el vno, o ambos fueren nueues, se tendra esta regla. Quita vno del numero menor, y los que quedaré seran diezes, y mira de esto que quedare quanto falta para nueue, y lo que faltare seran vnidades, y juntarse han con los diezes, como por los exemplos mejor entenderas. Pongo, que quieres saber ocho vezes nueue quantos son? Quita del menor destos numeros (que es ocho) vno, y quedaran siete, estos siete haras diezes, y assi seran setenta, mira agora quanto falta del siete para nueue, y hallaras faltar dos, los quales añade a los setenta, y seran setenta y dos, y tanto es 9 vezes 8. o 8 vezes 9.

Regla para el nueve

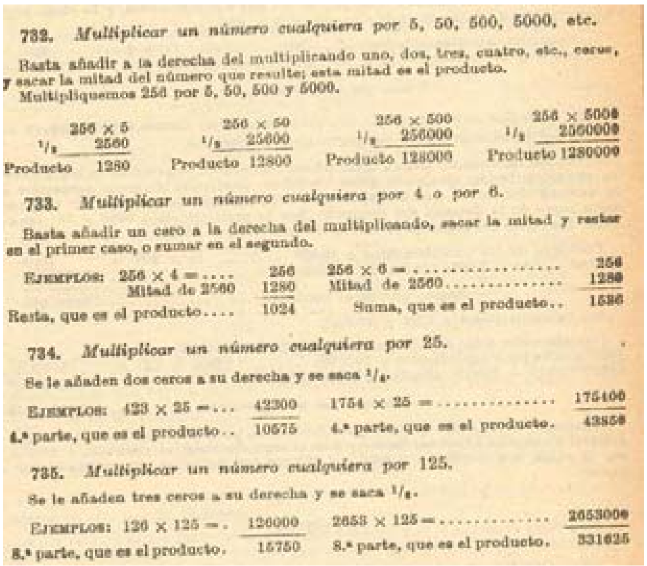
Todas las veces que multiplicando un número Dígito por sí mismo, o por otro, el uno o ambos fueren nueves, se tendrá esta regla. Quita uno del número menor, y los que quedare serán dieces, y mira de esto que quedare cuanto falta para nueve, y lo que faltare serán unidades, y juntarse han con los dieces, como por los ejemplos mejor entenderás. Pongo, que quieres saber ocho veces nueve cuántos son. Quita del menor e estos números (que es ocho) uno, y quedarán siete, estos siete harás dieces, y así serán setenta, mira ahora cuanto falta del siete para nueve, y hallarás dos, los cuales añade a los setenta, y serán setenta y dos, y tanto es 9 veces 8 o 8 veces 9.

Pérez de Moya, Tratado de Matemáticas. 1563, p. 117

Fig. 4 Regla para el nueve

Los métodos de abreviación

A principios del siglo XIX, la implantación del sistema general y público de enseñanza obligaba a plantear una enseñanza común. En Aritmética, esto se tradujo en un reduccionismo que limitó la enseñanza de métodos de cálculo a “las cuatro reglas”. Los otros métodos de cálculo que traían los viejos libros de aritmética perdieron interés. No obstante, en los libros de aritmética de comienzos del siglo XX se recuperaron algunos de estos métodos como métodos particulares para abreviar o atajar los tediosos y rutinarios cálculos en aquellas situaciones que lo requirieran, pero en cualquier caso no parece que formaran parte de la enseñanza obligatoria, más bien aparecían en los capítulos complementarios o avanzados de los libros para aquellos estudiantes que deseaban mayor profundización o adiestramiento. El método de enseñanza combina la forma de columnas con la forma reglada (figura 5).



732. *Multiplicar un número cualquiera por 5, 50, 500, 5000, etc.*

Basta añadir a la derecha del multiplicando uno, dos, tres, cuatro, etc., ceros, y sacar la mitad del número que resulte; esta mitad es el producto.

Multipliquemos 256 por 5, 50, 500 y 5000.

256 × 5	256 × 50	256 × 500	256 × 5000
1/2 2560	1/2 25600	1/2 256000	1/2 2560000
Producto 1280	Producto 12800	Producto 128000	Producto 1280000

733. *Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6.*

Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

EJEMPLOS: 256 × 4 = ...	256	256 × 6 = ...	256
Mitad de 2560	1280	Mitad de 2560	1280
Resta, que es el producto....	1024	Suma, que es el producto..	1536

734. *Multiplicar un número cualquiera por 25.*

Se le añaden dos ceros a su derecha y se saca 1/4.

EJEMPLOS: 423 × 25 = ...	42300	1754 × 25 = ...	175400
4.ª parte, que es el producto..	10575	4.ª parte, que es el producto.	43850

735. *Multiplicar un número cualquiera por 125.*

Se le añaden tres ceros a su derecha y se saca 1/8.

EJEMPLOS: 126 × 125 = .	126000	2653 × 125 = ...	2653000
8.ª parte, que es el producto.	15750	8.ª parte, que es el producto.	331625

732. Multiplicar un número cualquiera por 5, 50, 500, 5000, etc.

733. Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6. Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

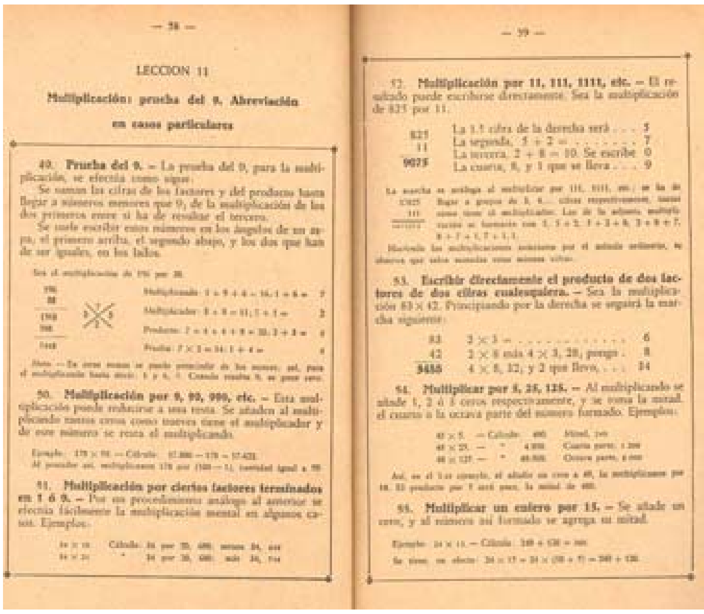
734. Multiplicar un número cualquiera por 25.

735 Multiplicar un número cualquiera por 125.

Dalmau. 1944, p. 341

Fig. 5 Método combinado.

En algunos casos se da fundamento del método con la forma horizontal de igualdades y paréntesis que unifica, la descripción, el ejemplo y la explicación. Así, lo podemos ver por ejemplo en la explicación de la multiplicación por 15 de la imagen (figura 6).



LECCION 11

Multiplicación: prueba del 9. Abreviación en casos particulares

Multiplicar un entero por 15.
Se añade un cero, y al número así formado se agrega su mitad.

Ejemplo: 24 x 15

Cálculo: 240 + 120 = 360.
Se tiene, en efecto:
24 x 15 = 24 x (10+5)= 240 + 120

Edelvives. 1934, p. 58 y 59.

Fig. 6 Forma horizontal de igualdades y paréntesis.

La aritmética mental

Al comenzar el siglo XX, se recupera una vieja teoría que consideraba que la mente se constituía por facultades, que, como músculos, se fortalecen y se forman con el entrenamiento. Esto llevó a considerar a la "disciplina mental" como un objetivo educativo, algo que se concretó en una enseñanza con materias apropiadas para el entrenamiento de la mente. Entre ellas, destacó la Aritmética mental, bajo este nombre se reproducían en los libros de texto largos listados de sencillas operaciones y problemas de enunciado para ser resueltos una y otra vez de cabeza.

RESTAS MENTALES 41

265. Pedro y Antonio poseen juntos 15'75 ptas. Dígase cuánto tiene Pedro si Antonio posee 7'50 ptas.

Pedro tiene 15'75 — 7'50 = **8'25 ptas.**

266. Una factura suma 1.847'50 ptas. ¿ Cuánto deberá entregar el comprador si le descuentan 56'95 ptas. ?

Deberá entregar 1.847'50 — 56'95 = **1.790'55 ptas.**

267. Recibí 2.485 ptas. con encargo de pagar 1.458 pesetas. ¿ Cuánto me quedará ?

Me quedarán 2.485 — 1.458 = **1.027 ptas.**

268. La suma de dos números es 246'53; uno de ellos es 153'89. ¿ Cuál es el otro ?

El otro es 246'53 — 153'89 = **92'64.**

* * *

Resta de centenas, decenas o unidades. — Resta de decenas y unidades.

* 269.		* 270.		* 271.	
400—200	**200.**	783—753	**30.**	727—715 =	**12.**
500—100	**400.**	475—425	**50.**	445—432	**13.**
680—640	**40.**	539—529	**10.**	634—618	**16.**
790— 90	**700.**	668—648	**20.**	825—815	**10.**
845—345	**500.**	899—819	**80.**	133—118	**15.**

Resta de centenas, decenas y unidades.

Ejemplo : *753 — 528.* 753 menos 500, 253 ; 253 — 30, 223 ; 223 más 2, **225.**

* 272.		* 273.		* 274.	
600—515	**85.**	450—445	**5.**	442—331	**111.**
500—475	**25.**	720—605	**115.**	618—308	**310.**
300—234	**66.**	890—735	**155.**	783—452	**331.**
700—623	**77.**	670—454	**216.**	965—833	**132.**
900—832	**68.**	950—815	**135.**	878—345	**533.**

Números de cuatro cifras.

* 275.		* 276.	
6.000—1.000	**5.000.**	4.200—4.000	**200.**
7 000—3.000	**4.000.**	5.700—5.000	**700.**
5.000—1.000	**4.000.**	8.240— 240	**8.000.**
8.000—4.000	**4.000.**	7.228— 218	**7.010.**
9.000—2 000 =	**7.000.**	9 145—9.128	**17.**

Fig. 7 Aritmética mental. FTD. 1923, p. 40-41

El cálculo mental

Poco a poco se irá abandonando la teoría de las facultades hasta llegar a otra más orientada al utilitarismo y a las aplicaciones de la vida real. Bajo esta idea se introduce el término "cálculo mental" para referirse a un tipo de cálculo que pretende desarrollar la "agilidad mental y el "cálculo rápido" (figura 8).

El método de enseñanza se orienta a casos particulares, se enseña a calcular con ciertos números pero no se enseña a calcular en general; así, por ejemplo, se enseña a multiplicar por 25, sustituyendo 25 por ¼, pero no se enseña a multiplicar mentalmente, por ejemplo, por 0,26. No se hace ver que también hay otros métodos posibles. Además se mantiene la idea de que el cálculo mental requiere adiestramiento, y que es para hacer individualmente y en soledad.

En la actualidad está plenamente asumida la sintaxis del álgebra: el formato horizontal, simbólico y contraído de igualdades y paréntesis, que unifica la descripción, el ejemplo y el fundamento de los métodos de cálculo, como realización de las propiedades de las operaciones.

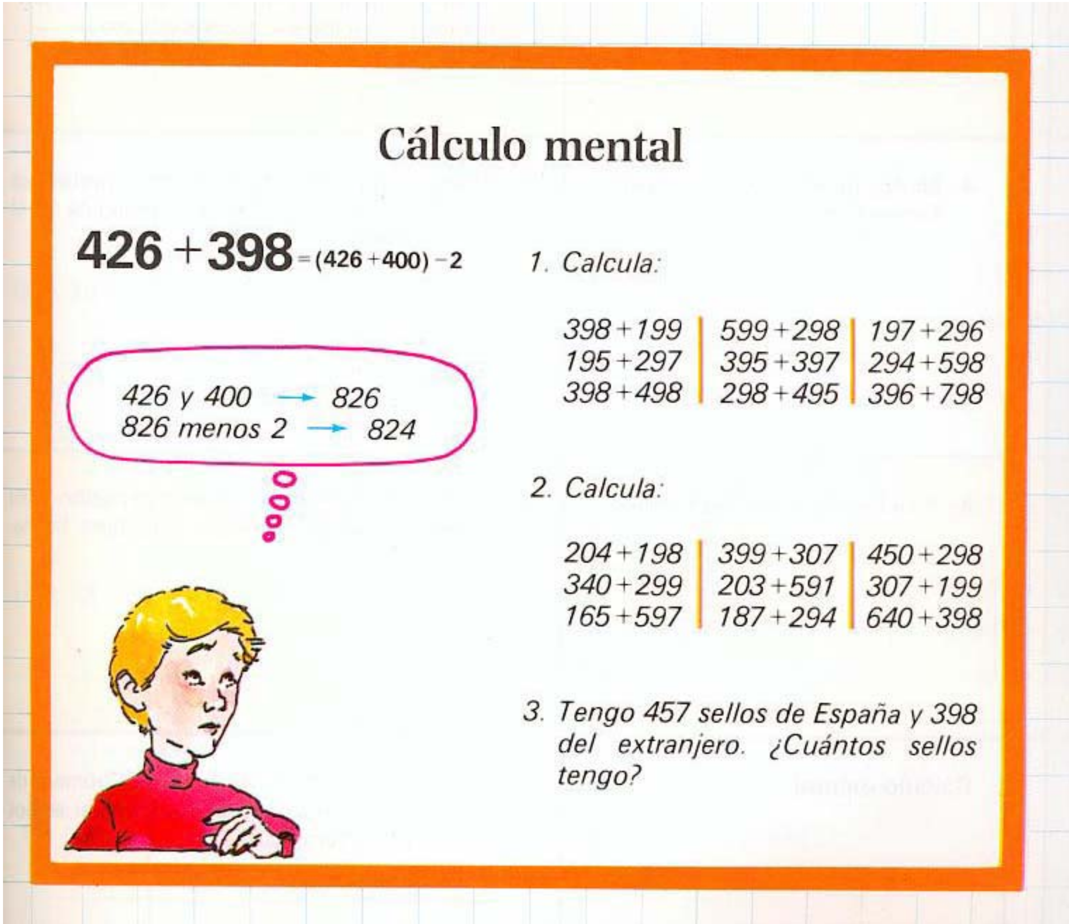


Fig. 8 Cálculo mental. Anaya. 1987, p. 39

Propuestas para la enseñanza

Los modelos de enseñanza descritos hasta aquí tienen algo en común, consideran que el cálculo mental en el ámbito escolar requiere ejercitación y trabajo individual. Algo, que no es muy convincente en un mundo poderosamente dominado por el cálculo electrónico.

Una propuesta innovadora para la enseñanza del cálculo mental podría enmarcase en un programa orientado a un "cálculo flexible", que se proponga disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido, en favor de una combinación de calculo variado: mental, estimado, con calculadora o con algoritmos estándar, según convenga al momento, a la situación y, al tamaño y características de los números involucrados.

Esto marca un punto de inflexión en cuanto al modelo de enseñanza seguido hasta ahora, dado que plantea la necesidad de integrar el cálculo mental con los algoritmos escritos, incluso antes de que los estudiantes dominen éstos, para evitar que influyan negativamente en aquél. Esta idea va dirigida contra la práctica escolar de ejercitar el cálculo mental después del cálculo escrito ya que esto produce que muchos alumnos, en particular aquellos con buena destreza en cálculo escrito, tiendan a resolver los problemas de cálculo mental utilizando las técnicas del cálculo escrito.

Un programa de integración de la enseñanza de los métodos de cálculo mental, no debería buscar la rapidez, la inmediatez, o la uniformidad en los procedimientos, sino el análisis de las situaciones numéricas, la compresión y la adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria y la numeración.

Para ello, hay que aprovechar que el cálculo mental es un dominio privilegiado para el trabajo colectivo en clase. Discutir acerca de las ventajas e inconvenientes de un método u otro, poner de relieve el significado o el trasfondo de los pasos que se siguen, traducirlos al lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis para unificar la descripción, la explicación, y el ejemplo, facilitar el uso de los hechos del sistema de numeración, y aplicar las propiedades y alteraciones invariantes de las cuatro operaciones, son tareas que ofrecen la posibilidad de un acercamiento del conocimiento y a la actividad matemática, con una fuerte presencia de aspectos motivadores y tal vez recreativos.

Propuestas alternativas

Bajo estas ideas se han sugerido distintos tratamientos. Uno de ellos plantea utilizar ejercicios en base a una situación particular rica en soluciones. Los dos ejemplos siguientes ilustran este tipo de planteamiento:

Ejemplo 1:

a) Dado 3x37 = 111 encuentra mentalmente el resultado de los siguientes productos y explica cómo lo has hecho:

6x37 = , 15x37 = , 999x37 =

b) Dado 25^2 = 625, encuentra

25x26 = , 26^2 = , 25 x 24 = , 24^2 =

c) Dado 360: 9 = 40, encuentra

360: 18 = , 360 : 4´5 = , 360 : 45 (French, 1977)

Ejemplo 2:

Resuelve, de todas las maneras diferentes que conozcas, 25 x 48

Soluciones:

a) Descomponiendo y distribuyendo:

25 x 48 = 25 x (40 + 8) = 25 x 40 + 25 x 8 =...

25 x 48 = (20 + 5) x 48 = 20 x 48 + 5 x 48 =...

b) Descomponiendo y distribuyendo doblemente:

25 x 48 = (20 + 5) x (40 + 8) = 20x40 + 5x40 + 20x8 + 5x8

c) Redondeando

25 x 48 = 25 x (50 – 2) = 25 x 50 – 25 x 2 =...

d) Factorizando

25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = 5 x 6 x 5 x 8 = 30 x 40 =...

e) Múltiplos y divisores: “doble y mitad”:

25 x 48 = 50 x 24 = 100 x 12 =…

f) Equivalentes numéricos que transforman el producto en división:

25 x 48 = (100 : 4) x 48 = 100 x (48 : 4) =...

g) Promediando:

25 x 48 = (20 x 48 + 30 x 48) : 2 =

h) Otro planteamiento, consiste en recurrir al análisis de reglas ultrarrápidas.

Ejemplo 3.

Regla: multiplicación de 101 por un número de 2 cifras.

58x101; “a 58 le añado 58. Total 5858”.

Es una regla, ya que se presenta mediante una secuencia de pasos que tiene ocultos sus fundamentos. En vez de proponer la memorización de la regla lo que se pide es indagar acerca de cuál es su fundamento, cuál es su campo de validez y sus restricciones, y bajo qué condiciones se puede generalizar.

El fundamento de la regla se ve con claridad usando el lenguaje horizontal de paréntesis, la descomposición decimal del 101 y la propiedad distributiva:

58 x (100+1) = 5800 + 58 = 5858.

Ahora la generalización de la regla es inmediata: Uno de los números en juego ha de ser de la forma: 1001, 10001…; el otro número ha de tener una cifra más que el número de ceros, o una cifra menos que el número de cifras, del primer número.

La ventaja de esta propuesta de enseñanza de las reglas es que no se persigue el adiestramiento en una determinada regla, sino la matematización de la misma, y éste es un objetivo más valioso que el primero.

Ejemplo 4.

Regla: Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6.

733. *Multiplicar un número cualquiera por 4 o por 6.*

Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

EJEMPLOS: 256 × 4 = ...	256	256 × 6 = ...	256
Mitad de 2560	1280	Mitad de 2560	1280
Resta, que es el producto....	1024	Suma, que es el producto..	1536

Fig. 9 Dalmau C. Aritmética razonada.1898?, Ed. de 1944, p. 341

Este método es una descomposición, ya que se sirve de alteraciones invariantes que permiten operar con cantidades menores que las dadas para obtener el resultado. En el ejemplo es la propiedad distributiva. Después se usa un equivalente numérico que permite transformar la multiplicación en división, en este caso 5 = 10/2. El fundamento, una vez escrito en el lenguaje horizontal, salta a la vista.

$$5 \times 6 = 5 \times (5 + 1) = 5 \times 5 + 5 = 5 \times 10/2 + 10/2 =$$

Las descomposiciones pueden ser introducidas desde los primeros pasos de la enseñanza de la aritmética, ya que son útiles para favorecer el aprendizaje no memorístico de las tablas y son fácilmente generalizables. Al principio el trabajo en el aula de clase puede ser intuitivo y más adelante algo más formal.

Categorías de las respuestas incorrectas en el cálculo mental

Cuando se enseña cálculo mental los estudiantes aprenden nuevos métodos, pero también incrementan el número de sus respuestas incorrectas (Gómez, 1995, b). Estas se pueden dividir en dos categorías básicas, según que la fuente de las mismas sea las condiciones con que se llevan a cabo las operaciones o la calidad del dominio de los conocimientos aritméticos.

En la segunda categoría se distinguen tres subcategorías: una primera que agrupa los fallos basados en una memorización pobremente establecida de determinados hechos numéricos, una segunda que agrupa los fallos que se basan en la forma en que han sido aprendidas las reglas, y una tercera que se basa en una falta de análisis del efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados.

Estas últimas son un producto de la enseñanza y se pueden observar en multitud de situaciones. Un ejemplo fácilmente observable se tiene con el método de redondeo, cuando a los estudiantes se les pide que resuelvan mentalmente 265 – 199, algunos dicen que la solución es 64 ya que “como 199 + 1 es 200 a 265 le quito 200 – 1”. Lo mismo ocurre con la multiplicación 19x18, para algunos la solución es 341 ya que “como 19 es 20+1, multiplico por 20; 20x18 = 360; y resto 19, 360 – 19 = 341”. Decirles que están equivocados no hará que comprendan el motivo de su error, es necesario que recapaciten y hagan el análisis de la situación viendo lo que ha fallado.

Estos comportamientos suelen permanecer ocultos mientras sólo se hace uso de los métodos de columnas, por lo que no pueden ser detectados previamente. En este aspecto el cálculo mental destaca como un dominio privilegiado para hacerlos emerger, para que los estudiantes se percaten de ellos y para que los profesores puedan ayudarles a remediarlos.

Reticencias frente a la enseñanza del Cálculo Mental

Para terminar, hay que mencionar que, a pesar de la importancia que se otorga al cálculo mental, su enseñanza no acaba de ser asumida por los profesores. Son muchas las causas que podrían explicar sus reticencias. A saber, el efecto en contra de:

- Creencias inapropiadas: obstaculiza el aprendizaje de métodos generales, es una pérdida de tiempo porque la calculadora puede suplirlo, se necesita una buena memoria, etc.
- Los sentimientos negativos del profesor: su propia dificultad y el temor al fracaso ante sus alumnos.
- Viejas teorías obsoletas. Por ejemplo, la que liga el cálculo mental con la inteligencia, o con la vieja teoría de "la disciplina mental", utilizada para identificar a los estudiantes brillantes con los rápidos y a los lentos con los torpes.
- El ambiente social que vincula el cálculo mental a profesiones poco consideradas.
- La falta de éxito con y de los estudiantes: desánimo, pérdida de interés, falta de concentración.
- La planificación oficial: masificación en el aula, presión de los programas, el escaso tiempo para la clase de matemáticas, el tratamiento del cálculo mental en "aparte" en los libros de texto.
- Algunas prácticas usuales “a ver lo que has hecho”, "a ver quién contesta antes", el énfasis en cálculo estándar que no deja sitio para la intervención libre.
- Sobrevaloraciones equivocadas: el éxito, la rapidez.
- La falta de sugerencias y materiales didácticos bien fundamentados y actualizados.

Conclusiones

Para favorecer el desarrollo del cálculo mental en la escuela es necesario actuar en varios frentes, los motivos de las reticencias señaladas nos dicen cuales son, cada uno de ellos presenta dificultades específicas. Ser consciente de ellas ayudará a hacerles frente, pero en definitiva, lo que es importante y necesario es cambiar el clima de opinión generalizado y el método de enseñanza de la aritmética. Si se quieren asumir propuestas innovadoras en este sentido éstas deben estar bien fundamentadas y hay que andar con cautela ante aquellas otras que sólo se basan en opiniones anticuadas o atrevidas. La comunidad de profesores de matemáticas tiene la palabra.

Bibliografía

- ANAYA (1993). (Serie de libros de texto). *Matemáticas 4º Primaria*. L. Ferrero, I. Gaztelu, Mª J. Luelmo, P. Mastín y L. Martínez. Grupo Anaya. Madrid.
- ANAYA (1987). (Serie de libros de texto). *Azimut. Matemáticas 4º Primaria*. Equipo Signo: Manuela A. Gómez Vázquez, Juan Álvaro Muñoz Gómez. Grupo Anaya. Madrid.
- Dalmáu Carles. J. (1944). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio*. Nueva Edición corregida y aumentada. Libro del alumno. Grado profesional. Ed. Dalmáu Carles. 1898. Gerona.
- Edelvives (1934). Serie de libros de texto. *Aritmética por Edelvives* (J. E. Gerorge Brouillette). Segundo Grado. Séptima Edición. Ed. Luis Vives. Zaragoza.
- French, D (1977). Mental methods in mathematics*. Mathematics in School.* (March), 39-41.
- F. T. D. (1923). Serie de libros de texto. *Aritmética*. Segundo Grado por F.T.D. Libro del maestro. Ed. F.T.D. Barcelona.
- Gómez, B. (1995a). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Mathema. Ed. Comares. Granada.
- Gómez, B. (1995b). Tipología de los errores de cálculo mental en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, *13*. 3. pp. 313-325.
- Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural.* Juan Gracian. Alcalá de Henares.

Bernardo Gómez Alfonso. Alzira (Valencia). 2/3/1951. He desarrollado mi trabajo en la línea de Pensamiento Numérico y Algebraico, con especial atención al estudio de su configuración histórica a través de los libros de texto antiguos.
Mis publicaciones más conocidas son los libros: *Numeración y Cálculo* (1988), de la colección Síntesis; *El cálculo mental en el contexto educativo* (1995), de la colección Mathema; y “El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría”. En Agustín Escolano (Ed.) *Historia ilustrada del libro escolar en España*, de la Fundación G. S. Ruipérez.
Se pueden encontrar artículos míos en casi todas las revistas de habla española: *Epsilon, Enseñanza de las Ciencias, Guix, UNO. Suma. Educación Matemática, Aula, Números* y *RELIME.*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 31 - 46
ISSN: 1815-0640

Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas

José Antonio Fernández Bravo

Resumen

A partir de lo que se entiende por “algoritmos”, se analiza la enseñanza actual de éstos en el área de Matemáticas, dentro de la Educación Primaria (6–12 años de edad). Desde las posibles causas de las dificultades y bloqueos didácticos más frecuentes, se cuestionan las respuestas estereotipadas de algunas preguntas convencionales. El autor distingue dos clases de algoritmos en la actividad escolar y, desde esa diferenciación, intenta destapar procedimientos perturbadores e identificar intervenciones educativas que faciliten el desarrollo del pensamiento matemático y la adquisición de su conocimiento.

Abstract

The present teaching techniques applied in Elementary Mathematics (6–12 year olds) stemming from what are known as “algorithms” are analysed. Starting off with the possible causes for common difficulties and didactic mental block, stereotyped answers to some common question are placed in doubt. The author identifies two types of algorithms that are frequently applied in school activities and from these, attempts to uncover ineffective methods and identify educational procedures that facilitate the development of mathematical thought and the acquisition of mathematical knowledge.

¿La automatización de los pasos a realizar en la aplicación del algoritmo, describe el hacer matemático? ¿Tiene sentido actualmente la enseñanza de los algoritmos sobre las cuatro operaciones básicas? ¿Qué procedimientos deberíamos favorecer y cuáles deberíamos olvidar? ¿Es posible sustituir la rutina ignorante del automatismo por la acción desafiante del pensamiento? ¿Por qué seguimos apoyando nuestra actuación didáctica en criterios tradicionales sin sentido, aún a pesar de producir en el pensamiento de nuestros alumnos un vacío de significado? ¿Qué nos aportan a los docentes los libros de texto y materiales escritos para que tanto abusemos de ellos, si admitimos constantemente que el exceso de éstos, provoca: en la enseñanza, un horrible drama; y, en el aprendizaje, el cortejo a un razonamiento perdido?

> ***Si por la acción correcta del pensamiento se entienden muchas cosas, no se entenderán aquellas muchas en las que esta acción no esté presente.***

Introducción

La Matemática está llena de algoritmos[1]: el de la multiplicación, el de la división, el algoritmo de Euclides o el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones…; son ejemplos, entre otros. En nuestra propia actividad cotidiana podemos encontrar muchos algoritmos; una misma receta de cocina, puede llevarnos a su aplicación. Podríamos decir vagamente que un algoritmo es el conjunto de pasos a realizar, necesariamente ordenados y finitos[2] para alcanzar un objetivo. Si quisiéramos obtener un artículo de una máquina, deberíamos seguir una serie de pasos: 1) Introducir una cantidad de dinero igual al precio que marca el artículo, o superior en el caso en el que devuelva cambio 2) Pulsar la selección del artículo que se desea adquirir 3) Recoger el artículo. Este sencillo conjunto de acciones ordenadas puede representar, aunque de forma simplificada, fácilmente un algoritmo. Si tuviéramos que crear un algoritmo para conseguir un determinado objetivo A en la vida real, deberíamos hacer un buen uso de la observación y del sentido común, anotando los pasos que, mediante la experimentación, nos permitieran obtener la secuencia de operaciones a realizar. A nivel científico, el proceso de creación de un algoritmo es más o menos parecido; sin separarse mucho de la idea anterior, también necesita de la observación, la experimentación y la lógica. **Sin razonamiento lógico sería imposible crear algoritmo alguno; es vital, pero también lo es un gran dominio de la materia y un pensamiento creativo**. Conviene señalar que la obtención de un mismo resultado no requiere necesariamente la aplicación del mismo algoritmo.

Krinitski (1988) distingue los algoritmos que se aplican en la vida cotidiana, de los algoritmos científicos. Los primeros se basan en la experiencia, pero no están sometidos a ningún análisis de verificación estricta y precisa; a éstos los denomina algoritmos "*en sentido intuitivo*". En la actividad escolar, nos gustaría también distinguir dos clases de algoritmos: el *"sumiso"*, y el *"innovador"*[3]. Entenderemos por **algoritmo *sumiso*** el que se impone para realizar la acción operativa, **–el pensamiento se somete a una aceptación de lo que hace sin entender por qué lo hace–,** obligando al entendimiento del alumno[4] que lo utiliza a rendirse ante la

[1] Un algoritmo se identifica en el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema. La palabra "algoritmo" se debe al matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (Al-juarizmi) (780-850) miembro de la "Casa de la sabiduría" fundada en Bagdad por el califa Al-Mamun (809-833). Al-Khowarizmi escribió un libro sobre aritmética (traducido al latín en el s. IX por Adelardo de Bath y Roberto de Chester), en el que hace una exposición exhaustiva del sistema de numeración hindú. Este sistema se empezó a conocer como «el de Al-Khowarizmi» y, por las deformaciones que tuvo llegó a la palabra «algorismi», «algorismo» o «algoritmo».

[2] Cuando el algoritmo entra en una cadena infinita de pasos y nunca terminaría de llegar a un resultado, se dice que ese algoritmo es inaplicable, para ese dato o conjunto de datos iniciales, en esa operación.

[3] He tenido que utilizar estas palabras de distinción para expresar una idea: por un lado, de difícil aceptación (ya que se cree que para algunas operaciones sólo existe un algoritmo); y, por otro, de difícil entendimiento para algunos docentes (ya que se identifica únicamente la validez del algoritmo, en la coincidencia de éste con el de la tradición didáctica heredada por ellos en su época estudiantil).

[4] Para evitar redundancia y complejidad en la lectura, debido a que en ocasiones debemos expresar la idea con demasiadas oraciones subordinadas, utilizaremos las palabras "niños, alumnos, profesores…" para designar también a: niñas, alumnas, profesoras…; respectivamente.

rutina de su aplicación. Por el contrario, el **algoritmo *innovador***, sería aquel que **se aplica con opción de decisión propia**, comprendiendo y entendiendo, tanto lo que se hace como el por qué de ello.

Un posible algoritmo en el quehacer cotidiano de la enseñanza de la matemática, puede representarse en la exposición de los pasos que deben dar nuestros alumnos para "multiplicar un número cualquiera de tres cifras por otro de una cifra", por ejemplo: *1) Multiplica el número de una cifra por el número de unidades del número de tres cifras y escribe, sólo y bajo la línea marcada, la cifra de las unidades obtenida 2) Multiplica el número de una cifra por el número de decenas del número de tres cifras y súmale al resultado, en su caso, el número de decenas obtenido en la multiplicación realizada en el primer paso 3) Como si de un solo número se tratase, del resultado obtenido en el paso 2), escribe solo el número de unidades obtenido al lado izquierdo del número que hay bajo la línea 4) Multiplica el número de una cifra por el número de centenas…*

Si al análisis de los pasos anteriores le dedicamos el tiempo necesario, nos damos cuenta que el hacer matemático no está en la aplicación del algoritmo, sino en los mecanismos intelectuales que nos han permitido llegar a él; al actuar de esa forma, les estamos presentando vagamente la conclusión del proceso intelectual que se ha llevado a cabo, y eso, a nuestro juicio, mucho se aleja del quehacer matemático[5]. **La Matemática no está en la aplicación reiterada de movimientos, sino en la cantidad de ideas que se relacionan**. Hay muchas formas de llegar al resultado si se comprende lo que se hace, y hay mil formas de multiplicar que se apoyan siempre en propiedades y relaciones matemáticas. **El algoritmo, debería ser el punto de llegada[6] y siempre como necesidad de abreviar el tiempo dedicado a la obtención del cálculo pedido.**

Si en la escuela se actuara tal y como se ha descrito anteriormente para multiplicar, por ejemplo, "un número de tres cifras por otro de una cifra", estaríamos aplicando un algoritmo *sumiso* y sería difícil desarrollar en los alumnos: la observación, la experimentación, la intuición, el razonamiento lógico, la creatividad y la emoción por el saber hacer…

Tristemente, aunque hasta ahora hayamos pretendido extrañar la realidad, es el desierto hacer cotidiano y habitual de la escuela lo que se está relatando; los sombríos avatares de los estereotipos que se representan normalmente en nuestras *sumisas* aulas. Los niños imitan sin saber por qué hacen lo que hacen o, por qué dicen lo que dicen. Cuando utilizan el algoritmo (*sumiso*), en muchas ocasiones, tardan más en obtener el resultado que si lo intentan por sus propios métodos –sus propios métodos, desde la corrección matemática, también son algoritmos

[5] Bertrand Russell (1985), escribía con énfasis de protesta: "Cuando nuestros niños mal aprenden, sin gracia, cosas acerca de las clases están recibiendo lo que queda, al paso del tiempo y bajo al apisonadora de la vulgaridad, del brillante esfuerzo intelectual de unos hombres."

[6] No conviene olvidar que una de las tareas fundamentales de la Matemática consiste en la necesidad de trabajar en una Teoría sustancial de algoritmos. Cuando el algoritmo es el punto de llegada de un proceso intelectual, éste se convierte, sin duda, en innovador.

respetables, y siempre *innovadores*–. Cuando a un niño que entiende lo que hay que hacer se le desafía convenientemente es capaz de crear originales formas de llegar al desenlace numérico. No ocurre lo mismo con los niños que se han visto sometidos desde sus primeras experiencias matemáticas a la penosa aplicación reiterada de algoritmos *sumisos*, en éstos disminuye considerablemente su capacidad para establecer relaciones y, paradójicamente, su cálculo mental se expresa con un rendimiento muy bajo, debido a que intentan imitar mentalmente la forma en que opera el algoritmo[7] impuesto.

Quizás deberíamos plantearnos una reorganización y distribución de los contenidos. **El profesor de matemáticas debería dedicarse a hacer matemáticas** y enseñar al alumno a establecer relaciones mentales a partir de la clara aplicación de propiedades. A lo largo de la historia se nos han presentado distintos algoritmos, entendiendo siempre que la función principal de éstos es la de producir automatismos. Tendría que ser responsabilidad **del profesor de Conocimiento del Medio**[8], por la transmisión de la cultura, y debería ser él, sin menosprecio profesional, el que enseñase el algoritmo que se utiliza para obtener un resultado, en este caso numérico, a partir de una determinada operación matemática; así, el niño podría elegirlos como ahorro de tiempo, entendiendo el por qué se hace como se hace; pues lo que hace, como concepto, propiedad o relación, ya se le habría explicado anteriormente en clase de matemáticas.

Actualmente no tiene sentido, iniciándose como punto de partida en la acción del algoritmo, enseñar a hacer: sumas, restas, multiplicaciones o divisiones; pues una cosa es, por ejemplo, hacer multiplicaciones y, otra, muy distinta, es saber multiplicar. Así ocurre que muchos docentes se expresan diciendo: "*no lo entiendo, mira que multiplican bien pero les cuesta mucho ver los problemas*" Si nos permitieran corregirles científicamente les diríamos que si sus alumnos supieran qué es multiplicar no tendrían dificultad alguna en identificar situaciones multiplicativas en la vida real; la dificultad educativa reside, en este caso, en que **se confunde: saber "multiplicar"** con hacer "multiplicaciones". Y, quizás de estas confusiones se obtenga como resultado, algo:

> *"Didácticamente equivocado, conceptualmente hipertrófico, científicamente inútil e históricamente absurdo",*

utilizando palabras de Pascal, como las refiere Rey Pastor (1981) en su libro "Elementos de Análisis Algebraico". Lo esencial requiere la organización de procedimientos abiertos a la oportunidad de adaptar, de renovar, reorganizar, cambiar, seleccionar, de realizar, de crear.

[7] Niños hay que cuando les preguntas por el resultado de "32 x 99" colocan… y hacen la raya en su mente y… van colocando como si lo hicieran por escrito; parece que su mente eligiera lo más difícil de realizar, pero eso no es así: su mente elige simplemente el único recurso que posee.

[8] "Conocimiento del Medio Natural y Social" es una asignatura que se contempla en España en el curriculum de Educación Primaria (6–12). Con este área como ejemplo, nos referimos a los profesores responsables de la cultura Social y tradición histórica de un país.

Hoy, ni siquiera tiene ya sentido enseñar a: sumar, restar, multiplicar y dividir, como fin en sí mismo (algoritmos *sumisos*). Eso se exigía hace unos años en las escuelas porque se necesitaba entonces para abrirse camino en la vida, –y aproximadamente hasta finales de la primera mitad del siglo pasado–. Esto no quiere decir que no haya que hacer uso en la escuela actual de esas operaciones, pues cometeríamos un grave error si hiciéramos una falsa interpretación de estas ideas. Lo que se intenta decir es que **el uso de las operaciones se haga desde una evidente realidad matemática** y, más que la finalidad sea hacer sumas, restas… el objetivo consista en utilizar las sumas, las restas… **como medio para desarrollar el pensamiento** (algoritmos *innovadores*). Pero estas expresiones que aquí hemos utilizado: si son fáciles de entender, no son fáciles de aceptar; por lo que nos vemos obligados, antes de expresar algo sobre cómo a nuestro juicio se debería proceder para la elaboración de algunas ideas principales de las cuatro operaciones básicas, a analizar lo que debe entenderse por conocimiento matemático, incidiendo brevemente en los estereotipos de su enseñanza, los avatares de su aprendizaje y el "requerido" uso de materiales y recursos.

> *"Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan. Los aderezos técnicos de esta materia, su simbolismo y expresiones formales, su desconcertante terminología, su aparente deleitarse con cálculos larguísimos: todo ello tiende a ocultar su auténtico carácter (…) Esta ciencia no trata de símbolos y cálculos. (…) El objetivo de las matemáticas son los conceptos. Se trata sobre todo de ver el modo en que los diferentes conceptos se relacionan unos con otros. El objetivo de las matemáticas es comprender (…) No se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien en comprender por qué existe una respuesta, (…) Pero lo que sobre todo tienen es significado. (Ian Stewart, 2004: 13–14)*

1. Sobre la enseñanza de la Matemática

Son muchas las personas que sin estar cercanas al mundo de la enseñanza de la Matemática preparan con éxito, según las exigencias académicas, a los estudiantes que durante el verano tienen que asegurarse al menos un aprobado en septiembre. Revistas y periódicos anuncian el evento: "Estudiante de secundaria da clases particulares a niños…"; "Periodista ayuda a redactar problemas…" "Ama de casa con buenos conocimientos en matemáticas imparte clases…" Podríamos preguntarnos si existe, o no, diferencia entre: un profesional, un amateur, un especialista, un experto y un aficionado a la enseñanza de las matemáticas. La respuesta se puede encontrar, quizás, matizando una diferenciación esencial: una cosa es dedicarse a enseñar matemáticas y, otra, muy distinta, dedicarse a desarrollar el pensamiento matemático. ¿**Cuál sería entonces el objetivo de la enseñanza** en esta área del saber y cuáles deberían ser sus exigencias académicas: exponer información y contenido para recoger por imitación lo que dicta; o, por el contrario, preguntar, suponer, provocar y desafiar para descubrir el conocimiento y conquistar el espíritu del hacer matemático?

Dicen que las matemáticas enseñan a pensar. Sin embargo, muchos docentes advierten que eso no sucede en la clase de matemáticas; en ella aseguran: *no se piensa.* Esto puede deberse a dos razones fundamentales: Una, que las matemáticas no enseñen a pensar y hayamos sido víctimas de un engaño universal; otra, que en clase de matemáticas se haga de todo, menos Matemáticas. Son muchos los profesionales de la educación los que también admiten que **se pierde mucho tiempo en rellenar ejercicios de libros vacíos de actividad rentable**, con el único fin de entregar a los padres carpetas llenas de fichas o cuadernos repletos de números, prueba del trabajo y de la constancia y del contenido elaborado, pero lejos, muy lejos, –como se puede comprobar–, de explicar conocimiento[9] alguno. Hay que hacer el libro de texto, copiando los ejercicios en el cuaderno. Después, y sin demorar mucho el tiempo –que no se pierda– cuadernillos de problemas en grupo: "*Los problemas y yo para la cooperación y la convivencia*"; para añadir un librito que también hay que hacer sobre la numeración y el desarrollo de la atención por aplicación al trabajo individual: "*Atención a los numerito, para jugar solito*"; también hay que hacer el cuaderno de *repaso*. Después del cuaderno de *repaso* tenemos, para los más desfavorecidos: *El cuaderno de Refuerzo*; y, para los más aventajados: *El cuaderno de Ampliación*. Todo esto hay que programarlo debidamente (un auténtico rompecabezas para encajarlo en unas cuantas horas), saber cuándo hay que utilizar cada material, la secuencia que se establece y el tiempo que a cada uno se dedica. Y, como no podemos contar con el sábado y el domingo, aunque de vez en cuando mandemos algunos deberes disfrazados, nos damos cuenta… que no llegamos, así que lo mejor es indicarles en ocasiones a nuestros alumnos lo que tienen que poner, con el fin de que todo esté perfectamente completado –que no digan nunca que no hacemos bien nuestro trabajo–.

2. Sobre el aprendizaje de la Matemática

La Matemática es una actividad mental. El pensamiento matemático se desarrolla cuando se hace Matemática. Hacer Matemática implica ante todo establecer relaciones. El rigor va unido a la Matemática desde las primeras experiencias que el niño tiene para conseguir conocimiento. Pero rigor no es abuso de formalización y simbología sin significado; **rigor es, ante todo: claridad mental**. El desarrollo del pensamiento no se consigue solo cuando trabajamos actividades de un contenido específico, sino en el momento en el que una acción o un conjunto de acciones se esfuerzan por conquistar la construcción de una idea. Formular unas cuantas observaciones indicativas con el fin de subrayar que el niño ha realizado actividades para desarrollar el pensamiento nada dice sobre el verdadero desarrollo, si descuidamos la emoción, la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento de las demás actuaciones, procesos, estrategias, comportamientos y

[9] Nos referimos al conocimiento matemático. La elección, si cabe, entre proceso y resultado o la exactitud del número frente al rigor del pensamiento. Muchas veces se mutila el proceso afianzando una forma más cómoda, según el profesor, para responder a los "contenidos". "Así pues dime, y sin miedo, qué es lo que tú piensas que es el conocimiento". (Platón (1985) "Sócrates. Teeteto")

diálogos. Toda acción lógica que opere significativamente en el aprendizaje de la Matemática debe, a nuestro juicio, desde la enseñanza:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción. Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el “bien” o “mal” como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.
- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen, motiven porque actualizan las necesidades del alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,…
- Habituar al alumno a explicar; fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de “porque sí”. Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.

Un profesor o profesora[10] de matemáticas permitirá que sus alumnos establezcan relaciones y encaminará sus estrategias didácticas hacia la comprensión, desde la realidad mental y la evidencia lógica. Formulará preguntas que provoquen claros desafíos al pensamiento, sin decir en modo alguno cómo se piensa. Favorecerá creativamente la discusión y el diálogo, dirigido a la investigación: “¿Qué pasaría si…?” “Supongamos que…” Y pondrá en todo momento a disposición del alumno mecanismos válidos de autocorrección. Si esto se acepta, **¿qué sentido pueden tener en la enseñanza de la Matemática los algoritmos *sumisos*?**

Aún a pesar de estar totalmente admitido que la Matemática es una actividad mental**, seguimos imponiendo, sin carácter científico y bajo la perezosa sospecha de la apatía,** ese dogma prescriptivo: “así se hace”, “así se coloca”, “así se resuelve”, “así se calcula”…; protocolo aburrido y penumbra intelectual de un extraño secreto, justificado por la orgullosa acción de terminar un programa sin calidad, que, por los resultados obtenidos de las evaluaciones externas, ni siquiera imprime cuantificación académica. Seguimos vistiendo a la Matemática, desde la enseñanza, con ese falso atavío de ojos tristes, símbolos mezquinos y largas faldas negras, y, en su aprendizaje se la reconoce, entonces, lejos de esa razonada elegancia discreta que la caracteriza y que, quizás, no sepamos transmitir.

[10] No tiene sentido distinguir entre un “buen” profesor y uno “malo”, pues esa diferenciación es en sí misma incoherente. Más sentido tiene hablar de “profesores” o “no profesores”, aunque ambos se ganen la vida mediante una actividad docente.

3. Sobre el uso de materiales y recursos

El material es un medio dirigido a producir en el que aprende resultados fructíferos. Si no los produce hay que evitar su utilización. El uso de materiales y recursos en el aula es consecuente, en su hacer didáctico, con la interpretación que se tenga de la Matemática. Que los materiales "didácticos" se apliquen en el trabajo de clase no significa que cubran los altos desafíos educativos como el aprendizaje significativo y funcional o el hacer heurístico. Es la pedagogía utilizada la que nos conduce, o no, al cumplimiento de tales objetivos. El empleo del material es, sin duda, más que necesario, pero **si ha de ser fructífero y no perturbador, debe llevar implícito un fuerte conocimiento de los procesos intelectuales que se pueden conseguir y de cómo se consiguen**. Algunos de nosotros creemos estar en la moda pedagógica por el mero hecho de utilizar materiales; sin embargo, la metodología que utilizamos para dirigir su manipulación se encamina más, a convencer a los niños de lo que tienen que ver, que a permitir que nos digan lo que realmente ven; y eso, ya está totalmente demodé, sobre todo cuando el esfuerzo se dedica a buscar algo que permita la exclusiva adquisición de la rutina algorítmica. Así, por ejemplo, se inventan un cuento para colocar las unidades con las unidades y las decenas con las decenas: "*Érase una vez un pueblo en el que había un río. A ambos lados del río había casas. Los habitantes no se podían mezclar: los del lado derecho tenían que ir a sus casas que estaban en el lado derecho, y los del lado izquierdo tenían que ir a sus casas que estaban en el lado izquierdo, pasaba entonces que…*" Después de todo este rollo hacemos una falsa analogía y, colocando verticalmente 23 + 45, intentamos convencer de la similitud que tiene esto con el cuento del río –las casas de la derecha y, las de la izquierda–; así, fácilmente ve el niño que los números de la derecha se suman juntos, como se debe hacer con los de la izquierda, sin poder mezclar unos con otros. A mi juicio, esto sirve de poco para el hacer matemático: ¿Por qué las decenas y las unidades tienen que estar separadas por un río? ¿Cómo tienen que ser las casas de las decenas? ¿Y las de las unidades? ¿En qué relación intelectual se representa el habitante y el habitáculo?

> *Las decenas y las unidades se relacionan por equivalencia de cantidad que define el Sistema de Numeración Decimal: "diez elementos de un orden equivalen a un elemento de un orden inmediatamente superior".*

¿Qué sucederá cuando se trabaje con tres cifras? ¿Cuántos ríos debería haber en el cuento? ¿Es necesario advertir que las unidades van con las unidades y las decenas con las decenas? Ya se sabe que no es necesario advertirlo. El problema no es la suma; la gran dificultad está en el concepto de número. **Confundimos muchas veces causa y consecuencia**, y más que dirigir nuestros esfuerzos a saber matemáticas, perdemos mucho tiempo en enseñar formas y procedimientos que nos llevan a obtener un resultado, carente de significado y posibilidad de extensión del saber. Sin embargo, no faltan docentes que se expresan diciendo: "*bueno por lo menos suman y ya no tiene fallos*" Pensemos: Si llueve y lo que yo quiero es que deje de llover, tengo que centrarme en su causa y, meterme bajo un tejado no arregla nada. Que cuando llueva te mojes, no quiere decir que cuando no te mojes haya dejado de llover. No se ha estudiado la causa; la lluvia sigue ahí, y la dificultad pronto surgirá de nuevo.

Veintitrés (23) es el dibujo convencional para representar dos elementos “diez” y tres elementos “uno”; 45 es el dibujo para representar cuatro elementos “diez” y cinco elementos “uno”. Si sumo 23 + 45, lo que obtengo, lo coloque como lo coloque, son seis elementos “diez” y ocho elementos “uno” y eso, en matemáticas se representa así: 68; la suma es un número.

La adición

La suma es un número. La esencia de nuestro Sistema de Numeración se representa en la comprensión del número de dos cifras[11]. Los contenidos previos necesarios para entrar con éxito en el desarrollo y la comprensión del número de dos cifras, están en el dominio del número de una cifra. Algunos de los que se dedican a la enseñanza entienden por dominio de número de una cifra: saber contar[12], –estableciendo una correspondencia, entre el orden de los números naturales y, todos y cada uno de los distintos elementos–. Contar es una actividad matemática, pero no exclusiva del hacer de esta ciencia y, quedarse ahí es saber poco del número de una cifra. He podido comprobar cómo muchos niños, lo único que saben, por ejemplo, del número ocho es que va después del número siete y antes del número nueve. Es importante que un niño sepa que nueve equivale también a: cinco más cuatro, o, seis más tres; al tiempo que sea capaz de establecer una dinámica de relaciones con otras descomposiciones numéricas: si nueve equivale a cinco más cuatro, y cinco equivale a tres más dos, entonces, a nueve también se le puede representar como tres más dos más cuatro. El dominio del número de una cifra, implica conocer esos números desde la pluralidad que los define y relaciona. Es fundamental conocer las descomposiciones aditivas que equivalen a un número dado, como lo es, por reversibilidad, encontrar fácilmente el resultado que equivale a una descomposición dada.

Hasta aquí, se puede entender que lo que se precisa del niño es llegar al resultado de una suma, pero esto no es del todo cierto; ya hemos expresado anteriormente que, una cosa es sumar y, otra –muy distinta– es hacer sumas. He visto cómo muchos niños calculan el resultado de una suma mediante conteo, más que mediante relaciones y aplicación de propiedades; yo no hablo de contar –técnica que supongo superada– sino de sumar: que un niño sea capaz de descomponer un número de una cifra, con rapidez y precisión, en tantas expresiones diferentes, mediante la adición, puedan darse por equivalentes:

8 = 5 + 3; 4 + 4; 7+ 1; 5 + 2 + 1; 6 + 1 + 1; 3 + 3 + 1 + 1...

[11] Para profundizar en la didáctica del número de dos cifras se puede consultar: Fernández Bravo, J.A. (2004): El número de dos cifras. Editorial CCS. Madrid

[12] Para profundizar en una didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática se puede consultar: Fernández Bravo, J. A. (2005): Enséñame a contar. Investigación didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática. Grupo Mayeútica. Madrid.

Esto puede parecer interminable, pero no lo es si se procede con un hacer matemático. Me explico: si partimos de las sumas de dos y sólo dos sumandos, el trabajo se queda reducido considerablemente. Si trabajamos la propiedad conmutativa de la adición, las descomposiciones básicas de los cinco primeros números cardinales que tendría que saber el alumno, serían las siguientes, y sólo esas:

2= 1+1
3= 2+1
4= 3+1; y, 2+2
5 = 4+1; y 3 + 2

Obsérvese que no es necesario amargar al niño con más descomposiciones. Esas son todas, podríamos decir, a partir de las cuales, como descomposiciones básicas, se podría trabajar matemáticamente. Mediante una dinámica de relaciones, se pueden ir sustituyendo las descomposiciones aprendidas. Así, se sabe que: 5=4+1; pero, como también sabemos que, cuatro es igual a 3+1, o, 2+2, podremos sustituir y expresar cinco como: 3+1+1, o, 2+2+1; pero, como sabemos que 3=2+1, podremos seguir sustituyendo y expresar cinco, por ejemplo, como: 2+1+1+1.

Idénticos razonamientos podríamos aplicar a la forma de proceder con los siguientes números de una cifra, partiendo de sus descomposiciones básicas:

6= 5+1; 4+2; 3+3
7= 6+1; 5+2; 4+3
8= 7+1; 6+2; 5+3, 4+4
9= 8+1, 7+2; 6+3; 5+4

El aprendizaje de estas descomposiciones básicas por el alumno es objetivo principal en la enseñanza y ayudarán posteriormente a hacer uso práctico de las descomposiciones de los números múltiplos de 10, de 100, de 1000,… (50= 40 + 10; 30 + 20) El buen uso de los Números en Color o regletas ayuda considerablemente a este aprendizaje, así como cualquier otro material que, por su estructura, permita generar esas descomposiciones con la manipulación del alumno y descubrirlas por sus propios medios. Una vez percibidas, distinguidas e identificadas, podemos ayudar a establecer con ellas relaciones a través de cuentos[13], canciones, adivinanzas, etc.

> *"Las cifras son números particulares a los que se confía la tarea de representar los números" (Denis Guedj, 1998: 34)*

Para avanzar, tendríamos que trabajar con el número 10, y estudiar sus parejas de sumandos: 9+1; 8+2; 7+3; 6+4; 5+5. Deberíamos enseñar al niño a pensar "decimalmente", por una simple relación lógica con nuestro sistema de numeración,

[13] Existen cuentos como: "La caja de números I y II", o, "El hipopótamo gracioso y fuerte", publicados por la editorial CCS de Madrid, que ayudan por su aplicación a la retención de las descomposiciones básicas. Estos cuentos facilitan la comprensión de una estructura de composición-descomposición.

ya que éste es decimal, y conseguir que su mente busque constantemente el número 10.

Ejemplos:

- 6 + 2 + 4 = 10 + 2 = 12
- 7 + 5 = 5 + 2 + 5 = 10 + 2 = 12
- 9 + 8 + 4 = 9 + 8 + 1 + 1 + 2 = 10 + 10 + 1 = 21
- 56 + 25 = 50 + 6 + 20 + 5 = 70 + 5 + 1 + 5 = 70 + 10 + 1 = 81
- 324 + 89 = 300 + 20 + 3 + 1 + 80 + 9 = 300 + 100 + 10 + 3 = 400 + 13 = 413

¿Qué más hay que saber? La Matemática trabaja con el mínimo discurso lógico, la didáctica también debe hacerlo.

La sustracción

La resta no existe como operación independiente. Para saber restar es necesario saber sumar. La operación de restar se estudia principalmente, en la Educación Primaria, como sustracción y como complementariedad.

La representación matemática de la resta como sustracción no es fácil para el niño, debido a que el sustraendo se representa como cantidad distinta, sin serlo; ya que ésta lo que indica es la acción que se realiza sobre la cantidad total. Así, por ejemplo en: 5 – 3, el 5 indica la totalidad de elementos y el 3 la acción que sobre ese 5 se realiza. Como vemos no existen dos cantidades diferentes, ya que el 3 es parte del 5. Lo que existe es exclusivamente 5.

Para estudiar la resta por complementariedad, partiremos de las parejas de sumandos que equivalen a un número de una cifra, mayor que el número uno. En primer lugar trabajaremos hasta el número nueve, luego trabajaremos el número diez (9 +1; 8+2; 7+3; 6+4; 5+5), para terminar con la extensión a números múltiplos de 10, de cien, de mil… en función de la edad.

La multiplicación

¿Por qué hay que trabajar las tablas de multiplicar en orden? ¿Por qué no se establecen y estudian relaciones entre las tablas de multiplicar? ¿Por qué hay que distinguir entre multiplicar por una cifra, por dos o más de dos? Supongamos que me preguntan por el resultado de 9 x 7, con seguridad se me ha olvidado, pero si me han enseñado a establecer relaciones sé que nueve veces, equivale a: diez veces menos una vez, rápidamente obtendré el resultado desde “70 – 7”. Es conveniente ver que la tabla del 8 es doble de la tabla del 4. Y que la tabla… Supongamos que tenemos que multiplicar 123 x 98, a alguien se le ocurrirá multiplicar 123 por 8 y por 90, con independencia del orden; otro, sin embargo, observa los números y multiplica: 123 por 100, multiplica 123 por 2 y, posteriormente, resta los resultados obtenidos; otros, pueden multiplicar 123, por 50 y por 40 y por 4 y por 4, solo utilizarían la tabla del 5 y del 4, y también obtendrían el resultado correcto.

> *¿Qué sentido tiene seguir escribiendo esas filas de ceros y dejando espacios, sin saber por qué?*

La división

La división no existe como operación independiente. Si se sabe multiplicar se sabe dividir. En primer lugar habría que estudiar la división como inversa de la multiplicación. Después, podríamos estudiar el significado del resto de una división, para terminar estableciendo relaciones que nos permitieran calcular el cociente de una división cualquiera.

1. Introducir la división como inversa de la multiplicación: 12 dividido por 3 equivale a 4, porque 4 multiplicado por 3 equivale a 12.
2. Estudiar el resto: El número de elementos que sobran al hacer grupos no puede ser mayor que el número del divisor.
3. La relación "divisor por cociente" no puede ser mayor que el dividendo: El número total de elementos utilizados para hacer grupos, no puede ser mayor que el número de elementos de que disponemos. Se suele confundir en la introducción de esta operación el resto por defecto con el resto por exceso, siendo costosa la diferenciación del "sobran" con el "me faltan".

4. Un ejemplo de intervención en el aula

Una vez estudiados con nuestros alumnos (niños y niñas de 8 años de edad) los tres apartados anteriores, planteamos ejercicios numéricos para observar lo que hacían y cómo lo hacían. Como nada sabían sobre el algoritmo convencional aplicaban los tres puntos descubiertos, investigando con ellos la veracidad del cálculo obtenido:

613 / 9 ; 4032 / 517 ; 809 / 72 ; 1007 / 502 ; 593 / 106 ; 89 / 7 ; 8035 / 906

No distinguíamos entre dividir por una o varias cifras[14]; era irrelevante, las relaciones eran las mismas. Después de unas cuantas divisiones de las que surgían una serie de situaciones intelectuales propias, se iban creando significativas estrategias de resolución, de insospechada procedencia para nosotros, que les hacían ganar tiempo:

[14] Una de las causas por lo que los maestros no tenemos el reconocimiento social que merecemos es porque, a estas edades, el padre o la madre pueden enseñar (cuando no la tía que está en Bachillerato y sabe más, o una vecina que estudia informática y se ha comprado un ordenador). Si permitimos que aprendan con ellos lo mismo que pueden aprender con nosotros, no habrá ningún reconocimiento; no existen pautas de diferenciación profesional y los parámetros de capacitación no se perciben socialmente.

- Buscaban un número (cociente) aproximado, redondeando dividendo y divisor

846 / 136 → 800 / 100

Números de los que partían para seguir buscando.

- Multiplicaban el divisor por múltiplos de diez para tener puntos de referencia respecto al dividendo,

846 / 136 136 x 10 = 1360

846 < 1360 → Número del cociente < 10

- Intuían en la investigación la proporcionalidad de los resultados,

846 /136 Supongamos que empezaban multiplicando por tres;

136 x 3 = 408. Observaban que 846 era aproximadamente el doble de 408. El siguiente número utilizado como cociente era seis;

136 x 6 = 816; 846 – 816 = 30; 30 < 136.

He querido resaltar estas tres estrategias, demostrando que pueden ser descubiertas[15], porque son de las que, paradójicamente, solemos informar.

> *"Se ha comprobado que el interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición." (Puig Adam, 1956:5)*

Observemos algunos modos de proceder de los niños con la división: 645 dividido por 47 (645 / 47)

No diferenciaban la relación por las cifras que tuviese el divisor. Les daba igual que el dividendo tuviese ceros intercalados, que los tuviera el divisor, o que existieran en el cociente; que la división fuese exacta o entera.

Estrategia A) 645 / 47

47 x 10 = 470; 47 x 12 = 564
645 – 564 = 81 → Se pueden hacer más grupos.
81 > 47
47 x 15 = 705 → Se utilizan más elementos.
Prueba con números entre 12 y 15. Lo consigue en 13.
47 x 13 = 611; 645 – 611 = 34 → Es posible.

[15] La Matemática no se estudia, se hace desde una disposición mental. No hay que esperar a estudiar vectores, integrales o matrices para que el alumno haga Matemática. Se puede hacer Matemática a cualquier edad al igual que se puede dejar de hacerla aunque estemos trabajando con derivadas parciales.

Estrategia B) 645 / 47

47 x 10 = 470. Sobran muchos. Según él unos 200.
47 x 15 = 705 → Se pasaba.
Lo consigue en 13, mediante ensayo y error, sabiendo que el número es mayor que 10 y menor que 15.

Estrategia C) 645/ 47

47 x 10 = 470
47 x 20 = 940 Esta entre 10 y 20, nos dice.
Elige números y lo consigue en 13.

Estrategia D) 645/ 47

Elige al azar el número 18 para empezar.
47 x 18 = 846; 846 – 645 = 201
Como se pasa en 201 elementos busca grupos de 47 con esos 201 elementos:
201 / 47 → 47 x 4 = 188 → 4 grupos
Piensa, entonces, que se ha pasado en cuatro grupos y resta los grupos:
18 – 4 = 14 grupos.
Comprueba: 14 x 47 = 658. Se pasa por muy poco, según él.
Lo consigue en 13.

Estrategia E) 645/ 47

Elige al azar el número 7 para empezar.
47 x 7 = 329; 645 – 329 = 316.
Se da cuenta que le faltan "otros tantos" elementos (645 → (aprox.) doble de 329)
Prueba con 14 grupos: El doble de 7 grupos. Comprueba.
Lo consigue en 13.

Los niños generaban estas estrategias sin conocer el algoritmo tradicional de la división. Posteriormente, se les presentó éste y, no sólo lo entendieron; aún más: nos ayudaron a mejorarlo[16]. Después, ellos elegían y lo utilizaban libremente; era una acción más para la obtención del resultado.

> *La asociación Nacional de Educación, en una declaración de 1961 titulada El objetivo central de la educación norteamericana, expone:*
>
> *"El objetivo que dirige y fortalece a todos los otros objetivos de la educación –el hilo común de la educación– es el desarrollo de la capacidad para pensar" (Mayer, 1986)*

[16] Para profundizar se puede leer el artículo sobre la iniciación a la división, de Fernández Bravo, 1995.

5. Ideas finales

La enseñanza de los algoritmos gozará actualmente de sentido, en la medida que permita una **atención a la diversidad de ideas** –pluralidad que enriquece la amplitud de estrategias significativas–, respetando procedimientos propios y desarrollando la fecundidad de éstos; no en tanto al contenido que presenten, sino en tanto a las relaciones que se puedan articular en la mente del alumno.

De nada servirán actuaciones didácticas aisladas, desprovistas de relación e interconexión de conceptos; aunque estén perfectamente dirigidas, debilitarán la comprensión y el entendimiento. **Crear en la mente una dinámica de relaciones y ser capaz de estructurarlas al ser conscientes de ellas, forma parte del proceso de actividad matemática**, y esta actividad se puede presentar también a través de los algoritmos, siempre que el trabajo con ellos favorezca en el niño la creación de criterios válidos para la construcción del conocimiento.

No tendría sentido, sin embargo, *ver si "cabe" o "no cabe" –no sé el qué ni dónde– o seguir "bajando" del dividendo la cifra siguiente, o "llevarse" a… –no sé qué sitio– en no sé qué operaciones*, sin entender nada de lo que se hace o del por qué se hace como se hace; de ser así, **la enseñanza de los algoritmos cambiará: los avatares de la creatividad, por el automatismo estereotipado; la lógica del razonamiento, por el sistema de la rutina; y, un pensamiento que comprende, por un ignorante convencimiento.**

El campo de acción de la Matemática es el pensamiento y, el pensamiento es en sí mismo un acto creativo; los latidos del pensamiento son las ideas: ¿Cuánto tiempo nos queda para que la escuela distinga y acepte la sustitución, sin resignación ni maquillaje, del algoritmo *sumiso* por el *innovador*?

Bibliografía

- Boyer, C. (1987): Historia de la Matemática. Alianza. Madrid.
- Cockcroft, W.H. (1985): Las matemáticas sí cuentan. MEC. Madrid.
- Dewey, J. (1998): Democracia y Educación. Morata. Madrid. (Ed Original, 1916)
- Fernández Bravo, J. A. (1989): Los Números en Color de G. Cuisenaire. Seco-Olea. Madrid (Prólogo del Profesor Alberto Aizpún)
- Fernández Bravo, J. A. (1994):"¿Es la multiplicación una suma de sumandos iguales?" Comunidad Educativa. Mayo, 215, 36–42. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (1995):"Fundamentos epistemológicos del aprendizaje-enseñanza por investigación. Iniciación a la división". Comunidad Educativa. Septiembre-Octubre, 226, 36-41. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (2.000): Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. CISS/PRAXIS. Barcelona.
- Fernández Bravo, J. A. (2.002): La Numeración y las cuatro operaciones básicas: La investigación y el descubrimiento a través de la manipulación. Editorial CCS. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. (2.004): El número de dos cifras. Editorial CCS. Madrid

- Fernández Bravo, J. A. (2.005): Enséñame a contar. Investigación Didáctica sobre la técnica de contar como actividad matemática. Grupo Mayéutica. Madrid
- Fernández Bravo, J. A. y J.C. Sánchez Huete (2.003): La Enseñanza de la Matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas. Editorial CCS. Madrid
- Traducido al Portugués (2.005): O ensino da matemática. Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Artmed. Brasil
- Ian Stewart (2004): De aquí al infinito. Las matemáticas hoy. Crítica. Barcelona
- Krinitski, N. (1988): Algoritmos a nuestro alrededor. Editorial Mir. Moscú.
- Le Lionnais, F. (1962): Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Editorial Universitaria. Buenos Aires.
- Mason, J. /Burton, L. /Stacey, K. (1988): Pensar matemáticamente. Mec-Labor. Barcelona.
- Mayer Richard, E. (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Paidós. Barcelona.
- Platón (1979): Teeteto en Obras Completas. Aguilar, 2ª ed., 4ª reim., Madrid.
- Puig Adam, P. (1956): Didáctica. Matemática. Eurística. Institución de Enseñanza Laboral. Madrid
- Rey Pastor, J. (1981): Elementos de Análisis Algebraico. Madrid. Biblioteca Matemática
- Russell, B. (1985): Escritos básicos I. Planeta-Agostini. Barcelona
- Stephen J. Chinn y J. Richard Ashcroft (1999): Mathematics for Dyslexics. A teaching Handbook. Whurr Publishers. London
- Wittgenstein, L. (1987): Observaciones sobre los fundamentos de la Matemática. Alianza Editorial. Madrid

José Antonio Fernández Bravo, maestro, Licenciado y Doctor. Es profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", (Universidad Complutense de Madrid) en el Departamento de Ciencias y Matemáticas. Imparte cursos y conferencias en distintas instituciones y numerosos Congresos Nacionales e Internacionales. Autor de cuentos, obras de teatro, juegos, materiales, artículos y libros, sobre Metodología Didáctica para la Enseñanza de la Matemática: Los Números en Color de G. Cuisenaire, 1989; Didáctica de la Matemática en Educación Infantil, 1995; Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos, 2000; La Numeración y cuatro operaciones básicas, 2002; El material Numerator. (Juego para el alumno), 2002; El Número de dos cifras, 2004; *El Hipopótamo gracioso y fuerte*, 2002; *Los animales que se escaparon del circo*, 2002; Enséñame a contar, 2005; entre otros.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 47 - 49
ISSN: 1815-0640

Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos

Jesús Mario Iglesias Pérez

Resumen

Con el presente trabajo pretendemos exponer algunas ideas sobre la enseñanza de los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división; y al mismo tiempo plantear la alternativa de otro tipo de algoritmos, más personales y funcionales que los que se suelen enseñar a los alumnos de la Enseñanza Primaria en la mayoría de nuestros colegios, y el uso de la calculadora como un elemento básico y actual que permite una mejora en el rendimiento de los alumnos y una mejor adaptación a la sociedad actual.

Tras unos cuantos años de experiencia en nuestras aulas, nos hemos dado cuenta que cuando, con toda nuestra buena intención, transmitimos a nuestros alumnos estrategias estandarizadas y generalizadas por los adultos, lo que inconscientemente estamos consiguiendo es anular la posibilidad de que ellos busquen, experimenten y descubran sus propias estrategias de cálculo, tan eficaces, o más, que las que intentamos transmitir.

Un ejemplo claro, lo vemos cuando a nuestros alumnos les presentamos cálculos del tipo: 148+26, 63–25, o bien, 142 x 3 y ellos comienzan a realizar el cálculo siempre por la izquierda, por la unidad mayor; mientras que cuando nosotros trabajamos los algoritmos tradicionales, siempre comenzamos por la derecha. Tal vez ellos lo resolverían de la siguiente forma:

148 + 26	**63 – 25**	**142 x 3**
100 + 40 + 8 + 20 + 6	(60 +3) – (20 + 5)	(100 x 3) + (40 x 3) +(2 x 3)
100 + (40 +20) + (8 + 6)	60 – 20 = 40	300 + 120 + 6 = **426**
100 + 60 + 14	40 – 5 = 35	
100 + 60 +10 + 4 = **174**	35 + 3 = **38**	

¿Qué ocurre con este tipo de cálculo?, ¿realmente se suele trabajar en nuestros colegios, o más bien se utiliza fuera de ellos, en el día a día? Y si esto es así, y funciona en nuestra vida cotidiana, ¿por qué no en las escuelas?

No se trata de enterrar de un plumazo una parte de lo que le ha dado sentido a la enseñanza del cálculo, sino de hacer ver que existe otra forma de calcular, más personal, usual, versátil y funcional; y que ese tipo de cálculo también se puede enseñar y trabajar en las clases, con una clara diferencia al tradicional: no solo enseña el maestro, sino que éste, también puede aprender estrategias de sus alumnos.

Además, y a la par, en nuestra vida cotidiana, cuando el cálculo mental se nos hace difícil o costoso, recurrimos a una herramienta habitual, **la calculadora**.

Tal vez hace algún tiempo el trabajar los algoritmos tradicionales en los colegios haya tenido su sentido y utilidad, dado que las condiciones no ofertaban muchas alternativas, pero hoy, y gracias a los avances tecnológicos y condiciones socioculturales, creemos que tenemos en nuestras manos una herramienta generalizada, fácil de manejar y útil: la calculadora. En cualquier centro de trabajo, o en la vida diaria, en el momento que se necesita realizar un cálculo, se utiliza la calculadora o el cálculo mental. Es muy difícil encontrarnos a alguien realizando cálculos con lápiz y papel… (salvo en las escuelas).

¿Existe una realidad escolar y otra realidad sociocultural? Si la escuela debe preparar para la vida, ¿no se da una contradicción en los planteamientos a la hora de trabajar con nuestros alumnos la forma de cálculo en las operaciones básicas, un tanto distante de la vida real? ¿Cuánto tiempo se suele dedicar en los centros escolares a la realización de ejercicios repetitivos, con unas pautas estandarizadas, para terminar el maestro o maestra poniendo una B o una M, nada significativos para nuestros alumnos, en lugar de que trabajen la resolución de problemas, la búsqueda de estrategias funcionales de cálculo y el uso de materiales comunes en la vida diaria, como la calculadora o los programas a través del ordenador?

Es indudable que la calculadora, o el ordenador, no deben sustituir las capacidades de cálculo y razonamiento del alumnado, que éste debe desarrollar, además, de desarrollar la estimación, o de dominar las distintas operaciones básicas. Pero lo que también es indudable, al menos para nosotros, es que es un recurso que se puede, y debe, utilizar en el aula y ya desde los niveles de infantil, puesto que existen actividades que favorecen el desarrollo de estrategias de contar, seriar, etc. Lo mismo que a conducir, se aprende conduciendo,… a usar la calculadora, se aprende usándola. Además, es un instrumento de uso cotidiano, habitual, de fácil manejo, de escaso coste y sobre todo…rápido y práctico.

Una de las mayores dificultades que encontramos para adoptar este tipo de forma de trabajo viene dada por la actitud reacia por parte del profesorado. Unas veces justificando que "siempre se hizo así y no hay por qué cambiar", otras veces, con una actitud abierta, pero con miedo a lo desconocido y a que "no pueda controlar la situación", cosa que sí se puede hacer fácilmente con los algoritmos tradicionales escritos. También, en ocasiones, "los programas" son una de razones eximidas para evitar experimentar nuevas formas de trabajo en el aula. A todas estas, y muchas más reticencias, hay que añadir la inseguridad que supone el aventurarse a experimentar algo nuevo, y más abierto que unos programas totalmente "cerrados" y encaminados a que el alumno sea capaz de repetir con seguridad lo que el profesor ha explicado en la clase.

Ante esto creemos que una cuestión básica es el cambio de rol del maestro. En una sociedad donde una de las características es el constante cambio, un papel tan fundamental en la formación de los futuros profesionales debería plantearse también algún tipo de cambio. Ya dejaría de ser un mero transmisor de conocimientos, para pasar a ser un dinamizador de las aulas, el creador de “conflictos cognitivos” que darían lugar a situaciones de descubrimiento del conocimiento por parte de nuestros alumnos, donde se desarrollaría un pensamiento independiente y autónomo, donde se debatiera e intercambiaran puntos de vista con seriedad y reconociendo que en ocasiones puede suceder que también el maestro aprenda del alumno.

Sabemos que todo este cambio supone un proceso lento, que implica, ante todo, estar dispuesto a renunciar a “lo seguro y lo de siempre” y a moverse en terrenos que, a veces, no podemos controlar según nuestras perspectivas. En fin, a experimentar en compañía de nuestr@s alumn@s. Lo que sí podemos afirmar a través de nuestra corta experiencia, es que en esa forma de trabajar, además de matemáticas, hay un gran número de aspectos que se desarrollan a lo largo de todo el proceso: autonomía, tanto moral como intelectual, estrategias personales de discusión, de cálculo, de estimación, interacción social, respeto a los demás, empatía…, y sinceramente, creemos que merece la pena.

Jesús Mario Iglesias Pérez, maestro de Educación Primaria y licenciado en Geografía e Historia por la Universidad de La Laguna. Trabaja en el C.P. Aguamansa. Tenerife (España)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 51 - 57
ISSN: 1815-0640

Experiencias pedagógicas de niños y niñas desarrolladas en el área de matemática en unidades educativas de Oruro (Bolivia)

Elizabeth Chila Aguilar y Frida Medrano Rojas

> *"La matemática ha constituido tradicionalmente la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para que sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario, pero la enseñanza no debe ser una tortura, no seríamos buenos docentes, si no procuramos por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces".*
>
> Puig Adam, 1958

Introducción

Existe la necesidad de reorientar el currículo escolar, de manera que la aplicabilidad de la matemática pueda ser percibida, a través de la resolución de problemas del contexto y el cálculo mental. En nuestra unidad educativa Carmela Cerruto N° 2 y Ferroviaria (Oruro, Bolivia) desde la implementación de la Reforma Educativa, se observa la necesidad de buscar nuevas estrategias metodológicas para que el maestro de aula pueda efectuar cambios en su práctica pedagógica, para que los niños y niñas, adquieran aprendizajes significativos, permitiendo la posibilidad de que adquieran conocimientos para que los comprenda, retengan, apliquen y transfieran los aprendizajes adquiridos.

Las unidades educativas Carmela Cerruto N°2 y Feroviaria, forma parte integrante de *Save the Children–Oruro*, dentro el Marco de Resultados que sustenta el Programa "Escuelas Efectivas", gestión 2004-2006, donde se señala que nuestras actividades se deben desarrollar de manera integral en cuatro campos o áreas de intervención que comprende las áreas de calidad, comunidad, acceso y abogacía.

El área de calidad, esta enfocada al desarrollo de mejoramiento curricular, de la práctica docente, de mejores desempeños y protagonismo de los estudiantes en escuela de nuestra cobertura institucional.

Save the Children–Oruro brinda apoyo educativo, para que los docentes en función a los talleres pedagógicos e intercambio de experiencias, en el área de matemática, lenguaje y comunicación, mejoren su desempeño docente con los contenidos de fortalecimiento docente, que apunta a los niveles, con el nuevo enfoque educativo, donde se toma en cuenta aspectos relacionados con la Reforma Educativa, estrategias de trabajo en aula, y mejoramiento personal (relaciones humanas).

El esfuerzo de los talleres pedagógicos está centrado en mejorar y optimizar la calidad del desempeño docente en el ámbito educativo y el aprendizaje cooperativo de niños y niñas de la unidad educativa.

Las nuevas estrategias toman en cuenta los aprendizajes previos, y nuestras actividades están centradas en que los niños y niñas construyan sus aprendizajes con ayuda del docente, donde las actividades desarrolladas sean participativas, activas y prácticas. Orientadas al desarrollo de clase con participación activa de niños y docentes, donde se complementen estrategias metodológicas acorde a las planificaciones curriculares del proceso educativo.

Estas estrategias metodológicas inciden de manera integral en el aprendizaje de los niños y niñas. Citaremos algunos logros observados en los niños y niñas al seguir la práctica pedagógica desarrollada en el aula:

- Aplican modelos algorítmicos y heurísticos para resolver ejercicios y problemas matemáticos.
- Plantean problemas y los resuelven aplicando algoritmos heurísticos.
- Practican la metacognición cuando explican los procedimientos utilizados para la resolución de problemas planteados.
- Realizan estimaciones en los ejercicios o problemas planteados.
- Utilizan múltiples opciones, al operativizar la resolución de problemas.
- Reflexionan, son críticos, autónomos, tanto moral como intelectualmente.
- Trabajan el razonamiento lógico-matemático y el cálculo mental, en base a la resolución de problemas.
- Trabajan con más espontaneidad a través de sus saberes previos y construyen sus propios aprendizajes.
- Socializan los problemas, cuando explican los procedimientos que utilizaron para su solución.
- Desarrollan un aprendizaje integral, se aplica las habilidades sociales con niños y niñas de nuestras unidades educativas.

En la maestra incide en el trabajo significativo, autovalorativo, elevando la autoestima, con un trabajo constante de innovación creativa y dinámica.

En el desarrollo de las actividades especificas en aula los niños toman en cuenta las fases del aprendizaje: manipulativa, gráfica, y simbólica. Las actividades temáticas están siempre centradas en los componentes del área de matemática: número y operaciones, geometría y medidas, articulando siempre con las transversales y demás áreas del conocimiento.

Las estrategias matemáticas desarrollados con los niños y niñas del nivel primario, del 3er año de primer ciclo de Ferroviaria y 1er año de segundo ciclo de Carmela Cerruto 2º año, fueron en base siempre a la resolución de problemas.

Ejemplos de actividades

A continuación mostramos ejemplos de actividades realizadas en el aula por los niños y niñas.

Los niños/as se familiarizan con el material mediante juegos y actividades

1. La tienda

Para hacer las siguientes compras Lizeth tiene dos billetes de 20 Bs. un billete de 10 Bs y dos monedas de 2 Bs.

¿Cuánto dinero tiene Lizeth para ir de compras?
¿Le alcanzará este dinero para hacer las compras?
¿Qué operaciones hizo Lizeth para solucionar los problemas?

Lista de la compra:
- 3 kg de uvas
- 2 piñas
- 1 caja de maizena
- 2 latas de atún

Aplicamos las estrategias de la adición para resolver el problema.

2. Suma del árbol

Pedro desea saber cuántos huevos reunieron en una granja durante cuatro semanas, el encargado le indica que adicione de la primera semana que fue 345 huevos y la segunda semana 275 y la tercera semana fue de 649 huevos, y la cuarta semana fue de 385 huevos. ¿Cuántos huevos reunió en las 4 semanas?

345 +275 +649 +385

110 + 1400 + 10 +120 + 14

1630 + 24

1654

Respuesta: ***En las cuatro semanas reunió 1654 huevos.***

3. Suma por descomposición

Una granja tuvo un pedido de 2630 pollitos, el primer día entregó 980 pollitos, el segundo día 198. ¿Cuántos pollitos debe entregar el tercer día para completar el pedido?

Pollitos: 2630

1er día	980	900 + 80 + 0	
2do. día	+ 198	100 + 90 + 8	
		1000 + 170 + 8	= 1178

2630 pollitos
– 1178 pollitos
1000 pollitos
500
– 40
– 8

3er día **1452**

Respuesta: ***Debe entregar el tercer día 1452 pollitos.***

4. Método de Francisco

a) En nuestra escuela festejamos un aniversario, asistieron en total 1580 personas, 650 eran mayores. ¿Cuántos niños y jóvenes asistieron al festejo?

$$\begin{array}{lr} \text{Total de personas:} & 1\,5\,8\,0 \\ \text{Personas mayores:} & -\ \ 6\,5\,0 \\ \cline{2-2} & 9\,0\,0 \\ & 3\,0 \\ \cline{2-2} & \mathbf{9\,3\,0} \end{array}$$

Respuesta: ***Al festejo asistieron 930 niños y jóvenes.***

b) Dos obreros construyen al mismo tiempo, uno 1422 piezas de ladrillos y el otro, 1385 ladrillos. ¿Cuántas piezas menos construye el segundo?

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\,4\,2\,2 \\ -\ \cancel{1}\,3\,8\,5 \\ \hline 1\,0\,0 \\ -\ \ 8\,0 \\ -\ \ \ 3 \\ \hline \mathbf{3\,7} \end{array}$$

5. Suma en el espacio

25	100
75	50

250

30	117
30	70
93	5

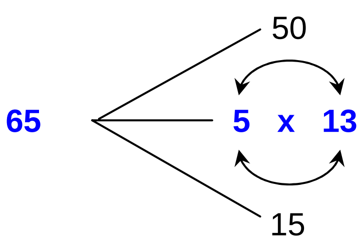
315

300	400
600	700

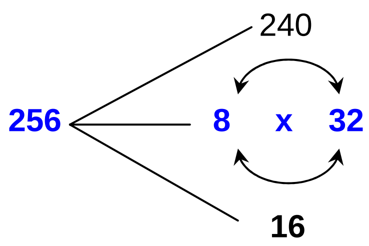
2000

6. El pico del pájaro

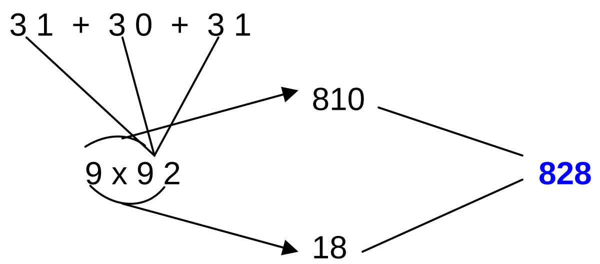
a)



b)



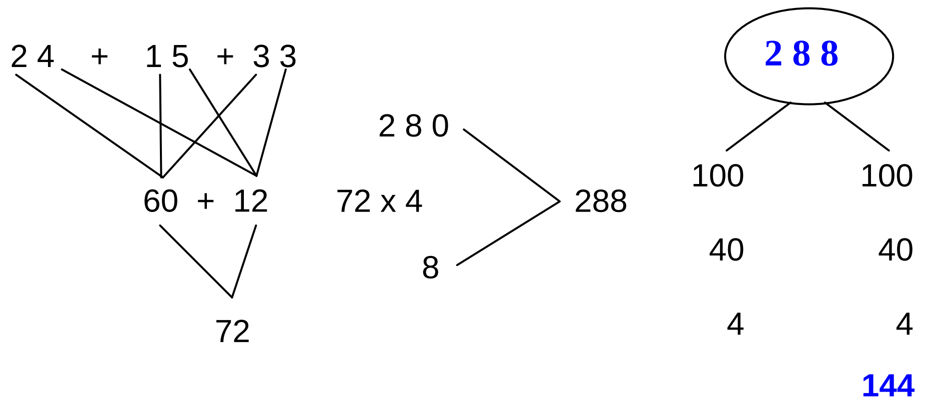
Un padre de familia gana 9 Bs., al día, ¿Cuánto ganará en los meses de octubre, noviembre y diciembre?



Respuesta: ***El padre de familia ganará en los tres meses 828 Bs.***

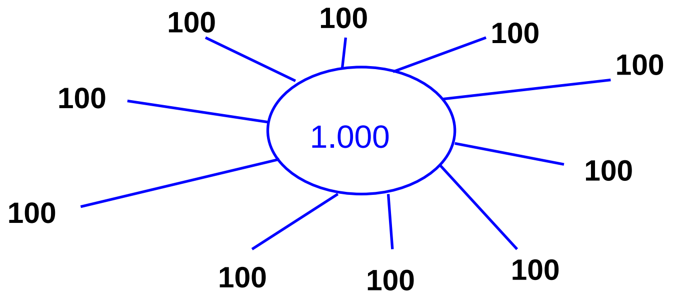
7. El método de la araña peluda

a) En un campo de pastoreo contamos 24 ovejas, 15 vacas, 33 llamas. ¿Cuántas patas y cuántas orejas hay en total?



Respuesta: ***Hay 288 patas y 144 orejas.***

b) El regente Jhonny tiene 1 000 tizas para dejar en 10 aulas. ¿Cuántas tizas deja en cada aula?



Respuesta: ***En cada aula deja 100 tizas.***

8. Regletas fraccionarias

En un partido de fútbol hay 9000 espectadores, los 2/5 son hinchas del equipo visitante. ¿Cuántas personas son?

9000 espectadores				
1800 espect.	1800 espect	1800 espect	1800 espect	1800 espect

3600 espectadores

Respuesta: ***Los hinchas del equipo visitante son 3600 personas que equivalen a 2/5.***

En el trabajo de aula al desarrollar el área de matemáticas, durante el desarrollo de las actividades, se articula con las demás áreas de conocimiento con la finalidad del desarrollo integral de los alumnos, formando personas que puedan desenvolverse en la vida. De esta manera, las áreas se interrelacionan tratando de formar al individuo, a través de conocimientos integrales que sirvan para resolver problemas de su propia realidad. Es así que la matemática no se cierra entre las cuatro paredes, sino que abarca mucho más, la matemática esta inmersa dentro de las otras áreas. Es muy importante señalar que se integra el trabajo de los temas transversales en el trabajo con niños y niñas, con el propósito de fortalecer actitudes de comportamiento social.

Elizabeth Chila Aguilar y Frida Medrano Rojas, maestras de Educación Primaria. Oruro (Bolivia)

Save the Children

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 59 - 62
ISSN: 1815-0640

Aparición de algoritmos en secundaria

Josep Cabrera

Introducción

Me gustaría reflexionar sobre la siguiente cuestión: *¿Por qué los alumnos, en el cálculo mental de multiplicaciones, siempre hallan antes las cifras de la derecha de los números, las más significativas, y, por contra, el algoritmo tradicional calcula, en primer lugar, las unidades de la izquierda, las menos significativas?* A continuación, dejó en el aire la pregunta de cuál podía ser la causa de este hecho. Propongo como respuesta que una causa sea que los alumnos se fijan en primer lugar en lo más importante y después, van llenando los huecos con los últimos detalles, los cuales pueden modificar sus primeras impresiones, y ello no les causa el más mínimo trastorno. Sin embargo, el algoritmo, como herramienta automática que no se ocupa de significados, busca su máxima comodidad y procura evitar tachaduras indeseables, lo cual se consigue empezando por el final. Vendría a abundar en esto, el hecho de que al multiplicar polinomios (donde las cifras no interactúan en sus distintas posiciones), los alumnos suelen hallar en primer lugar indistintamente los términos de mayor grado, o los de menor grado, o incluso, partes separadas de términos del mismo grado, juntándolas después.

Vamos a abordar la cuestión que nos interesa; se describirá una experiencia con alumnos de secundaria acompañada de una serie de reflexiones tendentes a considerar la conveniencia de dedicar algo de **acción y tiempo** a los algoritmos clásicos en secundaria. No demasiado, como tradicionalmente se ha venido haciendo, pero sí algo, siempre que la ocasión lo requiera, y, especialmente, no como principio de unas actividades, sino, **como final de un proceso**, en el cual se habrá considerado el concepto subyacente al algoritmo correspondiente desde diferentes ángulos, algunos de ellos imprevisibles, por depender de las acciones que lleven a cabo los alumnos.

La experiencia

Alumnos de primer curso de bachillerato de Ciencias Sociales (16-17 años), nocturno. Se propusieron varias divisiones mentales. Sin ninguna hipótesis previa, solo observar qué ocurría. Como experiencia con un triple objetivo: escribir estas letras, que los alumnos probaran el cálculo mental tomando conciencia de ello, ya que describirían posteriormente el proceso pensado y, servir de introducción /repaso a la división de polinomios.

Las primeras divisiones (con dos cifras en el dividendo y en el divisor y, aún, con una cifra en el divisor, pero dos el cociente) resultaban demasiado complicadas para algunos alumnos (lo que evidenciaba su escasísima práctica en el cálculo mental) y necesité acudir a una división inicial que caía dentro de lo que llamamos “tabla de multiplicar”: 67 entre 7. A partir de ahí aumentamos la complicación paulatinamente: 93 entre 7, 125 entre 7, 125 entre 11, 250 entre 11...

Desde el principio, hubo alumnos que realizaban el cálculo mental sin titubeos y otros, los menos, incapaces de hacerlo, ni tan siquiera de comenzarlo. Es más, detecté que el problema estaba en que eran incapaces de realizar el esfuerzo previo de concentración. Esta reticencia inicial fue vencida al considerar ellos la posibilidad de hacer únicamente estimaciones, como se verá después.

Fue quedando de manifiesto la diferencia entre división entera y división decimal (o exacta, como ellos la llamaban), profundizando entonces en el significado del concepto de división. También iba evidenciándose que todo el mundo seguía para sus cálculos mentales el mismo camino que nos indica el algoritmo tradicional de la división (ATD), hallando las cifras por su orden de significación, primero las más significativas y después, como ultimando detalles, las menos significativas hasta llegar a las unidades.

Este fue el momento de distinguir claramente entre estimar y calcular, y de alabar las virtudes del primero. Fue también cuando los alumnos antes citados, que tenían problemas de concentración y cálculo, comenzaron a trabajar. Incorporamos todos la sana costumbre de acompañar, a nuestro quehacer una estimación previa del posible resultado. Esta estimación consistió, en general, en calcular la cifra más significativa y una aproximación a la siguiente.

A lo largo de toda la experiencia, la única excepción a calcular mentalmente siguiendo los pasos del ATD, fue hecha por dos alumnos en la misma división propuesta: 318 entre 11. Los dos dijeron que sería menos de 30, ya que 30 multiplicado por 11 es 330. Una alumna no sabía continuar los cálculos en esa dirección, pero le parecía que lo que decía su compañero era incorrecto. Lo que decía su compañero era que el resultado sería 29 y el resto 1, ya que 330 menos 318 es 12, 12 dividido entre 11 da cociente 1 (que quitaba al resultado 30 estimado por exceso, quedando así 29) y de resto 1 (que conservaba).

Esto se aprovechó para explicar la causa del error que se estaba produciendo y como modificarlo, para convertirlo en respuesta correcta. Al operar por exceso estamos realizando un cálculo inverso a como opera el mecanismo de la división, que es por defecto y considera un resto a añadir. Por tanto, al dividir 12 entre 11 con cociente 1, tenemos que 330 se pasa de 318 más de una vez 11; consecuentemente, habrá que quitar 1 unidad más, para tener el cociente de la división inicial, es decir, quitar 1+1 a 30, que nos da el cociente correcto, es decir, 28. Una argumentación similar seguimos con el resto: lo que le falta al resto de dividir 12 entre 11 (o sea, 1) para llegar a 11 (o sea, 10). Con lo cual la respuesta correcta, a partir del camino por exceso iniciado, será: cociente 28 y resto 10, lo cual coincide con los cálculos mentales de los demás alumnos y nos ha dado un método general para utilizar en estos cálculos por exceso. Creo que con esto conseguimos profundizar un poco más en el mecanismo de la división.

Unas divisiones un poco más complejas, y las tres sesiones de 45 minutos transcurridas hasta ese momento, nos hicieron observar nuestro cansancio en esta tarea de cálculo mental. Pasamos, pues, a la división entre polinomios. Hay que tener en cuenta que son alumnos de nocturno, muchos de ellos no recuerdan nada de divisiones entre polinomios y algunos ni tan siquiera la habían visto nunca. Planteé el comienzo sin suponer conocimiento por parte del alumnado de la división entre polinomios. Introduje unos comentarios comparativos con la división entre números y realizaron, ellos mismos, las divisiones entre polinomios que yo les fui proponiendo, **sin ningún ejemplo previo como modelo.**

Comenté que en este contexto no tiene sentido hablar de división con decimales, por lo que consideraríamos sólo la posibilidad de división entera, calculando cociente y resto; que el significado de la división era el mismo; que la posición de las cifras que, en los números indica el valor real de cada una de ellas, sería sustituida por el grado de la incógnita en los polinomios; y, que el orden entre polinomios sería considerar mayor el que tuviera mayor grado, pero no habría comparación entre polinomios del mismo grado, al contrario de lo que sucede con la comparación entre números con las mismas cifras, que sí pueden compararse, esto se traduciría en que la división entre polinomios acababa solamente cuando el grado del resto era estrictamente menor al del divisor.

Con ese bagaje les pedí que escribieran el algoritmo de la división para 125 entre 11 y después intentaran hacer la división x^2+2x+5 entre $x+1$. La cosa funcionó. Seguimos pidiendo divisiones entre polinomios comparándolas con sus homónimas entre los números equivalentes. Pronto se observaron diferencias que parecían insalvables, como buscar la cifra equivalente a un número negativo en polinomios, o a un número de varias cifras, o cuando la división entre polinomios ha de ser exacta, en paso parcial apareciendo números no enteros. Se fueron explicando todas estas anomalías en la trascripción automática de polinomios a números *y viceversa* (como que una cifra negativa en la escritura de un número se puede interpretar rebajando la cifra más significativa siguiente, o que un número de varias cifras se trasladaría aumentando las cifras más significativas, etc.). Pero esto suponía una complejidad, a mi parecer, excesiva, añadida al objetivo propuesto que se estaba cumpliendo a la perfección, con lo que prescindimos de profundizar en ello. Nos quedamos con el algoritmo de la división entre polinomios dominado, con su significado asumido, y continuamos nuestro camino con raíces de polinomios, teorema del resto, regla de Ruffini y descomposición de polinomios.

La reflexión

Llegados aquí, vamos a reseñar algunos factores que justificarían el no abolir, ni prohibir, ni impedir, el algoritmo tradicional de la división ni, paralelamente, otros similares, sino fomentarlo o repasar su concreción, si se creyera oportuno.

En primer lugar, estaría la adquisición de **seguridad.** Los alumnos que conocen el proceso de dividir números y su significado, desde diferentes formas, casi tantas como alumnos, exigen muchas veces una base segura, que para ellos es un procedimiento automático y que funcione para todos por igual.

También tendríamos que el algoritmo permite la **generalización,** y sirve como ejemplo de este mecanismo, tan estimado por las matemáticas.

Además, si quedamos de acuerdo en que lo realizado en cálculo mental supone, de alguna manera, fomentar las capacidades creativas y de ingenio de los alumnos, y que esto, a su vez, lleva implícito cierta **dispersión**, el contrapunto tendente al equilibrio, puede conseguirlo el alumno con el algoritmo tradicional que supone **sistematización, orden y resumen**.

Por otro lado, habría que considerar otro aspecto positivo de conocer en profundidad los algoritmos tradicionales, es el hecho de fomentar la sensación de controlar el **mecanismo que ejecutan interiormente las máquinas**. Esto permite abordar los estudios del funcionamiento de tecnologías, sin falsas ni frustrantes mistificaciones, sin sentirse dominado ni comprender solo a nivel de usuario.

Un hecho a tener en cuenta, que no justifica por sí mismo el seguir usando los algoritmos tradicionales, pero que nos alerta, como mínimo, sobre su posible valor, es la **comparación** con otras actividades que sí **han desaparecido**. Al respecto se me ocurre, inmediatamente, considerar la rápida y silenciosa desaparición de las antaño, imprescindibles y engorrosas, tablas logarítmicas y trigonométricas y reglas de cálculo, así como las correspondientes sesiones para explicar y practicar su manejo. No hubo debate público sobre su consideración en el futuro… desaparecieron sin más.

Finalmente, considero interesante resaltar el **paralelismo** que existe entre los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas y los que propiamente aparecen en secundaria, como, por ejemplo, el producto de matrices y el método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones. Estos continúan manteniéndose en la enseñanza/aprendizaje y han sufrido, precisamente, ese cambio en su exposición didáctica: han pasado de instruirse y ejercitarse como valor por ellos mismos, a llegar a ellos como forma sencilla y sistemática de ejecutar unos mecanismos necesarios y repetidos en diversas ocasiones. Su cálculo exhaustivo se va a dejar a la tecnología, pero su conocimiento y uso esporádico, sin apoyo de la misma, no se está abandonando.

Josep Cabrera, IES Chabás, Dénia (Alicante)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 63 - 66
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

Pon una superficie reglada en tu centro

Las superficies regladas constituyen uno de esos elementos matemáticos que están situados en la frontera entre el arte y las matemáticas. De hecho, son muchos los artistas (escultores, arquitectos, etc.) que las han incorporado a sus obras. Un ejemplo de ellos es el escultor Andreu Alfaro[1] que participó en la Exposición Internacional de Arte en la calle de Santa Cruz de Tenerife, con una atractiva superficie reglada (foto 1) realizada con varillas de aluminio y que se colocó en una de las ramblas de la ciudad.

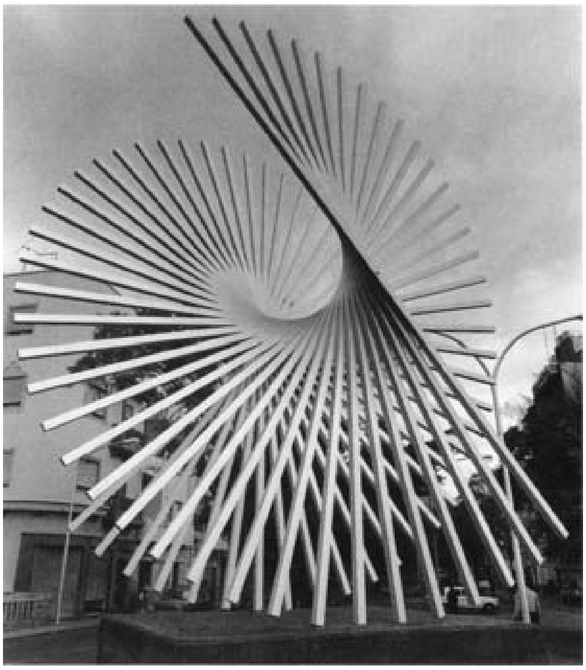


Foto 1.- Escultura Sin título.

En el puerto de La Luz de Las Palmas de Gran Canaria existe otra superficie reglada muy llamativa por su gran tamaño y vistosidad. Se trata de un hiperbolóide que se utiliza como depósito de agua. En este caso se unen matemáticas y funcionalidad. (foto 2)

Para muchas personas resulta muy llamativo e intrigante saber cómo se pueden conseguir esas superficies curvas hechas exclusivamente con líneas rectas.

[1] Andreu Alfaro nace en Valencia en 1929. Entra en el mundo artístico en 1957 con una exposición de dibujos y pintura: Valencia (dibujo) y Alicante (dibujo y pintura). Interviene en las actividades del Grupo Parpalló. En 1973 participa en la "Exposición Internacional de Escultura en la Calle" de Santa Cruz de Tenerife. En 1974 abandona sus otras actividades y se dedica plenamente al arte, al dibujo, para el que siempre estuvo especialmente dotado y, sobre todo, a la escultura. Su extensa obra se expone en museos de todo el mundo y obras públicas han sido instaladas en las capitales más importantes. Los materiales utilizados no pueden ser más variados aunque para sus obras públicas suele utilizar el acero, el aluminio... Alfaro, fuera de toda definición, gusta de aplicar sus conocimientos geométricos para crear sugerentes obras abstractas. Obras llenas de matices, que juegan con el módulo, con la serie, con la luz, con el color y que no se hacen difíciles al espectador, pese a su complejidad real. Como reconocimiento a su trayectoria, el artista recibió en 1981 el Premio Nacional de Artes Plásticas y en 1995 fue seleccionado para representar a España en la Bienal de Venecia.

Foto 2. Hiperboloide y depósito de agua. Puerto de la Luz. Las Palmas de Gran Canaria.

En los edificios de los centros educativos suelen existir espacios propicios para poder realizar una superficie reglada. Pero en el caso de no encontrarlo, con un presupuesto no muy elevado, es fácil construir alguna como luego explicaremos.

El edificio de nuestro Instituto, tiene un patio interior que nos ha permitido hacer una monumental superficie reglada.

Descripción del patio

Salvando los detalles, se trata de un ortoedro de 15 metros de largo por 12 de ancho y 12 de altura. Es, por tanto amplio y luminoso. El suelo está embaldosado y es utilizado con frecuencia en diversas actividades (las partidas del TOJUMAT, colocación de stand en la feria de Astronomía, los bailes de carnaval, desarrollo del campeonato de ajedrez y las simultáneas, etc.) (foto 3).

A ese patio dan los ventanales de los pasillos en la cara Norte que tiene planta baja y tres pisos. En la cara Este están las ventanas de una escalera y las de varios Departamentos (entre ellos el de Matemáticas). El salón de actos del Centro cubre toda la cara Sur y en la Oeste las ventanas de varias aulas y otra escalera.

Foto 3. Actividades en el patio del instituto, bajo la superficie reglada

Diseño de la superficie reglada.

La idea surgió en el taller de Matemáticas. Después de explicar algunas nociones en torno a estos elementos matemáticos, se pensó en la posibilidad de construir alguna en el centro que fuera la actividad estrella de la Semana de Matemáticas de ese curso. Se barajaron varias posibilidades hasta empezar a pensar en hacerla en el patio interior antes descrito. Dadas las dimensiones del patio, aparentemente no se presentaba sencillo, sobre todo en los aspectos logísticos.

Se hizo una maqueta del patio con madera contrachapada de un centímetro de forma que la mayor dimensión tenía un metro en la maqueta. Ayudándonos de espárragos de hierro y con elásticos de mercería se empezaron a hacer trazados de superficies regladas que se cambiaban una y otra vez para tratar de encontrar algún modelo que reuniera estas dos condiciones: belleza y realización no complicada.

Con muchos tanteos llegamos a familiarizarnos con las formas que iban saliendo y finalmente se optó por el modelo que luego se llevó a la práctica.

Construcción de la superficie reglada.

Dos fueron los problemas principales que tuvimos que resolver para poder llevar a la práctica lo que habíamos diseñado en el Taller. Por una parte, la compra de la cuerda elástica suficiente para el diseño previsto (unos 800 metros). El presupuesto fue cubierto gracias a la sensibilidad y apoyo de la dirección del centro como a la ayuda de la Asociación de madres y padres de alumnos. Ello nos permitió adquirir los metros de una cuerda elástica de color calabaza con el fin de que destacara sobre el fondo gris que tienen las paredes del patio.

El otro problema era más difícil de resolver porque se trataba de colocar los cables de acero de forma segura y lo suficientemente tensos para poder colocar las cuerdas en los puntos que correspondían. Era evidente que no podíamos hacerlo con los medios de que disponíamos en el centro, a pesar de la buena disposición del personal de mantenimiento. Pero al final dimos con la solución idónea: nos pusimos en contacto con la empresa UNELCO encargada de las redes eléctricas y gracias a su ayuda pudimos finalmente tender y tensar los cables y colocar las cuerdas elásticas.

Foto 4. La forma de la superficie depende del punto de vista del observador

Fue emocionante ver cómo la superficie iba tomando forma y sobre todo el efecto final. Realmente son dos superficies que van cambiando de aspecto conforme nos vamos moviendo en el patio de un lugar a otro. (fotos 4 y 5)

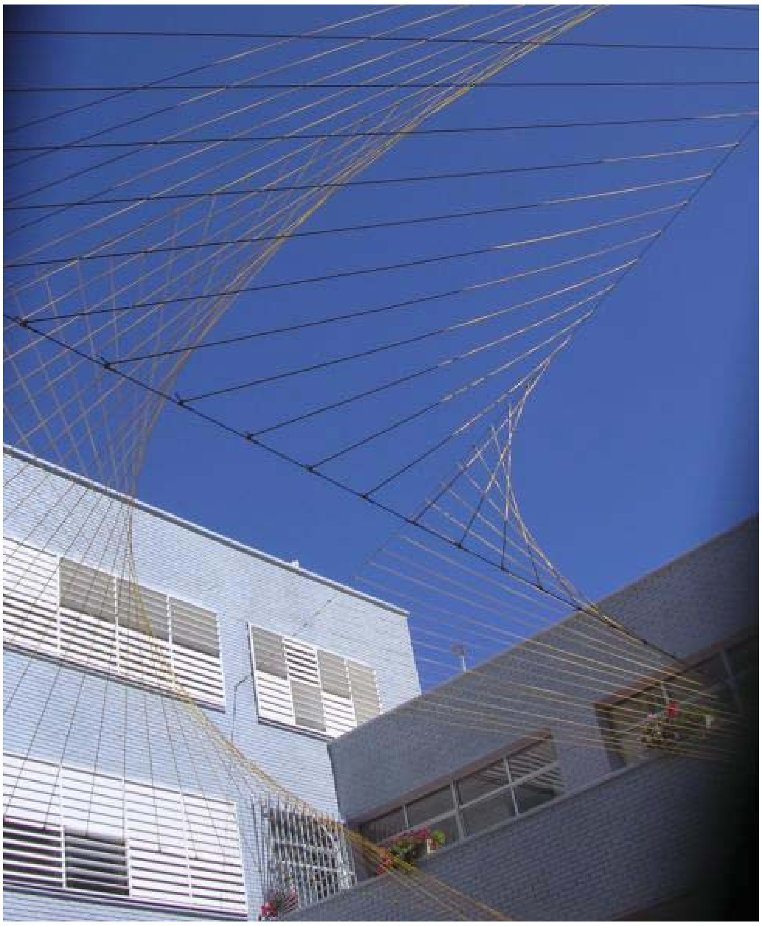


Foto 5. Vista de la superficie reglada con el cielo de fondo.

Otras posibilidades

En el caso de que el centro no disponga de un patio del estilo del descrito, hay otras posibilidades para construir la superficie reglada.

- Hacer el soporte con tuberías de hierro galvanizado (u otro material rígido) formando un cubo o un paralelepípedo cuyas aristas oscilen entre los dos y tres metros.
- Hacer un concurso de diseños con grupos de estudiantes para escoger aquel que tenga más apoyos.
- Elegir el hueco más adecuado para situar la superficie reglada.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4 páginas 67 - 107
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

Matemáticas en el sistema educativo español[1]

España. Descripción

España tiene una extensión de 504 782 kilómetros cuadrados. Según el Padrón Municipal de Habitantes de fecha 1 de enero de 2005, la población asciende a 44.108.530 habitantes.

Administrativamente está formada por 17 Comunidades Autónomas y dos Ciudades Autónomas (Ceuta y Melilla). Las Comunidades son:

Andalucía, Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Castilla-La Mancha, Cataluña, Comunidad de Madrid, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia, Islas Baleares, Navarra, País Vasco, La Rioja y Región de Murcia.

[1] Extraído del Boletín Oficial de la Comunidad Autónoma Canaria

Estructura del sistema educativo español

Edad	*Ciclos y Cursos*	*Etapas*	*Enseñanza*
0 a 3	1º Ciclo Infantil	Educación Infantil	Carácter voluntario
3 a 6	2º Ciclo Infantil		
6 a 8	Ciclo Inicial 1º y 2º	Educación Primaria	Enseñanza obligatoria
8 a 10	Ciclo Medio 3º y 4º		
10 a 12	Ciclo Superior 5º y 6º		
12 a 14	1º Ciclo ESO: 1º y 2º	Educación Secundaria Obligatoria	
14 a 15	2º Ciclo ESO: 3º		
15 a 16	2º Ciclo ESO: 4º		
16 a 17	1º curso	Bachillerato y Ciclos Formativos de Grado Medio	Enseñanza no obligatoria
17 a 18	2º curso		
18 ó más	1 ó 2 cursos	Ciclos Formativos de Grado Superior	

Algunos indicadores

Centros y alumnado de Educación Primaria

Centros	Curso 03-04	Curso 02-03
	Centros (alumnado)	Centros (alumnado)
Públicos	10.138 (1.653.918)	10.201 (1.648.824)
Privados	3.367 (828.107)	3.388 (825.864)
Total	13.505 (2.482.025)	13.589 (2.474.688)

(Fuente: **Consejo Escolar del Estado**)

Centros y alumnado de Educación Secundaria

Centros	Curso 03-04	Curso 02-03
	Centros (alumnado)	Centros (alumnado)
Públicos	4.785 (1.236.430)	4.993 (1.235.142)
Privados	3.083 (636.856)	3.104 (642.978)
Total	7.868 (1.873.286)	8.097 (1.878.120)

(Fuente: **Consejo Escolar del Estado**)

Centros y alumnado de Bachillerato

Centros	Curso 03-04	Curso 02-03
	Centros (alumnado)	Centros (alumnado)
Públicos	2.879 (464.616)	2.865 (486.223)
Privados	1.357 (160.920)	1.378 (167.997)
Total	4.236 (625.536)	4.243 (654.220)

(Fuente: **Consejo Escolar del Estado**)

Centros y alumnado de Formación Profesional Ciclos de grado medio

(Se accede con la enseñanza secundaria obligatoria (ESO))

Centros	Curso 03-04	Curso 02-03
	Centros (alumnado)	Centros (alumnado)
Públicos	1.689 (166.802)	1.642 (160.616)
Privados	646 (61.131)	634 (60.198)
Total	2.335 (227.933)	2.276 (220.814)

(Fuente: **Consejo Escolar del Estado**)

Centros y alumnado de Formación Profesional Ciclos de grado superior

(Se accede con el bachillerato)

Centros	Curso 03-04	Curso 02-03
	Centros (alumnado)	Centros (alumnado)
Públicos	1.595 (178.702)	1.555 (171.352)
Privados	538 (55.741)	528 (56.984)
Total	2.133 (234.443)	2.083 (228.336)

(Fuente: **Consejo Escolar del Estado**)

Currículos de matemáticas en los diferentes niveles educativos

(Canarias, BOC 9 de abril de 1993)

1. Educación Primaria

Introducción

Las matemáticas constituyen un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, de cálculo, medida y estimación, acerca de relaciones necesarias entre muy diferentes aspectos de la realidad. Como ocurre con otras disciplinas, las matemáticas constituyen un campo en continua expansión y de creciente complejidad, donde los constantes avances tecnológicos que afectan a la sociedad condicionan también su enseñanza, debiéndose plantear ésta con unos contenidos y mediante unos procedimientos acordes con la introducción y aplicación de los nuevos medios tecnológicos. El prestigio académico y social de las matemáticas se debe, en buena parte, al doble carácter que se le atribuye de ser una ciencia exacta y deductiva. La cualidad de la exactitud es la más tradicional, pero dentro de las matemáticas existen campos no caracterizados por ella, o donde ésta juega un papel diferente, como son: la probabilidad, la estimación o la estadística. En cuanto a su consideración como ciencia puramente deductiva, es ésta una idea que enlaza con la concepción del conocimiento matemático como producto acabado. Sin embargo, las matemáticas no deben presentarse de este modo, sino como un conjunto de conocimientos sometidos a un proceso continuo de revisión y ampliación en su evolución histórica, vinculados a la resolución de problemas concretos que, a menudo, proporcionan la base intuitiva para la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos.

Considerando la manera en que se ha producido la construcción del conocimiento matemático a través de la Historia, donde predominó el razonamiento empírico-inductivo, sería contradictorio adoptar solamente un modelo deductivo. Es necesario incorporar modelos que permitan al alumnado poner en práctica procedimientos intuitivos necesarios para explorar y construir su conocimiento matemático, de forma que sea el propio alumnado quien desempeñe el papel principal en la experiencia, en la inducción de su propio conocimiento, en tanto el profesorado debe ser el animador y motivador de la actividad escolar facilitando su aprendizaje. Debe ser el alumnado el que descubra y construya las matemáticas.

La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad.

Los aspectos estructurales de formalización y abstracción que, por su complejidad, escapan a las posibilidades de comprensión del alumnado de esta etapa, deberán plantearse de forma intuitiva y práctica en las actividades escolares y extraescolares, convirtiéndose en objeto de atención especial de la enseñanza y aprendizaje, iniciándose así el camino que va desde la reflexión sobre la propia actividad hasta los niveles más abstractos y formales, que quedan para una etapa posterior.

Las experiencias prácticas, la comprensión de nociones, relaciones y propiedades matemáticas, serán el punto de partida para plantear la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como algo cambiante, capaz de ser enriquecido con formas de representación que permitan pasar de la manipulación concreta con y sobre objetos y situaciones, hasta llegar a una comprensión plena de las mismas, mediante el uso adecuado de notaciones simbólicas de tipo numérico o geométrico y, sólo en algunas ocasiones, algebraico.

En el aprendizaje matemático la experiencia y la inducción desempeñan un papel primordial. A través de operaciones concretas (contar, comparar, clasificar, relacionar...) el sujeto va adquiriendo representaciones lógicas, y matemáticas, que más tarde valdrán por sí mismas, de manera abstracta y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independiente ya de la experiencia directa.

La constante referencia a la realidad, a los aspectos de construcción inductiva y empírica, que se encierran en la actividad matemática no ha de hacer olvidar, por otro lado, los elementos por los que las matemáticas precisamente se distancian de la realidad en actividades y operaciones que tienen que ver con la creatividad, la crítica, el poder de imaginar y representar no sólo espacios multidimensionales, sino, con generalidad mayor, una “realidad” alternativa. La exploración de la posibilidad pura y el desarrollo de modelos “puramente” matemáticos casi siempre contribuyen a describir, comprender y explicar mejor la complejidad del mundo.

A lo largo de la etapa las matemáticas han de desempeñar, indisociable y equilibradamente, un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel funcional, aplicado a problemas y situaciones de la vida diaria, y un papel instrumental, en cuanto armazón formalizador de conocimientos en otras materias. Todo ello justifica los contenidos de las matemáticas en esta etapa, así como las características didácticas básicas de su enseñanza.

Los contenidos se tratarán de forma globalizada y los objetivos, formulados en términos de capacidades, se pueden alcanzar por distintas vías, ya que el proceso de enseñanza y aprendizaje debe estar en continua revisión. En este sentido, la evaluación juega un papel muy importante por el hecho de que relaciona todos los elementos que intervienen en el proceso: el alumnado, los profesores, el centro, los materiales didácticos disponibles y los recursos metodológicos empleados y, al mismo tiempo, permite detectar las carencias puntuales que se observan en el proceso, introducir las modificaciones que se consideren necesarias y oportunas, y determinar las necesidades educativas especiales que se produzcan.

Para el aprendizaje de las matemáticas, es preciso introducir criterios relativos a la naturaleza del proceso de construcción del conocimiento. Hay que ofrecer al alumnado diferentes alternativas para que, partiendo de sus experiencias personales, desarrolle sus propias capacidades mentales, a través de la activación de sus conocimientos y de la utilización de recursos y estrategias, mediante un aprendizaje significativo basado en las actividades realizadas. Esta forma de construir el conocimiento matemático, y las consideraciones acerca de las funciones educativas de esta área, tiene importantes repercusiones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria, afectando a la selección y organización de sus contenidos, tarea en la que se debe tener presente:

- Conceder prioridad a la observación, manipulación y experimentación, mediante un trabajo práctico y oral. Las actividades descontextualizadas y el trabajo escrito sólo se introducirán cuando los alumnos y las alumnas comprendan los conceptos y se interesen por ellos.
- Establecer relaciones y comparaciones en colecciones de objetos y situaciones conocidas.
- Utilizar técnicas de cálculo mental, algoritmos, uso de instrumentos, construcciones, etc., con el fin de profundizar en los conocimientos matemáticos, antes de pasar a su formalización.
- Utilizar el análisis, la estimación y el tanteo en actividades con grupos de aprendizaje que favorezcan los intercambios entre iguales, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas realizadas.
- Prestar especial atención a la combinación de conceptos matemáticos con la finalidad de desarrollar estrategias personales de resolución de problemas, y potenciar la inclusión en las mismas de los conocimientos matemáticos que se vayan adquiriendo.
- Utilizar el lenguaje matemático como fuente de conocimiento en los distintos ámbitos de experiencia, escolares y extraescolares, de los alumnos.

La orientación de la enseñanza y del aprendizaje en esta etapa se sitúa a lo largo de un continuo que va de lo estrictamente manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal. Es preciso, por otra parte, destacar que, sin necesidad de alcanzar la comprensión plena de algunos conceptos y procedimientos matemáticos, éstos pueden cumplir sus funciones instrumentales en un nivel que se corresponda con las necesidades y capacidades de los alumnos de Primaria.

Sin necesidad de conocer sus fundamentos matemáticos, es importante que los alumnos tengan dominio funcional de estrategias básicas de cómputo, de cálculo mental, de estimaciones de resultados y de medidas, así como también de utilización de la calculadora. Junto con ello, los alumnos y alumnas tendrán que adquirir una actitud positiva hacia las matemáticas, siendo capaces de valorar y comprender la utilidad del conocimiento matemático, así como de experimentar satisfacción por su uso, por el modo en que permite ordenar la información, comprender la realidad y resolver determinados problemas.

Objetivos

La enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades siguientes:

1. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes sobre fenómenos conocidos.

2. Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.

3. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y de medida decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.

4. Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario.

5. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno.

6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión y resolución de dichos problemas.

Contenidos

Bloque 1.- Números y operaciones: Significado y estrategias

Conceptos

1. Números naturales, fraccionarios y decimales.

    - Necesidad y funciones: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones, etc.
    - Relaciones entre números (mayor que, menor que, igual a, diferente de, mayor o igual que, menor o igual que, aproximadamente igual) y símbolos para expresarlas.
    - Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

2. Sistema de numeración decimal: base, valor de posición y reglas de formación de los números.

3. Números cardinales y ordinales.

4. Numeración romana.

5. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

    - Situaciones en las que intervienen estas operaciones.
    - Identificación de las operaciones inversas (+/–, x/:).

6. Algoritmos de las operaciones.

7. Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

2. Comparación entre números naturales, decimales y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.

3. Lectura y escritura de números en diferentes contextos.

4. Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números, y construcción de series y clasificaciones de acuerdo con una regla establecida.

5. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos.

6. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.

7. Representación matemática de una situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico), estableciendo correspondencias entre los mismos.

8. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.

9. Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.

10. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.

11. Identificación de problemas de la vida cotidiana en cuya resolución intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.

12. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla, atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.

2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica, apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.

4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

5. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

6. Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.

Bloque 2.- La medida

Conceptos

1. Necesidad y funciones de la medición.

2. Comparación de magnitudes y unidad de referencia.

3. Unidades no convencionales.

4. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal (longitud, superficie, capacidad, masa).

5. Unidades de medida de tiempo.

6. Unidades monetarias.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales o de uso local.

2. Utilización de instrumentos de medida convencionales y construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones.

3. Utilización del Sistema Monetario aplicando las equivalencias correspondientes.

4. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de manera exacta y aproximada.

5. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso, atendiendo al objetivo de la medición.

6. Transformación de las unidades de medida de la misma magnitud.

7. Expresión verbal del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Actitudes

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.

2. Interés por utilizar con cuidado diferentes instrumentos de medida y emplear unidades adecuadas.

3. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.

4. Curiosidad e interés por descubrir la medida de uso tradicional y coloquial.

5. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

Bloque 3.- Formas geométricas y situación en el espacio

Conceptos

1. La situación en el espacio (distancias, ángulos y giros, y sistemas de coordenadas cartesianas).

2. Relación entre elementos geométricos (paralelismo, perpendicularidad, intersección de rectas).

3. La representación elemental del espacio (planos, mapas, maquetas).

4. Formas planas y espaciales.

5. Regularidades y simetrías.

Procedimientos

1. Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio con relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.

2. Representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas.

3. Interpretación y descripción verbal de croquis, planos, maquetas y mapas.

4. Utilización de los instrumentos de dibujo habituales para la construcción y exploración de formas geométricas.

5. Descripción de formas de objetos familiares utilizando adecuadamente el vocabulario geométrico básico.

6. Construcción de formas geométricas a partir de datos previamente establecidos.

7. Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.

8. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por

composición y descomposición.

9. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.

Actitudes

1. Interés por la adecuada descripción y representación de formas geométricas.

2. Valoración de la utilidad de los sistemas de referencia y de la representación espacial en actividades cotidianas.

3. Sensibilidad y gusto por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas.

4. Mostrar interés por usar con precisión y cuidado los instrumentos de dibujo, así como por la búsqueda de instrumentos alternativos.

5. Curiosidad e interés por identificar formas y relaciones geométricas en los objetos del entorno.

6. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio.

Bloque 4.- Organización de la información

Conceptos

1. La representación gráfica.

2. Las tablas de datos.

3. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas lineales, de barras, pictogramas, etc.

4. La media aritmética y la moda.

5. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Procedimientos

1. Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficas sencillas relativas a fenómenos familiares.

2. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares

utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.

3. Elaboración de gráficas estadísticas con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.

4. Obtención e interpretación de la media aritmética y de la moda en situaciones familiares concretas.

5. Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado.

Actitudes

1. Actitud crítica ante las informaciones y mensajes trasmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.

2. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.

3. Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

Criterios de evaluación

1. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución.

Este criterio está dirigido a comprobar la capacidad del alumno o la alumna para resolver problemas y a verificar si esto se realiza de forma lógica y reflexiva. Se concederá especial atención al proceso que ha seguido el alumno en la resolución de un problema.

2. Resolver problemas sencillos de su entorno, aplicando una o varias de las cuatro operaciones con números naturales y utilizando estrategias personales de resolución.

Con este criterio se pretende comprobar que el alumnado sabe seleccionar y aplicar debidamente las operaciones de cálculo en situaciones reales. Se atenderá especialmente a su capacidad para transferir los aprendizajes realizados sobre los problemas propuestos en el aula a situaciones fuera de ella.

3. Leer, escribir y ordenar números naturales y decimales (hasta las centésimas), interpretando el valor de cada una de sus cifras, y realizar operaciones sencillas con ellos.

Se pretende comprobar que el alumnado maneja los números naturales y decimales, que interpreta su valor en situaciones de la vida cotidiana y que sabe operar con ellos.

4. Realizar cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos (algoritmos, uso de la calculadora, cálculo mental y tanteo), utilizando el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal y desarrollar la confianza del alumno en el uso adecuado y crítico de los distintos procedimientos.

Mediante este criterio se pretende verificar que los alumnos y las alumnas conocen las relaciones existentes en el sistema de numeración y que realizan cálculos numéricos eligiendo alguno de los diferentes procedimientos. También se pretende comprobar que usan adecuadamente la calculadora de cuatro operaciones.

5. Realizar estimaciones y mediciones escogiendo entre las unidades e instrumentos de medida más usuales los más adecuados en cada caso.

Se pretende que alumnos y alumnas demuestren su conocimiento sobre las unidades más usuales del Sistema Métrico Decimal y sobre los instrumentos de medida más comunes, escogiendo los más pertinentes en cada caso. También se intentará detectar si hacen previsiones razonables al estimar la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo.

6. Expresar con precisión medidas de longitud, superficie, masa, capacidad y tiempo, utilizando los múltiplos y submúltiplos usuales y convirtiendo unas unidades en otras cuando sea necesario.

Con este criterio se pretende detectar si los alumnos y alumnas saben utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, si saben convertir unas unidades en otras (de la misma magnitud), y si los resultados de las mediciones que realizan los expresan en las unidades de medida más adecuadas y utilizadas.

7. Realizar e interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano, maqueta), tomando como referencia elementos familiares y estableciendo relaciones entre ellos.

Se pretende evaluar la capacidad que tiene el alumno para orientarse, elaborando o interpretando croquis de itinerarios, planos o maquetas, sin exigir excesiva precisión. La evaluación deberá llevarse a cabo mediante representaciones de espacios conocidos o mediante juegos.

8. Describir, descubrir y reconocer formas y cuerpos geométricos del entorno próximo, clasificarlos y dar razones del modo de clasificación.

Este criterio pretende comprobar que el alumnado conoce algunas propiedades básicas de los cuerpos y formas geométricas, que elige alguna de esas propiedades para clasificarlos y que explica y justifica la elección.

9. Utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender su entorno físico.

En este criterio es importante detectar que los alumnos han aprendido las nociones geométricas citadas y emplean los términos correspondientes al describir objetos de su entorno, así como al dar o pedir información acerca de situaciones de la vida cotidiana.

10. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.

Se trata de comprobar que el alumno o la alumna es capaz de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, que sabe utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica, tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, etc., y que entiende y sabe comunicar la información así expresada.

11. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado.

Se trata de comprobar que los alumnos, a través de su experiencia, son capaces de inferir la existencia de sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.

12. Expresar de forma ordenada y clara los datos y las operaciones realizadas en la resolución de problemas sencillos.

Se trata de valorar el orden y la claridad con que los alumnos presentan los datos de un problema. Asimismo, se comprobará que comprenden la importancia que esto tiene para la búsqueda de una buena solución, para detectar los posibles errores y para explicar el razonamiento seguido. Se trata de verificar, también, que comprende la importancia que tiene el cuidado en la disposición correcta de las cifras al realizar los algoritmos de las operaciones propuestas.

13. Perseverar en la búsqueda de datos y soluciones en la formulación y la resolución de un problema.

Se trata de ver si el alumno es preciso al reflejar los datos en la formulación de un problema y si persiste en buscar la solución de éste, utilizando para ello algunos heurísticos sencillos.

14. Elaborar y usar estrategias personales de cálculo teniendo confianza en las propias capacidades para las matemáticas.

Con este criterio se pretende evaluar un contenido procedimental como es la elaboración y el uso de estrategias personales de cálculo, así como la actitud de confianza que manifiesta el alumno en sus propias capacidades para las matemáticas.

2. Educación Secundaria Obligatoria (ESO)

Objetivos

1. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, organizar y relacionar informaciones referidas a los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Aplicar adecuadamente los conocimientos matemáticos adquiridos a situaciones de la vida diaria, con confianza en las propias habilidades.

3. Usar las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística), incorporándolas al lenguaje y modos de argumentación habituales, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y rigurosa.

4. Utilizar hábilmente y con sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos) para ayudar en el aprendizaje y en las aplicaciones de las Matemáticas.

5. Emplear distintas estrategias para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos procedimientos, recursos e instrumentos, y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de resultados.

6. Identificar las formas y relaciones espaciales de la realidad, aplicando los conocimientos geométricos para comprender y analizar el mundo circundante y siendo sensible a su belleza.

7. Identificar los elementos matemáticos presentes en los medios de comunicación y, mediante métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos, obtener conclusiones de los datos recogidos, con el fin de analizar críticamente las funciones que desempeñan y comprender mejor los mensajes.

8. Reconocer la realidad como diversa y susceptible de ser explicada desde

puntos de vista contrapuestos y complementarios: determinista/aleatorio, finito/infinito, exacto/aproximado; mostrando actitudes propias de las matemáticas como la visión crítica, la necesidad de contrastar apreciaciones intuitivas, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

9. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes y la cultura escolar de esta etapa para afrontar las situaciones que requieran su empleo y disfrutar con los aspectos creativos, lúdicos, estéticos y prácticos de las matemáticas.

Contenidos

Primer curso

Conceptos

I. Aritmética y álgebra.

1. Números naturales.

- Significados y usos en distintos contextos.
- El sistema de numeración decimal.

2. Operaciones con los números naturales.

- Operaciones elementales. Propiedades.
- Potencias de exponente natural.
- Raíces cuadradas exactas.
- Jerarquía de operaciones. Paréntesis.
- Reglas de uso de la calculadora.

3. Relaciones entre los números naturales.

- Orden y representación en la recta.
- Múltiplos y divisores.
- Números primos y compuestos.
- Otros tipos de relaciones.

4. Fracciones y decimales.

- Significado y uso en distintos contextos.
- Aproximación de decimales.
- Fracciones equivalentes.
- Ordenación de fracciones y decimales exactos.

5. Las magnitudes y su medida.

- La medida como información cuantitativa de tamaños.
- El sistema métrico decimal.
- Unidades de medida tradicionales de la zona.
- Margen de error en las medidas. Precisión en la medida.
- Estimación de medidas.
- Instrumentos de medidas más frecuentes.
- Evolución de la moneda. El euro.
- Magnitudes directamente proporcionales.
- Repartos proporcionales y porcentajes.

II. Geometría.

1. Los elementos geométricos en el plano.

- Elementos básicos: punto, recta, segmento, ángulo y arco.
- Relaciones de paralelismo, perpendicularidad e incidencia.
- Mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo.

2. Figuras planas elementales: triángulos, cuadriláteros, otros polígonos, circunferencia y círculo.

- Propiedades características y clasificación.
- Perímetros y áreas.

III. Tablas y gráficas.

1. Series de números: tabulaciones.

2. Representaciones gráficas: diagramas de barras y pictogramas.

Procedimientos

1. Expresión de todo tipo de cantidades en el sistema decimal, de forma verbal y numérica.

2. Aplicación de los algoritmos y de la prioridad de las operaciones con números naturales, y decisión sobre las adecuadas para la resolución de problemas numéricos.

3. Distinción entre los distintos tipos de división y expresión de una división en forma de igualdad.

4. Uso de la calculadora para la realización y verificación de operaciones, y para la reflexión sobre conceptos y el descubrimiento de propiedades.

5. Transformación de un decimal exacto en una fracción y viceversa.

6. Utilización de diversas estrategias de cálculo mental y escrito, para el recuento, la estimación y el cálculo de cantidades con la debida precisión.

7. Utilización correcta de los instrumentos de medida, en particular los utilizados en la zona, y expresión de las unidades en la forma adecuada a cada situación.

8. Acotación de los errores cometidos en la estimación, medición o aproximación de una magnitud.

9. Elaboración de diagramas, gráficos o dibujos sencillos para la indicación de las medidas realizadas.

10. Identificación, en la vida cotidiana, de la proporcionalidad directa entre diferentes tipos de magnitudes y de su terminología específica.

11. Utilización de diferentes recursos (reglas de tres, porcentajes, manejo de tablas y gráficos...) para cálculos de proporcionalidad directa.

12. Utilización diestra de los instrumentos de dibujo habituales.

13. Comparación y clasificación de figuras planas mediante diversos criterios (número de lados, número de vértices, características de los ángulos y regularidades).

14. Descripción, construcción y trazado de las figuras planas.

15. Utilización de la terminología y notación precisas en la descripción de objetos del entorno, situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.

16. Utilización de la medida para la exploración de formas geométricas.

17. Construcción de tablas a partir de datos obtenidos de un enunciado o de una gráfica.

18. Construcción, lectura e interpretación de gráficas.

19. Análisis del texto y realización de esquemas y diagramas para la comprensión del enunciado de un problema.

20. Formulación verbal y por escrito del planteamiento y resolución de problemas numéricos y geométricos.

21. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas mediante el uso de ejemplos, contraejemplos, método de ensayo y error, etc.

22. Planificación y realización de experiencias sencillas de tomas de datos para el estudio del comportamiento de distintos fenómenos.

23. Aplicación de criterios matemáticos a situaciones y problemas de la vida diaria.

24. Planificación individual y en equipos de las tareas de medición, recuento, recogida de datos, etc., con previsión de los recursos, el grado de precisión, la secuencia de operaciones, el procesamiento de los datos y la puesta en común.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad del lenguaje numérico, del cálculo mental, de la estimación de cantidades, de la realización de mediciones y de las formas geométricas en la vida diaria.

2. Disposición a la incorporación de los números y el vocabulario geométrico al lenguaje cotidiano.

3. Curiosidad e interés por la investigación de situaciones numéricas y geométricas.

4. Disposición al uso adecuado de la calculadora y los diferentes instrumentos de medida.

5. Interés en la búsqueda de soluciones a problemas: formulación de hipótesis, elección de distintas estrategias de resolución, utilización de ejemplos o contraejemplos, realización de comprobaciones experimentales o razonadas, sistematización en los procesos de recogida de datos, etc.

6. Sensibilidad hacia los números, las figuras geométricas, las observaciones, las

experimentaciones y la resolución de problemas, y gusto por ellos.

7. Valoración crítica de las informaciones recibidas mediante los conocimientos matemáticos y las posibilidades de razonamiento a su alcance.

8. Disposición a la revisión, ordenación y presentación ordenada y clara de los procesos seguidos y resultados obtenidos en la resolución de problemas, y, en general, del material elaborado (trabajos, ejercicios, apuntes, pruebas, etc.).

9. Valoración de la importancia del trabajo en equipo; aceptación de distintos puntos de vista, interés y respeto por ellos.

10. Confianza en las propias capacidades, reconocimiento de lo aprendido y conciencia de las propias limitaciones y de lo no aprendido aún.

Segundo curso

Conceptos

I. Aritmética y álgebra.

1. Los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios.

- Significado y uso en distintos contextos.
- La fracción: proporción, operador decimal y porcentaje.

2. Las operaciones y los algoritmos.

- Operaciones elementales en distintos contextos y con diferentes clases de números.
- Propiedades y algoritmos de las operaciones.
- Reglas de uso de la calculadora.
- Estimaciones, aproximaciones y redondeo.
- Raíces cuadradas aproximadas.

3. Relaciones entre los números.

- Relación de divisibilidad.
- Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
- Ordenación y representación en la recta.

4. Las magnitudes y su medida.

- Medida del tiempo.
- Medida de ángulos planos y diedros.
- Sistema sexagesimal de medida de ángulos.
- Precisión y estimación de las medidas.
- Magnitudes directa e inversamente proporcionales.

5. Lenguaje algebraico.

- Significado y uso de las letras para la representación de un número desconocido fijo o un número cualquiera.
- Iniciación al concepto de variable como conjunto de números.
- Significado y uso de las letras para la representación de variables en fórmulas y ecuaciones.
- Operaciones con variables: producto de un número por una variable y suma y resta de números por variables.
- Simetría de la igualdad.
- Ecuación y solución de una ecuación.

II. Geometría.

1. Figuras semejantes: la representación a escala.

- Representaciones manejables de la realidad: planos, mapas y maquetas.
- Igualdad de formas: ángulos iguales y longitudes proporcionales.
- Teorema de Tales.
- Razón de semejanza.

2. Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras.

3. Los elementos geométricos en el espacio.

- Elementos básicos: punto, recta, plano y ángulo.
- Relaciones de paralelismo, perpendicularidad e incidencia.
- Posiciones relativas de rectas y planos.

4. Figuras elementales en el espacio: prismas, poliedros, pirámides, cilindros y conos.

    - Propiedades características y clasificación.
    - Áreas.
    - Volumen del prisma.

III. Funciones y gráficas.

1. Coordenadas cartesianas, ejes, origen, unidades, graduación, coordenadas de un punto.

2. Tablas de valores y gráficas cartesianas.

3. Magnitudes y variables.

4. Relaciones funcionales entre magnitudes proporcionales.

IV. Estadística

1. Recogida de datos.

    - Población y muestra.
    - Variable estadística.
    - Tipos de variables: cualitativas y cuantitativas.

2. Tablas y gráficas de variables estadísticas discretas.

    - Frecuencia absoluta.
    - Diagrama de barras.

3. Parámetros estadísticos de centralización: media aritmética y moda en casos sencillos.

Procedimientos

1. Utilización e interpretación de los números para recuentos, mediciones, ordenaciones, codificaciones, expresión de cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes en diferentes contextos, por medio de la notación más adecuada para cada caso.

2. Utilización de diversas estrategias de cálculo mental y escrito para recuentos, cálculos o estimación de cantidades, con la precisión requerida.

3. Uso e interpretación de los números negativos para la expresión de estados, variaciones y opuestos a un número o a un sentido.

4. Uso de la calculadora para la realización y verificación de operaciones, la evaluación de expresiones, la reflexión sobre conceptos y el descubrimiento de propiedades.

5. Cálculo directo e inverso de porcentajes, descuentos y recargos.

6. Expresión de las medidas efectuadas con las unidades y la precisión adecuadas a la situación y al instrumento utilizado.

7. Identificación en la vida cotidiana de la proporcionalidad existente entre diferentes tipos de magnitudes y de la terminología específica de algunas de ellas (intereses, mezclas, tasas, índices, "ratios", etc.).

8. Expresión oral y escrita de reglas generales en situaciones numéricas sencillas.

9. Resolución de ecuaciones de los tipos: ax+b = c, ax+b = cx+d, utilizando el tanteo y métodos numéricos y algebraicos.

10. Resolución de problemas utilizando ecuaciones mediante la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en casos muy sencillos.

11. Utilización de algunas figuras y cuerpos para teselar, minimizar áreas y perímetros, etc.

12. Identificación de la semejanza entre figuras y cuerpos geométricos, y obtención del factor de escala.

13. Construcción de modelos geométricos, esquemas, planos y maquetas de figuras planas y espaciales, utilizando la escala, los instrumentos, los materiales y las técnicas adecuados a cada caso.

14. Clasificación de figuras y cuerpos geométricos mediante diversos criterios (número de lados, número de caras o vértices, ángulos, simetrías y regularidades).

15. Utilización de la terminología y notación precisas para la descripción de situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.

16. Obtención e identificación de desarrollos planos de cuerpos.

17. Análisis y construcción de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas, por medio de composiciones, descomposiciones, intersecciones, movimientos, deformaciones y desarrollos.

18. Observación y búsqueda de regularidades en distintos contextos: tablas numéricas, sucesiones, estructuras geométricas, etc.

19. Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas, de enunciados o de expresiones funcionales.

20. Lectura e interpretación de gráficas.

21. Reconocimiento de las variables independiente y dependiente de una función y las unidades de las correspondientes magnitudes, tanto en enunciados como en gráficas.

22. Utilización de expresiones algebraicas para la descripción de relaciones entre magnitudes directamente proporcionales.

23. Indagación sobre la proporcionalidad directa o inversa entre pares de valores correspondientes a dos magnitudes en situaciones concretas.

24. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de un fenómeno a partir de su gráfica.

25. Utilización de distintas fuentes documentales (anuarios, revistas especializadas, bancos de datos, etc.) con información de tipo estadístico.

26. Utilización de técnicas sencillas de encuesta y recuento para la recogida de datos.

27. Planificación individual y en equipo de tareas de medición, recuento, recogida de datos, etc., con previsión de los recursos, el grado de precisión, la secuencia de operaciones, el procesamiento de los datos y la puesta en común.

28. Análisis del texto y realización de esquemas y diagramas para la comprensión del enunciado de un problema.

29. Simplificación de problemas complejos mediante la sustitución de datos por otros más sencillos, el cambio de una situación con muchos elementos por otra con menos, el paso del caso particular a uno general, o del general a uno particular, etc.

30. Formulación verbal y por escrito del planteamiento y resolución de problemas numéricos, algebraicos y geométricos.

31. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas mediante el uso de ejemplos, contraejemplos, método de ensayo y error, etc.

32. Aplicación de criterios matemáticos a situaciones y problemas de la vida diaria.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad de los lenguajes numérico y gráfico, del cálculo, de la estimación de cantidades, de la realización de mediciones y de las formas geométricas en la vida diaria.

2. Disposición a la incorporación de los números y el vocabulario geométrico al lenguaje cotidiano.

3. Curiosidad e interés por la investigación de situaciones numéricas, formas, regularidades y relaciones geométricas.

4. Disposición al uso adecuado de la calculadora y los diferentes instrumentos de medida.

5. Interés en la búsqueda de soluciones a problemas: formulación de hipótesis, elección de distintas estrategias de resolución, utilización de ejemplos o contraejemplos, realización de comprobaciones experimentales o razonadas, sistematización en los procesos de recogida de datos, etc.

6. Sensibilidad hacia los números, las figuras geométricas, las observaciones, las experimentaciones y la resolución de problemas, y gusto por ellos.

7. Valoración crítica de las informaciones recibidas mediante los conocimientos matemáticos y las posibilidades de razonamiento a su alcance.

8. Disposición a la revisión, ordenación y presentación ordenada y clara de los procesos seguidos y los resultados obtenidos en la resolución de problemas, y, en general, del material elaborado (trabajos, ejercicios, apuntes, pruebas, etc.).

9. Valoración de la importancia del trabajo en equipo; aceptación de distintos puntos de vista, interés y respeto por ellos.

10. Confianza en las propias capacidades, reconocimiento de lo aprendido y conciencia de las propias limitaciones y de lo no aprendido aún.

Tercer curso

Conceptos

I. Aritmética y álgebra.

1. Números racionales.

- Significado y uso en distintos contextos.
- Expresión decimal de un número racional.
- Reconocimiento de números irracionales.

2. Operaciones y algoritmos con los números racionales.

- Operaciones elementales.
- Potencias de exponente entero.
- Jerarquía de operaciones. Uso de paréntesis.
- Reglas de uso de la calculadora.

3. Relaciones entre los números racionales.

- Orden y representación en la recta.
- Aproximaciones y errores.
- Iniciación a las progresiones aritméticas y geométricas.

4. Expresiones algebraicas.

- Expresiones algebraicas como códigos de relaciones numéricas entre cantidades desconocidas. Monomios y polinomios.
- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con polinomios de primer y segundo grado, con coeficientes enteros: suma, resta, multiplicación y extracción de factor común.
- Expresiones equivalentes: reglas de transformación e igualdades notables.
- Ecuaciones de primer grado.
- Ecuación incompleta de segundo grado.
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

II. Geometría.

1. Transformaciones isométricas.

- Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.
- Propiedades conservadas en las transformaciones.
- Composición de transformaciones.

2. Cuerpos geométricos: poliedros regulares y cuerpos redondos.

- Áreas y volúmenes.

3. El globo terráqueo.

- Meridianos y paralelos.
- Coordenadas terrestres. Latitud y longitud.
- Husos horarios.

III. Funciones y gráficas.

1. Dependencia funcional.

- Variables dependiente e independiente.

2. Características de las gráficas.

- Aspectos globales: continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodicidad y simetrías.

3. Modelos elementales de funciones.

- Funciones constante, lineal y afín.

IV. Estadística y probabilidad.

1. Recogida de datos.

- Población y muestra.
- Variable y tipos de variable: cualitativa y cuantitativa (discreta y continua).
- Aleatoriedad. Distribuciones de probabilidad sencillas.

2. Tablas y gráficas de variables estadísticas discretas.

- Frecuencias absoluta, relativa y porcentual.
- Tablas de frecuencias.
- Gráficos estadísticos.

3. Parámetros estadísticos en distribuciones discretas.

- Parámetros de centralización: media, moda y mediana.
- Parámetros de dispersión: rango y desviación típica.
- Reglas de uso de las funciones estadísticas de la calculadora.

4. Probabilidad.

- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Experimento aleatorio. Sucesos equiprobables y no equiprobables.
- Frecuencia relativa de un suceso.
- Estabilidad de la frecuencia relativa. Probabilidad de un suceso.
- Probabilidad en sucesos equiprobables. Distribución uniforme. Regla de Laplace.

Procedimientos

1. Utilización e interpretación de los números en diferentes contextos, con la notación más adecuada para cada caso.

2. Valoración de la conveniencia y el empleo de aproximaciones de números, con conocimiento de la magnitud del error cometido.

3. Utilización de diferentes recursos (paso de decimal a fracción o viceversa, expresión de los datos con las unidades más adecuadas...) para la simplificación de cálculos.

4. Utilización del lenguaje algebraico para la expresión de leyes generales.

5. Distinción entre identidades y ecuaciones.

6. Resolución de ecuaciones de primer grado, de segundo grado incompletas y sistemas de ecuaciones por métodos analíticos y gráficos, y discusión de los resultados obtenidos.

7. Resolución de ecuaciones y sistemas en problemas de distintos contextos.

8. Utilización de la terminología y notación adecuadas para la descripción precisa de situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.

9. Determinación gráfica de los invariantes en los movimientos.

10. Identificación de las transformaciones isométricas en la artesanía y decoración tradicional canarias.

11. Descripción y clasificación de poliedros regulares y cuerpos redondos.

12. Representación plana de cuerpos geométricos con cierta sensación de perspectiva.

13. Construcción de figuras espaciales a partir de criterios dados (secciones, duales, etc.).

14. Análisis y construcción de figuras y cuerpos geométricos, por medio de composiciones, descomposiciones, intersecciones, movimientos, deformaciones y desarrollos.

15. Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas de cuerpos y figuras.

16. Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de las relaciones entre ellos.

17. Traducción entre las distintas formas de expresión de la dependencia funcional: descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula.

18. Lectura e interpretación de gráficos funcionales con empleo de las nociones de continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad y tendencia.

19. Caracterización de las funciones constantes, lineal y afín mediante sus expresiones algebraicas y sus gráficas.

20. Utilización de distintas fuentes documentales (anuarios, revistas especializadas, bancos de datos, etc.) con información de tipo estadístico.

21. Utilización de técnicas de encuesta y recuento para la recogida de datos.

22. Lectura, interpretación y construcción de diagramas de barras, de sectores, histogramas y pictogramas.

23. Obtención de los parámetros más adecuados para la descripción de una

distribución, según su contexto y la naturaleza de los datos, y elaboración de conclusiones.

24. Uso de programas informáticos para la elaboración de tablas y la realización de cálculos y gráficos estadísticos.

25. Reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el ámbito científico.

26. Utilización del vocabulario adecuado para la descripción y cuantificación de situaciones relacionadas con el azar.

27. Realización de simulaciones mediante números aleatorios procedentes de tablas o generados automáticamente.

28. Planificación y realización de experiencias sencillas para el estudio del comportamiento de fenómenos de azar.

29. Asignación de probabilidades: experimentalmente, por simulación y geométricamente.

30. Uso de la calculadora para la realización y verificación de operaciones, la evaluación de expresiones, la reflexión sobre conceptos y el descubrimiento de propiedades, decidiendo sobre su uso según la complejidad de los cálculos y la exigencia de exactitud en los resultados.

31. Planificación individual y en equipo de tareas de medición, recuento, recogida de datos, etc., con previsión de los recursos, el grado de precisión, la secuencia de operaciones, el procesamiento de los datos y la puesta en común.

32. Análisis del texto y realización de esquemas y diagramas para la comprensión del enunciado de un problema.

33. Descripción verbal y escrita del proceso seguido en la resolución de problemas.

34. Simplificación de problemas complejos mediante la sustitución de datos por otros más sencillos, el cambio de una situación con muchos elementos por otra con menos, el paso del caso particular a uno general, o del general a uno particular, etc.

35. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas mediante el uso de ejemplos, contraejemplos, método de ensayo y error, etc.

36. Aplicación de criterios matemáticos a situaciones y problemas de la vida diaria.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad e importancia de las Matemáticas en la vida diaria, como lenguaje universal y como contribución al desarrollo científico y tecnológico.

2. Disposición a la incorporación de los lenguajes numérico, algebraico, geométrico, gráfico y estadístico al lenguaje cotidiano, y del cálculo, la estimación de cantidades y la precisión en las medidas a los modos de proceder habituales.

3. Curiosidad e interés por la investigación de situaciones numéricas, formas y relaciones geométricas, regularidades, fenómenos relacionados con el azar, informaciones de tipo estadístico, funcionales, etc.

4. Disposición favorable al uso adecuado de la calculadora y las tecnologías de la comunicación.

5. Interés en la búsqueda de soluciones a problemas: formulación de hipótesis, elección de distintas estrategias de resolución, utilización de ejemplos o contraejemplos, realización de comprobaciones experimentales o razonadas, sistematización en los procesos de recogida y recuento de datos, utilización de analogías y del método de ensayo y error, suposición del problema resuelto, etc.

6. Sensibilidad hacia la geometría, los números, las observaciones, las experimentaciones y la resolución de problemas, y gusto por ellos.

7. Interés por la relación de los contenidos matemáticos aprendidos con otras áreas de conocimiento.

8. Valoración crítica de las informaciones recibidas mediante los conocimientos matemáticos y las posibilidades de razonamiento a su alcance.

9. Disposición a la revisión, ordenación y presentación ordenada y clara de los procesos seguidos y resultados obtenidos en la resolución de problemas, y, en general, del material elaborado (trabajos, ejercicios, apuntes, pruebas, etc.).

10. Valoración de la importancia del trabajo en equipo; aceptación de distintos puntos de vista, interés y respeto por ellos.

11. Confianza en las propias capacidades, reconocimiento de lo aprendido y conciencia de las propias limitaciones y de lo no aprendido aún.

Cuarto curso

Conceptos

I. Aritmética y álgebra.

1. Números reales.

- Significado y uso en distintos contextos.
- Notación científica.

2. Operaciones con números reales.

- Potencias de exponente fraccionario y radicales.
- Simplificación de expresiones irracionales sencillas.
- Reglas de uso de la calculadora.

3. Relaciones entre los números reales.

- Orden y representación en la recta real.
- Estimación y aproximación.

4. Expresiones algebraicas.

- Operaciones con polinomios: suma, resta y multiplicación.
- Ecuaciones de primer y segundo grado.
- Sistemas de ecuaciones lineales.

II. Geometría.

1. Figuras semejantes.

- Razón de semejanza.
- Teorema de Tales.

2. Medida de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.

3. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

4. Resolución de triángulos rectángulos.

5. Iniciación a la geometría analítica plana.

- Vectores en el plano.
- Operaciones con vectores: suma y producto por un escalar.
- Ecuaciones de la recta.

III. Funciones y gráficas.

1. Dependencia funcional.

- Variables dependiente e independiente.

2. Características de las gráficas.

- Aspectos globales: dominio, recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, asíntotas, concavidad y convexidad, periodicidad y simetrías.

3. Modelos elementales de funciones.

- Las funciones de primer grado, de segundo grado, de proporcionalidad inversa y exponenciales en casos sencillos.

IV. Estadística y probabilidad.

1. Población y muestra.

2. Recogida de datos.

- Variables discretas y continuas.
- Agrupación de datos: intervalos y marcas de clase.

3. Tabulación y representación de datos.

- Tablas de frecuencias.
- Gráficos estadísticos.

4. Parámetros estadísticos de centralización y dispersión.

5. Probabilidad.

- Experimentos aleatorios simples y compuestos.
- Sucesos. Tipos de sucesos.

- Juego equitativo. Esperanza matemática.
- Probabilidad de un suceso en experimentos simples y compuestos.

Procedimientos

1. Identificación de diferentes tipos de números (naturales, enteros, racionales e irracionales) y sus propiedades, reconocimiento de sus diferentes formas de expresión y empleo en la cuantificación de situaciones de la vida cotidiana.
2. Elección adecuada del método más conveniente para la realización de un determinado cálculo: mentalmente, por escrito, con calculadora o el ordenador.
3. Aplicación de los algoritmos para el de cálculo de expresiones aritméticas, la construcción de tablas funcionales o la exploración de pautas y regularidades numéricas, mediante calculadora u ordenador.
4. Resolución de situaciones problemáticas y realización de los cálculos con toda clase de números y en todas sus expresiones.
5. Resolución de situaciones problemáticas mediante ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sistemas de ecuaciones, y discusión de los resultados.
6. Construcción de gráficas de funciones a partir de tablas, de fórmulas y de descripciones verbales de un problema.
7. Aplicación del lenguaje de tablas, gráficas y expresiones algebraicas para describir los modelos elementales de funciones.
8. Caracterización de los modelos elementales de funciones por su expresión algebraica y por su gráfica.
9. Lectura e interpretación de gráficos funcionales con empleo de las nociones de continuidad, crecimiento, valores extremos, periodicidad y tendencia.
10. Identificación de las expresiones algebraicas de las funciones $f(x) + a$, $f(x) - a$, $f(x + a)$, $f(x – a)$ con la correspondiente transformación de la gráfica de $f(x)$.
11. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de un fenómeno y sobre el tipo de expresión algebraica correspondiente a partir de su gráfica.
12. Cálculo de las razones trigonométricas para ángulos cualesquiera.
13. Verificación de las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos agudos.
14. Resolución de triángulos rectángulos en distintas situaciones y contextos.
15. Estudio de las posiciones relativas de dos rectas en el plano.
16. Obtención de las ecuaciones de rectas paralelas a una dada.
17. Utilización de distintas fuentes documentales (anuarios, revistas especializadas, etc.) con información de tipo funcional o estadístico.

18. Utilización de técnicas de encuesta, muestreo y recuento para la recogida de datos.
19. Lectura, interpretación y construcción de diagramas de barras, de sectores, histogramas, polígono de frecuencias y pictogramas.
20. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de una población a partir de resultados relativos a una muestra suya.
21. Detección de falacias en proposiciones portadoras de lenguaje estadístico.
22. Elección y cálculo de los parámetros estadísticos más adecuados para la descripción de distribuciones según el contexto y la naturaleza de los datos, y con ayuda de la calculadora.
23. Planificación y realización de experiencias sencillas para el estudio de fenómenos de azar.
24. Distinción entre hechos o situaciones aleatorias y deterministas y descripción comprensible y útil de los sucesos de experimentos aleatorios simples y compuestos.
25. Utilización de diversos recursos (recuentos, modelos geométricos, diagramas de árbol, tablas de contingencia, técnicas combinatorias...) para la asignación de probabilidades.
26. Utilización de la probabilidad y la esperanza matemática en la toma de decisiones en distintos contextos.
27. Uso de programas informáticos para la elaboración de tablas y la realización de cálculos y gráficos estadísticos.
28. Relación de algunos conocimientos matemáticos de la etapa (la geometría griega, el problema de la raíz cuadrada de 2, el álgebra y la probabilidad) con sus orígenes históricos.
29. Planificación individual y en equipo de tareas de medición, recuento, recogida de datos, etc., con previsión de los recursos, el grado de precisión, la secuencia de operaciones, el procesamiento de los datos y la puesta en común.
30. Análisis del texto y realización de esquemas y diagramas para la comprensión del enunciado de un problema.
31. Descripción verbal y escrita del proceso seguido en la resolución de problemas.
32. Simplificación de problemas complejos mediante la sustitución de datos por otros más sencillos, el cambio de una situación con muchos elementos por otra con menos, el paso del caso particular a uno general, o del general a uno particular, etc.
33. Formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas mediante el uso de ejemplos, contraejemplos, método de ensayo y error, etc.
34. Aplicación de criterios matemáticos a situaciones y problemas de la vida diaria.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad e importancia de las Matemáticas en la vida diaria, en el conocimiento científico, como lenguaje universal y como contribución histórica al desarrollo de la Ciencia y la Tecnología.
2. Disposición a la incorporación de los lenguajes numérico, algebraico, geométrico, gráfico, estadístico y probabilístico al lenguaje cotidiano, y del cálculo, la estimación de cantidades y la precisión en las medidas a los modos de proceder habituales.
3. Curiosidad e interés por la investigación de situaciones numéricas, formas y relaciones geométricas, regularidades, fenómenos relacionados con el azar, informaciones de tipo estadístico, funcionales, etc.
4. Disposición favorable al uso adecuado de la calculadora y las tecnologías de la comunicación.
5. Perseverancia en la búsqueda de soluciones a problemas: formulación de hipótesis, elección de distintas estrategias de resolución, utilización de ejemplos o contraejemplos, realización de comprobaciones experimentales o razonadas, sistematización en los procesos de recogida y recuento de datos, utilización de analogías y del método de ensayo y error, suposición del problema resuelto, etc.
6. Sensibilidad hacia la geometría, los números, las observaciones, las experimentaciones y la resolución de problemas, el orden y el razonamiento, y gusto por ellos.
7. Interés por la relación e integración de los contenidos matemáticos aprendidos con otras áreas de conocimiento.
8. Valoración crítica de las informaciones recibidas mediante los conocimientos matemáticos y las posibilidades de razonamiento a su alcance.
9. Disposición a la revisión, ordenación y presentación ordenada y clara de los procesos seguidos y resultados obtenidos en la resolución de problemas, y, en general, del material elaborado (trabajos, ejercicios, apuntes, pruebas, etc.).
10. Valoración de la importancia del trabajo en equipo; aceptación de distintos puntos de vista, interés y respeto por ellos.
11. Confianza en las propias capacidades, reconocimiento de lo aprendido y conciencia de las propias limitaciones y de lo no aprendido aún.

3. Bachillerato

Ciencias de la Naturaleza y de la Salud: *Modalidad de Tecnología*

Objetivos: Matemáticas I y II

1. Conocer y comprender los conceptos, estrategias y procedimientos matemáticos que le permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas, y adquirir una formación científica general.

2. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.

3. Analizar y valorar la información procedente de fuentes diversas, utilizando herramientas matemáticas para formarse una opinión que le permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.

4. Utilizar, con autonomía y eficacia, las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas (planteamiento de problemas, formulación y contraste de hipótesis, planificación, manipulación y experimentación) para realizar investigaciones, y, en general, explorar situaciones y fenómenos nuevos.

5. Expresarse oralmente, por escrito, de forma gráfica y mediante de los recursos tecnológicos disponibles, en situaciones susceptibles de tratamiento matemático, haciendo uso de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.

6. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática y del trabajo científico, en general, tales como la visión crítica, la necesidad de la verificación, la valoración de la precisión, la estima del rigor, la necesidad de contrastar apreciaciones intuitivas, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

7. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.

8. Servirse de los medios tecnológicos y de sus cauces de información, usándolos con sentido crítico, para desarrollar o rechazar intuiciones, facilitar cálculos, presentar conclusiones y contrastar e intercambiar opiniones.

9. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico asociado a la construcción de la cultura universal, creador de un lenguaje sin fronteras e íntimamente relacionado con otras ramas del saber, mostrando una actitud flexible y abierta ante las opiniones de los demás.

Contenidos: Matemáticas I

I. Aritmética y Álgebra

- El número real. Necesidad de su introducción. El número irracional, ejemplos de especial interés π, e, √2, Φ. Representación en la recta real. Sucesiones. Subconjuntos de R, intervalos.
- Uso de los números racionales e irracionales mediante estimaciones y aproximaciones, controlando el margen de error según la situación estudiada. Logaritmos.
- El número complejo. Necesidad de su introducción. Representación en el plano complejo. Expresión en forma binómica y en forma polar de un número complejo. Operaciones elementales con números complejos, su interpretación geométrica.
- Manipulación de expresiones algebraicas (polinómicas, racionales e irracionales) de utilidad en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.
- Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones, de inecuaciones de primer y segundo grado y de ecuaciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas sencillas.
- Aplicación del método de Gauss en la resolución e interpretación de sistemas sencillos de ecuaciones lineales.

II. Geometría

- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Relaciones entre razones trigonométricas.
- Estudio y resolución de triángulos de cualquier tipo. Aplicaciones.
- Vectores. Producto escalar.
- Geometría analítica plana: sistemas de referencia, ecuaciones de la recta.
- Incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
- Resolución de problemas de posiciones relativas, distancias y ángulos.
- Lugares geométricos del plano. Cónicas.

III. Funciones y Gráficas

- Función real de variable real. Descripción e interpretación de fenómenos sociales y de la Naturaleza mediante funciones.
- Concepto intuitivo e interpretación gráfica del límite de una función en un punto. Tratamiento intuitivo y gráfico de ramas infinitas, asíntotas y continuidad. Su interpretación en fenómenos reales.
- Estudio de las características básicas de las funciones polinómicas, racionales e irracionales y las trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas). Familias de funciones. Transformaciones: f(x)+a, f(x+a), af(x), f(ax).
- Aproximación gráfica a la función derivada. Recta tangente a una función en un punto, estimación gráfica y numérica (tasa de variación media).

Pendiente de una función en un punto, pendiente de la recta tangente a una función en un punto. La recta tangente a una función en un punto como aproximadora de la función en un entorno del punto. Idea gráfica del concepto de derivabilidad en un punto. Derivada de una función en un punto. Interpretación física. Función derivada.
- Obtención gráfica de las funciones derivadas de las funciones constantes, lineal, potencial, exponencial, logarítmica, seno, coseno y, en casos sencillos, de la suma de funciones y del producto de un número por una función.
- Estudio de las propiedades locales y globales de funciones polinómicas. Su representación gráfica.

IV. Estadística y Probabilidad

- Distribuciones bidimensionales. Representación gráfica. Estudio del grado de relación entre variables. Correlación y regresión lineal. Predicciones estadísticas.
- Introducción a las distribuciones de probabilidad a partir de las distribuciones de frecuencias para variables discretas y continuas. Significado de la media y la desviación típica.
- Distribuciones binomial y normal. Uso de estas distribuciones para asignar probabilidades a sucesos.

Contenidos: Matemáticas II

I. Análisis

- Límite de una función. Ramas infinitas y asíntotas. Cálculo de límites.
- Continuidad y derivabilidad de una función. Propiedades elementales.
- Cálculo de derivadas. Aplicación al estudio de las propiedades locales y la representación gráfica de funciones elementales.
- Resolución de problemas de optimización relacionados con fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos.
- Idea de área bajo una curva. La integral: concepto e interpretación geométrica. Regla de Barrow. Técnicas elementales del cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas.

II. Álgebra lineal

- Matriz: significado y operaciones. Aplicación en problemas de contextos reales (grafos, problemas de transporte…). Representación matricial de un sistema de ecuaciones.
- Determinante de una matriz: concepto, cálculo y propiedades.
- Rango de una matriz. Aplicación a la resolución de sistemas y al estudio de la dependencia lineal.

- Resolución y discusión de sistemas de ecuaciones lineales.

III. Geometría

- Vectores en el espacio tridimensional. Productos escalar, vectorial y mixto. Interpretación geométrica y física de las operaciones.
- Obtención e interpretación de las ecuaciones de rectas y planos a partir de sistemas de referencia ortonormales.
- Resolución de problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.
- Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Diciembre de 2005, Número 4 páginas 109-125
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

O início da escolarização do sistema francês de pesos e medidas em Portugal

Elenice de Souza Lodron Zuin

Introdução

Pretendemos tratar, neste artigo, das alterações ocorridas na *Arithmetica* do ensino primário no século XIX, com a introdução do *Sistema Métrico Decimal*, bem como das ações que foram tomadas para que este novo tópico se integrasse aos saberes pedagógicos em Portugal. Para tal, procedemos ao levantamento e a análise de algumas fontes, que se concentraram em manuais didáticos de Aritmética, livros sobre o sistema métrico decimal, com um caráter pedagógico; documentos que indicam elementos referentes à escolarização deste novo saber escolar e legislação pertinente ao tema, principalmente a partir da segunda metade dos oitocentos.

As modificações na Aritmética escolar no século XIX, que refletem no ensino atual, têm origem na França. Um dos legados da Revolução Francesa foi o sistema métrico decimal elaborado por um grupo de cientistas franceses. Em março de 1791 foi proposto que:

- as unidades de comprimento existentes, côvado, braça, pé, milha, polegada, entre outras, fossem substituídas pelo metro –definido como a décima milionésima parte do quarto do meridiano terrestre (que "liga" Dunkerque, na França, à Barcelona, na Espanha);
- as unidades de massa, fossem substituídas pelo grama –definido como a massa de um dm^3 de água a 4°C de temperatura.

As vantagens do novo sistema de pesos e medidas: ter como base o metro, ser decimal, trazendo facilidades para as operações e conversões. O sistema foi gestado tendo como um dos objetivos de unificar os pesos e medidas em todo o território francês.

Desde modo, acontece uma mudança fundamental na aritmética escolar. Isso ocorre após a adoção do sistema francês de pesos e medidas. As mudanças não se fixariam apenas em introduzir este novo conteúdo, os números decimais também eram um pré-requisito imprescindível para o ensino do novo saber.

Até a primeira metade do século XIX, os autores de livros de aritmética, em geral, não davam importância aos números decimais se fixando nos quebrados –ou frações. Não havia uma utilidade prática para os números decimais até a inclusão do sistema métrico decimal nos programas. Então, também os números decimais passaram a integrar as aritméticas. As operações com números decimais tornavam-se um tópico importante na formação elementar. Essas mudanças atendiam a legislação.

Em Portugal, a discussão sobre a adoção do Sistema métrico decimal já se fazia presente muito antes da sua oficialização, como veremos a seguir.

A promoção do Sistema Métrico Decimal em Portugal

As tentativas de uniformização dos pesos e medidas em Portugal vêm de longa data. Recuando no tempo, os primeiros padrões de pesos e medidas de que se tem notícia eram de origem romana e muçulmana. Sabe-se que "os padrões eram estabelecidos como o meio de determinação dos impostos sobre a produção e o comércio dos bens e mercadorias, tal como a moeda, eram instrumentos de poder e vassalagem."[1]

[1] In: http://www.ipq.pt/museu/form_estado/index.htm.

É D. Pedro I, nas cortes de Elvas, o primeiro a tentar padronizar as medidas, no ano de 1361. Depois dele, temos algumas ações com as *Ordenações Manuelinas*.[2] Nesta última encontramos as determinações para a padronização das medidas de peso, com a definição de múltiplos e submúltiplos das unidades principais, regulando as aplicações no comércio. O objetivo era claro: simplificar as transações comerciais que estavam se desenvolvendo cada vez mais. Porém, mesmo com as Ordenações Manuelinas havia muitas unidades de medidas, que seriam facilitadas com a Reforma de D. Sebastião em 1575. Foi, então, estabelecido um único padrão para os produtos líquidos e um único padrão para os produtos secos. No ano de 1603, com as *Ordenações Filipinas*, prescreveu-se que todas as medidas de pesos, varas e côvados fossem iguais aos da cidade de Lisboa.

As tentativas de uniformização, mesmo cominando penalidades para os infratores, não impediram que uma grande variedade de padrões, com medidas distintas, fosse utilizada pela população em meados do século XIX, como é possível verificar nos *Mapas das medidas do novo sistema legal: comparadas com as antigas nos diversos concelhos do reino e ilhas*, elaborados por Fradesso da Silveira (1868).

Os ideais da Revolução Francesa e a criação do sistema métrico decimal tiveram reflexos entre os portugueses.

> *"Ainda não tinham passado 20 anos sobre o decreto da Convenção que em 1 de agosto de 1793 estabelecera em França o novo sistema de pesos e medidas, fundado na medição do meridiano da terra e na divisão decimal, quando em Portugal se começou a trabalhar de forma efectiva para a modificação do nosso imperfeito sistema de pesos e medidas, na mesma orientação que a França iniciara. Este facto mostra bem como era geralmente reconhecida a necessidade da reforma e a compreensão*

[2] As Ordenações Manuelinas são ano de 1499, tendo sua edição final em 1521.

por parte das pessoas ilustradas, da natureza cientifica da resolução que em França se dera ao problema.”[3]

A Comissão para o Exame dos Forais e Melhoramentos da Agricultura, já em 1812, ano da sua criação, aconselhou a reforma do sistema de pesos e medidas em Portugal, tendo o auxílio da Academia Real das Ciências de Lisboa.[4] O real propósito era a adoção de um novo sistema baseado no metro, entretanto, sem utilizar a nomenclatura francesa, ou seja, com a manutenção da terminologia das antigas unidades de portuguesas. Os novos padrões de comprimento, massa e volume foram adotados, sendo estabelecida a “mão-travessa” como unidade fundamental de medida de comprimento, equivalente à décima parte do metro.

Alguns documentos indicam que houve impressão e circulação de tábuas, como tabelas incluindo comparações entre os padrões antigos dos concelhos de Estremadura e os do sistema métrico em 1820. Em função da reforma de pesos e medidas no Reino, fundamentada nos pesos e medidas franceses, uma determinação de 30 de março de 1820 estabelecia que a Junta da Diretoria Geral dos Estudos ordenasse todos mestres de primeiras letras, régios ou particulares, que fizessem decorar aos discípulos o folheto *Breve exposição do Systema Métrico Decimal*. Parece-nos que estes fatos têm ligações com a Revolução Liberal em Portugal. No entanto, teremos o reino enfraquecido, guerra civil, que vai perturbar o processo de padronização dos pesos e medidas.

É só no reinado de D. Maria II que novas disposições são tomadas. Em 13 de dezembro de 1852, a regente assina um decreto com força de lei, com as seguintes determinações:

---

[3] In: Anuário dos pesos e medidas, 1940, p.31.

[4] Em 1813, a Comissão Central de Pesos e Medidas optou pela adoção do sistema francês, com a manutenção da terminologia das antigas unidades de medida utilizadas em Portugal. Deste modo, a unidade de comprimento, não seria o metro, mas a vara, redefinida como a décima milionésima parte do quarto do meridiano terrestre. O cubo do décimo da vara, ou seja, a canadá – unidade de capacidade, sendo 10 canadas valendo um alqueire ou um almude (alqueire, medida para os gêneros secos, almude, para líquidos). A principal unidade de massa, a libra igual ao peso de uma canada de água destilada, no máximo de sua densidade.

- É adotado o metro legal de França como base do systema de pesos e medidas no continente do reino e ilhas adjacentes;
- É egualmente adoptada a nomenclatura do systema métrico decimal, para designar as diversas unidades dos novos pesos e medidas, seus múltiplos e submúltiplos;
- O novo systema de pesos e medidas deverá estar em pleno vigor dez annos depois da publicação deste decreto. (Ribeiro, 1883, p. 435).

Fixou-se também a criação da *Comissão Central de Pesos e Medidas* que, entre outras funções, deveria vigiar e superintender a fabricação dos novos padrões e coordenar as tábuas expositivas com a relação entre os pesos e medidas antigos e os novos.

O Sistema Métrico Decimal nas escolas

Anteriormente, indicamos que uma determinação de 30 de março de 1820 estabeleceu que, nas escolas, os mestres de primeiras letras deveriam fazer com que os seus alunos decorassem um folheto sobre o sistema métrico. Apesar de não termos conhecimento de que a mesma foi cumprida, demonstra-se um grande avanço em relação à difusão do sistema francês e esta seria a primeira medida para dar a conhecer o sistema francês de pesos e medidas no nível elementar de educação. No entanto, é só a partir de 1852 que existe realmente uma preocupação pela escolarização do sistema métrico, mas, para que isso se efetivasse, outras medidas deveriam ser tomadas Porém, nos documentos analisados não identificamos uma ação imediata dos poderes políticos para preparar os professores e para a escrita de novos manuais.

Joaquim Henriques Fradesso da Silveira foi um personagem importante na difusão do sistema métrico em Portugal. Como membro da *Comissão Central de Pesos e Medidas,* fez viagens à Bélgica e França para colher informações sobre a organização das estações e oficina de aferição nestes paises. O relatório sobre suas viagens, de junho de 1855, também informa que já havia concluído um livro sobre o sistema métrico decimal destinado ao ensino primário. (Ribeiro, 1883). Livro este que foi aprovado pela *Comissão Central de Pesos e Medida,* sendo sua utilização, nas escolas primárias, públicas e particulares, ensino secundário e superior, autorizada interinamente pelo *Conselho Superior de Instrução Publica.*

Em novembro de 1855, o governo, entre outras determinações, prescreveu que a *Comissão Central de Pesos e Medidas* mandasse proceder à confecção de quadros sinópticos[5] e construção dos modelos dos novos pesos e medidas para serem enviados para as escolas primárias. Mas, o governo estabeleceu, apenas no ano de 1858, que os oficiais empregados nas repartições dos pesos e medidas deveriam ministrar cursos sobre o sistema métrico, de forma a habilitar os professores da instrução primária do continente e ilhas.[6] Os cursos aconteceram nas localidades mais centrais, reunindo professores de diversas cidades. Foi constatado que muitos professores não tinham conhecimento dos números decimais, pré-requisito indispensável para se entender o sistema métrico.

O Conselho Superior de Instrução Pública deu a conhecer a Circular de 11 de agosto de 1858, com determinações para os professores da instrução primária, fazendo-os saber:

- que era de rigorosa obrigação nas escolas o ensino do sistema métrico decimal, devendo ser realizado utilizando-se o compêndio e a cartilha que lhe seriam distribuídos;
- que seriam levados em grande conta, para o provimento das cadeiras, as qualificações obtidas nos exames com referência à especialidade do sistema métrico decimal;

[5] Os quadros sinópticos continham a nomenclatura e dimensões das medidas.

[6] Uma nota de 28 de janeiro de 1863 indica que nestes cursos participaram 1414 pessoas, sendo 1229 professores e 258 particulares e empregados públicos que voluntariamente concorreram às preleções. (Ribeiro, 1883, p.440).

- que os professores deveriam se entendessem com os inspetores de instrução de pesos e medidas, combinando com eles o melhor modo de facilitar a instrução dos alunos.

Para uma maior divulgação do novo sistema de medidas, em fevereiro de 1860, o governo prescreveu o envio de quatrocentos exemplares da cartilha, baseada no *Compêndio do novo systema métrico-decimal* de Fradesso da Silveira, e exemplares das *Taboas Populares para a reducção das antigas medidas do novo systema* ao cardeal patriarca e aos prelados das diferentes dioceses do reino e ilhas adjacentes. (Ribeiro, 1883; Ferreira, 1937). Assim, a cartilha e as taboas seriam distribuídas aos párocos com o intuito de que eles propagassem o ensino e o conhecimento do sistema métrico aos seus fiéis, colaborando para que os paroquianos se "convertessem" ao novo sistema de pesos e medidas.

Uma portaria datada de 17 de novembro de 1859 recomendava os comissários dos estudos que intimassem os professores das escolas públicas a ensinarem regularmente o novo sistema de pesos e medidas. "Proceder-se-hia severamente contra aqueles que não satisfizessem pontualmente esta indispensável parte do ensino escolar." (Ribeiro, 1883, p. 443). No entanto, o ensino do sistema métrico não era realizado por muitos professores. Em uma inspeção extraordinária às escolas primárias, realizada nos anos de 1863/1864, num total de 684 escolas públicas e particulares do distrito de Lisboa, o inspetor Mariano Ghira confirma que em 238 escolas não ocorria o ensino do sistema legal de pesos e medidas e apenas 201 o faziam de modo satisfatório. Ao analisar os relatórios de outros inspetores, nos mais diversos distritos, verificamos que era grande o número de professores que ainda não incluía o sistema métrico nas suas aulas ou o fazia de forma precária. Vemos, assim, que após dez anos da publicação do decreto que oficializava o sistema métrico, este ainda não estava em todas as escolas.

Outro dado evidenciado por essa inspeção é que, em algumas escolas, o aproveitamento dos alunos, referente ao sistema métrico decimal, demonstrava que os mesmos tinham conhecimento apenas das medidas lineares de comprimento e, às vezes, das medidas de massa. Isto pode revelar que os professores se fixavam nos tópicos mais simples e mais fáceis de serem ensinados.

Manuais escolares

Os manuais escolares constituíam-se no principal instrumento para os professores, e é através deles que podemos ter uma noção de como o sistema métrico poderia estar sendo ensinado nas escolas.

Dentre os autores de livros didáticos analisados, encontramos apenas um autor português que, antes da oficialização do sistema métrico, faz referência a este tema: Agostinho de Morais Pinto de Almeida. Ele publica, em 1850, *Elementos de Aritmética*, e dedica pouco mais de quatro páginas ao sistema métrico decimal. Temos, então, um autor que defende a adoção do sistema francês, o que nos leva a comprovar que havia um interesse pela sua oficialização que só se efetiva em 1852. A partir daí, são necessários manuais para que se possa difundir o novo sistema de pesos e medidas.

Entre os manuais analisados, verificamos que existem metodologias diferenciadas. Alguns tratam do novo sistema de pesos e medidas apresentando apenas um texto informativo, sem exemplos ou problemas propostos. Outros se preocupam em colocar diversos exemplos e incluir exercícios sobre este conteúdo. Em alguns deles, existem tábuas comparativas entre o sistema métrico decimal e o antigo sistema português de pesos e medidas. Um nome que se destaca é Joaquim Henriques Fradesso da Silveira (1825 – 1875) não só pela publicação de um compêndio dedicado inteiramente ao sistema métrico decimal[7], como por pertencer

[7] O compêndio de Fradesso da Silveira foi traduzido para o inglês por Marcus Dalhunty.

Nota: Este trabalho foi realizado com apoio do CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – entidade do Governo Brasileiro.

à *Comissão Central dos Pesos e Medidas*, promovendo a difusão do novo sistema e fazendo a inspeção dos pesos e medidas do Reino, sendo o Inspector Geral.

O *Conselho Superior de Instrução Pública* divulgou, em 20 de outubro de 1857, no *Diário do Governo,* uma lista referente aos livros para as escolas primárias, públicas e particulares. Entre eles destacam-se: *Compendio do novo systema metrico decimal*, por J. H. Fradesso da Silveira; C*ompendio elementar do systema metrico e suas aplicações aos usos do commercio*, por C. J. Barreiros e *Systema metrico decimal*, por M. L. Catharino

Posteriormente, em 2 e 14 de outubro de 1861, no *Diário de Lisboa*, era divulgada a relação dos livros aprovados e adotados para o ensino primário, pelo *Conselho Geral de Instrução Pública*. Já são outros, os livros indicados para o ensino do sistema de pesos e medidas francês: o *Compendio elementar do systema metrico para uso das escolas*, por C. J. Barreiros e a *Taboada do novo systema de pesos e medidas*, por M. de Chaby.

Pelo que pudemos verificar, havia muitas publicações que tentavam contribuir para a divulgação do novo sistema de pesos e medidas em Portugal. No entanto, através dos relatórios da inspeção extraordinária realizada em 1863, verifica-se que o compêndio de Fradesso da Silveira é adotado por algumas escolas primárias. Comparece, com grande freqüência, a Cartilha do Abade de Salamonde e os livros de Emílio Achilles Monteverde. Este autor escreve os livros *Methodo facílimo para aprender a ler e escrever...* e *Manual Encyclopedico para uso nas escolas primarias*. Era indicado, pelos editores, que o primeiro livro deveria anteceder o segundo. O *Manual Encyclopedico* contém todas as matérias e o sistema métrico está inserido na parte dedicada à Aritmética. Porém, apesar de o *Methodo facilimo* ser um livro introdutório para a infância, este também trazia "uma noção clara sobre o systema métrico decimal, adoptado para as novas medidas de Portugal", bem como "dinheiro portugues legal". Os livros de Monteverde tiveram a sua primeira edição em meados dos anos trinta dos oitocentos, tendo edições subseqüentes, as quais foram sendo revisadas e melhoradas, com uma tiragem de milhares de exemplares, demonstrando a sua propagação no país. Inferimos que o fato de os manuais de Monteverde serem aprovados pelo governo e integrarem diversos conteúdos, no caso do *Methodo facilimo*, e todas as matérias do ensino primário, no caso do *Manual Encyclopedico*, faz com que estejam entre os mais utilizados nas escolas públicas e particulares.

A *Cartilha de doutrina christã*, do abade de Salamonde, ou António José de Mesquita Pimentel (1741-1821), inclui outros conteúdos além do que é indicado pelo título. O sistema métrico está exposto em algumas páginas. A inclusão deste tópico foi realizada após a morte do autor. Os editores estavam atentos às determinações oficiais da inclusão do sistema métrico nas escolas, e fizeram a melhor opção: inserir este novo conteúdo e garantir uma venda ainda maior de um manual que já tinha se tornado famoso. Entre os acréscimos à obra original, encontramos definição de peso, “modo de assentar o dinheiro” e sistema métrico. Este último tópico inicia-se com a apresentação de tabelas de redução dos pesos e medidas antigas às novas – comprimento, pesos, superfícies e volumes para todo o Reino, medidas para líquidos e secos para Porto e Lisboa. A seguir, a “cartilha do systema métrico decimal” que se constitui em perguntas e respostas, como no restante do livro. Trata-se de um texto com algumas informações e com a explicação de como se escrever os diferentes múltiplos e submúltiplos de uma mesma unidade em uma só expressão. Para elucidar esta escrita, existem dois exemplos de medida linear, um de medidas de capacidade e outro de medida de volume, além de uma tabela dos múltiplos e submúltiplos do metro. Não há outros exemplos, exercícios propostos, abordagem histórica ou qualquer figura relativa ao tema. A cartilha de Salamonde comparece como a obra mais adotada pelos professores, e entendemos que, o fato de estarem agregados outros assuntos, lhe confere prestígio entre os mestres. É possível, igualmente, que o sucesso da cartilha esteja ligado ao seu conteúdo, referente à doutrina cristã, e também à tradição entre os professores, pois a mesma, nas suas várias edições, já tinha marcada a sua posição no início do século XIX.

O *Methodo facílimo para a ler e escrever tanto a letra redonda como a manucripta no mais curto espaço de tempo* é o longo título de um manual que, além da escrita, também tem a preocupação de trazer informações sobre algarismos indo-arábicos e romanos, tabuada de multiplicação e sistema métrico decimal. O texto, como na Cartilha de Salamonde, é composto de perguntas e respostas, que vão conduzindo o leitor a se aprofundar no tema. O texto é sucinto, não inclui exemplos, problemas propostos ou figuras. Apesar de não haver tabelas, o autor informa a equivalência entre algumas das principais unidades de pesos e medidas novas e antigas.

O sistema legal de pesos e medidas no *Manual Enciclopédico* é um texto muito semelhante ao do *Methodo facilimo*, com um caráter mais informativo e disposto em parágrafos numerados seqüencialmente, com pequenas variações e acréscimos. Entre eles, equivalências entre as medidas novas e antigas –medidas itinerárias, lineares, de capacidade para secos e líquidos, pesos e medidas de superfície– e inclusão de regras para reduzir algumas das medidas antigas às oficialmente adotadas. Não existem exemplos ou problemas propostos. O sistema métrico comparece apenas em quatro dos doze exercícios propostos no tópico referente à regra de três, acompanhados das respectivas soluções.

O *Compendio do novo systema metrico decimal*, de Fradesso da Silveira, se fixa unicamente nos números decimais e no sistema francês de pesos e medidas. O propósito do autor era realmente tratar apenas do novo sistema com a intenção de divulgá-lo. A primeira edição, de 1856, inclui várias tabelas para conversão dos pesos e medidas antigas nas novas e vice-versa, que são eliminadas nas edições seguintes, principalmente para reduzir os custos da obra. O texto é bem detalhado e estão integradas algumas figuras. Um diferencial do manual, em relação a outros autores, é o grande número de exercícios propostos, mais de uma centena, seguidos das respectivas soluções.

Em algumas escolas eram adotados os livros de Monteverde e também o compêndio de Fradesso da Silveira. Em menor número, encontramos a indicação da adoção da *Cartilha de doutrina christã* e também do livro de Fradesso. Em um ou outro caso, fundamentando-se nos dois autores, nomeadamente no segundo, o professor poderia ensinar o sistema métrico de uma maneira mais consistente, trabalhando com diversos exercícios e problemas. Já, os professores que adotavam apenas os manuais de Monteverde –e esta era uma realidade em um grande número de escolas– teriam um texto em poucas páginas, que apenas trata da nomenclatura, apresenta algumas regras, uma pequena abordagem histórica e contém tabelas de conversão. O mesmo pode-se dizer da Cartilha de Salamonde, nas mãos de muitos alunos e professores. O seu texto meramente informativo não traria grandes contribuições para o ensino do sistema métrico em toda a sua extensão.

Considerações finais

Verificamos que, desde o início do século XIX em Portugal, existiam defensores da oficialização do sistema francês de pesos e medidas e tentativas para que o mesmo fosse introduzido nas escolas. A primeira tentativa foi com a Portaria de 3 de março de 1820, como vimos. Para Fernandes (1994, p.498), esta medida fazia "recair sobre os mestres a responsabilidade e as diligências atinentes a sua consecução", sendo um indicativo "dos procedimentos característicos do Poder". Isto é claro, pelo fato de só ser produzido um folheto para os professores, sem qualquer outra ação para que os mestres tivessem maiores conhecimentos sobre o sistema métrico.

Ao que tudo indica, em Portugal, a partir de 1852 havia uma preocupação das autoridades em escolarizar o sistema métrico decimal. Como vimos, isso acontece antes do que era previsto pelo Decreto de D. Maria II, ou seja, em 1862. Porém, apesar de o Ministério das Obras Públicas ter tomado providências para que se exigisse em 1859, como habilitação obrigatória, o conhecimento do sistema métrico nos exames dos candidatos às cadeiras de instrução primária, pelos documentos analisados, parece-nos que só pela Portaria de 30 de setembro de 1862 é que se passou a exigir para habilitação ao magistério particular o conhecimento do sistema métrico decimal. Temos portarias e regulamentos que indicam o ensino do novo sistema de pesos e medidas. Mas, a reforma do ensino primário de 1844 só será substituída pela reforma 1870, quando então se terá uma referência explícita ao ensino do sistema métrico decimal para esse nível de instrução,

Na segunda metade dos oitocentos, os governantes colocam como um dos principais pontos de divulgação do sistema métrico decimal as escolas, por saberem que estas estariam formando uma nova geração com conhecimentos de um novo sistema de pesos e medidas e, por conseguinte, menos resistentes a sua adoção. Porém, não é fácil escolarizar um novo saber, integrá-lo às práticas pedagógicas já cristalizadas. São necessários livros e professores preparados para que isso aconteça. No caso do sistema métrico decimal, havia uma maior complexidade por dois motivos, era necessário outro tópico, os números decimais. Mais um obstáculo, que poderia comparecer, o choque com valores culturais da população. Ghira (1866) aponta casos em que os pais eram contrários ao ensino do novo sistema de pesos e medidas e leva-nos a crer que chegavam a ponto de não matricularem seus filhos nas escolas em que as crianças aprendiam o sistema métrico.

Reforçando o que já foi exposto, ressaltamos quatro livros que se destacavam por serem adotados na instrução primária. Verificamos que, em diversos casos, os professores utilizavam mais de um manual: o Método Facílimo, Manual de Monteverde ou a Cartilha de Salamonde, os três com um texto informativo, e também o compêndio de Fradesso da Silveira, mais completo e com mais de uma centena de exercícios e problemas propostos. Porém, seja de um modo mais superficial ou através de um texto mais rigoroso, o fato é que muitos mestres tinham em mãos manuais que tratavam do sistema métrico decimal, e competia unicamente a eles inserir ou não este novo saber nas suas aulas e enfocar uma ou outra metodologia. Isso é patente na avaliação dos inspetores, no inquérito de 1863, pois demonstraram que o aproveitamento dos alunos em relação ao sistema métrico era bem diferenciado. O relatório de Ghira (1866) revela que, em algumas escolas, existiam alunos que não só conheciam toda a nomenclatura do sistema métrico decimal, como resolviam com desenvoltura problemas relativos ao sistema. Porém, Ghira e outros inspetores também indicam que alguns professores, de escolas públicas e, principalmente, particulares, desconheciam completamente o sistema francês de pesos e medidas. As situações eram as mais diversas. Dos resultados desta inspeção às escolas primárias, encontramos situações em que o professor utilizava os livros de Monteverde ou a cartilha de Salamonde e os alunos foram avaliados pelos inspetores, como tendo um bom conhecimento do sistema métrico. Também existiam escolas onde eram adotados os mesmos manuais e os discípulos tinham pouco aproveitamento ou desconheciam completamente o sistema. Porém, pudemos constatar que os casos de um aproveitamento considerado bom ou regular comparecia, com mais freqüência, para os professores que utilizavam o compêndio de Fradesso da Silveira. Isso fica evidente por este manual ser mais completo que os outros. No entanto, não podemos desconsiderar o conhecimento do mestre para desenvolver o sistema métrico com os seus alunos, sendo este um fator primordial para o sucesso dos discípulos. Independentemente do manual utilizado, vários professores haviam frequentado o curso sobre o sistema métrico, ofertado pela Repartição de Pesos e Medidas em 1859, levando para os seus alunos as informações obtidas.

Constatamos que, para o ensino do sistema métrico decimal, havia vários problemas, professores que não tinham qualquer noção sobre o referido sistema e aqueles que o condenavam e, por isso, não o ensinavam aos seus alunos; pais que não tinham recursos para comprar livros para seus filhos; escolas que não possuíam os quadros comparativos nem os modelos dos pesos e medidas decimais. Portanto, o governo também não cumpria o seu papel, pois não distribuía o material necessário para todas as escolas. É claro que confeccionar e endereçar quadros sinópticos, tabelas de conversão e modelos dos novos pesos e medidas era uma tarefa árdua e onerosa, mas imprescindível para que a reforma na Aritmética fosse bem sucedida.

Face à nossa análise das fontes, avaliamos que o processo de escolarização do sistema métrico decimal em Portugal, nos primeiros anos da sua implementação, não teve tanto êxito, como desejava o governo. As transformações não eram tão simples, pois atingiam vários setores da sociedade; transformações de caráter cultural que tinham como principal alvo, para que a mudança do antigo sistema de pesos e medidas se processasse, a escola já no nível da instrução primária.

Bibliografia

- Instituto Português da Qualidade (1990). **Pesos e medidas em Portugal**: catálogo. Exposição Nacional de Metrologia. Lisboa, Instituto Nacional de Investigação Científica. 111p.
- Dalhunty, Marcus (1861). **A compendium of the new system weights and measures** by Joaquim Henriques Fradesso da Silveira. Lisboa, Imprensa Nacional.
- Fernandes, Rogério. (1998). "Génese e consolidação do sistema educativo nacional (1820-1910)". En: M. C. Proença (Ed.) **O sistema de ensino em Portugal (séculos XIX-XX)** Lisboa,Colibri. p. 23-46.
- Fernandes, Rogério. (1994). **Os caminhos do ABC**: sociedade portuguesa e ensino das primeiras letras –do Pombalismo a 1820. Porto, Porto Editora.
- Ferreira, H. Amorim (1937). **A 5ª cadeira e seus professores** (física experimental e matemática). Lisboa, Escola Politécnica de Lisboa.
- Ghira, Mariano (1866). **Relatório sobre a visita de inspecção extraordinária as escolas do districto de Lisboa feita no anno lectivo de 1863-1864 e estatistica das mesmas escolas no anno de 1864-1865.** Lisboa, Typographia da Gazeta de Portugal. 300p.
- Gil, Fernando Bragança (1990). **Pesos e medidas em Portugal**: catálogos. Exposição Nacional de Metrologia. Lisboa, Instituto Nacional de Investigação Científica. 111p.
- Instituto dos Arquivos Nacionais/Torre do Tombo. Ministério do Reino. Diversos documentos.

- Monteverde, Emilio Achilles (1874). **Methodo facílimo para aprender a escrever tanto a letra redonda como a manuscripta no mais curto espaço possível**. 11. ed. Lisboa, Imprensa Nacional. 156p.
- Monteverde, Emilio Achilles (1865). **Manual encyclopedico para uso das escolas de instrucção primaria**. 8. ed. Lisboa, Imprensa Nacional. 700p.
- Ordenações Manuelinas. Disponível em:
- <http://www.ci.uc.pt/ihti/proj/manuelinas/ORDEMANU.HTM>. Acesso em: 16 maio 1999.
- Ordenações Filipinas. Disponível em:
- <http://www.uc.pt/ihti/proj/filipinas/ORDENACOES.HTM>. Acesso em: 16 maio 1999.
- Portugal. Ministério da Economia (1940). Direcção Geral da Indústria. Repartição de Pesos e Medidas. **Anuário de pesos e medidas**. Lisboa, Editorial Império. 255p.
- Portugal. Ministério da Educação (1989). **Reformas do ensino em Portugal** (1835-1869). Lisboa, Secretaria-Geral do Ministério da Educação. Tomo I, v. I.
- Portugal. Ministério da Educação (1989). **Reformas do ensino em Portugal** (1870-1889). Lisboa, Secretaria-Geral do Ministério da Educação. Tomo I, v. II.
- Reforma de pesos e medidas de portugal (1861). Legislação. Lisboa, Imprensa Nacional.
- Ribeiro, José Silvestre (1863). **Historia dos estabelecimentos scientificos litterarios e artísticos de Portugal nos successivos reinados da monarchia**. Lisboa, Academia Real das Sciencias. v.14.
- Salamonde, Abade de. **Cartilha da doutrina christan** (1866). Porto, Typ. de A. Pereira Leite. 352p.
- Serrão, Joel. “Estrutura social, ideologias e sistema de ensino” (1981). En: SILVA, M. & TAMEN, M. I. (Ed.). **Sistema de ensino em Portugal**. Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian. p.17-45.
- Silveira, Joaquim Henriques Fradesso da (1856). **Compêndio do novo systema legal de medidas**: approvado pela Commissão Central de Pesos e Medidas. Lisboa,Typ. do Centro Commercial.
- Silveira, Joaquim Henriques Fradesco da (1868). **Mapas das medidas do novo sistema legal**: comparadas com as antigas nos diversos concelhos do reino e ilhas. Lisboa, Imprensa Nacional. 298p.
- Trigoso, Sebastião Francisco de Mendo (1875). “Memória sobre os pesos e medidas portuguesas, e sobre a introdução ao sistema metro-decimal”. En: **Memórias econômicas da Academia Real das Ciências de Lisboa**. Lisboa, Academia Real das Sciencias. Tomo V. p.253-305.

- Valente, Wagner Rodrigues (1999). **Uma história da Matemática escolar no Brasil** (1730-1930). São Paulo, Anna Blume. 211p.
- Zuin, Elenice de Souza Lodron (2001). "Implantação do sistema internacional de medidas: uma abordagem histórica". En: Encontro de Pesquisa da FAE, 6, Belo Horizonte, 1999. **Anais...** Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais. p.225-235.
- Zuin, Elenice de Souza Lodron (2005). "Pesos e medidas em Portugal: uma abordagem histórica". En: PROFMAT, 20, 2005, ÉVORA. **Actas...** Évora**,** Associação de Professores de Matemática/Portugal. (CD-ROM).
- Zuin, Elenice de Souza Lodron (2005). "A inserção do sistema métrico decimal nas escolas brasileiras e portuguesas". En: CONGRESSO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIA DA EDUCAÇÃO, 8, 2005, Castelo Branco, Portugal. **Actas...** Castelo Branco**,** Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação/ Instituto Politécnico de Castelo Branco. (No prelo).

Elenice de Souza Lodron Zuin. Professora do Departamento de Matemática e Estatística da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas – Brasil; professora do curso de Especialização em Educação Matemática da PUC-Minas. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais. Doutoranda em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil) e co-orientação do Prof Dr. Rogério Fernandes (Universidade de Lisboa – Portugal).
e-mail: elenicez@pucminas.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 127-136
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

La Estadística y la Multimedia. Una actividad de aula

Sergio Darias Beautell

Resumen

En este artículo se expone el desarrollo de un trabajo de campo hecho por alumnos, a los que se les introduce el bloque de estadística utilizando las herramientas multimedia de nuestro centro. Esta actividad responde a la necesidad de acercar las Matemáticas que enseñamos a la sociedad en que viven nuestros estudiantes, marcada por las *Tecnologías de la Información y la Comunicación* (TIC).

Abstract

In this article it is exposed the process of a field work made by students whom the statistics is introduced using the multimedia tools of our educational centre. This activity meets the necessity of bringing closer the Mathematics that we teach to the society where our students live, marked by the Technology of Information and Comunication (TIC).

Introducción

El Docente: el papel del docente ha cambiado con la sociedad de la información; nuestros alumnos se encuentran asediados, influidos por la enorme cantidad de datos procedentes de diversas y poderosas fuentes: periódicos, televisión, radio, Internet, móviles, etc. Hemos dejado de ser el origen principal de entrada de información; de hecho, en muchos casos, nuestros alumnos se verán más atraídos por la que les llega desde fuera de la escuela. En este punto no se trata de luchar contra esta evidencia, labor ardua y de incierto resultado, sino de adaptarnos a este nuevo panorama, **aunando nuevos elementos a los ya empleados tradicionalmente**, que ayuden a que nuestros alumnos generen, a partir de esa saturación de información, conocimiento.

Los Estudiantes: se espera de nuestro alumnado que trabaje con método, que observe el entorno atentamente y con curiosidad, que piense críticamente, que aprenda a trabajar de manera individual y colaborativa, que dialogue y negocie significados valorando y respetando ideas ajenas.(Marqués, 2005)

Las Matemáticas: *el proceso de enseñanza y aprendizaje* (E/A) de las matemáticas debe estar unido al entorno de los estudiantes, e integrado con las demás áreas como ocurre en la realidad. Se intenta que puedan ver estructuras matemáticas en cada aspecto de sus vidas. Asimismo "…uno de los mayores cambios en la enseñanza matemática se ha dado ayudando a los estudiantes a trabajar en grupos pequeños en proyectos de recolección de datos, construcción de gráficas y cuadros con sus hallazgos y resolución de problemas. Dar a los estudiantes oportunidades para realizar trabajo reflexivo y colaborativo con otros, constituye parte crítica de la enseñanza de matemáticas. Las ideas matemáticas las construyen las personas; los estudiantes necesitan experimentar la interacción social y la construcción de representaciones matemáticas que tengan significado, con sus compañeros y sus profesores."(Heineman, 1998)

Las TIC: en nuestros días las TIC deben ayudar al ser humano en sus relaciones sociales a comunicarse, a expresarse y a intercambiar toda clase de información. Este proceso se verá reforzado aún más si integramos la información verbal y visual con la utilización de programas multimedia. Además, estas tecnologías se pueden nutrir del resto de disciplinas actuando como conector y fomentando su marcado carácter interdisciplinar. En los centros educativos tenemos que aprovechar este rasgo, ya que es un elemento didáctico que, empleado adecuadamente, nos servirá para apoyar al proceso de E/A, uniéndole un grado de motivación extraordinario. Con este desafío la tecnología se convierte en una herramienta de comunicación en la que los estudiantes adoptan una tarea activa, tomando decisiones sobre formas de obtener, analizar y compartir la información, a la vez que ayuda al profesor a crear un ambiente de aprendizaje interactivo, colaborativo, multidisciplinar y exploratorio.

Tras algunos años trabajando con tecnología en el aula de matemáticas y después de quedar deslumbrado ante la cantidad de material TIC que existe para nuestra disciplina (páginas Web, CDs, software, animaciones, applets, etc.), la gran pregunta que debemos hacernos es **cómo utilizarlos**. Como recuerda Cabero (1998) "la rentabilidad educativa de los medios no depende tanto de sus potencialidades tecnológicas, sino más bien de las estrategias instruccionales que apliquemos sobre los mismos". De hecho, esta potencia y versatilidad de la tecnología han hecho que tenga que reexaminar qué matemáticas deberían aprender los alumnos, además de cómo pueden aprenderlas mejor.

En este artículo se expone un trabajo realizado por estudiantes, que intenta aunar, en una actividad real de aula, algunos de los aspectos expuestos anteriormente de forma más teórica: la labor del docente, del alumno y de las TIC en el proceso de E/A de las matemáticas. Este proceso quedará finalmente reflejado en un material multimedia realizado por los alumnos en MS-PowerPoint que formará parte de los recursos educativos del centro. En esta ocasión el trabajo ha sido reconvertido de PowerPoint a formato de hipertexto.

Contextualización

El centro en el que nos situamos para el desarrollo de la experiencia es el I.E.S. María Pérez Trujillo ubicado en La Vera, barrio periférico del Puerto de la Cruz en la isla de Tenerife (Islas Canarias, España). En éste existe una mayoría de viviendas sociales, la población procede de zonas diversas y el crecimiento poblacional es continuo. La infraestructura del barrio es pobre, con escasa oferta de actividades de ocio, bibliotecas, centros culturales, etc. El entorno en el que se mueven los alumnos del centro genera un ambiente que no fomenta su interés y motivación por el estudio.

"Canarilandia: Un lugar en el mundo"

Esta investigación en concreto fue realizada por un grupo de 6 alumnos de 1º de Bachillerato (16 años) con la colaboración de la profesora de inglés del centro. El objetivo era realizar "todo" el proceso de elaboración de un estudio estadístico desde la planificación hasta las conclusiones, quedando resumido en un trabajo final en forma de presentación multimedia. La población del estudio estaba formada por todos los turistas que se encontraban de vacaciones en nuestra isla, y tenía como objeto descubrir qué sabían de Canarias. Así, la encuesta se realizó en inglés, por lo que los alumnos tuvieron que trabajar duro en la clase de esta lengua, con la dificultad añadida de que se vieron obligados a dejar la vergüenza atrás para aventurarse y realizar las casi 300 entrevistas que forman la muestra. También se hizo uso, como es obvio, de todos los medios tecnológicos del centro, utilizando Internet, la cámara digital, el proyector LCD (cañón), el scanner y un software de usuario sencillo como es MS-PowerPoint y MS-Excel.

La finalidad concreta del estudio estadístico giraba en torno a las siguientes cuestiones: ¿sabrán cuántas islas forman el archipiélago?, ¿probarán nuestra comida típica?, ¿conocerán cuál es la capital de nuestro país?, ¿nos sabrán ubicar en un mapa mundi correctamente? Y algunas más que veremos a continuación. Si sigues leyendo te llevarás más de una sorpresa.

Figura 1

Desarrollo de la actividad

Previos:

Partiendo de la idea inicial, se produjo una reunión en la que los profesores implicados concretamos las actuaciones conjuntas y las que debíamos llevar cada uno en su aula. Por ejemplo, realizamos las gestiones oportunas con la directiva para conseguir transporte que nos permitiera ir al sur de la isla (aproximadamente a 100 km) a hacer las entrevistas. En matemáticas repasamos ciertos conceptos previos y en inglés se tradujeron las preguntas del cuestionario y se practicaron en el aula, imitando una situación real de entrevista (role-play). Fue imprescindible tener clara la idea del trabajo y las distintas tareas que iban a ser realizadas por los alumnos. Esto hacía que se sintieran seguros y a la vez protagonistas de su investigación. Ellos eran los que tenían que ir tomando las decisiones, con el profesor como simple guía del proceso, que dejaba constancia de cada fase con la cámara digital, realizando pequeñas tomas de vídeo y fotos.

Planificación. La encuesta:

Una vez fijado el objetivo del estudio intentamos eliminar todo lo que resultaba innecesario y nos centramos en los aspectos más importantes. Por ejemplo, decidimos que la población fuera la de los turistas de nuestra isla, porque sería logísticamente imposible desplazarnos a tomar datos a otras islas. Aún así, la muestra fue ligeramente sesgada ya que omitimos a todos aquellos turistas que no hablaran inglés. En este momento se elaboró un cuestionario, formado por todas las preguntas que se nos ocurrieron, con la finalidad de hacer una selección final. Sabíamos que gran parte del resultado del trabajo dependería de la calidad de las preguntas que se formularan. Así que atendiendo a criterios como el número de cuestiones (no muchas), la longitud de éstas (deben ser cortas), que fueran cerradas… Como ejemplo, una de las candidatas era: ¿qué te parece nuestra isla?, al final fue desechada porque se prestaba a respuestas muy largas y difíciles de tabular.

Después de un debate, nos quedamos con las preguntas definitivas y las redactamos de nuevo de forma más concreta y precisa (sin palabras abstractas o ambiguas). Como curiosidad diremos que una de ellas consistía en poner una cruz sobre un mapamundi en que se debía ubicar a las Islas Canarias (en la figura 1 se muestra el desastroso resultado).

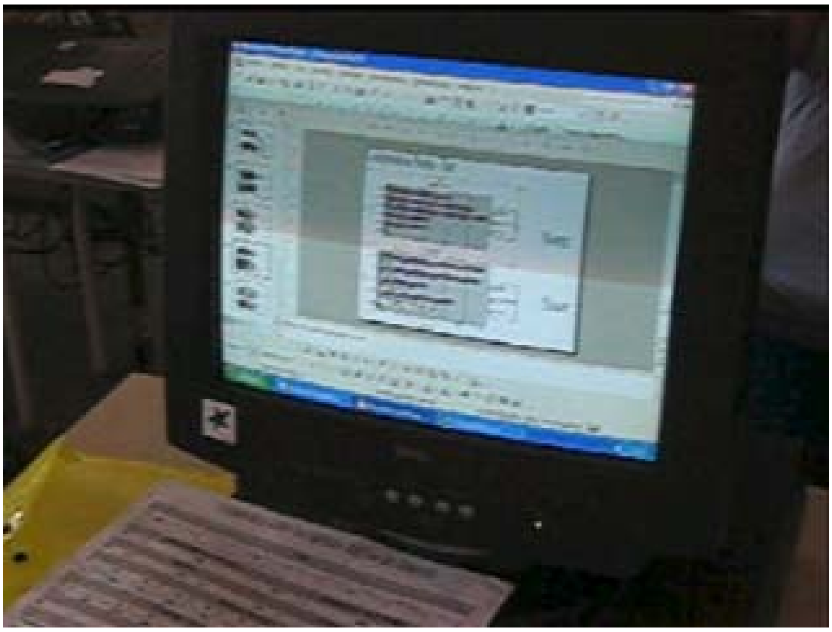
Recogida de datos:

Para la recogida de datos fijamos dos días y los dos puntos más turísticos de la isla: primero fuimos al sur, donde nos dimos un paseo por la avenida de la playa (por supuesto aprovechamos para darnos un baño); a la semana siguiente fuimos al Puerto de la Cruz, en el norte. Al principio les costó bastante comunicarse con los extranjeros, pero a base de tenacidad consiguieron realizar nada más y nada menos que 145 encuestas en el sur y 151 en el norte.

Vaciado de los datos:

Esta parte fue una auténtica locura, teníamos decenas de encuestas sobre la mesa y tuvimos de repetir el proceso varias veces ya que nos equivocábamos o se nos quedaba algo atrás. El caso es que sabíamos que éste era un momento delicado y vital para asegurar la fiabilidad del estudio. De esta forma decidimos enumerar las encuestas y dividirlas por zonas (sur y norte), con lo que obtendríamos más información y podríamos comparar los resultados de cada una de ellas. Una de las discusiones que tuvimos se debió a la pregunta: ¿sabes el nombre del presidente de nuestro país? El caso es que esto fue siete días después de las elecciones generales y teníamos nuevo presidente, así que optamos por dar por válida la respuesta a todos aquellos que respondieran tanto Aznar como Zapatero.

Tablas y gráficas:



Después de tener apuntados todos los datos de la encuestas nos repartimos las tareas, se sentó cada alumno delante de un ordenador y realizamos, con la ayuda de MS-Excel, todas las tablas de datos. Una vez hechas, decidimos el tipo de gráfico que era más conveniente en cada caso. La mayoría eran proporciones con lo que se arregló utilizando diagramas de sectores. En el resto decidimos utilizar diagramas de barras. En definitiva, buscábamos que reflejaran de forma sencilla y, sobre todo clara, los resultados.

Análisis de los resultados:

Cada alumno se llevó a casa alguna pregunta con su correspondiente gráfica y resumió una conclusión. En clase realizamos una puesta en común de estas conclusiones y redactamos, después de un debate, el análisis final. Los alumnos elaboraron fichas de todas las cuestiones como muestra la figura 2 (pulsa sobre ella para escuchar a Eduardo).

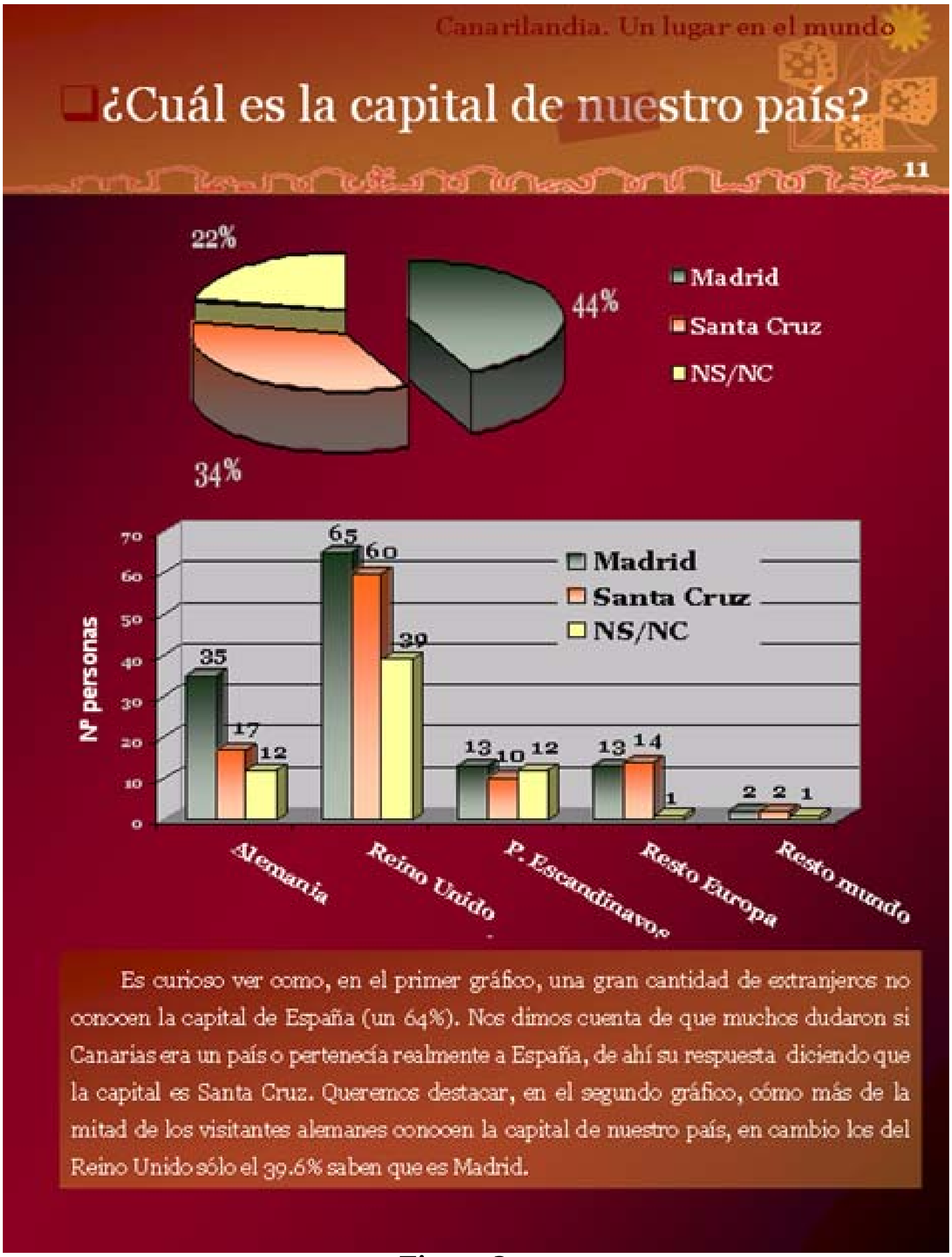


Figura 2

El resto de las fichas y las conclusiones finales del estudio se describen a continuación:

- Los turistas alemanes y escandinavos prefieren una estancia en el norte de la isla y les interesa moverse por ella. También parece que aquí la media de edad es mayor. En cambio los británicos prefieren la calidez del sur y no hacer muchas excursiones al resto de la isla.
- Muchos turistas dudan si Canarias es un país independiente o forma parte de España, sobre todo los británicos.
- Muy pocos turistas saben cuál es el presidente de la nación.
- El Teide es claramente un reclamo turístico.
- Los turistas tinerfeños que más saben sobre el número de islas de nuestro archipiélago, son de nuevo los escandinavos y alemanes que se encuentran en el norte. Éstos últimos son los más interesados por nuestra gastronomía.
- Hay turistas que no saben situar a Canarias en el mapamundi, esto nos hace pensar que muchos vienen en busca del sol y playa y ni siquiera les preocupa su situación geográfica.

Retoques finales:

Para acabar se realizó la presentación de MS-PowerPoint en la que se explicaba todo el proceso y se mostraban los resultados del estudio estadístico. Cada alumno grabó una narración en la que se describían ciertas diapositivas y las gráficas contenidas en éstas. Se incorporó un breve video de cada fase y, finalmente, decidieron incorporar sus fotografías. La inclusión de estas fotografías, vídeos y grabaciones de sus voces en el trabajo final hizo que hablaran de matemáticas en primera persona, después de haber "sufrido" todo el proceso de elaboración del estudio estadístico. Asimismo, en inglés se utilizaron estos resultados para trabajar el estilo directo ("direct speech") y el estilo indirecto ("reported speech").

Por último, los alumnos y alumnas, con la ayuda del proyector LCD del centro, ofrecieron una charla a sus propios compañeros de cursos inferiores. Tuvieron que explicar todo el proceso de una estadística con el ejemplo que nos ocupa y resolver sus dudas. Este término matemático, tan usual en nuestra sociedad, de ahora en adelante no les dejaría indiferentes.

Conclusiones

Este trabajo fue premiado por el *Instituto Canario de Estadística, ISTAC* (http://www.gobiernodecanarias.org/istac), con el 2º premio de su *III Concurso Escolar de Trabajos Estadísticos*. Además un periódico local (TF-Press) se interesó por el estudio y realizó un artículo a página completa sobre sus resultados.

En definitiva, hemos intentado apoyar el proceso de E/A de las matemáticas aprovechando el marcado carácter interdisciplinar de las TIC, su cercanía al alumnado y su potencial como medio de comunicación. También creemos que este tipo de experiencias, y el material resultante de ellas, fomenta en nuestros alumnos la creatividad y sirve para que adopten una actitud dinámica ante las matemáticas, contextualizando sus trabajos en el proyecto del centro y dándole una gran motivación y sentido de la utilidad.

El trabajar con personas supone que en nuestra profesión no haya recetas que funcionen en todos los casos. La diversidad del alumnado y un mundo cambiante hacen que nuestros métodos también tengan que ser cambiantes. En cualquier caso, para no llevarnos a engaño, la forma de llevarla al aula para enseñar matemáticas no es tarea fácil. Tendremos que buscar el equilibrio entre qué, cómo y con qué enseñar. No se trata de eliminar todo lo anterior sino de seguir sumando e innovando. Pienso que esa innovación es uno de los argumentos que hace que nos sintamos vivos en nuestra profesión e integrados en la sociedad a la que pertenecen nuestros alumnos. Esto hace que sientan más vivas y cercanas las matemáticas.

A pesar de que coordinar una actividad de este tipo conlleva un gran sobreesfuerzo, éste es directamente proporcional al grado de satisfacción que produce ver a nuestros alumnos con una motivación extraordinaria, colaborando, reflexionando, analizando, planificando, discutiendo y creemos que sobretodo aprendiendo de forma activa e integrada. Esta empatía perduró, en las sesiones posteriores, en las que se trataron de forma más tradicional y expositiva los parámetros estadísticos.

Muchas gracias a todos los alumnos y alumnas que han participado en este proyecto: Rayco Alvarado González, Jonathan Hernández Barreto, Elena Hernández Sosa, Damián Afonso Delgado, Yanira Padilla Ortiz, Eduardo Rodríguez Rodríguez. Y por supuesto, gracias a nuestra compañera de lengua inglesa Ana E. Ramos Rodríguez, sin cuya colaboración no hubiera sido posible este trabajo.

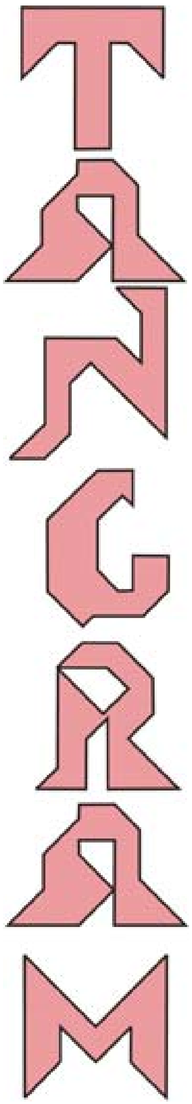
Bibliografía

- National Council of Teachers of Mathematics (2000): “Principios y Estándares de la educación Matemática” Edición en Castellano.Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Cabero J. (1998). “Usos de las presentaciones colectivas por medios informáticos”. Comunicar. http://tecnologiaedu.us.es/bibliovir/pdf/12.pdf
- Heineman (1998): “Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America’s Schools”. cap.IV: Mejores Prácticas en Matemáticas. Traducción realizada en http://www.eduteka.org
- P. Marqués (2005): “La alfabetización digital. Roles de los estudiantes”. http://dewey.uab.es/pmarques/competen.htm (Univ. Autónoma de Barcelona)
- Instituto Canario de Estadística (2004): “III Concurso Escolar de Trabajos Estadísticos”. Versión en pdf disponible en: http://www.gobiernodecanarias.org/istac

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 137 - 140
ISSN: 1815-0640

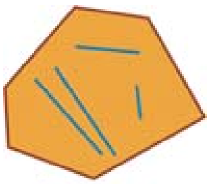
Por Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

TANGRAM CHINO Y POLÍGONOS CONVEXOS

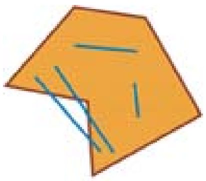


En la anterior entrega de *DosPiUnión* propusimos alguna cuestión relacionada con el Tangram Chino. Volvemos ahora a la carga con una nueva sugerencia.

Esta vez queremos relacionar tangram chino y **polígonos convexos**. Un polígono es ***convexo*** cuando elegidos dos puntos cualesquiera, que se encuentren sobre él, el segmento que los une queda completamente contenido en dicho polígono. Si un polígono no es convexo, diremos que es ***cóncavo***.

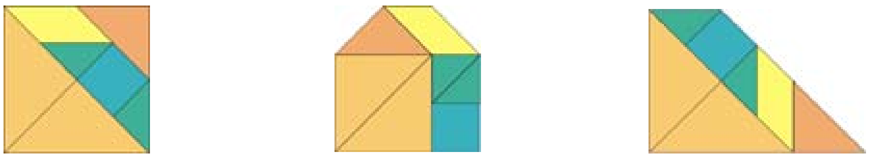


Polígono convexo

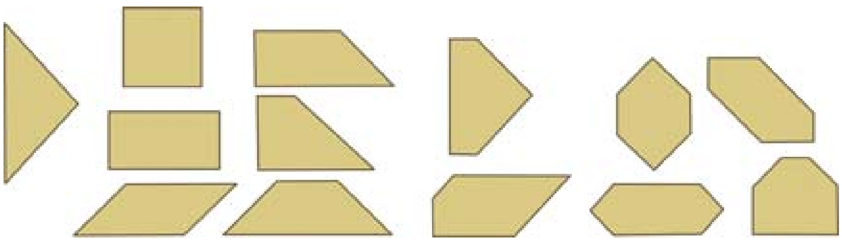


Polígono cóncavo

Damos a continuación tres ejemplos sobre polígonos convexos construidos utilizando, para cada uno de ellos, las siete piezas del tangram chino. ¿Son únicas estas soluciones?



Tomando, para cada caso, todas las piezas del tangram, se pueden obtener los trece polígonos convexos que mostramos a continuación. Os proponemos que pongáis manos a la obra y que tratéis de construirlos.

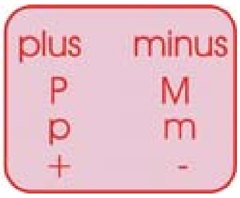


¿Clasificamos estos polígonos? ¿Les ponemos nombres? ¿Calculamos su perímetro? ¿Y su superficie?

Introducción a la historia de los símbolos matemáticos

¿Os habéis preguntado alguna vez de dónde han salido todos esos símbolos que utilizamos en matemáticas? ¿Por qué al ver este símbolo: +, sabemos que debemos sumar? En este artículo pretendemos investigar y descubrir como han llegado estos signos hasta nosotros, por quién y cuándo fueron inventados, etc. Empecemos por los más conocidos:

Símbolos de sumar y de restar: Estos símbolos conocidos por todos, en contra de lo que pudiera pensarse, son signos relativamente recientes. Para alcanzar la notación actual, además de aquellas referencias con más antigüedad, debemos tomar en cuenta, por una parte, las contribuciones de los algebristas italianos y las de los ingleses y alemanes, por otra.

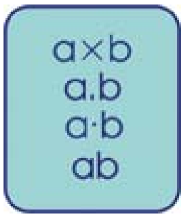


Diofanto (200-284) utilizaba el signo ‘ para indicar la sustracción y los matemáticos de la India usaban un punto. ***Leonardo de Pisa*** (1170-1250), más conocido como ***Fibonacci***, en 1202 designó con ***P*** (*plus*) y ***M*** (*minus*) las operaciones a las que nos referimos. De modo similar, ***Nicolás Chuquet*** (1445-1488) en 1484 utilizó el mismo simbolismo, ***p*** y ***m***, aunque usando letras minúsculas. Este tipo de notación no llegó a consolidarse pero fue utilizada también en el siglo XVI por el italiano ***Jerónimo Cardano*** (1501-1576).

Los algebristas alemanes e ingleses de los siglos XV y XVI fueron los primeros en utilizar los signos +, al que denominaron *signum additorum*, y -, al que llamaron *signum subtractorum*. En un principio, más que para indicar operación, se usaban únicamente para designar exceso o defecto en las contabilidades de los almacenes. En la actualidad se atribuye la originalidad en la utilización de los signos + y – por primera vez en 1489 al alemán ***Johann Widman*** (1462-1498).

Símbolo del producto: Parece ser que antiguamente se usaba con asiduidad la *cruz de San Andrés* para indicar proporciones y multiplicaciones (San Andrés, apóstol hermano de Simón Pedro y pescador como él, fue sometido al martirio de morir atado a una cruz en forma de aspa); tal vez por esto el inglés ***William Oughtred*** (1574-1660) sería el primero en dejar constancia escrita del símbolo del aspa, ×, para denotar la multiplicación en su obra *Clavis Mathematicae*, en lugar de usar la palabra *"veces"* como se tenía por costumbre.

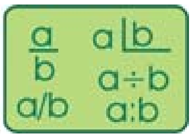
A ***Leibniz*** (1646-1716) no le agradaba nada el símbolo × para indicar la multiplicación, pues decía que se confunde fácilmente con x; así que él introdujo la utilización de un simple punto. Otras fuentes afirman que fueron ***Regiomontano*** (1436-1476) o ***Thomas Harriot*** (1560-1621) los que propusieron la utilización del punto.



Otra posibilidad para indicar la multiplicación es no colocar ningún símbolo entre los factores, como cuando escribimos *xy* para indicar *x por y*. Esta alternativa fue sugerida por ***Descartes*** (1596-1650).

Símbolo de la división: Fue uno de los símbolos que se impuso universalmente más tarde, a pesar de disponer en la actualidad de varios signos que expresan esta operación. Ya los árabes utilizaban la raya de fracción o razón (trazo horizontal) aunque fue ***Fibonacci*** (alrededor de 1228) quien difundió su uso. El símbolo variante / fue introducido en 1845 por ***Augustus de Morgan*** (1806-1871).

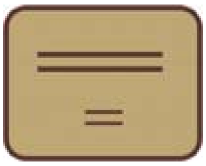
El matemático suizo ***Johann Heinrich Rahn*** (1622-1676) fue el primero en usar en 1659 el signo ÷. El símbolo : sería introducido por ***Leibniz*** en 1684, como consecuencia clara de su apuesta por denotar la multiplicación con un punto.



En lo referente al *gnomon*, o ángulo que utilizamos para separar dividendo, divisor y cociente en el algoritmo de la división entera, no se dispone de una información precisa sobre su origen, siendo atribuido a los matemáticos hindúes o a los árabes.

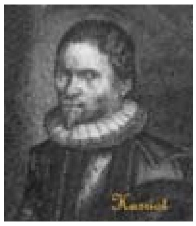
Los términos *numerador* y *denominador* se los debemos a ***Nicolás Chuquet*** (1445 -1488).

Símbolo para indicar igualdad: ***René Descartes***, escribía el signo igual de modo muy parecido a lo que hoy es el símbolo de infinito sin llegar a cerrarlo por la parte derecha (∝).

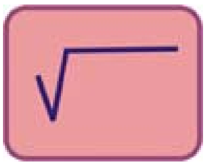


El actual signo de igualdad, =, fue creado por ***Robert Recorde*** hacia el año 1557. ***Recorde*** comenzó utilizando dos trazos paralelos más largos que el símbolo actual; justificó la utilización del signo por *"no haber nada más igual que esos dos trazos"*. El paso del tiempo se encargaría de acortar su longitud hasta alcanzar la forma actual.

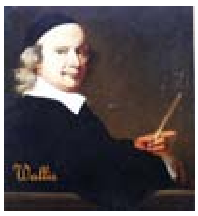
Símbolos para indicar desigualdades: Se atribuye la paternidad de utilización a ***Thomas Harriot***, dando como fecha de los primeros usos en el año 1631. > significa *"mayor que"*, y su opuesto <, *"menor que"*. También hay quien afirma que ***Vieta*** (1540-1603) ya iniciara ese tipo de notación, escribiendo expresiones como a-b>0.



Símbolo para indicar raíces: A pesar de que existen escritos procedentes de la India en los que se detecta un signo para indicar esta operación, la referencia que citaremos aquí es la que está relacionada con ***Christoff Rudolff*** (1499-1545) que utiliza este símbolo en 1525 en su obra *die Coss*. Parece ser que ***Euler*** (1707-1783), alrededor de 1775, hace la conjetura de que el símbolo que indica la extracción de raíz surge por deformación de la escritura de la letra *r*, inicial del término latino *radix* (radical).



Símbolo de infinito: ***John Wallis*** (1616-1703) en su libro *Arithmetica infinitorum* (1655), fue el primero que utilizó el símbolo ∞ para denotar al infinito.

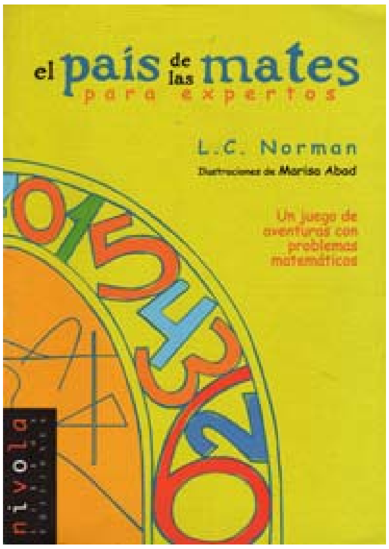


Exponentes en las potencias: Fueron muchas las formas y maneras utilizadas para expresar la potencia de un número, pero sería ***Descartes***, a partir de la publicación de su libro *La Géométrie*, quien popularizaría la notación a^n para la potenciación. ***Jonh Wallis*** definiría los exponentes negativos.

Fuentes:
http://olmo.pntic.mec.es/~dmas0008/perlasmatematicas/simbolosmatematicos.htm
http://ar.geocities.com/matematicamente/signos1.htm
http://www.epsilones.com/paginas/t-signos.html
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/simbolos.html

Matemáticas para leer

Título: El país de las mates para expertos.
Autor: L. C. Norman.
Editorial: Nivola. (www.nivola.com).



¿Quién puede atreverse a pensar que existen libros de matemáticas realmente divertidos? Pues existen, y yo voy a hablar de uno de ellos.

Si te atreves con este argumento te convertirás en protagonista y utilizando tus conocimientos y tu perspicacia irás desvelando los enigmas que se te proponen.

Este libro (compañero del que propusimos en el número anterior, *el país de las mates para novatos*) es, como aquel, tan original que ni siquiera se deja leer siguiendo el orden de sus páginas, sino que, dependiendo de los problemas que seas capaz de resolver, deberás continuar en dónde se te indique.

Es divertido porque quienes proponen los retos son seres extraordinarios (un gnomo, una víbora, un caracol…) y sus preguntas conducen a actividades amenas. Y no todo queda ahí; a medida que avanzas en la realización de las pruebas vas ganando puntos o perdiéndolos. Incluso confeccionarás un plano en el que registrarás los lugares por los que pases o los personajes con los que te encuentres.

Además de todo esto, dispondrás de informaciones adicionales sobre matemáticos, descubrimientos… y páginas que te proporcionan ayuda en el caso de que te atasques. Partiendo de la *Oscura Caverna de la Ignorancia*, pasarás por la *Fuente de Fermat*, la *Puerta de Doppler*, el *Jardín de Gauss*… A medida que avances aumentará la dificultad de las pruebas, pero es que algún motivo tiene que haber para que este libro lleve por título ***El país de las mates para expertos***.

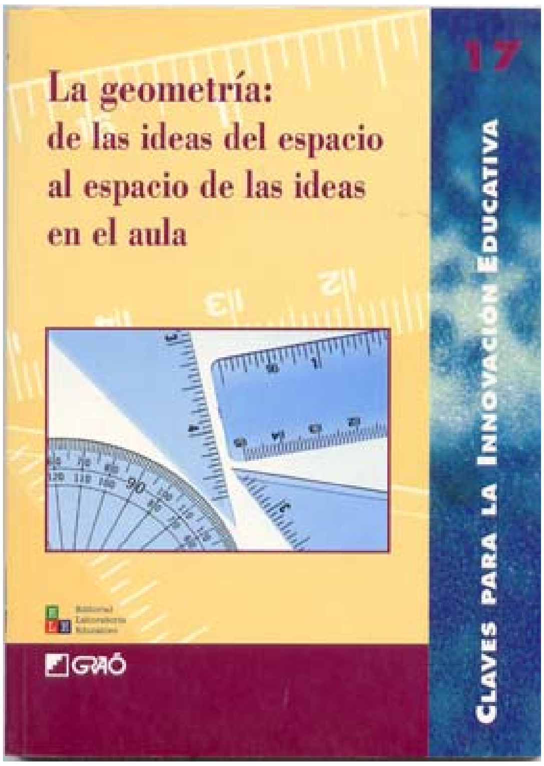
Está recomendado a partir de 14 años. ¡Ojalá que disfrutes con su lectura!

Sara M. B. 4º ESO.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 141-146
ISSN: 1815-0640



La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula.

Editorial Graó.

La enseñanza de la Geometría ha sufrido cambios importantes en la historia reciente de la educación secundaria. Desde la geometría euclídea del plan anterior a la Ley General de Educación, de 1970, pasamos a una consideración conjuntista de la geometría, coincidiendo con la citada Ley, lo que favoreció la aparición temprana de la geometría analítica, tan bien acogida por los profesores de secundaria. La LOGSE, al retrasar la introducción del lenguaje algebraico y realzar los hábitos espaciales, recobró una geometría de formas, ampliando su estudio a toda la educación obligatoria. Los maestros no fueron sensibles al cambio, y continuaron con una enseñanza basada en la asignación de nombres a formas, así como en el establecimiento de fórmulas de medidas.

Los profesores de Enseñanza Secundaria se encontraron con una perspectiva que les era novedosa, que se alejaba de la geometría analítica de su formación universitaria. Tampoco la comunidad educativa veía claros los objetivos de la instrucción geométrica propuesta. Los recelos que se crearon en unos y otros hicieron que la geometría de ESO fuera relegada a la última parte de los cursos. Con ello se produjo una pérdida de presencia real.

La consideración refuerza las perspectivas de toda la enseñanza obligatoria. Si la ESO no reconoce el papel de la geometría, mientras que sigue enfatizando los aspectos numéricos y algebraicos, la comunidad educativa de la enseñanza primaria, que espera preparar a los alumnos para que tengan éxito en el ciclo siguiente (la ESO), tiene que prestar especial atención a estos aspectos, en detrimento de la geometría de formas.

Las evoluciones posteriores no han cambiado sustancialmente la situación. Si acaso, la mayor concreción de los nuevos currículos derivados de la Ley de Calidad, han reforzado la visión de la geometría escolar anterior. En estas circunstancias se hace necesaria la aparición de libros dedicados a analizar y hacer propuestas educativas en la enseñanza de la geometría, para presentar a la comunidad educativa disponga de argumentos que realcen el papel educativo de la geometría, y cuente con propuestas concretas para llevar a clase. Partiendo de esta base, la editorial Graó ha realizado este libro temático, centrado, en esta ocasión, en un bloque de contenidos.

Como otros libros de esta colección *Claves para la Innovación Educativa*, el texto comentado es una recopilación de artículos ya aparecidos en revistas relacionadas o editadas por Graó: Uno, Aula de Innovación y Guix. El libro apareció en 2002, pero los artículos recogidos van desde 1994 a 2000.

Se presenta mediante la estructura clásica de los libros de esta colección, con una introducción (que en esta ocasión realiza Francsc López), dos artículos generales en los que se da una visión amplia de la geometría, y seis artículos específicos para los tres niveles educativos: educación infantil, primaria y secundaria obligatoria.

El primer artículo es de **Rafael Pérez Gómez**, profesor del Departamento de Matemática Aplicada, de la Universidad de Granada, y tiene un título tan sugerente como corresponde al autor: *Construir la Geometría*. Para construir el edificio geométrico, Rafael establece dos partes. La primera consiste en la descripción de un viaje geométrico por la Expo de Sevilla, lo que le permite hacer una recreación de los problemas principales que determinan la evolución histórica de la geometría. Una vez mostrada la presencia de la geometría en el entorno, y sus cualidades, la segunda parte consiste en una propuesta metodológica basada en el modelo de los esposos Van Hiele, para estudiar las secciones planas en un cubo. Practicando la máxima de McLuhan "*El medio es el mensaje*", Pérez hace acopio de referencias culturales diversas, lúdicas, desde las más formales a las más creativas, para argumentar la relación entre las matemáticas y la cultura. Igualmente emplea y propone lenguaje matemático para explicar y describir, lo que apoya la idea de que la matemática es un metalenguaje. Los razonamientos continuos apoyan la idea de que la matemática es razonamiento. En esencia, un artículo interesante, motivador, con formato de conferencia, en el que se hacen una gran cantidad de alusiones, que se echan de menos en el artículo. Igualmente presenta numerosas citas a textos y autores, pero no aparecen las referencias bibliográficas.

El segundo artículo general es un artículo clásico, muy citado, en la enseñanza de la geometría. Se trata del estudio que **José Antonio Mora Sánchez**, profesor de educación secundaria en el Centro de Profesores de Alicante, realiza de los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. Tras justificar la importancia de los recursos en la enseñanza, José Antonio descubre toda una secuencia didáctica basada en el uso del mecano para la enseñanza de los polígonos. Su punto de partida es la diversidad de figuras que se pueden construir, y el interés en clasificarlas, para lo que recurre a una variedad de criterios. Esta clasificación le permite presentar todas las figuras posibles. Se complementa este ejemplo con un barrido sobre otros materiales y recursos, de los que sólo alcanza a indicar su función más destacada.

Mora parte de la idea de que los materiales ayudan a cambiar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, con lo cual aboga por estrategias bien planteadas, pero no rígidas. Para llevarlas a cabo, el profesor tiene que ser sensible a los efectos que está causando en los alumnos, lo que le llevará a romper su preocupación por el “tiempo escolar”, dándole un valor más acorde con “el necesario para aprender”.

La amplia bibliografía que cierra el capítulo supone una buena muestra de textos importantes en la enseñanza de la geometría, así como referencias sobre materiales y recursos para su aprendizaje.

Entramos a continuación en los artículos dedicados a tres niveles educativos. Sobre la educación infantil aparecen dos artículos. El primero es de **Lluis Segarra**, profesor de matemáticas, autor de diversos estudios en educación matemática, y se titula *El aprendizaje de la geometría*. El autor justifica la importancia que se ha vuelto a dar a la geometría en la enseñanza, para lo que recurre a la teoría de la diferenciación de los hemisferios cerebrales. Posteriormente presenta unas etapas para la enseñanza de la geometría en infantil y primaria, que van desde el reconocimiento de formas y figuras a la proyección en el plano. Alude para justificarlas en el principio biogenético, según el cual se debe empezar a trabajar en enseñanza de la geometría con formas que puede captar el niño, por tanto con las formas tridimensionales. Sólo si ha sido sensible a estas podrá seguir abstrayendo cualidades, para captar las formas planas.

Montse Farell Pastor, maestra de un Centro de Educación Infantil y Primaria e un pueblo de Barcelona, nos propone *Aprender jugando con la geometría en la escuela infantil*. En este artículo describe su experiencia en la segunda etapa de infantil (4 y 5 años), en dos rincones de su clase, relacionados con la geometría: el rincón de la geometría y el rincón de los lazos. En el primero los alumnos construyen figuras con tacos de madera para reproducir los que aparecen en fotografías y posteriormente los representan en un papel. En el rincón de los lazos los niños realizan poliedros utilizando polígonos de cartón con agujeros en los vértices, unidos con cuerdas, lo que les permite amarrarlos de dos en dos. Posteriormente dibujan el poliedro realizado, tratando de que aparezcan todas sus caras.

Los dos artículos centrados en la enseñanza primaria describen lo que realizan sendos grupos de maestros en sus aulas.

El primero está relatado por los propios autores, **maestros del Colegio Público Antzuola**, Guipúzcoa, sin aparecer los nombres en el libro. Describen una experiencia de enseñanza globalizada, centrada en el estudio de Egipto, dentro de la que aparecen actividades relacionadas con las matemáticas. Las rupturas innovadoras que presentan no sólo afectan a la superación de las áreas de conocimiento (para estudiar Egipto entran todas las referencias, de lengua, matemáticas, conocimiento del medio, etc.), sino también de las ramas de las matemáticas (aritmética, geometría, medida, etc.). Parten de problemas reales que sitúan al niño frente a las dificultades que se obvian al modelizar situaciones para crear actividades escolares. Construir un cuadrado en un solar sin referencias externas o captar dimensiones de las magnitudes, como el tamaño de la Pirámide de Keops, o la percepción de lo que significa "hace 5000 años", requieren tareas específicas. Su aporte se resume en el título del artículo, ya que los autores dan argumentos para responder a *"El qué, cuándo, para qué… de las matemáticas*".

El artículo de **Xelo Calvo Penadés**, asesora en un Centro de Profesores de Valencia, describe y reflexiona sobre el trabajo llevado a cabo por un grupo de maestros, centrado en el empleo del material en la enseñanza de la geometría. El grupo decide utilizar el Polydrón (de ahí el título *El polydrón, un material que engancha*), tras consensuar unos principios de la enseñanza de la geometría. El artículo describe tres ámbitos de trabajo que han trabajado los maestros en el grupo, y posteriormente lo que ha resultado de la actuación de los maestros con sus alumnos. El primero consiste en construir figuras libremente o a partir de pautas, el segundo reproducir figuras a partir de modelos, y el tercero representar en el plano figuras espaciales. Para ejemplificar los principios y los ámbitos, presenta tareas concretas así como respuestas de los alumnos, con lo que puede explicar los procesos de desarrollo profesional de los maestros que derivan de la actuación del grupo de trabajo.

Para la educación secundaria se presentan dos artículos, el primero de Claudi Alsina, profesor de Matemática Aplicada, de la Universidad Autónoma de Barcelona, y el segundo una unidad didáctica de tres profesores de secundaria de varios pueblos de Barcelona, Carme Carbó, Pepi Galera y Jesús Ruiz.

Alsina se plantea describir canales de implementación y vías de análisis y seguimiento de la educación geométrica en ESO. Para ello comienza por hacer un diagnóstico de las razones de la dificultad de la enseñanza de la geometría en este nivel educativo, indicando que esta es debida a que el aprendizaje geométrico está menos estructurado que el de otros núcleos matemáticos. Por tanto para justificar la enseñanza de la geometría hay que percibir la importancia de que en el aprendizaje geométrico se produzca la coordinación entre el ojo visual y el ojo de la mente, única forma de que se produzca la coordinación entre visualización y conceptualización.

El título del artículo de Claudi Alsina es *La educación geométrica 12-16. Sistemática para su implementación*. Por ello no se conforma con el diagnóstico indicado, sino que presenta una unidad didáctica del proyecto Bon dia mates, que ha compartido con J.M. Fortuny y J. Jiménez, centrada en un problema clásico, como es el obtener el emplazamiento de un aeropuerto que atienda a tres ciudades. El tratamiento del problema le permite hacer un recorrido por diversas interpretaciones del mismo, así como sobre diversas formas de resolverlo de manera manipulativa. Este ejemplo le lleva a indicar los elementos que articulan la propuesta para la enseñanza de la geometría, así como las áreas que podrían abarcar, y que cada profesor debe seleccionar en su aula.

Por último el artículo de Carbó y otros, llamado *El Espacio en forma*, presenta un material para que los alumnos estudien figuras espaciales a partir de la observación, manipulación y clasificación, en el primer ciclo de ESO. El material consiste en una serie de fichas, de las que presentan algunas, organizadas en tres niveles de profundidad, el segundo de los cuales corresponde a los mínimos establecidos por el currículo. El formato de la presentación corresponde a una unidad didáctica, indicando las variables tradicionales en la comunicación entre profesores: objetivos, contenidos, actividades de enseñanza–aprendizaje y evaluación.

En resumen, el libro es un manual interesante para los profesores, que debe ocupar su lugar en la biblioteca de los departamentos de matemáticas de nuestros centros. Su importancia se basa, en primer lugar en los análisis realizados, que, pese a que provengan de profesores de diferentes niveles educativos y con distinta preparación, coinciden en sus apreciaciones. Ello les lleva a realizar recomendaciones comunes, como comenzar con tareas referidas a figuras tridimensionales, proponer que los alumnos identifiquen y perciban las figuras antes de representarlas, promuevan actividades de representación bidimensional así como de interpretación, y releguen la justificación y demostración al último lugar de la secuencia de enseñanza-aprendizaje. Pero también interesan sobremanera las propuestas didácticas que acompañan a estos análisis. En ellas se pueden encontrar sugerencias sobre materiales, siempre acompañadas de actividades concretas para llevar al aula.

Nos quedamos, para terminar, con las apreciaciones de Alsina, quien destaca la importancia que tiene la geometría para lograr que los alumnos coordinen dos acciones básicas en su desenvolvimiento personal e intelectual, como son la percepción y el razonamiento.

Pablo Flores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 147-150
ISSN: 1815-0640

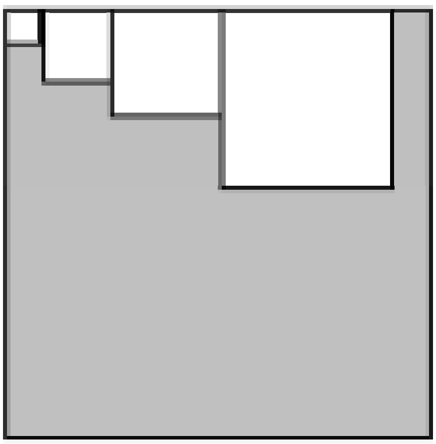
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Javier toma una cartulina cuadrada cuyos lados miden 2 005 unidades, y va recortando cuadrados de lado 1, lado 2, lado 3, etc., todos pegados al borde superior, hasta que ya no cabe un cuadrado más, como se ilustra en la siguiente figura



Hallar el área de la porción de cartulina que queda sin recortar.

La versión original de este problema figura en alguna página de Internet relacionada con las Olimpiadas Brasileras de Matemática y lamentablemente no tengo la referencia exacta. Ésta es una versión modificada (en la versión original no aparece Javier ni son 2 005 las unidades) que resultó muy interesante al emplearla en un taller sobre resolución de problemas con profesores de secundaria, desarrollado con mi colega Emilio Gonzaga, como parte de las actividades del IREM-PUCP, en agosto del 2005. El problema es muy atractivo no sólo porque al resolverlo se establecen de manera natural conexiones matemáticas entre geometría, sucesiones, inecuaciones cuadráticas y suma de los cuadrados de un conjunto de números, sino por las posibilidades que presenta de desarrollar una sesión de trabajo en una perspectiva activa y colaborativa.

Resolviendo el problema

Una manera de resolver el problema es examinar cuántos cuadrados puede recortar Javier, resolviendo la inecuación $\sum_{i=1}^{n} i \leq 2005$.

La suma es muy conocida y entonces se llega a la inecuación cuadrática

$n^2 + n - 4010 \leq 0$,

de donde se obtiene que $n = 62$.

Con este dato se calcula el área total de los cuadrados recortados, que queda expresada en la fórmula $\sum_{i=1}^{62} i^2$. Conociendo la fórmula, se obtiene fácilmente que esta área es 81 375 unidades cuadradas. La respuesta al problema ya es cuestión de una simple resta: $2\,005^2 - 81\,375$.

El problema en el taller

Entusiasmados por los atractivos del problema y por las posibilidades que ofrece al solicitar algunas variaciones, decidimos plantearlo en el taller, pero advertimos que la fórmula de la suma de los cuadrados de los *n* primeros números enteros positivos podría no ser conocida por los profesores participantes del taller. Una solución fácil era darles la fórmula, pero consideramos que sería mucho más interesante que ellos la descubran. Con ese propósito elaboramos con Emilio las siguientes cuatro fichas de trabajo, de modo que se desarrollen ciertas actividades preparatorias y enriquecedoras a nivel individual y grupal. El problema de Javier y el área de la cartulina, aparece finalmente en la última ficha de trabajo.

Ficha 1 A

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades individuales

1. Hallar el valor de la suma $\sum_{i=1}^{4} [i^3 - (i-1)^3]$
2. Expresar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} [i^3 - (i-1)^3]$.
3. Expresar la suma $\sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i)$ en términos de las sumas $\sum_{i=1}^{3} a_i$ y $\sum_{i=1}^{3} b_i$.

Ficha 1B

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades individuales

1. Expresar la suma $\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i)$ en términos de las sumas $\sum_{i=1}^{3} a_i$ y $\sum_{i=1}^{3} b_i$.
2. Expresar $\sum_{i=1}^{3} 5a_i$ en términos de 5 y de la suma $\sum_{i=1}^{3} a_i$.
3. Demostrar la identidad $\sum_{i=1}^{n}[i^3 - (i-1)^3] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$

Ficha 2

Problema

Hallar en términos de *n* el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^k$, donde *k* toma los valores 2 y 3.

Actividades grupales

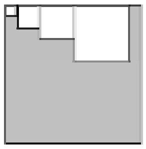
a) Hallar, en términos de *n*, el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^2$

b) Esbozar un procedimiento que permita expresar, en términos de n, el valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} i^3$

Ficha 3

Situación

Javier toma una cartulina cuadrada cuyos lados miden 2005 unidades, y va recortando cuadrados de lado 1, lado 2, lado 3, etc., todos pegados al borde superior, hasta que ya no cabe un cuadrado más, como se ilustra en la siguiente figura



Actividades grupales

1. Hallar el área de la porción de cartulina que queda sin recortar.
2. Proponer otras actividades individuales o grupales relativas a la situación descrita.

Las fichas 1A y 1B fueron repartidas simultáneamente a los grupos A y B, previamente definidos entre los participantes del taller. La ficha 2 se repartió a grupos de dos participantes, formados previamente por uno del grupo A y otro del grupo B. Finalmente, la ficha 3 se repartió a los mismos grupos de dos.

Los resultados fueron altamente satisfactorios para los participantes y para quienes condujimos el taller, pues ellos, no sólo vivieron la experiencia de una forma de trabajo colaborativo, en la que se complementan los resultados obtenidos por los integrantes del grupo (Fichas 1A y 1B) y se aplican los resultados previos (Ficha 2) para resolver el problema de geometría propuesto en la actividad 1 de la ficha 3; sino también trabajaron temas de sucesiones y sumas, descubriendo formas sencillas de demostrar fórmulas de algunas sumas de uso frecuente. Además, surgieron propuestas muy interesantes en la actividad 2 de esta última ficha, relacionadas con la obtención de perímetros y con la obtención de áreas por repetición de recortes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, páginas 151-152
ISSN: 1815-0640

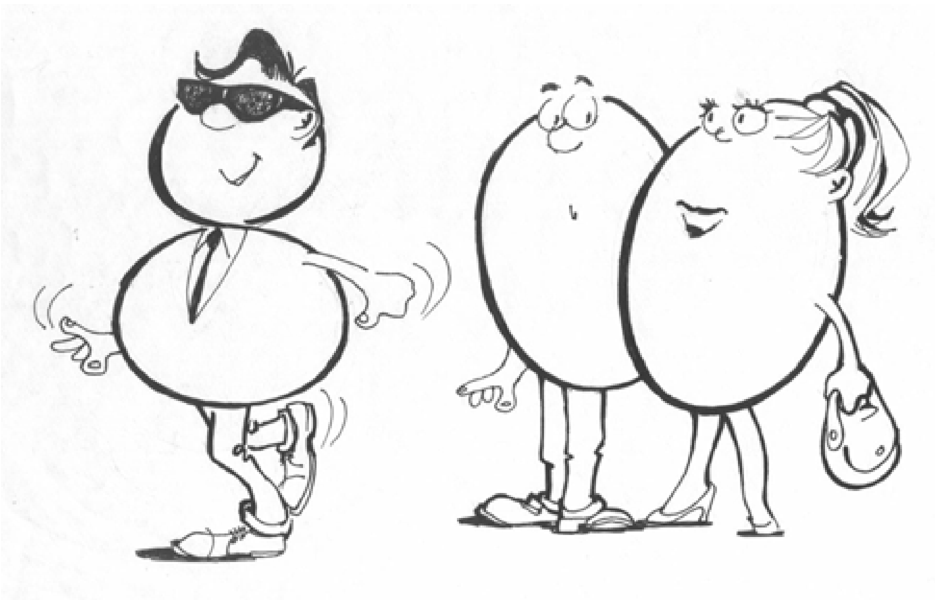
Cronoludia Matemática

Ismael Roldán y José Muñoz

Viñetas y Matemáticas

Para nuestra sección queremos incluir hoy dos viñetas que nos ha dibujado nuestro amigo, y compañero en el I.E.S. Macarena de Sevilla, Antonio de Castro Jiménez.

La primera presenta un chiste que es muy corriente encontrar entre los chistes matemáticos.



Mira que chulo va ese cero con la corbata

El siguiente requiere un poco más de explicación. En los últimos años es corriente que en España aparezcan informaciones en los medios de comunicación que son muy llamativas. Siempre que se realiza una manifestación, una jornada de huelga o cualquier concentración, suelen encontrarse informaciones muy contradictorias sobre el número de personas que han secundado esa actividad. Por un lado los convocantes, por otro los medios gubernamentales, por otro las fuerzas de seguridad, dan cantidades que muchas veces no tienen nada que ver unas con otras. Eso nos llevó a pensar en el siguiente chiste.

Cronoludia Matemática

Ismael Roldán Castro y José Muñoz Santoja

Esto es en serio

EL PAÍS, jueves 23 de octubre de 1997

Fadeco afirma que el paro fue un "absoluto fracaso" y "carece de justificación"

UGT cifra en un 80% el seguimiento en la huelga de la construcción, que la patronal reduce al 1%

Esto es en broma

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2005, Número 4, página 153
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, letra tipo **aria**l, y tamaño **12 puntos**, interlineado sencillo, márgenes de 2,5 cm. en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 10 páginas, incluyendo figuras. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…

4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).

7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). “La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria”. *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). “Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma”. *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). “Research on mathematical proof”. En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). “Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria”. En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.