UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 5

Marzo de 2006

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tendrá una periodicidad trimestral, de modo que se publicarán cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 3 - 8
ISSN: 1815-0640

Uso del ordenador en un entorno sin algoritmos

F. Burrel

La invención de la escritura

El prestigio del apocalipsis es inagotable. Basta que cualquier cantamañanas suelte que el cine ha muerto, que el teatro ha muerto, que la poesía ha muerto o que la política ha muerto para que pasemos a contemplarlo con la admiración pusilánime que se reserva a los sabios provistos de dones adivinatorios. A veces, sin embargo, los apocalípticos no son cantamañanas, sino verdaderos sabios aterrados ante los cambios que se avecinan. Platón lamenta en el Fedro, por boca del rey Tanos, la invención de la escritura, una creación peligrosa porque "implantará el olvido en las almas de los hombres", quienes "dejarán de ejercer la memoria porque contarán con lo que está escrito": la escritura no proveerá a los hombres de sabiduría, sino de falsa sabiduría, lo que inevitablemente conducirá al fin de la auténtica cultura. La verdad es que, si bien se mira, Platón estaba en lo cierto: con la aparición de la escritura desapareció una cultura (la que monopolizaba el maestro que de viva voz impartía sus conocimientos). Pero apareció otra, que en parte aún es la nuestra.

Javier Cercas

EL PAIS Semanal, 13 de Marzo de 2005

¿Son necesarios los algoritmos en la secundaria?

Siendo estudiante de matemáticas en la universidad recuerdo que todos pensábamos que era una barbaridad llegar a primer curso sin haber estudiado nunca nada de álgebra moderna o, al menos, algo sobre el uso de la lógica en matemáticas. Nos resultaban tan difíciles los primeros pasos en álgebra moderna que creíamos fervientemente que era necesario introducirla en el Bachillerato. Supongo que estas ideas estaban influenciadas por la reforma que se estaba empezando entonces en la enseñanza de matemáticas, reforma que llegó a incluir la teoría de conjuntos desde el primer curso de Primaria. Todos fuimos testigos de que aquella no era una buena idea, no voy a detenerme ahora en los motivos, pero lo que nos parecía tan evidente, anticipar la enseñanza del Álgebra Moderna, no funcionó en absoluto.

Este fracaso, junto con las nuevas ideas que estaban apareciendo en la propia ciencia matemática, pusieron de moda la resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ahora el alumno debe resolver problemas auxiliado por el profesor que le ayuda a encontrar las herramientas que va necesitando sobre la marcha. Hay profesores, tanto de Matemáticas como de Física, convencidos de que los alumnos deberían dominar tal o cual técnica antes de presentarle conceptos nuevos. Se les contesta que esa es tarea del profesor actual, que debe ayudar al estudiante a recordar dichas destrezas o presentárselas por primera vez si es necesario. El futuro dirá si estamos exagerando como lo hicimos en el caso de la teoría de conjuntos.

Consecuencia de todo esto es el replanteamiento sobre cuándo debemos enseñar determinadas técnicas y destrezas, entre las que se encuentran muchos de los que llamamos algoritmos. ¿Hay que entrenar a los alumnos prematuramente preparándolos para el día en que los puedan necesitar? o ¿tiene más sentido enseñarlos cuando vayan a utilizarlos?

Anthony Ralston (1999) se pregunta: "¿Cuál sería el impacto de un currículum de matemáticas de primaria con menos ALP sobre la matemática de la escuela secundaria y de la universidad? ¿Cómo afectaría el estilo de matemática propuesto a lo que es enseñado en la matemática de la escuela secundaria y a cómo es enseñado?"

Un ejemplo que nos puede servir de ilustración es el algoritmo de la división. ¿Cuándo debe ser enseñado?, si es que debe serlo alguna vez. Estamos suponiendo que este planteamiento nos lo estamos haciendo en una situación en la que los alumnos han sido entrenados durante sus estudios de primaria en el cálculo mental y son capaces de efectuar mentalmente divisiones de cierta complejidad. ¿Cuándo necesitan manejar el algoritmo de la división? También podríamos plantearnos, si conviene enseñarlo por primera vez en el momento en que se necesite o habría que haberlo presentado antes.

Hay quien piensa que al empezar el aprendizaje de operaciones con números decimales habría que enseñar los algoritmos de la multiplicación y la división para que fuesen capaces de hacer cálculos complicados. Suponemos que los alumnos de secundaria usan calculadora en clase por lo que no tienen la necesidad de hacer cálculos complicados con números decimales a no ser que el profesor lo exija por considerarlo formativo.

En secundaria se suelen realizar cálculos algebraicos de cierta complicación; podríamos pensar que éste puede ser un buen momento para utilizar los algoritmos de la multiplicación y la división, ya que estas operaciones entre polinomios pueden resultar complicadas.

Centrándonos en la división de polinomios, presentaremos a continuación una actividad en la que se utilizan propiedades de la división, dejando al margen la necesidad de conocer el algoritmo.

Una actividad en un entorno de ordenador sin algoritmos

Dice A. Ralston (1999): “El camino a la técnica algebraica en un mundo de calculadoras es esencialmente el mismo que el camino a la técnica aritmética, llamada álgebra mental. Seguramente no es irracional esperar que los estudiantes de álgebra hagan una gran cantidad de álgebra de polinomios mentalmente. Además, aunque como normalmente se enseña ahora, tareas como completar cuadrados son tareas esencialmente mentales las cuales usan el lápiz y el papel como medio de registrarlas”.

Pero, aceptando que hacemos muchos cálculos algebraicos mentalmente y el resto con calculadora u ordenador, nos hacemos la pregunta: ¿qué actividades se pueden realizar en secundaria en un entorno de ordenador y sin algoritmos?

Un modelo de lo que se puede hacer en clase nos lo muestra M. Yerushalmy (1999), durante un curso de álgebra dado a estudiantes de 16 años. Nos hemos inspirado en su trabajo para realizar una experiencia con alumnos de 4º de ESO y de 1º de Bachillerato. En el currículum de la Generalitat Valenciana se propone el estudio de las operaciones entre polinomios en Tercer curso de la ESO[1].

Hemos utilizado el programa de multirepresentación Derive, programa que resulta ser muy fácil de manejar para estudiantes de secundaria, aunque era desconocido por la mayoría.

Hacemos a los alumnos la siguiente propuesta:

Propuesta 1.- *Haz la representación de las siguientes rectas: y=3x–2 ; y=2x+1 Efectúa la multiplicación de dichas funciones y representa gráficamente el resultado*.

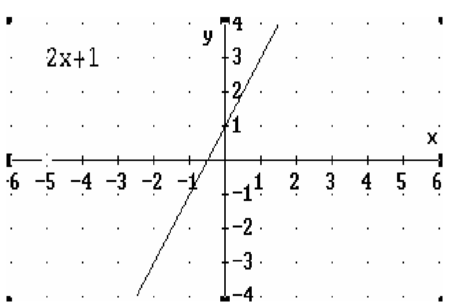
f : 3x-2

g : 2x+1

f·g : (2x+1)(3x-2)

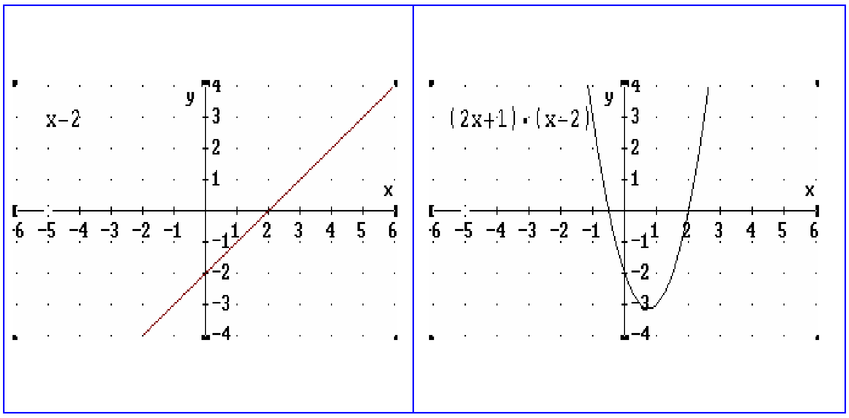
$\mathbf{f^{-1}}$: 1/(2x+1)

$\mathbf{g^{-1}}$: 1/(x-2)



Los alumnos hacen pruebas con otras funciones propuestas por ellos mismos y discuten. Enseguida les llama la atención que los cortes de la parábola con el

[1] Hay muchos textos que presentan las operaciones con polinomios en cursos anteriores, pero, al menos, en la Comunidad Valenciana, no aparecen antes de tercero de ESO. Pienso que no hay ninguna justificación para tratarlas antes.

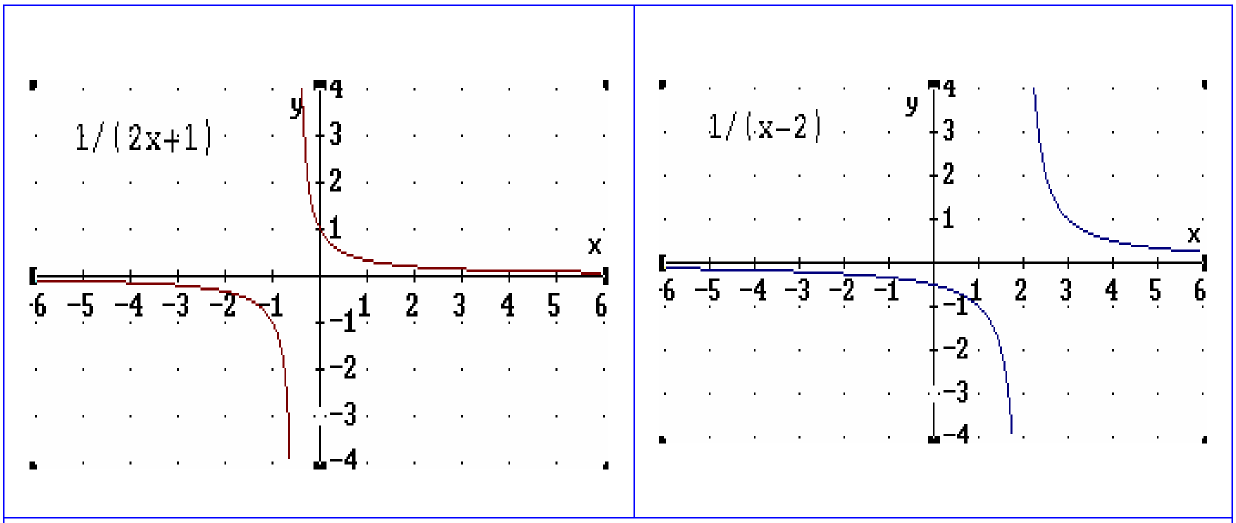


eje OX, coinciden con los cortes de las rectas. Incluso se podría relacionar el crecimiento de las rectas con la concavidad o convexidad de la parábola.

El profesor pide que efectúen el producto (2x+1)·(x-2) mediante los comandos *Simplificar* y *Expandir* de Derive; el resultado es la ecuación de una parábola $2x^2$-3x-2 que nos da una visión gráfica de la multiplicación.

Propuesta 2. *Representar las inversas de las funciones f y g ya conocidas.*

Han estudiado anteriormente la continuidad de funciones y conocen el papel de las asíntotas verticales.

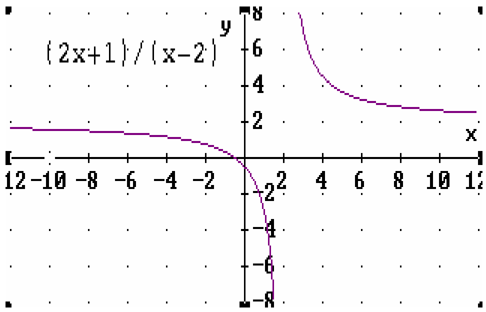


El profesor provoca la discusión pidiendo que muevan el cursor siguiendo la gráfica y que observen las coordenadas de los puntos por donde pasan. Observan la tendencia a cero de los valores de las abscisas y llegan enseguida al acuerdo de que el eje horizontal es una asíntota.

***Propuesta 3**: Efectúa el cociente entre las dos rectas y representa gráficamente el resultado*.

$$\frac{f}{g} : \frac{2x+1}{x-2}$$

$$= 2 + \frac{5}{x-2}$$



Realizan el cociente mediante los comandos *Simplificar* y *Expandir* de Derive. Desplazando el cursor por la gráfica encuentran la asíntota horizontal de ecuación y=2.

Los alumnos encuentran la ecuación de la asíntota de un modo intuitivo, no han relacionado todavía el desarrollo del cociente con la asíntota. El profesor debe intervenir para provocar la discusión entre ellos, les pide que se pongan otros ejemplos hasta encontrar un método general y les aconseja que desarrollen el cociente mediante los comandos indicados anteriormente. No tardan en descubrir que pueden hallar la asíntota a partir de dicho desarrollo. Es este el momento en que el profesor aprovecha para explicar que los sumandos se obtienen a partir del cociente y el resto de la división.

Estamos utilizando el teorema fundamental de la división, esta es una de las primeras ocasiones en que se utiliza este desarrollo para entender un concepto. Más aún, de esta manera abordamos el concepto de asíntota horizontal de un modo gráfico-visual, lo cual resulta muy inteligible para los alumnos y es fácil de recordar.

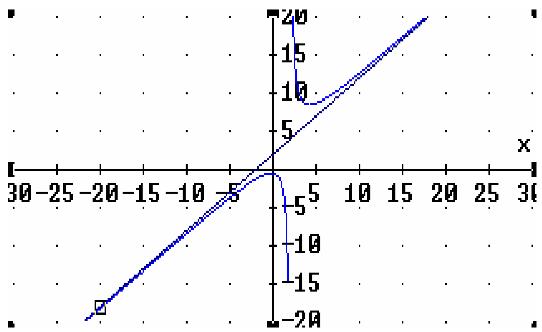
El currículum de 4º de ESO no contempla el estudio de asíntotas oblicuas, pero en 1º de Bachiller podemos ampliar lo visto hasta ahora. Hacemos la siguiente propuesta:

***Propuesta 4:** Haz el desarrollo de la función* $y = \frac{x^2+1}{x-2}$ *y represéntala gráficamente*.

El profesor propone más ejemplos, si lo considera necesario, hasta que encuentran la ecuación de la asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^2+1}{x-2} =$$

$$= \frac{5}{x-2} + x + 2$$



Tienen que utilizar los comandos de cambio de escala para poder visualizar la gráfica entera. No tardan en comparar este caso con las asíntotas horizontales y representan la recta x+2.

El profesor les ayuda a encontrar las diferencias entre la ordenada de la curva y la de la asíntota, viendo que tienden a cero.

Los alumnos han encontrado las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales sin utilizar las fórmulas tradicionales y basándose en la descomposición del cociente, además han podido visualizar la relación entre la gráfica y la asíntota. Además, han encontrado un método para obtener las asíntotas diferente a los tradicionales y tan potente como ellos.

Se ha utilizado el concepto de división sin necesitar el algoritmo; aunque, si no disponen de ordenador tendrán que realizar la división por algún método.

Bibliografía

- Ralston ANTHONY (1999), Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic [1999]: Journal of Computers in Mathematics and Science Education, Vol. 18, No. 2, pp. 173-194.
- YERUSHALMY M.(1997), Reaching the Unreachable: Tecnology and the Semantics of Asymptotes. International Journal of Computers for Mathematical Learning, V.2 N.1

F. Burrel, IES Chabás, Dénia (Alicante)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 9 - 21
ISSN: 1815-0640

La cartilla aritmética antifascista (1937), un manual de educación matemática y propaganda política

Vicente Meavilla Seguí

Resumen

En este artículo presentamos la *Cartilla aritmética antifascista*, opúsculo utilizado durante la Guerra Civil Española (18 de julio de 1936 - 1 de abril de 1939) para instruir al ejército republicano. A nuestro parecer, el interés histórico de este manual radica en su doble objetivo: la alfabetización matemática y la propaganda política.

Estimamos que la difusión de textos de este tipo, en los que la enseñanza y el aprendizaje se mezclan con la ideología política, puede contribuir a que la Historia de la Educación Matemática en España se contemple desde una perspectiva más amplia.

El analfabetismo en España durante las tres primeras décadas del siglo XX: las Milicias de la Cultura

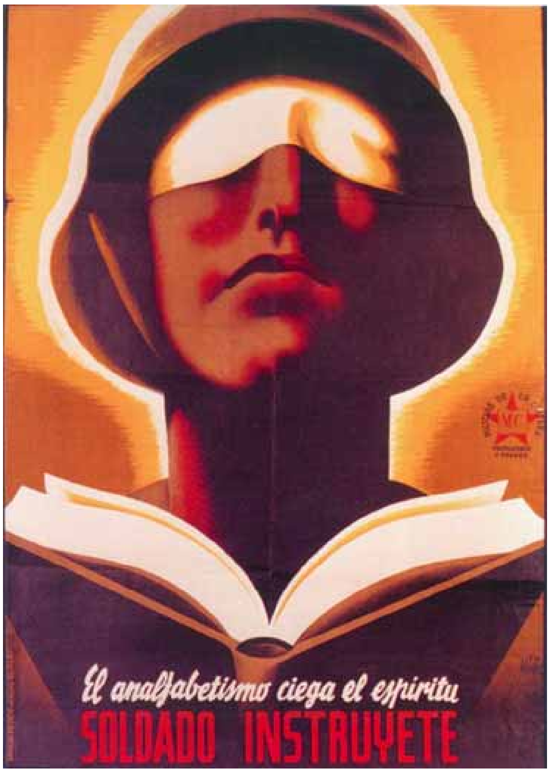
España inició su andadura por el siglo XX con una tasa de analfabetismo muy superior a la media europea. Recordemos que la tasa de analfabetismo en España era del 55% en 1900, del 52% en 1910 y del 50% en 1923.

El 14 de abril de 1931 se instauró la Segunda República cuya preocupación por la educación fue notable. Para el Estado la educación era un servicio público dirigido a toda la población y, para ello, la escuela debía ser laica, única, estatal y gratuita.

En enero de 1937, en plena Guerra Civil, se crearon las *Milicias de la Cultura* destinadas a combatir el analfabetismo entre los combatientes republicanos. Los milicianos de la cultura eran maestros, profesores e intelectuales voluntarios que para impartir sus clases utilizaron preferentemente dos manuales: la *Cartilla Escolar Antifascista* (texto para aprender a leer) y la *Cartilla aritmética antifascista* (opúsculo para iniciarse en las operaciones aritméticas elementales: sumar, restar, multiplicar y dividir).

Los logros obtenidos por las Milicias de la Cultura debieron ser espectaculares si atendemos a los siguientes testimonios republicanos:

Según el Sindicato Provincial de Maestros de Madrid, durante 1937 las Milicias de la Cultura liberaron del analfabetismo a 45106 combatientes; crearon 1330 escuelas en trincheras y cuarteles, impartieron 625036 clases individuales y colectivas, publicaron 2786 periódicos murales, crearon 87 hogares del soldado y dieron 145 cursillos de capacitación de mandos[1].



Cartel de las Milicias de la Cultura
El analfabetismo ciega el espíritu
SOLDADO INSTRÚYETE
(Autor: Vicente Vila Gimeno)

Por otro lado, Juan Fer ("Labor de las Milicias de Cultura en los frentes de guerra". *Blanco y Negro*, año XLVIII, nº 9, pp. 15-35) escribía en 1938:

> *La actividad bélica tiene también momentos de mansedumbre; no a todas horas está el fusil en erupción. Se suceden jornadas entre pausas de reposo y violencia. Los ratos de tranquilidad los aprovechan los combatientes para capacitarse. Una de estas interrupciones tranquilas, paz en la guerra, las utilizamos para acercarnos a los parapetos.*
>
> *Son las once y media de la mañana. Parte de los soldados descansa unos minutos; los demás vigilan las cabriolas del fusil enemigo. La tropa emplea el tiempo de reposo en leer volúmenes de la biblioteca de campaña que funciona en todas las unidades militares. Hombres jóvenes, de brazos musculosos y piel curtida por el sol, se tumban a la intemperie a repasar páginas de Historia, de buena literatura, de libros sociales. Tal es el material de enseñanza escogido por los maestros.*

[1] Datos extraídos de la dirección electrónica:
<http://www.lacruzmocha.com/guerracivil/1938/en38.htm>

—Tarea difícil la de buscar un rincón de sombra a mediodía y en el campo.

—Nunca falta una rama de chopo, indulgente con nuestro afán aprender –nos argumenta un joven combatiente.

—¿Estáis contentos?

—Ahora comprendemos la vida y el sentido de nuestra lucha.

Vigila a los muchachos un miliciano de la cultura, no con aire de dómine fiscalizador. El maestro está allí para resolver cuantos problemas le plantee el interés de los lectores. Un párrafo oscuro, un concepto que no cuaja en la mente que comenzó a cultivarse ahora. Su principal labor, después de combatir el analfabetismo, es inducir a los muchachos a estudiar; que la imaginación se interese por lo que leen en los libros.

—¿Tiene muchos alumnos?– preguntamos.

—De momento, treinta y siete. En esta brigada teníamos ciento cincuenta analfabetos. Hoy todos saben leer. Algunos, al caer muertos por las balas enemigas, expiraron con su cartilla de colegial bajo el brazo.

—¿Buenos libros en la biblioteca?

—Interesantes para los muchachos, sí. No tenemos todos los que quisiéramos.

Una prueba del interés que observan los combatientes por la cultura: de su propio sueldo ceden dinero para que la escuela compre material y libros.

—¿Alguna anécdota del tiempo que lleva usted en esta unidad?

El miliciano de la cultura queda pensativo unos momentos, y luego exclama:

—Escúchame. Hace poco hervían las tropas en el fragor de un combate. Se disputaban los centímetros de terreno con encarnizada violencia; miles de disparos por minuto rasgaban el aire, sin que los proyectiles se parasen a pensar en las tragedias que acarreaba su choque con los cuerpos humanos. Las fuerzas contrarias castigaban nuestras avanzadillas. Las posiciones leales iban a tener que ser evacuadas.

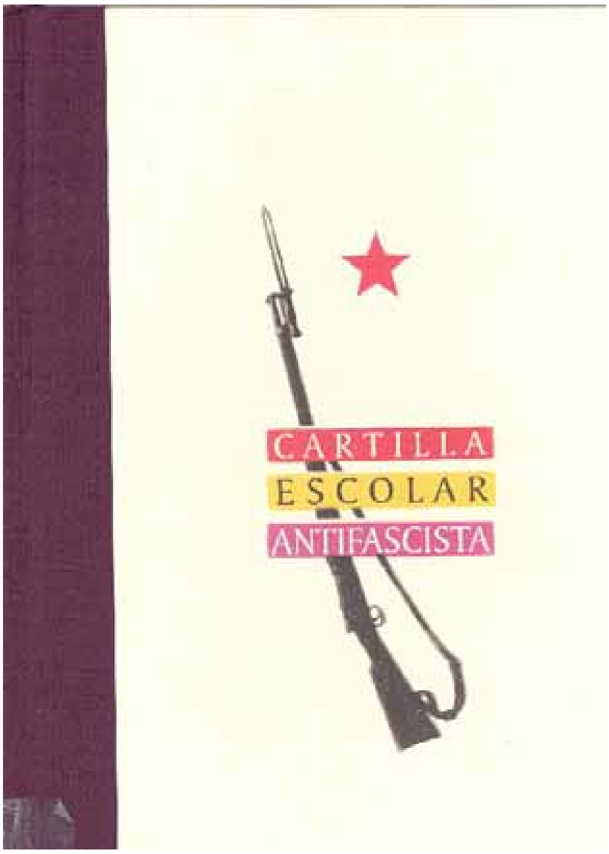
Entonces se acordaron los combatientes de que en una casa del parapeto se guardaba una biblioteca valiosa. Luego, despreciando sus vidas un grupo de soldados y un miliciano de la cultura salieron valientemente a cuerpo limpio, consiguiendo salvar del hotel un centenar de volúmenes, entre ellos un incunable y las doce novelas ejemplares de Cervantes. Mientras, los compañeros de quienes daban tan audaz golpe de mano batían al enemigo con incesante fuego de ametralladora.

Nuestro informador ha hecho el relato orgulloso del comportamiento de su compañero.

Milicias de la Cultura tiene en su seno héroes anónimos cuya labor en el Ejército injerta en la guerra civil española páginas no vividas en ningún acontecimiento sinónimo.

La cartilla escolar antifascista

La *Cartilla escolar antifascista* fue publicada en 1937 por el tipógrafo polaco Mauricio Amster[2] (1907-1980). Dicho manual, junto con la *Cartilla aritmética antifascista*, hizo posible que un millón de soldados republicanos aprendiesen a leer y a contar durante la Guerra Civil.



Portada de la Cartilla escolar antifascista (1937)

[2] Mauricio Amster nació en 1907 en Lvov (Polonia). Estudió pintura en Viena (1920) y tipografía en Berlín. Aconsejado por su amigo Mariano Rawitz viajó a España donde se sintió fascinado por la ideología de la Segunda República Española. Militó en el partido comunista y, en 1937, fue nombrado director de publicaciones del Ministerio de Instrucción Pública. Participó en la publicación de la *Cartilla escolar antifascista* y de la *Cartilla aritmética antifascista*. Después de la conquista de Barcelona por las tropas nacionales (26 de enero de 1939) Mauricio y su esposa Adina Amenedo abandonaron España pasando a Perpiñán y después a Paris. Gracias a la intervención de Pablo Neruda, cónsul especial para la emigración española por el gobierno chileno en Francia, pudieron embarcar en el *Winnipeg* que, junto a dos mil refugiados españoles, les condujo a Chile. Mauricio murió en este país el 29 de febrero de 1980.

El talante de este librito queda claro en su introducción:

Explicación e instrucciones

En esta Cartilla, editada por el Ministerio de Instrucción Pública del Frente Popular, se ha aplicado un método lógico y rápido para aprender, al mismo tiempo, a leer y escribir.

Hemos desechado el viejo y desacreditado procedimiento que comenzaba por el alfabeto, ya que las letras sueltas por sí solas nada dicen.

El método de esta Cartilla es tan sencillo, que cualquiera, con sólo saber leer, puede ponerlo en práctica y enseñar a otros. Cada ejercicio comienza con una frase, que luego se analiza y descompone en sílabas y letras. Estos elementos se utilizan después para formar nuevas palabras y frases. El instructor puede añadir a los ejemplos que ponemos todos los demás que se le ocurran.

Hemos procurado que todas las frases consignadas tengan un contenido a tono con la lucha heroica que está sosteniendo el pueblo español contra los traidores a España, aliados a los invasores extranjeros.

La lucha por la cultura del pueblo español, que la reacción mantenía en la ignorancia y el analfabetismo, va unida inseparablemente a la lucha ideológica y política contra el fascismo. El pueblo español está derrotando al fascismo con las armas en la mano. Los maestros y todos los trabajadores de la cultura deben hacer honor a este ejemplo, derrotando también al fascismo con los libros y con la pluma.

Dos páginas de la Cartilla escolar antifascista

La cartilla aritmética antifascista

Publicada en Valencia (1937) por el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, la *Cartilla aritmética antifascista* era un complemento a la *Cartilla escolar antifascista.*

Dirigida a los combatientes republicanos, la *Cartilla aritmética* pretendía alcanzar dos objetivos:

- Enseñar los rudimentos de las "cuatro reglas" (adición, sustracción, multiplicación y división).
- Imbuir los ideales y consignas políticas de la Segunda República en su lucha contra el fascismo.

Para ello, el texto se estructuraba en dos partes bien diferenciadas: la de contenido matemático (11 páginas) y la de contenido ideológico (9 páginas).

El contenido matemático

El contenido aritmético de la *Cartilla* comienza con dos páginas dedicadas a la numeración y prosigue con una sección teórico-práctica consagrada a la adición que empieza así: *SUMAR es unir varias cantidades en una sola.* Acto seguido se introducen los símbolos para la adición (+) y la igualdad (=), se consideran los siguientes ejemplos de sumas:

1 + 1 = 2 , 1 + 2 = 3 , 5 + 9 = 14 , 14 + 5 = 19 , 15 + 18 = 33 ,

y se proponen las dos definiciones siguientes:

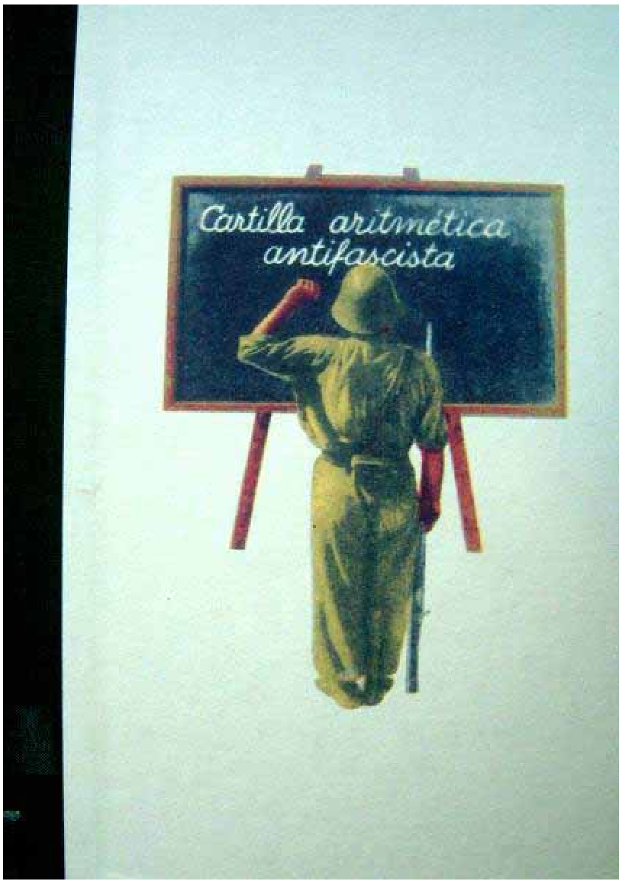
Las cantidades que se suman se llaman SUMANDOS.

El total se llama SUMA.

Por último, en la sección de EJERCICIOS se ofrecen dos recomendaciones didácticas [(1) *Hacer sumas de más de dos sumandos con las cantidades ya conocidas o con otras nuevas.* (2) *Se debe explicar por qué las cantidades que se suman deben escribirse haciendo que los números coincidan siempre en la misma columna por la derecha*] y se consideraban los ejemplos siguientes:

14 + 9 + 33 = 56 , 5 + 18 + 14 + 1 = 38 , 10 + 26 + 100 + 3 = 139 ,

102 + 107 + 23 + 1000 = 1232 , 10005 + 82 + 104 + 1150 = 11341



Portada de la Cartilla aritmética antifascista (1937)

Para explicar la sustracción se sigue un plan similar al utilizado en la adición. En primer lugar se propone la siguiente definición: *RESTAR es quitar de una cantidad otra cantidad*. A continuación se introduce el símbolo para la sustracción (–) y se estudian los siguientes ejemplos de restas:

2 – 1 = 1 , 3 – 2 = 1 , 7 – 2 = 5 , 10 – 3 = 7 , 12 – 10 = 2 , 35 – 12 = 23

Por último, en la sección de EJERCICIOS se ofrecen dos recomendaciones didácticas [(1) *Hacer restas con cantidades de más de dos cifras.* (2) *Se debe explicar cómo se procede cuando la cifra de abajo es mayor que la correspondiente de arriba*] y se consideran los ejemplos siguientes:

100 – 90 = 10 , 107 – 22 = 85 , 587 – 239 = 348 ,

235 – 96 = 139 , 1000 – 32 = 968 , 1050 – 226 = 824 , 23680 – 14352 = 9328

El apartado de la multiplicación comienza así: *MULTIPLICAR una cantidad es hacerla varias veces mayor*. Después se introduce el signo para la multiplicación (x) y se presentan las operaciones siguientes:

2 x 2 = 4 , 6 x 3 = 18 , 8 x 5 = 40 , 15 x 4 = 60

La tabla de multiplicar (tablas del 1, 2, 3, . . . , 10) ocupa la página siguiente que concluye con el consejo: *Para poder hacer operaciones de multiplicación hay que aprenderse esta tabla de memoria.*

Para acabar, se presentan algunos usos de la multiplicación [*USAMOS LA MULTIPLICACIÓN: Para hacer un número dos, tres, etc., veces mayor. Para saber el valor de varias cosas conociendo el de una. Para convertir unidades de especie superior en otras de especie inferior: duros en pesetas, años en meses, etc.*], se sugieren dos recomendaciones de carácter didáctico [(1) *Hacer multiplicaciones con números de dos o más cifras.* (2) *Hacer problemas sencillos aplicando la multiplicación en los usos indicados*], se estudian los ejemplos siguientes:

24 x 10 = 240 , 1000 x 16 = 16000 , 43105 x 319 = 13750495 ,

y se dice:

Multipliquemos nuestro esfuerzo hasta vencer al fascismo.

La parte matemática de la *Cartilla aritmética antifascista* concluye con dos páginas dedicadas a la división. La primera contiene la definición de "dividir" (*DIVIDIR una cantidad es descomponerla en varias partes iguales*), el símbolo para la división (:) y los siguientes ejemplos:

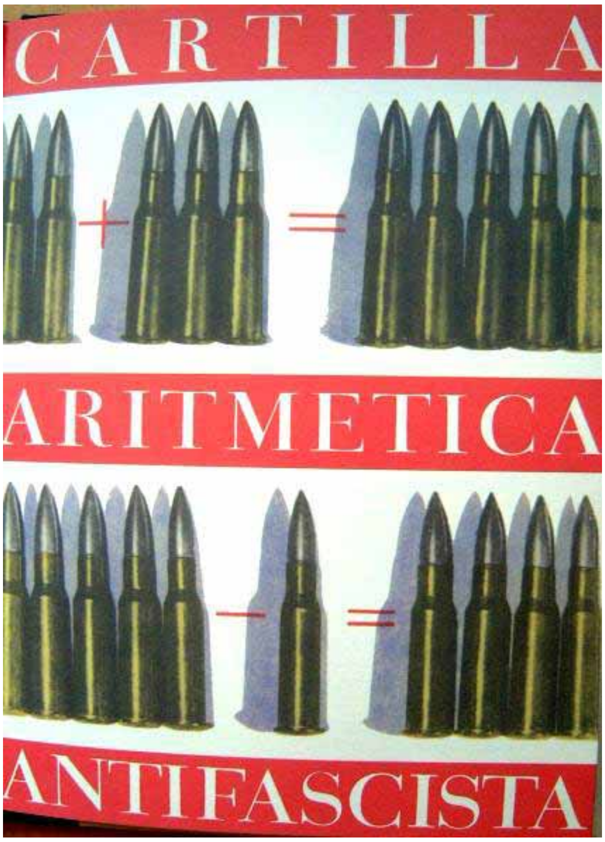
4 : 2 = 2 , 6 : 2 = 3 , 10 : 2 = 5 , 18 : 6 = 3

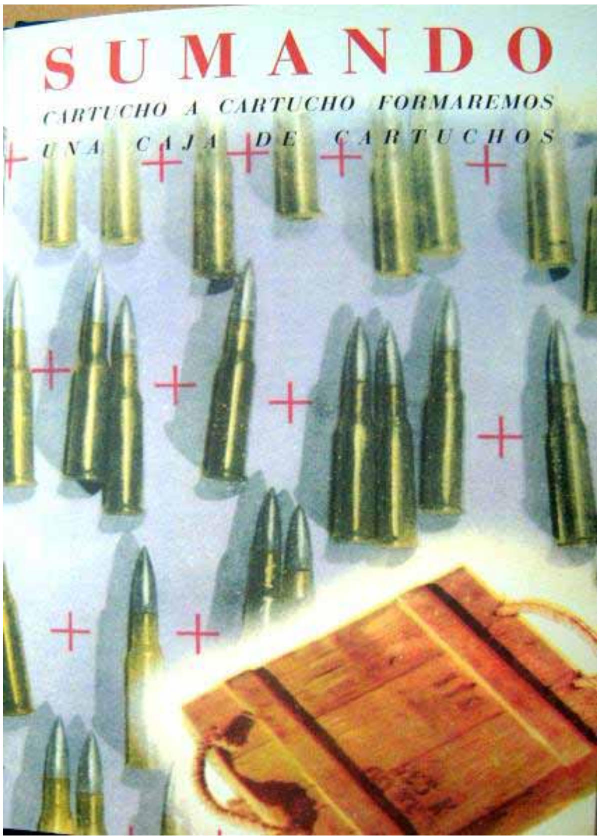
En la sección de EJERCICIOS se presentan algunos usos de la división [*USAMOS LA DIVISIÓN: Para hacer un número dos, tres, etc., veces menor. Para distribuir por igual un número de cosas entre montones, personas, etc. Para convertir unidades de especie inferior en otras de especie superior: pesetas en duros, meses en años, etc. Para averiguar el valor de una cosa sabiendo el de varias. Para averiguar el número de cosas sabiendo el valor de varias y el de una*], se sugieren tres recomendaciones de carácter didáctico [(1) *Poner problemas sencillos de dividir con cantidades de una o dos cifras.* (2) *Hacer divisiones con números de más de dos cifras.* (3) *Hacer problemas sencillos aplicando la división en los usos indicados*] y se estudian los ejemplos siguientes utilizando el algoritmo habitual de la división:

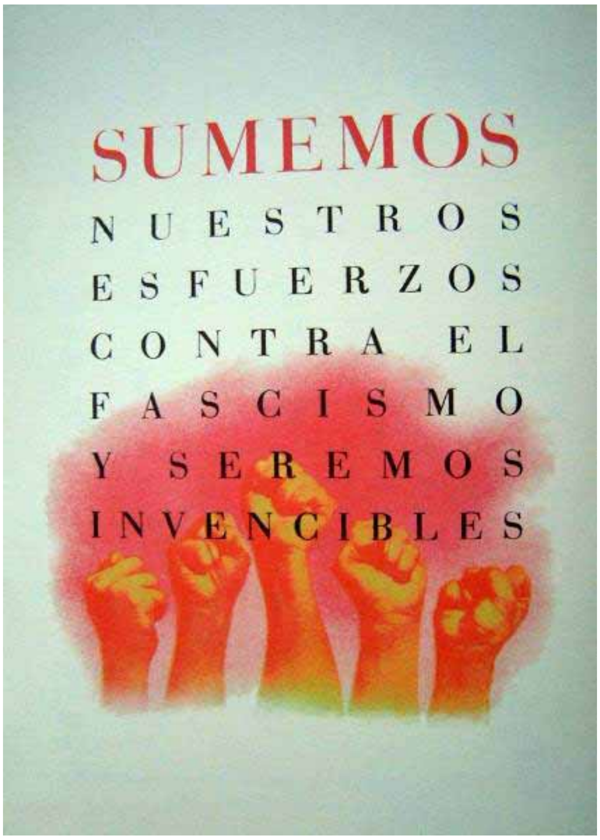
15 : 25 , 650 : 50 , 48 : 12 , 63 : 12

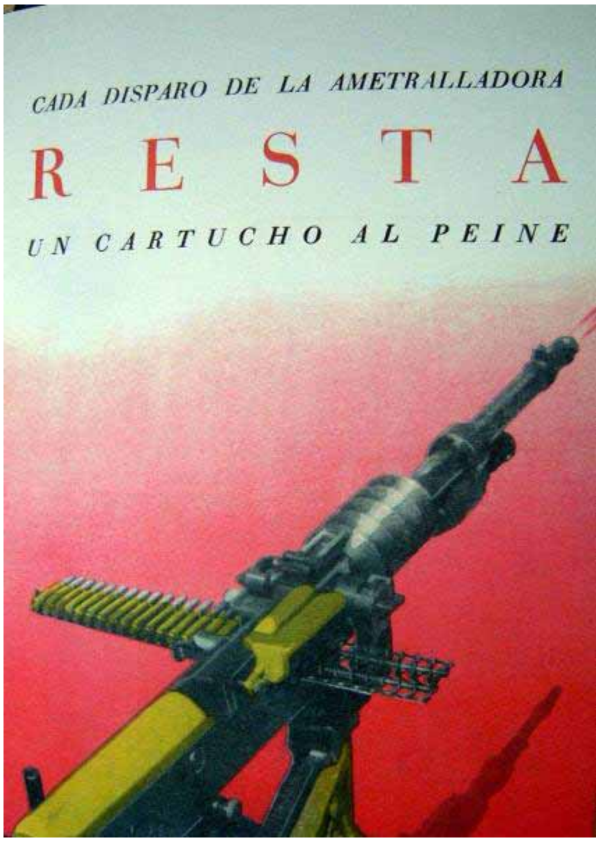
El contenido ideológico

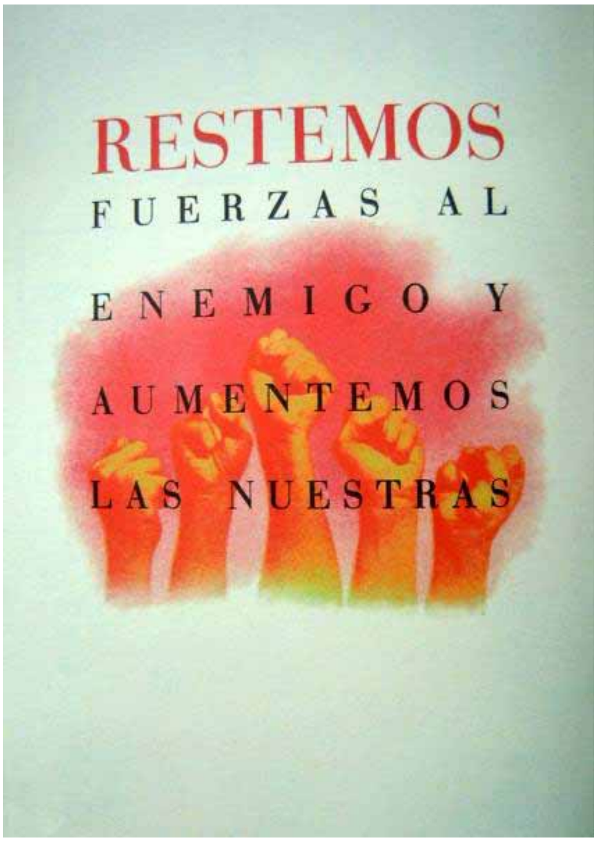
El contenido ideológico de la *Cartilla* se desarrolla en las nueve páginas que se reproducen a continuación [= 8 carteles + fragmento de un discurso de D. Manuel Azaña, Presidente de la República].


CARTILLA
ARITMETICA
ANTIFASCISTA

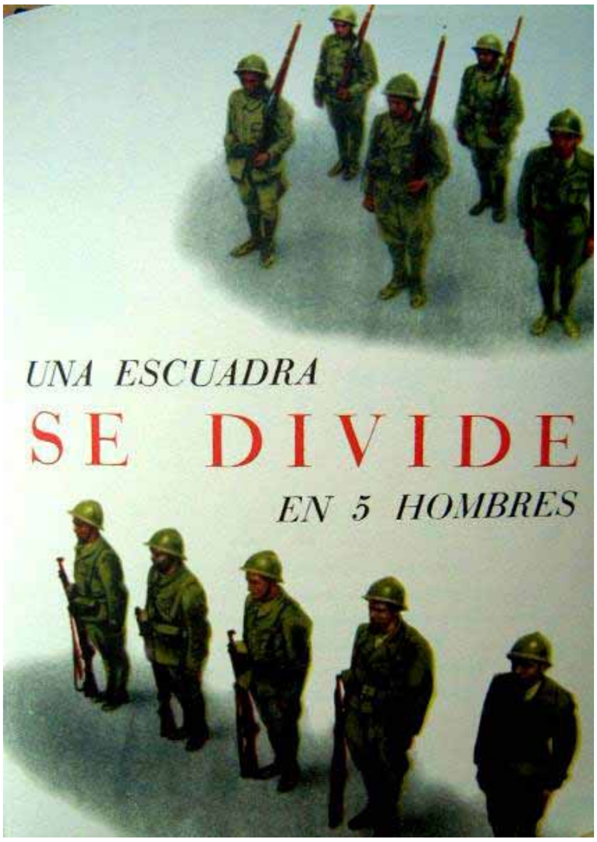

SUMANDO
CARTUCHO A CARTUCHO FORMAREMOS
UNA CAJA DE CARTUCHOS

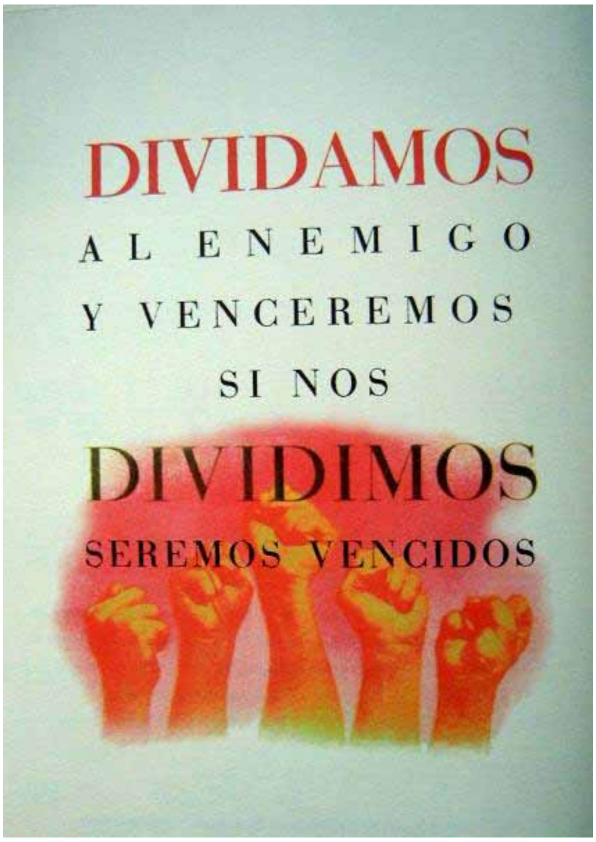

SUMEMOS
NUESTROS
ESFUERZOS
CONTRA EL
FASCISMO
Y SEREMOS
INVENCIBLES


CADA DISPARO DE LA AMETRALLADORA
RESTA
UN CARTUCHO AL PEINE


RESTEMOS
FUERZAS AL
ENEMIGO Y
AUMENTEMOS
LAS NUESTRAS


DOS CAÑONES
X2
MULTIPLICADOS
POR DOS
FORMAN UNA BATERIA


UNA ESCUADRA
SE DIVIDE
EN 5 HOMBRES


DIVIDAMOS
AL ENEMIGO
Y VENCEREMOS
SI NOS
DIVIDIMOS
SEREMOS VENCIDOS

PALABRAS DE DON MANUEL AZAÑA:

Con la victoria y la paz y el engrandecimiento de la sociedad española pondremos tan alto el nombre de España que, cuando salgamos al mundo, el apellido español será un honor difícil de alcanzar; porque entonces, los españoles podrán salir de su tierra, y, sin cólera, pero con altivez, arrojarles en la cara a los demás su papeleta: "Ahí tenéis la Libertad y la Justicia que nosotros hemos conquistado para todos".

(Del discurso pronunciado por
DON MANUEL AZAÑA.
PRESIDENTE DE LA REPUBLICA.
el 18 de Julio de 1937)

A modo de conclusión

En este artículo hemos presentado el opúsculo *Cartilla aritmética antifascista*, libro-panfleto utilizado durante la Guerra Civil Española para enseñar los rudimentos del cálculo aritmético (adición, sustracción, multiplicación y división) a los soldados republicanos. Desconocemos si en el “bando nacional” surgieron iniciativas del mismo tipo.

Desde una perspectiva histórica, creemos que la localización y el estudio de textos de enseñanza y aprendizaje de carácter heterodoxo pueden ampliar el campo de investigación en Historia de las Matemáticas en general y en Historia de la Educación Matemática en particular.

Animamos a nuestros colegas a que emprendan esta aventura y les sugerimos la siguiente línea de investigación: *Los manuales de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas durante los conflictos bélicos.*

Bibliografía

- Eugenia Núñez, C. (1992). La fuente de la riqueza. Educación y desarrollo económico en la España Contemporánea. Madrid, Alianza.
- Sin autor (1998). Cartilla aritmética antifascista (Edición facsímil). Madrid, Viamonte.

Bibliografía on line

- Analfabetismo en España durante las tres primeras décadas del siglo XX <http://www.udesa.edu.ar/departamentos/economia/publicaciones/articulos/cortes_atrevio_archivos/Nota.htm>

  <http://www.ateiamerica.com/pages/vid14g6.htm>

- Biblioteca Virtual MANES. Manuales Escolares Españoles.

  <http://www.uned.es/manesvirtual/BibliotecaManes/index.htm>

- Carteles de la Guerra Civil

  <http://www.elcantodelbuho.org/carteles/1F_cultura.html>

- Carteles Republicanos de la Guerra Civil Española

  <http://www.sbhac.net/Republica/Carteles/Main.htm>

- Labor de las Milicias de Cultura en los frentes de guerra

  http://www.filosofia.org/hem/193/var/9380815a.htm

- Mauricio Amster

  <http://www.uchilefau.cl/chiledis/local/pg/pg1.html>

- Mauricio Amster, tipógrafo, 1907-1980

  http://www.scielo.cl/pdf/arq/n49/art31.pdf

Vicente Meavilla Seguí, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza y Doctor en Filosofía y Letras (Pedagogía) por la Universidad Autónoma de Barcelona, es Catedrático de Matemáticas del IES “Francés de Aranda” de Teruel y Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
Entre sus publicaciones destacan: *Aspectos históricos de las Matemáticas elementales* (Prensas Universitarias de Zaragoza), *201 problemas resueltos de Matemática Discreta* (Prensas Universitarias de Zaragoza) y *Figuras imposibles: geometría para heterodoxos* (Proyecto Sur de Ediciones, S. L).
Sus investigaciones se centran en dos campos: (1) el estudio de la influencia de las interacciones verbales en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y (2) la utilidad de la historia de las Matemáticas como fuente de recursos didácticos.
Dpto. de Matemáticas. Universidad de Zaragoza
vmeavill@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 23 - 35
ISSN: 1815-0640

Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado

Carmen Galván Fernández

Resumen

Mostramos una forma de resolver en el aula dos cuestiones: "¿Tienen el mismo perímetro los rectángulos de la misma área?" y "Dado un cuadrado construir geométricamente rectángulos equivalentes" Este proceso nos conduce hacia la resolución geométrica de ecuaciones de segundo grado.
El uso de un programa de geometría interactivo facilita las construcciones, la visualización y la generación de nuevas ideas.

Abstract

We show a way to solve in classroom two questions: "Have equivalent rectangles the same perimeter?" and "Given a square to make geometric construction of equivalent rectangles". This process guides us to solve quadratic equations through geometric method.
The use of an interactive geometry program facilitates constructions, visualisation and generation of new ideas.

Introducción

Con este trabajo continuamos "Cuadratura de polígonos", artículo que fue publicado en el nº 1 de esta revista. En él hicimos la propuesta del estudio de dos cuestiones:

- ¿Es igual el perímetro de todos los rectángulos que tienen igual área?
- Dado un cuadrado, construir geométricamente rectángulos equivalentes

Nuestro propósito, en principio, sólo fue transmitir la forma que nos parecía adecuada para resolverlas en el aula. Pero en el camino fueron saliendo a la luz relaciones entre contenidos matemáticos que nunca antes habíamos sospechado, que despertaron nuestro interés por seguir aprendiendo: la determinación de un rectángulo concreto entre los infinitos que tienen igual área se hace posible al fijar su perímetro; es decir, nos tropezamos sin querer con una ecuación de segundo grado (conocemos el producto y la suma de dos números, ¿cuáles son estos?). Teníamos ante nuestra vista la solución geométrica y no íbamos a pasar por ella sin mirarla…Con su estudio completaremos el trabajo.

Así que, a partir de la resolución del problema de encontrar el cuadrado equivalente a un polígono, hemos llegado al estudio de la resolución de ecuaciones de segundo grado desde la geometría. Pensamos que este proceso podría utilizarse en la enseñanza como un ejemplo donde uno de los principales objetivos fuera mostrar vías de comunicación natural entre la geometría, el análisis y el álgebra, que ayuden a una mejor comprensión de las matemáticas.

Las actividades podrían trabajarse con alumnos de catorce a dieciséis años, preferiblemente en un aula donde cada uno pueda disponer de un ordenador. Mejor, quizás, con grupos reducidos. El momento más adecuado podría ser como continuación de las actividades resueltas en el trabajo anterior, “Cuadratura de polígonos”, o como ampliación en el estudio de ecuaciones de 2º grado.

La utilización de un programa de geometría interactivo se hará indispensable para que estos ejercicios se puedan efectuar con la garantía de buena acogida y comprensión por parte de los alumnos. Nosotros hemos recurrido a GEUP (www.geup.net). Desde nuestro punto de vista, además de facilitar la construcción y la visualización, el uso de programas de este tipo ayuda a que podamos ofrecer en nuestra enseñanza una visión más rica, más bella, más real de las matemáticas.

Variación del perímetro de los rectángulos de igual área

Una sencilla pregunta puede abrir el debate: ¿Tienen el mismo perímetro todos los rectángulos cuya área es 12 u^2? Es normal que se escuchen voces: -¡Claro que sí! Si tienen igual área tendrán el mismo perímetro! - Hay que demostrarlo. Diremos. Bastará un solo ejemplo para aceptar la verdad: un rectángulo de 3 x 4 tiene menor perímetro que uno de 2 x 6… Pero vamos a profundizar un poco. *Estudiaremos cómo varía el perímetro de los rectángulos de igual área si varía su base x*.

Utilizaremos la gráfica de la función *y* = *A* / x

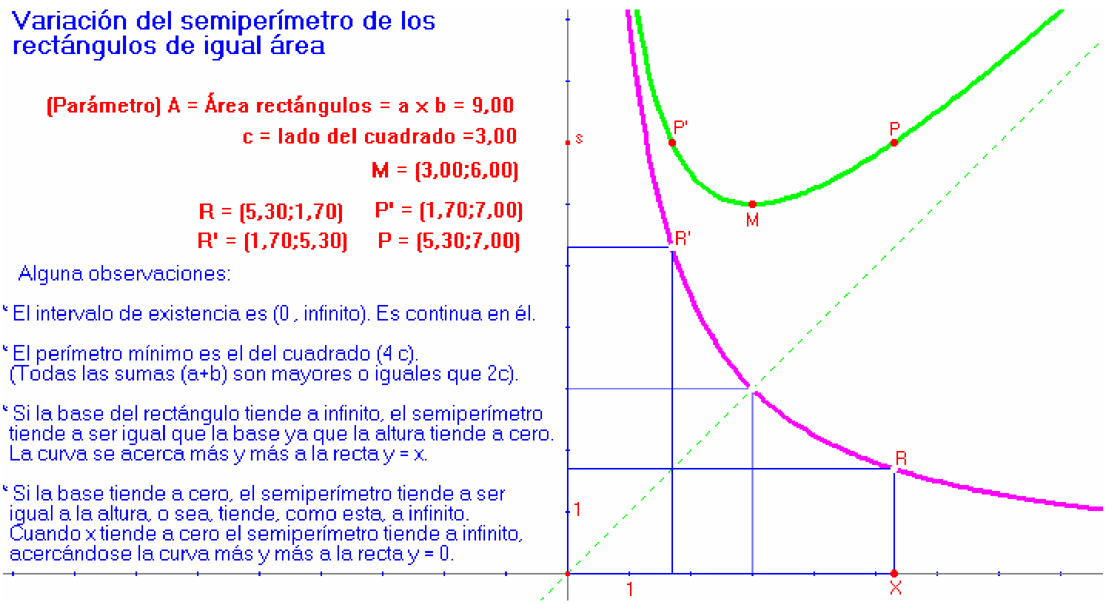


Fig.1

Esta gráfica nos proporciona una cómoda visualización de los rectángulos que son equivalentes entre sí: cada punto de ella tiene por coordenadas la base (*x*) y la altura (*y*) de un rectángulo cuya área es la misma (*A*). Tenemos cada rectángulo ante nuestra vista y será fácil fijar la atención en su perímetro. Calcularemos sólo la mitad, la suma de la base y la altura (*x + y*), y a esta suma la llamaremos "semiperímetro" (*s*). En los mismos ejes donde tenemos la gráfica de *y = A / x* iremos representando, punto a punto, la gráfica de la función *s = x + A / x.*

Debemos dejar que los alumnos trabajen solos, que observen y extraigan sus propias conclusiones.

Finalmente, entre todos, iremos escribiendo resultados del análisis de esta variación, procurando relacionar en cada momento el lenguaje de la gráfica con el algebraico y con el geométrico.

Podemos atender al intervalo de existencia, a la continuidad, al crecimiento y decrecimiento, a las asíntotas, al punto donde se presenta el mínimo…, pero para no aburrirnos sólo nos vamos a detener ahora en una de estas observaciones:

Nos encontramos, quizás por primera vez, ante una función que presenta una asíntota oblicua. Es un buen momento para iniciar su estudio porque el apoyo de la geometría, la realidad visual, ayudará a entender el concepto. Se comprende con facilidad que cuando la base tiende a infinito la altura tiende a cero y, en consecuencia, el semiperímetro tiende a ser igual que la base. Algebraicamente, Si $x \to \infty$, el semiperímetro *(s = x + A / x)* tiende hacia el mismo infinito al que tiende x, ya que el cociente *A / x* tiende a cero. Observamos cómo la gráfica se acerca más y más a la recta *y = x*. El alumno empezará a familiarizarse con este tipo de comportamientos y estará mejor dispuesto a realizar, cuando llegue el momento, un estudio general y sistemático. De igual forma podemos entender que la curva se acerque cada vez más al eje vertical cuando x tiende a cero.

Todo esto se puede hacer, para un caso concreto, con papel y lápiz y en la pizarra. Pero es mejor utilizar el ordenador. En la Fig.1 podemos observar la construcción realizada con GEUP. Es importante que el alumno realice las construcciones, no dárselas hechas, porque éstas constituyen por sí mismas un ejercicio matemático. (En el Anexo explicamos los pasos fundamentales de esta construcción).

El programa, además de garantizarnos la facilidad en la construcción de las figuras, ***permite tratar de forma general el problema:*** con una sola construcción podemos disponer de las gráficas correspondientes a cualquier valor del área y ***ayuda enormemente a la visualización:*** si movemos el punto X sobre el eje de abscisas, observaremos el rectángulo que corresponde a cada uno de estos puntos y, a la vez, los correspondientes puntos R y P moviéndose, R sobre su curva la gráfica de *y = A / x*, y P sobre la gráfica de la función *s = x + A / x.* También, a la inversa, podemos mover los puntos R o P sobre sus lugares geométricos y observar los rectángulos que corresponden a cada posición. Podemos ir siguiendo así, continuamente, la variación del perímetro cuando varía la base del rectángulo.

Creemos que todo ello favorece la comprensión y la generación de nuevas ideas, tanto en los alumnos como en el profesor. Nos ha hecho pensar, por ejemplo, que podemos atraer con mayor facilidad la atención hacia el comportamiento de la función en relación con las asíntotas, como hemos explicado anteriormente, o, como veremos después, hacia la resolución gráfica de algunas ecuaciones de 2º grado…

Rectángulos equivalentes a un cuadrado

¿Cómo habíamos construido el cuadrado equivalente a un rectángulo dado?

En la figura siguiente (Fig. 2) recordamos los pasos fundamentales:

Primero observamos la equivalencia entre el rectángulo de dimensiones *a* y *b* y la diferencia de los cuadrados de lados *(a + b) /2* y *(a – b) /2*:

$$a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Después, el Teorema de Pitágoras nos dará el cuadrado equivalente a la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado de uno de los catetos del correspondiente triángulo rectángulo.

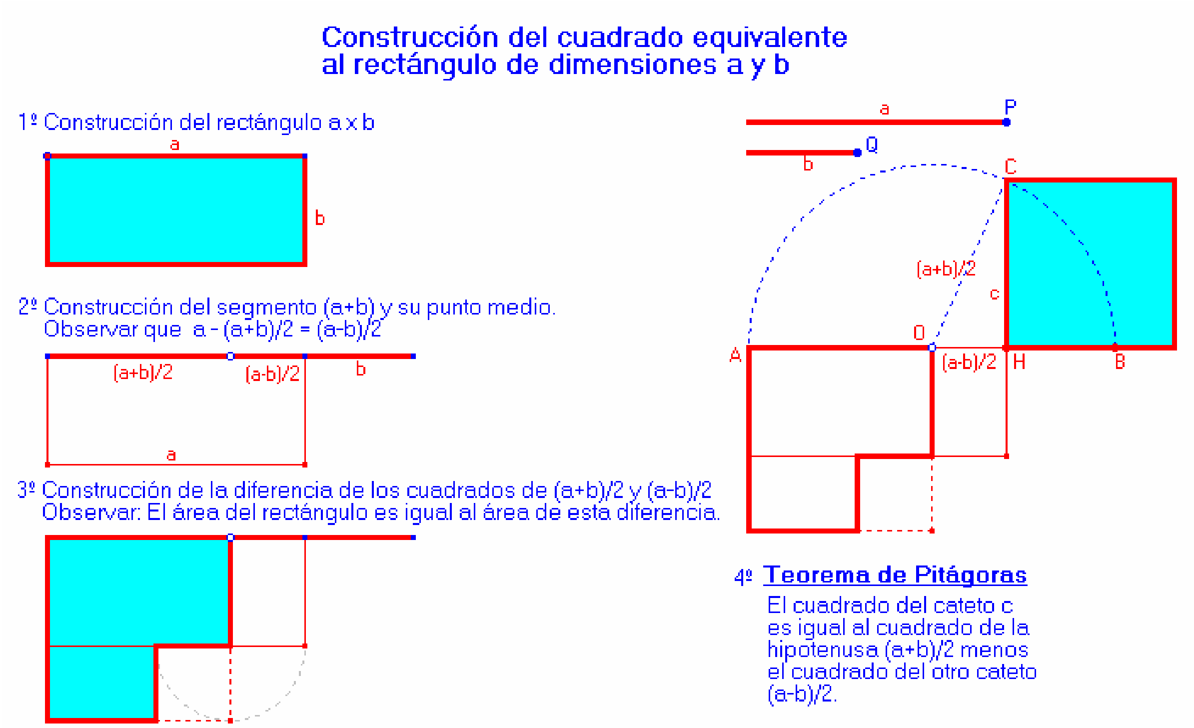


Fig.2

Nos detenemos un poco a observar la secuencia de figuras equivalentes: rectángulo – diferencia de cuadrados – cuadrado.

Es importante advertir que el diámetro de la circunferencia es la suma de la dimensiones del rectángulo, AB = $a + b$, donde a = AH y b = HB. Podemos reconocer también el Teorema de la Altura: en el triángulo rectángulo ABC, la altura c correspondiente a la hipotenusa AB es media proporcional entre a y b: c/a = b/c.

Pero resolver el problema inverso es lo que ahora nos interesa: ***Dado un cuadrado, queremos encontrar rectángulos equivalentes a él.***

En el aula optamos por dar al alumno la oportunidad de actuar, de pensar por sí mismo. Nuestra labor será intentar facilitar el razonamiento, hacer preguntas o reflexiones que puedan preparar la mente para el descubrimiento. Podemos ir poco a poco haciendo la clase, dialogando con nuestros alumnos:

Supongamos un cuadrado de 9 u^2 de área. Dibujémoslo. Sabemos que numéricamente es fácil encontrar todos los rectángulos equivalentes a él, de base x y altura y, a través de la función $y = 9 / x$, pero se trata de encontrar, partiendo del segmento que es el lado del cuadrado, los segmentos que serán la base y la altura de los rectángulos de forma puramente geométrica, utilizando adecuadamente una regla sin graduar y un compás. Volvamos la vista atrás y analicemos la construcción de la figura 2. Ahora tenemos que conseguir la secuencia inversa: cuadrado – diferencia de cuadrados – rectángulo.

Cada alumno ha de intentarlo, debe construir, a partir del cuadrado dibujado, una diferencia de cuadrados equivalente y el correspondiente rectángulo. Dejémosles actuar…Finalmente, cada uno (o más de uno) habrá podido conseguir un rectángulo diferente…¡Todos son válidos!

Concluimos: el problema estará resuelto desde que nos demos cuenta de que ***la clave está en el Teorema de Pitágoras*** y que el lado del cuadrado, que es uno de los catetos de un triángulo rectángulo, puede permanecer invariable para diferentes e infinitos triángulos rectángulos CHO, que podemos conseguir dejando fijo CH y moviendo el punto O a través de la horizontal (Fig. 3). ***Observamos que podemos prescindir de la construcción de la diferencia de los cuadrados*** $[(a + b)/2]^2 - [(a - b)/2]^2$ ***porque las dimensiones del rectángulo están ya determinadas: son los segmentos AH = a y BH = b.***

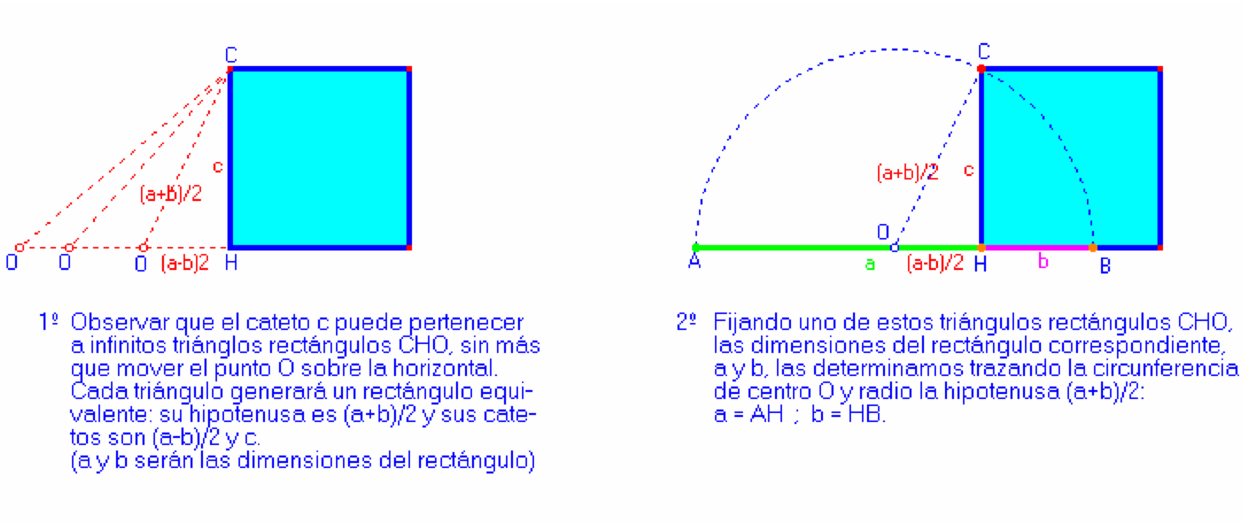


Fig.3

Nos damos cuenta de que al mover el punto O sobre la horizontal, varía con él la circunferencia de diámetro *a* + *b* (la mitad del perímetro de cada rectángulo) y se van generando los correspondientes distintos rectángulos de dimensiones *a* y *b*. Se ve con claridad: ***cada rectángulo queda determinado por su área y por su perímetro***.

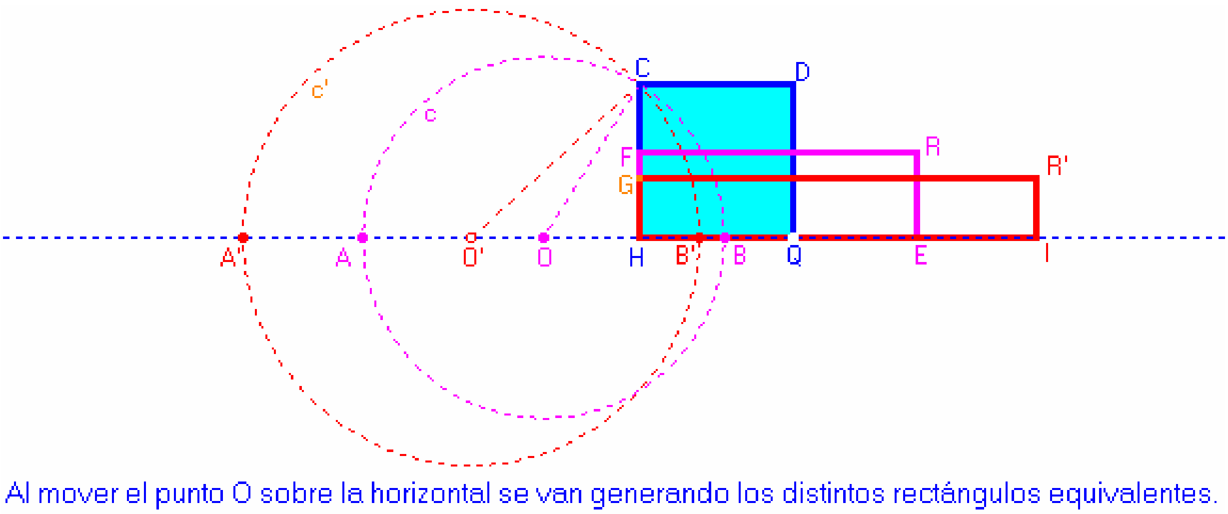


Fig. 4

En la figura anterior (Fig. 4) podemos ver dos de los infinitos rectángulos equivalentes al cuadrado CDHQ: el rectángulo ERFH correspondiente al punto O y a la circunferencia c y el rectángulo IR'GH que corresponde al punto O' y a la circunferencia c'.

Ecuaciones de 2º grado

Y fue entonces, en este proceso de formación de rectángulos de igual área, cuando llegamos a darnos cuenta de que teníamos ante nuestra vista la solución geométrica de una ecuación de 2º grado: "Cada rectángulo queda determinado por su área y su perímetro" - "Dos números *a* y *b* están determinados por su producto y su suma".

Fue entonces cuando pudimos comprender algo de cómo, según los historiadores, hace alrededor de 4000 años, los babilonios habían utilizado la identidad: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a\cdot b$ en la resolución de sus ecuaciones cuadráticas…

El clásico y sencillo ejercicio de planteo de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas que da origen a una ecuación de segundo grado, tantas veces propuesto para resolver de forma algebraica en nuestras clases, se nos mostraba ahora con nuevas e interesantes posibilidades didácticas… Veámoslo de forma general:

"Hallar dos números sabiendo que su suma es s y su producto es p".

Si los números desconocidos son x e y, el sistema x + y = *s* ; x · y = *p* conduce a la ecuación $x^2 - s\,x + p = 0$, que puede tener dos raíces reales: *a* y *b.*

Es evidente que el problema geométrico: **"*Encontrar las dimensiones del rectángulo conocidos su perímetro y su área*"** exige que, en la ecuación obtenida, los números *s* y *p* sean positivos, así como tienen que ser positivas las dos raíces. Pero vamos a analizar todas las posibilidades, según el signo de las raíces, para una ecuación de segundo grado completa cuyo coeficiente de x^2 sea la unidad y con *s* y *p* positivos:

1. a y b positivas: (x – a) (x – b) = 0; x2 – (a + b) x + a b = 0; x2 – s x + p = 0
2. a y b negativas: (x + a) (x + b) = 0; x2 + (a + b) x + a b = 0; x2 + s x + p = 0
3. a y b de distinto signo, (a > 0): (x – a) (x + b) = 0; x2 + (b – a) x – a b = 0, que da origen a dos ecuaciones distintas, según sea el signo de la diferencia (b–a)=d:

$|b|\rangle|a| \Leftrightarrow$ x2 + d x – p = 0 la raíz de mayor valor absoluto es negativa.

$|b|\langle|a| \Leftrightarrow$ x2 – d x – p = 0 la raíz de menor valor absoluto es negativa.

Para la resolución geométrica es fundamental distinguir qué nos indica el coeficiente de x, es decir, saber si el dato conocido es la suma (*a* + *b*) = *s* o la diferencia (*b* – *a*) = *d*. Recordemos que la determinación de *a* y *b*, geométricamente, la debemos a la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de hipotenusa *(a + b) / 2* y catetos raíz cuadrada de (*a b*) y *(a – b) / 2* o (b – a) / 2. Es evidente que el signo de las raíces no lo vamos a obtener geométricamente, sino que lo debemos asignar nosotros según sea el caso que estemos resolviendo.

En las **ecuaciones de los casos 1 y 2 (** $x^2 \pm s\,x + p = 0$ **)** los datos son *s* y *p*, o sea, disponemos de dos segmentos, la hipotenusa $\frac{s}{2} = \frac{a+b}{2}$ y el cateto $\sqrt{p} = c$. Tendremos que hallar el segmento que será el otro cateto $\frac{a-b}{2}$ para tener resuelta la ecuación.

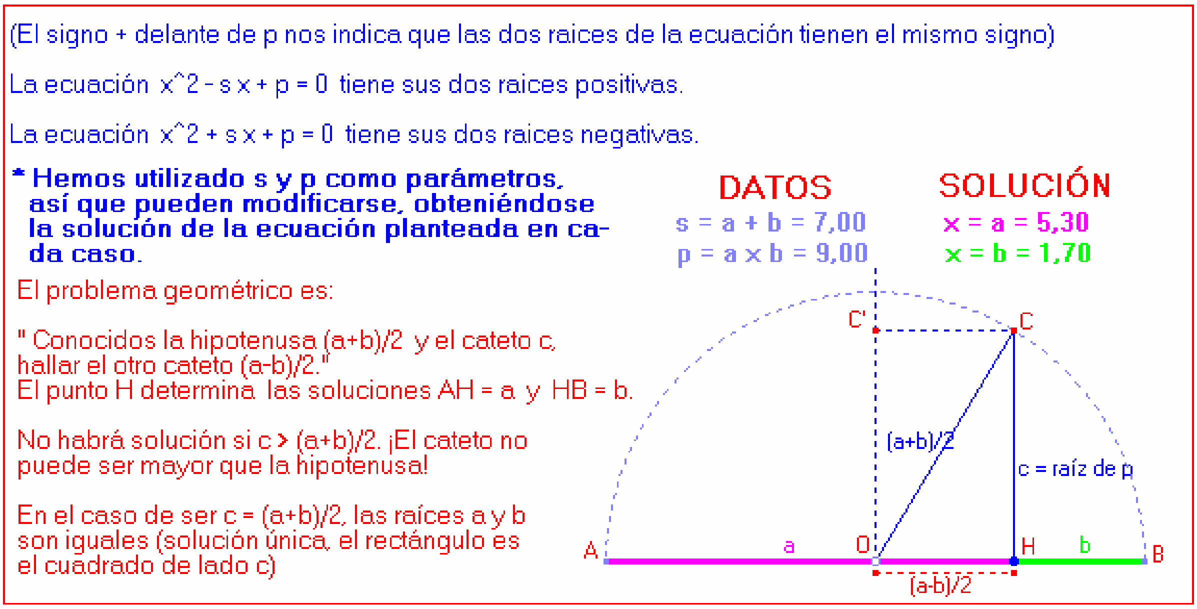


Fig.5

En la Fig. 5 observamos la construcción realizada con GEUP: Trazamos la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AB = (a + b) = s. Sobre la perpendicular a AB en su punto medio O, marcamos el segmento OC' = lado del cuadrado cuya área es p. Al trazar la paralela a AB por C' obtenemos el punto C como intersección de ésta con la circunferencia. Con lo cual determinamos el segmento C'C = OH = cateto (a – b) / 2, que es el que queríamos encontrar.

- ¡Qué sencilla y bella la discusión geométrica de la ecuación!:

El cateto c, lado del cuadrado, no puede ser mayor que la hipotenusa (a+b)/2.

Para que la ecuación $x^2 – sx + p = 0$ tenga solución tiene que cumplirse: $\frac{s}{2} \geq \sqrt{p}$.

O lo que es igual: $s^2 \geq 4p$. Lo cual concuerda con la discusión desde el punto de vista algebraico (el discriminante de esta ecuación es $\Delta = s^2 - 4p$).

Si la hipotenusa es mayor que el cateto ($\frac{s}{2} \rangle \sqrt{p}$), la ecuación tiene dos soluciones *a* y *b,* que son las dimensiones del rectángulo equivalente al cuadrado de área *p.*

Si la hipotenusa es igual que el cateto ($\frac{s}{2} = \sqrt{\mathrm{p}}$), la ecuación tiene una sola solución, el único rectángulo posible es el cuadrado de área *p.*

- No podemos resistir, en este momento, la tentación de conectar con las funciones. ¡También disponemos del recurso gráfico para discutir y resolver la ecuación…! Observando las gráficas de la Fig.1, fijémonos en el detalle: todas las sumas posibles (a + b) son mayores o iguales que 2c (c = lado del cuadrado, que es el rectángulo de perímetro mínimo). Veamos que las coordenadas de los puntos R y R’, que son las dimensiones de los rectángulos de área 9 y perímetro 7 (los vemos dibujados) corresponden a las dos soluciones a = 5,30 y b = 1,70 (o viceversa) de la ecuación $x^2 - 7x + 9 = 0$, que es la resuelta geométricamente en la Fig. 5. Con las gráficas de las funciones de la Fig.1 podemos obtener las soluciones correspondientes a las ecuaciones $x^2 \pm s\,x + 9 = 0$.

Será interesante proponer ahora una nueva investigación:

“*¿Cómo varía el área de los rectángulos de igual perímetro?”*…

- Veamos que ¡es posible llegar a la fórmula $x = \dfrac{\mathrm{s} \pm \sqrt{\mathrm{s}^2 - 4p}}{2}$ para resolver la ecuación $x^2 - sx + p = 0$ desde la geometría!:

Observemos la Fig.5:

Una raíz es el segmento (suma) $a = \dfrac{\mathrm{a+b}}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ y la otra es el segmento (diferencia) $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$ Después, el teorema de Pitágoras para hallar $\dfrac{a-b}{2}$ y su expresión en función de *s* y *p*:

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

De pronto, esta fórmula, que siempre habíamos considerado sólo como el resultado de una serie impecable de piruetas algebraicas que nos permitía despejar la incógnita como por arte de magia, se nos presenta ahora, bajo la luz de la geometría, con una claridad y una armonía perfectas, mostrándonos su belleza.

Sólo nos queda resolver **las ecuaciones en el caso 3**, cuando las raíces son de distinto signo ($x^2 \pm d\,x - p = 0$). En ellas los datos son *d* y *p*. Disponemos de los dos catetos $\frac{d}{2} = \frac{a-b}{2}$ y $\sqrt{p} = c$. Tenemos que encontrar el segmento $\frac{a+b}{2}$, hipotenusa del triángulo rectángulo, para tener resuelta la ecuación.

Es evidente que estas ecuaciones siempre tienen solución.

Podemos ver la construcción geométrica en la siguiente Fig. 6. El programa permite introducir los valores de *d* y *p* como parámetros. Podemos variar sus valores y obtener, de inmediato, la construcción y la solución correspondiente a la ecuación planteada en cada caso En la figura aparece la solución de las ecuaciones $x^2 \pm 3x - 10 = 0$.

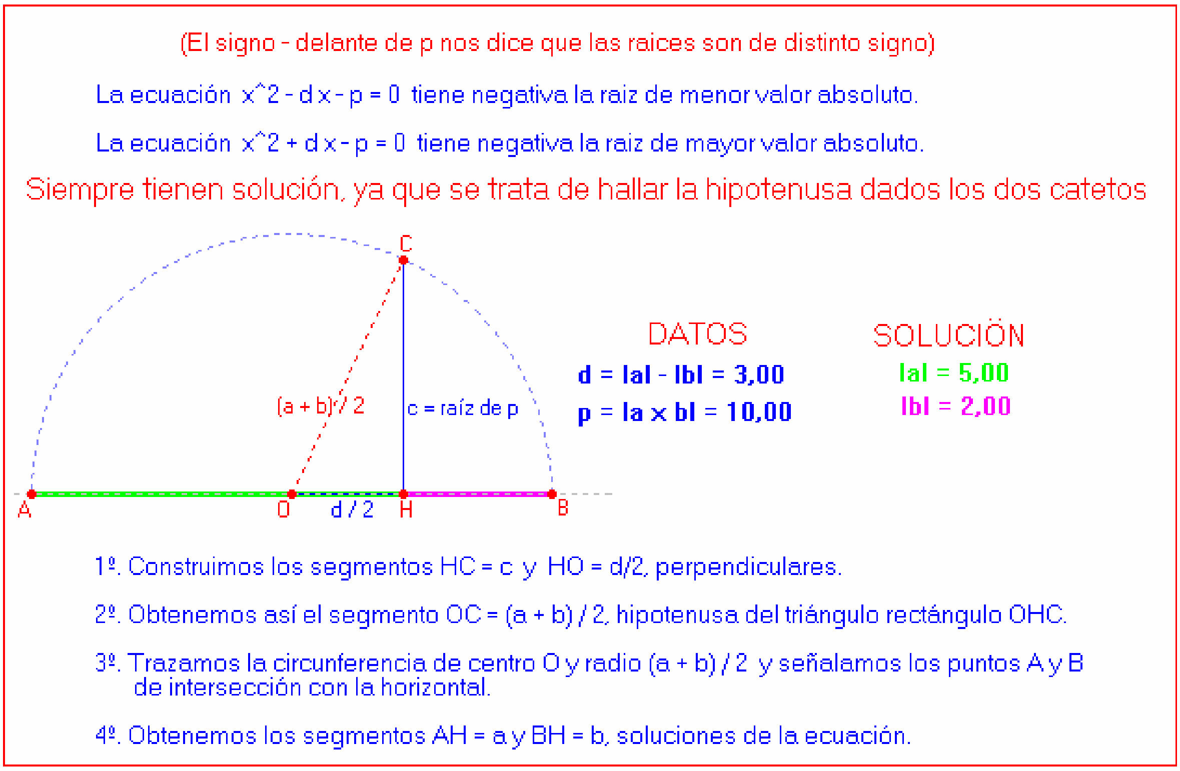


Fig.6.

Conclusión

Muchas sorpresas nos hemos encontrado:

Cuando comenzamos el estudio de la cuadratura de polígonos, nunca pensamos que nos iba a conducir a la ecuación de segundo grado. En principio, no parecía tener nada que ver una cosa con la otra. ¡Cuánta magia encerrada dentro de la fórmula fundamental $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b$!Cada vez le encontramos más utilidad al Teorema de Pitágoras…

A lo largo de los siglos, números y figuras han caminado unidos ayudando así a la construcción del edificio matemático. Quizás en nuestra enseñanza deberíamos intentar no separarlos demasiado, porque pensamos que unidos nos ayudan a comprender, a profundizar y a avanzar en el conocimiento.

Anexo

Construcción de la Figura 1

Nuestro objetivo es poder observar la variación del perímetro de los rectángulos de igual área aprovechando la posibilidad que nos ofrece el programa de reunir en la construcción el aspecto geométrico, el numérico y el gráfico y, lo que es muy importante, tratar el problema de manera general.

Tratar de forma general el problema significa, por una parte, que lo podamos tener resuelto para cualquier valor del área y, por otra, que para un valor concreto del área podamos disponer de todos los correspondientes rectángulos equivalentes y poderlos visualizar.

Mostraremos dos formas de construcción del problema (Construcción 1 y Construcción 2) que son esencialmente distintas.

La que aparece en el texto como Fig. 1 corresponde a la Construcción 1.

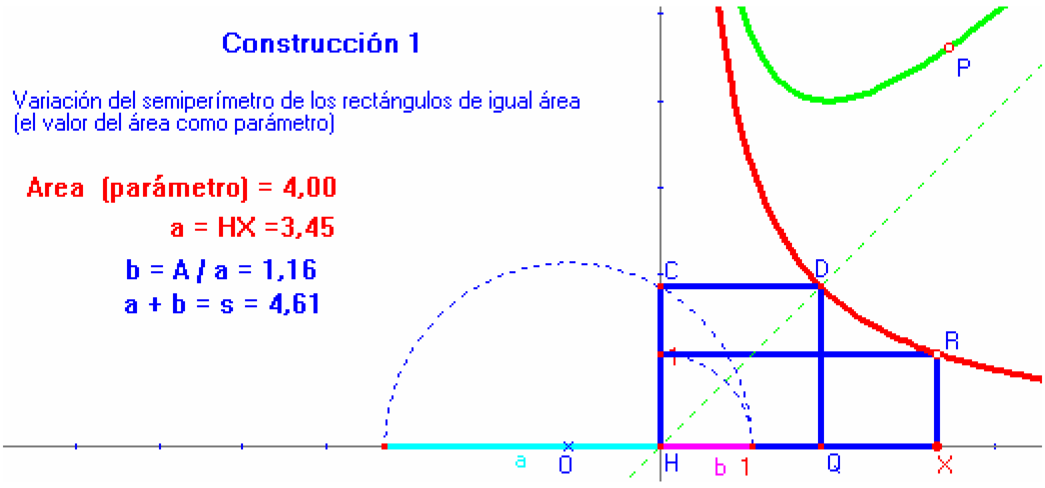


Fig.7

1. En esta construcción (Fig. 7) la generalización en el valor del área la hemos conseguido utilizando su valor como un parámetro que se puede modificar,

sobre el cual el programa basará sus posteriores cálculos. Para otro valor diferente que nos interese nos proporcionará la construcción final correspondiente.

2. Para un determinado valor del área (en la figura anterior es Área = 4), los diferentes rectángulos equivalentes se irán generando al mover el punto X (en la figura aparece en rojo) sobre el semieje horizontal positivo. Cada posición de X nos da el valor de la base (HX = a) y, para cada valor de ésta, el correspondiente valor de la altura lo conseguimos utilizando la función y = A / x, esto es: el programa calculará el valor de la altura (y) para cada valor de la base (x) a través de esta fórmula. Construimos el rectángulo que corresponde a una posición de X (el que aparece en la figura es de base a = 3´45 y altura b = 1´16) y esta construcción quedará ligada a este punto, pudiéndose visualizar la variación de los rectángulos al variar X, que era lo que pretendíamos.
3. El punto P es el de coordenadas (x , x + A / x), así que el movimiento de X producirá el movimiento de los puntos R y P. Las gráficas de las funciones y = A / x y s = x + A / x son, respectivamente, los lugares geométricos de los puntos R y P cuando se mueve X.
4. El cuadrado equivalente a los rectángulos se ha construido geométricamente con la intención de poder observar que permanece estable al variar X, además de corresponder al perímetro mínimo. El cuadrado cambiará cuando cambie el valor del área.

<u>Construcción 2</u>

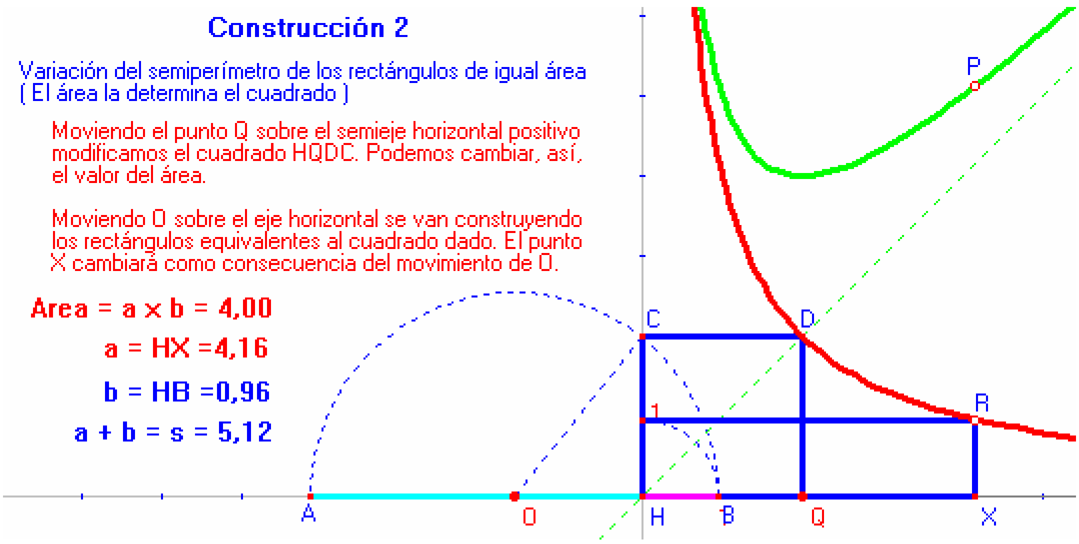


Fig.8

1. En esta construcción (Fig.8), la variación del área la conseguimos cambiando el cuadrado, es decir, hemos construido un cuadrado de lado variable. Moviendo el punto Q sobre el semieje horizontal positivo irán formándose diferentes cuadrados QHCD, que determinarán el valor del área A.
2. Para un cuadrado fijo (un valor de A), se irán generando los correspondientes rectángulos equivalentes a través del movimiento del puno O sobre el eje

horizontal (construcción geométrica). El punto X variará como consecuencia del movimiento O.

3. Las gráficas de las funciones se consiguen como lugar geométrico de los puntos R y P cuando se mueve O.

¿Por cuál de las dos construcciones nos decidimos?

a) En la Construcción 1 controlamos numéricamente el valor del área, podemos darle el valor exacto que nos interese y se podrá observar el cambio de las figuras correspondientes cuando cambiamos cada valor. En la Construcción 2, sin embargo, la visualización del cambio de las figuras se puede seguir "de forma continua" a la vez que movemos el punto Q, pero perdemos precisión en el valor numérico del área, si nos interesara.

b) En la Construcción 1 se ha hecho uso de la función y = A/x para la construcción de los rectángulos equivalentes y después, a partir de ellos, se ha realizado la construcción del cuadrado correspondiente; estas construcciones dependerán de X. En la Construcción 2 se hace la construcción geométrica de los rectángulos equivalentes a un cuadrado dado, estando el punto X condicionado al movimiento de O.

Ambas construcciones se complementan y constituyen, desde nuestro punto de vista, un eficaz ejercicio matemático.

Bibliografía

- Courant, R. y Robbins, H. (1971): ¿Qué es la matemática? Aguilar, Madrid.
- Eves, Howard. (1969): Estudio de las geometrías. Uteha, Méjico.
- Rey pastor, J. y Babini, J. (1986): Historia de las matemáticas. Gedisa, Barcelona.
- Ríbnikov, K. (1987): Historia de las matemáticas. Mir, Moscú.

Carmen Galván ha sido profesora de educación secundaria en varios centros de la isla de Tenerife (Canarias, España). Tiene varias publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.
e-mail: carmen@geup.net

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 37 - 47
ISSN: 1815-0640

¿Qué tiempo va a hacer?

Mikel Lezaun

Resumen

¿Qué tiempo va a hacer? Desde la más remota antigüedad, el hombre ha intentado predecir el tiempo atmosférico, para tratar de librarse de sus efectos perniciosos o aprovecharse de sus beneficios. Actualmente, para predecir el tiempo se utilizan ordenadores superpotentes a los que hay que proporcionar un gran número de medidas, muchas leyes de la mecánica y de la física y, también, muchas matemáticas, a veces muy recientes. En este artículo se hace una introducción histórica de la meteorología, y se presentan los principios fundamentales de la predicción numérica del tiempo que realizan los distintos servicios meteorológicos. Se termina el artículo analizando la cuestión de hasta qué plazo es posible predecir el tiempo y con las predicciones climáticas.

Abstract

What's the weather going to be like? Ever since the most ancient times, people have tried to predict the weather so as to protect themselves from its inclemencies or make the most of its beneficial effects. Super-computers are now used in forecasting: they need to be provided with enormous numbers of measurements, many laws of mechanics and physics and a great deal of mathematics, some of it very recent. This article presents a historical introduction to meteorology, covering the basic principles of numerical weather forecasting used by various meteorological services. The article ends with an analysis of how far in advance the weather can be predicted, and looks at climate predictions.

1.- Notas históricas

En su acepción más sencilla e inmediata, la meteorología es la ciencia que trata de los meteoros, vocablo de etimología griega que significa alto o elevado en el aire. A Aristóteles (384-322 a.C.) y su libro *Meteorológica* se debe la consideración de la meteorología como parte de la filosofía natural. Aristóteles fue prácticamente la única autoridad en meteorología teórica hasta René Descartes (1596-1650), que con su apéndice al *Discurso del Método* titulado *Les Météores*, dio un nuevo impulso al estudio teórico de la meteorología.

En siglo XVII, E. Torricelli (1608-1647) inventó el barómetro para medir la presión, G. Galileo (1564-1642) puso a punto el termómetro para medir la temperatura, y se inventaron aparatos para medir la humedad y la fuerza y dirección del viento. Estos logros tecnológicos supusieron un enorme avance pues permitieron saltar desde una meteorología cualitativa a una meteorología cuantitativa. Para la utilización universal de los datos meteorológicos recogidos, fue necesario realizar un largo proceso de estandarización de los protocolos de medida, de las escalas, de los registros y difusión de los datos, proceso que culminó a mediados del siglo XIX con la creación de las sociedades meteorológicas nacionales. Desde entonces, estas sociedades son las que se encargan de hacer todas esas tareas. En el siglo XIX hubo una verdadera fiebre por recopilar todo tipo de datos meteorológicos. La gran cantidad de datos dio origen a la *Climatología* como ciencia estadística. Recordemos que el clima es el tiempo promedio, y la probabilidad de ocurrencia de sus valores extremos, en una región y en una época determinadas.

Paralelamente a toda esta actividad empírica, a partir del siglo XVII, el desarrollo de estudios teóricos permitió explicar muchos fenómenos meteorológicos. Esto propició que en el siglo XIX, numerosos científicos comenzaran a defender que la meteorología era una rama de la física aplicada, que denominaron *Meteorología Dinámica*.

Si se compara con las matemáticas o con la astronomía, la meteorología como ciencia es relativamente joven. Ahora bien, como preocupación humana se remonta a tiempos inmemoriales. La forma de vida prehistórica, recolectora y cazadora, dependía de los caprichos del tiempo, y el hombre fue desarrollando poco a poco una sensibilidad casi intuitiva para las condiciones atmosféricas. Para la predicción del tiempo a corto plazo, uno de los primeros avances fue darse cuenta de que ciertos fenómenos naturales como el aspecto del cielo, los vientos, las migraciones de aves, etc., son indicativos del tiempo venidero. Este saber meteorológico terminó expresándose en forma de numerosos refranes, que todavía hoy perduran en todas las culturas y países. Citaremos como ejemplo:

Si la nube es negra, cuídate de la piedra.

Cielo empedrado, suelo mojado.

Cielo de lanas, si no llueve hoy lloverá mañana.

Por otro lado, en el neolítico, los agricultores sedentarios comprendieron que de la observación del cielo podían predecir la llegada del período cálido, húmedo o frío (estaciones), y por tanto de la época más adecuada para la siembra de determinadas semillas.

2.- Predicción del tiempo hasta el siglo XX

Las predicciones basadas en signos naturales y recogidas en refranes son muy antiguas. Ahora bien, los primeros hombres del tiempo profesionales fueron los astrólogos. Claudio Ptolomeo (90-168), que en su libro *Tetrabiblos* basó la predicción del tiempo en los astros, fue la principal autoridad en *astrometeorología* durante toda la Edad Media. Como ejemplo, Juan de Toledo predijo para el año 1186 un cataclismo universal, consecuencia de los fuertes vientos que se iban a desatar debido a la conjunción de los siete planetas clásicos en el signo de Libra, sin que llegado ese año ocurriera nada destacable. Con la invención de la imprenta en el siglo XV, hasta el siglo XIX se publicaron muchísimos libros dedicados a ese tipo de predicciones. Ni que decir tiene que todos los intentos de relacionar los cambios atmosféricos con los astros o con las fases de la luna han resultado infructuosos. Aunque todavía tengan muchos defensores, ninguna de las presuntas relaciones resiste un tratamiento estadístico serio. En los siglos XVIII y XIX se hicieron muy populares los *almanaques* del tiempo, que con una terminología más o menos general y ambigua, pretendían predecir el tiempo de todo el año siguiente. Todavía hoy perduran algunos, como por ejemplo El Calendario Zaragozano, fundado en 1840.

A mediados del siglo XIX, un nuevo avance técnico, como fue la invención del telégrafo, impulsó la creación por las distintas sociedades meteorológicas de numerosas estaciones de observación, con el fin de conocer el tiempo presente en una amplia zona geográfica. Esto permitió dibujar mapas del tiempo actual, especialmente los mapas de isobaras, e hizo posible la introducción de un nuevo método de predicción del tiempo, denominado *método sinóptico*. Esencialmente, este método consistía en dibujar los mapas previstos para el día siguiente, estimando, a partir de mapas del tiempo actual, cómo se iban a mover los distintos fenómenos meteorológicos (centros de bajas o altas presiones, etc.) detectados. Para ello, los hombres del tiempo se basaban en su experiencia, en una pocas reglas empíricas, en su conocimiento de la meteorología local, y no utilizaban prácticamente ninguno de los resultados teóricos ya conocidos. Esta forma de proceder, experimental, sin base teórica, hacía que el método sinóptico fuera poco apreciado por muchos meteorólogos, tanto teóricos como empíricos. De todos modos, hay que resaltar que las predicciones del tiempo siempre han contado con una gran demanda popular, y todos los medios de comunicación han dedicado y dedican un espacio a las predicciones del tiempo del día o días siguientes.

Uno de los hitos más significativos en el desarrollo moderno de la meteorología práctica se produjo en tiempos de la Primera Guerra Mundial, cuando un grupo de meteorólogos noruegos encabezados por V. Bjerkness descubrió que las grandes masas de aire caliente o frío se desplazan sin mezclarse. También, detectaron que sobre el polo norte hay una gran masa de aire frío cuya frontera de separación con las masas de aire más caliente avanza o retrocede hacia el sur como lo hace un frente de ejército, de ahí que introdujeran los nombres de *frente polar*, *frente frío y frente caliente*, y que la interacción entre masas de aire genera los *ciclones*, tormentas típicas del hemisferio norte.

3.- Antecedentes de la predicción numérica del tiempo

Vilhelm Bjerknes (1862-1951), meteorólogo noruego fundador de la Escuela de Bergen, defendió que la predicción del tiempo es un problema de valores iniciales en el sentido matemático del término. Así, si se tienen los valores de las variables meteorológicas en el instante actual, si se tienen las ecuaciones de la dinámica atmosférica y si se es capaz de resolverlas, se obtendrán los valores de las variables meteorológicas del día siguiente, y en definitiva la predicción del tiempo. Ahora bien, Bjerknes conocía muy bien las dificultades que entrañaba la resolución de esas ecuaciones en derivadas parciales, debido a que conforman un sistema no lineal.

Lewis Fry Richardson (1881-1953), matemático inglés, ideó un método en diferencias finitas para resolver de forma aproximada el sistema primitivo de siete ecuaciones con siete incógnitas (las tres componentes de la velocidad, la presión, la densidad, la temperatura y la humedad del aire) de la dinámica atmosférica introducido por Bjerkness. Durante la I Guerra Mundial, Richardson puso en práctica su método resolviendo "a mano" el sistema aproximado centrado en una pequeña región de Alemania. Aunque la predicción que obtuvo estaba muy lejos de lo que había ocurrido, Richardson publicó su experiencia en un libro que en su época se hizo muy célebre, titulado *Weather Prediction by Numerical Process*.

Carl-Gustav Rossby (1898-1957), meteorólogo danés formado en la escuela de Bergen, se alejó de la omnipresente presión y se centró en el viento, en concreto en la componente vertical de la vorticidad. Rossby dedujo una ecuación simplificada de la vorticidad, y obtuvo una solución ondulatoria que se correspondía con ondas ya observadas en la parte alta de la atmósfera mediante globos sonda. Desde entonces esas ondas se denominaron ondas de Rossby. Esta conjunción de la solución de una ecuación con un fenómeno observado tuvo mucha influencia en los meteorólogos prácticos para que cambiaran su percepción de que la meteorología dinámica tenía muy poco interés para su trabajo.

Cuando gracias al impulso del matemático americano de origen húngaro John von Neumann (1903-1957) se construyó en 1946 la computadora ENIAC, von Neumann eligió la predicción del tiempo para mostrar con un problema práctico importante el potencial revolucionario de los ordenadores. Así, en 1950, Von Neumann y los meteorólogos Jule Charney (1917-1981), americano, y Ragnar Fjörtoft (1913-1998), noruego, realizaron en la ENIAC la primera predicción numérica del tiempo, consistente en resolver de forma aproximada una ecuación sencilla con significado meteorológico, en concreto, una ecuación de la altura de la capa de la atmósfera que está a 500 milibares de presión. Esta experiencia histórica resultó exitosa y marca el punto de partida de la predicción numérica del tiempo.

4.- La predicción numérica del tiempo

Desde mediados de los años 1970, todos los servicios meteorológicos realizan las predicciones del tiempo a partir de la resolución numérica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales traducen las leyes generales de la física aplicadas a la atmósfera.

4.1 Ecuaciones de la dinámica atmosférica

Las ecuaciones de la dinámica atmosférica son siete:

– *Las tres ecuaciones de conservación del momento cinético (se trata de una ecuación vectorial con tres componentes).* Esta ecuación es la aplicación de la segunda ley de Newton (fuerza igual a masa por aceleración) a una pequeña parcela de aire.

- *La ecuación de continuidad, que traduce la ley de conservación que afirma que cuando se sigue una parcela de aire en su movimiento, la masa de la parcela se conserva.*
- *La ecuación de conservación de la humedad específica de vapor de agua. Esta ecuación indica que la cantidad de agua contenida en una parcela de aire que se sigue en su movimiento se conserva, excepto cuando hay fuentes o pérdidas de vapor de agua, debidas a la evaporación o condensación, deposición o sublimación, deposición o emisión de la superficie terrestre, y producción o pérdida fotoquímica.*
- *La ecuación de conservación de la energía, que expresa que la tasa de calor por unidad de masa aplicada a una parcela de aire (debido a la evaporación, fundición, calentamiento solar o calentamiento infrarrojo), se utiliza para aumentar la energía interna o para producir trabajo de expansión.*
- *La ecuación de estado de los gases perfectos. Se puede asumir que la atmósfera es un gas perfecto, por lo que la presión, la densidad y la temperatura están relacionadas por la ecuación de los gases perfectos.*

Se tiene así siete ecuaciones con siete incógnitas (las tres componentes de la velocidad del viento, la presión, la densidad, la humedad específica y la temperatura), las cuales gobiernan la evolución de la atmósfera. Junto con las condiciones iniciales y las condiciones de contorno conforman un problema tratable desde el punto de vista matemático.

4.2 Principales procesos físicos. Parametrizaciones físicas

La parte física del modelo debe recoger los distintos intercambios energéticos entre la atmósfera y las fuentes externas. Los principales procesos físicos que intervienen en la atmósfera son: la radiación (tanto la recibida directamente del sol como la infrarrojo que emite la Tierra calentada por el sol), la convección, los intercambios de la atmósfera con la superficie terrestre (diferentes en los océanos, en los polos, en zonas con mucha vegetación o en los desiertos, etc.), la turbulencia, la condensación a gran escala, y las ondas gravitatorias orográficas. Ya sea por su naturaleza física o por las escalas consideradas, todos esos procesos no están tratados de forma explícita en las ecuaciones de la parte dinámica del modelo. Por ello se tienen que parametrizar, es decir, se tiene que determinar e introducir el efecto medio de esos procesos en las ecuaciones dinámicas del modelo meteorológico.

4.3 Resolución numérica

El sistema de ecuaciones de la dinámica atmosférica, con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno, no se puede resolver obteniendo una solución expresada mediante fórmulas matemáticas explícitas. La dificultad esencial reside en el carácter no lineal de las ecuaciones. Ahora bien, este problema se puede abordar con métodos numéricos, convirtiendo el problema continuo en uno discreto, para luego resolverlo en un ordenador y obtener así una solución aproximada. Este proceso de resolución consta de varias etapas.

Discretización del espacio

Dado que es imposible especificar los valores de las variables en todos los puntos de la atmósfera (¡son infinitos!), se divide la atmósfera en cajas y se considera que en cada una de las cajas las variables meteorológicas valen lo mismo. Se pasa así de una atmósfera continua a una atmósfera con un número finito de componentes. Según los modelos y los plazos de las predicciones, el número de estas cajas puede ser muy grande, ya que sus dimensiones horizontales pueden ir desde diez a unas pocas centenas de kilómetros, y los niveles de altura desde la veintena hasta sesenta.

Discretización de las ecuaciones

Las ecuaciones de la dinámica atmosférica son ecuaciones diferenciales, por lo que están definidas en una atmósfera continua. Su adaptación a una atmósfera y tiempo discretos requiere discretizarlas, sustituir, por ejemplo, las derivadas parciales por diferencias finitas. Se obtiene así un gran sistema de ecuaciones algebraicas con un número finito muy grande de variables, que se resolverá avanzando paso a paso en intervalos de algunos minutos, utilizando un ordenador. Su solución nos dará el valor de las siete variables meteorológicas en tiempos posteriores. Naturalmente, cuanto menor sean las dimensiones de las cajas, la aproximación será mejor, y mayor y más costoso el problema a resolver. Como por otro lado los cálculos hay que hacerlos de forma mucho más rápida que la propia evolución de la atmósfera, siempre hay que buscar un compromiso entre la calidad de la solución aproximada y el tiempo que se tarda en su obtención.

Asimilación de datos

Para arrancar el proceso de resolución, se necesita conocer el estado de la atmósfera en un instante inicial de partida, más exactamente el valor de las magnitudes meteorológicas en todas las cajas en el instante *t* igual a cero. Para determinar esos valores se dispone de una extensa red de recogida de datos meteorológicos repartida por toda la atmósfera. Atendiendo a la forma de recoger los datos, las observaciones meteorológicas se pueden clasificar en dos grupos:

- *Observaciones "in situ", obtenidas por estaciones que recogen los datos del lugar en el que están ubicadas. Las hay de dos tipos: observaciones en superficie —recogidas por estaciones automáticas en tierra, boyas marinas, barcos mercantes, etc.— y observaciones en altura, obtenidas por globos sonda y por aviones.*
- *Observaciones obtenidas por aparatos a distancia (teledetección), como son las de los cinco satélites geoestacionarios, las de los dos satélites polares y las* de los radares meteorológicos.

Hay que resaltar que las estaciones meteorológicas terrestres no están igualmente distribuidas por toda la superficie del globo, en unas zonas son mucho más abundantes que en otras, y que proporcionan pocos datos en altitud. En cuanto a los satélites de órbita polar, están continuamente dando vueltas barriendo toda la tierra, por lo que sus medidas no están obtenidas en todos los puntos en el mismo instante. Además, los satélites miden cantidades sobre todo el espesor de la atmósfera. Por otro lado, en el instante inicial se necesita disponer de los valores de las variables meteorológicas en todas las cajas en que hemos dividido la atmósfera. El proceso de pasar de los datos observados a los valores de las variables meteorológicas en las cajas, se denomina *asimilación de datos*. Este proceso es complicado ya que hay que tratar los datos recogidos para que en ese instante inicial, todas las variables meteorológicas estén relacionadas entre sí, pues forman un estado de la atmósfera.

Condiciones de contorno

Si no se fijan condiciones de contorno —valores de las distintas magnitudes en la frontera del dominio de resolución— el problema sigue sin poder resolverse. En los modelos globales para toda la atmósfera, la frontera del dominio de integración obviamente está formada por las superficies inferior y superior de la atmósfera. En esos casos, resolviendo las distintas ecuaciones de forma sucesiva, las condiciones de contorno no presentan especiales dificultades. En los modelos regionales, en los que el dominio de integración está limitado lateralmente, una opción ampliamente utilizada consiste en tomar como condiciones de contorno los valores obtenidos de la resolución de un modelo global. Se dice entonces que el modelo regional está anidado en el global.

El Análisis Numérico tiene como finalidad saber resolver ecuaciones y realizar los cálculos hasta el final, es decir hasta la obtención de valores numéricos precisos en el menor tiempo y esfuerzo posibles. El Análisis Numérico es indispensable para que la simulación no sea sinónimo de simulacro, y para evaluar la incertidumbre de las previsiones.

Una vez descritos los principios generales de la resolución numérica, pasaremos a describir brevemente algunos modelos numéricos operativos utilizados por los servicios meteorológicos para la predicción del tiempo.

5.- Modelos numéricos operativos de predicción del tiempo

El objetivo más importante de la predicción del tiempo es conocer, con la máxima antelación y con el máximo detalle posibles, el desencadenamiento de fenómenos adversos, es decir de tipos de tiempo que pueden causar graves daños a la sociedad.

Para la predicción del tiempo a medio plazo (entre dos y diez días) se utilizan modelos numéricos globales de toda la atmósfera. El modelo más desarrollado es el del ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecast) con sede en Reading y que agrupa a 18 países, entre ellos España. Actualmente la resolución horizontal del modelo, es decir las dimensiones horizontales de las caja, es de 40 Km. y tiene 60 niveles de altura. Cuando se quieren hacer predicciones para un plazo de hasta dos o tres días, por ejemplo para España, se utilizan modelos regionales, que tienen mayor resolución que los globales. Por ejemplo, el Instituto Nacional de Meteorología (INM) es miembro del consorcio formado por los Servicios Meteorológicos Nacionales de Noruega, Suecia, Dinamarca, Finlandia, Islandia, Holanda, Irlanda y España, que ha desarrollado el modelo operativo regional HIRLAM (High Resolution Limited Area Model). El dominio del modelo HIRLAM-INM es un cuadrado centrado en España de unos 5000 Km. de lado, con una resolución espacial de 17 Km. y 40 niveles de altitud. Las condiciones de contorno laterales se obtienen de la solución del modelo global proporcionada por el ECMWF. Con este modelo, el INM hace cuatro veces al día predicciones de hasta 48 horas. El INM también integra una versión con una resolución de 5 Km. anidada en la anterior, con la que realiza predicciones de hasta 24 horas.

La predicción “inmediata”, que va desde ahora mismo hasta tres, seis o incluso doce horas, reposa directamente en la observación de los fenómenos, y en la capacidad de los pronosticadores para interpretar los datos de observación. Todos los servicios meteorológicos realizan una continua vigilancia de la evolución de la atmósfera en tiempo real, para advertir la aparición de determinados fenómenos en el lugar que ocurren.

Para resolver en poco tiempo varias veces al día los modelos numéricos de predicción, se requiere la utilización de los ordenadores más potentes que existen. Para dar una idea de las dimensiones de este problema, a modo de ejemplo diremos que Météo-France, que dispone del modelo global ARPEGE y el regional anidado en el anterior ALADIN, cada día trata alrededor de millón y medio de datos, y que en su sede situada en Toulouse, entre ingenieros, técnicos e investigadores trabajan unas 250 personas.

El resultado de los modelos de predicción numérica del tiempo son los valores de las variables meteorológicas en las cajas en que hemos dividido la atmósfera. A partir de esos valores se realiza lo que se denomina “postprocesado del modelo”, que básicamente consiste en representar en mapas geográficos los campos meteorológicos bidimensionales obtenidos al resolver el modelo, para que puedan ser utilizados por los hombres del tiempo. Ahora bien, el proceso de predicción no acaba con los resultados del modelo, es indispensable la destreza de los hombres del tiempo encargados de la predicción quienes, como grandes conocedores del clima regional y de los límites de los modelos, ajustan e incluso modifican los resultados de la simulación, y los traducen a términos de tiempo observable: intensidad de las precipitaciones, temperaturas máxima y mínima del día, posible aparición de nieblas, de tormentas, de ráfagas de viento, etc.

Desde el inicio de la utilización de modelos numéricos, la calidad de las predicciones meteorológicas no ha dejado de mejorar. Hoy en día la fiabilidad de las previsiones para plazos de un día o dos es superior al 90 %, y para plazos de 4 a 5 días del 75 %. Se constata también que en los últimos 20 años, en cada década se ha obtenido una mejoría de 24 horas, es decir que el nivel actual de buenas previsiones es el mismo que el que se tenía hace diez años para un plazo de 24 horas menos.

6.- Límites de la predictibilidad del tiempo

Los resultados de una predicción numérica dependen de las simplificaciones que se hayan hecho para obtener el sistema de ecuaciones matemáticas del modelo, de las parametrizaciones físicas adoptadas, de los efectos de la discretización y de la numerización utilizada, de la eficacia y extensión de la red de observación, y de la asimilación de los datos para obtener el estado inicial. Todos estos procesos son fuente de incertidumbre, de errores en las predicciones, y son objeto de permanentes estudios que conducen a continuas mejoras. En 1963, el meteorólogo Edward Lorenz hizo un descubrimiento fundamental, ya que mostró que *incluso con un modelo perfecto y condiciones iniciales casi perfectas, la naturaleza caótica de la atmósfera hace que los pronósticos pierdan toda validez más allá de diez días*. Dicho de otra forma, la atmósfera es un sistema caótico, ya que todo error sobre el estado meteorológico en el instante inicial, por pequeño que sea, se amplifica rápidamente con el transcurso del tiempo, tan rápidamente que una predicción para un plazo de más de diez días pierde todo su significado. Lorenz probó esto con un sistema muy sencillo derivado de las ecuaciones de la dinámica atmosférica, denominado sistema de Lorenz. La gran sensibilidad a largo plazo de la solución con respecto de las condiciones iniciales, el denominado carácter caótico, lo plasmó Lorenz en lo que denominó *efecto mariposa*, que se ha hecho muy popular.

Las predicciones numéricas descritas anteriormente se califican como deterministas, ya que emplean un sólo modelo y una sola integración. Estas predicciones son capaces de dar previsiones del tiempo de hasta diez días, pero su fiabilidad decrece mucho cuando la previsión va más allá de cinco días. Para superar esta limitación en el plazo de predicción debida a la incertidumbre en las condiciones iniciales, una opción muy desarrollada es la denominada *predicción por conjuntos*. Esta técnica consiste en realizar un conjunto de predicciones a partir de datos iniciales obtenidos perturbando la asimilación de datos, y a partir de ellas obtener una predicción promedio, o especificar la probabilidad de ocurrencia de sucesos futuros del tiempo. Así, la predicción deja de ser determinista para pasar a ser de tipo probabilístico. Además del elevado coste de realizar todo un conjunto de predicciones para una misma fecha y lugar, un problema fundamental es reconocer las zonas geográficas en las que pequeñas modificaciones de los datos producen mayores variaciones en las soluciones, es decir, cómo elegir las distintas pero igualmente verosímiles condiciones iniciales de forma que de alguna manera se cubra toda la gama de posibles soluciones. El ECMWF es pionero en el desarrollo y uso de esta técnica para predicciones de más de cuatro días, y actualmente realiza predicciones con un conjunto de cincuenta condiciones iniciales obtenidas mediante pequeñas variaciones de la asimilación de datos. A partir de los resultados de las distintas predicciones numéricas, se obtienen distribuciones de probabilidad de ocurrencia de fenómenos en diferentes zonas de la Tierra.

La predicción *estacional* es la que se hace para un plazo de entre uno y seis meses. Aquí también el ECMWF ha sido pionero en desarrollar un modelo adecuado a esos plazos de predicción. En estos modelos se utilizan técnicas de predicción por conjuntos, y con la información resultante se trata de prever si el tiempo se apartará o no del régimen climático del lugar considerado. Se dirá así, por ejemplo, que el próximo verano será más caluroso y seco que lo habitual.

7.- Las predicciones climáticas

Hemos dicho antes que el clima es el tiempo promedio, son la temperatura o las precipitaciones promedio en determinado lugar y período de tiempo, por ejemplo en Canarias en el mes de febrero. Por tanto, para la predicción del clima habrá que utilizar predicciones estadísticas. La predicción del clima es muy importante: nuestro clima futuro está amenazado por las emisiones de gases debidas a las actividades humanas, y es necesario prever el efecto a largo plazo de esas perturbaciones. La disciplina matemática que proporciona las herramientas para estudiar el comportamiento a largo plazo es la *Teoría de Sistemas Dinámicos*. Esta teoría permite saber cuales son los regímenes de tiempo más previsibles (los atractores en terminología matemática), y cuales son los más inestables. En las situaciones de inestabilidad, una buena herramienta sería la modelización probabilística del clima, es decir el diseño de modelos que tengan explícitamente en cuenta el carácter aleatorio de la predicción. Este tipo de modelos, todavía en pañales, tienen que desarrollarse a partir de resultados muy recientes de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas y de la estadística.

Los modelos numéricos de predicción del clima se parecen como hermanos a los modelos de predicción del tiempo. La principal diferencia proviene del hecho de que las variaciones climáticas tienen lugar en grandes escalas de tiempo, lo que implica que no se pueden despreciar las interacciones entre la atmósfera, los océanos, las grandes capas de hielo marino, e incluso la biosfera. Por ello, un modelo del clima debe combinar un modelo atmosférico, un modelo oceánico, un modelo de los hielos marinos, y un modelo de la biosfera. Más allá de la complejidad informática de esa construcción, aparecen problemas matemáticos serios relativos a la manera adecuada de acoplar esos dominios, y a la especificación de las condiciones en las interfaces atmósfera-océano, atmósfera-hielos, etc. Además, como la integración para grandes períodos de tiempo exige que las cajas en que se divide la atmósfera sean grandes, de 200 a 300 kilómetros de lado, es necesario evaluar el efecto estadístico, en la escala de la caja, de los procesos que se producen a escalas mucho más pequeñas. En cualquier caso, todas estas materias todavía están en mantillas, quedan por hacer muchos desarrollos y avances matemáticos.

A modo de conclusión, insistiremos en que detrás de los pronósticos del tiempo, desde hace muchos años no están ni las cabañuelas, ni las témporas, ni la figura del fraile encapuchado que señala el tipo de tiempo que va a hacer. Están ordenadores superpotentes a los que hay que proporcionar un gran número de medidas, hoy en día la mayor parte de ellas obtenidas por satélites, muchas leyes de la mecánica y de la física, y también, muchas matemáticas, a veces muy recientes.

Para terminar, las palabras de Miguel Azpiroz (1916-1965) en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona: *La gente que, a pesar de todo, está dispuesta siempre a dejarse engañar muy a gusto, como dice un proverbio latino, seguirá creyendo en los intuitivos de esta ciencia, como también ocurre en Biología o en Medicina, y en las predicciones realizadas con recursos extremadamente simples. Forma parte de la naturaleza humana el querer saber, de modo inmediato, a qué atenerse en todos los aspectos que afectan a su ámbito vital, antes que el comprender las dificultades de cualquier problema que requiere una formación especializada; y adopta esta actitud incluso en cuestiones de mayor categoría cultural o humana, sin que nadie se asombre por ello*.

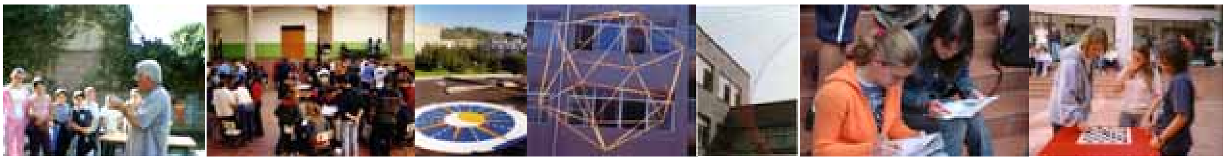
Bibliografía

- F. Atger, J. Coiffier, J. Pailleaux, J. F. Geleyn, E. Legrand (2000) : La météorologie, 8^e série, nº 30, juin 2000, (Spécial Prévision numérique du temps).
- C. Basdevant (2002) : "Le temps qu'il fera". En L'explosion des mathématiques, 7-10. Societé mathematique de France y Societé de mathématique apliquées et industrielles.
- Instituto Nacional de Meteorología. http://www.inm.es
- E. Kalnay (2003): Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge University Press, Cambridge.
- M. Lezaun (2002): "Predicciones del Tiempo y Matemáticas". Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada 22, 59-98.
- E. Lorenz (1993): The Essence of Chaos. University of Washington Press, Seattle. (Traducción en español La esencia del caos. Editorial Debate, Madrid, 2000).
- Météo France, http://www.meteofrance.com
- F. Nebeker (1995): Calculating the Weather. Meteorology in the 20th Century. Academic Press, San Diego.
- Societé Météorologique de France. http://www.smf.asso.fr

Mikel Lezaun es Catedrático de Matemática Aplicada en la *Universidad del País Vasco* (España) y Vicepresidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. Autor de artículos de investigación en Mecánica de Fluidos, ha dirigido distintos proyectos de investigación aplicada para empresas. En el año 2002, su trabajo Predicciones del Tiempo y Matemáticas fue galardonado con el III Premio SEMA de Divulgación en Matemática Aplicada.
E-mail: mepleitm@lg.ehu.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 49 - 51
ISSN: 1815-0640

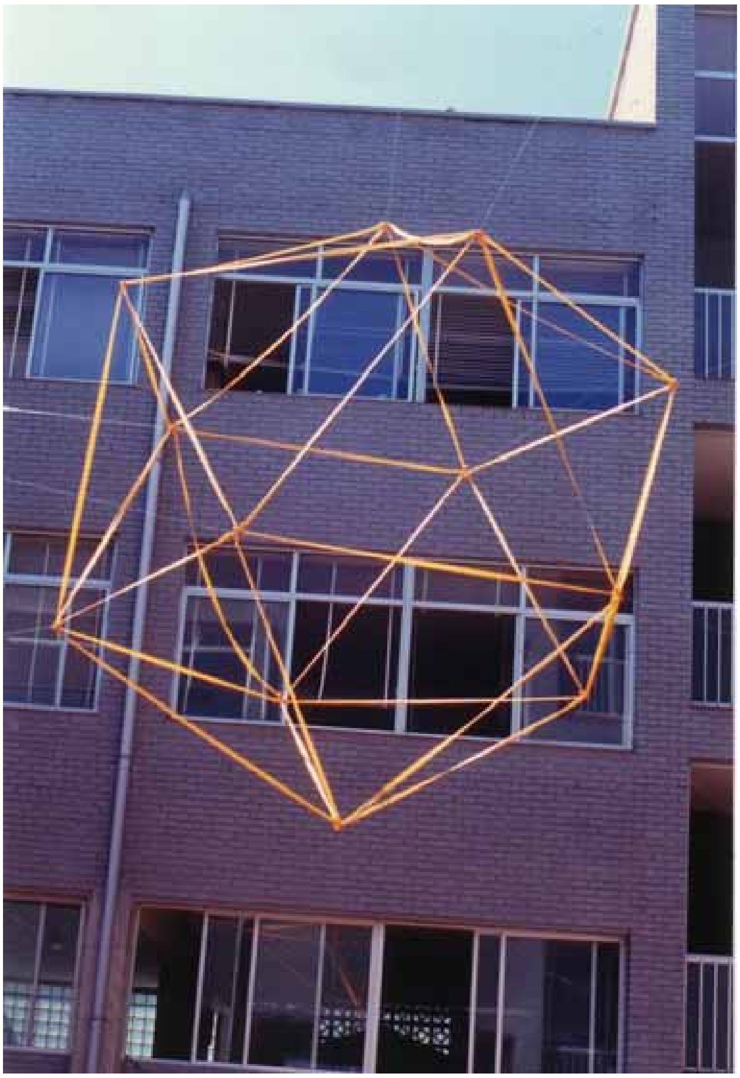


Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

Cómo montar un espectacular icosaedro gigante en el patio del colegio.



El lunes, al llegar al Instituto, todos hablaban de lo mismo. El espectáculo de aquél icosaedro rojo de 5 metros flotando en medio del claustro no había dejado impasible a nadie. ¿Quién hizo eso, para qué lo han puesto ahí? ¿Cómo flota, qué lo sostiene? Las respuestas las encontramos más tarde, cuando durante el recreo vimos en los paneles las fotos de Alba, Daute, Tito y otros que habían estado montándolo en secreto durante el fin de semana para darnos la sorpresa. Y nos acostumbramos a vivir con él. Durante las dos semanas que estuvo presente aquella etérea nave espacial caída del cielo, la fuimos conociendo poco a poco. Al principio con curiosidad, observándola desde abajo y desde las ventanas de los pasillos, encontrando los ángulos que producían las imágenes más bellas. Luego con indiferencia, hasta el día en que desapareció tal como llegó.

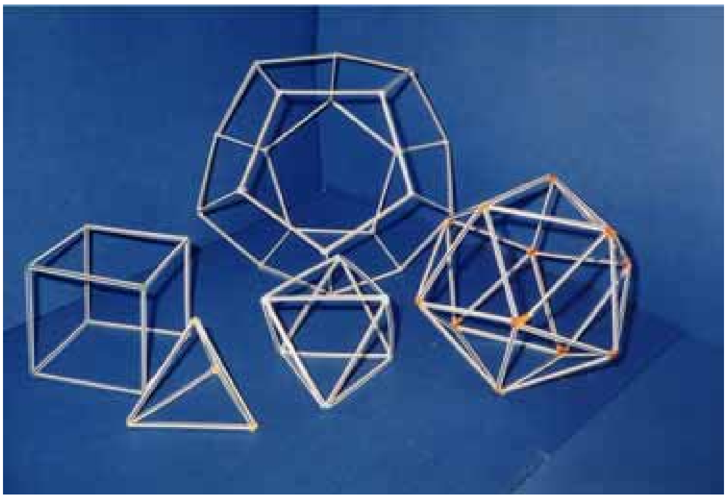
Ya sabemos el final, pero no cómo se hace.

¡Fácil! Cinta roja e hilo de nailon para pescar.

Los carretes de nailon son perfectos para tensar las cintas, dada su transparencia y fuerte resistencia. El color de la cinta tiene que ser chillón para contrastar con el de las paredes.

Si en tu centro hay cuatro paredes que encierran un espacio grande al aire libre con dos o tres pisos llenos de ventanas donde agarrar los cables de nailon, entonces puedes montarlo. Ten en cuenta que prácticamente no pesa nada, y la única dificultad que hay que prever es tener suficientes agarres en todas las direcciones para que quede bien tensado. Veamos a continuación algunas ideas sueltas que pueden facilitar el proceso.

Supongamos que ya tenemos un buen sitio y el apoyo del centro para los permisos y las compras. Lo primero será formar un buen grupo de unos 8 alumnos. Hazles jurar por la memoria de los pitagóricos que guardarán en secreto el motivo de las reuniones. Explícales el plan: unas 3 o 4 tardes para echar las cuentas y preparar los materiales, un fin de semana intenso para montarlo y una tarde para desmontarlo.



En la segunda reunión llévales un montón de pajitas de beber refrescos y alambres limpiapipas, para montar, sobre la marcha, unos cuantos icosaedros de unos 30 cm, que servirán de modelo para organizar el trabajo. Si el problema de estudiar la relación del lado con la altura es muy fuerte para su nivel, con la maqueta y usando proporciones podrán estimar cuántos metros de cinta serán necesarios para obtener un icosaedro de cierta altura. La estimación de los metros de nailon debe ser muy generosa porque siempre se enreda algún cable y es mejor cortar.

No olvides asignar a un par de alumnos la preparación de los paneles con las fotos del proceso y las explicaciones o problemas que quieras contar, como el de cuántos pentágonos puedes encontrar en un icosaedro. En particular, quien haga las fotos ha de estar liberado de toda tarea que no sea la de fotografiar cada detalle del proceso.

Una vez comprada la cinta, que debe ser fuerte, la cosemos en los 12 vértices para formar el icosaedro. No es necesario cortarla en 30 aristas y luego coserlas, podemos ahorrar algunos cortes, ¿cuántos? Lo importante es mantener con precisión la longitud de las aristas midiendo bien un par de veces y fijando la distancia con un alfiler antes de coser. Es bueno ir etiquetando los vértices con tinta de ropa según se van cosiendo: S para el superior, I para el inferior, A1,…,A5, para los del pentágono de la planta Alta, y B1,…,B5 para los de la Baja.

Una vez cosido iremos atando a cada vértice los cables de nailon. Lo mejor es preparar cartones duros con forma de H donde enrollar el nailon que sale de cada vértice. De ese modo luego, al montarlo, iremos desenrollando de las H cada cable de los vértices, sólo lo necesario en cada momento, evitando así que se forme un lío.

Para el montaje final y tensado no está de más añadir unas cuántas personas, y si es posible alguien del personal de mantenimiento del centro por si hay que poner algún clavo.

Ya queda poco. Ponemos sobre el suelo el icosaedro cosido con sus H enrolladas de nailon en cada vértice. Cogemos el vértice superior S, que debe tener tres H, y ponemos tres personas en la parte alta del edificio para que lo vayan subiendo algunos metros. Luego paramos, vamos desenrollando B1,…,B5 y seguimos subiendo y tensando un poco en el nivel dos. Luego los vértices A1,… y por último atamos el vértice I a una piedra en el suelo. El tensado es lo más difícil: …afloja de aquí… tira de allá, pero ¡paciencia! en un par de horas estará todo tenso y la emoción compensará el largo rato de tira y afloja.

Bueno, si lo haces envíanos un correo a aisilis@gobiernodecanarias.org

y cuéntanos que tal te fue.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5 páginas 53 - 89
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

La Educación Matemática en el Perú

Teresa Arellano Bados

SOPEMAT

Sociedad Peruana de Educación Matemática

1. Contexto social

La democratización social y la equidad, estrechamente relacionadas, siguen siendo esquivas en nuestro país, donde persiste una extendida y profunda pobreza. Esta afecta a más de la mitad de su población especialmente a las niñas, niños y jóvenes, así como a las mujeres.

Las políticas educativas de los últimos años tratan en lo posible de enfrentar las desigualdades educativas y su baja calidad. Se ha empezado a impulsar una gestión educativa descentralizada y participativa. Así mismo se ha formulado un nuevo marco legal que posibilite y sustente el cambio del sistema educativo peruano y se ha lanzado la propuesta de un Proyecto Educativo Nacional PEN.

Algunas realidades:

- 35% de niños y adolescentes son pobres (INEI 2003; MED-UMC 2005).
- 27 de cada 100 niños tiene una lengua materna distinta al castellano (MED – DINEBI 2004).
- El 68% de 436 mil docentes trabaja en escuelas públicas. (MED 2004).
- 74% de docentes de primaria y 69% de secundaria tiene título pedagógico (MED Censo escolar 2002; MED-UMC 2005).
- El 2004 todos los alumnos de primaria dispusieron de un libro de texto o cuaderno de trabajo en Comunicación y Matemática. (MED UMC 2005).
- 16% de centros educativos públicos tiene acceso a una computadora y 9% a Internet (MED 2003; MED-UMC 2005).
- El costo de un estudiante: 300$ en primaria y 500$ en Secundaria (MED UMC 2005).

Matrícula 2004 (MED): E. Inicial 1 138 137; E. Primaria 4 164 475; E. Secundaria 2 603 091

Esta propuesta ha sido diseñada por el Consejo Nacional de Educación y se ha puesto en debate a la ciudadanía peruana en octubre 2005 para "…romper la inercia de varias décadas que han producido un sistema educativo donde los niños no aprenden lo suficiente, se profundizan las desigualdades, se generaliza el desánimo y la corrupción…Para revertir todo esto se requiere que la sociedad y el estado se comprometan a realizar las propuestas, por eso es importante que el Proyecto Educativo Nacional y los Proyectos Educativos Regionales sean una oportunidad para renovar la esperanza, para renovar las voluntades que permitan emprender el camino de los cambios que se proponen…"[1]

El PEN incluye políticas y estrategias a largo plazo que deben comprometer al gobierno que se instale el próximo 28 de julio, como al siguiente. Aun, son pocas las instituciones y partidos políticos que han tomado parte activa en la discusión.

Un nuevo llamado de alerta, que también puede contribuir al cambio en las relaciones sociales y educativas entre peruanos y peruanas, significó la medición de calidad realizada a estudiantes de 4º y 6º de primaria y de 3º y 5º de secundaria en noviembre del 2004[2]. Estos resultados acerca de los rendimientos en lectura y lenguaje así como en matemáticas demostraron que la calidad educativa no había progresado y sirvió de titulares alarmantes para los medios de comunicación.

77% de los estudiantes que terminan primaria está por debajo del nivel básico de los logros esperados en lectura y comunicación y 43% está por debajo del nivel básico de los logros esperados en matemáticas (MED – UMC 2005).

Si bien, no han concluido los análisis a los factores asociados de estos rendimientos obtenidos en una muestra cuidadosamente seleccionada a nivel nacional y a nivel de gestión de escuela, lo cierto es que los resultados siguen presentando[3] grandes brechas entre lo estatal y lo privado, entre lo urbano y lo rural entre escuela polidocente y unidocente.

Por otro lado, la información revela que no todas las capacidades han sido desarrolladas en el aula[4], lo cual afecta las oportunidades de los estudiantes y mucho más si se sabe que las capacidades desarrolladas han sido trabajadas de manera operativa, sin desarrollar las capacidades de análisis, reflexión o de inferencias.

Así mismo, se ha encontrado que "…estudiantes que tenían docentes con

[1] Patricia Salas, presidenta del Consejo Nacional de Educación en entrevista a Foro Educativo. Revista No.7 año 2. Lima diciembre 2005.
[2] Fueron difundidos en septiembre del 2005 por Unidad de Medición de Calidad del Ministerio de Educación.
[3] Se han realizado evaluaciones nacionales en 1996, 1998 y 2001.
[4] Cuestionario aplicado a docentes voluntarios de la muestra en forma anónima.

ciertas habilidades también obtenían un mejor desempeño en la prueba…"[5] Además no se han encontrado diferencias entre los resultados de rendimiento del año 1998 con los del 2004. ¿Tiene algo que ver esto con los cambios curriculares constantes? O ¿con el método?

Nuestro país es un país desigual, si el problema es general, y sabemos que los resultados no son buenos, los estudiantes que vienen de situaciones de pobreza están mucho peor. El problema es muy complejo, por eso es necesario hacer algo pero hacerlo con una política clara y sostenida.

2. La Educación Básica

El Ministerio de Educación en cumplimiento de la nueva Ley de Educación, elaboró y publicó el Diseño Curricular Nacional[6] en coherencia con los principios y fines de la educación peruana. Este diseño es producto de la articulación y reajuste de los currículos vigentes al 2005 en los niveles de inicial, primaria y secundaria de tal manera que contenga los aprendizajes fundamentales y básicos que deben desarrollar los estudiantes en cada nivel educativo, en cualquier ámbito del país con calidad educativa y equidad, teniendo en cuenta la diversidad humana, cultural y lingüística de los grupos etarios de 0 a 17 ó 18 años de edad aproximadamente.

El currículo constituye un documento normativo y de orientación para todo el país, se ha definido como un Currículo diversificable, abierto y flexible.

> "**Diversificable** porque permite un proceso de construcción adecuado a las características y demandas socioeconómicas, geográficas, culturales y educativas de las regiones, localidades e instituciones educativas donde se aplique. Cada institución educativa, por ser la instancia principal de la descentralización educativa, construye su propuesta curricular diversificada, la cual posee valor oficial. En este sentido el currículo es:
>
> **Abierto,** porque está concebido para la incorporación de contenidos que lo hagan pertinente a la realidad y su diversidad. Se construye con la comunidad educativa y otros actores de la sociedad de modo participativo.
>
> **Flexible,** porque permite modificaciones en función de la diversidad humana y social, de las particularidades, necesidades, e intereses de los grupos poblacionales y etarios a quienes se dirige y de los cambios que la sociedad plantea"[7].

---

[5] Liliana Miranda, Jefe de la Unidad de Medición de la Calidad del MED. p. 40 Revista No.7 Foro Educativo. Lima. Lima diciembre 2005.

[6] Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Ministerio de Educación Lima. Noviembre 2005. Ley general de Educación No 28044 promulgada por el Congreso de la república el 28 de julio del 2003.

[7] P. 10 del Diseño Curricular Nacional. Ministerio de Educación. Lima, noviembre 2005.

Estas características están orientadas a la promoción de aprendizajes significativos, es decir, aprendizajes útiles vinculados a las características, necesidades e intereses de los estudiantes respondiendo a su contexto de vida mediante una interacción afectiva y cognitiva entre los nuevos aprendizajes y los saberes previos.

Se espera que al finalizar la Educación Básica Regular y respetando la diversidad humana y social, los estudiantes muestren las siguientes características:

ético y moral que construye juicios de valor y actúa conforme a ellos,

democrático que genera consensos, puede tomar decisiones con otros y sea respetuoso de las reglas básicas de convivencia,

crítico y reflexivo que discrepa, cuestiona, afirma y argumenta sus opiniones,

creativo promueve la producción de conocimientos en todos los campos del saber, el arte, y la cultura, busca soluciones y alternativas originales a los problemas que enfrenta,

sensible y solidario que integra sus afectos en su actuar cotidiano, respeta la vida y la naturaleza evitando su destrucción,

trascendente que busca dar un sentido a su existencia y a su actuar,

comunicativo expresa con libertad y en diferentes lenguajes y contextos lo que piensa y siente, que interpreta diversos lenguajes simbólicos,

empático y tolerante que se pone en el lugar del otro, que asume como riqueza la diversidad humana,

organizado que planifica la información, su tiempo y actividades compatibilizando diversas dimensiones de su vida personal y social,

proactivo que enfrenta con energía y seguridad decisiones sobre

situaciones diversas para llegar a soluciones adecuadas,

autónomo que es asertivo y actúa con su propio criterio asumiendo con responsabilidad las consecuencias de sus actos,

flexible que posee versatilidad y capacidad de adaptación al cambio permanente,

resolutivo que se asegura de entender los problemas, controla lo que está haciendo, aplica y adapta diversas estrategias y evalúa sus progresos

investigador e informado que busca y maneja información actualizada, es capaz de analizarla, compararla y de construir nuevos conocimientos**,**

cooperativo que cuenta con otros para enfrentar de manera efectiva y compartida una tarea o para resolver diversas situaciones.

El plan de estudios de la Educación Básica comprende 7 ciclos educativos:

<table>
<tr><th>Niveles</th><th colspan="2">Educación Inicial</th><th colspan="6">Educación Primaria</th><th colspan="5">Educación secundaria</th></tr>
<tr><th>Ciclos</th><th>I</th><th>II</th><th colspan="2">III</th><th colspan="2">IV</th><th colspan="2">V</th><th colspan="4">VI</th><th>VII</th></tr>
<tr><th>Grados</th><th>0 - 2 años</th><th>3 - 5 años</th><th>1º</th><th>2º</th><th>3º</th><th>4º</th><th>5º</th><th>6º</th><th>1º</th><th>2º</th><th>3º</th><th>4º</th><th>5º</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Areas Curriculares</td><td rowspan="4">Comunicación integral,</td><td>Lógico matemática</td><td colspan="6">Lógico matemática</td><td colspan="5">Matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Comunicación Integral</td><td colspan="6" rowspan="2">Comunicación Integral</td><td colspan="5">Comunicación</td></tr>
<tr><td colspan="5">Idioma extranjero/originario</td></tr>
<tr><td colspan="6">Educación por el arte</td><td colspan="5">Educación por el arte</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Relación consigo mismo,</td><td rowspan="4">Personal Social</td><td colspan="6" rowspan="2">Personal Social</td><td colspan="5">Ciencias Sociales</td></tr>
<tr><td colspan="5">Persona, Familia y Relaciones Humanas</td></tr>
<tr><td colspan="6">Educación Física</td><td colspan="5">Educación Física</td></tr>
<tr><td colspan="6">Educación Religiosa</td><td colspan="5">Educación Religiosa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Relación con el medio natural y social</td><td rowspan="2">Ciencia y Ambiente</td><td colspan="6" rowspan="2">Ciencia y Ambiente</td><td colspan="5">Ciencia, tecnología y Ambiente</td></tr>
<tr><td colspan="5">Educación para el Trabajo</td></tr>
<tr><td colspan="14">Tutoría y orientación educacional</td></tr>
</table>

La organización y distribución del tiempo escolar.

El número de horas establecidas en una semana para los distintos niveles es el siguiente:

Niveles	Educación Inicial	Educación Primaria	Educación secundaria
Horas obligatorias	**25**	**20***	**25***
Horas de libre disponibilidad		**10**	**10**
Total de horas establecidas	**25**	**30**	**35**

***Incluye una hora de dedicación exclusiva de Tutoría y Orientación Educacional**

Esta hora no es una clase sino momento para tratar asuntos relevantes de la tutoría y dar la oportunidad a los estudiantes para interactuar y conversar sobre sí mismos y el grupo.

Las horas se distribuyen en Inicial y Primaria de acuerdo al desarrollo de los Planes de estudio de cada Institución Educativa de manera integrada. En cambio, en la Educación Secundaria la distribución de las horas semanales debe ser la que sigue:

Organización del tiempo en el nivel de Educación Secundaria

Areas Curriculares	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**
Matemática	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
Comunicación	3	3	3	3	3
Idioma extranjero/ originario	2	2	2	2	2
Educación por el Arte	2	2	2	2	2
Ciencias Sociales	3	3	3	3	3
Persona, Familia y Relaciones Humanas	2	2	2	2	2
Educación Física	2	2	2	2	2
Educación Religiosa	2	2	2	2	2
Ciencia, tecnología y Ambiente	3	3	3	3	3
Educación para el Trabajo	2	2	2	2	2
Tutoría y orientación educacional	1	1	1	1	1
Horas de libre disponibilidad	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**
Total de horas	35	35	35	35	35

El número de horas para cada área es el mínimo obligatorio. Sin embargo, en las disposiciones oficiales se ordena que, “las horas de libre disponibilidad deberán priorizar Comunicación, **Matemática** y Educación para el Trabajo sobre la base de una formación en valores según las necesidades de los estudiantes”.

“…En la práctica educativa, los profesores de secundaria de las instituciones Educativas dedican a Matemática entre 5 y 6 horas en bloques de 2 horas…”

El punto de partida para la **DIVERSIFICACION CURRICULAR** es el diagnóstico de la problemática pedagógica de cada escuela y en función de ello el Diseño Curricular Nacional es enriquecido y adecuado a las condiciones y modos de vida de los estudiantes. Por otro lado, se ha dispuesto que los programas de Tutoría y Orientación Educacional así como los de Prevención, Cultura de Paz, Educación

Sexual y Prevención del uso indebido de Drogas sean incorporados en el Proyecto Educativo Institucional (PEI), en la propuesta Curricular y en el Plan Anual de Trabajo (PAT) de cada escuela.

En cuanto a los **temas transversales** que responden a los problemas nacionales y son de alcance mundial, se ha dispuesto que "…deben ser previstos y desarrollados al interior de todas las áreas curriculares, impregnando la práctica educativa y todas las actividades que se realicen en la escuela. Los temas transversales son:

Educación para la convivencia, la paz y la ciudadanía.
Educación en y para los derechos humanos
Educación en valores o formación ética.
Educación intercultural.
Educación para clamor, la familia y la sexualidad.
Educación ambiental.
Educación para la equidad de género.

En lo que respecta a la **evaluación de los aprendizajes,** como proceso pedagógico, se caracteriza por ser integral, continua, sistemática, participativa y flexible. Se ha determinado que como tal, la evaluación proporciona información relevante para regular las actividades tanto de los estudiantes como de los docentes.

La **escala de calificación** de los aprendizajes en la EBR es literal, numérica y descriptiva según los niveles:

Escala	**Educación Inicial**	**Educación Primaria**
Literal	Descriptiva	Descriptiva
AD Logro destacado		Estudiante evidencia el logro previsto y un manejo solvente y satisfactorio en todas las tareas
A Logro previsto	Estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo.	
B en proceso	Estudiante en camino de lograr los aprendizajes previstos, requiere de acompañamiento para lograrlo.	
C en inicio	Estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades, necesita mayor tiempo de acompañamiento de acuerdo con su ritmo y estilo.	

Escala	**Educación Secundaria**
Numérica	Descriptiva
O - 20	Estudiante evidencia el logro previsto y un manejo solvente y satisfactorio en todas las tareas propuestas
	Estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
	Estudiante en camino de lograr los aprendizajes previstos, requiere de acompañamiento para lograrlo
	Estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades, necesita mayor tiempo de acompañamiento de acuerdo con su ritmo y estilo.

Estas escalas siguen siendo muy discutidas en la práctica pedagógica por los mismos docentes y directivos de las instituciones. Pues requiere del docente un claro dominio de los indicadores de logro de los aprendizajes y una dedicación constante de parte de ellos en el acompañamiento de los estudiantes.

También el documento oficial ha definido los criterios de **promoción y repitencia**: los estudiantes del nivel Inicial son promovidos sin excepción. Los de primer grado de primaria son promovidos automáticamente al segundo grado. De segundo a cuarto grado sólo son promovidos si obtienen A en Comunicación y Lógico Matemática. Los de 5º y 6º grados son promovidos si obtienen A en Comunicación, Lógico Matemática, Personal Social y Ciencias. Los estudiantes de todos los grados de la Secundaria son promovidos al grado superior si aprueban todas las áreas curriculares del grado. (Es decir, obtienen calificativos iguales o mayores de 11).

3. La educación matemática en el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular

El nuevo documento DCN de la Educación Básica Regular afirma que responde al proceso evolutivo, físico, afectivo y cognitivo de los estudiantes desde el momento de su nacimiento. Para lo cual, cree necesario articular las propuestas curriculares de Educación Inicial, Primaria y Secundaria, presentando los **logros de aprendizaje** por ciclos como uno de los elementos articuladores en los tres niveles.

Los equipos de trabajo de Educación Inicial y de Educación Primaria, aclaran que “logros de aprendizaje” son “competencias” y el equipo de Secundaria que son “capacidades”. Estas discusiones continuarán. Entretanto, se aprecia en el documento que en los tres niveles los logros de aprendizaje se han organizado y relacionado, con los siguientes componentes del área de Matemática: Número Relaciones y Funciones, Geometría y Medida; Estadística y Probabilidad . El nombre del área curricular varía, es **Lógico matemática** en Inicial y Primaria y **Matemática** en Secundaria, no hay argumentos en torno a esta distinción en el documento oficial. Sin embargo los docentes de primaria se han habituado al nombre “lógico matemática” desde hace más de 20 años y los de secundaria con “Matemática”.

El siguiente cartel ha sido elaborado en base a la información extraída del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular con la intención de tener una primera aproximación a la “articulación” deseada mediante logros de aprendizaje. Los logros de aprendizaje del nivel de secundaria sólo se mencionarán en este cartel. En cambio, en los otros niveles, estos logros son desarrollados en cada ciclo y grado, cómo se verá más adelante en la presentación por niveles, ciclos y grados.

Logros de aprendizaje por ciclos en la Educación Básica Regular*							
Lógico matemática						Matemática	
N	Inicial		Primaria			Secundaria	
E	0 a 3 años	3 a 5 años	6 a 8 años	8 a 10 años	10 a 12 años	12 a 14 años	14 a 17 años
	I CICLO	II CICLO	III CICLO	IV CICLO	V CICLO	VI CICLO	VII CICLO
Número Relaciones y Funciones	Identifica propiedades y características de los objetos de su entorno al explorarlos activa y autó-nomamente.	Establece relaciones entre personas y objetos de acuerdo a sus propiedades en situaciones cotidianas, en forma autónoma y creativa. Resuelve y comunica situaciones cotidianas que implican operaciones sencillas apreciando la utilidad de los números en diferentes contextos	Resuelve problemas para cuya solución se requiere aplicar estrategias y conceptos de las operaciones de adición y sustracción de números naturales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.	Resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales y de la adición y sustracción de fracciones. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.	Formula y resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de las operaciones con números naturales, fracciones y decimales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones	Resuelve situaciones problemáticas de la vida cotidiana, cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición y multiplicación de números naturales, enteros y racionales. Aborda con perseverancia y confianza en sí mismo, situaciones problemáticas de la vida cotidiana. Resuelve distintos tipos de problemas modelados por ecuaciones e inecuaciones en el conjunto de los números racionales.	Resuelve situaciones problemáticas de la vida cotidiana, cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición y multiplicación de números reales. Aborda con perseverancia y confianza en sí mismo, situaciones problemáticas de la vida cotidiana. Resuelve distintos tipos de problemas modelados por ecuaciones e inecuaciones en el conjunto de números reales.

Logros de aprendizaje por ciclos en la Educación Básica Regular*							
Lógico matemático						Matemática	
N	Inicial		Primaria			Secundaria	
E	0 a 3 años	3 a 5 años	6 a 8 años	8 a 10 años	10 a 12 años	12 a 14 años	14 a 17 años
	I CICLO	II CICLO	III CICLO	IV CICLO	V CICLO	VI CICLO	VII CICLO
Geometría y Medida	Establece relaciones espaciales con los objetos y personas de su entorno.	Establece y comunica relaciones espaciales de ubicación, dirección, distancia y posición respecto a objetos, personas y lugares de su entorno. Valora la importancia de orientarse en el espacio. Realiza mediciones en situaciones cotidianas usando unidades de medida arbitrarias propias de su contexto registrando y comunicando los resultados y apreciando la utilidad de la medición en la vida cotidiana.	Establece y comunica relaciones espaciales haciendo uso de sistemas de referencia para describirla; reconoce, nombra y describe figuras geométricas, asociándolos con objetos de su entorno. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.	Resuelve problemas que implican es-tablecimiento de relaciones espaciales, la interpretación y representación en el plano usando sistemas de referencia. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.	Formula y resuelve problemas que implican relaciones métricas: longitud, superficie, volumen, tiempo, y masa. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.	Modela representa-ciones gráficas de objetos tri-dimensionales en el plano; así como identifica, interpreta, grafica y relaciona figuras en el plano, áreas superficiales y volúmenes. Plantea, elabora y analiza relaciones entre lados y ángulos de diferentes figuras geométricas, así como realiza abstracciones a través del descubrimiento de regularidades numéricas y geométricas en el plano Interpreta el resultado obtenido al modelar y resolver una situación problemática de la vida real.	Modela representa-ciones gráficas de objetos tri-dimensionales en el plano; así como identifica, interpreta, grafica y relaciona figuras en el plano, áreas superficiales y sólidos de revolución. Realiza abstracciones a través del descubrimiento de regularidades numéricas en el plano y el espacio, así como áreas superficiales y sólidos de revolución. Interpreta el resultado obtenido al modelar y resolver una situación problemática de la vida real. Grafica e interpreta funciones reales de variable real.

Logros de aprendizaje por ciclos en la Educación Básica Regular*							
Lógico matemática						Matemática	
N	Inicial		Primaria			Secundaria	
E	0 a 3 años	3 a 5 años	6 a 8 años	8 a 10 años	10 a 12 años	12 a 14 años	14 a 17 años
	I CICLO	II CICLO	III CICLO	IV CICLO	V CICLO	VI CICLO	VII CICLO
Estadística probabilidad		Registra datos referidos a situaciones de su vida cotidiana apreciando el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación de acontecimientos de su vida familiar y escolar.	Registra y comunica información sobre situaciones de su realidad utilizando cuadros, esquemas y códigos. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación	Elabora e interpreta cuadros y gráficos estadísticos que presentan información sobre situaciones de su realidad. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación, juzgando críticamente la información obtenida	Formula y resuelve problemas que implican la representación e interpretación de cuadros y gráficas estadísticas. Manifiesta actitud crítica ante las informaciones y mensajes estadísticos y probabilísticas difundidos en los medios de comunicación	Elabora e interpreta diagramas de barra, polígonos de frecuencia y pictogramas, a partir de la información recopilada en su entorno escolar y familiar. Analiza e interpreta con actitud crítica la información estadística recopilada. Comprende el azar y su medida. Formula y analiza conjeturas utilizando operaciones combinadas en el conjunto de los números racionales. Verifica sus resultados.	Identifica e interpreta varia bles estadísticas, universo, muestras, frecuencia absoluta, relativa y acumulada, así como grafica histogramas, polígonos de frecuencia y ojivas. Analiza e interpreta con actitud crítica la información estadística recopilada, así como reconoce la utilidad de probabilidad en experimentos reales. Com prende el azar y su medida. Formula y analiza conjeturas utilizando operaciones combinadas en el conjunto de los números racionales. Verifica sus resultados.
	Cuna y aulas de 1 y 2 años	Aulas de 3 , 4 y 5 años de inicial	1º y 2º grados de primaria	3º y 4º grados de primaria	5º y 6º grados de primaria	1º y 2º grados de secundaria	3º, 4º y 5º grados de secundaria

Pág. 18; 32 y 33; 92 y 93; 125 a 128. del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular . Ministerio de Educación. Lima. 2005.

4. La educación matemática en el nivel de Educación Inicial

En este nivel, el documento considera dos ciclos: I ciclo de 0 a 2 años y II ciclo de 3 a 5 años. En el primer ciclo, la educación matemática aparece bajo el rubro de **pensamiento lógico matemático** y según el documento oficial, se consideran dos logros de aprendizaje (competencias):

- Identifica propiedades y características de los objetos de su entorno al explorarlos activa y autónomamente
- Establece espontáneamente relaciones espaciales con los objetos y personas de su entorno

¿Por qué es importante la educación matemática desde este ciclo?

El infante es un “aprendiz activo”, que explora, conjetura, interpreta, y construye progresivamente su realidad. Antes de disponer del lenguaje y de verbalizar, el infante es capaz de hacer conjeturas e hipótesis sobre los fenómenos que lo rodean y el devenir de los sistemas con que interactúa.

Los infantes de 3 a 4 meses “hacen predicciones” sobre el comportamiento físico de los objetos; la caída reiterada de un juguete lo inicia en el descubrimiento experimental del campo gravitatorio de la tierra. Deja caer el objeto y mira. Y constata – con satisfacción, parece – que cae de una manera y en un lugar que no le sorprende. Luego, lo deja caer de nuevo, y constata de nuevo que puede “predecir” su trayectoria.

Esta disposición natural o actitud exploratoria de su entorno, requiere de un acompañamiento pedagógico, que le permita descubrir progresivamente las “leyes” que rigen la evolución de los procesos naturales. Desde los 3 ó 4 meses de edad, los bebes inician un conocimiento físico del mundo: han aprendido experimentalmente que los objetos necesitan estar apoyados en algo para no caer, que los objetos estacionarios son desplazados cuando entran en contacto con objetos en movimiento y que los objetos inanimados necesitan ser impulsados por algún agente para ponerse en movimiento. Si lo observamos con atención, podremos constatar su aprendizaje a través de sus reacciones eficaces a los problemas y situaciones contextuales con que se enfrenta.

Tanto en matemáticas como en ciencias naturales las preguntas son el motor del aprendizaje y de la creatividad.

El **pensamiento lógico matemático,** según señala el documento, “se inicia en el aprendizaje con el cuerpo y las nociones asociadas a él. Posteriormente, el conocimiento lógico matemático se sitúa en la actuación del niño sobre los objetos y elementos de su entorno natural, social y cultural, y en las relaciones que a partir de su actividad, establece con ellos”.

Cuando se trabaja con objetos, el conocimiento lógico matemático no se refiere solo a las propiedades de cada uno, sino a las relaciones que se pueden establecer entre ellos ("ser más grande que", "tener el mismo color que", etc.), lo que constituye una elaboración mental y no solo una descripción de las propiedades físicas.

Los siguientes cuadros presentan los dos logros de aprendizaje del primer ciclo:

- ***Identifica propiedades y características de los objetos de su entorno al explorarlos activa y autónomamente***

Capacidades y actitudes				
0-6 meses	**6-9 meses**	**9-12 meses**	**1 año**	**2 años**
Observa y manipula los objetos, descubriendo características de los mismos.	Observa y coge los objetos, interesándose en seguir visualmente su trayectoria cuando se desplazan y caen.	Explora objetos de su preferencia que están a su alcance	Explora objetos que están a su alcance, descubriendo sus características.	Explora objetos y describe alguna de sus características.
Muestra curiosidad por seguir y buscar un objeto que ha salido de su campo visual inmediato.	Busca los objetos que han salido de su campo visual o que se encuentran parcialmente ocultos.	Verifica la permanencia de un objeto, buscándolo en el primer lugar donde lo vio.	Verifica la permanencia de un objeto buscándolo con curiosidad en el primer lugar donde lo vio.	Busca un objeto escondido inicialmente en el primer lugar donde lo vio y luego en otros lugares.
		Observa con interés que los objetos pueden relacionarse entre sí.	Demuestra interés por establecer relaciones entre los objetos.	Relaciona objetos en función de criterios propios.
			Muestra interés por llegar a la solución de los problemas que las situaciones le presentan.	Muestra perseverancia en la búsqueda de solución de problemas.

- ***Establece relaciones espaciales con los objetos y personas de su entorno.***

Capacidades y actitudes				
0-6 meses	**6-9 meses**	**9-12 meses**	**1 año**	**2 años**
Identifica los espacios y objetos familiares.	Reconoce personas y objetos familiares en diferentes posiciones y ubicaciones.	Establece relaciones espaciales entre su cuerpo y personas u objetos del medio a través de sus movimientos y desplazamientos.	Observa y descubre lo que cambia y lo que permanece igual cuando varían las perspectivas espaciales de los objetos.	Relaciona objetos según su ubicación en el espacio teniendo como referencia a su propio cuerpo: arriba, abajo, delante, atrás, cerca, lejos, dentro, fuera.
Se muestra interesado por explorar su entorno a través de su cuerpo en distintas posiciones.	Muestra curiosidad por explorar los espacios abiertos y cerrados.	Realiza desplazamientos en diferentes direcciones, de acuerdo a sus necesidades e intereses	Explora el espacio utilizando formas propias de desplazamientos variando y/o adecuando la velocidad a las distintas situaciones	Explora los espacios de su entorno a través de su cuerpo, vivenciando y reconociendo distintas nociones espaciales.

En el segundo ciclo de Educación Inicial (3 a 5 años), el documento oficial se refiere al área curricular **LÓGICO MATEMÁTICA,** donde propone el desarrollo de las capacidades de **razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas** y los relaciona con los tres componentes temáticos: 1. Número, relaciones y funciones, 2. Geometría y Medida y 3. Estadística y Probabilidad que también organizarán el trabajo de matemática en los niveles de primaria y secundaria.

Este documento señala la importancia de esta área al afirmar que “cuando las niñas y los niños, llegan a los 3 años, e ingresan a la escuela o programa no escolarizado de educación inicial, ya han alcanzado un cierto nivel de desarrollo de su pensamiento lógico-matemático, lo que les permite establecer relaciones con el mundo real y construir nuevos aprendizajes tienen ideas aproximadas de algunos cuantificadores básicos que han surgido de su propia experiencia lingüística. Y es así como han ido acumulando un caudal de experiencias que mediante sucesivas precisiones les permitirá construir su futuro lenguaje matemático”

Se aspira a que el conocimiento lógico-matemático sea construido por las niñas y los niños a partir de los problemas a los que se enfrentan en su vida cotidiana, pero como este conocimiento no es espontáneo, sino un producto cultural (como, por ejemplo, el sistema de numeración), hay que tener en cuenta su “experiencia matemática” como resultado de su socialización primaria dentro de su contexto cultural, social, linguístico y natural. “Poseen cierto nivel de desarrollo de sus estructuras cognitivas, a partir de las cuales pueden seguir avanzando en la construcción de sus conocimientos lógico-matemáticos: Para ello deberán contar con el apoyo pedagógico de la docente, en función de las necesidades particulares de cada niña y niño, a fin de permitirles desarrollar sus potencialidades en forma óptima. A partir de la actividad lógico-matemática van desarrollando y modificando sus esquemas de interpretación de la realidad, ampliándolos, reorganizándolos y relacionando los nuevos saberes con sus conocimientos previos”.

El desarrollo de los conocimientos lógico matemáticos permite a la niña y el niño realizar elaboraciones mentales para comprender el mundo sociocultural y natural que les rodea, ubicarse y actuar en él, representarlo e interpretarlo. Ante una situación problemática la niña y el niño muestran asombro, elaboran supuestos, buscan estrategias para dar respuestas a interrogantes, descubren diversas formas para resolver las cuestiones planteadas, desarrollan actitudes de confianza y constancia en la búsqueda de soluciones. Por otro lado su entorno le presenta desafíos para solucionar problemas, pero al mismo tiempo ofrece múltiples oportunidades para desarrollar competencias (capacidades y actitudes) matemáticas.

Esto significa que el pensamiento matemático se va estructurando desde estos primeros años de vida, en forma gradual y sistemática. La niña y el niño observan y exploran su entorno inmediato y los objetos que lo configuran, estableciendo relaciones entre ellos al realizar actividades concretas en su vida cotidiana mediante la exploración y manipulación de objetos, la participación en juegos y la elaboración e interpretación de esquemas, gráficos y dibujos.

La representación matemática hace evidente la necesidad que tienen las niñas y los niños de establecer y comunicar relaciones espaciales y representarlas en el plano, identificar características de los objetos del entorno relacionándolos con figuras y formas geométricas, comunicar información cuantitativa correspondiente a situaciones del entorno, resolver problemas relacionados con situaciones cotidianas, reflexionar sobre situaciones reales, producir, registrar y comunicar información cuantitativa utilizando cuadros, esquemas y códigos (lenguaje gráfico) correspondientes a situaciones reales y significativas, realizar mediciones en circunstancias cotidianas, analizar la información pertinente, aplicar su conocimiento matemático para comprenderlas y emitir un juicio o tomar decisiones.

Por eso es necesario favorecer la utilización de conocimientos y procedimientos matemáticos de la propia cultura en el quehacer de las niñas y los niños. Hay seis tipos de actividades relacionadas con el entorno que implican el uso de las matemáticas, y que están presentes en todas las culturas:

- Contar, calcular (cuantificar el entorno).
- Orientarse (localizar un lugar en relación a otros).
- Medir (con mayor o menor precisión).

- Diseñar (dimensión estética de toda cultura).
- Jugar (establecimiento de normas y reglas de inferencia).
- Explicar (conexión del razonamiento con la estructura lingüística).

En este ciclo de 3 a 5 años, las niñas y niños alcanzarán **seis logros de aprendizaje** que se han organizado según los componentes temáticos:

Componente 1: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

- ***Establece relaciones entre personas y objetos de acuerdo a sus propiedades en situaciones cotidianas, en forma autónoma y creativa.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
Identifica objetos y sus características perceptuales: color, tamaño, forma.	Identifica objetos y sus características perceptuales y funcionales: color, tamaño, textura, forma y uso.	Identifica objetos y sus características perceptuales y funcionales: color, tamaño, espesor, textura, forma, estructura y los utiliza de acuerdo a su función.
Relaciona objetos por semejanzas y diferencias teniendo en cuenta un atributo.	Relaciona objetos por semejanzas y diferencias teniendo en cuenta dos atributos y los explica.	Relaciona objetos por semejanzas y diferencias teniendo en cuenta dos o más atributos y los explica.
Relaciona los objetos de una colección utilizando cuantificadores: “muchos/ pocos”, “muchos / uno/ ninguno”	Relaciona los objetos de una colección utilizando cuantificadores: “muchos” “pocos”, “uno” “ninguno”, “varios”	Relaciona los objetos de una colección utilizando cuantificadores: “muchos” “pocos”, “uno” “ninguno”, “varios” “más que...” “menos que...”
Agrupa objetos utilizando un atributo.	Agrupa objetos con 1 ó 2 atributos y argumenta la pertenencia y no pertenencia de un objeto a una colección.	Agrupa objetos utilizando diversos atributos y argumenta la pertenencia y no pertenencia de un objeto a una colección.
Relaciona objetos en función de características perceptuales: más grande, más pequeño, más duro, más blando.	Relaciona objetos en función de características perceptuales: más alto, más bajo, más duro, más blando, más suave, más áspero.	Relaciona objetos en función de características perceptuales: más alto, más bajo, más duro, más blando, más suave, más áspero, más frío, más caliente.
	Relaciona colecciones hasta de 5 objetos: “tantos como”, “uno más que ”y“ uno menos que”.	Relaciona colecciones hasta de 10 objetos: “tantos como”, “uno más que ”y “uno menos que”.

- ***Resuelve y comunica situaciones cotidianas que implican operaciones sencillas apreciando la utilidad de los números en diferentes contextos.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
Interpreta las características y relaciones en colecciones de objetos.	Representa gráficamente colecciones de objetos y las interpreta	Representa gráficamente colecciones de objetos y las interpreta y argumenta
Utiliza códigos no convencionales para representar una colección de objetos.	Representa gráficamente la cantidad de objetos de una colección mediante códigos convencionales y no convencionales.	Representa gráficamente la cantidad de objetos de una colección mediante códigos convencionales y no convencionales.
	Reconoce cantidades de objetos de una colección hasta el 5.	Codifica el número de objetos de una colección hasta 9.
Realiza diversas acciones para resolver situaciones problemáticas.	Organiza y ejecuta diversas acciones para resolver situaciones problemáticas.	Planifica acciones para resolver situaciones problemáticas y las comprueba.
	Interpreta y crea series de objetos de acuerdo a un criterio, y las argumenta.	Interpreta y crea series de objetos de acuerdo a un criterio, y las argumenta.
Ordena objetos de una colección utilizando los ordinales: primero y último.	Ordena objetos de una colección utilizando los ordinales hasta el tercer lugar.	Ordena objetos de una colección utilizando los ordinales hasta el quinto lugar.
Resuelve situaciones problemáticas que implican aplicaciones sencillas: agregar.	Resuelve situaciones problemáticas que implican aplicaciones sencillas: agregar, reunir.	Resuelve situaciones problemáticas que implican aplicaciones sencillas: agregar, reunir, quitar.
	Resuelve situaciones problemáticas que implican aplicaciones sencillas: quitar, separar, prestar.	Resuelve situaciones problemáticas que implican aplicaciones sencillas: quitar, separar, prestar, repartir.

Componente 2: GEOMETRÍA Y MEDIDA

- ***Establece y comunica relaciones espaciales de ubicación, dirección, distancia y posición respecto a objetos, personas y lugares de su entorno. Valora la importancia de orientarse en el espacio.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
Se ubica en el espacio identificando las nociones: dentro, fuera, arriba, abajo, cerca de, lejos de.	Se ubica en el espacio identificando las nociones: dentro, fuera, arriba, abajo, cerca de, lejos de, aun lado, al otro lado, delante, atrás.	Se ubica en el espacio identificando las nociones: dentro, fuera, arriba, abajo, cerca de, lejos de, aun lado, al otro lado, delante, atrás, a la derecha, a la izquierda.
	Interpreta en gráficos las relaciones de los objetos según su ubicación en el espacio teniendo como referencia diversos puntos: arriba, abajo, delante, atrás, cerca de, lejos de, dentro de, fuera de a un lado, al otro lado.	Interpreta en gráficos las relaciones de los objetos según su ubicación en el espacio teniendo como referencia diversos puntos: arriba, abajo, delante, atrás, cerca de, lejos de, dentro de, fuera de a un lado, al otro lado, a la derecha, a la izquierda.
	Representa e interpreta códigos de desplazamiento y describe su direccionalidad: hacia delante, hacia atrás, hacia arriba, hacia abajo, un lado y al otro lado.	Representa e interpreta códigos de desplazamiento y describe su direccionalidad: hacia delante, hacia atrás, hacia arriba, hacia abajo, un lado y al otro lado, hacia la derecha, hacia la izquierda.

- ***Reconoce, describe y representa formas y figuras geométricas de su entorno y experimenta creativamente con ellos.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
Identifica las formas y las figuras geométricas básicas: cuadrado y círculo; y las relaciona con objetos de su entorno.	Identifica las formas y las figuras geométricas básicas: cuadrado, rectángulo y círculo; y las relaciona con objetos de su entorno.	Identifica las formas y las figuras geométricas básicas: cuadrado, rectángulo, círculo, rombo y las relaciona con objetos de su entorno.

- ***Realiza mediciones en situaciones cotidianas usando unidades de medida arbitrarias propias de su contexto registrando y comunicando los resultados y apreciando la utilidad de la medición en la vida cotidiana.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
	Calcula la longitud de objetos de su entorno con unidades arbitrarias: mano, brazo, pie.	Calcula la longitud de objetos de su entorno con unidades arbitrarias de su cuerpo y objetos.
Estima la duración de ciertas actividades: mucho tiempo, poco tiempo, rápido, lento.	Estima la duración de ciertas actividades: mucho tiempo, poco tiempo, lento, rápido y las relaciona con referentes temporales: en el día, en la noche, a la hora de.	Estima la duración de ciertas actividades: mucho tiempo, poco tiempo, lento, rápido y las relaciona con referentes temporales: en el día, en la noche, a la hora de, día de la semana.

Componente 3: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

- ***Registra datos referidos a situaciones de su vida cotidiana apreciando el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación de acontecimientos de su vida familiar y escolar.***

Capacidades y actitudes		
3 años	**4 años**	**5 años**
	Utiliza cuantificados con códigos de registro de datos: palotes y puntos.	Representa situaciones cuantificables utilizando códigos de registro de datos: palotes y puntos.
		Interpreta tablas de doble entrada y diagramas de barras de su vida cotidiana.

5. La educación matemática en el nivel de Educación Primaria

En este nivel educativo, el documento oficial afirma que "… la matemática se aprende para entender el mundo y desenvolverse en él, comunicarse con los demás resolver problemas y desarrollar el pensamiento lógico – matemático." Desde este punto de vista la enseñanza de la matemática en este nivel plantea como propósitos desarrollar:

- **El razonamiento y la demostración**, es decir, desarrollar ideas, explorar fenómenos, justificar resultados, expresar conclusiones e interrelaciones entre variables.

- **La comunicación matemática,** es decir, valorar la matemática entendiendo y apreciando el rol que cumple en la sociedad, comprendiendo e interpretando diagramas, gráficas y expresiones simbólicas, que evidencian las relaciones entre conceptos y variables matemáticas para darles significado.
- **La resolución de problemas,** que permitirá al estudiante manipular los objetos matemáticos, activar su propia capacidad mental, ejercitar su creatividad, reflexionar y mejorar procesos de pensamiento.

A continuación, se detalla en cada ciclo los logros de aprendizaje con las diferentes capacidades implicadas y su relación con los componentes temáticos.

Logros de aprendizaje en el En el III Ciclo de educación primaria:

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

- ***Resuelve problemas para cuya solución se requiere aplicar estrategias y conceptos de las operaciones de adición y sustracción de números naturales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.***

Capacidades y Actitudes	
Primer grado	**Segundo Grado**
▪ Identifica y relaciona objetos de acuerdo a características comunes con criterios propios y con criterios dados	▪ Establece relaciones de “pertenencia” y “no pertenencia” entre elementos y conjuntos.
▪ Identifica características de elementos en colecciones de objetos y utiliza cuantificadores: “todos”, “algunos”, “ninguno”. ▪ Representa gráficamente la clasificación de objetos de acuerdo a propiedades. ▪ Establece las relaciones entre colecciones de objetos: “tantos como”, “menos que” y “más que”. ▪ Relaciona números ordinales con la ubicación de objetos. ▪ Relaciona colecciones de objetos con el número natural que los representa	▪ Interpreta y usa los cuantificadores: “todos”, “algunos”, “ninguno” en colecciones de objetos. ▪ Interpreta y elabora esquemas de clasificación de objetos.
▪ Interpreta, codifica y representa gráficamente números de dos dígitos: Unidades, Decenas.	▪ Interpreta, codifica y representa gráficamente números de tres dígitos: Unidades, Decenas, Centenas.

▪ Establece relaciones “mayor”, “menor”, “igual” y ordena números naturales menores o iguales que 20.	▪ Establece relaciones “mayor”, “menor”, “igual” y ordena números naturales menores o iguales que 100.
▪ Interpreta y formula sucesiones finitas con números naturales menores o iguales que 20. ▪ Identifica el criterio de organización de patrones en series. ▪ Interpreta la adición de números naturales con significados de juntar, agregar, avanzar, y sustracción con significados de separar, quitar, retroceder.	▪ Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 100: de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 10 en 10. ▪ Interpreta la relación que existe entre adición y sustracción de números naturales. ▪ Ejemplo: 6 + = 15.
▪ Representa gráficamente la adición y la sustracción de números naturales menores que 20, con colecciones de objetos y en una recta graduada.	▪ Representa gráficamente la adición y sustracción de números naturales menores que 100 en una recta graduada.
▪ Identifica el valor de las monedas del sistema monetario nacional.	▪ Resuelve problemas en los que relaciona el valor de monedas del sistema monetario nacional.
▪ Resuelve problemas de adición de números naturales cuyo resultado sea menor que 50, sin canjes y con canjes. ▪ Resuelve problemas de sustracción de números naturales menores que 50, sin canjes. ▪ Resuelve problemas de adición de números naturales cuyo resultado sea menor que 100, sin canjes y con canjes. ▪ Resuelve problemas de sustracción de números naturales menores que 100, sin canjes. ▪ Resuelve problemas de adición y sustracción a partir de historias y gráficos de su entorno.	▪ Resuelve problemas de adición de números naturales cuyo resultado sea menor que 1 000, sin canjes y con canjes. ▪ Resuelve problemas de sustracción de números naturales menores que 1 000, sin y con canjes.
▪ Aplica las agrupaciones y suma repetida para solucionar situaciones que implican la noción de doble o triple de un número.	▪ Interpreta la multiplicación de dos números naturales. ▪ Resuelve problemas de multiplicación de números de un solo dígito, y de números de un dígito por 10. ▪ Interpreta y calcula el doble de un número natural menor que 100 y la mitad de un número par menor que 100.
	▪ Identifica la decena más cercana de un número natural menor que 100.

Componente: GEOMETRIA Y MEDIDA

- ***Establece y comunica relaciones espaciales haciendo uso de sistemas de referencia para describirla; reconoce, nombra y describe figuras geométricas, asociándolos con objetos de su entorno. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.***

Capacidades y Actitudes	
Primer Grado	**Segundo Grado**
▪ Identifica y grafica posiciones y desplazamientos de objetos: a la derecha, a la izquierda, delante de, detrás de, arriba, abajo, dentro, fuera, encima, debajo, entre. ▪ Interpreta códigos de desplazamiento de objetos.	▪ Interpreta posiciones y desplazamientos de objetos respecto a otros. ▪ Grafica posiciones y desplazamientos de objetos en sistemas de referencia: ejes, cruces, filas y columnas.
▪ Identifica y grafica líneas rectas y curvas.	▪ Identifica y grafica líneas cerradas y no cerradas.
▪ Relaciona objetos con formas geométricas: rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cubo, cilindro y esfera.	▪ Identifica elementos esenciales de figuras geométricas planas: rectángulo, cuadrado, triángulo.
▪ Relaciona acontecimientos con referentes temporales: antes de, después de, al mismo tiempo que, ayer, hoy, mañana.	▪ Calcula la duración de acontecimientos con referentes temporales: día, semana, hora, minutos.
▪ Establece las relaciones “mayor”, “menor” e “igual” entre longitudes de objetos expresadas en una misma unidad arbitraria de medida.	▪ Establece las relaciones “mayor”, “menor” e “igual” entre longitudes de objetos expresadas en una misma unidad oficial: m , cm .
▪ Resuelve problemas que involucran la noción de longitud de un objeto en unidades arbitrarias de medida.	▪ Resuelve problemas que involucran la noción de área de un rectángulo en unidades arbitrarias de medida.

Componente: ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

- ***Registra y comunica información sobre situaciones de su realidad utilizando cuadros, esquemas y códigos. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación.***

Capacidades y Actitudes	
Primer Grado	**Segundo Grado**
▪ Representa gráficamente e interpreta datos de situaciones cotidianas en tablas simples y gráfico de barras.	▪ Representa datos de situaciones de su entorno en tablas de doble entrada y gráficos de barras y las interpreta.
	▪ Identifica la ocurrencia de fenómenos que se dan: "siempre", "nunca", o "a veces".

Logros de aprendizaje en el En el IV Ciclo de educación primaria:

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

- ***Resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales y de la adición y sustracción de fracciones. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones"***

Capacidades y Actitudes	
Tercer grado	**Cuarto Grado**
▪ Interpreta operaciones de unión e intersección de conjuntos.	▪ Representa operaciones entre conjuntos: unión , intersección, diferencia.
▪ Identifica el valor de verdad de proposiciones simples.	▪ Interpreta y formula proposiciones simples.
▪ Interpreta el valor posicional de números menores que 10 000 en el sistema de numeración decimal. ▪ Interpreta y relaciona la división de números naturales con los significados: partir, repartir. ▪ Interpreta y representa gráficamente fracciones usuales. ▪ Representa gráficamente e identifica fracciones usuales equivalentes.	▪ Interpreta y recodifica números naturales menores que 100 000 . Ejemplo: 1830 = 1UM 8C 3D = 1000 + 800 + 30. ▪ Interpreta la relación que existe entre multiplicación y división de números naturales al realizar operaciones. ▪ Interpreta y representa gráficamente fracciones propias e impropias.

▪ Establece relaciones "mayor", "menor", "igual" y ordena fracciones homogéneas. ▪ Interpreta el significado de fracciones homogéneas. ▪ Resuelve problemas de adición con fracciones homogéneas.	▪ Establece relaciones "mayor", "menor", "igual" y ordena números naturales y fracciones. ▪ Interpreta el significado de la adición y sustracción de fracciones heterogéneas. ▪ Resuelve y formula problemas de adición y sustracción con fracciones homogéneas.
▪ Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 1 000 con un mismo criterio de formación. Ejemplo: 324, 336, 348,...	▪ Interpreta y formula sucesiones con números naturales menores que 1 000 con dos criterios de formación. Ejemplo: 4; 9; 5; 7; 6; 5:...
▪ Representa gráficamente la noción de cambio de moneda nacional soles – céntimos (moneda –moneda).	▪ Representa gráficamente la noción de cambio de moneda nacional soles – céntimos (moneda –billete).
▪ Resuelve problemas que implica la interpretación y recodificación de valores de monedas y billetes del sistema monetario nacional.	▪ Resuelve problemas que implican establecer relaciones entre monedas y billetes del sistema monetario nacional.
▪ Resuelve problemas de adición y sustracción de números naturales menores que 10 000, sin canjes y con canjes.	▪ Resuelve y formula problemas de adición y multiplicación de números naturales.
▪ Aplica propiedades de la multiplicación en el cálculo del producto de números naturales de 2 dígitos. ▪ Resuelve problemas de multiplicación de dos números naturales de un dígito, y de un número natural de dos dígitos por otro de un dígito. ▪ Resuelve problemas de multiplicación de un número de dos dígitos por 10, 100 y 1 000.	▪ Aplica propiedades de la multiplicación en el cálculo del producto de números naturales de dos o más dígitos. ▪ Resuelve y formula problemas de multiplicación de números naturales menores que 10 000. ▪ Interpreta la división de números naturales menores que 10 000. ▪ Resuelve y formula problemas de división con números naturales menores que 10 000.
▪ Identifica la centena o la decena más cercana de un número natural menor que 1 000 ▪ Resuelve problemas que implican la estimación y el cálculo de operaciones combinadas de adición y sustracción con números naturales menores que 1 000, aplica propiedades.	▪ Interpreta y redondea números naturales hasta los millares. ▪ Resuelve y formula problemas que implican la estimación y el cálculo de operaciones combinadas de adición, multiplicación y división de números naturales menores que 10 000, aplica propiedades.

Componente GEOMETRIA Y MEDIDA

- ***Resuelve problemas que implican establecimiento de relaciones espaciales, la interpretación y representación en el plano usando sistemas de referencia. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.***

Capacidades y Actitudes	
Tercer Grado	**Cuarto Grado**
▪ Interpreta y grafica posiciones y desplazamientos de objetos en el plano: maquetas, croquis, cuadrículas. ▪ Grafica figuras geométricas simétricas planas respecto a un eje de simetría.	▪ Identifica el sistema de coordenadas y grafica figuras geométricas planas en el primer cuadrante del plano cartesiano. ▪ Identifica y grafica ejes de simetría de figuras geométricas planas: triángulo isósceles, cuadrado, rectángulo, rombo, círculo, trapecio.
▪ Identifica elementos esenciales de los cuerpos geométricos: prisma, cubo y cilindro. ▪ Interpreta y grafica en un mismo cuadriculado la traslación de figuras geométricas planas: cuadrado, rectángulo.	▪ Identifica y grafica paralelogramos y triángulos. ▪ Identifica, interpreta y grafica en el primer cuadrante del plano cartesiano transformaciones de figuras geométricas planas: traslación, ampliación y reducción.
▪ Resuelve problemas sobre la duración de acontecimientos en relación con referentes temporales: minutos, horas, días, semanas.	▪ Resuelve problemas sobre la duración de acontecimientos en relación con referentes temporales: segundos, minutos, horas, días, semanas, meses, años.
▪ Resuelve problemas que implican el calculo y la estimación de longitudes de objetos en unidades oficiales de medida: m, cm.	▪ Resuelve problemas que implican el calculo y la estimación del perímetro de figuras geométricas en unidades oficiales de medida: m, dm, cm.
▪ Resuelve problemas que implican el cálculo de áreas de rectángulos y cuadrados en unidades arbitrarias de medida. ▪ Identifica y grafica rectas paralelas y perpendiculares en el plano. ▪ Resuelve problemas que involucran la noción de volumen de cuerpos geométricos en unidades arbitrarias de medida.	▪ Resuelve problemas que implican el cálculo de áreas de rectángulos y cuadrados en las unidades oficiales: dm2, cm2. ▪ Grafica rectas secantes e Identifica y mide ángulos. ▪ Resuelve problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos en cm3.

Componente ESTADISTICA Y PROPABILIDAD

- ***Elabora e interpreta cuadros y gráficos estadísticos que presentan información sobre situaciones de su realidad. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación, juzgando críticamente la información obtenida.***

Capacidades y Actitudes	
Tercer Grado	**Cuarto Grado**
▪ Representa e interpreta tablas de doble entrada, gráficos de barras y pictogramas.	▪ Interpreta y representa datos estadísticos en diversos tipos de gráficos: de barras, poligonales y pictogramas.
▪ Identifica sucesos seguros, probables e improbables	▪ Identifica fenómenos y hechos de carácter determinista, es decir que pueden predecir lo que va a ocurrir, y fenómenos de azar, es decir que no se puede predecir lo que va a ocurrir.

Logros de aprendizaje en el En el V Ciclo de educación primaria:

Componente: NÚMERO, RELACIONES Y FUNCIONES

- ***Formula y resuelve problemas para cuya solución requiere la aplicación de estrategias, conceptos y algoritmos de las operaciones con números naturales, fracciones y decimales. Aprecia la utilidad de los números en la vida diaria, demuestra confianza en sus propias capacidades y perseverancia en la búsqueda de soluciones.***

Capacidades y Actitudes	
Quinto Grado	**Sexto Grado**
▪ Interpreta operaciones entre conjuntos: diferencia, diferencia simétrica.	▪ Representa operaciones entre conjuntos: diferencia simétrica y complemento de un conjunto.
▪ Interpreta y formula proposiciones con conectivos lógicos “y”, “o” .	▪ Interpreta y formula la negación de una proposición simple.
▪ Interpreta y recodifica números naturales. Ejemplo: 6843 = 6UM 8C 4D 3U = 6 000 + 800 + 40 + 3 = 6x1000 + 8x100 + 4x10 + 3. ▪ Interpreta y representa gráficamente números decimales partir de fracciones decimales con denominador 10 y 100	▪ Interpreta y representa gráficamente el valor posicional de números naturales y decimales en el sistema de numeración decimal. ▪ Relaciona números decimales exactos hasta los centésimos con puntos de la recta numérica.

▪ Establece relaciones "mayor", "menor", "igual" y ordena números decimales exactos hasta los centésimos y fracciones con denominador 10 y 100. ▪ Interpreta el significado de la multiplicación de fracciones. ▪ Resuelve y formula problemas de adición, sustracción y multiplicación con fracciones.	▪ Establece relaciones "mayor", "menor", "igual" y ordena números naturales, fracciones y números decimales exactos hasta los centésimos. ▪ Interpreta la operación de división de fracciones. ▪ Resuelve y formula problemas de operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones.
▪ Interpreta y formula sucesiones con números naturales y decimales. Utiliza diversos criterios de formación.	▪ Interpreta y formula sucesiones con números naturales, fracciones y decimales exactos.
▪ Representa gráficamente la noción de cambio de moneda nacional soles – céntimos (moneda –billete - moneda).	▪ Representa gráficamente la noción de cambio de moneda nacional y el dólar.
▪ Resuelve problemas comerciales que involucran el uso del sistema monetario nacional.	▪ Interpreta la noción de proporcionalidad en el cambio monetario.
▪ Aplica propiedades en la resolución y formulación de problemas que implican la estimación y el cálculo con operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales.	▪ Aplica propiedades en la resolución y formulación de problemas que implican la estimación y el cálculo con operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación de números naturales.
▪ Resuelve y formula problemas que implican la aplicación de la proporcionalidad. ▪ Interpreta el significado de MCM y MDM de números naturales	▪ Resuelve y formula problemas que implican el cálculo de porcentajes. ▪ Identifica factores primos de números naturales y los criterios de divisibilidad de números naturales por 2, 3, 4, 5, 6 y 10. ▪ Resuelve problemas que implican el uso del MCM Y MCD. ▪ Interpreta y representa en operaciones la potenciación de números naturales.
▪ Resuelve y formula problemas de adición y sustracción con números decimales hasta los décimos.	▪ Resuelve y formula problemas de adición, sustracción, multiplicación y división con números decimales.

Componente GEOMETRIA Y MEDIDA

- ***Formula y resuelve problemas que implican relaciones métricas: longitud, superficie, volumen, tiempo, y masa. Demuestra actitud exploradora del medio que le rodea y aprecia la utilidad de la medición en la vida diaria.***

Capacidades y Actitudes	
Quinto Grado	**Sexto Grado**
▪ Resuelve problemas que implican identificar las coordenadas de vértices de figuras geométricas planas básicas. ▪ Identifica y grafica en el primer cuadrante del plano cartesiano figuras geométricas simétricas planas respecto a un eje de simetría.	▪ Establece coordenadas de posición en la aplicación de traslación y rotación de figuras. ▪ Representa la rotación de figura con ángulos de 30º, 60º, 120º, 180º
▪ Identifica y grafica polígonos; así como poliedros: prismas rectos y pirámides. ▪ Identifica, interpreta y grafica en el primer cuadrante del plano cartesiano transformaciones de figuras geométricas planas: traslación, ampliación, reducción y rotación de 90°.	▪ Construye prismas y poliedros, identificando sus elementos carácterísticos. ▪ Resuelve problemas que implican la ampliación y reducción de figuras geométricas planas utilizando escalas y conceptos de proporcionalidad.
▪ Resuelve y formula problemas que implican el uso de unidades de tiempo.	
▪ Resuelve y formula problemas sobre longitudes en diferentes unidades de medida: km, m, dm, cm .	▪ Resuelve problemas sobre la longitud de una circunferencia.
▪ Resuelve problemas que implican el cálculo de áreas de figuras geométricas: triángulo, cuadrado y rectángulo, expresadas en diferentes unidades de medida. ▪ Resuelve problemas sobre la medida de ángulos. ▪ Resuelve problemas de medición y comparación de volúmenes de cubos y prismas, dm3 y cm3. ▪ Resuelve problemas sobre capacidad de recipientes, en unidades comerciales: litro, galón; y con unidades usuales de la comunidad.	▪ Resuelve problemas que implican relaciones entre áreas y perímetros de figuras geométricas: triángulo, cuadrado, rectángulo. ▪ Resuelve problemas sobre área de círculo. ▪ Resuelve problemas sobre medidas de ángulos internos de un triángulo. ▪ Resuelve problemas sobre volúmenes de prismas y cilindros, en , dm3 y cm3. ▪ Resuelve problemas que implican relaciones entre el dm3 y el litro.

Componente: ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

- ***Formula y resuelve problemas que implican la representación e interpretación de cuadros y gráficas estadísticas. Manifiesta actitud crítica ante las informaciones y mensajes estadísticos y probabilísticos difundidos en los medios de comunicación.***

Capacidades y Actitudes	
Quinto Grado	**Sexto Grado**
▪ Interpreta y representa datos estadísticos en diversos tipos de gráficos: de barras, poligonales, pictogramas y circulares.	▪ Representa gráficamente e interpreta datos estadísticos extraídos de diferentes fuentes de información. ▪ Resuelve problemas que implican interpretar y calcular promedios.
▪ Identifica e interpreta la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno.	▪ Resuelve problemas sobre la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno.

6. La educación matemática en el nivel de Educación Secundaria

En este nivel de la Educación Básica Regular, se afirma que el área de Matemática permite que el estudiante se enfrente a situaciones problemáticas, vinculadas o no a un contexto real con una actitud crítica. También, se afirma que "se debe enseñar a usar la matemática, dadas las características que presenta la labor matemática en donde la lógica y la rigurosidad permiten desarrollar un pensamiento crítico."

El documento oficial, al igual que en el nivel de primaria, plantea el desarrollo de las siguientes capacidades:

- **Razonamiento y demostración,** para comprender la matemática es esencial saber razonar matemáticamente, debiendo convertirse en un hábito mental. Por ejemplo, la construcción de modelos geométricos y el razonamiento espacial ofrecen vías para interpretar y describir entornos físicos y pueden constituir herramientas importantes en la resolución de problemas.
- **Comunicación matemática,** esta capacidad permite expresar, compartir y aclarar las ideas, las cuales llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión, análisis y reajuste. Las conversaciones en las que se exploran las ideas matemáticas desde diversas perspectivas ayudan a compartir lo que se piensa y hacer conexiones entre tales ideas.
- **Resolución de problemas,** de suma importancia por su carácter integrador ya que posibilita el desarrollo de otras capacidades complejas y procesos cognitivos de orden superior que permiten una diversidad de transferencias y

aplicaciones a otras situaciones y áreas curriculares y en consecuencia, proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo.

Las capacidades a desarrollar en los cinco grados de éste nivel son presentados en el siguiente cuadro[8]:

Capacidades fundamentales	**Logros de Aprendizaje (Capacidades) – Matemática**		
	Razonamiento y demostración	**Comunicación matemática**	**Resolución de problemas**
	Identifica/Discrimina Datos conceptos Conjeturas, proposiciones Información pertinente Procesos cognitivos usa dos en el razonamiento y la demostración	**Identifica/Discrimina** Gráficas y expresiones simbólicas Representaciones simbólicas Procesos cognitivos usa dos en la interpretación de gráficos	**Identifica/Discrimina** Conjeturas, interrogantes, incógnitas. Datos Procesos cognitivos usa dos en la resolución de problemas.
Pensamiento creativo	**Anticipa** Argumentos lógicos Procedimientos de demostración		**Anticipa** Argumentos lógicos El uso pertinente de algoritmos
Pensamiento crítico	**Analiza/Organiza** Datos disponibles Condiciones determinadas	**Analiza** Representaciones gráficas Expresiones simbólicas	**Analiza** Datos disponibles Tipos de problemas Estrategias de resolución de problemas.
Solución de problemas	**Interpreta** Postulados matemáticos Teoremas Estrategias de razonamiento y demostración	**Interpreta** Datos disponibles Condiciones Postulados y teoremas Matemáticos Gráficos Expresiones simbólicas	**Interpreta/Infiere** Datos disponibles Condiciones Postulados Matemáticos. Teoremas Situaciones problemáticas Resultados Datos implícitos.
	Infiere Datos implícitos Conclusiones Procedimientos	**Infiere** Datos implícitos Representaciones y gráficas.	**Organiza** Estrategias para la resolución de problemas.
Toma de decisiones	**Formula/Elabora** Conceptos Conjeturas Proposiciones Ejemplos, contraejemplos Diseños, tablas **Recrea** Axiomas Teoremas	**Formula/Elabora** Ejemplos, contraejemplos Gráficos Representaciones simbólicas. **Representa** Axiomas Teoremas	**Formula/Elabora** Estrategias de resolución de problemas. Conjeturas Proposiciones Ejemplos, contraejemplos Diseños, tablas. Resultados
	Evalúa Conceptos y relaciones El proceso cognitivo para el razonamiento y la demostración. Estrategias metacognitivas empleadas	**Evalúa** Conceptos y relaciones El proceso cognitivo para interpretar gráficos y expresiones simbólicas. Estrategias metacognitivas empleadas	**Evalúa** Estrategias metacognitivas empleadas

[8] Pág. 167 del Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular, Ministerio de Educación, Lima. 2005

Como estas capacidades no están relacionadas con los contenidos básicos que se presentan a continuación, hay el riesgo de no ser tomados en cuenta por los profesores de matemática de este nivel.

De acuerdo al documento oficial, los contenidos básicos del área de Matemática en Secundaria se han organizado también en tres componentes: 1. Número, relaciones y funciones, 2. Geometría y Medida y 3. Estadística y Probabilidad; los cuales serán desarrollados en forma transversal en cada grado de los dos ciclos.

CONTENIDOS BÁSICOS de MATEMÁTICA en el VI CICLO de Secundaria:

- **Primer grado de Secundaria**

1. Número, relaciones y funciones	2. Geometría y Medida	3. Estadística y Probabilidad.
El sistema de los números naturales (N) **1.** Los números naturales. **2.** Igualdad. 3. Adición. Propiedades **3.** Relaciones menor y mayor. **4.** Sustracción. Propiedades La ecuación x + a = b. 6. Multiplicación. Propiedades. Múltiplo y submúltiplo. **5.** Potenciación. Propiedades. **6.** Sistema de numeración decimal. **7.** División. Pro-piedades. **8.** La división Euclidiana. **9.** Divisibilidad. Números primos y compuestos. **10.** Criterios de divisibilidad. **11.** Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. **12.** Ecuaciones e inecuaciones. **El Sistema de los números enteros (Z)** **1.** Los números enteros. **2.** Igualdad. **3.** Adición. Propiedades. **4.** Opuesto de un número entero. **5.** La ecuación x + a = b. **6.** Relaciones menor y mayor. **7.** Valor absoluto. **8.** Sustracción. Propiedades **9.** Multiplicación. Propiedades. **10.** Potenciación. Propiedades. **11.** División. Propiedades **12.** Radicación. Propiedades **13.** Desigualdades. Propiedades. **14.** Ecuaciones e inecuaciones.	**Polígonos** **1.** Polígonos: Clasificación. Suma de los ángulos internos. Perímetro. Área de polígonos regulares. Resolución de problemas. **2.** Circunferencia y círculo. **3.** Ángulos, segmentos y su medición. Clases de ángulos. Bisectriz de un ángulo. **Transformaciones geométricas** **1.** Reflexión respecto a un eje o simetría axial de figuras planas. **2.** Rotaciones de figuras planas **3.** Traslaciones de figuras planas. **4.** Composición de reflexiones respecto a un eje. **5.** Composición de transformaciones. **Geometría del espacio** Sólidos geométricos **1.** Poliedros: Desarrollo o red del cubo, prisma y pirámide. **2.** Cuerpos de revolución: Desarrollo o red del cilindro y del cono. Esfera.	**Estadística** **1.** Ejes de coordenadas rectangulares. Interpretación de puntos. **2.** Interpretación y construcción de tablas y gráficos. **3.** Interpretación de gráficos estadísticos: **4.** Gráficos de barras. Polígono de frecuencias y pictogramas. **Probabilidades** **1.** Experimentos aleatorios. **2.** Sucesos igualmente probables, más probable y menos probable. **3.** Probabilidad de un suceso. **4.** La escala de probabilidades. **5.** Diagrama de árbol.

Sistema de los números racionales (Q)	Medida	
1. Números racionales. **2.** Igualdad. **3.** Adición. **4.** Opuesto de un número racional. **5.** Valor absoluto. **6.** La propiedad de densidad. **7.** Multiplicación. Propiedades **8.** Inverso de un número racional no nulo. **9.** La propiedad distributiva. **10.** Sustracción y división. Propiedades. **11.** Potenciación con exponente entero. **12.** Expresión decimal de un número racional. **13.** Expresiones decimales periódicas y números racionales. **14.** Generatriz de una expresión decimal periódica. **15.** Ecuaciones e inecuaciones.	**1.** Unidades de longitud del sistema métrico decimal. Conversión y resolución de problemas. **2.** Unidades de masa. Conversión y resolución de problemas. **3.** Unidades de superficie. Conversión y resolución de problemas. **4.** Unidades de capacidad. Conversión y resolución de problemas.	

- **Segundo grado de Secundaria**

1. Número, relaciones y funciones	2. Geometría y Medida	3. Estadística y Probabilidad
El Sistema de los números reales (R) **1.** Expresiones decimales no periódicas y números irracionales. Número real. **2.** Igualdad. **3.** Adición. Propiedades. **4.** Relaciones menor y mayor. Propiedades. **5.** Valor absoluto. **6.** La recta real. **7.** Multiplicación. Propiedades. **8.** Inverso de un número real. **9.** La propiedad distributiva. **10.** Sustracción y división. Propiedades. **11.** Potenciación. Propiedades. **12.** Desigualdades. **13.** Ecuaciones e inecuaciones. **14.** Radicación. Razones y proporciones: Aritméticas y geométricas. **15.** Porcentaje. Regla de tres, de interés y de mezcla. **Polinomios** **1.** Monomios y polinomios. Grado de un polinomio. **2.** Adición y sustracción de polinomios. **3.** Productos notables. **4.** Multiplicación y División de polinomios. División sintética. **5.** Cocientes notables. **6.** Casos de factorización. **7.** Ecuaciones lineales y cuadráticas.	**Figuras y ángulos** **1.** Figuras ornamentales. **2.** Mediatriz y bisectriz. **3.** Triángulos simétricos respecto a un eje. **4.** Rectas paralelas y perpendiculares. **5.** Ángulos opuestos por el vértice y ángulos adyacentes. **6.** Ángulos en rectas paralelas. **7.** Suma de ángulos en el triángulo. **8.** Ángulos exteriores en el triángulo. **Geometría del espacio** **Nociones básicas** **1.** Puntos, rectas y planos en el espacio. **2.** Figuras convexas. **3.** Semiespacios. **4.** Ángulos de dos rectas en el espacio. **5.** Ángulos diedros. Clasificación. **6.** Resolución y planteamiento de problemas vinculados con la realidad. **Medida** **1.** Unidades cúbicas. Conversión y resolución de problemas. **2.** Cubo, prisma y pirámide: Resolver problemas de estimación y cálculo de áreas y volúmenes.	**Estadística** **1.** Manejo de datos. **2.** Promedios aritmético y ponderado. **3.** Tablas de frecuencia. **4.** Diagramas de clasificación y conteo. **Probabilidades** **1.** Experimento aleatorio. **2.** Espacio muestral. **3.** Probabilidad de un evento.

CONTENIDOS BÁSICOS de MATEMÁTICA en el VII CICLO de Secundaria:

- **Tercer grado de Secundaria**

1. Número, relaciones y funciones	2. Geometría y Medida	3. Estadística y Probabilidad.
Ecuaciones e inecuaciones **1.** La recta real. **2.** Intervalos acotados y no acotados. Operaciones con intervalos. **3.** Ecuaciones con valor absoluto. **4.** Inecuaciones cuadráticas. Inecuaciones racionales. Resolución de ecuaciones e inecuaciones: por factorización y completando cuadrados. **Sistemas de ecuaciones lineales**. **1.** Sistema de ecuaciones lineales con dos variables. **2.** Sistema de ecuaciones lineales con tres variables. **3.** Matrices y sus operaciones. Determinantes de orden dos y tres.	**Nociones básicas de geometría plana** **1.** Punto, recta y plano. **2.** Postulado de la regla (Cantor-Dedekind). Distancia entre dos puntos. **3.** Figuras. Segmento. Rayo. Semirrecta. **4.** Conjuntos convexos. **5.** Separación del plano. Semiplanos. **6.** Ángulos y triángulos. **7.** Medida de ángulos. Clases de ángulos **Congruencia, perpendicu-laridad y paralelismo** **1.** Congruencia de segmentos y de ángulos. **2.** Congruencia de triángulos. Triángulos isósceles y equiláteros. **3.** Rectas perpendiculares. Propiedades. Mediatriz de un segmento. **4.** Rectas paralelas. Ángulos determinados por dos rectas paralelas y una recta que las corta. **5.** Relaciones angulares de un triángulo. **6.** Ángulos formados por las bisectrices de un triángulo. **Geometría del espacio Nociones básicas**. **1.** Recta y planos perpendiculares. **2.** Ángulos poliedros. **3.** Poliedros. **4.** Resolución y planteamiento de problemas vinculados con la realidad. **Medida** **1.** Cilindro, cono y esfera. **2.** Resolver problemas de estimación y cálculo de áreas y volúmenes.	**Estadística** **1.** Variables estadísticas. Clasificación. **2.** Población y muestra. **3.** Frecuencias. Frecuencia relativa y acumulada. **4.** Representación gráficas de distribuciones: Histograma, Polígono de frecuencia, ojiva. **5.** Medidas de tendencia central: Media, mediana y moda. **Probabilidades** **1.** Probabilidad y frecuencia. Método Montecarlo. **2.** Introducción a la Esperanza matemática.

- **Cuarto grado de Secundaria**

1. Número, relaciones y funciones	2. Geometría y Medida	3. Estadística y Probabilidad.
Funciones y Progresiones **1.** Función. Dominio y rango. Representaciones gráficas. **2.** Composición de funciones. **3.** Funciones: Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva, creciente y decreciente. **4.** Función inversa. **5.** Funciones reales. Funciones reales de variable real. Operaciones. **6.** Funciones algebraicas: lineal afín, cuadrática, raíz cuadrada, valor absoluto y máximo entero. **7.** Sucesiones **8.** Progresiones Aritméticas y Geométricas.	**Polígono y circunferencia** **1.** Polígonos. Clasificación de los polígonos. **2.** Suma de las medidas de los ángulos Internos de un polígono. Diagonales de un polígono. **3.** Paralelogramos (rectángulo, rombo, cuadrado). Trapecio. **4.** Circunferencia y círculo. Propiedades. **5.** Ángulos en el círculo. **6.** Circunferencia inscrita y circunscrita. **Semejanza de triángulos, área de regiones poligonales y circulares** **1.** Segmentos proporcionales. **2.** Segmentos congruentes determinados por dos rectas que cortan a dos rectas paralelas **3.** Teorema de Thales. **4.** Semejanza de triángulos. **5.** Líneas notables de un triángulo **6.** Relaciones métricas en un triángulo **7.** Teorema de Pitágoras. **8.** Relaciones métricas en el círculo. **9.** Áreas de regiones poligonales y circulares. **Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo** **1.** Ángulo trigonométrico. Arco trigonométrico. **2.** Sistemas de medida de ángulos. Conversión. **3.** Razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios. **4.** Identidades pitagóricas, inversas y por cociente. **5.** Valores trigonométricos de la suma y diferencia de ángulos **Geometría del espacio: Prisma y pirámide** **1.** Primas. Clasificación. Tronco de prisma. Área lateral y total. Volumen. **2.** Pirámides. Clasificación. **3.** Semejanza. Tronco de pirámide. Área lateral y total. Volumen. **4.** Resolución y planteamiento de problemas vinculados con la realidad. **Introducción a la geometría analítica plana** **La recta** **1.** El plano cartesiano **2.** Línea recta. El plano. **3.** Distancia entre puntos **4.** Pendiente e inclinación de una recta. **5.** Ecuaciones de la recta: punto-pendiente, pendiente - ordenada en el origen y ecuación general de la recta. **6.** Posiciones relativas de dos rectas: rectas paralelas y recta perpendiculares. **7.** Ángulos. **Medida** **1.** Variación de elementos geométricos lineales tanto en las áreas de triángulos y cuadriláteros como en los volúmenes de cubos y prismas.	**Estadística** **1.** Frecuencias de datos agrupados. **2.** Cuartiles. **3.** Deciles. **4.** Percentiles. **Probabilidades** **2.** Factorial de un número. **3.** Variaciones y permutaciones. **4.** Binomio de Newton. **5.** Aplicaciones a las probabilidades.

- **Quinto grado de Secundaria**

1. Número, relaciones y funciones	2. Geometría y Medida	3. Estadística y Probabilidad.
Introducción a la programación lineal **1.** Sistemas de ecuaciones e inecuaciones de primer grado en dos variables. **2.** Determinación de la región factible. **3.** Valores máximos y mínimos en un polígono convexo. **4.** Métodos gráfico y analítico de optimización lineal. **Funciones exponencial y logarítmica** **1.** Función exponencial y logarítmica. El número e. **2.** Resolución de problemas de aplicación de funciones logarítmicas y exponenciales	**Razones trigonométricas** **1.** Circunferencia trigonométrica. **2.** Ángulo en posición normal. **3.** Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Razones trigonométricas de los ángulos de: 0º, 90º, 180º, 270º y 360º. Ángulos coterminales. **4.** Razones trigonométricas de ángulos negativos. Reducción al primer cuadrante. **5.** Funciones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos. **6.** Resolución de triángulos oblicuángulos: Ley de senos, cosenos y tangentes. **7.** Funciones trigonométricas. **8.** Funciones trigonométrica inversas **Geometría del espacio** **Superficies de revolución** **1.** Cilindro de revolución y tronco de cilindro. Área lateral y total. Volumen. **2.** Cono de revolución. Tronco de cono. Área lateral y total. Volumen. **3.** Superficie esférica. Área. Esfera. Volumen. **4.** Resolución y planteamiento de problemas vinculados con la realidad. **Introducción a la geometría analítica plana. Circunferencia, parábola y elipse** **1.** Ecuación de la circunferencia. **2.** Recta tangente a una circunferencia. **3.** Posiciones relativas de dos circunferencias no concéntricas. **4.** Parábola. Ecuación de la parábola. **5.** Elipse. Ecuación de la elipse. **Medida** **1.** Variación del radio tanto en el área y perímetro de una circunferencia, como en el área y volumen de un cilindro y de una esfera.	**Estadística** **1.** Medidas de dispersión: Varianza y desviación estándar **Probabilidades** **1.** Probabilidad condicional **2.** Teorema de Bayes **3.** Esperanza matemática

7. Propuesta de Educación Matemática

Esta Educación Básica de calidad, establecida por la nueva Ley de Educación, exigió la elaboración de una propuesta pedagógica con un enfoque de enseñanza y aprendizaje que se le denominó **"Matemática para la vida".** La propuesta focalizada en el estudiante como centro y agente fundamental del proceso educativo se sustentó en principios extraídos y derivados de la misma Ley, lo que implicó incidir prioritariamente en el desarrollo de capacidades matemáticas fundamentales como en la comprensión y uso de conocimientos matemáticos, seleccionadas del diseño curricular básico vigente. La finalidad de esta propuesta es superar la emergencia de la educación matemática en nuestro país, y contribuir en la preparación de los peruanos para responder a los retos que el presente milenio plantea a la humanidad.

Esta propuesta pedagógica asegurará:

- La determinación de aprendizajes esperados, priorizados en el área de matemática, en cada uno de los grados de los niveles de Educación Básica Regular.
- Una práctica docente que reconozca las necesidades de aprender matemática para la vida y de desarrollar valores, mediante procesos de resolución de problemas, razonamiento y demostración, y comunicación matemática, que permitan a los estudiantes orientar sus aspiraciones y esfuerzos hacia el logro y la consolidación de ciertos niveles de bienestar, hoy considerados básicos en el mundo.
- El acceso y uso de materiales educativos de óptima calidad.
- La formación permanente de los docentes, mediante estrategias adecuadas, que impulse su autoformación y posibilite la generación de prácticas educativas innovadoras.
- El compromiso de las autoridades educativas, padres de familia y comunidad en general, en el desarrollo de actividades que ayuden a potenciar las capacidades matemáticas de los estudiantes.

Como el Perú es un país multilingüe y pluricultural, las variables culturales que entran en juego en la enseñanza y el aprendizaje de matemática son diversas, por ejemplo, en el uso de estrategias al contar, medir, localizar, diseñar, jugar, explicar, cada ser humano las realiza, en forma explícita o implícita, directa o indirecta, consciente o inconsciente, dentro de su propia comunidad que es portadora y representativa de una cultura específica. Esta realidad implica que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se incluyan actividades de matemática que se desarrollan en la vida del grupo sociocultural del cual proceden los estudiantes, pues la contribución que las diferentes culturas pueden hacer, son oportunidades de intercambio de conocimientos y de crecimiento cultural y humano, útil para la vida y por lo tanto una ocasión propicia para la concreción de relaciones de interculturalidad.

Así mismo como la tecnología está cambiando la naturaleza de la sociedad y creando trabajos que exigen saber y saber hacer matemática. Por ejemplo, el mundo de los negocios es muy diferente al de hace algunas décadas: se diseña con ayuda de una computadora, se hace análisis de inversiones con hojas de cálculo, las comunicaciones son instantáneas y que este avance tecnológico se da gracias al avance científico, en particular a la matemática; significa que en el futuro, todos necesitarán aplicar cada vez más matemática durante su vida; por lo tanto el aprendizaje de la matemática debe ser activo, con los estudiantes implicados en el proceso, y no recibiendo pasivamente la información.

En síntesis, el enfoque "Matemática para la vida", está orientado al desarrollo de capacidades fundamentales y comprensión y uso de conocimientos matemáticos básicos, para que los estudiantes puedan desempeñarse con eficiencia, eficacia y ética en su vida personal, social y laboral.

Se espera que esta propuesta promueva experiencias innovadoras múltiples, que seguramente se generarán gracias al interés y esfuerzo de los docentes, como al apoyo de la comunidad educativa, para el mejoramiento continuo no sólo de la práctica pedagógica de matemática en el aula, sino de las mismas instituciones educativas, que redundarán en el desarrollo humano de niñas, niños y jóvenes de nuestro país.

En respuesta a estas exigencias y necesidades la Sociedad Peruana de Educación Matemática SOPEMAT proporcionó un espacio de reflexión y estudio a profesores de primaria, secundaria, así como a docentes y estudiantes de facultades de educación y de institutos pedagógicos realizando en enero de este año las JORNADAS INTERNACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2006. Este evento ha motivado a colegas asistentes de la ciudad de Pucallpa ubicada en la amazonía para preparar un nuevo encuentro de educación matemática con participación de profesores de Bolivia y Ecuador.

Así mismo, el Instituto de Investigación para la Enseñanza de la Matemática IREM–Perú desarrolló un Coloquio de Didáctica de la Matemática dirigido a estudiantes de nivel universitario.

Estos eventos son importantes porque permiten el intercambio y reflexión de experiencias matemáticas, pero también se hace necesario la conformación de equipos de trabajo o círculos de estudio de profesores de distintos niveles en las escuelas y comunidades educativas de las ciudades del país.

Marzo 2006.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Marzo de 2006, Número 5 páginas 91-110
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista *Labor*

José Manuel Matos

Resumo

É objecto deste artigo estudar escritos de professores de Matemática do período anterior à introdução da reforma da Matemática Moderna em Portugal (final dos anos 50 e princípios dos anos 60 do século XX), mapeando argumentos a favor e contra a introdução dos novos currículos. Para tal centrei a pesquisa em artigos publicados na Labor, Revista de Ensino Liceal, jornal mensal de educadores que desfrutava de um grande prestígio na época, escolhendo para análise alguns textos mais salientes que permitissem revelar uma diversidade de posturas perante a reforma.

A Reforma da Matemática Moderna

Designa-se por *Matemática Moderna* uma reforma curricular que ocorre um pouco por todo o mundo entre a segunda metade dos anos 50 e a primeira metade dos anos 70 do século passado. Trata-se de um movimento procurando renovar fundamentalmente o ensino da Matemática. Um seu traço marcante é a preocupação com uma renovação dos conteúdos, adoptando grandes eixos organizadores do currículo, que vai ser centrado em grandes estruturas que na época se pensava estarem na base de toda a matemática conhecida. Fundamental para este esforço conceptual foram os trabalhos de unificação dos conhecimentos matemáticos que o grupo Bourbaki vinha desenvolvendo. Para muitos professores, e para muitos pais e alunos, o aspecto distintivo deste novo currículo de matemática consistiu numa reformulação dos conteúdos usuais da matemática escolar em termos da teoria dos conjuntos. Um segundo traço consiste na preocupação em compatibilizar os currículos de Matemática com os trabalhos de Jean Piaget, que precisamente continham uma descrição dos processos de aprendizagem muito próxima das estruturas bourbakistas. As estruturas-mãe: algébricas, de ordem e topológicas, que segundo Bourbaki estariam na base de todo o conhecimento matemático, encontravam muitas similitudes com as estruturas básicas da cognição teorizadas por Piaget (Beth e Piaget, 1966).

Costuma ser indicada como marco temporal do início desta reforma o ano de 1959 quando, em Royaumont, a OCDE organiza uma convenção de duas semanas com 60 professores de 20 países. Este encontro, bem como um segundo em Dubrovnik em 1960, procura abrir caminho a uma definição de um currículo para a Matemática pré-universitária, e tem como objectivo unificar esforços que vinham sendo desenvolvidos em diversos países (Bélgica, Estados Unidos, França, Inglaterra, Itália, por exemplo).

A introdução desta reforma não se fez sem reacções e são conhecidas, por exemplo, as polémicas do final dos anos 50 e princípios de 60 levantadas por diversos matemáticos dos Estados Unidos. Uma cronologia dos principais eventos pode ser encontrada em Matos (1989). A análise global do movimento foi feita por Moon (1986) e um estudo pormenorizado do conteúdo das propostas de Royaumont e de Dubrovnick estão em Guimarães (2003).

Sociedade e ensino em Portugal nos anos 50 e 60

A sociedade em Portugal durante estes anos 50 e 60 do século passado está em mudança acelerada. Sob um ponto de vista económico e social, e acompanhando o que se passa no ocidente do continente europeu, estão em curso grandes alterações (Rosas, 1994). Pela primeira vez na história portuguesa, a indústria passa a ter maior importância económica do que a agricultura e começam a sobressair sectores até então com pouca importância social — o pequeno comércio, os técnicos superiores (engenheiros, economistas, entre outros) e o operariado urbano. A nível político, e contrariamente ao que esperava a oposição ao regime, a ditadura de Oliveira Salazar, no poder desde a segunda metade dos anos 20, permanece para além do pós-guerra, embora atenuando as suas manifestações mais fascizantes. A condução da política económica está entregue a uma nova geração de engenheiros e economistas que, embora na sua maioria perfilhe dos ideais corporativos do regime, já não se revê no enaltecimento salazarista dos valores da pequena sociedade rural, sonhando, quer com a integração económica entre as parcelas do império — uma minoria —, quer com o aprofundamento da ligação à Europa — a maioria. As grandes opções políticas, em especial tudo o que se relacionasse com a ordem pública interna ou com o futuro das colónias, continuam, no entanto, essencialmente nas mãos de Salazar e de um restrito grupo de fiéis. O regime permanece ditatorial, dispondo da sua polícia política, vigiando todas as formas de expressão de pensamento, e reprimindo todas as manifestações de dissenção.

Durante os anos 50 e 60 o sistema educativo compreendia o ensino primário de 4 anos (6-9 anos), dois ciclos de 2+3 anos com dois ramos distintos (liceus e técnicas) (10-14 anos) e um terceiro ciclo liceal de dois anos (15-16 anos) de preparação para a universidade. O desenvolvimento económico e social vai exigir alterações a este sistema que vão ser levadas a cabo de um modo muito gradual desde a segunda metade dos anos 50 pelo ministro Leite Pinto (engenheiro, mestre de engenheiros, professor de matemática, e homem do Governo) e continuadas por Galvão Teles, sempre sob o olhar desconfiado dos sectores mais conservadores. Não há uma reforma de ensino (só ocorrerá com Veiga Simão, ministro de Marcelo Caetano, após a queda de Salazar), mas é durante estes anos que se vai tímida e lentamente aumentar a escolarização obrigatória para os dois sexos, se generaliza a co-educação entre rapazes e as raparigas, e se inicia a unificação entre os dois ramos do sistema de ensino.

As alterações ao ensino da Matemática vão ocorrer em sintonia com estas mudanças no país e no sistema educativo. Os programas de Matemática dos liceus e das técnicas datam de 1947 e são apoiados por *livros únicos* escolhidos pelo Ministério da Educação e usados uniformemente em todo o país. A reforma da Matemática Moderna, comummente designada por Reforma Sebastião e Silva, nome do professor universitário seu mentor e produtor dos seus livros de texto mais influentes, vai assumir nesta época sempre a característica de "experiência pedagógica" e, embora existam programas experimentais, os programas oficiais de 47 para a matemática escolar não vão ser alterados nos 11 anos que medeiam até à revolução de 1974[1].

Ecos da Matemática Moderna

Os ventos de mudança educativa do pós-guerra, precursores das grandes alterações da matemática escolar que vão ocorrer na Europa durante os anos 50 e 60 podem ser acompanhados nas pequenas notícias sobre o movimento matemático internacional que vão sendo publicadas na *Gazeta de Matemática*, orgão da Sociedade Portuguesa de Matemática: a recomposição da União Matemática Internacional e a formação da Comissão Internacional do Ensino da Matemática, por exemplo. As novas ideias têm igualmente expressão nas páginas da *Gazeta* e, em 1956, é publicado um artigo de Emma Castelnuovo intitulado "Matemática Moderna ou Matemática Clássica no Ensino Secundário?" apresentando os principais pontos do livro *L'Enseignement des Mathématiques*, originalmente publicado em 1955 (Beth e outros, 1955), escrito por W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet, C. Gattegno e Jean Piaget, elementos da "Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques" (CIEAEM), e condensando os debates ocorridos durante as reuniões da mesma comissão.

Sebastião e Silva (1914-1972) mantém um contacto assíduo com o movimento matemático internacional e com a sua vertente relacionada com o ensino, como se pode observar pela leitura das notícias da *Gazeta*. A circulação das novas ideias acentua-se em Portugal a partir de 1955 com a nomeação da sub-comissão portuguesa da Comissão Internacional do Ensino Matemático, da qual fazem parte

[1] Embora nenhum tenha sido alterado, foi criado de raíz o programa para o Ciclo Preparatório do Ensino Secundário. Este Ciclo, resultante da unificação dos primeiros anos dos liceus e das técnicas, é novo e entra em funcionamento em 1968/69, embora os primeiros passos tenham sido dados em 1958.

dois professores universitários, Vicente Gonçalves e Sebastião e Silva, e dois professores dos liceus, José Calado e José Silva Paulo (Silva, 1955). Em 1957 uma delegação constituída por Sebastião e Silva, José Calado, Jaime Furtado Leote e Santos Heitor participa na XI reunião em Madrid da CIEAEM e os seus membros vão comentar as novas ideias sobre o ensino da matemática em diversos artigos e entrevistas.

Após este período, caracterizado por uma tomada de contacto com as ideias que circulam no estrangeiro e pelo estabelecimento de laços orgânicos com as entidades internacionais, a preparação de uma reforma curricular seguindo as ideias da Matemática Moderna vai começar em 1962, com a nomeação de uma comissão de revisão do programa do 3º ciclo liceal presidida por Sebastião e Silva. Iniciam-se então diversos cursos para professores do liceu, preparatórios da experiência pedagógica e a comissão desenvolve um currículo experimental que, em 1963 é aplicado a três turmas constituídas pelos melhores alunos do 6º ano, uma em cada um dos Liceus Normais (Lisboa, Porto e Coimbra). Gradualmente o número de turmas, de professores e de escolas foi aumentando[2].

A revista Labor e o início da Matemática Moderna

A revista *Labor* (o nome deve pronunciar-se *à latina*, acentuando a primeira sílaba), inicialmente *Labor: Revista Trimestral do Liceu de Vasco da Gama*, foi fundada em Janeiro de 1926 por dois professores de Aveiro, José Tavares e Álvaro Sampaio coincidindo com um forte dinamismo de movimentos profissionais de professores[3]. Após uma interrupção em 1940, os mesmos professores retomam a publicação mensal regular em Março de 1951, com o nome *Labor, Revista de Ensino Liceal*, até 1973 (Carvalho, 2003; Sampaio, 1966). A revista conheceu um prestígio e uma difusão assinaláveis e, durante muito tempo, foi o único jornal de

[2] A correspondente reforma da Matemática Moderna no Ensino Técnico e no Ensino Primário são posteriores e não serão objecto deste texto. Detalhes podem ser encontrados em Matos (1989).
[3] Em 1927 cria-se a Federação Nacional das Associações dos Professores dos Liceus e, entre 1927 e 1931, realizam-se todos os anos Congressos Pedagógicos.

professores que não era publicado por alguma entidade governativa, possuindo delegados na maioria dos liceus portugueses. Durante grande parte da sua vida, espelharam-se na *Labor* os debates sobre educação ocorridos na sociedade portuguesa. A importância desta revista justifica o interesse em averiguar da existência de artigos que nos revelem o modo como as ideias propostas pelo movimento da Matemática Moderna penetraram no ambiente educativo português. O centro vai estar na gestação das ideias ocorrida antes da reforma e não no modo como a revista foi depois acompanhando a implementação da reforma. Considerei pois a faixa temporal entre 1951, data do início da republicação da *Labor*, e 1963, quando se iniciou a experiência pedagógica nos liceus. Neste período encontramos nesta revista uma centena de textos discutindo temas relacionados com o ensino e a aprendizagem da Matemática. Até meados dos anos 50, estes artigos centram-se especialmente na discussão da implementação da reforma de 1947, em polémicas envolvendo a lógica, e no desenvolvimento pedagógico ou científico de temas de matemática escolar.

Datam de 1958 os primeiros textos desta revista claramente infuenciados pelas novas ideias. O primeiro (Folha e Grácio, 1958) é uma reportagem de uma conferência no Liceu Normal de Pedro Nunes em Lisboa ocorrida em 20 de Novembro de 1957 onde uma intervenção de José Calado perante o Ministro da Educação Nacional da época, Francisco Leite Pinto, reclama o lançamento da reforma. Dois meses depois, o segundo artigo (Ventura, 1958), da autoria de Manuel Joaquim Sousa Ventura então estagiário naquele liceu, apresenta uma interligação entre as ideias de Piaget e o ensino da Matemática.

Entre 1958 e 1963 encontramos na *Labor*, simultaneamente artigos que prolongam as abordagens pré-reforma, discutindo aspectos de técnica matemática com abordagens não influenciadas pela Matemática Moderna, e artigos propagando as novas ideias. De entre estes últimos destacarei quatro. Os dois primeiros foram, aparentemente, desenvolvidos a partir de extensos trabalhos de estágio, e através deles poderemos ter uma visão do tipo de problemas que se discutiam nessa época nos três Liceus Normais portugueses, isto é, naqueles que tinham por responsabilidade a formação pedagógica de professores destinados aos liceus. O terceiro é da autoria de um professor com responsabilidades na formação de professores e na edição de livros de texto. Acrescentarei um quarto artigo que apresenta uma perspectiva distinta, e que aparentemente levanta algumas reservas quanto à reforma.

Manuel Joaquim Sousa Ventura — a relevância da psicologia

Como referi, é da autoria de Manuel Joaquim Sousa Ventura, nascido em 1925, o primeiro artigo que difunde na *Labor* o ideário da Matemática Moderna (Ventura, 1958) relacionando a teoria piagetiana com o ensino e a aprendizagem da Matemática. As ideias nele contidas são expandidas num novo artigo publicado em 1959, *Didáctica da Matemática* (Ventura, 1959) originário de um trabalho realizado durante o seu estágio no Liceu Normal de Pedro Nunes onde eram metodólogos[4] José Calado e Jaime Furtado Leote, que a partir de 1962 farão parte da comissão que prepara a reforma dos programas.

O artigo de Manuel Ventura que destaco (Ventura, 1959) inicia-se por uma reflexão sobre a Didáctica, enquanto "arte de transmitir conhecimentos" (p. 306). O seu propósito é o de "lançar as bases gerais da didáctica das matemáticas, ou da textura dum programa, ou até mesmo da elaboração dum livro de texto — apoiado em três bases" (p. 308): a lei biogenética, a evolução psicogenética da criança, e a seriação e selecção de capacidades. Na primeira o autor sugere a vantagem de uma abordagem didáctica ontogénica, na segunda explana uma condensação da teoria de Piaget e na terceira desenvolve as suas ideias sobre um currículo de Matemática para os liceus e as técnicas fundado nesta teoria. Defende a unificação do 1º ciclo dos liceus e das técnicas (que só veio a ocorrer em 1967), enquanto para os anos seguintes (7º a 11º ano de escolaridade) propunha a manutenção da divisão liceus/técnicas que corresponderia à separação entre os alunos com aptidões

[4] Os professores metodólogos supervisionavam a formação dos futuros professores.

psicológicas características do que designa por Homo Sapiens e Homo Faber. Os alunos dos dois últimos anos dos liceus seriam ainda objecto de uma outra classificação recorrendo aos "modernos processos psicotécnicos" (p. 317) que os indicariam como analista, filosófico ou calculador (classificação inspirada numa caracterização de ciclos evolutivos da matemática propostos por Felix Klein) que ditariam os respectivos percursos escolares. O artigo termina numa apreciação sobre os ciclos presentes na marcha da humanidade seguindo as ideias de Oswald Spengler. Estaríamos assim, afirma Sousa Ventura, numa fase ascendente, a fase da cultura, um período "de ciência, de aventura, de dinamismo atómico" (p. 318). O artigo termina com o seguinte parágrafo:

> À Escola compete, pois, lançar o estudante na pesquisa científica e, simultâneamente, desenvolver-lhe o estofo filosófico e moral que tempere o dinamismo revolucionário do momento que nos transpõe — *um olho na ciência e outro olho em Deus* (p. 318).

Em súmula, trata-se de um artigo que manifesta uma forte influência das correntes psicológicas que estariam na base da reforma, mas que manifesta um sincretismo entre estas e valores culturais comuns no panorama educacional do Portugal do final dos anos 50: a fé no progresso permitido pela ciência, a defesa de uma educação diferenciada para as elites — ponto forte do regime corporativo de Salazar —, a cautela com os dinamismos "revolucionários" que deveriam ser controlados através de uma educação baseada nos valores católicos. O artigo inclui aliás uma frase — "chi va piano, va sano. Chi va sano, va lontano" (p. 308) — recorrente em discursos oficiais da época e que espelha a enorme cautela com que as mudanças educativas se vão desenvolvendo de modo a não assustar os sectores mais conservadores do regime. O autor vai posteriormente publicar outros artigos na *Labor*, glosando o mesmo tema. Um destes é um extenso relatório de um estágio de um ano em Paris no ano lectivo 1959/60.

António Aurélio Fernandes — a relevância matemática

O segundo artigo é da autoria de António Aurélio S. Fernandes (1960), *Introdução de conceitos e proposições primitivos. Suas consequências do Ponto de vista didáctico,* publicado um ano depois e, aparentemente também resultado de um trabalho de estágio. Enquanto que o trabalho de Sousa Ventura legitima as novas ideias a partir da psicologia, neste texto, que foi escrito antes de estarem divulgadas em livro as actas dos seminários de Royaumont e de Dubrovnick, o que só aconteceu em 1961, a importância da Matemática Moderna afirma-se a partir da própria matemática.

O autor começa por estabelecer a distinção entre matemática em construção e matemática construída. Apoiando-se numa citação de Émile Borel, "As matemáticas são uma ciência natural na qual a lógica não desempenha qualquer papel mais do que noutras ciências naturais" (p. 650), desenvolve a ideia que "o matemático que se dedica à investigação, trabalha em grande paralelismo com o físico ou o naturalista: observa os 'fenómenos do mundo aritmético', não como objectos ideais, mas como seres que têm uma realidade objectiva; e observa-os recorrendo aos 'ensaios da experiência matemática' (p. 650). Esta é a matemática em construção a que se segue uma "formalização" (p. 650), isto é, "escolhem-se conceitos básicos – 'conceitos primitivos', que são caracterizados, de modo conveniente, por relações entre eles, aceites sem demonstração – 'proposições primitivas'. Em seguida estrutura-se a teoria com base nestes conceitos e proposições primitivos que vão permitir a dedução e demonstração de novas propriedades – os 'teoremas'" (p. 650). A teoria dos números e a das distribuições que durante muito tempo foram matemática em construção, e que foram formalizadas respectivamente por Peano e por Sebastião e Silva, tornando-se matemática construída, são exemplos deste processo.

A esta defesa de um ponto de vista, que poderíamos designar de naturalista, constitui o pano de fundo a partir do qual o autor vai desenvolver as suas ideias sobre o modo como tem sido resolvido o problema pedagógico da introdução de conceitos e proposições primitivos, qual a significância das ideias da época sobre o ensino da Matemática bem como a importância da teoria de Piaget, terminando com algumas propostas pedagógicas.

Para estudar o modo como os conceitos primitivos têm sido abordados, o autor aborda o caso da geometria do 2º ciclo dos liceus (destinado a alunos de 12-14 anos) e defende que a sua matriz euclideana deve ser alterada. De caminho nota como foram precisos 23 séculos para aparecer uma construção matemática análoga à de Euclides e refere o trabalho de Bourbaki. Segundo ele, a geometria do 2º ciclo é estática e entra em contradição com o caracter dinâmico que se pretende para a matemática. Depois critica o livro único, os *Elementos de Geometria* de Palma Fernandes, por não fazer qualquer referência ao carácter hipotético-dedutivo da geometria. Quanto à Aritmética Racional, então ensinada no 6º ano (a alunos de 15 anos), cujo livro adoptado era o *Compêndio de Aritmética Racional* de J. Calado, o autor refere que esta é normalmente leccionada em pouco tempo e que causa uma aversão entre os alunos.

António Fernandes passa então a analisar "as orientações sugeridas pela matemática moderna e pela psicologia evolutiva" (p. 655). O primeiro tópico abordado é a noção de estrutura em matemática. Apoiando-se em Jean Dieudonné:

> apercebemo-nos com efeito que as divisões tradicionais da Álgebra, da Geometria, da Teoria dos Números que agrupavam as teorias matemáticas segundo a natureza dos objectos que consideravam, eram tão superficiais como as primeiras classificações zoológicas que agrupavam os animais segundo as suas semelhanças exteriores e não pela estrutura geral do seu organismo, (...) as teorias assim justapostas, actualmente, ocupam-se de objectos de natureza diferente, mas cujas propriedades fundamentais, que estão na base destas teorias, têm o mesmo aspecto e podem exprimir-se nos mesmos termos, usando uma linguagem convenientemente escolhida; diz-se actualmente que estas

> teorias se ligam pela mesma estrutura (Dieudonné, citado em Fernandes, 1960, p. 656).

Conclui sistematizando três características das "teorias matemática modernas, base da sua unidade" (p. 656) são: abstractas, axiomáticas e polivalentes.

O autor estabelece então uma relação entre as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência. Socorrendo-se de citações de um artigo de Piaget, mostra como na "raiz do desenvolvimento psicológico das operações aritméticas e geométricas espontâneas da criança (...) [se encontram] três espécies de propriedades que correspondem precisamente às das estruturas algébricas, das estruturas de ordem e das estruturas topológias" (p. 657), as três estruturas-mãe de Bourbaki. A conclusão de Piaget é inevitável:

> se o edifício das matemáticas repousa sobre estruturas que correspondem aliás às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é necessário basear a didáctica da matemática (Piaget, citado em Fernandes, 1960, pp. 657-8).

Finalmente o autor vai adiantar "novas possibilidades para a solução do problema pedagógico proposto" (p. 658). Começando por recorrer à *Recomendação nº 43*, produzida na Conferência Internacional da Instrução Pública organizada pela ONU em 1956, às Jornadas Internacionais de Informação sobre o Ensino das Matemáticas de 1955, e à revista belga Mathematica & Paedagogia para fundamentar a utilidade da introdução da Matemática Moderna nos liceus, argumenta que esta não pretende substituir a matemática clássica, mas antes "dar-lhe nova estruturação, introduzir princípios de economia e racionalização do trabalho do matemático" (p. 659). Não haveria lugar a uma sobrecarga dos programas actuais, mas antes a um aligeiramento. Seguidamente o autor desenvolve algumas ideias para a matemática no 1º ciclo, propondo que

> a matemática deve ser apresentada, no início do seu estudo, sob forma intuitiva, mas de modo que as acções a exercer pelo aluno sirvam de base eficiente para a abstratização (sic) das operações, sob forma de estruturas; a criança deve ser posta perante situações concretas, deixada a examiná-las livremente e só depois orientada para, por si mesma, tirar as conclusões (p. 660).

Quanto à geometria do 2º ciclo, propõe que o 3º ano seja de preparação para o seu ensino racional, no 4º ocorreriam os primeiros contactos com a geometria axiomatizada, e no 5º dar-se-ia uma iniciação ao conceito de estrutura axiomatizada. Propõe que não haja alterações ao programa de geometria do 1º ciclo. Não existe referência à álgebra do 2º ciclo. Quanto à matemática do 3º ciclo, o autor criticando a ênfase demasiada em exercícios-tipo, que já viria do 2º ciclo, propõe uma separação entre a matemática-ciência (uma aula por semana) e a matemática-técnica (três aulas por semana) e propõe a inclusão de cálculo integral, e estatística neste último.

Este artigo de António Fernandes revela um entrosamento com os programas de acção debatidos nos congressos de Royaumont e Dubrovnick superior ao do de Manuel Ventura. Aqui encontramos claramente expressa uma das propostas centrais dos promotores da Matemática Moderna, a ideia de que a matemática escolar deverá organizar o seu conteúdo segundo as três estruturas-mãe bourbakistas, precisamente aquelas que a investigação psicológica de ponta da época revelava terem estreitas associações com as estruturas cognitivas básicas. Ao contrapor a matemática construída à matemática em construção, António Fernandes reafirma a legitimidade matemática e a importância pedagógica de um ensino activo, contrariando a visão de que o ensino da matemática deveria idealmente prosseguir acompanhando a estrutura fornecida pela organização lógica das teorias matemáticas, antevendo uma ideia recorrente nos escritos de Sebastião e Silva.

António Augusto Lopes — os métodos e os materiais

O terceiro artigo que pretendo discutir, *Reflexões sobre o ensino da Matemática* (1960), é da autoria de António Augusto Lopes (1903-1978) e foi publicado no mesmo número da *Labor* que o anterior. Trata-se agora de um professor experiente com responsabilidades no campo do ensino da matemática, metodólogo no Liceu Normal de D. Manuel II no Porto, autor de alguns dos primeiros livros de texto adoptados após a reforma de 1947 — o primeiro livro único para a álgebra do 2º ciclo liceal, *Compêndio de álgebra,* adoptado entre 1951 e 1952, e o primeiro livro de álgebra para o 3º ciclo, *Compêndio de álgebra* adoptado entre 1950 e 1956. Este último aliás custou-lhe algumas críticas severas publicadas na *Gazeta de Matemática*, entre as quais uma de Sebastião e Silva, devida essencialmente ao modo como abordava o conceito de função. Mais tarde, a partir de 1962, António Lopes fará parte da comissão presidida por Sebastião e Silva que prepara a reforma dos programas de Matemática dos liceus.

Enquanto que nos dois artigos anteriores encontramos sobretudo aprofundamentos teóricos, característicos dos trabalhos de estágio da época, neste texto, António Lopes vai essencialmente desenvolver uma reflexão à luz das novas tendências sobre as orientações metodológicas necessárias para a aula de Matemática:

> as *condições de estudo* que se oferecem aos nossos alunos são muito diferentes das de há trinta ou quarenta anos, por serem também diferentes as condições de vida social. No entanto ensina-se como há mais de cinquenta anos. (p. 633, itálico no original)

E sublinha:

> *a didáctica de ontem* (e em muitos aspectos deu resultados positivos) *não pode, nem deve, ser a de hoje*; é urgente *uma revolução nos nossos*

métodos, e indispensável que nos aprestemos para ela. (p. 633, itálico no original)

Palavras fortes, para um tempo de cautelas, vigiado pela censura e onde o regime não desejava que ocorresse uma "revolução" nas mudanças educativas, termo, aliás explicitamente rejeitado por Sousa Ventura no artigo que analisei atrás.

António Lopes continua, explicando que para levar por diante as alterações que propõe é necesssário não só a colaboração dos professores, mas também que lhes sejam dados os meios para a acção. Entre estes, destaca os meios materiais (salários, acesso a bibliografia), pedagógicos (turmas mais reduzidas, material didáctico), e de comunicação com o exterior (possibilidade de contactos directos com professores de outros países, visitas a centros pedagógicos com a realização de estágios). A propósito deste último ponto, importa recordar que durante a época em análise os professores e restantes funcionários públicos apenas se podiam deslocar ao estrangeiro com autorização ministerial.

Continuando a sua reflexão, António Augusto Lopes vai desenvolver duas temáticas que permitam "delinear os alicerces de uma boa didáctica" (p. 636). A primeira, de natureza metodológica, destaca alguns aspectos mencionados na *Recomendação nº 43* de 1956 também referida por Aurério Fernandes no artigo que analisei acima, que aponta linhas de acção para o ensino da matemática: começar do concreto para chegar ao abstracto, o conhecimento matemático procede por interiorização de acções concretas, a matemáticas é uma ciência teórica com ligação ao real, o ensino deve ser adaptado às capacidades individuais e ao desenvolvimento mental do aluno, e o ensino deve favorecer o desenvolvimento da livre iniciativa individual dos alunos e do trabalho em equipa. Uma reflexão sobre a natureza da matemática constitui a segunda temática a que Lopes recorre. Neste tema, socorre-se das ideias de Maurice Fréchet e defende que a matemática não se reduz a uma sucessão de transformações lógicas. A matemática progride, não apenas por necessidades (lógicas) internas, mas "sobretudo, por apelos exteriores, por problemas concretos postos pela Natureza e pela técnica" (p. 636), afirma, citando Fréchet. Ainda segundo Fréchet, na geração de teorias matemáticas, existiria uma síntese indutiva que geraria uma fase dedutiva, seguida um conjunto de verificações experimentais.

A "boa didáctica" seria então centrada em dois aspectos. Por um lado, a clara distinção entre os objectos abstractos referidos na fase dedutiva e os objectos concretos característicos das verificações experimentais, prevenindo os alunos que, por exemplo em Geometria, "todas as proposições são falsas, quando se substituam as figuras abstractas sobre que raciocinamos por figuras reais" (p. 637). Por outro, a via pedagógica deverá "estabelecer, sobre as regularidades e as permanências aproximadas que reconhecemos nos mais variados objectos, regularidades e permanências sucessivamente mais gerais" (p. 637). Para ilustrar estas suas ideias, António Lopes relata uma visita de campo para estudar as aplicações da Trigonometria.

Após uma breve referência ao congresso de 1956 da CIEAEM e ao segundo livro da mesma Comissão, ambos dedicados ao uso de materiais na aula de Matemática, o artigo termina reproduzindo modelos didácticos destinados ao ensino da matemática produzidos no Liceu Normal de D. Manuel II no Porto, entre eles o geoplano, o círculo trigonométrico, poliedros, secções cónicas e breves referências a muitos outros.

Francisco Maria Gonçalves — a terceira via

O último artigo que analisarei intitula-se *O ensino das matemáticas no momento presente* e foi publicado em 1961 por Francisco Maria Gonçalves. Trata-se de um professor do Liceu Camões em Lisboa nascido em 1912, autor de alguns livros de texto e de livros de exercícios escritos por vezes em parceria com António do Nascimento Palma Fernandes. Durante a polémica sobre o livro de texto de álgebra para o 3º ciclo liceal da autoria de António Lopes que referi atrás posicionou-se como um dos críticos da qualidade matemática do referido compêndio.

Neste artigo, Francisco Gonçalves vai defender a posição de que o ensino da Matemática enfrenta sérias dificuldades. Recorrendo a um discurso que quase parece saído do tempo actual, apresenta dados revelando um enorme insucesso nos exames nacionais (cerca de 50% dos alunos que requerem exame no 2º e no 3º ciclo ficam reprovados), apesar das “sucessivas simplificações que introduzimos nos nossos cursos” (p. 547).

Desta constatação, parte para uma crítica aos “colegas que se interessam por estes problemas, mas a verdade é que por uma circunstância bem singular nem sempre o fazem no sentido que julgo ser o melhor” (p. 547). Critica, em particular os que consideram “em artigos de revista ou em conferências” (p. 547), que para melhorar o ensino da Matemática se torna necessário diminuir o número de alunos por turma ou aumentar o número horas semanais dedicadas à Matemática. Argumenta essencialmente que a comparação da situação portuguesa com a de outros países mais desenvolvidos não é benéfica, e, aparentemente numa crítica à visão elitista decorrente da reforma que se anuncia declara que o país necessita de uma “Matemática para multidões e não para elites” (p. 548). E, talvez para clarificar melhor a quem se dirigem as suas palavras, acrescenta:

> No campo do ensino é preciso estabelecer uma economia de esforço que conduza a pôr de parte assuntos e métodos que já eram velhos há 50 anos, e que ao mesmo tempo se não disponha a implantar todas as novidades que venham de Paris, mesmo que tragam a garantia do nome fascinante de Nicoles Bourbaki (p. 548).

O artigo continua, propondo diversas medidas que, sem alterar fundamentalmente os programas em vigor, permitiriam, no seu entender, melhorar as condições de ensino da Matemática e recorre essencialmente a autores anglo-saxónicos e publicações do NCTM para apoiar o seu ponto de vista.

O artigo de Francisco Gonçalves foi aqui escolhido por poder condensar opiniões discordantes sobre a reforma que se aproximava, afirmando essencialmente a limitação de alguns métodos didácticos propostos e afirmando claramente a possibilidade de uma outra via, que não a francófona, para o melhoramento do ensino da Matemática.

A construção do novo saber

O período (1951-63) que analisei foi seguido por grandes alterações no ensino da Matemática com o desenvolvimento de novos programas, novos livros de texto, e novas metodologias. O próprio sistema educativo português vai brevemente ser confrontado com multidões de alunos que vão estilhaçar as suas dimensões mais elitistas, fenómeno cujas ondas de choque são ainda hoje observáveis. No entanto, os artigos que analisei residem numa época em que estes eventos futuros parecem ainda distantes.

Fundamentalmente, a análise destes quatro trabalhos contribui para a compreensão do modo como o saber escolar, que mais tarde aparecerá sob a designação de Matemática Moderna, se formou no panorama português. Destaco em primeiro lugar a importância da CIEAEM, bem como da *Recomendação nº 43* da ONU, aqui referida por diversos autores, e que é mencionada noutros locais não referidos neste artigo. A origem das ideias é essencialmente europeia (francófona, espanhola ou italiana) e apenas Gonçalves refere materiais anglo-saxónicos como uma via alternativa. Contrariamente ao que é por vezes referido, nenhum destes autores menciona a rivalidade com os países de Leste ou o lançamento do Sputnik como motivação para os seus trabalhos. Todos procuram melhorar o ensino da matemática como condição essencial de progresso do país, quer de aproximação a outros países europeus, quer como factor de desenvolvimento económico, social e cultural.

Quanto aos fundamentos das novas ideias, os três primeiros artigos procuram construir um novo saber pedagógico legitimado, quer pela psicologia — casos dos artigos de Fernandes e Ventura —, quer pelo desenvolvimento matemático — nos artigos de Fernandes e Lopes. A coincidência entre as três estruturas-mãe bourbakistas e as estruturas operatórias da inteligência piagetianas reforçam a justeza das novas ideias.

Se nesta época os fundamentos da reforma se encontram claramente enunciados, o conteúdo exacto deste novo saber pedagógico só vai estar fixado nos primeiros livros de texto produzidos por Sebastião e Silva em 1964. Assim, os artigos em análise apenas adiantam algumas linhas de força para esse conteúdo. Quanto às metodologias, sugere-se o recurso a modelos e materiais para ilustrar as ideias matemáticas e acabar com o ensino centrado exclusivamente no professor, confiando na capacidade do aluno para produzir conhecimento autónomo — artigo de Lopes. Quanto aos programas em vigor, apenas Fernandes propõe mudanças substanciais. Nenhum dos outros propõe alterações radicais, antes defendendo explicitamente a possibilidade de, com eles, conciliar as novas ideias — textos de Gonçalves, Lopes e Ventura.

Os artigos estudados reflectem ainda outras clivagens características do ambiente educativo da época. Em primeiro lugar, o papel do sistema educativo na formação das elites. Ventura teoriza sobre as suas vantagens, enquanto que Gonçalves alerta para a necessidade de o preparar para a chegada das multidões de alunos. Em segundo, o sentimento de asfixia pela ausência de liberdade e da urgência de alterações fundamentais — sugerido por Lopes — que começa a tomar conta de largos sectores da população em oposição com as cautelas evidenciadas por Ventura.

Seria abusivo concluir para uma forte expansão das ideias da Matemática Moderna no período em análise. Se é verdade que entre os artigos que escolhi se encontram as reflexões mais profundas (as únicas!) sobre o ensino da matemática da época publicadas na *Labor*, a maioria dos artigos de professores de matemática (quase uma centena), como referi logo no início, não reflecte qualquer relação com a nova temática.

Depois de 1963, a *Labor* continua a publicar artigos relativos ao ensino da matemática que precedem e acompanham o desenvolvimento da reforma da Matemática Moderna, esbatendo-se cada vez mais, quer as vozes discordantes, como a de Francisco Gonçalves, quer as reflexões em profundidade, como as de Manuel Ventura ou de António Fernandes. Trata-se, no entanto, de outras histórias que já não cabem no presente texto.

Bibliografia

- Beth, E. W. e outros. (1955). L'Enseignement des Mathématiques. Delachaux et Niestlé.
- Beth, E. W. e Piaget, J. (1966). Mathematical epistemology and psychology. Dordrecht, Holanda: Reidel.
- Carvalho, A. M. (2003). Liceu de Aveiro. Em A. Nóvoa e A. T. Santa-Clara (Eds.), "Liceus de Portugal" história, arquivos, memórias (pp. 74-95). Porto: ASA.
- Castelnuovo, E. (1956). Matemática clássica ou Matemática moderna, no ensino secundário? Gazeta de Matemática, 65, 6-10.
- Fernandes, A. (1960). Introdução de conceitos e proposições primitivos. Suas consequências do Ponto de vista didáctico. Labor, Revista de Ensino Liceal, 24, 649-668.
- Folha, R. e Grácio, R. (1958). Bom augúrio. Labor, Revista de Ensino Liceal, 22, 211-218.
- Gonçalves, F. M. (1961). O ensino das matemáticas no momento presente. Labor, Revista de Ensino Liceal, 25, 546-554.
- Guimarães, H. (2003). Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática - Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário. Tese de doutoramento não publicada, Universidade de Lisboa.
- Lopes, A. A. (1960). Reflexões sobre o ensino da Matemática. Labor, Revista de Ensino Liceal, 24, 633-648.
- Matos, J. M. (1989). Cronologia recente do ensino da Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

- Moon, B. (1986). The “New Maths” curriculum controversy. An international story. Londres: Falmer Press.
- Rosas, F. (1994). História de Portugal, sétimo volume. O Estado Novo (1926-1974). Lisboa: Círculo de Leitores.
- Sampaio, Á. (1966). Há quarenta anos! Labor, Revista de Ensino Liceal, 30, 176-186.
- Silva, J. S. (1955). Comissão Internacional do Ensino Matemático. Sub-comissão portuguesa. Gazeta de Matemática, 60/61, 33.
- Ventura, M. (1958). Como introduzir o conceito de número negativo no ensino liceal? Labor, Revista de Ensino Liceal, 22, 412-426.
- Ventura, M. (1959). Didáctica da Matemática. Labor, Revista de Ensino Liceal, 23, 305-318.

José Manuel Matos. Universidade Nova de Lisboa.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2006, Número 5, páginas 111-116
ISSN: 1815-0640

Cronoludia Matemática

Ismael Roldán y José Muñoz

Selección de chistes matemáticos de esos que pululan por Internet

1. ¿Qué es un niño complejo?

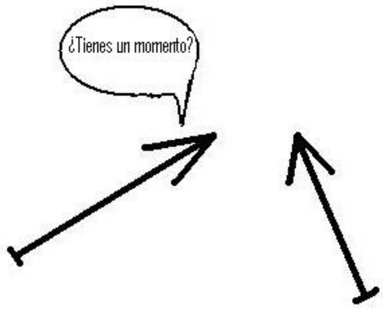
Uno con la madre real y el padre imaginario

2. ¿Qué es un oso polar?

Un oso rectangular, después de un cambio de coordenadas.

3. ¿Qué le dijo un vector a otro?

Oye, ¿tienes un momento?



4. Noticia aparecida en la prensa:

El 33 % de los accidentes mortales involucran a alguien que ha bebido. Por tanto, el 67 % restante ha sido causado por alguien que no había bebido. A la vista de esto, está claro que la forma más segura de conducir es ir borracho.

5. En un Congreso de científicos celebrado en Escocia viajan en un tren un físico, un ingeniero y un matemático. Acaban de observar por la ventana una oveja de color negro. Estos son los comentarios de los ilustres:

Físico: Ajá, veo que las ovejas escocesas son negras.

Ingeniero: Hmm..., querrás decir que algunas ovejas escocesas son negras.

Matemático: No, todo lo que sabemos es que existe al menos una oveja en Escocia y que, al menos uno de sus lados es negro.

6. ¿De qué curso de matemáticas se habla siempre en voz baja y exclusivamente en el entorno de amigos y personas de confianza?

De Matemáticas Discretas

7. Se acaba de estrenar una película en la que aparecen tres vectores linealmente independientes, ¿Cómo se llama?

Rango 3

8. Se abre el telón y salen los números 1 y 2 llamando a una puerta, ¿cómo se llama la película?

¿Está el tres? (STAR TREK)

9. *Y Jesús se encontraba junto al lago de Galilea rodeado de sus discípulos y se dirigió a ellos y les dijo:*

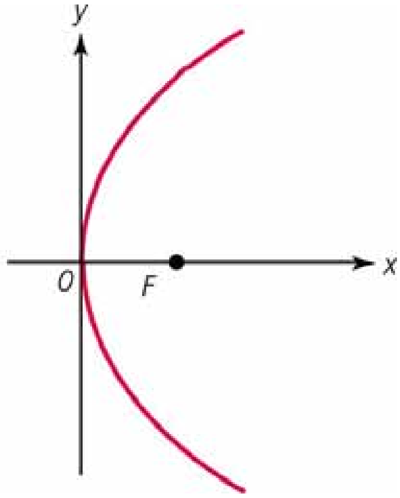
- "En verdad, en verdad os digo que y es igual a x al cuadrado".

Y Pedro, que se encontraba más cerca le preguntó:

- "Señor, no te entendemos".

Y Jesús le contestó:

- "Es que estoy hablando en parábola... "



10. - Jesús a sus discípulos:

- idos

Pedro emocionado cual brillante alumno responde inmediatamente:

- Igual a 2 pe equis

Jesús aclara:

- ¡No, hombre, que os marchéis!

Y San Pedro también aclara:

- Maestro, es que creíamos que hablabais en parábola, como de costumbre.

11. Lo señalan las estadísticas: En Nueva York un hombre es atropellado cada diez minutos.

- El pobre tiene que estar hecho polvo.

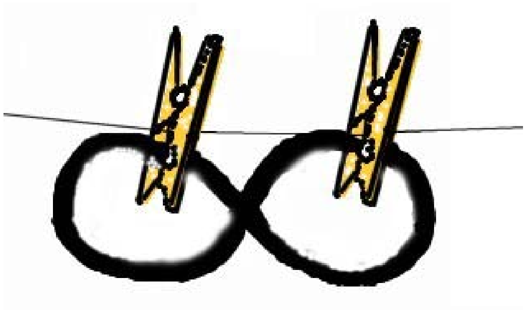
12. Un grupo de matemáticos tiene un problema. Tienen que medir la altura del mástil para una bandera, pero sólo tienen una cinta métrica, que obviamente no les sirve para gran cosa. En esto que aparece un ingeniero, le cuentan el problema, y lo que el hace es desmontar el mástil, tumbarlo en el suelo, medirlo, y volverlo a poner vertical. Los matemáticos le dan las gracias y el ingeniero dice "de nada", pero en cuanto se va, uno de los matemáticos le dice a los otros:

- *Hay que ver cómo son estos ingenieros, ¿eh?*
- *Le decimos que queremos medir la altura, y el tío se queda todo satisfecho cuando consigue medir la anchura.*

Ismael Roldán Castro y José Muñoz Santoja

13. ¿Qué sucede cuando n tiende a infinito?

- *Que infinito se seca.*



14. La inmensa mayoría de las personas tiene un número de piernas superior al promedio.

15. ¿Quién inventó las fracciones?

- *Enrique Octavo.*

16. TEOREMA: *todos los números enteros son interesantes.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no; por tanto, existe un mínimo número entero no interesante. Este número es, obviamente interesante, lo cual contradice el hecho de que no es interesante. Por reducción al absurdo, la suposición de que existen números no interesantes es falsa.

17. Si $\lim_{x\to 0}\frac{8}{x}=\infty$, entonces $\lim_{x\to 0}\frac{5}{x}=\rotatebox{-90}{5}$

18. TEOREMA: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{n}=6$. DEMOSTRACIÓN: Si simplificas la n , quedará six en el numerador, es decir, 6 (c.q.d.)

19. *- ¡Papá, papá!, ¿me haces el problema de matemáticas?*

- No hijo, no estaría bien.

- Bueno, inténtalo de todas formas.

20. Está matemáticamente demostrado que las bacterias se multiplican dividiéndose.

21. Durante una clase de matemáticas:

"...el caso complejo es el más sencillo, porque..."

22. Se cuenta que un presuntuoso iba diciéndole a todo el mundo que era descendiente directo de Constantino I el Grande. Hasta que un día se lo contó a un matemático. Éste, después de escuchar atentamente las historias del supuesto descendiente del gran emperador, le dijo:

"Usted tiene dos padres, y cada uno de ellos, otros dos, y así sucesivamente. Teniendo en cuenta que nos separan unas sesenta generaciones de su ilustrísimo pariente, resulta que usted ha tenido, desde entonces, más de dos trillones de antepasados. Uno de ellos es Constantino el Grande. Me parece a mí que poco le toca de tan importante señor".

23. ¿Cómo comprobar experimentalmente que 2+2=5?

-Consigue dos cuerdas, y haz en cada una de ellas dos nudos. Ahora átalas juntas. ¿Cuántos nudos tiene el resultado?

24. Van dos ceros arrastrándose por el desierto a una temperatura de 60 grados centígrados, cuando de repente uno de ellos ve un ocho que pasa a lo lejos y le dice al otro cero sorprendido:

-Mira a ese loco, con el calor que hace y con el cinturón apretado!

25. *- ¡Papá, papá! ¡Hoy he jugado el partido de mi vida!*

- ¿Ah, sí? ¿Qué ha pasado?

- ¡He marcado tres goles!

- ¡Qué bien! ¿Y cómo habéis quedado al final?

- Perdimos 2 a 1...

26. En la consulta del doctor:

- Doctor, me duele en la mil.

- ¿En la mil? ¿Dónde le duele a usted?

El paciente se señala al lado de la frente.

-¡Ah!, se refiere usted a la sien.

-¡Yo sabía que un número alto era!

27. El inspector de educación visita un colegio para ver cómo andan los niños en matemáticas. Selecciona a uno y le pregunta:

-A ver, Pepito, ¿cuatro por cuatro?

-Un todo terreno -responde el niño.

-¿Y tres por dos?

-Una oferta del Carrefú.

El inspector se pone en comunicación con el padre del niño para que le ayude a estudiar matemáticas.

El padre de Pepito se sienta con él por la tarde y comienza planteando un problema:

-Vamos a ver, niño. Vamos en la furgoneta y nos paramos en un melonar que tiene doscientos melones. Nos llevamos cien melones en la furgoneta. ¿Cuántos quedan en el melonar?

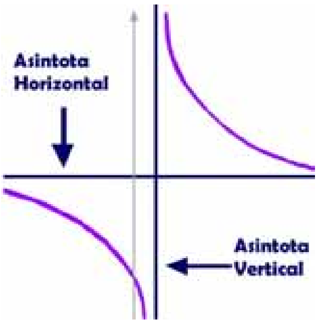
-Pues... otro viaje.

28. ¿Te gustan los polinomios?

- Sí, pero sólo hasta cierto grado.

29. *¿Qué le dice la curva a su asíntota?*

- *Ni se te ocurra tocarme.*



30. Una dulce y tierna alumna de primaria le dice a su maestro:

-Usted debe tener más de cuarenta y cuatro años, ¿verdad?

-¿Por qué lo dices?

- Porque mi hermano no es ni la mitad de tonto que usted y tiene veintidós.

31. Un día se presentan dos pacientes con la misma dolencia en el riñón (por ejemplo, una applasia renal) y el médico les receta una sopa de rábanos bien caliente.

Al poco tiempo se entera de que uno de los pacientes se curó y el otro murió.

Aquella tarde preparó la comunicación para el próximo XXXV Congreso de afecciones renales que organiza el laboratorio Plicuyer. Así terminó al exponerla

"…en conclusión, que la sopa de rábanos caliente cura a un 50% de los casos de applasia renal y mata al otro 50%" (Aplausos)

32. *A ver, Jaimito, ¿cuántas son dos y dos?* – le pregunta la profesora

- ¡Ya, profe, si no me da más datos…! – reclama Jaimito*.*

33. Los cálculos no fallan: El estado del Vaticano tiene medio kilómetro cuadrado de extensión lo que significa que hay dos Papas por kilómetro cuadrado.

34. El maestro dijo muy serio a sus alumnos: "En el próximo examen quiero que todos saquen una nota por encima de la media"

35. ¿Cuál es el animal que más matemáticas sabe?

El topo

¿Por qué?

Porque extrae raíces…

36. Afirma y demuestra el ingeniero:

Todos los números impares son primos, dice y continúa: En efecto, basta con aplicar las pruebas correspondientes al 1, al 3 al 5 al 7 al 11 al 13, ver que funcionan y continuar así indefinidamente.

¡Oiga, don!, ¿y el 9?

¡Ah, claro, en ese falla la prueba y es la excepción que confirma la regla…!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 117-120
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

¿Cuál es el punto de una parábola que se encuentra más cercano a un punto determinado, en el mismo plano de la parábola?

Para resolver de manera general este interesante problema, pueden usarse los métodos conocidos del cálculo diferencial o los métodos del cálculo de variaciones; sin embargo, considerar casos particulares y no usar herramientas muy fuertes, brinda excelentes oportunidades de aprendizaje, inclusive en el nivel de educación secundaria, manejando criterios de minimización usando desigualdades, y relacionando razonamiento algebraico con observaciones geométricas.

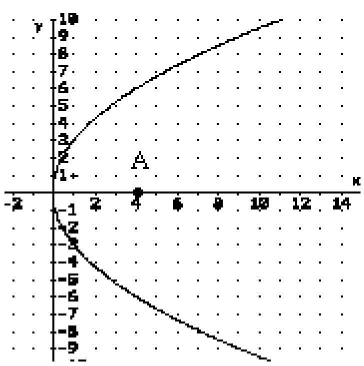
Actividades individuales considerando un caso particular y sin usar derivadas.

1. Hallar el punto de la parábola $y^2 = 9x$ que se encuentra más cercano al punto A de coordenadas (4, 0).

2. Expresar de manera general la distancia más corta de la parábola $y^2 = 9x$ a un punto B de coordenadas (a, 0), siendo a un número real.

Una manera de desarrollar la actividad 1 es la siguiente:

- Esbozar un gráfico de la parábola:



- Calcular el cuadrado de la distancia del punto A(4, 0) a un punto genérico de la parábola P(x, y), teniendo en cuenta que si algún valor de x minimiza d^2, también minimizará d

$$d^2 = (x-4)^2 + (y - 0)^2$$

$$= x^2 - 8x + 16 + 9x$$

$$= x^2 + x + 16$$

$$= (x + ½)^2 + \frac{63}{4}.$$

En consecuencia, d^2 es siempre mayor o igual que 63/4, y su valor mínimo lo alcanza cuando la expresión $(x + ½)^2$ toma el menor valor posible; es decir, cuando x = 0, pues $x \geq 0$.

Así, el valor mínimo de d^2 es 1/ 4 + 63/4 = 16 y por tanto el valor mínimo de la distancia es d = 4.

En conclusión, el punto de la parábola más cercano al punto A(4, 0) es el punto de abscisa x = 0, que es el vértice de la parábola, y la distancia correspondiente es 4.

Pensando la actividad 2

Teniendo en cuenta lo obtenido en la actividad 1, ¿podemos concluir que el punto más cercano de la parábola $y^2 = 9x$ al punto B(*a*, 0) es su vértice, y que la distancia es *a*?

El lector está invitado a dar una respuesta a la pregunta, antes de continuar.

- Examinemos otro caso particular:

Distancia de $y^2 = 9x$ al punto Q (10, 0)

$$d^2 = (x -10)^2 + (y -0)^2$$

$$= x^2 - 20x + 100 + 9x$$

$$= x^2 -11 x + 100$$

$$= (x - 11/2)^2 + 279/4$$

Por consiguiente d^2 es mínimo cuando la expresión $(x – 11/2)^2$ toma el menor valor posible; es decir, cuando **x = 11/2.**

Así, $d^2 = 279/4$ y entonces $d \approx 8,35$

Vemos así que el punto más cercano de la parábola $y^2 = 9x$ al punto Q(10, 0) **no** es su vértice y la distancia **no** es 10

Es muy importante acompañar esta conclusión algebraica con la observación en el gráfico de la parábola. Tener en cuenta que en el gráfico de este texto, las escalas en los ejes no son las mismas, lo cual crea distorsiones, pero se puede percibir que el punto más cercano de la parábola a un punto del eje de abscisas, no siempre es su vértice.

- Desarrollemos la actividad 2: Haciendo operaciones algebraicas similares a las hechas, considerando el punto B (*a*, 0), obtenemos

$$d^2 = (x + (9-2\,a)/2)^2 + 9(a – 9/4).$$

Por consiguiente d^2 es mínimo cuando $x = - (9 – 2\,a)/2$;

o sea cuando **$x = a – 9/2$.** El valor mínimo es $d^2 = 9(a – 9/4)$

Como $x \geq 0$, esto se cumple **para $a \geq 9/2$** y entonces, para este caso, la distancia mínima es

$$d = 3\sqrt{a - \frac{9}{4}}\,.$$

Observemos que siendo $x = a – 9/2$, y la ecuación de la parábola $y^2 = 9x$, cuando **$a = 9/2$** se tiene **$x = 0$** y en consecuencia el punto de la parábola que se encuentra a la distancia hallada del punto B(*a,* 0), es (0, 0), que es el vértice de la parábola. En este caso la distancia hallada es

$$d = 3\sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}} = \frac{9}{2} = a\,.$$

Cuando **$a > 9/2$**, se tiene **$x > 0$** y en consecuencia hay dos valores correspondientes de y, o sea dos puntos de la parábola que están a la distancia d hallada, del punto B(*a*, 0). Esta conclusión algebraica, es totalmente coherente con la ubicación del punto B(*a*, 0) en el eje de simetría de la parábola:

- ¿Cómo es la situación si a < 9/2?

En tal caso $9 – 2\,a > 0$ y observamos que

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2$$
$$= x^2 - 2\,a\,x + a^2 + 9x$$
$$= x^2 + (9 - 2\,a)\,x + a^2.$$

Así, d^2 es siempre mayor o igual que a^2 y es mínimo cuando x toma el menor valor posible; es decir cuando **x = 0.** Resulta entonces que el valor mínimo de d^2 es a^2 y en consecuencia el valor mínimo de d es $d = |\,a\,|$.

Observemos también que el valor absoluto tiene pleno sentido geométrico, pues cuando $a < 0$ el punto B(a, 0) se encuentra siempre en la recta que es el eje de simetría de la parábola, pero a la izquierda de la parábola (está en el exterior de la región parabólica) y se percibe fácilmente que el punto más cercano de la parábola es el vértice; en consecuencia la distancia es la longitud del segmento que une B con el origen de coordenadas, que es $|\,a\,|$.

- Resumamos los casos:

➢ Cuando $a \leq 9/2$, el punto de $y^2 = 9x$ cuya distancia al punto B(a, 0) es mínima es (0, 0) y tal distancia es $d = |\,a\,|$.

➢ Cuando $a > 9/2$, hay dos puntos de la parábola $y^2 = 9x$ cuya distancia al punto B(a, 0) es mínima:

$$\left(a - 9/2,\ 3\sqrt{a - \frac{9}{2}}\right) \quad \text{y} \quad \left(a - 9/2,\ -3\sqrt{a - \frac{9}{2}}\right),$$

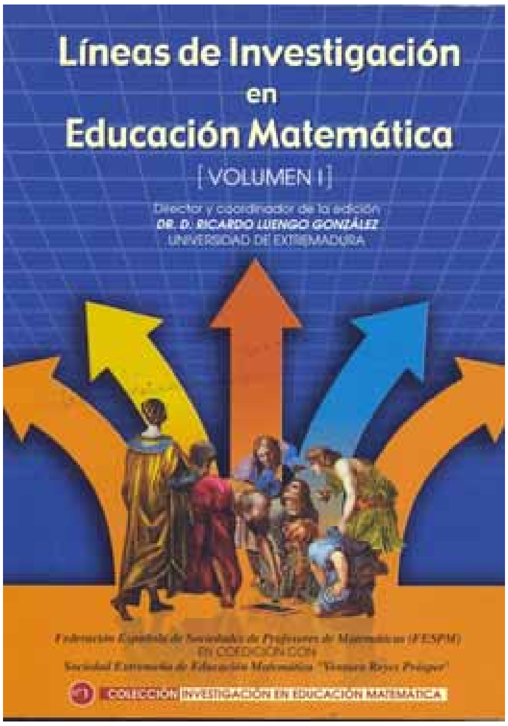
y tal distancia es $d = 3\sqrt{a - \frac{9}{4}}$.

Dejamos el caso B(a, b) para entretenimiento de nuestros lectores. Nos encantará considerar sus comentarios o sugerencias en el próximo número.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Marzo de 2006, Número 5, páginas 121-123
ISSN: 1815-0640



Director y coordinador de la edición: Ricardo Luengo

Líneas de Investigación en Educación Matemática. Volumen I

Servicio de publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Año de publicación: 2004

260 Páginas

En este libro se recogen algunas de las ponencias que diversos investigadores presentaron en el Seminario Permanente de Investigación en Didáctica de las Matemáticas organizado por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática. El objetivo del Seminario era el de informar sobre las líneas de investigación más relevantes en el área para contribuir a la formación del profesorado de matemáticas y facilitar la realización de trabajos de investigación a los alumnos que cursaban su doctorado en la Universidad de Extremadura. Posteriormente se pidió a los ponentes que escribieran sus intervenciones y con las ocho primeras recibidas se ha constituido este primer volumen.

Se trata de un libro importante, por cuanto facilita el conocimiento de algunas de las líneas de investigación en didáctica de las matemáticas desarrolladas en España o Portugal a un público interesado, pero no especializado en el tema, como puedan ser los profesores de matemáticas o los investigadores del área que trabajan en otras líneas de investigación. Los artículos se acompañan de bibliografías extensas que permiten al lector que lo desee seguir profundizando en el conocimiento de esos temas.

M. Ibañes y T. Ortega describen una investigación en torno al aprendizaje de la demostración matemática. Los autores parten de un marco teórico constituido por la noción de 'esquema de prueba' definida por Harel y Sowder y entendida como el proceso que utiliza un individuo para convencerse o convencer a otros de la veracidad de una proposición. Mediante una metodología variada formada por cuestionarios, debates y entrevistas, estudian los esquemas de prueba que utilizan los alumnos de 1º de Bachillerato (16-17 años) para justificar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Los resultados obtenidos les llevan a definir nuevas modalidades de esquemas de prueba y a plantearse una acción didáctica que los haga evolucionar.

F. A. Magro y R. Luengo estudian las concepciones de los alumnos sobre la naturaleza, origen, evolución, y aplicabilidad de las matemáticas, así como su percepción de las condiciones de aprendizaje de la disciplina y del papel del aprendiz en la realización de las tareas matemáticas. Para ello, utilizan una metodología en parte cuantitativa y en parte cualitativa consistente en el diseño y análisis de un cuestionario escrito pasado a una muestra de 116 alumnos de entre 14 y 18 años de edad y la realización de entrevistas clínicas.

A. Gutiérrez expone una investigación dirigida por él y realizada por R. M. Corberán sobre la didáctica del área y su medida. Empieza haciendo una revisión del estado de la cuestión, centrándose en los trabajos de Freudenthal, Perrin-Glorian y Héraud, lo que le permite construir un marco teórico que integra los puntos de vista de estos investigadores. La parte experimental consta de un test diagnóstico en el que se evalúan las concepciones de los alumnos a partir de los componentes del concepto de área establecidos en el marco teórico, y de la experimentación de una unidad de enseñanza para 4º de ESO (15-16 años) cuyo objetivo es que los alumnos distingan entre el área de una superficie, su forma, su perímetro y la unidad empleada para medir.

E. de la Torre comenta diversos aspectos del papel de la demostración en la educación matemática. Entre ellos, el interés didáctico que puede tener la utilización de razonamientos físicos en la demostración de las propiedades geométricas. Finalmente, enuncia unas posibles líneas abiertas de investigación sobre la demostración en contextos educativos.

L. M. Casas y R. Luengo empiezan presentando una investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos en lo referente al concepto de ángulo en la que utilizan una muestra amplia de alumnos de diferentes edades y una metodología basada en las redes asociativas de Pathfinder y en el programa informático KNOT. Los resultados experimentales les llevan a pensar que, a diferencia de lo que proponen las teorías de aprendizaje verbal significativo de Ausubel y Novak, la estructura cognitiva de los alumnos se organiza no sólo en torno a los conceptos más generales, más inclusivos, sino en torno a ejemplos concretos, y con el paso del tiempo su complejidad disminuye en lugar de aumentar. Para explicar estos hechos proponen finalmente una "teoría de los conceptos nucleares" cuyos elementos principales son: la "organización geográfica del conocimiento", los "conceptos nucleares" y los "senderos de mínimo coste".

I. M. Gómez-Chacón estudia el papel que juegan los afectos y las emociones en la clase de matemáticas. Considera que la perspectiva socio-constructivista del aprendizaje es la más apropiada para interpretar la dimensión afectiva de la educación matemática. Hace después una síntesis de los principales autores que han estudiado el tema, comentando las teorías en las que se basan, su concepción de la emoción, la terminología utilizada y el tipo de investigaciones realizadas. Presenta, por último, sus propias investigaciones, en las que analiza las interrelaciones entre cognición y afecto, describiendo la metodología utilizada y construyendo un marco teórico que contempla tres niveles de indagación y la distinción entre "afecto local" y "afecto global".

Los dos últimos artículos se refieren a la investigación en educación estadística. Tanto C. Batanero y J. D. Godino como A. Estepa hablan de los distintos foros internacionales que fomentan o investigan la enseñanza de la estadística o de la probabilidad, de las revistas más importantes en dicho campo y de los marcos teóricos utilizados con más frecuencia. Detallan también las investigaciones desarrolladas en España sobre la didáctica de la estadística, la combinatoria y la probabilidad. Además, C. Batanero y J. D. Godino, comentan distintas cuestiones referentes a la enseñanza de dichos temas en la escuela. En cuanto a A. Estepa, describe una investigación sobre asociación estadística entre variables en la que estudia las concepciones previas de los alumnos, encontrando cuatro concepciones erróneas: causalista, determinista, unidireccional y localista. Después de un experimento de enseñanza se observa la superación de las concepciones determinista y localista, una mejora en la concepción unidireccional y la persistencia de la concepción causalista.

En resumen, estamos ante un libro que realiza una interesante labor de divulgación de una parte de la investigación en didáctica de las matemáticas realizada en la península ibérica que esperamos se complete con posteriores volúmenes.

Reseña: Eva Cid

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, páginas 125-137
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Adhibere: "tratamiento interactivo de la resolución de problemas"

Rafael Bracho López

Resumen

El principal objetivo de nuestro trabajo es conseguir una alternativa multimedia al tratamiento, en clase, de la resolución de problemas; una presentación que atraiga la atención del alumnado en clase de matemáticas facilitando así la tarea al profesor, dotándolo de una herramienta adicional para trabajar empíricamente.

Este trabajo multimedia de resolución de problemas supone un material novedoso para el aula, que vendrá a formar parte de las herramientas de que dispondrá el profesorado de matemáticas para despertar entre su alumnado el interés y el ánimo por disfrutar con las matemáticas; éste ha sido nuestro objetivo primordial a la hora de idear y más tarde crear este trabajo.

Abstract

The main objective in our work is to get a multimedia alternative to the treatment, in class, of the resolution of problems; a presentation that attracts the attention of the pupil in class of mathematics facilitating this way the task to the professor, endowing it of an additional tool to work empirically.

This work of resolution of problems supposes a novel material for the classroom, that it will come to be part of the tools that the teacher of mathematics will prepare to excite among his pupil the interest and the spirit to enjoy with the mathematics; this has been our primordial objective when imagining and later to create this work.

Introducción

No cabe ninguna duda que por encima de esa polémica que cuestiona si en educación matemática y sobre todo en los niveles de primaria (6-12) y secundaria (13-18), la Matemática debe considerarse dividida en distintos apartados o bloques temáticos o no, está el hecho de que la **Resolución de Problemas** está tan unida a las Matemáticas que nunca podremos pensar en un tratamiento de éstas sin trabajar continuamente en nuestras aulas la Resolución de Problemas.

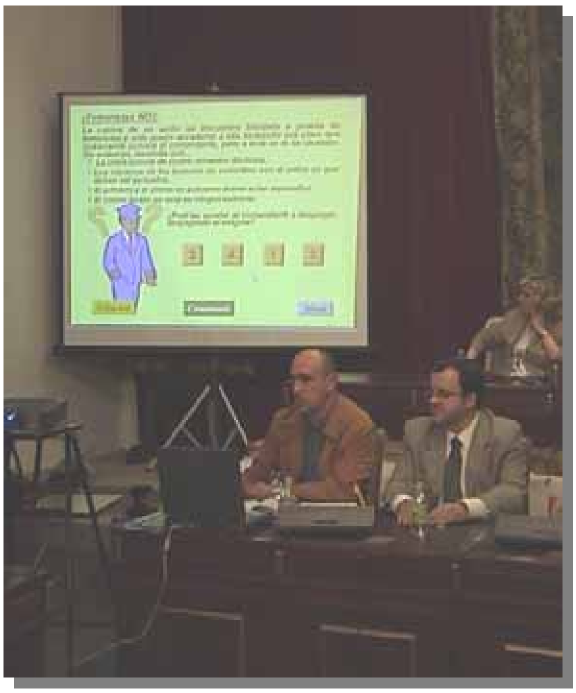
Sin embargo, pese a contar con multitud de trabajos realizados por los investigadores en este campo, parece que no terminamos de encontrar la manera de atraer a los estudiantes hacia el placer que supone investigar una situación problemática hasta conseguir su resolución.

Desde hace algunos años, un grupo de profesores estamos trabajando en un proyecto con el que queremos aportar una nueva alternativa al tratamiento de la Resolución de Problemas en el aula aprovechando la tecnología multimedia y convencidos, a través de la experimentación, del interés que supone el dotar a las actividades matemáticas de las animaciones que caracterizan a las secuencias lógicas que se dan ordenadamente en la resolución de un problema.

Tratamiento Interactivo de la Resolución de Problemas

Nuestro objetivo fundamental ha sido lograr que los alumnos y alumnas de **E.S.O.** (13-16) se acostumbren a “***introducirse***” dentro de las distintas situaciones que se les propone en cada problema y que disfruten, como solemos hacer los matemáticos y matemáticas, investigando la situación, utilizando para ello procedimientos muy diversos.

Básicamente nuestra metodología de trabajo ha consistido en abordar previamente en el aula la resolución de cada uno de los problemas que se incluyen para, a la vista de los hitos que se han dado en cada situación, diseñar una presentación para cada problema que recoja los diferentes planteamientos y posibles soluciones. A su vez, cada una de estas resoluciones está secuenciada contemplando las ideas que han surgido en el seno de la clase de Matemáticas. De esta forma tenemos garantizado un tratamiento de cada problema acorde con los esquemas mentales propios de los/as estudiantes de E.S.O. (13-16).


Presentación del CD

Sin duda resulta muy útil para el profesor o profesora la posibilidad de detenerse en el momento que vea conveniente, dirigiendo el aprendizaje y entrenando a los chicos y chicas en las diversas técnicas y/o estrategias heurísticas que se pueden emplear en la Resolución de Problemas, adaptando además el ritmo de la presentación al del aprendizaje del grupo de alumnos y alumnas.

Hay que destacar especialmente que la colección de problemas que se ha escogido está integrada por todos los que han sido propuestos en las **fases provinciales y regionales de las Olimpiadas Matemáticas “THALES”** para estudiantes de 2º de ESO (13 años), desde que éstas se iniciaron, hace ahora dieciocho años. Tratándose de la actividad reina de la SAEM “Thales” y teniendo en cuenta el esmero y cariño con el que todos los coordinadores de las distintas provincias andaluzas han seleccionado los problemas, creemos que se trata de un documento excepcional, de especial interés para todos los que conformamos la gran familia Olímpica de la SAEM “THALES”.

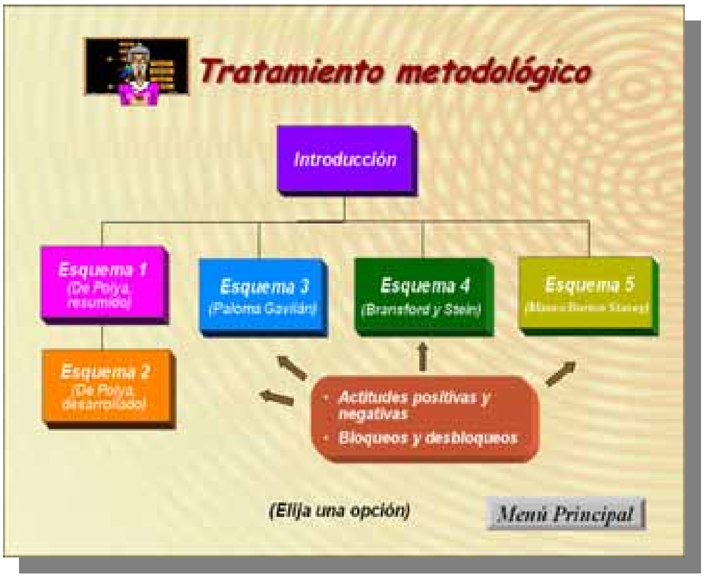
Contenido y estructura del trabajo

Menú Principal

Al iniciar el programa se accede a un **Menú Principal**. Si es la primera vez que se ejecuta resultará conveniente leer la ***Introducción*** que se ofrece, ya que así se podrá tener una impresión general acerca de las características del CD. Además, desde dicho menú puede optarse por el apartado de ***Consideraciones Metodológicas*** o bien por entrar en una de las cuatro grandes clasificaciones de los problemas según diferentes puntos de vista.

Consideraciones metodológicas

Si bien el enfoque que hemos querido darle a nuestro trabajo ha sido eminentemente práctico, nos parecía que debía incluirse un apartado metodológico que pudiera servir de referencia más o menos sistemática a la hora de abordar el aprendizaje de técnicas de resolución de problemas.



Menú metodológico

En cualquier caso, dadas las características de extensión en los textos y la distribución en pantallas que creemos deben poseer las producciones multimedia, hemos optado por ofrecer una serie de procedimientos esquemáticos e interactivos que se corresponden con las tendencias actuales más aceptadas en resolución de

Esquema de P. Gavilán

Actitudes y bloqueos…

problemas, como son los enfoques de ***Polya*** (se incluyen dos versiones), ***Gavilá*n**, ***Bransford y Stei*n**, y ***Mason, Burton y Stacey***. Siendo como decimos esquemáticos, todos los procedimientos que se presentan son suficientemente sustanciosos. Esperamos que cada profesor pueda identificarse con alguno de estos procedimientos aunque debe tenerse en cuenta que la validez de todos ellos y los elementos comunes que comparten pueden hacer que cada resolutor/a pueda utilizar más de una alternativa.

Por otro lado, hemos querido ocuparnos de analizar los aspectos sentimentales y emocionales que se experimentan cuando nos enfrentamos a una situación problemática. Me refiero a las actitudes positivas y negativas y a los bloqueos que se pueden padecer ante un problema.

En el caso de las actitudes ante el problema, se ofrece una recopilación según las características al tiempo que se citan las consecuencias de dichas actitudes.

En cuanto a los bloqueos, se presentan clasificados según su naturaleza en unas versátiles tablas animadas e interactivas por las que el usuario puede ir dirigiéndose en función de su interés, ofreciéndose además en cada instante una serie de apoyos sistemáticos a los distintos bloqueos.

Tratamiento de los problemas. Clasificaciones del material

Estando convencidos de que potencialmente todos los alumnos pueden y deben sentirse atraídos hacia el placer que supone afrontar el desafío de enfrentarse a un problema, sabemos sin embargo, lo difícil que hasta ahora nos ha resultado conseguir una predisposición inicial adecuada en el alumnado.

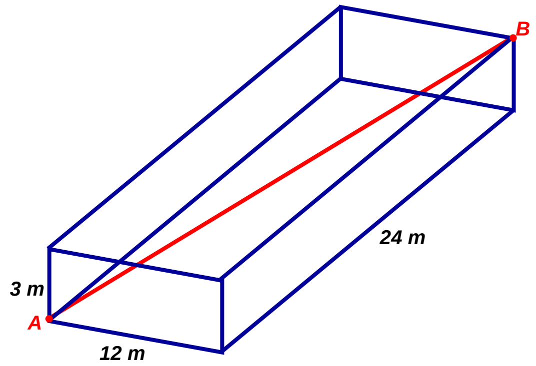
Aprovechando los recursos tecnológicos que nos aporta la tecnología multimedia nos hemos propuesto vencer esa actitud negativa habitual, centrando nuestro trabajo en tratar con todo el mimo posible a cada uno de los ya de por sí sugerentes problemas propuestos en las **Olimpiadas "Thales"**, con el fin de que los chicos y chicas se sientan **"enganchados"** en todo momento y no se resistan a imbuirse dentro de las situaciones que se les propone.

Para conseguir esta situación de ***"enganche"*** nos hemos ocupado básicamente de dos aspectos: el **estético** y el **procedimental.**

En el primero, hemos prestado especial atención a los enunciados de los problemas redactándolos convenientemente con el objetivo de que la situación que se les presenta les resulte lo suficientemente **atractiva** como para dedicarse a su estudio.

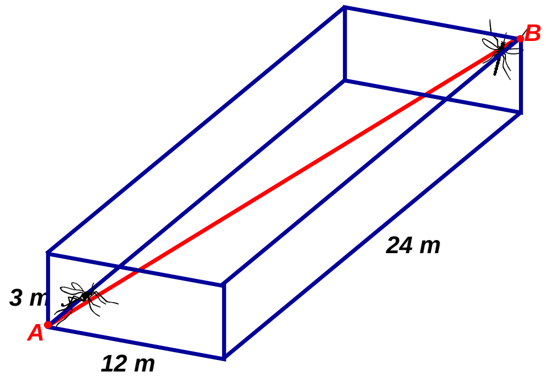
Véanse como ejemplo los dos enunciados siguientes:

***Enunciado 1**: Calcula la distancia de A a B en el ortoedro de la figura:*



***Enunciado 2**: ¡Qué bonito es el amor...!:*

El mosquito Pepito se encuentra en la esquina A de una nave industrial que mide 24metros de largo, 12 de ancho y 3 de alto, cuando divisa en el vértice opuesto B a Melinda, su mosquita preferida, ¿qué distancia habrá de volar Pepito para encontrarse con su amada Melinda?



Evidentemente, el interés matemático en uno y otro enunciado es idéntico, y a nosotros este interés puede parecernos suficiente para la justificación del problema, sin embargo, es seguro que el segundo enunciado le resultará más atractivo a los estudiantes. Y si a este segundo enunciado le añadimos unas ilustraciones y animaciones apropiadas que terminarán, cuando se encuentre la solución, con el paseito de Pepito en busca de Melinda y el bonito desenlace del encuentro, el efecto que se consigue es evidente.

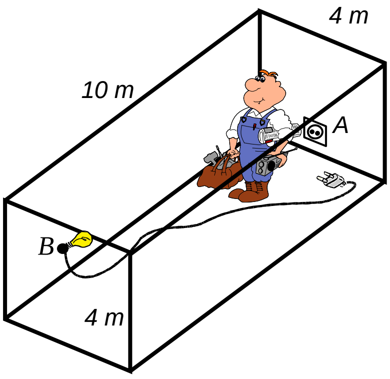
En cuanto al aspecto **procedimental**, no nos hemos limitado a presentar la solución o soluciones de cada problema, más bien nos hemos ocupado de **"encaminar"** las resoluciones, deteniéndonos en los hitos que hemos observado en la experimentación en el aula, esbozando y proponiendo ideas, estableciendo de esta manera, en cada caso, una cuidada secuencia que ayuda a pensar a los estudiantes y los acostumbra de manera sutil a enfrentarse por sí solos a las situaciones, dotándolos además de forma natural, de las destrezas que deben manejar.

Ejemplo en papel

No resulta fácil transmitir en formato papel la idea de las presentaciones de los problemas en multimedia; no obstante, la manera secuencial dual de introducir a los estudiantes en los problemas podría ser la que se expone en el siguiente ejemplo:

Electrificando:

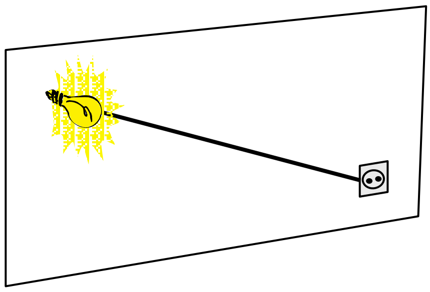
Una habitación tiene 10 m. de largo, 4 m. de ancho y otros 4 m. de alto. En el punto A, en el medio de la pared del fondo y a medio metro del suelo, hay un enchufe. Se necesita tender un cable para conectar el enchufe A con una lámpara situada en el punto medio B de la pared de enfrente, a medio metro del techo. Por evidentes razones de seguridad, el cable debe ir sujeto a las paredes, suelo o techo, y nunca por el aire.



Calcula la longitud de cable mínima para resolver el problema. (Una pista: ¡La respuesta no es 14 m!)

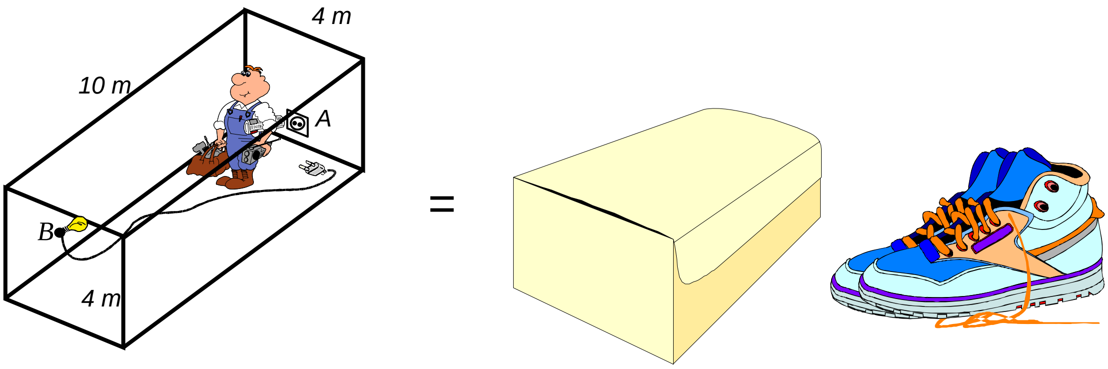
Solución:

- No siendo 14 m la solución, el asunto no es tan fácil, ¿verdad?...
- *… si el enchufe y la bombilla estuvieran en la misma pared sí que estaría claro cuál es el recorrido más corto…*
-

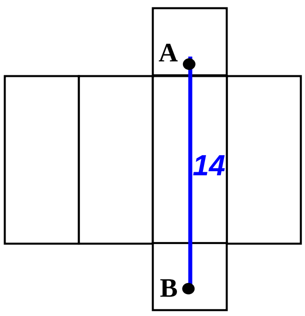


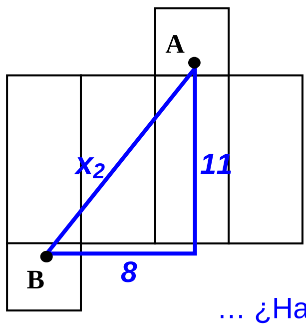
… la línea recta, evidentemente

- *Pues bien, ten en cuenta que el recorrido del cable va a ser siempre sobre el plano e intenta reducir la situación a un solo plano…*
- *Imagínate la habitación como si fuera una caja de cartón como las de zapatos…*

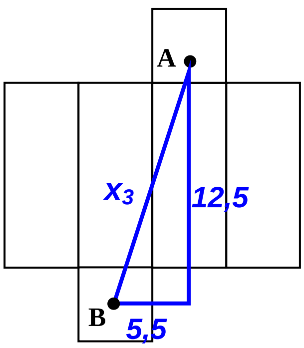


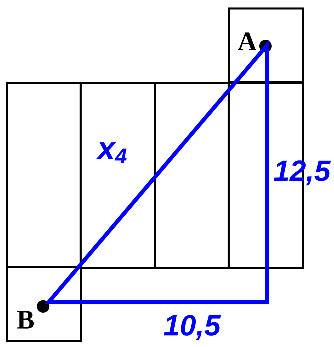
- *Estudia las diferentes formas de deshacerla para que la distancia de A a B sea mínima…*





… ¿Hay más alternativas?



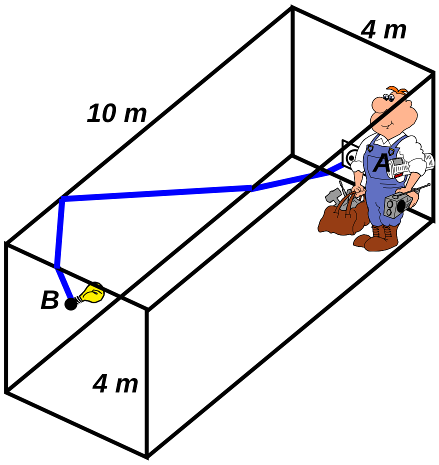


- *¿Sabrías calcular ya el camino más corto?*

- *X_4 ni perderíamos el tiempo en calcularlo, x_1 = 14 m, x_2 = 13,6 m y x_3 = 13,66 m, luego:*

La mínima distancia es 13 m y 60 centímetros

- *Y para finalizar…, ¿sabrías indicar el recorrido del cable en el dibujo inicial?*



Clasificaciones del material

En nuestra metodología de trabajo, comenzamos con el tratamiento individualizado de cada uno de los 311 problemas que integran la colección y, cada vez que estudiábamos un problema, le aplicábamos una clasificación atendiendo a distintos criterios que nos sirvió más tarde para presentar la serie de problemas desde distintos menús, cada uno de los cuales con un interés evidente para el profesorado que verá cómo puede dirigirse hacia las actividades deseadas según sus necesidades y de forma operativa y sistemática.

Los menús que se ofrecen son los siguientes:

Menú olimpiadas

En él se presentan los problemas propuestos en las 18 ediciones de las Olimpiadas "Thales" organizados por ediciones. Cuando se elige una edición, nos dirigimos a otro submenú desde el que podemos optar por acceder a los problemas propuestos en la fase provincial o en la fase regional correspondiente.

Menú olimpiadas

Creemos que esté menú puede resultar interesante para los/as profesores/as y alumnos/as que tengan un cariño especial a las Olimpiadas “Thales” o quieran preparar próximas ediciones de esta actividad.

Menú aleatorio

Hemos llamado así a una clasificación de los problemas en la que éstos aparecen ordenados alfabéticamente según sus títulos, es decir, cuando elijamos un problema no sabremos de antemano si éste es más o menos complicado, ni si es un problema algebraico, geométrico o de cualquier otro bloque temático.

Esta clasificación está pensada para aquellos usuarios a los que les guste enfrentarse a los problemas como retos desconocidos…

Menú aleatorio

Menú dificultad

Para esta opción se han clasificado los problemas en tres niveles de dificultad. Sin embargo, en cualquier nivel nos podremos encontrar problemas de cualquier bloque temático. La idea es pues, ir adquiriendo gradualmente destrezas en resolución de problemas, manejando para ello una amplia gama de recursos.

En la pantalla principal de este menú se incorpora un hipervínculo llamado ***“Estadísticas”***, que conduce a sendas gráficas que ilustran las frecuencias con las que han sido propuestos en la Olimpiadas Matemáticas “THALES” problemas de unos y otros grados de dificultad.

Menú dificultad

Menú bloques

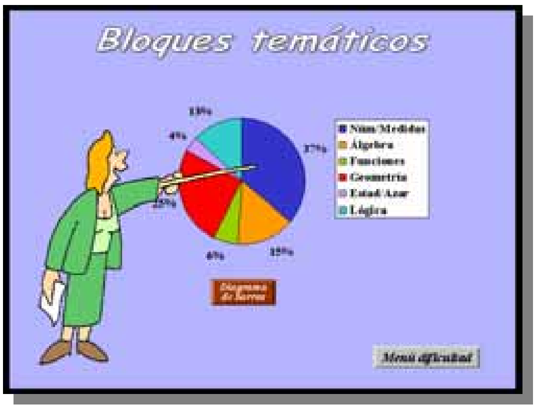
Sin lugar a dudas ésta será una de las opciones que más interés tenga para el profesorado, puesto que hace posible un uso directo en el aula acomodándose a la unidad didáctica que se esté estudiando en cada momento.

A la hora de clasificar los problemas por bloques temáticos nos ha parecido adecuado tomar como referencia los cinco bloques que se proponen en el diseño curricular correspondiente al área de matemáticas: ***Números y medidas, Álgebra, Funciones y gráficas, Geometría y Estadística y azar***. No obstante, hemos incorporado un sexto bloque que corresponde a los problemas denominados ***“de lógica”***, debido al interés que este tipo de problemas tiene para el alumnado y a la relativa frecuencia con la que han sido propuestos en las Olimpiadas Matemáticas “THALES”.

Dentro de cada bloque los problemas están ordenados por nivel de dificultad.

Debe considerarse la existencia de problemas que admiten diversos procedimientos de resolución y también aquellos problemas para cuya solución son necesarios elementos de más de un bloque temático de los citados anteriormente. Estos hechos hacen que existan problemas que se han incluido en más de un bloque temático.

En la pantalla principal de este menú también se incorpora un hipervínculo llamado ***"Estadísticas"***, que conduce a sendas gráficas que ilustran las frecuencias con las que han sido propuestos en la Olimpiadas Matemáticas "THALES" problemas de cada uno de los seis bloques temáticos que son objeto de esta clasificación. Resulta interesante el análisis de estas gráficas estadísticas.



Menú bloques

Bibliografía

- C. Alsina, E. Trillas E (1984): Lecciones de Álgebra y Geometría. GG., Barcelona.
- F. J. Anillo, R. Bracho (2000): Por una integración plena de las recreaciones matemáticas en la ESO. (CEJA) Revista Perspectiva CEP, nº 2, Sevilla.
- R. Bracho (1999): Actividades Recreativas para la Clase de Matemáticas. Delegación de Educación, Córdoba.
- R. Bracho (2001): El Gancho Matemático. Port-Royal, Granada.

- R. Bracho (2000): Recreo Matemático (CD-ROM). SAEM THALES, Cádiz.
- J. D. Bransford, S. Stein (1988): Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear. Labor, Barcelona.
- W. H. Cockroft (1986): Las matemáticas sí cuentan. MEC, Madrid.
- M. De Guzmán (1991): Para pensar mejor. Labor, Barcelona.
- M. De Guzmán (1990): Seminario–Taller: “Resolución de Problemas”. I EDUMAT, CEP de Montilla, Córdoba.
- Grupo Cero (1987): De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas. Mestral Libros, Valencia.
- R. Honsberguer (1994): El ingenio en las Matemáticas. Euler, Madrid.
- I. Lakatos (1978): Pruebas y refutaciones. Alianza Universidad, Madrid.
- Mason, Burton y Stacey (1988): Pensar matemáticamente. Labor, Barcelona.
- R. E. Mayer (1986): Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Paidós Ibérica, Barcelona.
- J. Peralta (1995): Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las Matemáticas. Huerga y Fierro, Madrid.
- G. Polya (1965): Cómo plantear y resolver problemas.Trillas, México.
- G. Polya (1966): Mathematical Discovery. 2 vols. John Wiley & Sons, New York.
- G. Sánchez (1996): Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos. SAEM “THALES”, Sevilla
- L. M. Santos Trigo (1996): Principios y métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericana, México.
- A. Schoenfel (1983): Problem solving in the mathematics curriculum. The Mathematical Association of America.
- K. Stacey, S. Groves (1999): Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático. Nancea, Madrid.

Rafael Bracho López, es Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada y doctorando en Ciencias de la Educación.
Profesor de secundaria de Matemáticas desde 1984, destinado en el IES Averroes de Córdoba desde 1991. Coordinador de la experiencia TIC del IES Averroes desde el curso 2003-2004.
Primer premio de publicaciones educativas de la Delegación de Córdoba, primer premio en el Certamen Europeo “Física y Matemática en Acción”, primer premio de software educativo de la SAEM THALES y tercer premio de elaboración de material didáctico de la SAEM THALES.
Ha publicado diversos libros de recursos de Matemáticas para educación secundaria, así como diversos CDs multimedia y artículos en revistas educativas.
Ha impartido conferencias y presentado ponencias y comunicaciones en numerosos congresos nacionales e internacionales.
Tiene experiencia en formación permanente del profesorado, habiendo participado en numerosos cursos de formación sobre didáctica de las Matemáticas y utilización de las TIC en el aula.
Coordinación TIC del IES Averroes de Córdoba (España)
e-mail: rbracho@gmail.com

Marzo de 2006, Número 5, páginas 139 - 142
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

ABEJAS Y GEOMETRÍA

¿Te has preguntado alguna vez por qué las abejas utilizan la forma hexagonal para construir sus panales? ¿Es este un capricho de la naturaleza o existe alguna explicación lógica que pueda ser comentada bajo un punto de vista matemático?

Empecemos aclarando algunos conceptos: Se denominan figuras ***isoperimétricas*** a las que tienen igual perímetro, aunque su forma sea distinta. Por ejemplo, existen infinidad de ***cuadriláteros*** con perímetro de 60 cm. Centremos nuestra observación en los ***rectángulos*** cuyas dimensiones puedan ser expresadas utilizando números enteros. La tabla siguiente muestra las diferentes posibilidades.

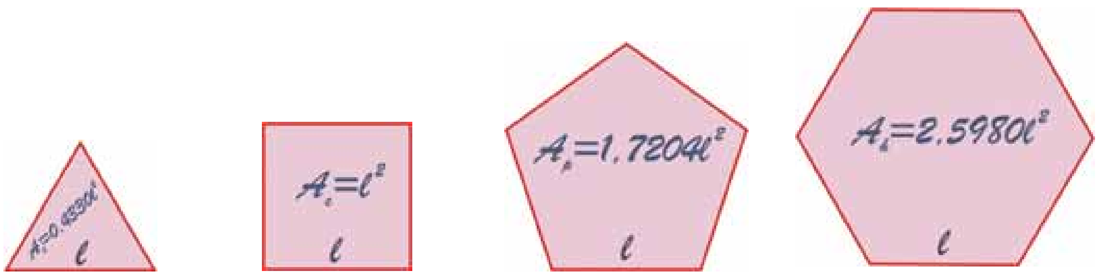
Medida de los lados en cm		Área en cm^2
lado_1	*lado_2*	
1	29	29
2	28	56
3	27	81
4	26	104
5	25	125
6	24	144
7	23	161
8	22	176
9	21	189
10	20	200
11	19	209
12	18	216
13	17	221
14	16	224
15	15	225

El "rectángulo" de mayor área, y con perímetro de 60 cm, es el que tiene todos sus lados de medida 15 cm; es decir, el ***cuadrado*** de perímetro 60 encierra la superficie máxima entre todos los rectángulos con ese perímetro.

Nos estamos situando, pues, ante un polígono regular de cuatro lados (¿sabrías explicar que es un polígono regular?). Llegados a este punto, reflexionemos sobre dos cuestiones relacionadas con polígonos regulares.

Por un lado, elijamos el polígono regular de ***mayor área*** entre los que tienen 3, 4, 5 o 6 lados mientras mantenemos el ***perímetro constante***.

Las expresiones que nos permiten calcular la medida de la superficie en función del lado (quede hecha la propuesta de que efectúes los cálculos necesarios para autentificar la veracidad de estas afirmaciones) son las siguientes:

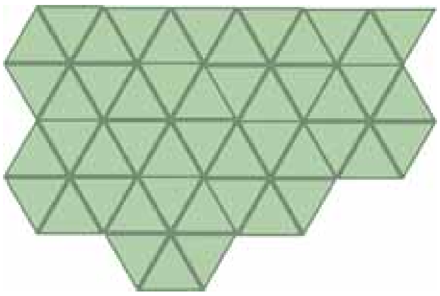


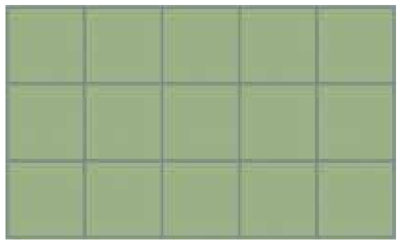
Si particularizamos a nuestro ejemplo, este en que tomamos el perímetro de 60 cm, obtenemos:

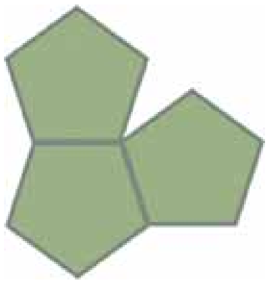
Poligono regular	Perimetro	Lado	Fórmula área	Valor área
Triángulo	60 cm	20 cm	$A_t=0,4330l^2$	$A_t=173,2\ cm^2$
Cadrado	60 cm	15 cm	$A_c=l^2$	$A_c=225\ cm^2$
Pentágono	60 cm	12 cm	$A_p=1,7204l^2$	$A_p=247,74cm^2$
Hexágono	60 cm	10 cm	$A_h=2,5980l^2$	$A_h=259,80cm^2$

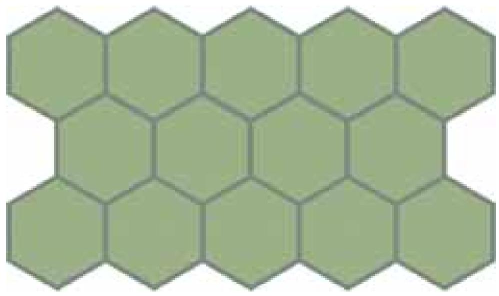
Observamos que para los polígonos regulares con los que acabamos de trabajar, cuando el perímetro se mantiene constante, la mayor área corresponde al hexágono.

Debemos reparar en una segunda cuestión: ¿cuáles de los polígonos regulares nos permiten recubrir el plano?









De los cuatro polígonos que estamos manejando, todos recubren el plano a excepción del pentágono. Y, entre los tres que lo recubren, es el hexágono el que encierra mayor superficie cuando mantenemos el perímetro invariable. Aquí está la explicación matemática de por qué las celdas que constituyen los panales tienen forma hexagonal.

Daniel Vilares Seijo.
4º ESO.

¿En qué escuela aprenden geometría las abejas?

MATEMÁTICAS PARA LEER

TÍTULO: *Matecuentos Cuentamates. Cuentos con problemas.*
AUTORES: *Joaquín Collantes Hernáez* y *Antonio Pérez Sanz*.
ILUSTRACIONES: *Joaquín Collantes Hernáez*.
EDITORIAL: *Nivola*.
COLECCIÓN: *Violeta*, nº 1.
Nº DE PÁGINAS: 127.
Nº DE CAPÍTULOS: 8.
EDAD RECOMENDADA: A partir de 12 años

A los personajes que aparecen en los ocho “matecuentos” que configuran este libro (*Trolls y problemas, Los hermanos gato, Pablo Potter*...) la mayoría de las cosas que le suceden siempre vienen a dar en las matemáticas; en un intento, a veces bastante forzado, por demostrar que las matemáticas están presentes en todos los aspectos de nuestra vida.

Lo que me parece más interesante del libro es que te obliga a pensar. La lectura ha de realizarse con mucha atención, pues continuamente se proponen problemas con el objetivo de acercar las matemáticas al lector.

La mayoría de los cuentos utilizan personajes conocidos, como Harry Potter o El Señor de los Anillos, con la intención de hacerlos más atractivos. Los “argumentos” surgen como unión de una colección de artimañas que permiten ir presentando los diferentes problemas; por lo tanto este no es un libro que puedas leer de un tirón, sino que debes ir haciendo pausas para tratar de conseguir las soluciones. Algunas historias me resultaron repetitivas, porque todas son muy parecidas.

Pienso que hay ciertos problemas muy fáciles de resolver (algunos son adivinanzas que ya conocía) pero también hay otros que me resultaron más difíciles y no fui capaz de resolverlos sin consultar las soluciones, que vienen detalladas en la segunda parte del libro. Supongo que muchos estudiantes de 12 años, edad a partir de la cual se recomienda el libro, los considerarán también complicados.

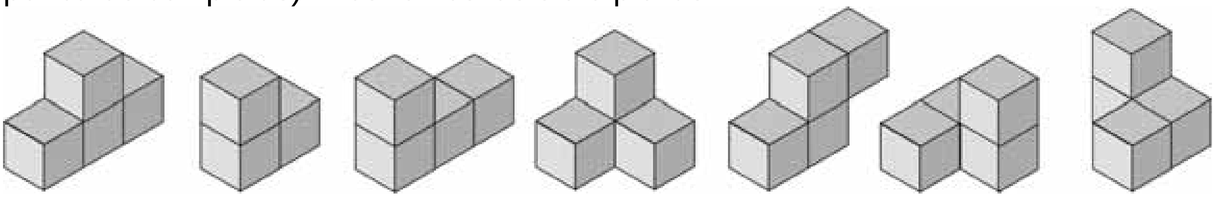
En definitiva, creo que, si te interesa la resolución de problemas, estará bien que leas este libro pues presenta ejemplos curiosos que son interesantes de abordar. Verás también que en esta edición se colaron algunos errores que son fácilmente detectables.


Gabriela Quiroga García.
4º ESO.

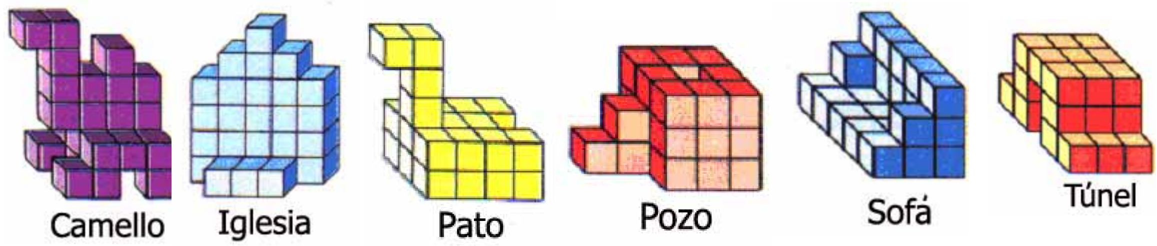
Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

Cubo Soma

El ***Cubo SOMA*** es un rompecabezas tridimensional constituido por siete policubos (un *policubo* es una configuración formada por cubos del mismo tamaño pegados por caras completas). Mostremos las siete piezas:



Su creación se debe a Piet Hein. El objetivo principal que se persigue con este puzzle consiste en formar un cubo (¡objetivo que puede alcanzarse de 240 formas diferentes!), pero también pueden conseguirse otras muchas figuras, pongamos unos ejemplos:



PENSAR ES DIVERTIDO

¿Qué queremos decir cuando nos referimos a un número natural calificándolo como ***cuadrado perfecto***?

De estos números que mostramos a la derecha, hacemos la siguiente afirmación: *"tres son cuadrados perfectos y los otros tres no lo son".*

Determina, razonadamente, cuáles son los cuadrados perfectos. ¿Sabes leer esas cantidades?

76 694 369 490 375 289

23 451 467 800 345 258

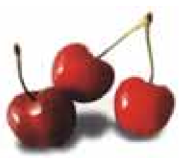
82 638 880 737 583 681

322 043 801 440 297 024

86 754 356 010 023 472

564 899 056 467 212 433

Adivinanza Matemática



A un cerezo subí
en el que cerezas había,
yo cerezas no comí
mas cerezas no dejé:
¿Cuántas cerezas había?

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2006, Número 5, página 143
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, letra tipo **arial**, y tamaño **12 puntos**, interlineado sencillo, márgenes de 2,5 cm. en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 10 páginas, incluyendo figuras. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…

4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).

7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.