UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 9

Marzo de 2007

Índice

Marzo de 2007, Número 9, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, página 3
ISSN: 1815-0640

México se incorpora a la FISEM

La Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México ha solicitado su adhesión a la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática y el Presidente de la Federación, el profesor Paulo Figueiredo, de Brasil, les ha dirigido el siguiente mensaje:

Prezado Eduardo Mancera,

Com muita satisfação recebi a boa-nova do pedido de adesão da Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México à FISEM. Concordo plenamente com as considerações que nosso colega Luis Balbuena fez a respeito da importância para a FISEM da participação da Asociación, que, além de tudo, já vem contribuindo para nossa Federação.

Estou enviando ao prezado colega cópia do e-mail que recebi do Luis, com a indicação dos procedimentos formais para oficializar a adesão desejada por todos nós.

Um grande abraço,
Paulo Figueiredo Lima

Desde UNIÓN celebramos esta incorporación y hacemos votos para que se sigan sumando sociedades de otras naciones.

A partir de este número de UNIÓN, la bandera de México se suma a nuestra portada y les damos así la más cordial bienvenida.

Está de más decir que invitamos a nuestros colegas mexicanos a que nos transmitan sus muchas experiencias e investigaciones para hacerlas llegar a los miles de profesores y profesoras que nos visitan de manera continuada.

El equipo editor de UNIÓN

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, página 5
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Monográfico TIC y Matemáticas

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 7-8
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Introducción

Son numerosos los recursos que se pueden catalogar como Nuevas Tecnologías o como Tecnologías de la Información y la Comunicación para su inclusión en el aula y, en particular, para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por lo tanto en este monográfico, es evidente, que no han quedado recogidos todos aunque sí pretendemos ofrecer ideas para facilitar, tanto la incorporación de los diferentes recursos a la tarea diaria en el aula a través de ejemplos concretos, como animarles a que se introduzcan en este apasionante mundo e intentar descubrir nuevas formas de enseñar y de aprender.

La buena relación entre NNTT y Matemáticas (o entre TIC y Matemáticas), se da por supuesta, aunque lo que no está tan claro es que por parte del profesorado se hayan sabido aprovechar todas las posibilidades que ofrecen los distintos recursos para cambiar la metodología tradicional y mejorar determinados aspectos del proceso de enseñanza.

Mi experiencia me muestra que hay muchas y muy variadas razones para que eso ocurra. Podría enumerar algunas, pero creo que cada cual tiene las suyas y no es el momento de ponernos a debatir sobre ello.

Quizás sea mejor buscar soluciones, intentando plantear estrategias y acciones para renovar los materiales que utilizamos en el aula, al menos para que haya variedad y que no siga ocurriendo como hasta ahora que, en determinados casos, hay una cierta “exclusividad” o dependencia del libro de texto.

Es constatable que a los docentes nos cuesta incorporar nuevos recursos; en general, no lo hacemos hasta tanto no nos sintamos seguros de su uso y de su funcionamiento. Pero debemos perder el miedo al uso de distintos programas, hay que apostar decididamente porque nuestro alumnado utilice la calculadora o a conseguir que Internet se convierta en un elemento más del aula y aprovechar así la enorme cantidad de información, material y aplicaciones que contiene y pone a nuestro alcance y además, a coste cero.

Partiendo por tanto de que todo cambio es lento y difícil, esperamos que iniciativas como las que aparecen en este monográfico puedan ayudar a cambiar actitudes, sirvan para animar a descubrir nuevos programas, favorezcan la incorporación de nuevos recursos y sobre todo, que las aulas se abran de par en par a realidades como es el caso de Internet.

Por último, quiero agradecer a todas las autoras y autores de los trabajos contenidos en este número, la colaboración, el esfuerzo y la generosidad de poner al alcance de todo el profesorado sus ideas y experiencias que espero que se vea compensado si conseguimos animar al resto de colegas a incorporarse a las TIC a través de las interesantes propuestas que nos ofrecen.

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Instituto de Enseñanza Secundaria “Jándula de Andújar”
Andújar – Jaén – España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 9-16
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Excel: una eficaz herramienta matemática para los alumnos de Ciencias Sociales

José Javier Escribano Benito y Mª Ángeles Martínez García

Resumen

La introducción de medios informáticos en el aula para facilitar el proceso de aprendizaje del alumno todavía no se ha generalizado por una serie de razones, entre otras, la dificultad que conlleva el aprendizaje y manejo de aplicaciones informáticas. En este trabajo se propone el uso de una herramienta que el alumno ya conoce: la hoja de cálculo *Excel*, y más concretamente la opción *Solver*, como herramienta matemática para los alumnos de Ciencias Sociales tanto en la Educación Secundaria Post-obligatoria como en los niveles universitarios.

Abstract

The introduction of new technologies in the classroom with the aim of making the learning process easier has not yet become a general trend due to several reasons, like the difficulty of combining the learning process and the use of computer application. We suggest the use of a tool the learner is already familiar with: Excel sheet, and in particular, the solving option, as a mathematical tool for Social Sciences students –not only in secondary and further education but also in university studies.

Introducción

"No hay hombre sin técnica"

(Ortega y Gasset, *Meditación de la técnica*)

La irrupción de las nuevas tecnologías de la información en la vida cotidiana y en la Educación ha creado numerosas expectativas. Sí, gracias a la técnica el hombre domina la naturaleza y se afirma frente a ella (Ortega), los nuevos medios abren, además, caminos inéditos a la creatividad humana.

Aunque los medios informáticos ofrecen posibilidades interesantes en el proceso de enseñanza/aprendizaje, no son herramientas de trabajo neutras, porque introducen ciertos sesgos, valores y características propias. De hecho, todavía no se han incluido en las aulas – y el aula de matemáticas no es una excepción- los medios informáticos de forma generalizada, y constituyen actividades de tipo "extraordinario" o especial, por una serie de razones, entre otras, la necesidad de aprender previamente el manejo de aplicaciones informáticas.

Estas dificultades se hacen particularmente notables en la enseñanza de las matemáticas en el área de las Ciencias Sociales en el Bachillerato (Bachillerato de Ciencias Sociales, si nos situamos en el Sistema Educativo español) y en la Universidad (Empresariales, Administración y Dirección de Empresas,…) donde una parte significativa de los alumnos rechaza el aprendizaje de aplicaciones informáticas específicamente matemáticas (*Matlab, Mathematica, Derive*,…) por considerar que forman parte de un "currículo paralelo" ajeno a sus intereses personales y profesionales.

El riesgo de inadaptación o falta de integración con las actividades habituales del aula puede disminuir si se utilizan algunas aplicaciones –como la hoja cálculo *Excel*- que el alumno ya conoce[1] y sabe de sus numerosas aplicaciones prácticas (cálculo de parámetros estadísticos, gráficos,…).

Una de las opciones menos conocidas y, sin embargo, más útiles de la hoja de cálculo *Excel* es la opción *Solver* que se utiliza para buscar el valor máximo, mínimo o exacto de una fórmula determinada, cambiando para ello el valor de una o más celdas (variables) de las que depende. Además se pueden incluir restricciones al valor de estas celdas. Por todo ello, *Solver* puede resultar una herramienta muy eficaz para los alumnos a la hora de resolver ciertos problemas matemáticos, como pueden ser los de programación lineal en los que se trata de optimizar –maximizar o minimizar- una función sujeta a una serie de restricciones[2].

A continuación se plasman distintos tipos de problemas que pueden resolverse con la opción Solver.

Resolución de ecuaciones

Al abordar diferentes problemas con enunciados relativos a las Ciencias Sociales y a la Economía es necesario resolver ecuaciones no lineales. En este caso la opción *Solver* puede resultar una ayuda eficaz.

1) En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 6% anual. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el sueldo se duplique?

---

[1] En España forma parte de los currículos de Tecnología de la ESO (12 a 16 años) y de la Tecnología de la Información de Bachillerato de la Educación Secundaria (16 a 18 años).

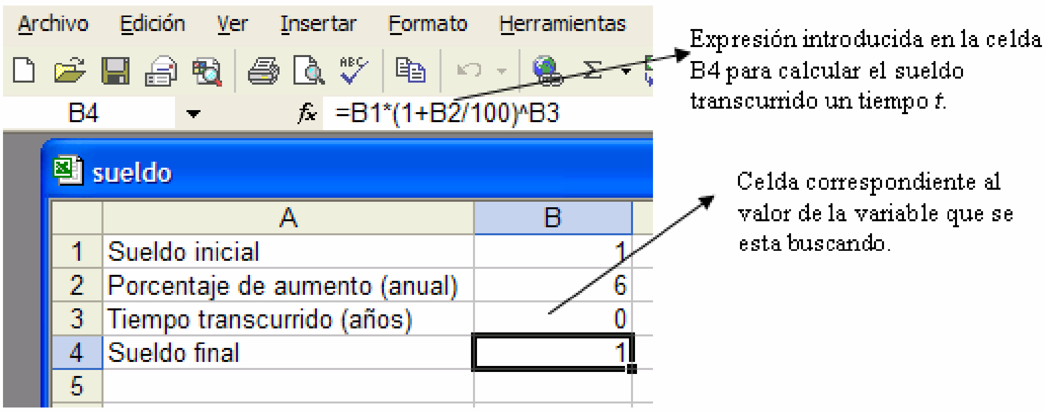
[2] Entre la numerosa bibliografía sobre la hoja de cálculo Excel podemos señalar Carbonell, Bellido y Albeza (2006) y Blanco *et. al.* (2002).

Formulación matemática: llamando s_f al sueldo final, s_0 al sueldo inicial y t al tiempo (en años) transcurrido,

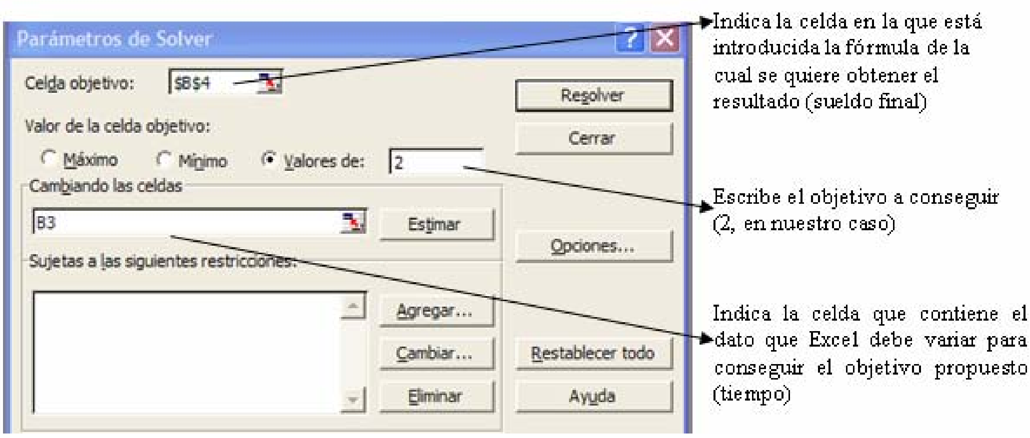
$$s_f = s_0\left(1+\frac{6}{100}\right)^t \quad ; \quad 2s_0 = s_0 1{,}06^t \quad ; \qquad 2 = 1{,}06^t$$

Resolución con *Excel*: El problema se puede resolver fácilmente utilizando logaritmos o la opción **Solver** de *Excel*.

Antes de comenzar la búsqueda, se deben introducir los datos y las fórmulas que se necesiten en la hoja de cálculo



Una vez introducidos los datos, seleccionamos el menú **Herramientas** opción **Solver**[3] **.**



[3] Si la opción no esta disponible en su menú deberá seleccionar **Complementos** del menú **Herramientas**, activar la casilla correspondiente a **Solver** y hacer clic en **Aceptar**.

Por último hacemos clic sobre el botón **Resolver** y el programa nos proporcionará el resultado de la búsqueda

	A	B
1	Sueldo inicial	1
2	Porcentaje de aumento (anual)	6
3	Tiempo transcurrido (años)	11,8956687
4	Sueldo final	2,0000009

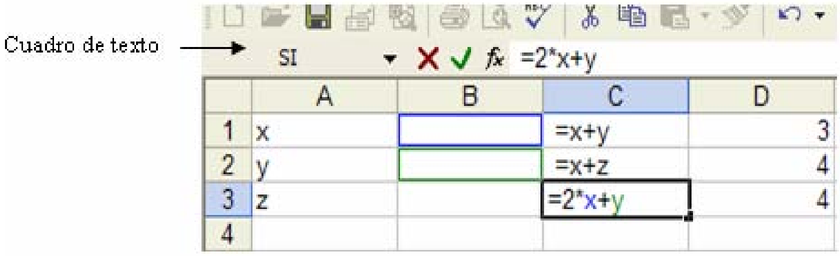
Sistemas de ecuaciones lineales

El currículo de Bachillerato contempla la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas utilizando el método de Gauss. El mismo método, junto con el de Cramer, se aborda también en las matemáticas universitarias sin restringir el número de ecuaciones o de incógnitas. En ambos casos, resulta útil disponer de una herramienta que libere al alumno del trabajo rutinario y le permita incidir en otras cuestiones como la trascripción al lenguaje algebraico de problemas reales o la interpretación, ajustada al contexto, de las soluciones obtenidas.

2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

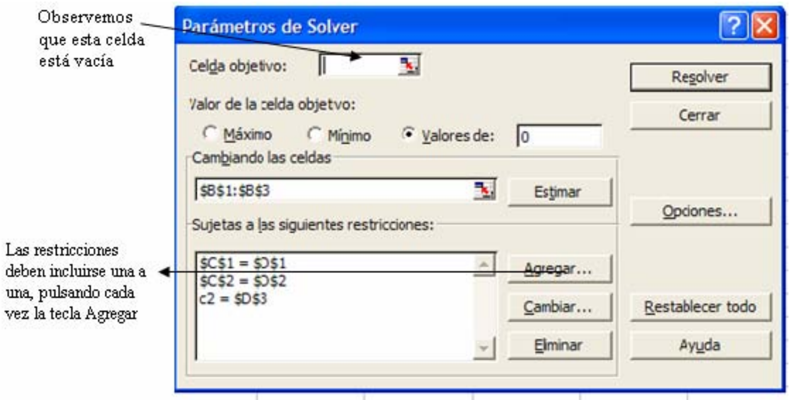
$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+z=4 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\}$$

Para facilitar la introducción de los datos y la lectura de los resultados escribimos, en la columna A, el nombre de las variables. Y asignamos a la celda B1 el nombre “x” (de esta forma se podrá utilizar el nombre “x” cuando se tenga que hacer referencia a la celda B1). Para ello, seleccionamos la celda B1 y escribimos x en el **Cuadro de nombres** y pulsamos <Intro> (o con la opción **Definir** del menú **Insertar /Insertar nombres**). Del mismo modo asignamos el nombre “y” a la celda B2 y el nombre “z” a la celda B3.



	A	B	C	D
1	x		=x+y	3
2	y		=x+z	4
3	z		=2*x+y	4
4				

A continuación vamos al menú **Herramientas**/ **Solver** y rellenamos el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver** como



Una vez introducidos los datos hacemos clic en **Resolver** para obtener, en las celdas B1, B2 y B3, las soluciones correspondientes a los valores de las incógnitas.

Programación lineal

Este tipo de problemas se abordan en España en los estudios de Ciencias Sociales tanto en la Educación Secundaria Post-obligatoria como en los niveles universitarios. En los currículos de Bachillerato la programación lineal está incluida en el bloque de Álgebra de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Se trata tan sólo de maximizar o minimizar una función de dos variables restringida a un conjunto de inecuaciones también de dos variables y su resolución se efectúa de forma gráfica[4].

En la universidad se aborda el problema desde una perspectiva más amplia utilizando el método del símplex. Aunque generalmente no suelen tener grandes dificultades para entender el algoritmo, algunos se despistan debido a todos los cálculos y operaciones, largos en ocasiones, que son necesarios hasta llegar a encontrar la solución buscada –en el caso de haberla-.

Como en los casos anteriores, también aquí pesamos que, para este tipo de alumnos, merece la pena enfatizar en el carácter funcional e instrumental de las matemáticas y no tanto en el dominio de determinadas destrezas y rutinas.

Con el fin de motivar a los alumnos, se les plantean en el aula inicialmente distintos problemas de la vida real para que visualicen la aplicación práctica de la

[4] La resolución gráfica de este tipo de problemas con ayuda de la hoja de cálculo Excel es el objetivo del artículo Prieto (2003).

teoría que van a estudiar. La minimización del coste que supone la fabricación de ciertos productos en una empresa así como la maximización de los ingresos o beneficios en su caso, junto con la existencia de restricciones adicionales tales como un capital o mano de obra máximos disponibles, son claros ejemplos que les ponen de manifiesto la anterior idea.

3) Una empresa se dedica a la fabricación de mesas, sillas y armarios de cocina, para lo que utiliza carpinteros, ebanistas, barnizadores y, como material, madera noble. Dispone semanalmente de 350, 230 y 280 horas respectivamente de mano de obra, y de 100 m^2 de madera. Cada unidad fabricada presenta las siguientes características:

	Necesidades				
	Carpintería	**Ebanistería**	**Barniz**	**m^2 de madera**	**Beneficio neto**
Mesa	4	2	3	2	25
Silla	2	1	2	1	10
Armario	7	4	3	8	40

La demanda semanal es a lo sumo de 60 mesas y 60 armarios, mientras que venderá todas las sillas fabricadas. ¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar para que el beneficio neto obtenido por la empresa sea máximo[5]*?*

- Formulación matemática: llamando

  x al número de mesas fabricadas semanalmente
  y ,, sillas ,,
  z ,, armarios ,,

la función objetivo es

máximo $f(x,y,z) = 25x + 10y + 40z$

y las restricciones son

carpintería $4x + 2y + 7z \leq 350$

ebanistería $2x + y + 4z \leq 230$

barniz $3x + 2y + 3z \leq 280$

madera $2x + y + 8z \leq 100$

demanda $x \leq 60, \quad z \leq 60$

no negatividad $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$

(además, en este caso las variables han de tomar sólo valores enteros)

[5] Véase Pérez, Escribano y Arribas (1985).

Resolución mediante Excel

Para facilitar la lectura de los resultados escribimos, en la columna A, el nombre de las variables y, en la columna C, las "expresiones" del primer miembro de las restricciones. A continuación escribimos las "fórmulas" del primer miembro de las restricciones en la columna D (es decir, igual que en la columna C pero precedidos del signo "=").

	A	B	C	D
1	Variables		F. Ojetivo	
2	x	0	25*x+10*y+40*z	=25*x+10*y+40*z
3	y	0	Restricciones	
4	z	0	4*x+2*y+7*z	=4*x+2*y+7*z
5			2*x+y+4*z	=2*x+y+4*z
6			3*x+2*y+3*z	=3*x+2*y+3*z
7			2*x+y+8*z	=2*x+y+8*z
8			x	=x
9			y	=y
10			z	=z
11				

Vamos ahora a **Herramientas/Solver**, y rellenamos el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver** tal como en la figura siguiente:

Cuando hayamos terminado hacemos clic en **Resolver** y obtenemos los valores de las incógnitas en la columna B, el valor de la función objetivo y los valores de las restricciones en la columna D.

	A	B	C	D
1	Variables		F. Ojetivo	
2	x	50	25*x+10*y+40*z	1250
3	y	0	Restricciones	
4	z	0	4*x+2*y+7*z	200
5			2*x+y+4*z	100
6			3*x+2*y+3*z	150
7			2*x+y+8*z	100
8			x	50
9			y	0
10			z	0
11				

Conclusión

Es necesario incorporar, al currículo de las matemáticas de todos los niveles, el uso de recursos tecnológicos para favorecer el proceso de aprendizaje liberando al alumno de tareas rutinarias para que éste se dedique más a desarrollar sus capacidades intelectuales. Sin embargo, y de acuerdo con las características particulares de cada grupo de alumnos, no siempre es imprescindible introducir nuevo software. En este sentido, la utilización de la hoja de cálculo *Excel* puede ser una alternativa útil para los alumnos de Ciencias Sociales.

Bibliografía

- Blanco, J. *et. al.* (2002): *Microsoft® Office XP. Curso de Ofimática*. Madrid, Standard-Professional.
- Carbonell; L.; Bellido, P.; Albeza, M. A. (2006): *Hoja de cálculo Excel 2003*. Alicante: Publicaciones de la Universidad de Alicante.
- Pérez Prados, A.*;* Escribano Benito, J. J.; Arribas Revuelto, R. (1985): *Resolución de sistemas de inecuaciones lineales*. Zaragoza, Publicaciones del Seminario Matemático "García de Galdeano", Serie II, Universidad de Zaragoza.
- Prieto Martínez, J. J. (2003): "La programación lineal con la hoja de cálculo Excel: una apuesta por las nuevas tecnologías". SUMA 43 (junio 2003), 73-77.

Javier Escribano Benito (Cervera del Río Alhama, España, 1955) es Doctor en Matemáticas y Máster en Informática. Catedrático de Matemáticas del IES "Valle del Cidacos" de Calahorra y Profesor Asociado en la Universidad de La Rioja. Ha realizado diferentes trabajos sobre teoría de números y sobre historia de las matemáticas. Ha publicado, sobre estos temas, tres libros y unos cincuenta artículos y comunicaciones en Actas de Congresos y diferentes revistas: *The American Mathematical Monthly, Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences, LLULL, SUMA, Zubía, Números*,…

Mª Ángeles Martínez García (Logroño, 1965) es Doctora en Matemáticas y posee un Postgrado en Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Profesora Asociada de la Universidad de La Rioja. Ha realizado diversos trabajos sobre historia de las matemáticas. Ha publicado sobre estos temas un libro (dos tomos) y ha presentado unas once comunicaciones en varios congresos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 17-34
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Usos matemáticos de Internet para la enseñanza secundaria. Una investigación sobre WebQuests de Geometría

León C. Williams y Gómez-Chacón Inés Mª.

Resumen

En este artículo se describe los resultados de una investigación sobre el uso del método de WebQuest en una institución de Secundaria, una aplicación didáctica basada en una estrategia por descubrimiento y cuya fuente de recursos la proporciona fundamentalmente Internet. Para ello, se diseñó una unidad didáctica de Geometría en formato de WebQuest, procediendo a la validación de la misma y al estudio de los efectos de su implementación, fenómenos que derivaban en la interacción de los estudiantes con el material elaborado desde el punto de vista de aspecto cognitivos, aspectos afectivos, aspectos didácticos y aspectos tecnológicos.

Abstract

This article shows the results of an investigation on the use of a WebQuest in a secondary school. A WebQuest is an inquiry-oriented activity in which most or all of the information used by students is drawn from the Web. In order to achieve this task, a geometry lesson unit was developed using a WebQuest project, proceeded by the validation process and the analysis of its full implementation. In the analysis different aspects are identified: cognitive, emotional, didactic and technological aspects.

Introducción

Una de las líneas de investigación que se realizan actualmente en el campo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación es: *"Estudios sobre los usos y prácticas pedagógicas con ordenadores en contextos reales de centros y aulas"* (Area, 2005). Su finalidad es estudiar los fenómenos que se producen al usar ordenadores en la práctica educativa realizada en instituciones escolares y aulas en particular. Es considerada como una perspectiva de estudio relativamente reciente y su importancia radica en que *"proporciona conocimientos valiosos sobre lo que ocurre en la realidad escolar y tienen el potencial de ser transferidos de unos contextos a otros".*

Esta nueva realidad *"basada en el manejo de información como materia prima para la generación de conocimiento"* (PETICSEN, 2002: 17) requiere de un nuevo ciudadano imponiendo la necesidad de una "*alfabetización tecnológica – techological literacy"* que según Lee (1999) debe incluir una gran variedad de oportunidades en donde el individuo pueda interactuar con diferentes tipos de herramientas y recursos para así desarrollar un cierto nivel de competencia que le permita usar los medios tecnológicos de manera eficiente y productiva en su vida diaria.

Desde el ámbito de las matemáticas es necesario fomentar nuevas capacidades relacionadas con las Tecnologías de la Información y la Comunicación, favoreciendo en la formación del profesorado el desarrollo nuevas competencias profesionales y personales para el uso tecnológico. Estas nuevas exigencias obligan al docente de matemáticas a reflexionar sobre sus prácticas docentes y sobre *"...qué nuevas alfabetizaciones matemáticas requiere el medio tecnológico..."*. (Gómez-Chacón, Figueiras y Marín, 2001: 9).

El contexto antes descrito nos ha hecho preguntarnos sobre ¿Cuáles son las posibilidades de acción de los usos matemáticos de Internet?

En este artículo se describe los resultados de una investigación sobre el uso del método de WebQuest en la instrucción de alumnos de Secundaria, una aplicación didáctica basada en una estrategia por descubrimiento y cuya fuente de recursos la proporciona fundamentalmente Internet. Para ello, se diseñó una unidad didáctica de Geometría en formato de WebQuest, procediendo a la validación de la misma y al estudio de los efectos de su implementación, fenómenos que derivaban en la interacción de los estudiantes con el material elaborado desde el punto de vista de aspecto cognitivos, aspectos afectivos, aspectos didácticos y aspectos tecnológicos.

Procederemos de la siguiente forma: en primer lugar se explicitan el marco teórico y las cuestiones de investigación; se pasará seguidamente a presentar la metodología de investigación y los resultados derivados del estudio; y por último se expresan las conclusiones del mismo.

Marco teórico y cuestiones de investigación

Recientemente, ha habido un creciente desarrollo investigaciones sobre educación matemáticas y tecnología (Artigue, 2006, Fortuny, 2005, Lagrange, 2006; Kent, P., Hoyles C., Noss R. y Guile D., 2004). Sin embargo las investigaciones sobre Internet y usos didácticos matemáticos aún no son muy abundantes (Gómez-Chacón, 2005).

En este segundo grupo de trabajos se muestra el interés de los investigadores por estudiar en profundidad bajo qué condiciones y en qué contextos concretos funcionan ciertas prácticas con ordenadores que son evaluadas como 'exitosas'.

Como respuesta a estas inquietudes se encuentran las WebQuests: actividades de enseñanza y aprendizaje basadas en Internet.

WebQuest. Fundamentación y propuesta

Son un tipo de actividad didáctica basada en presupuestos socio-constructivistas del aprendizaje y la enseñanza que se basa en técnicas de trabajo en grupo por proyectos y en la investigación como actividad básica de enseñanza / aprendizaje (Adell, 2004). Estas actividades basadas en proyectos y centradas en el alumno rompen con la metodología tradicional de enseñanza. Su creación se debe a Bernie Dodge de la Universidad de San Diego a partir de una experiencia con estudiantes para maestros y desarrollado por Tom March de la misma Universidad. Dodge define las WebQuests como "una actividad orientada a la investigación en la que la mayor parte de la información que se debe usar está en la Web" (Dodge, 2002a). Para este autor: "Es un modelo que pretende rentabilizar el tiempo de los estudiantes, centrarse en el uso de la información más que en su búsqueda y reforzar los procesos intelectuales en los niveles de análisis, síntesis y evaluación" (Dodge, 2002b). Consiste en la aplicación de una estrategia de aprendizaje por descubrimiento guiado a través de un proceso de trabajo desarrollado por los alumnos utilizando los recursos de la Web.

Las experiencias didácticas basadas en WebQuests, aunque son muy populares en la comunidad educativa de habla inglesa, son muy pocas o casi nula en el país donde desarrollamos la investigación, Venezuela. Por tanto, uno de los intereses principales de esta investigación ha sido el contribuir con su difusión en la comunidad docente venezolana y estudiar, de una forma rigurosa, sus implicaciones en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este estudio las WebQuest, como aplicaciones Didácticas, tienen como principal objetivo relacionar e integrar el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación con el currículo del alumnado.

Consideramos las WebQuests como actividades debidamente planificadas basadas en proyectos y centradas en el alumno para enseñar, aprender y localizar información con soporte en varias teorías que incluyen las siguientes (Lamb y Teclehaimanot, 2004):

a. Filosofía socio-constructivista.
b. Pensamiento creativo, crítico e interrogativo, conocimiento y aprendizaje transformadores.
c. Entornos de aprendizaje auténtico, situado y centrado en proyectos.
d. Andamiaje intelectual, atención a la diversidad y motivación.

En la elaboración la WebQuest de Geometría que se propone en esta investigación se consideró sus cincos componentes básicos: la introducción, la tarea, el proceso, los recursos, la evaluación y la conclusión.

COMPONENTES DE UN WEBQUEST

http: // www.mipagina.cantv.net/leoncw/usb

Investigar fórmulas y conceptos de áreas y perímetros. Calcular áreas y perímetros. Resolver problemas de áreas y perí-metros.

INTRODUCCIÓN
¿Cuáles son las preguntas que deben responder los alumnos?

TAREA
¿Cuál es la tarea que tiene que realizar el alumno?

Elaborar mapas de concepto: uno de áreas y el otro de perímetro. - Ejecutar dos proyectos de investi-gación y elaboración: uno de re-vestimiento cerámico para pisos y el otro de fabricación de envases. Resolver tres problemas.

RECURSOS
Hoja de trabajo
Cuestionario
Páginas webs
Planos de oficinas
Geoplano virtual

PROCESO
Establece cada paso que el alumno debe realizar.
Se desarrolla en tres fases: investigación teórica, aplicación de proyectos y resolución de problemas.

EVALUACIÓN
¿Qué debe realizar el alumno con el conocimiento?
Elaborar un portafolio, mapas de conceptos, desarrollar dos proyectos y resolver tres problemas.

CONCLUSIÓN
¿Qué hemos aprendido?
Analizar los conceptos de perímetros y áreas usando mapas de conceptos. Establecer relaciones entre conceptos y cálculos de áreas y perímetros aplicados a proyectos. Utilizar el reconocimiento, observación, razonamiento y modelización para resol-ver situaciones y problemas que involucren áreas y perímetros.

Figura 01. Componentes de una WebQuest

Los alumnos deberán ser capaces de adquirir o desarrollar nuevas destrezas y conceptos a partir de esta estructura específica, en la cual, los principales andamios cognitivo y didácticos están articulados en tres momentos claves: (a) en la recepción de la información al estudiar y analizar los conceptos de áreas y perímetros usando la técnica de mapas conceptúales, (b) en la transformación de la información al establecer relaciones entre el concepto de área y perímetro y calcularlos para su aplicación en dos proyectos específicos: uno de revestimiento de cerámicas y el otro de fabricación de envases y (c) en el momento de la producción de la información al elaborar los proyectos, al resolver los problemas planteados y producir el portafolio con toda la información requerida.

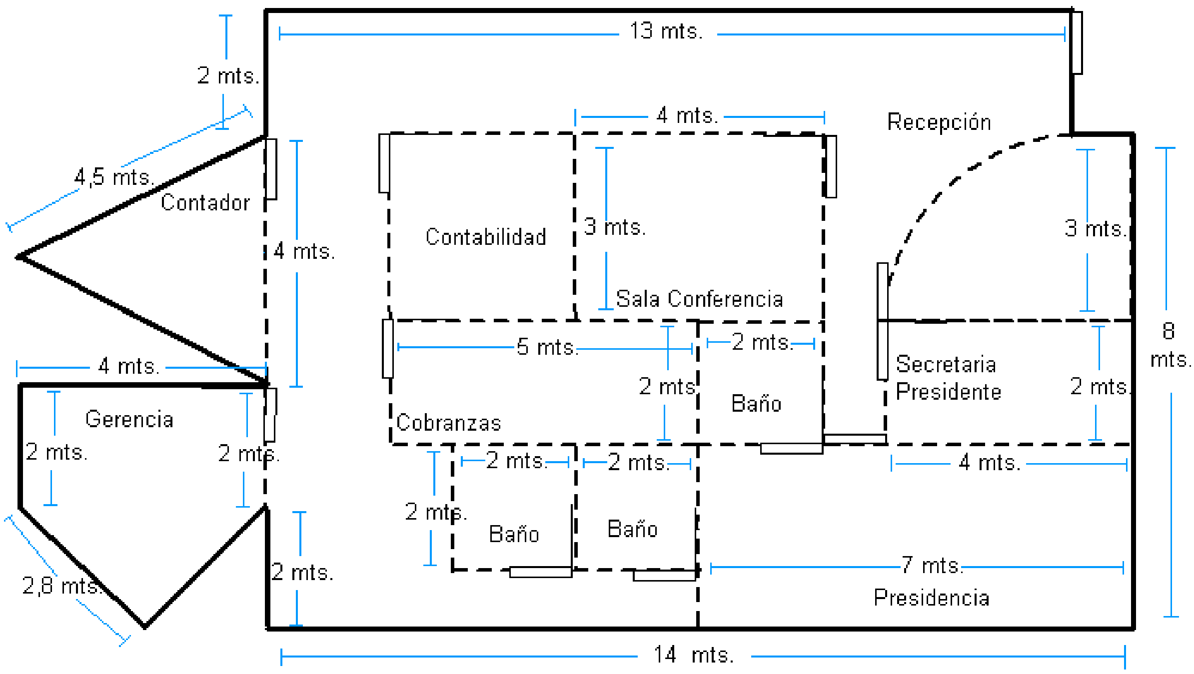


Figura 02. Plano de los departamentos.

Departamento	Medidas	fórmula del área	Área en mts^2.	Perímetro en metros.
Presidencia				
Gerencia				
Contador				
Secretaría de la presidencia				
Contabilidad				
Cobranzas				
Recepción				
Sala de conferencia				
Baños				
Pasillos				

Figura 03.Hoja de trabajo

Cuestiones de investigación y objetivos

A los efectos del presente estudio de investigación y con relación al contexto antes descrito, en la investigación surgen los siguientes interrogantes: 1.- ¿Cuáles son las posibilidades de acción de las nuevas tecnologías, y en especial de Internet, en el ámbito específico de la educación matemática? 2.- ¿Qué beneficios aportará una unidad didáctica de geometría elaborada en formato de "WebQuest" para un aula de Séptimo Grado (13 años) como estrategia de enseñanza y cómo puede contribuir con las alfabetizaciones tecnológicas de estos alumnos? 3.- ¿Se producen cambios en las conductas generales exhibidas por los alumnos de Séptimo Grado al proponerles esta metodología de enseñanza por proyectos?

Por tanto, como objetivo general de esta investigación nos propusimos elaborar y proponer una unidad didáctica usando el método de WebQuest como estrategia de enseñanza enfocada en la investigación a través de Internet y que oriente el proceso de aprendizaje por descubrimiento guiado.

Y para dar respuesta y operativizar este objetivo general se determinó los objetivos específicos:

- Analizar las posibilidades que puede aportar las WebQuests en relación con la metodología tradicional de enseñanza de las matemáticas.
- Aumentar la base de conocimientos alrededor de las WebQuests como estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar la contribución de las WebQuests en la alfabetización digital de los participantes.
- Estudiar la validez de esta estrategia didáctica aplicada según el diseño curricular vigente en Venezuela.
- Posibilitar que la comunidad de usuarios de WebQuests pueda compartir esta experiencia y lo pueda utilizar.
- Estudiar la actitud de los alumnos hacia las nuevas tecnologías y en especial hacia el computador e Internet.

Metodología de la investigación

El grupo de estudio lo conformaron dos tipos de participantes: profesores y estudiantes de Secundaria de 13 años, en el curso escolar 2005-2006 de un centro escolar integrado con niveles correspondientes a Primaria y Enseñanza Medias en la ciudad de Caracas (Venezuela). En la primera fase de la investigación el grupo de estudio estuvo conformado por dos profesores de la institución: el primero especialista en la asignatura de informática (P01) y el segundo especialista en matemática (P02), ambos trabajando en séptimo grado. Para la segunda fase, el grupo estuvo formado por los profesores y por el alumnado (Al) correspondiente a dos cursos de séptimo grado del año (50 alumnos).

Las técnicas principales que se utilizaron en la recolección y registro de la información fueron: (a) la observación directa y la observación participativa, (b) fuentes bibliográficas, (c) la encuesta en su modalidad escrita y (d) análisis de contenido. Los instrumentos empleados para registrar la información fueron: (a) el cuaderno de notas, (b) formatos de cuestionarios, (c) lista de cotejos y (d) parrilla de evaluación.

En la tabla siguiente se muestran los instrumentos empleados en la etapa de la investigación:

Fuente	Instrumentos
Actividades en clase	- Notas de campo para las observaciones en clase - Hoja "Regulador de Programación" (Giménez, 1997: 307) - Hoja "Funcionamiento del grupo" (Gavilán, 2004: 66)
Docente validador	- Cuestionario "Valoración de los objetivos" (Giménez, 1997: 304) - Ficha didáctica de navegación (Gómez-Chacón y otras, 2001: 62) - Cuestionario para evaluar una WebQuest (Dodge, 2002)
Estudiantes	- Cuestionario " Actitud de los alumnos hacia los ordenadores" (Gómez-Chacón y otras, 2001: 42) - Cuestionario "Visitar, Navegar y Volver" (Gómez-Chacón y otras, 2001: 58) - Cuestionario "Satisfacción y Valoración del Aprendizaje Matemático en Internet" (Gómez-Chacón y otras, 2001: 55)

Tabla 1.- Fuente y procedimiento de recogida de datos.

En las Tabla 2 y Tabla 3 se puede ver algún ejemplo de estos instrumentos. En la Tabla 2, se recoge el *Cuestionario para evaluar el diseño y funcionamiento de una WebQuest* por parte de los docentes y en la Tabla 3 el Cuestionario "*Satisfacción y Valoración del Aprendizaje Matemático en Internet*" (Gómez-Chacón y otras, 2001: 55), instrumento de post-test a través del cual los alumnos valoran la Unidad Didáctica de Geometría en formato "WebQuest" en relación con sus experiencias de aprendizaje.

Dirección – URL	Cuestionario para evaluar una Webquest
La Introducción	
Eficacia de motivación de la introducción	- La introducción es puramente formal. - La introducción se relaciona algo con los intereses del alumno y/o describe una pregunta o un problema. - La introducción adentra a los alumnos en un tema de interés, se describe un problema que debe resolverse o unas preguntas que deben contestarse.
Eficacia cognoscitiva de la introducción	- La introducción no prepara al alumno para la tarea que debe hacer. - La introducción hace una cierta referencia el conocimiento anterior del alumno. - Las estructuras de la introducción tienen en cuenta el conocimiento anterior del alumno y lo preparan con eficacia.
Tarea	
Conexión de la tarea con el currículo de la materia para la que está diseñada	- La tarea no se relaciona con el currículo. - La tarea se refiere al currículo pero no está claramente conectada con lo qué los alumnos deben saber y poder hacer para alcanzar los objetivos. - La tarea se refiere a los estándares y está conectada claramente con lo qué los alumnos deben saber y poder hacer para alcanzar los objetivos.
Nivel cognoscitivo de la tarea	- La tarea se reduce a encontrar cierta información en la red. - La tarea es interesante pero se limita en su significación a las vidas de los alumnos. La tarea requiere el análisis de la información y/o de poner junta la información de varias fuentes. - La tarea requiere la síntesis de fuentes múltiples de la información, y/o de tomar una posición, y/o de ir más allá de los datos dados y de hacer una generalización o un producto creativo.
Proceso	
Claridad del proceso	- El proceso no se indica claramente. Los alumnos no sabrían exactamente lo que se pretende que hagan. - Se dan algunas direcciones, pero hay información que falta. Los alumnos pueden quedar confusos. - Cada paso se indica claramente. La mayoría de los alumnos sabrían exactamente en que paso del proceso están y qué hacer después.

Calidad del proceso	- El proceso carece de las estrategias y las herramientas de organización necesarias para que los alumnos obtengan el conocimiento necesario para terminar la tarea. Las actividades están poco relacionadas con la realización de la tarea. - Las estrategias y las herramientas de organización encajadas en el proceso son escasas para asegurar que todos los alumnos ganarán el conocimiento necesario para terminar la tarea. Algunas actividades no se relacionan específicamente con la realización de la tarea. - El proceso provee de los alumnos que entran en diversos niveles de entrada estrategias y herramientas de organización al acceso y gana el conocimiento necesitado para terminar la tarea. Las actividades están claramente relacionadas y diseñadas para llevar a los alumnos del conocimiento básico a un nivel más alto del pensamiento.
Riqueza del proceso	- Pocos pasos, no se asignó ningún papel por separado. - Se asignan algunas tareas o papeles por separado. Actividades más complejas se requirieron. - Diversos papeles se asignan a los alumnos, Los cuales asumen diversas perspectivas y/o responsabilidades para lograr la tarea.
Importancia y cantidad de recursos	- Los recursos proporcionados no son suficientes para que los alumnos logren la tarea. - Hay una cierta conexión entre los recursos y la información necesaria para que los alumnos logren la tarea. Algunos recursos no agregan nada nuevo. - Hay una conexión clara y significativa entre todos los recursos y la información necesaria para que los alumnos logren la tarea.
Calidad de Recursos (enlaces a páginas de Internet)	- Los enlaces son insustanciales. Conducen a información que se podría encontrar en cualquier enciclopedia. O la información que se ofrece no es veraz. - Algunos enlaces conducen a información interesante que no podría encontrar fácilmente en el aula o en el Centro. - Los enlaces hacen un uso excelente de Internet. Los enlaces proporcionan bastante información significativa que ayudará a los alumnos a pensar.
Evaluación	
Claridad de los criterios de la evaluación	- No se describen criterios de evaluación. - Los criterios de evaluación se describen parcialmente. - Los criterios de evaluación se describen claramente mediante una rúbrica. Los criterios incluyen descriptores cualitativos y cuantitativos. La rúbrica mide claramente qué deben saber los alumnos y que deben hacer para lograr la tarea.
Total (Máximo 40)	

Tabla 2. Fuente: http://www.aula21.net/tallerwq/fundamentos/mirubrica.htm

Satisfacción personal y valoración del aprendizaje matemático en Internet
Encierra en un círculo uno de los números, según tu grado de acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones y las respuesta de los extremos:
1. Al estudiar matemáticas usando internet te has sentido: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy mal Muy bien
2. ¿Cuánto crees que has aprendido? **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Nada Mucho
3. ¿Es interesante el tema? **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Nada Mucho
4. El método de trabajo ha sido: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy malo Muy bueno
5. Las actividades realizadas han sido: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy difíciles Muy fáciles
6. El método de evaluación te ha parecido: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy malo Muy bueno
7. El computador como método de trabajo te parece: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy malo Muy bueno
8. Internet como recurso para trabajar las matemáticas te parece: **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Muy malo Muy bueno
9. ¿En qué proporción te ha ayudado el trabajo en grupo? **0----------1----------2----------3----------4----------5----------6----------7----------8----------9----------10** Nada En mucho

Tabla 3. Cuestionario "Satisfacción y Valoración del Aprendizaje Matemático en Internet"

El procedimiento empleado en la realización de esta investigación constó de tres etapas: (a) la primera etapa estuvo dirigida al trabajo previo a la investigación, durante la cual se recolectó toda la información necesaria sobre las WebQuests y la elaboración de la unidad didáctica bajo este formato (un total de 4 meses); (b) la segunda etapa consistió en la primera fase de la investigación propiamente dicha, durante ésta se validó la unidad didáctica (2 meses) (c) la última etapa que compone la segunda fase de la investigación la constituyó la aplicación de la unidad didáctica a los dos grupos clase correspondientes a séptimos grados abarcando un período de siete semanas de clases dedicándole dos horas académicas (cuarenta y cinco minutos cada hora).

Al considerar la información proveniente de la observación directa, la observación participativa y los cuestionarios, se establecieron tres circunstancias relevantes para el análisis de los resultados: la primera corresponde a la validación de la unidad didáctica, la segunda se refiere a la relación entre la unidad didáctica en formato WebQuest y los alumnos y la tercera a la relación que se produjo entre los estudiantes y el ambiente natural del aula de clase.

Los datos obtenidos fueron seleccionados y ordenados sobre la base de un esquema de variables identificándose cuatro categorías o tipos de variables de componentes diferentes: *cognitivos, afectivos, didácticos y tecnológicos*.

Las *variables cognitivas* se refieren a cómo se produce el aprendizaje, es decir, a los procesos mentales que utiliza el participante para resolver las actividades matemáticas propuestas en este estudio. El estudio de estas variables aportó datos para la validación de las WebQuests como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas.

Las *variables afectivas* remiten al conjunto de emociones, sensaciones, creencias, actitudes, valores y apreciaciones que condicionan el éxito o fracaso del estudiante a la hora de participar en esta experiencia y en relación a su hacia las nuevas tecnologías.

Para analizar los datos relacionados con los objetivos referentes a las estrategias didácticas y la metodología de enseñanza y a la aplicabilidad de la unidad didáctica según el diseño curricular vigente se consideró la existencia de *variables didáctica*s. Las variables didácticas entendidas como algunos elementos de situaciones de enseñanza los cuales pueden ser modificados con la finalidad de provocar adaptaciones de aprendizaje.

El último grupo de variables se define como *variables tecnológicas*. En esta investigación, se refieren al uso, manejo y conocimiento de las tecnologías de la Información y las Comunicaciones necesarias para la resolución de las actividades matemáticas propuestas. Al analizar estas variables, se analiza la WebQuest y se estudia su validez en la alfabetización digital de los alumnos.

En resumen, los aspectos a analizar según las variables establecidas previamente son los siguientes:

Aspectos cognitivos	- *Capacidades matemáticas*: se refiere a la "forma de manifestación del estudiante, en algún momento, de que puede hacer algo, que implique una construcción de conocimiento específico" (**Giménez, 1997**). - *Habilidades matemáticas*: se refiere "al hecho de de saber utilizar aquellas técnicas e instrumentos necesarios para conseguir unos fines concretos" (**Giménez, 1997**).
Aspectos afectivos	- *Actitud*: se refiere a la valoración que los estudiantes sienten hacia las matemáticas, al aprecio, al interés por esta materia y por su aprendizaje. - *Comportamiento conductual:* Se analiza el comportamiento observables de los estudiantes para conocer si determinados objetivos educativos han sido conseguidos. - *Interacción:* Comprenden las interrelaciones sociales que se hacen presentes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje
Aspectos didácticos	- *Desarrollo del contenido matemático*: Se refiere al contenido curricular de "Perímetros y Áreas de Figuras Geométricas" para el séptimo grado según el Ministerio de Educación y Deporte de la República Bolivariana de Venezuela. - *Tipos de actividades*: Se refiere a la valoración de las actividades según el sentido pedagógica que se promueven en la unidad didáctica con la finalidad de potenciar los contenidos en el trabajo cotidiano. - *Trabajo cooperativo*: Se refiere al entorno socio-comunicativo que facilita la cooperación y colaboración entre los estudiantes.
Aspectos tecnológicos	- *WebQuest:* se refiere al diseño, planificación y aplicación de la unidad didáctica de geometría usando el método de WebQuest como estrategia de enseñanza enfocada en la investigación a través de Internet - *Uso didáctico*: Se refiere a las técnicas y procedimientos empleados en la fase de enseñanza y presentación de la unidad didáctica a los estudiantes.

Tabla 2.- Aspectos del análisis de la validación de la unidad didáctica

Resultados

Se destacan dos tipos de resultados:

- Los referidos a la validación de la Unidad Didáctica en el formato WebQuest

- Los relativos a la interacción entre los alumnos y la Unidad Didáctica.

Los resultados obtenidos para validación de la unidad didáctica, fueron los siguientes: en la categoría de *aspectos cognitivos* ambos docentes como jueces estuvieron de acuerdo que la unidad didáctica permitía el desarrollo tanto de la capacidad matemática como las habilidades matemáticas en los alumnos. Las destacadas fueron: "se desarrolla la capacidad de razonamiento lógico y las capacidades de elaboración de conceptos", específicamente los procesos de reconocimiento e inducción de las propiedades de perímetros y áreas de algunas figuras geométricas. (Cfr. Cuestionario "Valoración de los objetivos", P01 y P02, septiembre 2005).

Considerando los *aspectos afectivos* los docentes también estuvieron de acuerdo que la unidad didáctica daba la oportunidad de desarrollar la interacción social entre los aprendices ayudando a la autorregulación, así como permitir desarrollar una actitud positiva hacia la materia fomentando la curiosidad, la creatividad y el gusto por el trabajo. El interés, la iniciativa personal, la creatividad y el gusto por el trabajo en equipo son elementos que están presentes al desarrollar la unidad didáctica. (Cfr. Cuestionario "Valoración de los objetivos", Ídem).

Con respecto a los aspectos didácticos, los dos docentes estuvieron de acuerdo que la unidad didáctica en formato de WebQuest desarrollaba el contenido curricular de acuerdo a las expectativas del programa nacional vigente fomentando la exploración y el autoaprendizaje en el participante.

Ambos consideraron que la presentación del contenido motivará regularmente a los alumnos, mientras que el docente especialista en informática educativa establece que el tratamiento de las matemáticas es la unidad didáctica es formativo. (Cfr. Ficha didáctica de navegación, Ídem).

Finalmente, el aspecto tecnológico fue considerado positivo en el uso didáctico de la web, eficaz y claro al presentar las diferentes fases de trabajo, con un buen nivel de conexión con el currículo de la materia y rico en la presentación de recursos informáticos para la culminación con éxito por parte del alumno del trabajo demandado.

Ambos docentes consideran que la tarea requiere la síntesis de fuentes múltiples de la información, de tomar una posición, de ir más allá de los “datos dados” y de hacer una generalización o un producto creativo, además consideran que cada paso se indica claramente. La mayoría de los alumnos sabrían exactamente donde están en cada paso del proceso. (Cfr. Ficha didáctica de navegación, Ídem).

Al establecer la relación entre los alumnos y la unidad didáctica los datos pusieron de manifiesto los siguientes resultados: considerando el aspecto cognitivo un 66% de los participantes comprendió muy fácilmente la información que necesitaba para cumplir las labores del trabajo, para un 70% el trabajar en equipo les ayudó mucho en su tarea, así como un 76% consideró haber logrado un aprendizaje de acuerdo a las expectativas de los objetivos propuestos por la unidad didáctica. Considerando los aspectos afectivos, un 60% de los alumnos se sintió muy interesado en el tema trabajado y se logró que el 70% de los participantes se sintieran satisfechos al estudiar matemática usando Internet. Los datos referidos a aspectos didácticos pusieron de manifiesto que para un 74% de los alumnos el contenido curricular que ofrecía la unidad didáctica era aplicable en la vida real, para el 76% de los aprendices les pareció que la metodología aplicada durante el estudio del tema había sido muy buena. Al Considerar los aspectos tecnológicos se pudo notar que el 78% de los alumnos les pareció un método muy bueno al usar el ordenador como herramienta de trabajo y a un 68% les pareció muy interesante usar internet como recurso de trabajo.

Se recoge a continuación dos opiniones de alumnos: Al01 y Al02 las cuales reflejan la visión general de sus vivencias:

“Quiero decir que me parece que trabajar en Internet es algo interesante y que enseña a los niños a que no sólo la computadora sirve para jugar. (Al01, 7ºA, comentario escrito en el cuestionario “Satisfacción y Valoración del Aprendizaje Matemático en Internet”, octubre 2005).

“Me pareció muy interesante haber trabajado con Internet, aunque yo particularmente odio la Geometría porque me desespero. Pero hubieron actividades que me gustaron, sobretodo haber trabajado con el geoplano”. (Al02, 7º B, comentario escrito en el cuestionario “Satisfacción y Valoración del Aprendizaje Matemático en Internet”, noviembre 2005).

Los datos relativos a la relación entre los alumnos y el aula de clase indicaron que la dinámica que se generó entre las actividades propuesta por la unidad didáctica y los diferentes grupos participantes contribuyó a un clima de trabajo permanente manteniendo en todo momento a los grupos concentrados en sus propias actividades sin molestar a los otros, los grupos mostraron mucha curiosidad y motivación al involucrarse en las actividades propuestas, el docente contaba con más tiempo libre, la interacción entre el docente y los grupos de alumnos eran más informales, más dinámicas y espontáneas, Internet permitió acceder a sitios remotos muy reales y que sin importar cuan lejos se encontraban fue posible contactarlos y establecer una interacción con ellos.

Discusión y conclusiones

Como indicamos inicialmente el propósito principal de la presente investigación ha sido la elaboración y proposición de una unidad didáctica de Geometría para alumnos de Secundaria usando el método de WebQuest. Dentro de las conclusiones más importantes que sobresalen son que por sus características *el método de WebQuest es un sistema de enseñanza y aprendizaje completamente ajeno a la metodología tradicional*. Resultados muy específicos apoyan la afirmación de esta conclusión. En primer lugar, se observó que al aula de clase tradicional se le incluyó ordenadores conectadas en red y con conexión a Internet. Estos cambios permitieron extender el aula más allá de su espacio físico. En segundo lugar, se registró que el rol que jugaba el docente durante las sesiones de clases era de guía, de asesor, de orientador y en muchas ocasiones de facilitador y no el de expositor y centro de atención como se acostumbra normalmente. En tercer y último lugar, el ambiente de trabajo en el aula era de actividad permanente, en todo momento los grupos estaban concentrados en sus propias labores sin molestar a los otros favoreciendo la buena conducta y la disciplina dentro del aula de clase Estos datos ratifican los obtenidos por otra investigación a propósito de uso de WeBQuest como se expone en un trabajo titulado "*Estudio de caso: Uso de Webquest en educación secundaria*" de Blanco, De la fuente y Dimitriadis (2000) de la Universidad de Valladolid. El análisis de los resultados obtenidos concluye que los estudiantes sienten una predisposición al trabajo en grupo, el docente se convierte en un mediador y además aumenta el grado de cooperación y ayuda entre los estudiantes frente al aportado por el profesor.

Además, en relación a la construcción de conocimiento matemático, nuestros datos coinciden con un informe evaluativo publicado en un artículo llamado "*Internet en el aula: La metodología del WebQuest en el aula*" de Ortíz (2004) de la Universidad de Jaén (España). En el presente estudio se fundamenta en que un 76% de los alumnos consideraron que aprendieron lo suficiente o mucho con la aplicación de esta unidad didáctica. Para un 66% les pareció fácil comprender la información.

En relación al contenido curricular, se pudo observar que *los objetivos curriculares previstos para el contenido de "Áreas y Perímetros" para séptimo grado según el programa oficial vigente se cumplieron de manera satisfactoria*. Los docentes que validaron la unidad didáctica indicaron que el tratamiento del contenido es formativo e instrumental con actividades de procedimiento, de comprensión, de investigación y de descubrimiento que estimulan el desarrollo de las capacidades y habilidades conceptuales, procedimentales, razonamiento lógico así como las destrezas de observación, de planificación y organización.

La actitud que mostraron los estudiantes hacia las matemáticas durante esta investigación fue positiva, un 60% de los estudiantes se interesaron por el tema trabajado y un 70% se sintieron satisfechos con la experiencia vivida durante el desarrollo de la unidad didáctica. Los grupos de trabajo se mostraron con mucha curiosidad y muy motivados al involucrarse en las actividades propuestas .Esto apoya otros estudios realizados con ordenadores y Matemáticas (Galbraith y Haines, 1998, Gómez-Chacón y otros, 2001) en los que se ha señalado que las respuestas afectivas son esencialmente cognitivas (de creencia) basadas y determinadas por la experiencia; y en las que se pone de relieve dos dimensiones claves de la actitud hacia la matemática, que son la motivación y la confianza.

La experiencia vivida por los estudiantes con en el medio tecnológico ha sido muy buena. El 78% les pareció que el ordenador es una buena herramienta para el trabajo escolar, un 80% valoró a Internet de manera positiva como herramienta para trabajar las matemáticas y un 80% opinaron que los recursos multimedia, los gráficos e íconos contribuyeron con la claridad de la información trabajada en la unidad didáctica. Un 54% de los alumnos se motivaron con la presentación del contenido. En otros estudios realizados hemos constatado que algunos de ellos se destaca que las actitudes hacia la tecnología, cuando ésta se usa como herramienta para el aprendizaje, tienen una influencia mayor en el aprendizaje matemático que las actitudes hacia la Matemática (Gómez- Chacón y otros, 2001). Los resultados de estos estudios nos indican que las actitudes hacia la Matemática y hacia los ordenadores son diferentes, debido al efecto del contacto físico y contextual que el estudiante establece con el ordenador.

Desde la visión cooperativa del trabajo escolar la presente investigación confirma que *la metodología de WebQuest promueve y facilita la cooperación y colaboración entre los estudiantes*. Al valorar las ventajas del trabajo cooperativo se pudo apreciar que contribuyó con la adquisición y producción de conocimientos potenciando la capacidad de comunicación y razonamiento. Esto fue corroborado por la valoración que realizaron los estudiantes, un 70% de ellos consideraron que el trabajar en equipo les ayudó en el aprendizaje del contenido.

Y para concluir, queremos reseñar que la Webquest como estrategia de aprendizaje contribuyó en el proceso de construcción del conocimiento matemático geométrico de los alumnos y a su mejora de actitudes hacia la matemática, perfilándose como un instrumento válido.

Bibliografía

- Adell, J. (2004): Internet en el aula: "Las WebQuest". Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa [Revista en línea], n° 17. http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec17/adell_16.htm. Consultado en (Octubre 2005).
- Area, M. (2005): "Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación". Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, v. 11, n. 1. http://www.uv.es/RELIEVE/v11n1/RELIEVEv11n1_1.htm. Consultado en (Octubre 2006).
- Blanco S., De la fuente P., Dimitriadis Y. (2000): "Estudio de caso: Uso de Webquest en educación secundaria". Documento en línea. http://www.pntic.mec.es/mem/ecomec/index.htm. Consultado en (Julio 2006).
- Dodge, B. (2002): "WebQuests. A technique for Internet-based learning". Documento en línea. http://ww.WebQuest.sdsu.edu/about_WebQuests.html. Consultado en (Julio 2005).
- Dodge, B. (2002a): "Paladín del Aprendizaje Basado en Internet". Documento en línea. http://www.eduteka.org. Consultado en (Julio 2005).
- Dodge, B. (2002b): WebQuests: "A technique for Internet-based learning". Documento en línea. http://ww.WebQuest.sdsu.edu/about_WebQuests.html. Consultado en (Julio 2005).
- Fortuny, J.M. (2005) Algunos ejemplos de aprendizaje on-line en el pasado, ahora y en el futuro: aspectos sociales y educativos En Gómez-Chacón, I. Mª Usos matemáticos de Internet. Ed. Subdirección General de Información y Publicaciones, Ministerio de Educación y Ciencia. Publicaciones del Instituto Superior de Formación del Profesorado.
- Galbraith, P. y Haines, C. (1998) Disentangling the nexus: attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment, *Educational Studies in Mathematics*, 36 (3), 275-290
- Gavilán, P. (2004): Álgebra en secundaria: Trabajo cooperativo en matemáticas. Madrid: Narcea, S.A.
- Giménez, J. (1997): Evaluación en Matemáticas: Una integración de perspectivas. Editorial Síntesis, S.A. Madrid.
- Gómez-Chacón, I. Mª. (2005): Educación Matemática e Internet: Nuevas culturas, nuevas alfabetizaciones. Trabajo no publicado.
- Gómez-Chacón, I. Mª, Figuieras, L., Marín, M. (2001): Matemáticas en la Red: Internet en el aula de Secundaria. Madrid: Narcea, S.A.
- Kent P., Hoyles C., Noss R. y Guile D. (2004) Techno-mathematical Literacies in the Workplace Activity http://www.ioe.ac.uk/tlrp/technomaths. Consultado en (Junio 2005).
- Lagrange, J.B., Artigue, M., Laborde, C., Trouche, T. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In, A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and

F.K.S. Leung (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education,* pp. 239-271. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Lamb, A. & Teclehaimanot, B. (2004): A Decade of WebQuests: A Retrospective. In M. Orey, J. McClendon, & R. M. Branch, (Eds.). Educational media and technology yearbook (Vol 30). Englewood, CO: Libraries Unlimited.
- Lee, K. (1999): WebQuests in the Middel School Curriculum: Promoting Tecnological Literacy in the Classroom. Edit. Meridian.
- Ortiz, A. (2004): "Internet en el aula: La metodología del WebQuest en el aula"**.** Revista en línea Quaderns Digitals. http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=7478. Consultado en (Junio 2005).
- PETICSEN, (2002): Plan Estratégico de Tecnologías de Información y Comunicación para el Sector Educativo Nacional 2002 – 2007*.* Caracas: Ministerio de Educación y Deporte.

León Castañeda Williams. Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Trent, Canadá. Especialista en Didáctica de las matemáticas. En la actualidad es profesor de matemáticas de la Universidad Monteávila y profesor de matemáticas del Colegio Los Arcos en Caracas.
wleonc@gmail.com

Gómez-Chacón Inés M[a]. Licenciada en Ciencias Matemáticas y Doctora en Educación Matemáticas. Profesora investigadora de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. Su principal línea de investigación se centran en el estudio de la cognición y el afecto en Matemáticas, Nuevas tecnologías de la Información y Comunicación y Matemáticas; desarrollo profesional del profesorado y diseño y desarrollo del currículo.
igomezchacon@mat.ucm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 35-46
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Aprendizaje a partir de las tecnologías de la información y la comunicación

Margarita Marín Rodríguez

El éxito de la educación depende del talento,
de la competencia y de la creatividad de las personas
que se dedican a ella.

Goéry Delacôte

En la actual sociedad en la que vivimos, la Sociedad de la Información o Sociedad Digital para otros, el conocimiento a nivel de usuario de ordenadores y redes de comunicación ha dejado de ser un mérito a la hora de buscar un trabajo para convertirse en un requisito imprescindible. Pero no sólo es necesaria esta alfabetización digital en el mundo laboral, pues con la explosión de las comunicaciones y la unión planetaria vía la red Internet, estas tecnologías están incidiendo tanto en nuestras formas de ocio, como relación, aprendizaje y enseñanza independientemente de la edad que tengamos (Cebrián, 1998; Negroponte, 1996).

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación se basan en la Informática y las Telecomunicaciones, cuya base material es la electrónica y su materia prima la información. Su desarrollo ha sido espectacular en los últimos años, simplemente recordemos que el primer ordenador electrónico, el ENIAC, fue presentado al público el 15 de febrero de 1946 y desde entonces la informática ha avanzado de forma vertiginosa aumentando cada vez más su potencia de proceso, miniaturizando los sistemas y bajando los precios de forma constante. Este aumento de potencia y miniaturización de los sistemas informáticos se debe al uso de *señales digitales*, es decir, señales que sólo pueden tener dos valores lógicos: 0 ó 1, verdadero o falso, no pasa corriente, pasa corriente, los bits en el lenguaje informático. Estas señales digitales permiten que los sistemas basados en ellas codifiquen, almacenen, transmitan y decodifiquen de forma rápida y simple la información.

Igualmente las telecomunicaciones, desde su nacimiento hace 150 años con la invención del telégrafo, han evolucionado permitiendo desde la distribución vía satélite de información a gran escala por todo el planeta hasta la telefonía móvil, facilitando la recepción tanto de hechos sociales como personales en cualquier lugar y momento que nos encontremos.

Conscientes de esta realidad tecnológica y de acuerdo con la idea de educación planteada por Piaget (1973, p. 174) de que "*Educar es adaptar el individuo al medio social ambiente*", proponemos iniciar la alfabetización digital en la etapa infantil, concretamente con los niños y niñas de 3 a 6 años comenzando su preparación para el mundo en el que vivirán como adultos responsables. Por tanto, intentamos analizar a lo largo de esta ponencia las implicaciones que tiene dicha iniciación digital en el aprendizaje escolar de los pequeños.

Ser niño, ser niña

Entre las variables educativas que un docente debe tener en cuenta a la hora de diseñar una actividad de aprendizaje, destaca como fundamental el conocimiento de los receptores de ese aprendizaje. Por ello, antes de pensar en introducir las Tecnologías de la Información y Comunicación, TIC a partir de este momento, en el aula como herramientas de aprendizaje es necesario preguntarse cómo piensa, razona, reflexiona y siente el niño de tres a seis años.

Ser niño o niña no es fácil en un mundo tan tecnificado y lleno de estímulos como el nuestro. El niño se pregunta, observa, concluye acertada o erróneamente, pero siempre construyendo a partir de su entorno inmediato como nos demuestran los siguientes chistes:

Fig. 1

Fig. 2

Sus características intelectuales nos las desvelan las teorías psicológicas. Concretamente, según Piaget (1967), los escolares de 2º ciclo de Educación Infantil según el Sistema Educativo español, 3 a 6 años, tienen un pensamiento preconceptual, caracterizado por juego simbólico y la imitación diferida. Su herramienta es la percepción y no son capaces de generalizar. Al ir madurando mediante las experiencias facilitadas por el entorno en el que se mueven, su estructura mental evoluciona al pensamiento intuitivo, caracterizado fundamentalmente por la irreversibilidad y la falta de conservación, alcanzando éstas alrededor de los 7, 8 años, con la entrada de su pensamiento en el período de las operaciones concretas.

Además, este desarrollo intelectual está en estrecho paralelismo con el desarrollo de la afectividad. De hecho, en un acto intelectual intervienen sentimientos múltiples, como los intereses, los valores, la satisfacción o temor, y, recíprocamente, en un acto afectivo intervienen capacidades intelectuales. Los niños y niñas de 3 a 7 años están desarrollando sus sentimientos interindividuales (afectos, simpatías y antipatías), los primeros sentimientos morales y las regulaciones de intereses y valores.

Entonces, ¿qué aprendizajes aporta la herramienta tecnológica a estos niños con estas características?

En primer lugar para aprender se necesita un aprendiz motivado y el uso de las TIC *motiva* ampliamente a los niños que se sienten rápidamente atraídos hacia el ordenador debido a los estímulos sonoros y visuales de los programas infantiles. Estos han sido diseñados conjugando dos variables básicas: instrucción y juego, y con una presentación muy cuidada de la animación el color y la música. En segundo lugar la interactividad característica de esta tecnología conduce a la *implicación* por parte del aprendiz en las ideas abstractas que se exponen en el programa o multimedia y en conseguir su dominio. Así mismo, esta implicación fomenta la tenacidad y la perseverancia del aprendiz que desea jugar/aprender una y otra vez con el ordenador. En tercer lugar, la potencia gráfica de los ordenadores permite *visualizar* ideas, concretamente matemáticas, desde diversas perspectivas. En cuarto lugar, el aprendiz *centra* su atención en el desarrollo del programa y la ejecución del mismo lo que le obliga a percibir la reversivilidad de las acciones. Igualmente, la necesidad de atender a varios estímulos a la vez en el programa obliga a estos infantes a salir del egocentrismo característico de la edad.

Así motivados, implicados, centrados y con la necesidad de coordinar correctamente ojo y mano, los aprendices, en función del programa o multimedia con el que se trabaje, pueden realizar aprendizajes de tipo conceptual, procedimental y actitudinal.

Las TIC como recurso de aprendizaje

La mayoría de los niños y niñas que nutren las aulas españolas de Educación Infantil se inician en el uso del ordenador en el entorno familiar antes que en el escolar. Los padres, preocupados por los aprendizajes de sus hijos y bombardeados por la publicidad, bien les compran software educativo en soporte CDROM, bien les ponen a jugar con alguna de las múltiples páginas que se encuentran en la red Internet dedicadas al mundo infantil. Ahora en la escuela, ayudados y dirigidos por maestros correctamente formados en el uso de las TIC, estos niños aprenderán a aprender con estas herramientas informáticas.

La tecnología como recurso de aprendizaje tiene que estar integrada en el currículum, es decir, el maestro formado tiene que saber a la hora de diseñar una actividad si decide emplear un recurso tecnológico, cuándo y cómo hacerlo. Igualmente, tiene que ser consciente de que una actividad en la que el uso de las TIC es parte importante goza de las siguientes características pedagógicas:

1.- La creación un *entorno interactivo de enseñanza / aprendizaje* en el cual los aprendices pueden ser indistintamente emisores y receptores de información, lo que provoca a) *alta motivación en el aprendiz*, tanto si se trabaja con programas educativos o multimedia debido a su presentación colorista y sonora, como si se trabaja con la tecnología de la comunicación ya que el hecho de saber que su mensaje o su pequeña pagina Web va a ser leída por muchas otras personas, le estimula y fuerza a hacer su trabajo lo mejor posible, como es el caso entre otros muchos de la página del Colegio Almanzor de Candeleda que presenta el cuento interactivo “La vaca Paca”[1] realizado por los niños de Educación Infantil; b) *ruptura de la estructura clásica del aula,* reforzando la motivación inicial en el alumno que se entrega a la realización de la tarea con todo su entusiasmo.

2.- Se potencia el *aprendizaje globalizado* ya que tanto los programas educativos como las páginas webs disponibles trabajan diversos tópicos de las áreas de Educación Infantil.

3.- La *enseñanza es socializadora*, de tal manera que el alumno aprende a analizar, utilizar y trabajar con los recursos propios de la Sociedad de la Información.

4.- La *enseñanza se adapta a las necesidades específicas del alumno.* Con un mismo programa o una misma dirección, el maestro puede enseñar a cada alumno a partir de su nivel de conocimiento y cada alumno aprenderá a su ritmo.

[1] Puede leerse en la dirección <URL: http://roble.pntic.mec.es/~fblanc1/Cuentos/Vaca/vaca1.htm>

5.- La *enseñanza es multicultural*. El uso de la red nos facilita el intercambio cultural. Más allá de los meros contenidos de la actividad propuesta, existe una comunicación humana que nos induce a averiguar cuestiones sobre el otro, su hábitat y costumbres, provocándose un respeto por distintas opiniones y formas de vida; como por ejemplo ocurre en el intercambio de opiniones a partir de un mismo relato publicado en la red en la sección "Biblioteca Imaginaria" de la dirección <URL:http://www.educared.org.ar/imaginaria/biblioteca/?p=220>

6.- Se facilita la *enseñanza cooperativa*, no solo porque una estrategia básica de trabajo es sentar a los niños de estas edades por parejas o tríos ante el ordenador para realizar la tarea, sino además por que el medio telemático nos ofrece la posibilidad de utilizar la red como un área de comunicación y trabajo cooperativo. Esta cooperación puede ser a nivel de grupos de iguales, alumnos de distintas localidades geográficas trabajan sobre la misma tarea telemática y comparten conocimientos y resultados, o cooperación del grupo aula o individual con expertos en los temas propuestos en la tarea. La idea fundamental es crear en el alumno la necesidad de una cooperación por encima de un aprendizaje aislado y particular. Sirva como ejemplo la realización a nivel mundial de la actividad de la WACE "El club de los niños cuidadores del planeta" en la dirección <URL:http://www.waece.org/waece/cdclubninyos/portadas/fundamentacion.html>

7.- Se fomenta *el autoaprendizaje*. Una vez preparado el alumnado en el manejo de programas y uso específico de direcciones de Internet, podrá utilizar estos conocimientos para desarrollar su capacidad de autoaprendizaje, investigando nuevos niveles del programa y fomentando su alfabetización telemática que le será de gran utilidad en cursos superiores.

En cualquier caso el uso de las TIC en las tareas escolares debe complementarse con el uso de otros recursos didácticos, como son materiales manipulables, cuentos, bits de inteligencia, láminas ilustrativas, etc. Son un recurso más, muy potente y atractivo, pero no el único que disponemos.

La utilización de programas educativos y multimedia en soporte CDROM es un hecho real en muchas escuelas infantiles y artículos sobre qué, cómo y cuándo emplearlos podemos encontrar en revistas especializadas y Actas de Congresos. Sin embargo, hoy por hoy la entrada de las Tecnologías de la Comunicación en el aula infantil se está haciendo más lentamente. Una poderosa razón es la ausencia de conexión telefónica en las aulas mientras que enchufe para el ordenador y sus periféricos encontramos en todas partes.

Debido a estas ideas previas, vamos a centrarnos en el uso de la red, analizar algunas direcciones de Internet e indagar sobre los aprendizajes específicos que potencian.

Margarita Marín Rodríguez

Aprendizajes con algunas direcciones de Internet

Exponemos a continuación algunas direcciones de Internet como muestra de la variedad existente en contenidos, niveles de dificultad y calidad. Aunque han sido agrupadas por tópicos principales de aprendizaje, nunca debemos olvidar que la mayoría de las páginas presentan en su menú principal la posibilidad de elegir sobre varios y distintos contenidos, por lo que una misma dirección puede servirnos para realizar diversas actividades de forma globalizada.

Para fomentar la lecto-escritura

En el sistema educativo español, uno de los objetivos finales de etapa a conseguir es la lectura y escritura de palabras usuales en el vocabulario infantil. Una forma de lograrlo es mediante la narración de cuentos y, precisamente, de éstos en al red podemos encontrar muchos y variados. Sirvan de ejemplo las siguientes direcciones:

El mundo de caperucita

<URL: http://www.educa.aragob.es/cprcalat/eva/index.html>

La página principal nos ofrece la lectura del cuento en pictogramas, lo que ayuda a los niños pequeños a ser capaces de leer la narración ellos solos apoyándose en el reconocimiento de los iconos empleados.

Igualmente, con la colaboración del adulto y posterior a la lectura del cuento, se pueden imprimir las imágenes de Caperucita y El lobo para ser coloreadas por los niños y después recortar para hacer un puzzle. Otra actividad es la realización de marionetas con cada uno de los personajes; marionetas con las que el niño puede jugar y rememorar el cuento sin necesidad de utilizar la red.

La vaca Connie

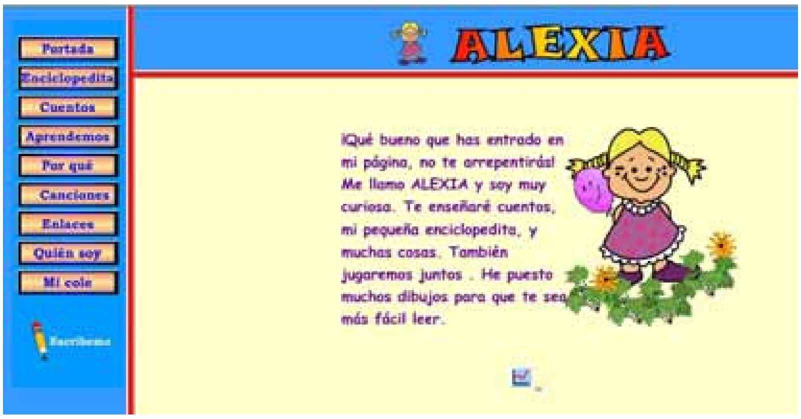
<URL: http://www.lavacaconnie.com/>

El menú principal de esta página nos presenta la posibilidad de trabajar con un cuento interactivo narrado por la protagonista Connie y que obliga al niño a buscar y discriminar los animales que va nombrando.

Si se desea fomentar la escritura deletreada de palabras referidas a animales o frutas, debemos elegir la opción "aprender con los padres" y después "formar palabras".

La página de Alexia

<URL: http://www.inicia.es/de/alexia2000/>



La protagonista de esta página es una niña de 7 años que se presenta a los internautas mediante un pictograma. Desde el menú principal de su página se accede a cuentos de tradición cubana y rusa que exigen alto nivel de comprensión lectora.

Sin embargo, la opción “Enciclopedita” nos presenta la posibilidad de reconocer cada una de las 28 letras del abecedario español y elegir una a una aprendiendo palabras que empiezan por ella acompañadas de su explicación e imagen representativa.

El bus infantil

<URL: http://www.bme.es/peques/ELBUSINFANTIL/MATERIALES/PAGINA10.htm >

Esta dirección es aconsejable para los docentes de Infantil en busca de recursos para la enseñanza de la lengua española escrita. En ella encontrarán vocabulario con las palabras más usuales, cada una definida y apoyada por una divertida imagen para los niños, el rincón de las adivinanzas populares clasificadas por tópicos, selección de cuentos agrupados por temas y acompañados de una batería de preguntas para averiguar la comprensión lectora de los niños, etc.

Para fomentar el pensamiento lógico-matemático

Cualquier actividad que desarrolle las capacidades de observación, intuición, imaginación y razonamiento está fomentando el pensamiento lógico-matemático de los niños. Y direcciones que trabajen con actividades de este tipo son abundantes en Internet. Igualmente, los números, su concepto y grafía es uno de los tópicos más cuantioso en las páginas para el mundo infantil. Sin embargo, escasean direcciones en castellano con otros contenidos matemáticos. Veamos algunas direcciones.

La vaca Connie

<URL: http://www.lavacaconnie.com/>

Esta dirección también nos ofrece en su opción “Juegos” la posibilidad de potenciar la memoria visual, la observación, discriminación y diferenciación tanto de imágenes como sonidos. Son muy entretenidos el juego de memoria visual clásico de asociar parejas y la realización de rompecabezas.

En cuanto a números sólo trabaja el reconocimiento de su grafía a partir del nombre oído.

La biblioteca pre-escolar

<URL: http://www.storyplace.org/sp/preschool/activities/shapesonact.asp>

En esta dirección un simpático lobito nos pide ayuda para encontrar todos los triángulos, círculos y cuadrados que van apareciendo en diferentes escenas.

En la misma dirección las opciones “Cuenta plátanos” y “Plátanos para el almuerzo” permiten que el niño sentado delante del ordenador asocie la noción de cantidad con el numeral que la representa.

Página oficial del Centro Nacional de Comunicación y Educación para niños

<URL: http://www.cnice.mecd.es/ninos/los_numeros/>

En esta dirección es imprescindible la tutela del adulto para dirigir al niño al juego educativo que desea realizar.

Portal educativo de la Junta de Castilla y León

<URL: http://www.educa.jcyl.es/>

Desde la página principal de este amplio y cuidado portal educativo podemos entrar como docentes en *Portal de Educación* con información on-line para la comunidad educativa, o bien si somos aprendices en *Zona infantil* y *Zona alumnos,* así clasificadas en función de la edad: la primera de 3 a 6 años y la segunda de 6 a 12 años.

En ambas encontramos estimulantes y creativas actividades para trabajar los contenidos lógico-matemáticos a estos niveles, así como juegos incitantes y atractivos para desarrollar la mente.

Para fomentar la educación en valores

El simple hecho de trabajar con la herramienta informática fomenta la constancia y perseverancia del niño ante las dificultades, primeramente las informáticas en el manejo del ratón y algunas veces el teclado, y en segundo lugar las derivadas del programa en ejecución. Pero también podemos encontrar direcciones que ayuden a los niños a fomentar su grado de civismo con juegos sobre el reciclado, su solidaridad y tolerancia, así como desarrollar su educación para la paz.

Algunos ejemplos de esto lo encontramos en:

Las tres mellizas

<URL: http://www.lastresmellizas.com/>

A partir del menú principal y eligiendo sucesivamente “quién quiere jugar a...”, “El patio” podemos elegir un juego sobre reciclaje de basuras, sobre cómo salvar el parque, sobre solidaridad con niños impedidos físicamente, sobre los derechos de los niños y así sucesivamente.

Chez Louisette

<URL: http://www.chezlouisette.com/interface/espagnol/>

Esta dirección es a nuestro entender una página portadora de valores perjudiciales, cuya existencia conviene conocer críticamente para saber qué pueden aprender los niños si trabajan con sus contenidos. Así, "Los tres caballeros" que matan una avutarda para comer provocando un derramamiento de sangre virtual que llama la atención. La "Historia del piojo" amante de la samba que cuanto más pica más baila y que incita a rascarse constantemente la cabeza, etc.

El mundo de DINA

<URL: http://www.scslat.org/Dina/index.php>

Web monográfico dirigido a los "Derechos de los niños" con juegos interesantes para los más mayorcitos que potencian la igualdad entre géneros a todos los niveles.

A modo de conclusión

La Sociedad Digital y las TIC nos han abierto nuevos y apasionantes caminos para aprender y enseñar; pero todavía quedan incógnitas por resolver y caminos por investigar para que la utilización de estas herramientas, en manos de docentes expertos, realmente sean herramientas de aprendizaje que posibiliten y mejoren los aprendizajes tanto instructivos como formativos, lo que conseguiremos aunando una metodología apropiada y un uso inteligente de dicha herramienta.

Además, debido a la rapidez de los avances tecnológicos se hace más patente que nunca la asunción del profesorado en general de la necesidad de un reciclaje en su formación tecnológica y en el uso pedagógico de la tecnología, así como la inclusión de la misma en los Proyectos Curriculares.

Estamos convencidos de que estas limitaciones se irán superando y entre todos encontraremos estrategias de enseñanza - aprendizaje en un futuro inmediato, con gratos y satisfactorios resultados tanto para los docentes como los aprendices, quienes aprenderán a formarse en la propia escuela como ciudadanos de la Sociedad Digital y a utilizar la red como fuente de información, expresión y comunicación de su conocimiento.

Algunas direcciones interesantes

Dirección	Contenidos	Observaciones
http://www.sesamo.com/index.html	Variados y amenos desarrollados en forma de juego.	Es negativa la presencia de publicidad constante en los diversos apartados y la ausencia de corrección.
http://www.chicomania.com/	Variados y amenos desarrollados en forma de juego.	Muy atractiva en su diseño y la música que incorpora. Está dirigida a pequeños y sus padres.
http://www.mundolatino.org/rinconcito/	Recursos variados.	Dirigida fundamentalmente a los docentes de Infantil
http://club2.telepolis.com/pitufasaltarina/	Números, colores, dibujos, todo en el soporte adecuado para imprimir y realizar en papel. No es interactiva on-line.	Es una lástima la carencia de sonido en esta página tan atractiva de imágenes.
http://biblioteca.redescolar.ilce.edu.mx/index2.html	Cuentos variados.	Es una biblioteca digital muy atractiva para utilizar con ayuda del adulto. Es una lástima la ausencia de sonido.
http://www.pequelandia.org/cuentos/	Más cuentos infantiles.	La música que acompaña a cada cuento es muy agradable.
http://pacomova.eresmas.net/pictogramas/	Más cuentos infantiles, pero todos en pictogramas pensados para los más pequeños.	Música muy agradable.
http://w3.cnice.mec.es/eos/MaterialesEducativos/mem2001/raton/index.html		Muy interesante para iniciar a los más pequeños en el uso correcto del ratón mediante juegos. Las instrucciones se dan por audio.
http://www.cnice.mec.es/ninos/cuentos_para_leer_y_escuchar/		Cualquier opción es buena para aprender entre las que presenta el menú principal. Muy interesante el Mundo de Fantasmín y el aprendizaje con los instrumentos musicales.

Bibliografía

- Bautista, J.M. et al. (2003). "Tecnologías de la Información y Comunicación en Educación Infantil: entre la norma y la didáctica". *Comunicación y Pedagogía* 191, 12-17.
- Cebrián, J.L., (1998). *La red*. Taurus, Madrid.
- Delacote, G. (1997). *Enseñar y aprender con nuevos métodos. La revolución cultural de la era electrónica*. Gedisa, Barcelona.
- Marín, M. (2001). "Proyecto Merlín: Soft educativo en el aula de infantil". En Carlavilla, J.L.; Marín, M. (Coords.), *La educación matemática en el 2000*, 203-214. Ediciones de la Universidad de Castilla La Mancha, Cuenca.
- Marqués, P. (2005). "La integración de las TIC en la escuela: las claves del éxito". *Comunicación y Pedagogía* 204, 37-45.
- Negroponte, N. (1996). *El mundo digital.* Ediciones B, Barcelona.
- Papert, S. (1980*). Mindstorms, children, computers and powerful ideas.* Basic Books, New York.
- Piaget, J. (1973). *Psicología y Pedagogía*. Ariel, Barcelona.
- Santamaría, R.M. (2005): "Las tecnologías de la información y comunicación en el aula de Educación Infantil". *Comunicación y Pedagogía* 207, 29-32.
- Siraj-Blatchford (Comp.) (2005). *Nuevas tecnologías para la educación infantil y primaria*. Morata-MEC, Madrid.

Margarita Marín Rodríguez, Licenciada en Matemáticas y Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad Complutense de Madrid. Máster en Informática por la Universidad Pontificia de Salamanca. En la actualidad es profesora titular de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Castilla La Mancha. Ha publicado libros y artículos sobre la utilización de las TIC en las aulas de Primaria y Secundaria en el Sistema Educativo español. Sus líneas de trabajo son a)la investigación de la repercusión de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, b) el aprendizaje matemático en el Ciclo Infantil y c) formación matemática de los maestros.
Escuela Universitaria de Magisterio de Ciudad Real, Universidad de Castilla La Mancha.
Ronda de Calatrava 3, 13003 Ciudad Real, España.
Margarita.Marin@uclm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 47-71
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Metamorfosis matemática en la aventura TIC andaluza

Rafael Bracho López

"Las personas que se aferran a tecnologías pasadas, sucumben en el campo de la ignorancia y se entierran en sus ideales."

Wily Fiallos

1. Introducción

Sin duda atravesamos un momento importante en el panorama educativo andaluz…

En estos tiempos en los que se están viviendo cambios tan significativos en la sociedad, hemos observado atónitos cómo ha ido cambiando vertiginosamente la problemática en nuestras aulas.

El frenético desarrollo tecnológico en general y sobretodo el gran desarrollo de las TIC en particular, han ido transformando nuestros modelos familiares y sociales, y la escuela pública no puede permanecer ajena a esta realidad.

Está claro que algunos de los recursos que hace pocos años nos servían para educar y enseñar a nuestros jóvenes estudiantes ya no son válidos, y que los que aún lo son, necesitan ser complementados con alternativas metodológicas que consigan conectar con nuestros alumnos y alumnas y ofrecerles el moderno aprendizaje que nuestra sociedad actualmente demanda.

Se hace necesaria una profunda innovación educativa capaz de desarrollar los objetivos de la LOGSE, que ahora están siendo objeto de reflexión y análisis para su posible actualización, contando con los materiales y con los medios necesarios para ello, en la que el profesorado de nuestros centros debe ser protagonista del cambio.

La Consejería de Educación y Ciencia, consciente de la importancia que tiene la adaptación de nuestro sistema educativo a la sociedad actual, está haciendo una extraordinaria apuesta por la incorporación de las TIC a la práctica docente. En estos dos últimos cursos hemos sido 150 los centros que hemos tenido la oportunidad de desarrollar nuestros proyectos de incorporación de las TIC a la práctica docente. La mejor oportunidad de innovación real está servida en bandeja para el profesorado de estos centros, y a buen seguro pronto le llegará el momento a muchos más centros andaluces.

Ante este sugerente panorama, el profesorado de Matemáticas debe ilusionarse en la búsqueda de nuevos horizontes para el desarrollo de su actividad en la nueva realidad que se le presenta en las aulas.

Pues bien, lejos de pretender proporcionar “fórmulas mágicas” para enseñar Matemáticas con los nuevos recursos de que disponemos, me propongo en mi intervención transmitir mi experiencia como coordinador del proyecto TIC y como profesor de Matemáticas en el IES Averroes de Córdoba, donde trabajo. Espero ser capaz de transmitir la ilusión con que vivo esta interesante aventura…

2. Características generales de la experiencia TIC

La aventura TIC debe tener algo muy especial…

Ya cuando nos lanzamos a presentar nuestro proyecto nos llamó la atención el entusiasmo de los compañeros y compañeras en buscar los justificantes de sus *“pinitos informáticos”*, y estudiar y programar en las tutorías y en cada área las posibilidades de trabajo con los ordenadores por si llegábamos a tener la suerte de que nuestro proyecto fuera uno de los elegidos. Al cabo de unas semanas el sueño se vio cumplido y aparecieron entonces algunos temores.

No dejamos correr el tiempo y enseguida nos pusimos manos a la obra…

A la vuelta del verano el centro estaba *“patas arriba”* y el temor seguía acompañándonos, pero la suerte estaba echada y nosotros/as ya estábamos organizados y preparados/as para la experiencia.

Fue un año de formación en el que todos/as aprendimos mucho más de lo que nos sentíamos capaces…

El temido fantasma LINUX se nos apareció encarnándose en nuestro GUADALINEX$_{\text{EDU}}$ y convirtiéndose en un amigo cercano que al principio, eso sí, quizá debido a su corta existencia, nos dejaba *“colgados/as”* con demasiada frecuencia; pero fue madurando tan rápidamente como nosotros/as nos hemos ido acostumbrando a él y a su pandilla. Nos referimos a ese inicialmente extraño montaje de unidades que ya se hizo sistemático, a los amigos Nautilus y Mozilla, a la familia OpenOffice,… todos/as ellos/as libres como el viento, y como no, a nuestra entrañable y poderosa Plataforma Educativa, de la que hablaremos más tarde.

¿Y cómo vivieron la transformación los alumnos y alumnas? Ellos/as nunca compartieron nuestros temores y se habituaron de forma natural al uso de los nuevos recursos. Nos animaron a utilizar los ordenadores e incluso nos ayudaron a resolver problemas en más de una ocasión.

Aunque no lo reconociéramos, todos/as temíamos un relativo miedo al maltrato del nuevo mobiliario y de los ordenadores y sin embargo, salvo en contadas excepciones, los/as chicos/as han cuidado ejemplarmente el nuevo material.

Y es que efectivamente, parece que la aventura TIC está impregnada de una magia ilusionante que hace que todos/as nos vayamos empapando de ella, mientras vamos retroalimentándonos en el proceso de rodaje de la experiencia.

3. Adaptación de un centro a la experiencia TIC

Entendemos que el proceso de incorporación de las TIC a la práctica docente en un centro educativo no debe resultar traumático, sino que más bien el profesorado debe ir adaptándose de manera progresiva al uso de los nuevos y potentes recursos que se le brindan. No debemos ni podemos pasar de nuestras clases habituales a otras metodologías totalmente diferentes.

Sin embargo, está claro que el inicio del primer año de experiencia TIC supone físicamente un cambio radical en el panorama del centro, y consecuentemente el funcionamiento del centro debe adaptarse desde el principio a la nueva realidad.

Cambios en las aulas…

El sistema informático de un centro TIC

En todas las aulas del centro, a excepción de laboratorios, talleres y aula de música, han sido sustituidos los pupitres tradicionales por mesas con ordenadores. Cada dos chicos y chicas disponen a diario y para todas sus clases de un ordenador con acceso a Internet de alta velocidad y a una Intranet educativa corporativa, que será un recurso siempre disponible para su formación.

Los departamentos, despachos, sala del profesorado, biblioteca, etc también han sido sobradamente dotados, y se cuenta además con una dotación de medios complementarios, como ordenador y proyector portátil, cámaras fotográfica y de vídeo digitales, etc.

Conozcamos ahora un poco del entorno informático del centro para después poder hablar de la organización…

Se ha optado por implementar una distribución de LINUX basada en DEBIAN y desarrollada por la Junta de Andalucía, la GUADALINEX-EDU. De esta forma nos orientamos hacia el reto que supone la utilización de software libre, toda una filosofía de desarrollo educativo basada en el trabajo colaborativo.

En cuanto a la estructura de la red, las conexiones desde el exterior de nuestro centro nos llegarán de dos fuentes: desde la red de la Consejería (red corporativa), que nos permitirá comunicarnos vía Intranet con la propia CEJA y con todos los centros TIC de Andalucía, y desde Internet.

En un lugar fresco y no frecuentado por personas habitualmente, está el router y el armario donde se alojan el servidor de seguridad, el servidor de contenidos, el SAI (alimentador de batería) y el conmutador o swich.

El router es el dispositivo que permite la entrada y salida de información desde nuestro centro hacia el exterior (Internet) y/o hacia la red corporativa de la CEJA, que está integrada por los todos los centros TIC.

Armario de servidores

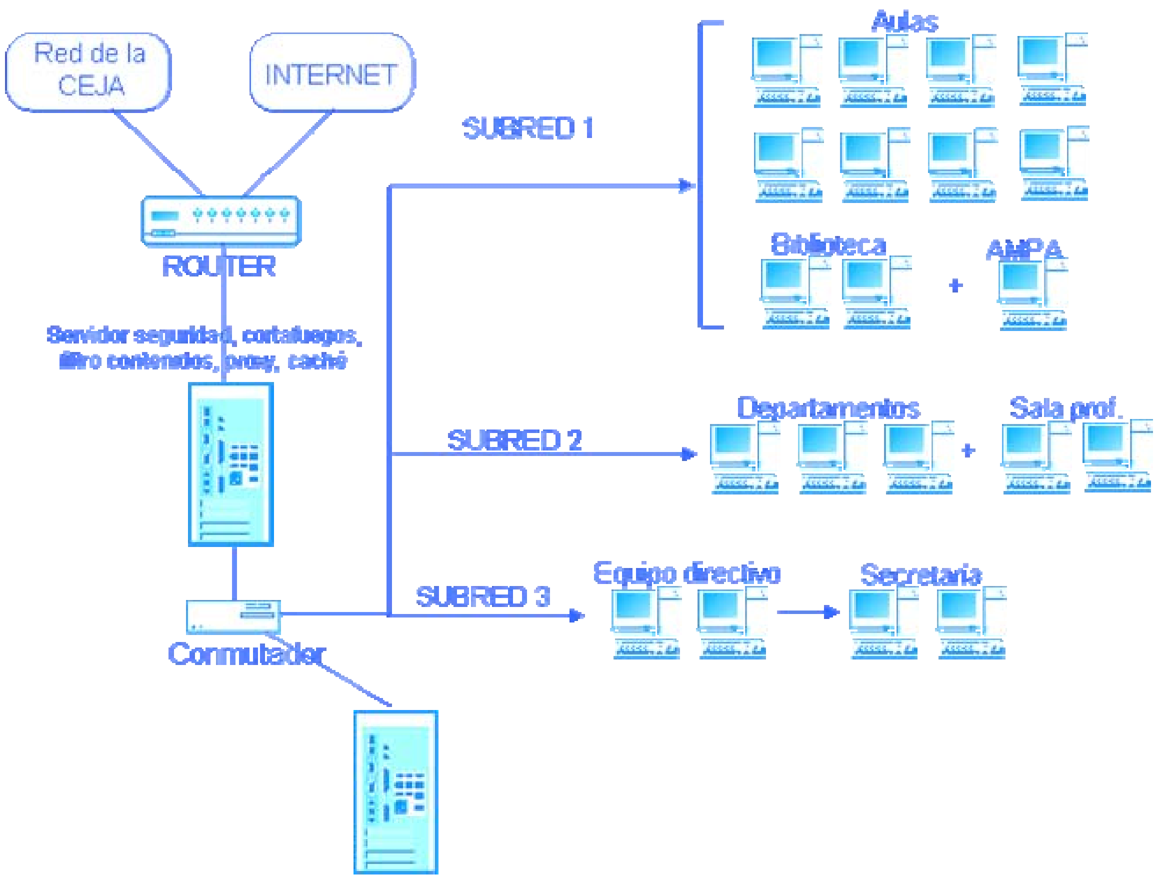
El servidor de seguridad (firewall) permite filtrar los contenidos de acceso a Internet, garantizando la seguridad de las conexiones con fines educativos.

En el servidor de contenidos están alojados los contenidos que programamos para su utilización en nuestra práctica diaria, y la plataforma educativa.

En el pasado curso trabajamos aún con cuentas genéricas de usuario que no permitían la deseada personalización de los datos, y la configuración de la red no permitía tampoco la transferencia de ficheros y carpetas vía ftp al servidor de contenidos ni desde éste. Esperamos que en este curso se den pasos importantes en la utilización del potencial de la red.

El conmutador permite el tráfico independiente y fluido de la información por las tres subredes que conforman nuestra red local; a saber: la subred de aulas (ordenadores de alumnos/as y profesores/as, ordenador del AMPA y ordenadores de biblioteca), la subred del profesorado (departamentos y sala del profesorado), y la subred de administración (ordenadores del equipo directivo y secretaría de administración).

De forma esquemática, la distribución del sistema informático de nuestro centro es la siguiente:



Coordinación de la experiencia

No se puede, o al menos no se debe, afrontar el trabajo en el aula sin ilusión y sin esperanza. Sin ellas, enfrentarse a la realidad de las aulas, consecuencia de los frenéticos cambios que nuestra sociedad está experimentando, puede llegar a resultar muy frustrante.

Son muchos los proyectos cargados de ilusiones que se han asumido en el IES Averroes en los últimos años. Trabajar juntos por hacerlos realidad nos ha ayudado a sentirnos orgullosos de nuestro centro. Pero sin duda el proyecto TIC ha supuesto el mayor hito en la vida de nuestro instituto y la mejor oportunidad para ilusionarnos juntos en nuestra tarea docente.


Jornadas de formación de coordinadores/as en Antequera

En estas circunstancias el papel del coordinador o coordinadora TIC es fundamental.

Si bien existen algunas funciones técnicas que el coordinador o coordinadora del proyecto debe asumir, está claro que su responsabilidad más importante es la de dinamizar la experiencia y mantener el clima óptimo de trabajo en torno a ella.

Si analizamos la realidad de nuestro primer año de experiencia, las funciones que el coordinador o coordinadora del proyecto TIC debe acometer podrían resumirse en el siguiente…

Decálogo para la coordinación del proyecto TIC

A nuestro juicio, el coordinador o coordinadora del proyecto TIC de un centro debe ocuparse de:

1. Supervisar las incidencias técnicas de los ordenadores y de la red, intentando resolverlas en primera instancia y, cuando esto no sea posible, notificar al CSM o al CGA el problema técnico existente.
2. Atender a los/as especialistas que se desplacen al centro para resolver los problemas técnicos de los ordenadores o de la red TIC.
3. Actuar como interlocutor entre la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía y el centro para las cuestiones relacionadas con la experiencia de incorporación de las TIC a la práctica docente.
4. Estar al día en todo lo relacionado con la utilización de las TIC en el ámbito educativo y en especial en la experiencia iniciada por la CEJA.

5. Programar y coordinar el plan de formación del profesorado del centro relativo a la utilización de las TIC en el aula.
6. Coordinarse con los coordinadores y coordinadoras TIC de todos los centros andaluces a través de las vías habilitadas para ello por la Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado.
7. Coordinar todas las iniciativas que surjan en el centro relacionadas con el uso de los recursos TIC.
8. Velar por que la plataforma educativa y la página Web del centro sean verdaderas herramientas para la comunicación, la información y el desarrollo de la actividad académica.
9. Atender a los compañeros y compañeras, en especial a los que se sienten menos seguros/as en el uso de los recursos informáticos.

Y en definitiva lo más importante…

10. Dinamizar la utilización de los recursos informáticos del centro, convenciendo a toda la comunidad educativa de sus bondades para el ámbito educativo.

Pero dada la magnitud de su labor, sería absurdo pensar que el coordinador o coordinadora TIC pueda realizarla en solitario, ocupándose además de sus propias responsabilidades como docente.

Es fundamental que el coordinador o coordinadora se sienta motivado y apoyado por el equipo directivo y por el claustro de su centro, y que él o ella, junto con todo el equipo, sepa organizar las funciones para que sean compartidas y asumidas por todos/as, convirtiéndose el/la coordinador/a en director o directora de la singular orquesta TIC del centro.

Algunas ideas para dinamización de la experiencia

Desde la Dirección General de Innovación Educativa y Formación del Profesorado se insiste en el enfoque didáctico que debe caracterizar a la experiencia andaluza de incorporación de las TIC a la práctica docente.

La utilización de los ordenadores no debe tener un carácter técnico. Los compañeros y compañeras deben convencerse de que no importa demasiado su nivel de informatización previo, ya que con una formación básica y los medios que se habiliten en nuestro entorno informático a través de la plataforma educativa, cualquier profesor y profesora que apenas hubiese usado anteriormente los ordenadores, podrá utilizar los recursos en el aula de manera completamente natural. Así cada compañero/a podrá innovar su metodología de trabajo programando prácticas con ordenadores con una frecuencia que él o ella se marcará, sin sentirse nunca intimidado ni arrastrado por el resto del profesorado.

Por otro lado, es importante que tanto en el proceso general de aprendizaje como en la búsqueda de los recursos didácticos e informáticos de cada área, para su incorporación en las programaciones de aula, el profesorado trabaje en equipo y nunca se encuentre solo. De esta manera los profesores y profesoras se sentirán cómodos y acompañados en su proceso de adaptación.

Transmitir estas ideas es sumamente importante para que todo el profesorado se *"suba al carro"* de las TIC y la experiencia sea dinámica en sí misma.

Pero ¿qué elementos pueden ayudarnos a conseguir conjugar estas dos características: ritmo personalizado y sosegado en la utilización de los recursos informáticos en el aula, y buen clima de trabajo en equipo?

Comentemos algunas ideas que nosotros hemos puesto en práctica…

Comisión TIC

Desde el momento en que se aprobó la realización de nuestro proyecto, pensamos que había que abordar una serie de cuestiones importantes antes de la puesta en marcha de la experiencia, tales como:

- Decisiones técnicas relativas a la distribución de espacios y de equipos informáticos, instalación, etc.
- Organización de tareas relacionadas con la experiencia TIC (formación de comisiones o grupos de trabajo, tareas de apoyo a la coordinación, etc).
- Coordinación con otros centros de la ciudad y estudio de referencias previas a la implementación (viaje a Extremadura, etc).

Viaje a Calamonte (Extremadura) en junio de 2003

- Análisis de las nuevas normas de funcionamiento.
- Estudio de Gualinex$_{EDU}$ (antes Guadalinux).
- Programación de nuestro Plan de formación.
- Elaboración de material, y otras.

Visita al centro de autoridades educativas
de Polonia

Creímos que éstas no debían ser responsabilidades exclusivas del equipo directivo y del coordinador TIC, y por ello constituimos una comisión orgánica (comisión TIC) que, además de ocuparse de estas cuestiones inminentes, sería en adelante la responsable de decidir sobre cuestiones importantes relacionadas con el proyecto para las que no sería operativo reunir a todo el claustro de profesores/as.

Esta comisión ha estado integrada por el coordinador TIC y un grupo de 8 profesores y profesoras que desde el principio se mostraron implicados de manera especial en el proyecto, entre los cuáles estaba también el vicedirector del centro.

En el primer curso de rodaje no teníamos referentes y fueron muchas las decisiones que esta comisión fue tomando sobre la marcha. Algunos ejemplos son el gran número de operaciones que a modo de *"zafarrancho general"* ha habido que acometer (operación conexión, operación latiguillo, operación actualización, operación toma de IPs, operación reconfiguración de escritorios, operaciones estropajo, etc), algunas de las cuáles se han llevado a cabo con la ayuda de los alumnos y alumnas y otras, en grupos voluntarios por las tardes e incluso en fines de semana; también ha habido que actuar ante la delegación y ante la dirección general para la solución de problemas puntuales; participar en ponencias; organizar eventos como visitas de profesorado de otros centros, comisiones de profesorado extranjero, organización de cursos para inspectores de la delegación, mesas redondas, organización del 3J, día de celebración del primer año de experiencia TIC, y otras muchas cosas, entre las que debemos destacar las decisiones de naturaleza puramente educativa, como qué hacer ante las actuaciones inapropiadas del alumnado, cómo definir el nuevo rol del profesor/a tutor/a, etc.

Profesores y alumnos en un "zafarrancho general"…

Tutorías de apoyo a la coordinación TIC

Adelantándonos a la magnitud de tareas de las que se iba a tener que ocupar el coordinador TIC, vimos indicado orientar dos de las tutorías no lectivas disponibles hacia las funciones de coordinación de la experiencia.

Concretamente, las dos tutoras de apoyo a la coordinación del proyecto TIC se han dedicado fundamentalmente a:

- La tramitación de los partes de incidencia.
- Diagnóstico y resolución de algunas incidencias.
- Tareas de administración de la plataforma educativa.

Sin duda se trata de labores necesarias pero arduas que es preciso simplificar en un futuro.

Alumnos/as voluntarios/as

Sabemos que en algunos centros donde se imparten ciclos formativos de Informática ha habido grupos de alumnos y alumnas que voluntariamente se han prestado a colaborar en la resolución de incidencias.

Colaborador en acción

Nosotros, no teniendo esta suerte, hemos pensado en el interés educativo que tendría el responsabilizar del cuidado de los equipos en primera instancia a los propios alumnos y alumnas de los grupos. En este sentido, se ha creado un grupo de colaboradores en las aulas que, coordinados por el equipo TIC, colaboran con aspectos importantes del proyecto, convirtiéndose en un motor importante de la experiencia.

Asimismo, en el pasado curso, alumnos/as de 1º y 2º de bachillerato han colaborado como cibervoluntarios/as en un plan de alfabetización de personas adultas del barrio.

Comisión de plataforma educativa

Incluso sin tener demasiado conocimiento previo sobre plataformas educativas, desde un principio estuvimos convencidos de la importancia de contar con un medio sencillo y apropiado para el desarrollo de nuestra experiencia TIC.

A la vista de la polémica suscitada por algunos coordinadores sobre la conveniencia o no de utilizar E-ducativa, la plataforma propuesta por la CEJA, u otras alternativas libres existentes, vimos necesario estudiar en profundidad el tema de plataforma, para lo cual se formó una comisión que ha estado integrada por el coordinador TIC y 7 profesores y profesoras, entre los que se encontraban las dos tutoras cuya función ha sido la de apoyo a la coordinación del proyecto TIC, que se han ocupado del estudio de la configuración idónea para un centro de nuestras características, la configuración, etc, que comentaremos más adelante.

Grupo de trabajo de coordinación de recursos

Para un profesor o profesora acostumbrado a su propia metodología en la que hasta ahora no contaba con ordenadores en las aulas, incorporar a sus programaciones de aula la gran cantidad de nuevos y potentes recursos que la red le proporciona, no es tarea fácil, ni mucho menos inmediata.

Cada uno de nosotros/as tendría que investigar los recursos existentes para cada una de las asignaturas y niveles que imparte, probar su funcionamiento bajo Guadalinex, integrarlo en la plataforma educativa, experimentar las actividades con los/as alumnos/as, etc.

Y no digamos si además pretendemos elaborar nuestro propio material didáctico…

El trabajo que tenemos por delante es ilusionante pero inmenso. No podemos aspirar a conseguir demasiados recursos en poco tiempo. Más bien debemos pensar en una transición sosegada desde nuestra metodología anterior hacia la incorporación de nuevos recursos. Ese es el proceso de innovación lógico.

Y sin duda este trabajo puede tener un efecto multiplicativo si lo abordamos en equipo, ya que así, cada recurso descubierto o elaborado por un profesor o profesora podrá ser incorporado a la metodología de sus compañeros/as de área.

Con esa idea pensamos en la figura del coordinador o coordinadora de recursos de cada departamento didáctico, cuyas funciones son:

1. Administrar el grupo del departamento didáctico en la plataforma.
2. Estructurar los recursos que se vayan descubriendo y/o elaborando.
3. Recoger información documental y gráfica sobre las actividades culturales, prácticas, etc, que organice el departamento.
4. Proporcionar al coordinador de la página Web información para su publicación en este medio.
5. Canalizar la demanda formativa del departamento.
6. Propiciar la coordinación con los departamentos didácticos de su misma área de otros centros.

Los coordinadores y coordinadoras de recursos pueden ser los/as jefes/as de departamento o no serlo e incluso puede haber más de un coordinador o coordinadora de recursos por departamento.

Todos los coordinadores y coordinadoras de recursos están integrados en un grupo de trabajo dentro de la Intranet del Profesorado de la plataforma educativa, compartiendo así las extraordinarias herramientas de dicho espacio para sus tareas de coordinación.

Comisión de página Web

Si la plataforma educativa sirve como medio ideal para el desarrollo de la experiencia TIC dentro de nuestro centro, no cabe duda que la página Web debe ser una verdadera ventana al exterior de toda la vida del instituto y en especial de su experiencia TIC.

Para el estudio de la estructura de la nueva Web y su diseño se ha creado una comisión formada por varios compañeros y compañeras que se han ofrecido para este trabajo.

Actualmente está consensuada una potente estructura que permite la interacción de todos los visitantes, con especiales facultades para los miembros de la comunidad educativa.

Algunos proyectos integrados en la experiencia TIC

- Organización de los recursos didácticos por áreas, vía ftp, en el servidor local creado para este fin con autorización del CGA.
- Colaboración en la creación de un aula de informática en Tounfite, pequeño pueblo del la región del Alto Atlas Oriental de Marruecos, con la implementación de una distribución de Guadalinex-EDU traducida al francés.
- Participación en un proyecto de solidaridad e interculturalidad con el instituto de Tounfite.
- Sistematización del servicio diario de noticias en la plataforma educativa que ya este año ha funcionado a cargo de dos profesoras de medios de comunicación.
- Emisión de una programación musical desde nuestra emisora local con un servicio diario de noticias al que se podrá acceder en tiempo real desde cualquier equipo de la red.
- Emisión de vídeos desde el servidor local.
- Creación de la revista digital del centro, que pretendemos entroncar con la de otros centros TIC a través de una experiencia compartida.
- Intercambio cultural con un centro de Educación de Adultos de nuestra comunidad.

Normas de uso de los recursos TIC del centro

La experiencia de los últimos años de trabajo en nuestro centro nos demuestra que para que sea posible la convivencia en nuestro quehacer diario dentro de un clima de respeto, es necesario establecer unas normas básicas y que todos los miembros de la comunidad educativa, y en especial el profesorado, velemos por el cumplimiento de éstas.

Evidentemente, la incorporación de las TIC a la dinámica habitual de nuestras clases y la utilización de los nuevos recursos informáticos en casi todas las dependencias de nuestro instituto, hacen necesario el establecimiento de nuevas normas de utilización de estos elementos que pongan especial énfasis en el cuidado de los delicados equipos informáticos y de su instalación, con el fin de que los nuevos materiales puedan ser utilizados por sucesivas promociones de estudiantes y su uso sea siempre verdaderamente educativo.

Es evidente que este aspecto, a igual que otros de tipo organizativo, dependerá de cada centro, por lo que no me detendré en su análisis, si bien, conviene destacar que en nuestro caso hemos querido entender el cuidado de los recursos de una tarea de todos/as.

Por un lado, los chicos y chicas han de concebir como propios los equipos informáticos y el mobiliario, y por otro, el cuidado general del aula pivota sobre los tutores y tutoras y sobre los estudiantes encargados del aula, si bien esta tarea debe compartirse fundamentalmente con todo el profesorado del grupo. En este sentido, es importante resaltar el cambio de rol del tutor o tutora de grupo.

4. La formación del profesorado: una tarea fundamental para la innovación educativa y el trabajo en equipo

Hemos de citar la figura del asesor o asesora de referencia en el CEP, establecida para atender a la demanda formativa que se plantee desde los centros TIC. Si bien hemos podido observar que el papel de estos compañeros y compañeras ha variado, dependiendo de los distintos CEPs, en el caso del CEP de Córdoba, la atención ha sido extraordinaria.

Más que mostrar aquí el contenido de los planes de formación que hemos diseñado para los dos primeros años de experiencia TIC, quisiera comentar los objetivos más importantes que nosotros nos planteamos en este sentido y las propiedades que creemos que deben caracterizar a la formación en los primeros años de experiencia TIC.

Consideramos que la formación del profesorado debe cumplir los siguientes objetivos fundamentales para el buen desarrollo de la experiencia:

1. Demostrar al profesorado la bondad del uso de los recursos informáticos y su carácter asequible con independencia del nivel previo de informatización.
2. Dotar al profesorado de los conocimientos básicos necesarios para el uso de los recursos informáticos.
3. Ofrecer un espacio compartido para el análisis de la experiencia TIC y la reformulación continua del proyecto.

4. Servir como elemento dinamizador esencial en la experiencia.

Citaré brevemente algunas características de nuestra dinámica formativa, distinguiendo dos aspectos distintos: la formación básica general y la formación específica.

Por la primera entendemos a la que debe ir dirigida a la totalidad del profesorado del centro. Debe ser elemental y asequible, y estar diseñada en total relación con lo proyectado para el curso académico. Entrarían dentro de este tipo de contenidos en el primer año de experiencia: el conocimiento y debate de las nuevas normas de funcionamiento, el conocimiento básico de Guadalinex, las herramientas más elementales de Internet y sus posibilidades didácticas, el manejo de Writer, el conocimiento y uso de la plataforma educativa, etc.

La segunda vertiente formativa complementa a la primera y responde a la demanda de algunos sectores del profesorado a los que iría dirigida. Por ejemplo, son contenidos de este tipo: El refuerzo de contenidos estudiados en la primera fase, el conocimiento de Calc y de Impres y su uso didáctico, la edición de páginas Web, el manejo de software educativo específico (Hot Potatoes, Clic, JClic, etc), y cuantas necesidades formativas sean demandadas por el profesorado del centro.

Sesión de formación TIC

Ambas líneas de formación deben tener un carácter abierto, debiendo ser posible la supresión, ampliación y reformulación de contenidos en función de las necesidades que vayan observándose durante el rodaje de la experiencia.

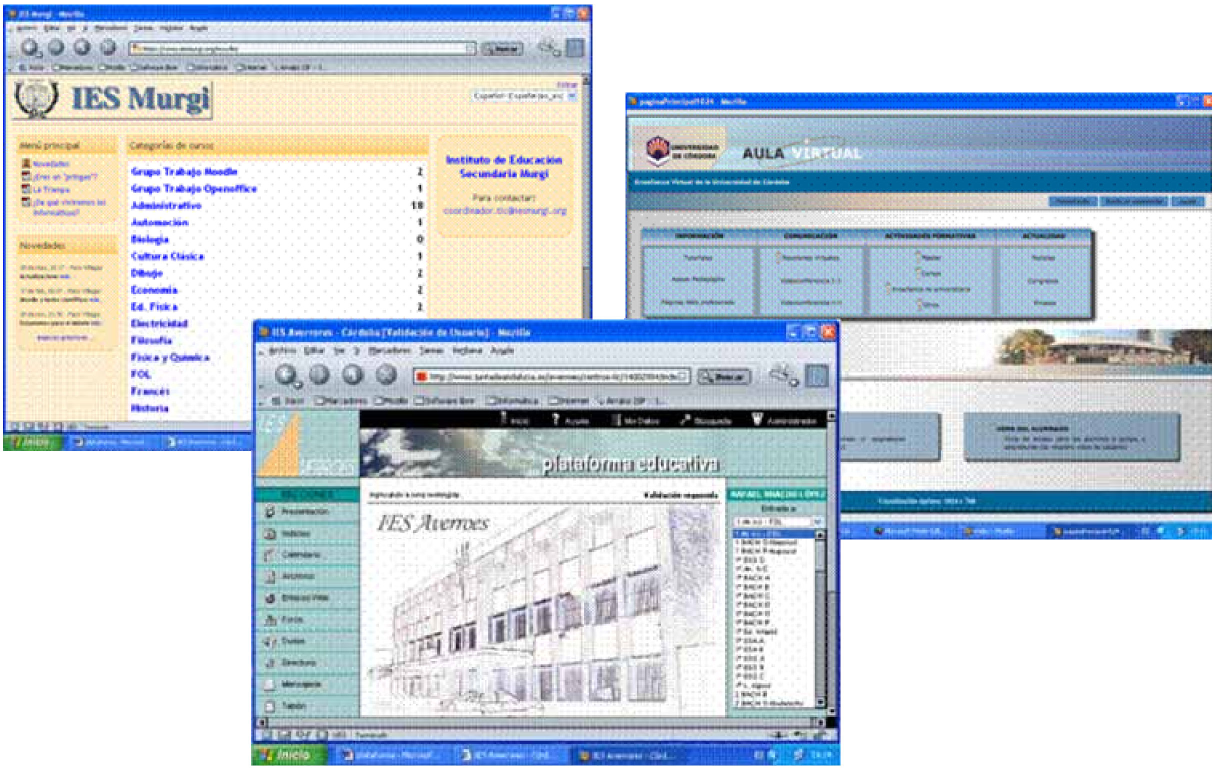
Con idea de que ningún profesor o profesora se sienta desvinculado de la experiencia, creemos que debemos esforzarnos por que la formación TIC resulte cercana a todo el profesorado. Por ello pensamos que debemos enfocar el aprendizaje de forma constructivista, recurriendo siempre que se pueda a profesores/as conocidos/as y prescindiendo en lo posible de ponentes excesivamente técnicos, al menos en la línea de formación básica.

Para cada área de conocimiento se fomenta la formación de grupos de trabajo y la organización de cursos específicos dirigidos al profesorado de cada área de los centros TIC del ámbito del CEP de referencia.

5. La plataforma educativa

En el proceso de adaptación del profesorado al uso de los nuevos recursos informáticos, resulta especialmente importante contar con un medio que nos permita utilizar los ordenadores en el aula respondiendo a los objetivos que nos planteamos en nuestros proyectos educativos, y de manera fluida y sistemática.

Pues bien, una Plataforma Educativa es el vehículo ideal para la información, comunicación y participación de los miembros de la comunidad educativa, y en especial de los estudiantes, en la dinámica del centro; proporciona además un espacio adecuado para el desarrollo de la actividad académica con los recursos de que disponemos.



Distintas concepciones de plataforma educativa

Nuestra opción

Además de E-ducativa (la plataforma que la CEJA nos ofrece instalada ya en nuestros servidores locales) existen otros productos de software libre que también pueden utilizarse; sin embargo, nuestra opción ha sido apostar por E-ducativa fundamentalmente por los siguientes motivos:

1. Por ser la propuesta institucional: Pensamos que compartir este medio con la mayoría de los centros que se encuentran en nuestras circunstancias nos permite profundizar en la experimentación de este extraordinario software educativo.
2. Por la calidad del producto: tras estudiar otras alternativas de software libre, observamos que la presentación de E-ducativa y las herramientas que este producto ofrece están por encima de las otras plataformas educativas.
3. Por la sencillez de su manejo: Debemos ser conscientes de que un porcentaje elevado del profesorado de los centros se siente bastante inseguro con los ordenadores en el aula; pues bien, E-ducativa es una alternativa asequible y su uso es sumamente intuitivo, por lo que contribuye a que los compañeros y compañeras menos informatizados pierdan el miedo inicial a usar los ordenadores.
4. Por su servicio de asesoramiento técnico: E-ducativa ofrece un excelente servicio de estas características a través de personal altamente cualificado, mientras que para la utilización de otros productos tendríamos que recurrir a los tradicionales foros en la red.
5. Por su adaptabilidad a nuestras experiencias: Desde el principio, la dirección de E-ducativa se brindó a incorporar las aportaciones que se derivaran de nuestra experimentación. Más tarde hemos podido disfrutar de un verdadero trabajo en equipo que hace posible la adaptación de la plataforma educativa a las necesidades reales de los centros de primaria y secundaria andaluces en general, y a cada centro en particular.

Características de nuestra plataforma educativa

La historia de las plataformas educativas es aún reciente, y en su corta vida las plataformas que conocemos, incluyendo E-ducativa, se han orientado fundamentalmente hacia la formación a distancia, es decir, la teleformación.

Sin embargo, a diferencia de los cursos para universitarios, másters, cursos de formación, etc, la enseñanza en nuestros centros es presencial, y nuestros modelos educativos deben fomentar la convivencia entre todos los miembros de la comunidad educativa, y en especial en el aula. Por ello, lejos de correr el riesgo de despersonalizar nuestros mecanismos de enseñanza-aprendizaje, debemos esforzarnos en definir y configurar la plataforma educativa en nuestros centros de manera que nos ayude a potenciar realmente los valores que deseamos inculcar a nuestros jóvenes estudiantes.

La extraordinaria adaptabilidad de E-ducativa hace que su funcionamiento sea totalmente modelable, y para una buena práctica educativa resulta fundamental que los profesionales que dan forma al proyecto educativo de centro, es decir el profesorado, estudie muy bien su enfoque.

Para la configuración de la plataforma en el IES Averroes hemos reflexionado mucho antes de la puesta en escena de nuestro modelo. La primera alternativa que pensamos fue la comentada a priori entre los coordinadores y la coordinadora de los proyectos TIC, que consistía en crear un grupo para cada asignatura de cada profesor/a, es decir, habría un grupo que sería 1ºA ESO-MAT, otro sería 1ºA ESO-LENG, etc. Así saldrían casi 600 grupos en nuestro centro y creímos que se perdería la deseable identificación de cada individuo con sus espacios naturales de convivencia.

Por otro lado pensábamos que si nos limitábamos a crear grupos por aulas (1ºA ESO, 1º B ESO, etc) y compartíamos dicho espacio los/as alumnos/as y profesores/as de dichos grupos, lograríamos desenvolvernos en los espacios naturales, lo cual facilitaría la información y la participación, pero creímos que perderíamos ciertas potencialidades académicas de la plataforma que podrían resultar de interés para al menos una parte del profesorado que se lanzaría ya a utilizarlas. Me refiero a la posibilidad de utilizar guías y lecciones, proponer tareas, visualizar las calificaciones, etc.

Por ello, optamos inicialmente por una solución mixta consistente en definir grupos por aulas, además de naturalmente los propios del profesorado y otros que responden a otras necesidades, y dejar abierta la posibilidad de crear progresivamente grupos con enfoques más academicistas cuando el profesorado los fuera demandando. Estos grupos responderían más bien a una utilización integral y sistemática de los recursos TIC que en general veíamos alejada aún de la realidad actual de un uso más esporádico con tendencia a ser cada vez más frecuente.

Finalmente se animaron ocho profesores y profesoras a la experimentación en grupos profesor/a-asignatura (cada profesor/a ha experimentado en un grupo solamente). Dichos/as compañeros/as nos constituimos en un grupo de trabajo y hemos ido poniendo en común nuestras conclusiones.

Además de los que llamamos grupos naturales de aula y de los ocho grupos experimentales, se crearon grupos para todo el profesorado, departamentos didácticos, AMPA, asociación de alumnos/as, personal no docente, consejo escolar, proyecto de escuela espacio de paz y plan de familia.

Estos grupos han estado administrados por los/as tutores/as, profesores/as implicados/as, jefes/as de departamento y personas responsables de cada colectivo, ayudados por compañeros/as y alumnos/as que se han prestado a esta labor.

El administrador o administradora de cada grupo ha elegido entre los/as usuarios/as de éste, a responsables o colaboradores/as para la gestión de algunas secciones tales como noticias del grupo, calendario o agenda del grupo, etc.

De la administración general de la plataforma educativa (personalización de la plataforma, configuración inicial de cada grupo, alta de usuarios/as, etc) se han encargado el coordinador TIC del centro (Webmaster) y dos profesoras colaboradoras. Debemos comentar que el alta de usuarios/as se ha realizado de forma automática, importándose los datos a partir de ficheros de la base de datos del centro, aunque otra fórmula posible puede ser que cada administrador o administradora se encargue del alta de los usuarios y usuarias de su grupo.

Nuestra plataforma educativa se terminó de configurar durante las vacaciones de Navidad del pasado curso y resultó ser un hito en nuestra andadura y el mejor *"Regalo de Reyes"* en nuestro primer año de aventura TIC, marcando un antes y un después en el desarrollo de nuestro proyecto TIC.

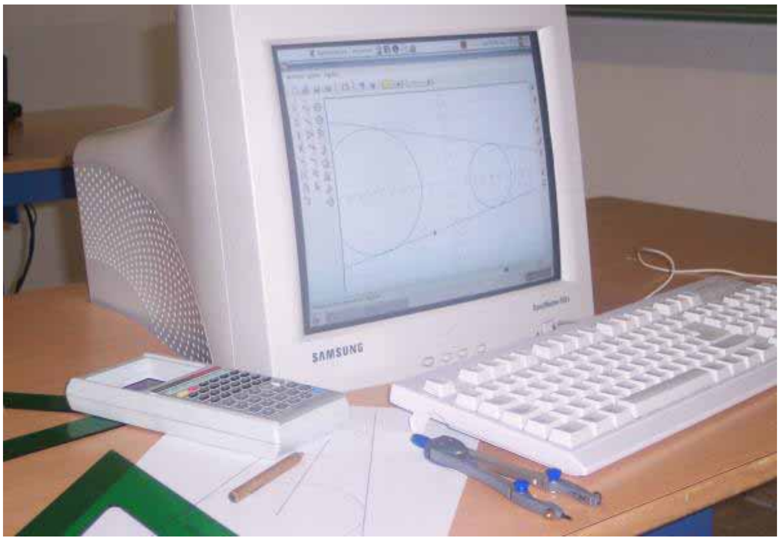
6. Adaptación a los recursos específicos para el área de Matemáticas

> *"No nos atrevemos a emprender muchas cosas porque nos parecen difíciles, pero no porque sean difíciles en sí, sino que nos parecen difíciles porque no nos atrevemos a emprenderlas."*
>
> *Séneca*

Tradicionalmente el profesorado de Matemáticas ha demostrado tener una gran facilidad de adaptación a las nuevas tecnologías, aunque lógicamente existe bastante diversidad de niveles de informatización entre nosotros/as.

En el caso concreto de la experiencia TIC andaluza debemos destacar que el hecho de desarrollarse en un sistema operativo completamente nuevo para casi todos/as, nos coloca en un punto de partida bastante común, salvando las habilidades de adaptación que obviamente tendrán mas desarrolladas los profesores y profesoras que estén más familiarizados con los recursos informáticos.

El profesorado poco diestro en el uso de los ordenadores para nuestra área puede aprovechar el nuevo panorama para comenzar prácticamente desde cero a forjar sus recursos didácticos, mientras que los profesores y profesoras más acostumbrados a las nuevas tecnologías informáticas, también tendrán que realizar un trabajo de adaptación. En cualquier caso, debemos comprender que se nos presenta una oportunidad ideal para trabajar juntos en la construcción de un nuevo universo para el aula de Matemáticas, entendiendo que este proceso debe abordarse con ilusión y sosiego.



Se multiplica el abanico de recursos para el aula

Debemos quitarnos de la cabeza que nos encontramos ante un cambio de chip. No podemos dejar de emplear de golpe la metodología más o menos innovadora a la que estábamos acostumbrados para comenzar ahora a dar nuestras clases con los ordenadores. Seguro que en nuestra práctica diaria utilizábamos un amplio abanico de recursos didácticos; pues bien, ahora podemos y debemos ampliar ese abanico con el enorme potencial que nos brindan los ordenadores y la red.

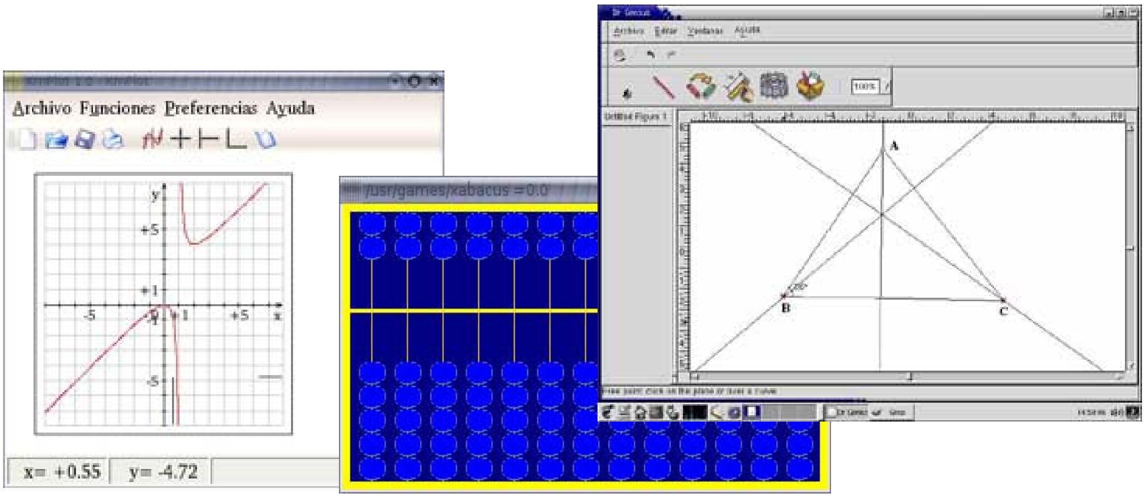
La formación del profesorado de Matemáticas

Se nos plantean las siguientes necesidades formativas:

- Formación básica sobre el sistema informático y la red., común para todo el profesorado del centro. En ella se abordaría el manejo básico del sistema operativo, el conocimiento de las herramientas de Internet con especial atención a sus potencialidades educativas, una introducción a los programas del paquete ofimático OpenOffice, y el conocimiento y manejo de la plataforma educativa.
- El conocimiento de software general para su uso educativo (Impress, Calc, Flash, etc). Esta línea formativa no tiene porque afrontarse, al menos inicialmente, por todo el profesorado. Téngase en cuenta que su interés va dirigido fundamentalmente a la elaboración propia de materiales y no es ésta la cuestión más urgente para el profesorado de Matemáticas, habida cuenta de que existen gran cantidad de materiales de calidad ya

elaborados, y sin duda serán mucho más abundantes en los tiempos que se nos avecinan.

- El conocimiento de software específico para el área de Matemáticas. Nos referimos a los editores de ecuaciones (LaTex, LyX, etc), y a otros programas como KGEO, KmPlot, Dr Genios, Kpercentage, xmaxima, Gmplot, xabacus, y un sinfín de programas que corren en entorno Linux y son unos grandes desconocidos para la mayor parte del profesorado.



Nuevo software de Matemáticas, todo un campo por descubrir

Sin duda no será imprescindible el dominio de todos ellos. Pero sí es aconsejable que desde los departamentos se establezcan los objetivos mínimos en cuanto a manejo de software para el alumnado, y por supuesto el profesorado debe estar a la altura de las circunstancias. No solo tenemos ya calculadoras de 15 ó 17 pulgadas sobre las mesas; disponemos de mucho más que eso, con todo el potencial didáctico que ello conlleva.

Ante esta realidad de necesidad de formación corremos el peligro de sentirnos agobiados. Pues bien, debemos alejar por completo ese desasosiego. Está claro que poco a poco, con buen gusto e ilusión, se irán asimilando todos los conocimientos que nos vayamos proponiendo. Lo verdaderamente importante es que vayamos descubriendo y poniendo en práctica con nuestros alumnos y alumnas las bondades de nos nuevos recursos.

En cuanto a la metodología de aprendizaje, no solo ha de ser el curso de formación presencial o a distancia la única fórmula. Sin duda los grupos de trabajo son una alternativa extraordinaria para un aprendizaje en grupo que suele responder a intereses comunes dejando frutos muy valiosos para nuestro trabajo en el aula.

El Cajón Matemático, grupo de trabajo para un proyecto de elaboración de material para el aula de Matemáticas

La coordinación de recursos de Matemáticas

La mayoría de nosotros carecíamos de recursos informáticos para el aula y los que disponíamos de algunos materiales y/o direcciones de Internet con recursos no nos habíamos empleado a fondo en su adaptación a nuestras programaciones de aula, conscientes de la imposibilidad o la dificultad, en el mejor de los casos, de utilizarlos.

La búsqueda de recursos TIC de nuestra área para su uso en el aula se plantea pues como una tarea primordial en la que el trabajo en equipo puede producir un efecto multiplicador.

En esta labor, el papel del coordinador o coordinadora de recursos del departamento de Matemáticas es fundamental, debiendo ser capaz de repartir las tareas a las que antes hacíamos referencia, coordinándolas y organizándolas para que todos/as nos sintamos protagonistas activos de este proceso constructivo y podamos disfrutar desde el primer momento del trabajo de equipo que vayamos realizando.

Tanto la metodología de trabajo como la organización y clasificación de los recursos puedes realizarse de manera muy diversa, pero es conveniente que ésta se establezca claramente para que no haya dispersión.

Los principales elementos de que disponemos para organizar los recursos son los siguientes:

- **El ordenador del departamento**, que está alojado en la red del profesorado a la que lógicamente no tienen acceso los alumnos y alumnas. En su disco duro local conviene crear una buena estructura organizativa (por niveles, bloques temáticos, tipos de materiales, etc), que a todos nos parezca asequible y funcional.

Hemos de comentar que hoy por hoy, no estando habilitada la conexión ssh en la intranet del centro, no resulta inmediata la transferencia de información a través de la red y menos aún entre redes independientes, como la del profesorado y la del alumnado. No obstante, ese flujo de información puede conseguirse a través de las alternativas que citamos a continuación.

- **El servidor local del centro**. Tampoco de momento podemos controlarlo al no disponer de la correspondiente clave de superusuario, si bien se están formulando continuamente propuestas en este sentido que supongo que irán modelando el marco de funcionamiento futuro de nuestras experiencias.

Como alternativa a estas limitaciones, en algunos centros hemos solicitado la instalación local de contenidos con servicio ftp, que permite entre otras potencialidades, la organización de recursos por departamentos o áreas.

Nuestra propuesta general de trabajo en el centro consiste en que cada departamento didáctico dispone de un espacio en el servidor, al que sistemáticamente sube la estructura que tiene establecida en el disco duro del ordenador de departamento. Al este servidor sí se puede acceder desde todos los ordenadores de nuestra red.

- **La plataforma educativa**, que nosotros concebimos como el medio ideal para el desarrollo de toda la actividad educativa y formativa en el aula.

Sería extenso explicar la estructura de grupos de nuestra plataforma; básicamente, digamos que los grupos más importantes son los grupos de aula. En ellos se desarrolla la actividad académica y por tanto cada profesor o profesora goza en estos espacios virtuales de una sencilla pero potente estructura donde puede colocar los materiales que va a utilizar con sus alumnos y alumnas. Esta estructura permite que el trabajo del profesor o profesora pueda ser más o menos sistemático. Es decir, un profesor o profesora podrá limitarse a colocar un enlace o una unidad didáctica para usarlos de manera puntual en su clase, pero también tendrá la posibilidad de desarrollar toda una guía didáctica, con materiales para su propuesta, tareas, etc.

En cualquier caso, debemos entender los grupos de aula como espacios donde los materiales no van a estar de manera permanente. Todo lo más se guardarán durante el curso.

Otros grupos importantes son los propios de los departamentos didácticos. Estos sí son más estables, si bien, tampoco son considerados un verdadero repositorio local, cuya función pertenece al servidor local. Los grupos de los departamentos son espacios para la información y la comunicación entre los miembros del departamento y donde también compartimos materiales.

- **El repositorio global de contenidos**, que aún no existe como tal, aunque es un compromiso adquirido de nuestra dirección general. Promete ser un espacio compartido para todo el profesorado andaluz, donde podrán organizarse los recursos de las diferentes áreas de conocimiento.

Entre los recursos que el profesorado debe investigar para su análisis, organización e implementación en el aula podemos distinguir varios tipos:

- Recursos de amplio espectro: unidades didácticas (Proyecto Descartes, Libros Vivos, etc), libros electrónicos (www.deberesmatematicas.com), etc. Este tipo de materiales pueden ser de gran utilidad para el profesorado que se sienta menos seguro ante el uso de los nuevos recursos.
- Herramientas para el aula: calculadoras, geoplanos, tamgrans, pentominós, ábacos, etc; unas alternativas potentes que de forma virtual tendremos podemos tener siempre al alcance de la mano.
- Actividades para el aula: webquests, cazas del tesoro, prácticas de laboratorio de Matemáticas, colecciones de problemas, etc; valiosas alternativas para la profundización en nuestra tarea formadora.
- Recursos ambientales sobre Historia de las Matemáticas, Naturaleza, Arte y Matemáticas, Divertimentos Matemáticos, etc, que nos ayudarán a incrementar el buen gusto por nuestra asignatura, facilitando además la ambientación de espacios virtuales.
- Documentación sobre software, un aspecto muy necesario para la buena utilización didáctica y metodológica de las aplicaciones que tenemos a nuestro alcance.

En definitiva, se nos presenta un conjunto de tareas por delante que, lejos de amedrentarnos, debe aliñar nuestro quehacer diario con una buena dosis de esperanza y de ilusión, dos ingredientes fundamentales para el ejercicio de nuestra tarea docente.

Bibliografía

- Bracho R., Luque C. y España F: Introducción al uso de las TIC en un centro educativo. Ed. CEJA – CP Luisa Revuelta de Córdoba (publicado en formato CD y disponible en Internet: http://www.pspain.net/guadalinex/). Córdoba 2004.
- Bracho R. Y Carrillo De Albornoz A: Matemáticas en un centro TIC. XI CEAM organizado por la SAEM THALES. Huelva 2004. ISBN: 84-933040-6-9.
- Bracho R., Luque C. Y España F (2003): Introducción al manejo Guadalinex-EDU. Ed. CEJA – CP Luisa Revuelta de Córdoba (publicado en formato CD y disponible en Internet: http://www.cepcordoba.org/curso_guadalinex/). Córdoba 2003.
- Bracho, R. y otros, "El Cajón Matemático" publicado en el nº 6 de RED DIGITAL, Revista Tecnologías de la Información y Comunicación Educativas del MEC (acceso al material). ISSN: 1696-0823.
- Bracho, R., "Innovación tecnológica y educativa en el marco de la aventura TIC andaluza: La experiencia del IES Averroes" publicado en mayo de 2006, en el número II de e-CO, Revista Digital de Educación y Formación del Profesorado del CEP de Córdoba. ISSN 1697-9745.
- Bracho, R., "Una aventura TIC para un proyecto educativo de centro" publicado en febrero de 2006, en el nº 53 de la revista Andalucía Educativa , editada por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.
- Bracho, R., "Experiencia en el ámbito educativo: Resultados positivos en la incorporación de las TIC en las aulas" , entrevista publicada en julio de 2006 en el nº 13 de la revista argentina LearningReview , de amplia difusión en Iberoamérica y España (publicación en formato papel).

Rafael Bracho López, coordinador TIC del IES Averroes de Córdoba. Vicepresidente de la SAEM THALES**.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 73-82
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Una herramienta emergente de la Web 2.0: la wiki. Reflexión sobre sus usos educativos

Monsalud del Moral Villalta

Resumen

El desarrollo actual de la innovación digital nos ha llevado a una fase comunal en la que se conjugan los comienzos altruistas de Internet con las aspiraciones más ambiciosas. En este nuevo e interesante contexto parece inevitable redefinir y replantearse una serie de cosas, entre las cuales se encuentra la enseñanza y el aprendizaje. Una wiki es una de las herramientas de esta Web 2.0 que puede dar un nuevo significado a los términos *aprendizaje colaborativo* y *curriculum centrado en el aprendiz*. Las llamadas *granjas de wikis* ofrecen la posibilidad de crear una wiki a cualquier enseñante que se encuentre a este lado de la brecha digital. Ya han pasado unos años desde que en marzo de 1995 Ward Cunningham publicase en la web la primera wiki, desde entonces han evolucionado hacia formas más fáciles de usar por los no-expertos y presentan hoy en día un potencial que es seguro que está aún por descubrir.

Abstract

The development of digital innovation has led us to a communal stage where the altruistic beginnings of the internet coexist with its most powerful aspirations. In this new and exciting context we need to redefine and rethink many things, among which we focus on teaching and learning here. A wiki is one of the Web 2.0 tools which may give a new meaning to the terms *collaborative learning* and *learner-centred curriculum. Wiki farms* now offer the possibility to create a wiki to any teacher on the 'sunny' side of the so-called digital divide. After some years since Ward Cunningham's first wiki came online in March 1995, wikis have now evolved to become more user-friendly and to offer a potential which is surely yet to be fully discovered.

Please, grant me the serenity to accept the pages I cannot edit,
The courage to edit the pages I can,
And the wisdom to know the difference
—The Wiki Prayer[1]

(Por favor, concédeme la serenidad para aceptar las páginas que no pueda editar,
El valor para editar las páginas que pueda,
Y la sabiduría para ver la diferencia)
—La Oración Wiki

[1] The WikiWikiWeb, The „Wiki Prayer“, http://c2.com/cgi/wiki?WikiPrayer, 27.08.2003

Monsalud del Moral Villalta

1. Qué es y cómo funciona una wiki

La palabra wiki procede del idioma hawaiano y significa rápido, la elección del término por Cunningham no es casual: mientras que otros términos al uso a veces nos resultan indescifrables, el término wiki es mucho mas cercano y corto.

Una wiki es aparentemente una página web más, la diferencia estriba en que permite a quienes la usan editar o alterar su contenido, añadir imágenes, vídeos -o podcasts. No es nueva la posibilidad de editar una página web, lo que sí es diferente es que esta edición no esté hecha por especialistas en nuevas tecnologías. En una wiki se refleja una visión de la web que rompe las tradicionales barreras entre lectores y autores de recursos de internet.

A partir de aquí, resulta difícil hablar de las wikis como si se tratara de una sola cosa. Se aplica este término a una serie de sistemas, características, proyectos y teorías diversos, y entre los expertos no hay acuerdo sobre lo que es en esencia una wiki. Sin embargo hay una serie de rasgos que toda wiki comparte y que serían los siguientes[2]:

Cualquiera puede cambiar cualquier cosa. La rapidez inherente a toda wiki proviene del hecho de que los procesos de lectura y edición están combinados. En una wiki aparecerá siempre un enlace en la página que dirá 'Editar texto de esta página' o algo parecido. Pulsar sobre ese enlace permitirá revisar instantáneamente el texto. No se requiere ni software de autor, ni permisos ni contraseñas, normalmente.

Las wikis usan marcadores de hipertexto simplificados, o mas modernamente editores visuales del texto. En el primer caso, las wikis tienen su propio lenguaje de marcadores que simplifica al extremo el lenguaje HTML, con lo cual los nuevos usuarios deberán aprender unas cuantas etiquetas de formato.

LosTítulosDeUnaPáginaWikiEstánUnidos. Los títulos de una wiki prescinden de los espacios para dar rapidez a la creación de la página y para proporcionar enlaces entre las páginas de una wiki automáticos y libres de marcadores. Esto es lo que se conoce como CamelCase o WikiWord.

El contenido está permanentemente en construcción y se prescinde del ego. El anonimato es bastante frecuente. Al estar la edición abierta, una página puede tener múltiples colaboradores, por tanto las nociones de autoría y propiedad quedan radicalmente modificadas.

A diferencia de los blogs, las wikis rara vez están organizadas cronológicamente. Por el contrario, se organizan por el contenido y el contexto,

[2] Various authors, "Elements of Wiki Essence," WikiWikiWeb, <http://c2.com/cgi/wiki?ElementsOfWikiEssence>

alrededor de las ideas y conceptos que van surgiendo y suelen estar en un estado de permanente flujo. Las entradas están normalmente incompletas o no revisadas, y los autores puede que dejen deliberadamente huecos esperando que alguien los rellene posteriormente.

Edición Mashup. Este concepto de difícil traducción que es la esencia de un espacio wiki se refiere a la combinación de contenidos procedentes de varias fuentes sin que se puedan detectar las 'costuras'

Hay muchas excepciones a cada una de estas características. Se trata de un continuum en un extremo del cual está la apertura radical y la sencillez de la primera wiki, inventada por Ward Cunningham: la WikiWikiWeb[3], lanzada en 1995 y aún hoy meritoriamente fiel a su visión minimalista. Pero a medida en que su uso ha ido creciendo en popularidad y se ha extendido a otros ámbitos que abarcan incluso el mundo de los negocios, en donde se emplea como fórmula de gestión, hay gran cantidad de sistemas wiki que añaden características tales como el acceso restringido, espacios privados, organización jerárquica, edición web WYSIWYG[4] y hasta integración en sistemas centralizados de gestión de contenidos, algunas de estas evoluciones como son los espacios privados o el acceso restringido, es claro que nos la hacen mas utilizable como herramienta pedagógica. En este extremo mas estructurado y cargado de 'añadidos', hay quienes, aplicando el concepto de wiki estricto y fiel a los principios que le dieron origen, ya no hablaría de wikis sino de herramientas de autor HTML basadas en la red.

Actualmente, la wiki más grande que existe es la versión en inglés de Wikipedia, seguida por varias versiones del proyecto en otros idiomas. Las demás son mucho más pequeñas, y mucho más especializadas. Por ejemplo, es muy frecuente la creación de wikis para proveer de documentación a programas informáticos.

Las llamadas granjas de wikis o 'wikifarms' son servidores o grupos de servidores que ofrecen la posibilidad de alojar wikis de diferentes características. En el momento de redactarse este artículo, la Wikipedia ofrece un interesante estudio comparativo de 42 wikifarms[5]. De entre todas estas ofertas, Wikispaces está actualmente ofreciendo la posibilidad de alojar gratuitamente y libre de publicidad una wiki dirigida a enseñanza secundaria (K-12) hasta llegar a las 100.000, actualmente van por 22.840. Otros espacios wiki especialmente adecuados para usos educativos pueden ser los ofrecidos por Wetpaint o Pbwikies.

---

[3] http://c2.com/cgi-bin/wiki

[4] what you see is what you get', que podría traducirse libremente por 'lo que se ve es lo que hay' o mas libremente aún 'sin trampa ni cartón'

[5] Estudio comparativo de 42 wikifarms http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_wiki_farms

Monsalud del Moral Villalta

Hacer lo simple complicado es cosa frecuente;
hacer lo complicado simple,
'impresionantemente' simple,
eso es creatividad.
Charles Mingus, músico de jazz

2. Blog vs wiki

Como ya se apuntaba más arriba, la primera wiki apareció en la web en marzo de 1995, mientras que los primeros blogs no lo hicieron hasta 1997 (en diciembre, John Barger utilizo el término weblog por primera vez). Tanto blogs como wikis son ejemplos de trabajo colaborativo.

Sin embargo,un blog tiende a ser menos colaborativo, mas personal, se trata en origen de un diario, así que se parece más a un monólogo al que los colaboradores añaden sus comentarios. El administrador dirige y controla las entradas, o quién está autorizado a hacerlas. El texto es más estático, se corresponde a pensamientos inmediatos, se supone que las entradas no cambian mucho, y se tiende a largos 'scrolls' secuenciales ordenados cronológicamente. Si bien este último aspecto es matizable con la inclusión de etiquetas y la posibilidad de ver todas las entradas y comentarios correspondientes a cada etiqueta.

Los enlaces están dirigidos a conectar con el exterior del blog.

Una wiki puede ser personal, pero va a estar siempre abierta a colaboraciones. La finalidad es la creación compartida de documentos (tanto de páginas individuales como de la wiki entera). El texto cambia porque va desarrollándose y expandiéndose con las diferentes colaboraciones, pero no se trata de un cambio lineal, sólo marcado por el paso del tiempo. Los cambios quedan registrados en el historial. Y los enlaces pueden conectar con el exterior de la wiki pero también con otras páginas del sistema o con diferentes partes de la propia página.

Hoy en dia, la evolución de wikis y blogs con sus respectivas extensiones y mejoras, ha llegado a tal punto que puede parecer difícil distinguirlos, ya que han se han ido añadiendo a blogs características que podrían acercarlos a las wikis (como por ejemplo la posibilidad de añadir etiquetas para organizar las entradas no cronológicamente sino por contenido), y las wikis a su vez han adoptado rasgos de los blogs, como podría detectarse en la incorporación de ciertos elementos de diseño visual ausentes en los orígenes. Otra diferencia que casi ha dejado de serlo con el tiempo es la cuestión del acceso. Hoy en día encontramos la posibilidad de diferentes niveles de acceso que van desde el abierto totalmente para lectura y colaboración a cualquier usuario hasta el restringido tanto para lectura como para publicación a quienes el administrador decida, y esta gama se nos presenta tanto en blogs como en wikis.

Marcando los rasgos que distinguen a ambas herramientas y que persisten en el tiempo, habría que decir que, siendo el entorno de una wiki mas versátil y amplio, se puede hacer un blog desde una wiki, pero lo contrario no es posible. Además en el origen de los respectivos diseños se marca una distancia esencial: mientras que las wikis dan prioridad al contenido sobre la forma, que ocupa un papel secundario, en los blogs la organización temporal predomina sobre el contenido.

Por último y como es conocido, los blogs han alcanzado una popularidad y su uso está tan generalizado hoy en dia que es difícil encontrar un internauta que no tenga o contribuya regularmente en uno o varios blogs. No ocurre lo mismo con las wikis, al menos de momento, sin embargo, y como se ve a continuación, su uso en el aula presenta un potencial difícilmente igualable.

Si tienes una manzana y yo tengo otra y las intercambiamos, entonces tu y yo seguiremos teniendo cada uno una manzana. Pero si tienes una idea y yo tengo otra y las intercambiamos, entonces cada uno tendrá dos ideas

George Bernard Shaw, Premio Nobel de Literatura

3. Las wikis en el aula

Probablemente estemos ante la herramienta web de colaboración mas fácil de usar y más efectiva en términos educativos. Cuenta a su favor con la sencillez, proporciona a los alumnos un acceso inmediato al contenido del sitio, lo cual es esencial cuando se trata de editar en grupo, o de acometer cualquier otro proyecto colaborativo.

La facilidad para rastrear las diferentes aportaciones presentan la ventaja de mostrar quien administra la wiki, la evolución de los procesos a medida que los alumnos interaccionan con el sitio y sus contenidos.

Estos proyectos colaborativos proporcionan un importante componente motivador: los alumnos se convierten en ‘autores’ de un contenido que está en la red. Al mismo tiempo, las wikis son utilizables como portafolios electrónicos, es decir, herramientas para recoger las producciones del alumnado y reflexionar sobre ellas.

La colaboración en wikis no está limitada al alumnado. Los profesores pueden colaborar en proyectos como pueden ser la edición de un libro de texto, colaborar en la programación de la asignatura, etc.

En realidad, las posibilidades de uso de las wikis como plataforma para actividades colaborativas no están limitadas más que por la imaginación y el tiempo.

Con respecto a la edición, es conveniente conocer que esta puede estar totalmente abierta, restringida a los miembros de la wiki, invitados por el/la administrador/a, o incluso sólo a quien la administre. La posibilidad de ver una wiki también puede estar abierta a restringida a sus componentes.

Los permisos, el añadir o quitar miembros o la posibilidad de bloquear páginas son armas en manos del administrador/a para guiar es espacio wiki, monitorizar las colaboraciones y en definitiva potenciar la experiencia educativa.

A continuación se relacionan algunos de los posibles usos de las wikis en el aula:

- Resúmenes/Esquemas de lo tratado en la clase
- Colaboración en las notas o apuntes tomados en clase
- Introducción de conceptos
- Desarrollo de proyectos
- Compartir lo aprendido
- Evaluación individual
- Organización de la clase

El proceso por el que se llega a los usos anteriores –y a otros posibles- presenta las siguientes características:

La facilidad y sencillez en la edición hace desaparecer los obstáculos formales y por tanto se puede dedicar mas tiempo a desarrollar contenidos, ya que el procedimiento para insertar imágenes, crear enlaces o editar el texto es fácil de dominar.

Cualquier contribución puede ser revisada por los demás conforme se va construyendo, eso permite ver en todo momento cómo va progresando el trabajo, se pueden hacer sugerencias o reconducir el trabajo.

Las contribuciones quedan visibles en el historial y pueden ser rastreadas por alumnado y profesor que podrán observar la evolución del trabajo individual y del grupo en todo momento y añadir comentarios durante el proceso en lugar de hacerlo sólo sobre la versión final, por tanto…

La autoría es compartida por el grupo. Esto tiene la consecuencia añadida de reforzar el sentido de pertenencia a un grupo con todo lo que ello conlleva, ayuda a que miembros de grupo con ideas similares o que se solapan vean y construyan colaborando sobre las mutuas aportaciones y por supuesto proporciona acceso inmediato a todos a la versión más reciente de la wiki.

Uno de los procedimientos que se suelen adoptar es el destinar un espacio a cada uno de los que colaboran en la wiki, en el cual se puedan ver las aportaciones personales, y otro espacio destinado al trabajo de grupo. El espacio común permite ver cómo se desarrolla la colaboración, mientras que el espacio individual ofrece la posibilidad de rastrear la aportación personal de cada miembro, al mismo tiempo que da al profesor un sitio donde dejar sus sugerencias para cada estudiante. Incluso se puede restringir el acceso a esas páginas individuales sólo al estudiante y al profesor.

A continuación me permito reproducir algunas sugerencias para wikis matemáticas[6]:

- Una wiki de cálculo para problemas 'largos y complicados' que toda una clase puede colaborar a resolver.
- Una wiki de geometría en la que los alumnos compartan y vean las diferentes formas de aproximarse a un problema.
- Wiki de matemáticas aplicadas: los alumnos escriben e ilustran situaciones en las que utilizaron las matemáticas para resolver un problema.
- Wiki 'procedimental': los grupos explican los pasos de un procedimiento matemático, por ejemplo el de convertir un decimal en una fracción.
- Wiki de números: los alumnos ilustran los números de tantas maneras como sea posible: como gráficos para contar, como expresiones matemáticas, etc.

Para terminar, la evaluación del trabajo en una wiki cuya cuota dentro de la evaluación general de la asignatura puede valorarse porcentualmente (10% a 20% es lo usual), podría organizarse en torno a los siguientes criterios[7]:

- Esfuerzo colaborativo
- Atractivo visual de la aportación
- Organización
- Enlaces
- Originalidad y contenido mas o menos 'inteligente' de las contribuciones
- Ortografía, gramática, puntuación…
- Finalización de la/s tarea/s asignadas

Nadie puede parar una idea cuyo tiempo ha llegado
Victor Hugo

[6] Ideas for wikis in math http://www.teachersfirst.com/content/wiki/wikiideas1.cfm

[7] Idea procedente del blog Cool Cat Teacher, de Vicky A. Davies, entrada del 25 de Febrero de 2007 "Wikis in the classroom"

4. Posibles problemas y algunas soluciones

El vandalismo en el contexto de una wiki consistiría en hacer ediciones que borran contenido importante, introducen errores, agregan contenido inapropiado u ofensivo o, simplemente, incumplen flagrantemente las normas del wiki. Esta cuestión, en el aula quedaría resuelta utilizando una wiki con acceso restringido. Si a esto se le une el hecho de que todas las contribuciones quedan registradas en un historial y son rastreables, este problema puede quedar neutralizado.

Un segundo problema podría ser el riesgo de 'perderse' entre tantas opciones y posibilidades. Como ocurre en la red y en las wikis particularmente, es esencial fijarse unas expectativas simples y claras para comenzar. Todo debe estar bien planificado desde el principio. Un recurso muy útil en este sentido es la inclusión de dos páginas que suelen aparecer en toda wiki educativa dedicadas a: reglas de uso por un lado y a la forma de utilizar la wiki por otro. Estas páginas, que, una vez redactadas pueden bloquearse, supondrán una referencia constante a la que el alumnado podrá recurrir en todo momento para solucionar los problemas o dudas con la edición y para consultar qué es lo que se espera que hagan en la wiki. Por lo demás, el uso del sentido común nos llevaría a recomendar aportaciones cortas, a comunicarnos aprovechando la mensajería interna de la wiki o el apartado de discusión, a consultar frecuentemente el historial y a actualizar, y recomendar que se actualice siempre antes de editar.

En tercer lugar mencionaré el problema del plagio y los derechos de autor tan presente en la red y especialmente en los espacios wiki. Los conceptos de propiedad y de autoría se ven radicalmente alterados. La clonación de contenidos en las wikis debería evitarse en educación, intentando siempre incluir la procedencia del contenido, idea, imagen, etc. que se aporta.

El trabajar con wikis en el aula requiere que el profesorado renuncie a la idea de tener el control total de lo que pasa en el aula. Como ya queda aclarado, el control existe pero es mas bien una monitorización de todo el proceso, para la cual se cuenta con las notificaciones (RSS feed) que se recibirán en el correo de cualquier aportación a la wiki, y todos los demás 'privilegios' que como administrador/a se tienen sobre los permisos y el bloqueo de páginas. En todo caso, para que funcionen como recurso educativo tiene que existir confianza en el alumnado y se debe de partir de la tolerancia hacia un cierto nivel de 'caos'.

En definitiva, aceptando que el gran reto educativo en cualquier disciplina hoy en día puede situarse en torno a la necesidad de conseguir que todas estas máquinas, que parecen haberse convertido en apéndices de nuestras extremidades –especialmente de las de nuestro alumnado- se conviertan igualmente en 'prolongaciones' de nuestra mente, en posibilidades casi infinitas para desarrollar capacidades o para difundir e integrar conocimientos y habilidades. En este escenario es probable que los espacios wiki jueguen un papel protagonista en el futuro.

Bibliografia

- David Mattison, "Quickwiki, Swiki, Twiki, Zwiki and the Plone Wars – Wiki as PIM and Collaborative Content Tool", In: Searcher: The Magazine for Database Professionals, Volume 11, Number 4, April 2003, page 32.
- Brian Lamb, "Wide Open Spaces: Wikis, Ready or Not" , in Educause Review, vol. 39, no. 5 (September/October 2004): 36–48.
- Cunningham, Ward; Leuf, Bo. (2001)The Wiki Way, Addison-Wesley Professional
- Richardson, Will,(2006) Blogs, Wikis, Podcasts, and Other Powerful Web Tools for Classrooms, Corwin Press

Webgrafía

(Las referencias y enlaces que se ofrecen estaban activos en el momento de enviarse este artículo el 7 de marzo de 2007)

- 7 cosas que se deberían saber sobre los espacios wiki
  http://www.educause.edu/ir/library/pdf/ELI7004.pdf
- La 'primera' wiki
  http://c2.com/cgi-bin/wiki
- Wiki sobre la utilización de videos en matemáticas
  http://k12wiki.wikispaces.com/Effective+Math+Videos
- Usos educativos wikis
  http://www.wikiineducation.com/display/ikiw/Home
- Las wikis en educación
  http://www.ikiw.org/stewart

Calculadoras, hojas de cálculo y web 2.0

Calcoolate: proporciona a los usuarios una calculadora simple con un soporte expresivo avanzado, funciones matemáticas e historial para ver cálculos anteriores

Calcr similar al anterior, se trata de una calculadora basada en la red con expresión matemática y soporte de funciones así como historial y un diseño minimalista

Create a Graph es una herramienta gratuita ofrecida por 'Students' classroom que pretende facilitar al alumnado la creación de gráficos de barras, de líneas, de área, de 'tarta' y de puntos. La navegación es fácil de entender con un 'interface' visual para añadir los datos y personalizar los gráficos

e-Tutor Graphing Calculator: calculadora gráfica avanzada que permite al alumnado introducir una o mas ecuaciones y visualizarlas con indicadores de posición/intersección y función de zoom

Hojas de cálculo

Google Spreadsheets: Para crear, guardar y compartir hojas de cálculo en la red. Incluye edición en tiempo real y 'chat' con otros así como opciones de importar y exportar.

EditGrid: Esta hoja de cálculo presenta actualización en tiempo real y posibilidad de colaboración. Proporciona más de 500 funciones, incluyendo actualización remota de datos, control de acceso y más.

iRows: Crear y compartir hojas de cálculo en línea, crear diagramas, incluye información dinámica y posibilidad de subir y guardar archivos Excel, CSV y OpenDocument

Zoho Sheet: Es una alternativa a las aplicaciones tradicionales de las hojas de cálculo como MSExcel o OpenOffice Calc. Proporciona las funcionalidades básicas de las hojas de cálculo junto con características de la web social tales como compartir, etiquetas, publicación y más.

Num Sum Posiblemente el primer servicio de hoja de cálculo que las convierte en 'sociales' al permitir que sus usuarios las etiqueten y compartan con otros.

ThinkFree Calc: Aplicación de hoja de cálculo basada en Java que tiene la apariencia visual de Microsoft Excel. Los usuarios pueden compartir sus hojas de cálculo y trabajar en ellas colaborativamente en línea.

Numbler: Solución simple de hojas de cálculo en línea con una gran edición en línea en tiempo real y opción de 'chat' con usuarios múltiples. Una interfaz limpia y agradable aunque no tan llena de posibilidades como alguna de las otras opciones.

Monsalud del Moral Villalta es actualmente profesora de secundaria de Inglés en Andujar, Jaén, España. Es Licenciada en Filología Inglesa por la Universidad de Granada. Sus áreas de interés incluyen las lenguas extranjeras, la enseñanza y las nuevas tecnologías.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 83-99
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte

José Antonio Mora Sánchez

Resumen

Este artículo utiliza el software de Geometría Dinámica para el análisis de obras de arte. A la capacidad de este tipo de software para generar figuras en movimiento y diseños interactivos, se amplia ahora la posibilidad de colocar una imagen en la pantalla de dibujo para estudiarla, marcar líneas y polígonos, trazar paralelas y perpendiculares, medir y realizar transformaciones para observar pautas, simetrías y relaciones. Esto permite conectar dos áreas de conocimiento que en muchos momentos de la historia han ido unidas: el arte y las matemáticas, y que esa conexión esté al alcance de los estudiantes. En palabras de Alberto Durero: *las matemáticas, las más precisas lógicas y gráficamente constructivas de todas las ciencias, deben ser un ingrediente importante del arte.*

Abstract

This article uses the Dynamic Geometry software in order to analyse the works of art .Until this moment, this kind of software had the ability to create figures in motion and interactive designs, but now, so as to examine guidelines, symmetries and proportions, there is also the possibility to study an image placed on the drawing screen, to mark lines and polygons, to draw parallel and perpendicular lines and to measure and transform. This process allows the connection of two knowledge areas that have been together many times in the history, which are: art and mathematics. This connection can also be operated by students. Quoted from Alberto Durero: *"mathematics, the most accurately, logically and graphically constructive science, should be an important ingredient of art".*

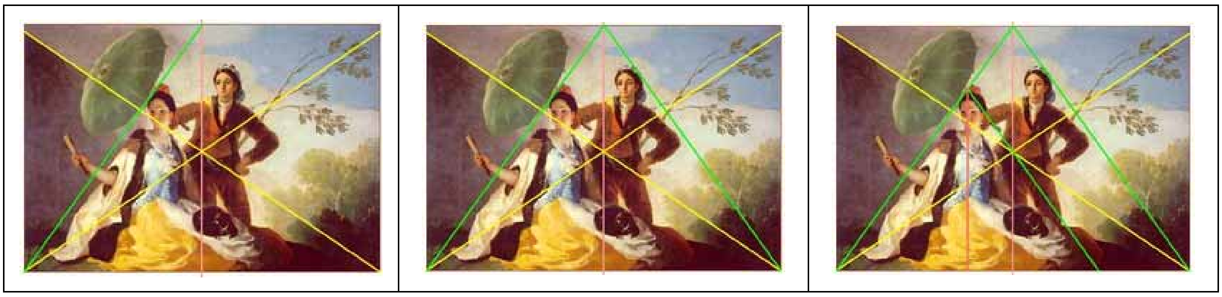
Introducción

En la página de Internet *Geometría Dinámica y Calculadoras Gráficas en Matemáticas* –http://jmora7.com/ -, se pueden revisar antecedentes de este nuevo trabajo dedicado a las obras de arte. Allí se exponen algunas muestras del uso de la geometría dinámica para la creación de figuras animadas e interactivas en campos diversos como el estudio de los mosaicos en la Alhambra -*La Mitad del Cuadrado*-, el diseño de poliedros -*Construcción de un Omnipoliedro*-, la utilización de los mecanismos en la tecnología –*Geometría y Mecanismos*-, y también las mismas matemáticas –*Coordenadas con Cabri II*-. El objetivo de todos estos trabajos es establecer relaciones entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento, pero estas conexiones no sólo se encuentran en conceptos implicados, sino que también aparecen en los métodos que se utilizan y además suponen el establecimiento de lazos afectivos para los alumnos que aprenden matemáticas. Si los conocimientos se desarrollan en un contexto conocido y agradable para el alumno, el lógico que también mejore su rendimiento en los contenidos geométricos.

El análisis que se realiza de cada obra vendría a suponer el proceso inverso al realizado por el artista: si él reúne, organiza y distribuye los elementos, las formas y los colores para componer la obra, nosotros haremos lo contrario, diseccionaremos su obra en la búsqueda de una idea inicial que, conscientemente o no, el artista tenía en su mente previamente y después ha ido evolucionando durante su realización. Con ello pretendemos acercarnos al tipo de conocimientos y técnicas que disponía y sus intenciones. Los esquemas geométricos realizados parten de los estudios de Capdevila (1992) y Bouleau (1996).

Se han seleccionado algunos cuadros que utilizan diferentes polígonos para componer la estructura: el triángulo (Goya y Rafael), el cuadrado (Ghirlandaio), el hexágono (P. de la Francesca), el rectángulo (Velázquez y Seurat) o el círculo (TIziano). Es un conjunto de obras de distintas épocas y estilos a las que aplicamos modernas técnicas informáticas que permiten sacar a la luz lo que C. Bouleau llama *la geometría secreta de los pintores*, en un futuro se ampliará este tipo análisis a otros autores, con el objetivo de profundizar en el trabajo de artistas y matemáticos que han querido ver reflejada en las obras de arte su pasión por las matemáticas. Y esto no debe extrañarnos porque los matemáticos solemos pensar en nuestra tarea en términos en cierto modo artísticos, hablamos de la belleza de los razonamientos, buscamos que nuestras ideas se puedan trasladar y transformar para ocuparse de situaciones semejantes y nos fascina cuando encontramos la periodicidad o la simetría en nuestros modelos de la realidad.

El procedimiento seguido para mostrar los elementos geométricos se plantea como una secuencia de seis pasos que desvela progresivamente la estructura de la obra, en cada uno se muestran nuevas líneas y figuras. Está diseñado mediante un applet java que dispone de una especie de "mando" a la derecha que se sube y baja haciendo de interruptor para que aparezcan los trazos que se superponen a la imagen del cuadro y a los dibujos realizados anteriormente. Lo veremos en una secuencia de imágenes realizada sobre *El quitasol* de Goya. Las explicaciones a las líneas las veremos más adelante como el primero de los cuadros analizados.



Cada salto de la imagen hace aparecer un nuevo elemento que desvela una posible idea geométrica del pintor. Después de este estudio ya no veremos la obra de la misma forma en que lo hacíamos antes, cada nuevo conocimiento que adquirimos sobre el cuadro hace que cambie nuestra relación con él: el muro de la izquierda que antes podía pasar más desapercibido, ahora se hace más patente, la rama de la derecha ya no está puesta al azar, su presencia cumple un objetivo, el de equilibrar las zonas superior derecha e izquierda del cuadro y las formas triangulares llevan nuestra mirada hacia los personajes.

Los diseños se hicieron inicialmente con el programa Cabri II. La aparición de la versión plus ofrece la posibilidad de introducir un archivo de imagen y colocarlo en la zona de dibujo insertado dentro de un rectángulo que sirve de sistema de referencia para añadir puntos y trazar líneas. El problema de Cabri en las fechas en que se escribe este artículo –octubre de 2006-, es que todavía no ha resuelto la exportación de archivos hacia applets java insertados en una página web y esto es una dificultad grande en un trabajo de este tipo porque obliga al lector a disponer del programa en su ordenador y tener unas nociones mínimas de su manejo, mientras que el applet se puede abrir en cualquier ordenador que disponga de un navegador y la manipulación no requiere de conocimientos previos.

Este inconveniente ya lo ha resuelto Geogebra, un gran programa de geometría dinámica con la ventaja añadida de ser de código libre. Los puntos de partida de estos dos programas son diferentes: Cabri es un programa de geometría que podríamos llamar “puro” por trabajar con objetos geométricos (puntos, líneas, polígonos, etc.) y sus relaciones (paralelismo, perpendicularidad, isometrías, etc.), la geometría de coordenadas es para Cabri algo añadido a lo anterior. Por el contrario, Geogebra remite desde el principio a la geometría de coordenadas con una ventana algebraica que mantiene a la vista los valores que toman las variables y las coordenadas de los puntos en cada momento, esto lo hace especialmente apto para el estudio de funciones ya que las relaciones entre gráfica y expresión algebraica aparecen más evidentes. Para el dibujo con regla y compás supone algunas pequeñas dificultades fácilmente resolubles si cambiamos un poco la forma de pensar y el tipo de razonamientos que utilizamos.

Llegados a este punto se puede seguir la lectura del artículo en este documento o hacerlo en la versión de Internet. La ventaja de hacerlo en la web es que mientras en la versión escrita de este artículo que sigue aquí aparecen para cada obra la imagen limpia del cuadro y la “decorada” con los puntos, líneas y figuras superpuestas, cuando lo hacemos en las páginas html disponemos de applets java que permiten que interactuemos sobre el diseño realizado sobre las obras de arte para que aparezcan poco a poco los trazos realizados para resaltar los elementos geométricos de la composición.

Para seguir la lectura en las páginas de Internet, ir a la dirección:

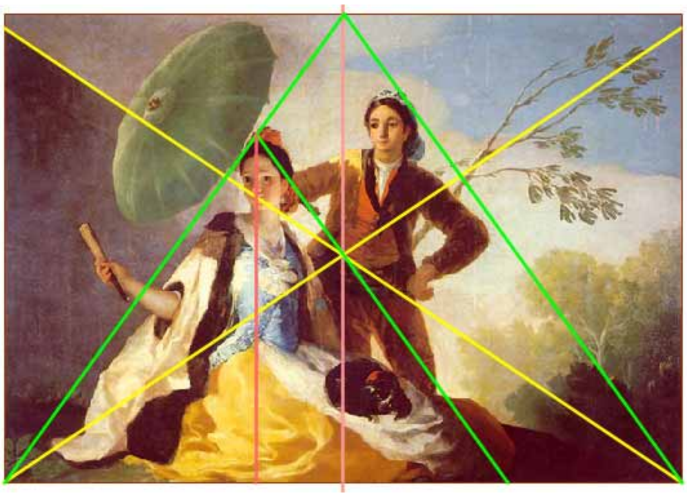
http://jmora7.com/Arte/arte.htm

Goya. El quitasol. 1777. Museo del Prado. Madrid

El quitasol forma parte de una serie de cartones para tapices.

(1) Al iniciar el estudio geométrico de la composición, resalta en primer lugar el gran muro que se encuentra a la izquierda, si lo prolongamos, comprobaremos que la línea (amarilla) se dirige al vértice inferior derecho del cuadro.

(2) Trazamos la mediatriz que divide verticalmente el rectángulo del cuadro en dos partes iguales y trazamos a la derecha **(3)** el segmento simétrico al muro (1) respecto de la mediatriz (2). Las ramas de la derecha que aparecen detrás del hombre tienen la inclinación de esta línea.



(4 y 5) Las diagonales de los dos rectángulos surgidos al trazar la mediatriz en (2) revelan la estructura triangular de la composición, los dos personajes quedan casi completamente enmarcados por esta figura.

(6) Construimos un segundo triángulo que envuelve a la mujer, dos de los lados están situados sobre los del triángulo anterior, mientras los terceros lados son paralelos.

Volveremos a ver una composición muy parecida con dos triángulos semejantes en *Las meninas* de Velázquez.

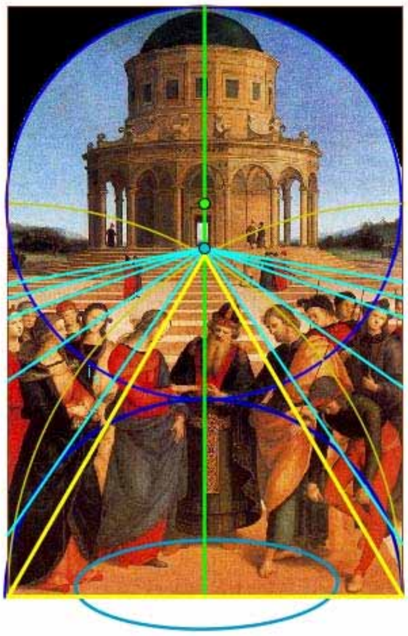
Rafael. Los desposorios de la Virgen. 1504. Museo de la pinacoteca de Brera. Milán

El cuadro está basado en una de las obras maestras de Perugino en el tratamiento de la perspectiva: *La entrega de las llaves*.

(1) El eje de simetría del edificio posterior divide verticalmente el cuadro en dos partes iguales.

(2) Terminamos de dibujar la circunferencia tangente a los lados laterales y al lado superior del cuadro.

(3) Las dimensiones del cuadro son 1x1.5 lo que permite dibujar una semicircunferencia que tiene por diámetro el lado inferior y será tangente a la dibujada en (2)



(4) Trazamos un triángulo equilátero que tenga por base el lado inferior del rectángulo. El vértice superior se sitúa en las escaleras del edificio. Los lados marcados en amarillo son paralelos a las líneas de fuga de los límites del pavimento central de mármoles que se han dibujado en dos colores para resaltar la perspectiva. Con esto se consigue dar una referencia espacial entre las figuras próximas y la edificación del fondo.

(5) Los pies de los personajes están distribuidos alrededor de una elipse en la parte inferior del cuadro.

(6) Trazamos las líneas que se unen en un único punto de fuga situado un poco más arriba del vértice del triángulo equilátero (4), en la puerta del edificio.

Ghirlandaio. Adoración de los Magos, 1488. Galería de los Uffizi. Florencia

Ghirlandaio parte del círculo como marco de la obra e inscribe en él otras figuras geométricas que irán definiendo la composición

(1) Inscribimos en el círculo un cuadrado (amarillo) tomando como punto de partida el extremo izquierdo de la cornisa del edificio, los otros vértices se sitúan en zonas perfectamente diferenciadas del cuadro.

(2) Trazamos un nuevo cuadrado (verde) mediante un giro de 45º alrededor del centro del círculo. Los vértices de los dos cuadrados que se han dibujado lo serán también de un octógono regular.

(3) Dibujamos las diagonales del octógono que resulten horizontales o verticales, esto dará lugar a dos rectángulos (en colores naranja y rosa)

(4) Señalamos las diagonales (en azul) del rectángulo rosa, estos segmentos marcan la posición de muchos de los personajes que se distribuyen a lo largo de esta línea.

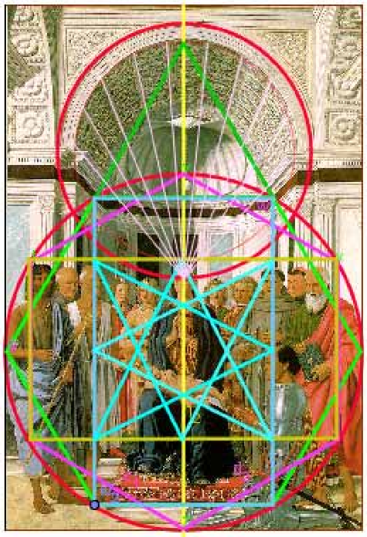
(5) Las diagonales (fucsia) del otro rectángulo (naranja) también distribuyen a los personajes.

(6) La intersección de los dos rectángulos dibujados en (2) y (3) es un cuadrado en el que podemos inscribir una circunferencia (blanco) que contiene al grupo principal: la Virgen, el Niño y uno de los Magos.

Pietro della Francesca. Madonna con niño y santos (Cuadro del huevo). 1475. The Nacional Gallery. Londres.

Pietro Della Francesca es un estudioso de la geometría a la que dedicó los últimos años de su vida. Se dedico a plasmar sus reflexiones en sus obras de arte. Una de sus obras más conocidas *es Madonna con Niño y santos*, también llamado *Cuadro del huevo* por el huevo de avestruz -símbolo de la fertilidad-, que cuelga de la bóveda.

(1) Se dibuja el eje de simetría del edificio. Además, como el cuadro tiene unas dimensiones de 1x1.5. Cuando trazamos una circunferencia tangente al lado inferior y a los laterales, recoge a todos los personajes. El punto de intersección de la circunferencia con el eje de simetría indica el comienzo del tercio superior dedicado a la arquitectura del edificio.



(2) Dos circunferencias con centro en la intersección del segmento vertical con la línea de impostas dibujan la bóveda del edificio. También se han dibujado las líneas de fuga que confluyen en un único punto situado en los ojos de la Virgen.

(3) Dos hexágonos regulares inscritos en la primera circunferencia enmarcan a los personajes. La prolongación de dos lados alternos del hexágono verde hace aparecer un triángulo equilátero que revela la altura de la bóveda.

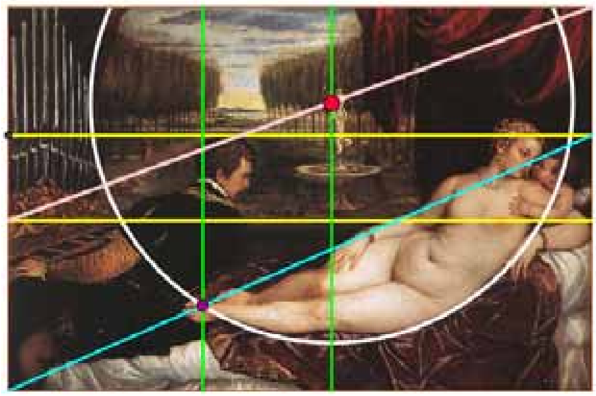
(4) y (5) Los vértices de los dos hexágonos determinan un dodecágono regular (ya ocurría algo parecido en el cuadro de Ghirlandaio cuando un octógono regular surgía de dos cuadrados concéntricos). A partir de los vértices del dodecágono podemos construir dos rectángulos que tienen sus lados verticales u horizontales. Uno de ellos (amarillo) determina la altura de los personajes, mientras que el otro (azul) se centra en la Virgen y el Niño. La intersección de estos dos rectángulos es un cuadrado

(6) El polígono estrellado sobre los vértices y los centros de los lados del cuadrado interno hace resaltar la figura de la Virgen, su manto está diseñado por dos de las líneas e incluso el Niño está acostado sobre una de las diagonales.

En cada uno de los lados verticales de ese cuadrado hay dos personajes, el de la derecha es Luca Pacioli, alumno de Pietro Della Francesca.

Tiziano. Venus y el organista. 1547. Museo del Prado. Madrid

Tiziano sigue las normas de Alberti que inicialmente se diseñaron para la arquitectura, pero pronto se trasladaron a otras artes: pintura, escultura, música o el estudio de las proporciones humanas. Para Alberti la composición es la disposición armoniosa de las distintas superficies en el lugar que les corresponde. Uno de los primeros en utilizar este tipo de proporciones para componer sus cuadros es Boticelli (*La primavera, el nacimiento de Venus*). Aquí se ha seleccionado *Venus y el organista* de Tiziano por la sencillez con la que aplica estas normas y también porque llega más lejos con la introducción de líneas curvas y otros elementos. Tiziano distribuye los personajes según la proporción 4/6/9 referidos a los lados del cuadro.



(1) Dividimos los lados del cuadro en 9 partes iguales y se marcan comenzando en los extremos inferior izquierdo el vertical y superior derecho el horizontal.

(2) Señalamos los segmentos horizontales sobre las marcas 4 y 6 (V_4 y V_6) para delimitar la región donde se encuentran los rostros de los personajes.

(3) El segmento vertical en H_4 sitúa el eje de la fuente y el de H_6 corresponde a la posición del organista.

(4) Construimos un segmento (azul) que parte del vértice inferior izquierdo hasta V_6, como vemos determina gran parte de la zona superior del cuerpo de Venus.

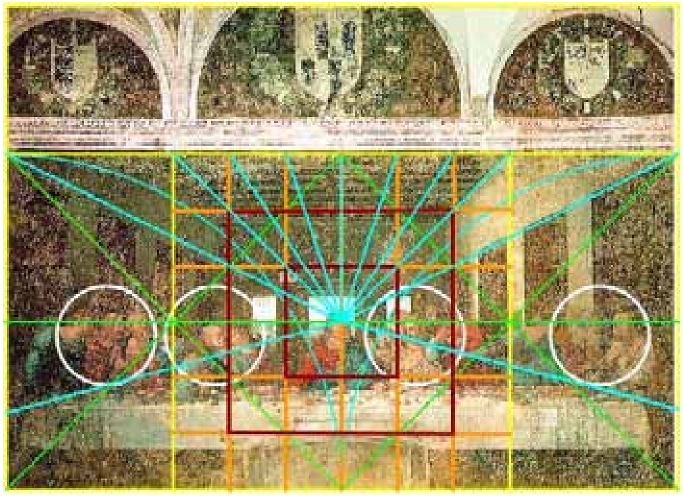
(5) Otro segmento paralelo al anterior (rosa), que parte del extremo superior derecho para llegar a V_4

(6) Venus descansa sobre una circunferencia. Para dibujarla con exactitud es preciso situar el centro, que estará colocado en el punto de intersección de V_6 con la línea obtenida en (4). El radio lo marca el punto de intersección de la V_4 con la línea obtenida en (5)

Leonardo da Vinci. La última cena. 1497. Monasterio de Santa María delle Grazie de Milán

La Última Cena sigue una composición “transparente”, es aparentemente muy sencilla, aparentemente es muy fácil de analizar, porque se sustenta en una superposición de cuadrados. Para empezar, si quitamos los tres arcos de la parte superior, las dimensiones de la parte inferior es 2x1 de forma que la escena se encuadra en un doble cuadrado que tiene por centro la figura de Cristo.

(1) Dividimos el rectángulo en dos cuadrados.



(2) Trazamos sus diagonales. Consideramos el cuadrado formado por las dos mitades centrales, sus diagonales son las que determinan el techo de la estancia.

(3) Se dividen los lados del cuadrado central en seis partes iguales formando una cuadrícula 6x6. En la parte superior nos da las divisiones del artesonado del techo.

(4) La cuadrícula forma dos nuevos cuadrados (rojo oscuro), ambos con el mismo centro y cuyos lados y vértices descansan sobre la cuadrícula marcada en el paso anterior. El más pequeño alberga la figura de Cristo y el mayor delimita la pared del fondo.

(5) Las líneas de fuga (azul) confluyen en el ojo de Cristo. En la parte superior resaltan el artesonado del techo, las diagonales del cuadrado central señalado en (2) son las líneas de fuga que marcan la unión de las paredes laterales con el techo, las diagonales del rectángulo grande son las que delimitan los lados superiores de los cuadros de las paredes laterales.

(6) Los apóstoles se agrupan de tres en tres en cada una de las cuatro partes en que se divide la escena. Se encuentran en un estado de agitación, esto se debe a que la escena representada por Leonardo es el momento siguiente al anuncio de Cristo de que uno de sus discípulos lo va a traicionar.

Como se ha visto, la composición del cuadro es muy sencilla, pero el resultado no puede calificarse de simple ya que está lleno de ambigüedades. La estancia representada tiene una gran profundidad si analizamos solamente la mitad superior, en cambio, en la parte inferior niega esa sensación de profundidad colocando una gran mesa a modo de friso casi plano. La sensación de que podríamos entrar en el cuadro se incrementa porque fue diseñado para la pared norte del comedor del monasterio de Santa María delle Grazie de Milán de forma que la escena debía parecer que era una prolongación de la sala. Cristo debía presidir ambas salas: la ficticia pintada en el cuadro y la real del comedor, para conseguirlo ha sido representado a mayor escala que el resto de los personajes. Pero aún hay más, como el punto de fuga está situado en e ojo de Cristo, a 4,5 metros de altura respecto del suelo del comedor, la perspectiva obliga a nuestro cerebro a realizar una concordancia entre la situación real de la estancia y la representada en el cuadro y provoca un efecto óptico de elevación del observador.

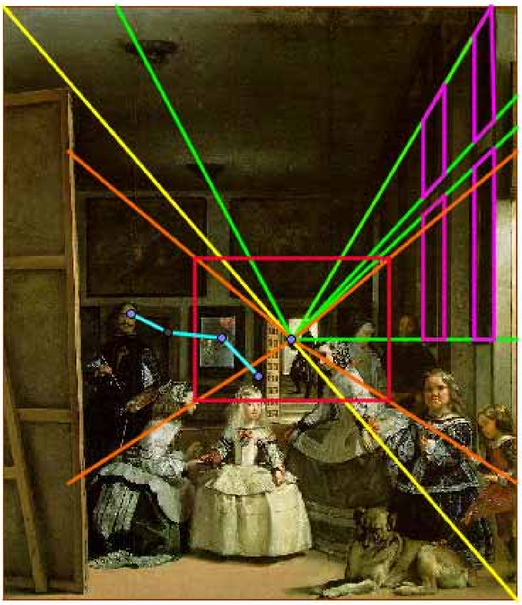
Velázquez. Las meninas. 1656. Museo del Prado. Madrid.

Animación 1. Perspectiva.

Representa una escena cotidiana en la corte, el mismo título entraña una contradicción ya que antepone los sirvientes a los amos –las damas de la corte a la infanta y los reyes-. Es un cuadro lleno de ambigüedades, unos críticos se inclinan a que representa una intromisión casual de la infanta y su séquito en las estancias en las que el pintor realiza un cuadro de los reyes. Los reyes se encontrarían del lado del espectador porque están siendo retratados y además los vemos reflejados en el espejo del fondo. Otros piensan que el pintor está retratando una escena cotidiana de la infanta y los miembros de la corte y que son los reyes los que acaban de entrar en la estancia.

En la página de Internet Mirar un cuadro del Museo del Prado dedicada a Las Meninas hay una interesante disección del cuadro escena a escena.

La perspectiva de las Meninas tiene un punto de fuga situado en el brazo del aposentador José Nieto que se encuentra al fondo a punto de atravesar la puerta que da a una estancia y que es a la vez uno de los puntos por los que la luz entra a la sala –el otro es la ventana más próxima de la derecha-, de esta forma el espacio tiene una prolongación más allá de la pared del fondo lo que le da mayor profundidad.



(1) Trazamos la diagonal del cuadro y situamos en ella el punto de fuga que está situado en el brazo del personaje del fondo.

(2) Dibujamos algunas de las líneas de fuga: las que limitan los cuadros que hay entre las ventanas de la pared de la derecha, el techo y las dos lámparas de la parte superior izquierda.

(3) Construimos los rectángulos de los cuadros de la pared derecha, que en la representación serán trapecios con dos lados verticales y los otros dos sobre las líneas de fuga del apartado anterior.

(4) Con una de las líneas de fuga y sus simétricas respecto de dos ejes, uno vertical y otro horizontal que pasan por el punto de fuga, representamos un rectángulo que podemos modificar de tamaño como si fuera un gran cristal rectangular que desplazamos perpendicularmente al suelo adelante y atrás en la estancia. A la izquierda se ha colocado un deslizador que nos permite manipular la distancia a la que colocamos el cristal, con ello simulamos en la imagen lo que sería una traslación en la realidad y que aquí se convierte en una homotecia con centro en el punto de fuga.

(5) Intentamos averiguar la posición de los reyes para que su imagen sea reflejada en el espejo del fondo, vuelva después a otro espejo mucho mayor que estaría situado en la pared del espectador y después se dirija al ojo del pintor. También aquí se han colocado dos deslizadores pequeños: uno a la derecha y otro en la parte inferior que nos permite variar la posición de los reyes arriba-abajo e izquierda-derecha y comprobar la composición de reflexiones especulares.

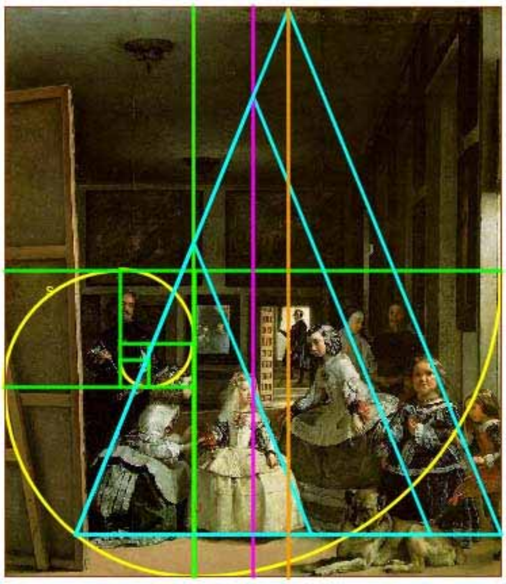
La posición correcta para mirar este cuadro sería colocarnos detrás de los reyes a una distancia igual a la reflejada entre el espejo y el pintor. Aún podríamos mejorarla situándonos de espaldas al cuadro y mirándolo a través de un espejo

Animación 2. Proporción áurea

La perspectiva en el cuadro de Las Meninas se ve reforzada por el tratamiento que da Velázquez a la luz, hay unas figuras –la infanta y las meninas-, más iluminadas mientras otras pierden no sólo luz, sino también definición en los trazos como es el caso de Diego Ruiz de Azcona –de pie a la derecha-, cuyo rostro está a duras penas bosquejado. Parece que Velázquez no lo tenía en gran estima.

Después del estudio de la perspectiva en Las meninas, realizamos un nuevo acercamiento a la obra a partir de una idea planteada en el programa número 36 de Redes (TVE) dirigido por Eduardo Punset dedicado a la proporción áurea. En una de las secciones del programa dedicada a las ideas de Dalí acerca del cuadro de Las meninas, Rafael Pérez expone una interesante idea acerca a la forma en que el aire entra en la estancia. Si construimos un rectángulo áureo con el lado inferior del cuadro, el famoso aire de las pinturas de Velázquez entraría por la ventana que hay abierta por la derecha y la espiral podría describir la trayectoria que sigue hasta llegar a la paleta del pintor. Aprovecharemos también para introducir otro elemento compositivo que encontramos en el cuadro y que ya vimos en El quitasol, aquí Velázquez introduce tres triángulos isósceles y semejantes

(1) Dibujamos un rectángulo según las proporciones áureas con uno de sus lados en el inferior del cuadro. A partir de ahora iremos quitando cuadrados para quedarnos con el rectángulo restante que también tiene la propiedad de ser áureo. A la vez iremos dibujando los arcos sobre los cuadrados eliminados para construir la espiral áurea.



(2) **(3)** y **(4)** Seguimos quitando cuadrados para construir la espiral

(5) En este paso la espiral áurea y con ella el aire que entra por la ventana de la derecha llegan a la paleta del pintor.

(6) Se han trazado tres triángulos semejantes que enmarcan las zonas centrales más iluminadas, el más grande recoge a la mayoría de los personajes (sólo faltan Nicolasillo y el propio pintor), el siguiente enmarca las tres figuras centrales: la infanta Margarita y las dos meninas: María Agustina Sarmiento a la izquierda e Isabel de Velasco a la derecha. Los triángulos son isósceles porque la inclinación de los cuerpos es parecida. El triángulo más pequeño es el que incluye a la infanta y a una de las meninas, encontramos una coincidencia con la espiral áurea trazada en los pasos anteriores: que su eje de simetría está situado sobre el primero de los segmentos verticales dibujados en la construcción (1) de la espiral áurea.

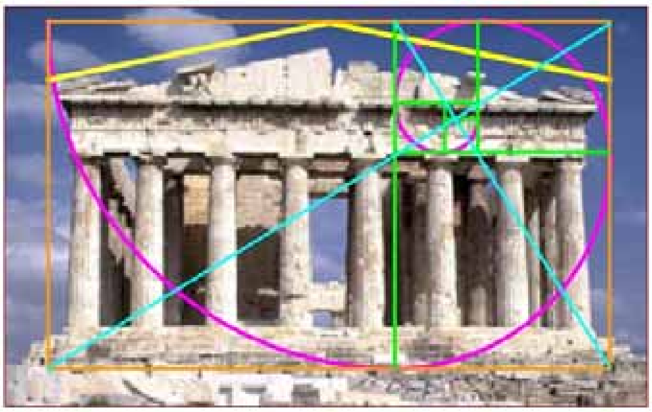
Ictinio y Calícrates (arquitectos) y Fidias (escultor). El Partenón. Del 447 al 432 a.c. Atenas

El Partenón es uno de los templos de la Acrópolis dedicado a la diosa Atenea

(1) En primer lugar recomponemos el frontón para tener una idea de la fachada completa del templo.

(2) Enmarcamos la fachada del Partenón en un rectángulo con las proporciones áureas en el que vamos a construir la espiral. Veremos cómo los sucesivos pasos nos llevan a distintos elementos arquitectónicos prefijados por la construcción.

(3) Iremos eliminando cuadrados a la vez que construimos los arcos correspondientes a esos cuadrados. Y en la primera división encontramos que, de las 8 columnas de la fachada, separamos 5 a la izquierda y 3 a la derecha, los tres números: 8, 5 y 3 son elementos de la sucesión de Fibonacci que está íntimamente ligada a la proporción áurea (Φ es el límite de los cocientes entre los términos consecutivos de la sucesión)



(4) Al eliminar el segundo cuadrado, llegamos a una línea horizontal que indica el comienzo del arquitrabe

(5) Dos cuadrados –con sus arcos correspondientes-, más tarde llegaremos a la cornisa. El rectángulo áureo abarca ahora la franja que contiene el entablamento (franja situada entre las columnas y el frontón).

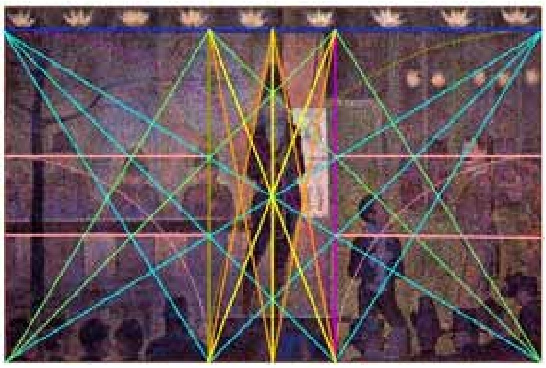
(6) Continuamos el proceso de construcción de la espiral. El punto de corte de las diagonales de los dos primeros rectángulos es el punto de convergencia de la espiral.

G. Seurat. La parada del circo. 1888. Metropolitan Museum of Art. Nueva York

La parada del circo es una obra cuidadosamente organizada en la que Seurat no deja nada al azar, todos los elementos siguen un plan perfectamente trazado desde el principio.

Hay una controversia entre quienes defienden que Seurat utilizó la proporción áurea para su composición y los que afirman que la proporción utilizada es 8/5=1.6, que es muy próxima a Φ.

(1) Eliminamos en primer lugar el friso de la parte superior. El rectángulo restante en la parte inferior tiene dimensiones áureas. Si dibujamos dos cuadrados uno a cada lado del cuadro, los lados opuestos alcanzan justo a los laterales del templete sobre el que se ha situado la figura central.



(2) Ahora tomamos los dos rectángulos que han quedado en los laterales. Si hacemos la misma descomposición: trazar los cuadrados superior e inferior en cada uno de ellos, los segmentos que se originan, resaltan otros elementos del cuadro: las cabeza de muchos personajes e incluso la barandilla de la izquierda.

(3) Los segmentos que van desde los vértices superiores hacia las marcas que se han originado en el lado inferior rozan todas las cabezas de los personajes de la misma forma.

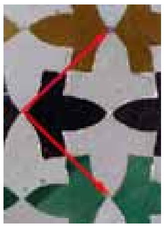
(4) Igual ocurre con los segmentos que parten de los vértices inferiores hacia las marcas del lado superior.

(5) Tomamos ahora el rectángulo central que contiene al músico. La figura del personaje queda delimitada por los segmentos marcados en color naranja.

(6) Las líneas del apartado anterior se completan con las diagonales que faltaban, señaladas en color amarillo. Entre unas y otras delimitan exactamente la figura del músico: la cabeza, el cuerpo, hasta la posición de las piernas queda desvelada por las diagonales.

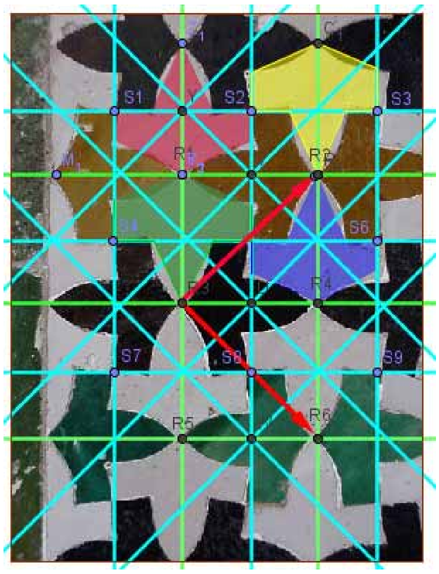
Arte nazarí. Mosaico con forma de avión. S XI. La Alhambra. Granada.

Mosaico de una de las columnas que rodean el patio de los leones en la Alhambra de Granada. El análisis realizado pretende detectar, paso a paso, las isometrías que dejan invariante el mosaico sin tener en cuenta los colores, nosotros sólo atenderemos a figuras blancas y coloreadas. Progresivamente iremos desvelando las traslaciones, las rotaciones, las simetrías y las simetrías con deslizamiento.



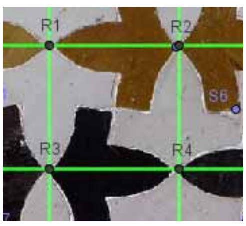
(1) Los vectores de traslación forman un ángulo de 90º

(2) Sólo hay dos tipos de centros de rotación, ambos de orden 2 (mediante un giro de 180º el mosaico vuelve a coincidir consigo mismo. Unos se encuentran en los extremos anterior y posterior de los aviones (R_1, R_2,…) y los otros en las alas (S_1, S_2,…). Los dos grupos de centros de rotación del mosaico determinan dos cuadrículas solapadas.

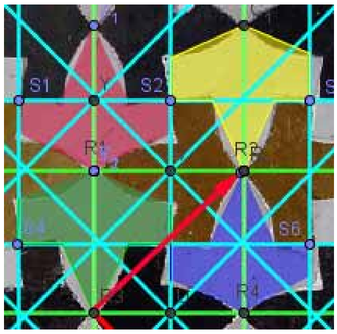


(3) Los ejes de simetría (en verde) parten por la mitad los aviones y pasan por los puntos de la cuadrícula R_i.

(4) Hay dos tipos de ejes de simetría con deslizamiento, el primero está compuesto por líneas paralelas a los ejes de simetría ordenados en una cuadrícula idéntica a la anterior que pasa por los centros S_i. La segunda está integrada por rectas que forman un ángulo de 45º y 135º con estas para configurar una nueva cuadrícula.



(5) Se resalta en color amarillo uno de los aviones blancos.



(6) Se colorean tres más para estudiar cuál es el movimiento adecuado para pasar del avión amarillo a cada uno de los otros. Para el azul tenemos dos posibilidades: una simetría axial o una rotación de 180º (simetría central). Para el rojo tenemos la simetría central en el extremo de una de las alas y para el verde tendríamos que hacer una simetría con deslizamiento: primero una simetría con un eje azul y después una traslación con vector paralelo a ese eje y de módulo el lado de la cuadrícula en la que se incluye el avión.

Apéndice

Para acabar, dedicaremos un espacio para que los lectores interesados puedan ver la forma en que esas líneas salen a la luz y se ocultan. Lo primero es diseñar un "deslizador": un segmento en el que un punto hace la función de variable al que se da el nombre de "paso" y toma los valores que deseemos (de 0 a 7 con incremento 1).

Si queremos que aparezcan una serie de figuras cuando "paso" valga 3 o más, pero que no estén para valores inferiores ni para 7, realizaremos la siguiente secuencia:

- En el primero creamos una variable tipo test t_3 que vale 1 cuando "paso" está entre 3 y 6 y vale 0 en cualquier otro caso. La instrucción sería t_3=if (paso>2 $\wedge$ paso <7, 1, 0)
- Ahora creamos un punto B_3 cuyas coordenadas dependen de otro A_3 que existe previamente pero con la particularidad de que dividimos estas coordenadas entre el valor de la variable que hace de test t_3. Cuando t_3 tome el valor 1, B_3 estará situado exactamente sobre A3. Si t_3 vale 0, se hará una operación no permitida, no nos comunicará el error, pero B_3 no existirá.
- Ahora sólo nos tenemos que preocupar de que todas las líneas del paso 3 sean dependientes del punto B_3 y permanecerán en los pasos 4, 5 y 6 mientras que en el 7 desaparecerán para dejar el cuadro limpio.

Todo esto se puede comprobar mejor con la revisión de alguno de los archivos de Geogebra diseñados.

Bibliografía

- Bouleau, Charles (1996). Tramas. La geometría secreta de los pintores. Ed. Akal. Madrid
- Cansino, E. (1998). El misterio Velázquez. Ed. Bruño. Madrid
- Capdevila Ed. (1992). Las claves de la pintura. Ed. Planeta. Barcelona
- Cole, Alison. (1993). Perspectiva. Ed. Blume. Barcelona
- Ghyka, M.C. (1983). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Ed. Poseidón. Barcelona
- Lawlor, R. (1993) . Geometría sagrada. Ed. del Prado. Madrid
- Livio, M. (2002) La proporción áurea. Ed Ariel. Barcelona.
- Malins, Frederik (1983). Mirar un cuadro. Herman Blume Ediciones. Madrid
- Pedoe, D. (1982). La geometría en el arte. Ed. Gustavo Gili. Barcelona
- Prado, J.M. Ed. (1989) David. Grupo Ed Fabri., Milán.
- Prado, J.M. Ed. (1989) Durero. Grupo Ed Fabri., Milán.
- Prado, J.M. Ed. (1989) Goya. Grupo Ed Fabri., Milán.
- Prado, J.M. Ed. (1989) Leonardo da Vinci. Grupo Ed Fabri., Milán.
- Weyl, H. (1991). Simetría. Ed Mc Graw Hill. Barcelona

Páginas de Internet

- Geometría dinámica y calculadoras gráficas en matemáticas de José A. Mora http://jmora7.com/
- Biblioteca Wikipedia http://es.wikipedia.org/wiki/Portada
- Aproximación hipertextual a las meninas de Velásquez http://www.uoc.es/humfil/digithum/digithum1/jcampas/menines.html
- Museo del Prado. Mirar un cuadro. Las Meninas http://museoprado.mcu.es/meni.html
- Universitat Oberta de Cataluya. Joan Campàs Montaner http://www.uoc.es/humfil/digithum/digithum1/jcampas/menines.html
- La Balisse de Michel Gardes. Introducción a la estética de las proporciones (en francés) http://www.ac-poitiers.fr/arts_p/B@lise14/pageshtm/index.htm

José Antonio Mora Sánchez. IES Sant Blai. Alicante

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 101-118
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Actividades de aprendizaje para Geometría analítica en el ambiente interactivo RecCon

José Carlos Cortés y Lourdes Guerrero

Resumen

Se exponen los resultados del diseño de secuencias de actividades basadas en el ambiente informático RecCon. Dichas actividades tienen el propósito de favorecer el entendimiento de conceptos y desarrollar habilidades en los estudiantes, relacionados con las líneas temáticas fundamentales del curso de Geometría analítica del bachillerato general. Particularmente, se documenta el trabajo de diseño de dos secuencias de actividades interactivas: una relacionada con la recta y otra con la circunferencia.

Introducción

En el presente artículo se documenta el trabajo de diseño de diferentes actividades didácticas implementadas en una plataforma informática interactiva a través del software RecCon. El objetivo fundamental de estas actividades es favorecer el entendimiento de los temas propios de la geometría analítica del bachillerato, haciendo énfasis en las ideas y procesos subyacentes en los contenidos curriculares actuales en este nivel educativo.

RecCon ha sido diseñado con fines educativos, basando sus características fundamentales en el hecho de que, en matemáticas, es necesario el uso de diferentes representaciones de los objetos matemáticos (Duval, 1988). Este uso de diferentes representaciones no solamente se refiere a la forma en que se comunica el conocimiento matemático a los estudiantes; más bien tiene que ver con el hecho de que los estudiantes necesitan interactuar con los objetos matemáticos en muchas formas, para que puedan conocerlos, entenderlos y saber usarlos en formas apropiadas. Esto es, la experimentación interactiva y de manipulación de los objetos matemáticos favorece el entendimiento y manejo de los mismos. Éstas pueden darse sólo a través de las representaciones con que se expresan los objetos abstractos de las matemáticas y, por tanto, es necesario que los estudiantes tengan un entendimiento claro de estas representaciones y sean capaces de manejarlas y usarlas con flexibilidad.

Los tratamientos o cambios en una representación específica del objeto matemático, así como la conversión de una representación a otra, son transformaciones que revelan diferentes características de los objetos abstractos, y permiten llegar a conocerlos en su globalidad y particularidades específicas.

¿Qué es RecCon?

RecCon (Rectas y Cónicas) es un software de apoyo al aprendizaje de temas de geometría analítica para bachillerato[1] que parte de la idea teórica fundamentada en la importancia que tiene el uso de múltiples registros de representación de una idea matemática en el aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos. Es en este sentido que en RecCon se integra una serie de actividades en las que están presentes diferentes tipos de representación (tablas, gráficas y ecuaciones).

En cada secuencia de actividades, RecCon genera una serie de ejercicios de manera semi aleatoria que el usuario tiene la oportunidad de responder para ser evaluado de manera inmediata. Las respuestas del usuario pueden darse a través de la manipulación de una gráfica, o la introducción de datos de tipo numérico y algebraico (Cortés, 2005).

Marco Teórico

Dos aspectos teóricos han sido considerados en el diseño de las actividades de RecCon: La teoría de Registros Semióticos de Representación (Duval, 1988); y, las ideas de visualización matemática (Hitt, 1992).

Registros Semióticos de Representación

En matemáticas es necesario representar los objetos matemáticos para poder comunicarlos y, en muchas ocasiones, para construirlos y analizar sus propiedades. Esta característica de los objetos matemáticos, que los distingue de otros, se debe a su carácter abstracto.

Al representar los objetos se intenta expresar sus significados, proceso que enlaza el pensamiento conceptual (figurativo, estructurado) con el pensamiento operativo (procedimental, operacional).

De acuerdo con Duval (1993) existe la posibilidad de confundir el objeto matemático con una de sus representaciones, ya que "*toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y de una*

[1] Para más información sobre RecCon consultar la página de la revista UNION http://www.fisem.org/paginas/unionlrevista.php el Número tres.

representación a otra, no son los mismos aspectos de un contenido los que son representados" (Ibid, 119). Por lo tanto, es importante que un objeto matemático sea presentado en diferentes representaciones.

Ahora bien, la relación existente entre los diferentes modos de representación, debe necesariamente ser considerada dentro de las actividades de aprendizaje con la finalidad de tener una multi representación del concepto, que lo globalice y lo particularice.

En diferentes estudios, se ha comprobado que la actividad cognitiva asociada al entendimiento de las variables visuales en un tipo de representación es diferente a otro tipo y que esta actividad causa un conflicto que no es trivial. Por ejemplo, Hitt (1992) detectó errores en profesores de matemáticas al no contextualizar analíticamente una variable independiente que aparece en una gráfica; Duval (1988) afirma que es de mayor dificultad el paso de una representación gráfica a una algebraica; Mejía (1997) encontró que muchos estudiantes tienen dificultad en establecer conexiones entre datos gráficos y numéricos.

Estas investigaciones ponen en evidencia la necesidad de realizar actividades donde estén presentes múltiples representaciones, con las que además se promueva la conversión de una representación a otras distintas. Este tipo de transformación permite observar un objeto desde diferentes perspectivas; así mismo, favorece el desarrollo de habilidades operativas, útiles para manejar y usar los objetos matemáticos con flexibilidad.

Un aspecto que debe ser considerado en las actividades fundamentadas en la teoría de los Registros Semióticos de Representación, es la forma en que se hacen las conversiones entre registros de representación. Una conversión específica tiene asociado un proceso también específico. Es en este sentido que es importante utilizar las reglas de correspondencia semiótica. Por ejemplo, el proceso de conversión *ecuación*→ *gráfica*, que generalmente utiliza una conversión intermedia (*ecuación*→ *tabla*→ *gráfica*), puede realizarse sin necesidad de pasar por el registro numérico (construir una tabla) cuando se tienen identificadas las unidades significativas propias de la escritura algebraica además de conocer cómo influye cada una de ellas en la gráfica objetivo. Aquí es conveniente retomar lo dicho por Duval (1988): "*La lectura de representaciones gráficas presupone la discriminación de las variables visuales pertinentes y la percepción de las variaciones correspondientes de la escritura algebraica*" (Ibid, 240). Considerando como equivalente su forma inversa, se puede decir que "*la comprensión de la escritura algebraica lleva a determinar qué está representando gráficamente cada uno de los términos de esta escritura*".

Las actividades incluidas en RecCon se han diseñado precisamente para hacer énfasis en el proceso de conversión entre representaciones, poniendo atención específicamente en el entendimiento de las variables visuales, tanto del registro algebraico como el numérico; esto es, aquellas entidades que son necesarias para hacer la conversión de un registro específico a uno gráfico.

Visualización Matemática

La visualización matemática es una herramienta útil y necesaria para el aprendizaje de las matemáticas. Los procesos visuales involucrar el pensamiento figurativo y al operacional, por lo que podemos considerar a este proceso un preludio a la abstracción de conceptos (Hitt, 1992) que permitirá formar modelos de una situación. La visualización va más allá de la simple percepción y permite apoyar la formación de imágenes conceptuales (Hitt, Chávez, 1992).

Los conceptos matemáticos pueden ser representados por figuras, gráficas, fórmulas, tablas, símbolos o expresiones verbales y en cada una de estas representaciones existen variables significativas (por ejemplo en el gráfico está la escala) por lo que un proceso visual involucra la habilidad para detectar variables significativas y operar apropiadamente con ellas en cada una de estas representaciones, involucra también la traducción en términos cognitivos de las relaciones abstractas de la manipulación y transformación de las representaciones creando imágenes visuales poderosas.

Registros Semióticos de Representación a través de RecCon

RecCon contiene actividades diseñadas para: a) ayudar al usuario a identificar las unidades significativas dentro de una ecuación, una tabla y una gráfica; y, b) favorecer la aplicación de las variables visuales en los procesos de tratamiento y conversión de registros de representación.

Por otro lado, las secuencias de actividades se realizan a través de ejercicios propuestos a ser resueltos por el estudiante, considerando que una componente importante para el aprendizaje de un concepto es el desarrollo de habilidades, ya que, como dicen Suydam-Dessart "*las habilidades se obtienen de hacer*" (Ibid,1980,208).

Resumiendo los objetivos didácticos que se persiguen con las actividades de RecCon, se tiene:

1. Que el estudiante tenga la oportunidad de trabajar en un ambiente interactivo que integre de manera simultánea tres diferentes registros de representación (numérico, algebraico y gráfico) para que pueda experimentar y realizar conversiones que le ayuden a articular de una mejor manera las correspondencias entre ellos.

2. Mostrar una estrategia educativa desde un punto de vista computacional para abordar un tema de matemáticas del bachillerato.

3. Contar con un software con actividades integradas en él, que sea útil para profesores y estudiantes. Por un lado, los profesores pueden utilizarlo como una herramienta didáctica en el salón de clase; para explicar algún tópico o para ejemplificar sus explicaciones tomando como base las actividades propuestas. Por otro lado, los estudiantes pueden utilizarlo como un ambiente interactivo que favorece la experimentación y práctica asociada a conceptos matemáticos específicos, con el propósito de ayudar a su entendimiento y al desarrollo de destrezas de los estudiantes.

Actividades propuestas en RecCon

Las secuencias de actividades implementadas en RecCon están enmarcadas en los contenidos, ideas y procesos fundamentales del currículo de Matemáticas III (Geometría analítica) del bachillerato general. Particularmente, estas ideas hacen énfasis en el carácter de la geometría analítica como un área de las matemáticas que permite el análisis de problemas geométricos con los recursos algebraicos, siendo necesario el tránsito de una gráfica a su ecuación y viceversa (DGB, 2006).

Así mismo, los contenidos temáticos incluidos en RecCon, coinciden con las líneas curriculares generales del curso mencionado. Éstas son: plano cartesiano y distancia entre puntos, la línea recta, la circunferencia, la parábola y las cónicas (Ibid, 2006). En RecCon, estas líneas temáticas han sido estructuradas en un menú principal con las siguientes denominaciones (fig. 1):

- Distancia entre puntos se incluye en la opción ***Puntos*** del menú principal;
- La línea recta se incluye en la opción ***Rectas*** del mismo; y,
- La circunferencia, parábola y demás cónicas en la opción ***Cónicas***.

Fig. 1. Implementación de las líneas temáticas en el menú principal de RecCon

Cada una de las opciones del menú despliega a su vez una nueva variedad de características asociadas con las líneas generales. Éstas han sido estructuradas de acuerdo a las unidades significativas en las diferentes representaciones (fig. 2).

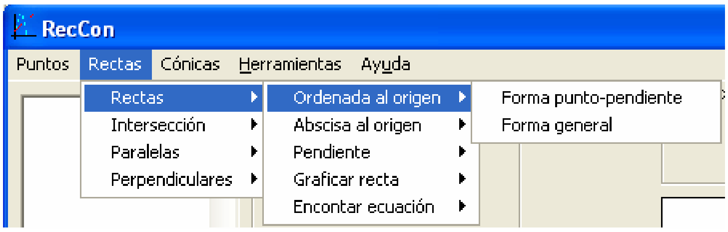


Fig. 2. Estructuración de unidades significativas en las líneas temáticas

Con el fin de mostrar el trabajo de diseño de las secuencias de actividades implementadas en RecCon, incluimos enseguida dos casos específicos: una secuencia relacionada con la línea recta y otra relacionada con la circunferencia. En el caso de la recta, las actividades tienen como objetivo la identificación de variables visuales significativas en la conversión *ecuación→gráfica*; esto es, la identificación de la ordenada al origen, la abscisa al origen y la pendiente de la recta partiendo de su representación algebraica. Por su parte, en la secuencia relacionada con la circunferencia el objetivo es apoyar el desarrollo de destrezas en los estudiantes, mediante ejercicios de conversión *ecuación→gráfica* y *gráfica→ecuación*.

Actividades relacionadas con la línea recta

El estudio de la línea recta es una de las actividades centrales en la geometría analítica del bachillerato. Entre sus objetivos está el empleo de distintas representaciones, identificando características fundamentales y ejercitando los procesos de transformación dentro de una misma representación (proceso de traslación, de acuerdo con Duval, 1988) así como de una representación a otra (conversión de representaciones).

En este sentido, esta secuencia se ha diseñado con base en la solución de ejercicios y problemas organizados en tres categorías:

A) Obtención de la ordenada al origen partiendo de una ecuación;
B) Identificar la abscisa al origen, dada la ecuación de la recta; y,
C) Obtener la pendiente partiendo nuevamente de la ecuación.

Obtener la ordenada al origen de la recta a partir de su ecuación

La selección de la secuencia de opciones ***Rectas→Ordenada al origen*** del menú de RecCon, despliega a su vez dos posibles opciones de trabajo. La primera corresponde a la ecuación de una recta escrita en su forma común ($y = mx + b$) y la segunda, a la forma general ($ax + by + c = 0$).

Por ejemplo, la elección ***Rectas→Ordenada al origen→Forma común***, despliega automáticamente la pantalla mostrada en la fig. 3.

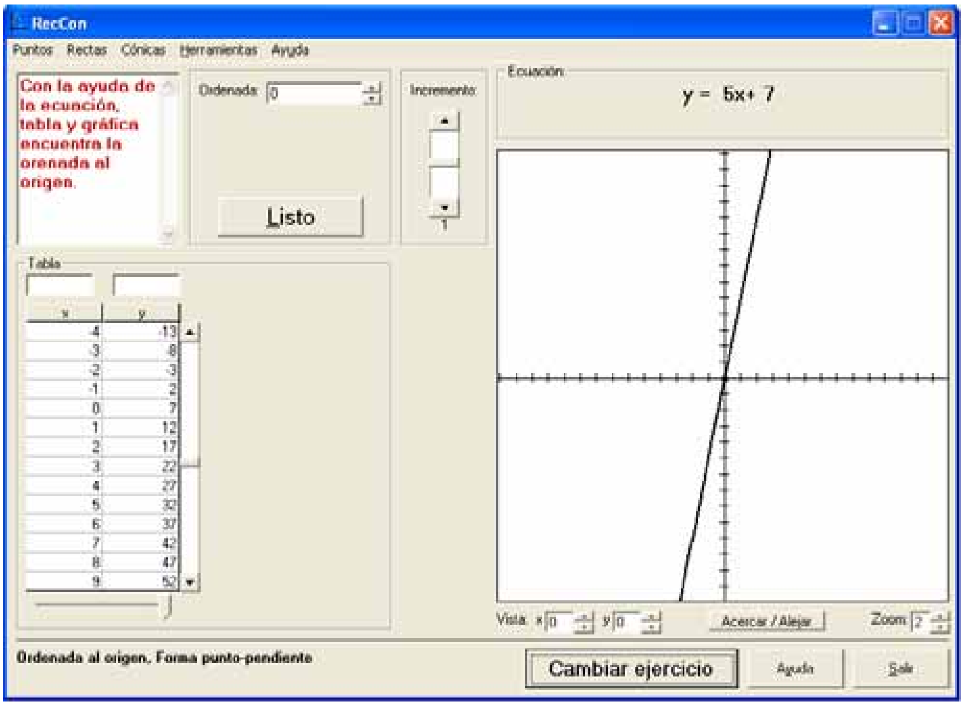


Fig. 3. Resultado de la elección ***Rectas→Ordenada al origen→Forma común***

Como puede observarse en la fig. 3, esta interfase se compone de los siguientes elementos:

- Área de exposición de la ecuación a trabajar (área superior derecha), la cual se genera automáticamente de manera semi aleatoria.
- Área de graficación, en la que se incluye la gráfica de una recta que pasa por el origen y, por tanto, de ordenada al origen igual a cero. En esta región también se incluyen botones que permiten modificar el área de visualización de la gráfica, como el ***Zoom*** y el botón de ***Acercar/Alejar***.
- Área de instrucciones (región superior izquierda).
- Región de entrada de datos (parte superior intermedia).
- Área numérica (tabla *xy*) desplegable.
- Barra de estado y botones para el cambio de ejercicios (parte inferior de la interfase).

En la fig. 4 se puede observar el tipo de actividad que se espera realice el usuario. Ésta consiste en llevar a cabo una transformación en la gráfica dada (tratamiento en el registro gráfico) con el fin de trasladar la recta, de tal forma que su ordenada al origen coincida con la ecuación dada.

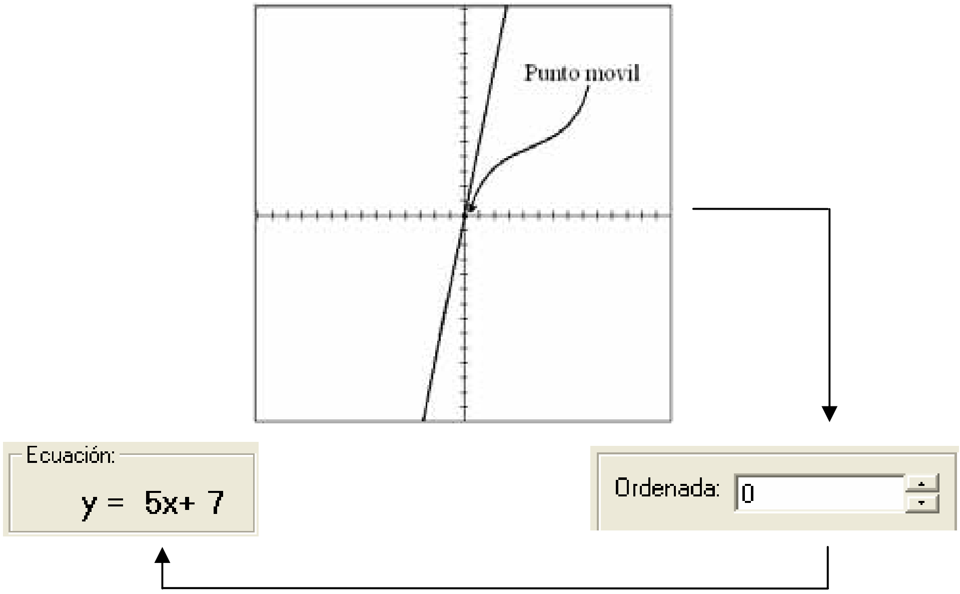


Fig. 4. Esquema del tipo de trabajo que se espera realice el estudiante

Este tratamiento en el registro gráfico se realiza colocando el puntero del ratón sobre el origen del sistema coordenado (punto resaltado en la fig. 4); una vez localizado, éste puede desplazarse a lo largo del eje vertical lo que a su vez modifica las condiciones del la recta en la gráfica (desplazamiento con respecto al sistema coordenado). Cuando el usuario considere que la gráfica que está manipulando es equivalente a la ecuación dada, deberá liberar el botón del ratón para fijar dicha gráfica.

En el momento en que se determina la gráfica de la recta, el recuadro correspondiente al valor de la ordenada muestra la ordenada al origen de dicha recta, de tal forma que el usuario puede comprobar si ésta corresponde a la ecuación dada. Así mismo, cuando el estudiante considera que ha obtenido la respuesta correcta, puede pulsar el botón ***Listo*** para obtener la evaluación de su trabajo (fig. 5 y fig. 6).

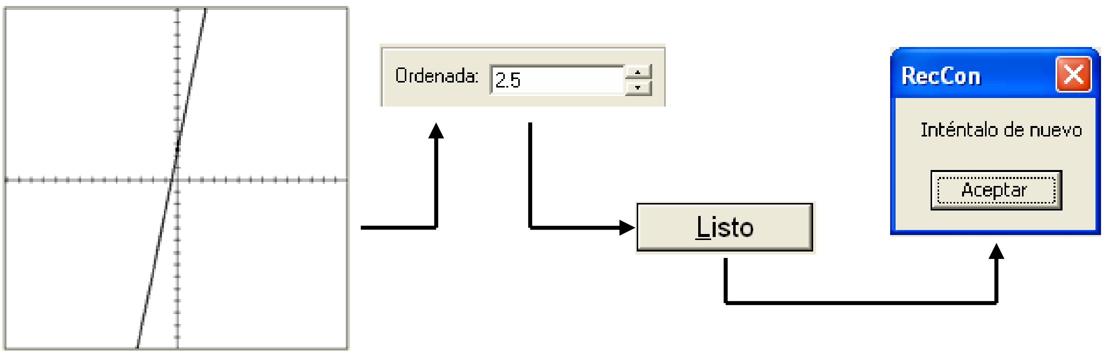


Fig. 5. Un primer resultado de la experimentación

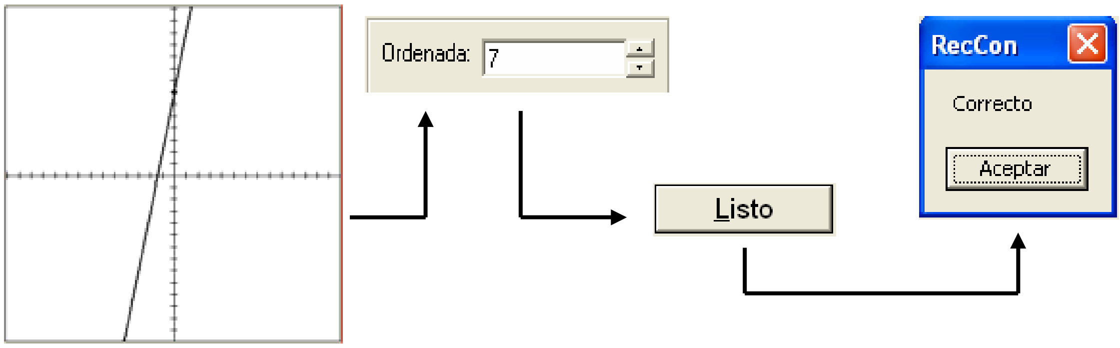


Fig. 6. Resultado esperado

Si la respuesta del estudiante es correcta, entonces RecCon muestra automáticamente un nuevo ejercicio de la secuencia; en caso contrario se puede continuar con la exploración de la situación presente y cambiar a otra en el momento que se desee presionando el botón ***cambiar ejercicio***.

La acción que produce la secuencia de opciones ***Rectas→ Ordenada al origen→ Forma común***, genera ejercicios con un grado de dificultad superior a los anteriormente ejemplificados, ya que la determinación de la ordenada al origen de una recta, a partir de la ecuación expresada en su forma general ($ax + by + c = 0$), requiere del análisis de más de un parámetro. Esto es, el estudiante tiene que descubrir la necesidad de analizar el comportamiento de dos parámetros para obtener la respuesta pedida (fig. 7).

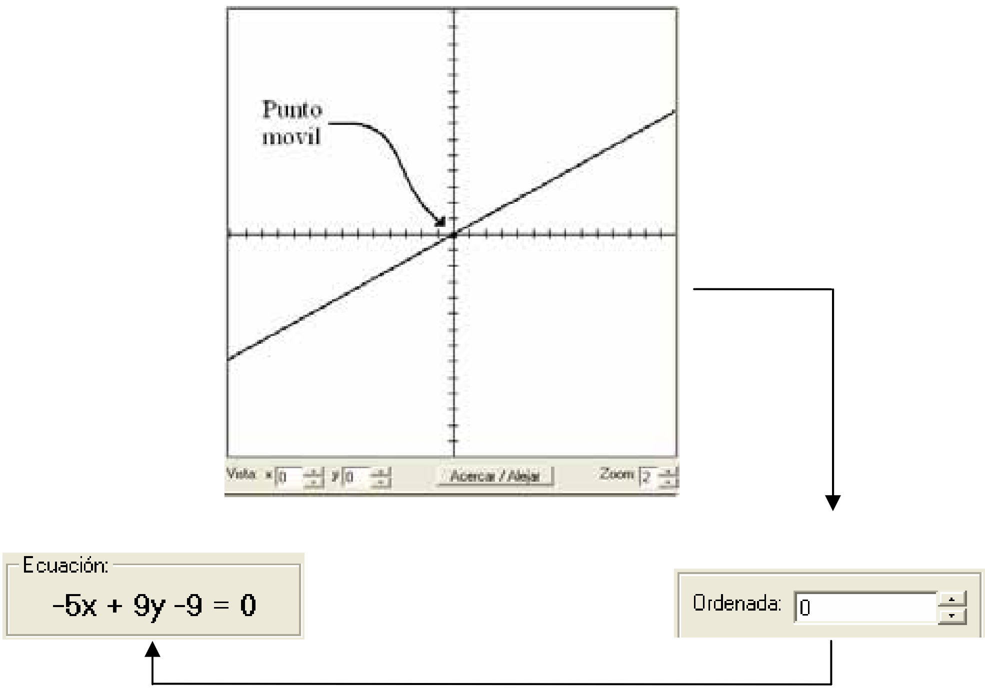


Fig. 7. Un ejercicio usando la forma general de la ecuación

Identificar la abscisa al origen, dada la ecuación de la recta

Al igual que en el caso de los ejercicios para determinar la ordenada al origen, los correspondientes a la abscisa se obtienen mediante la selección de la opción ***Rectas → abscisa al origen***, donde nuevamente se puede utilizar la forma general o la forma común de la ecuación de la recta. Si se elige por ejemplo la forma común ($y = mx + b$) obtenemos una interfase como la que se muestra en la fig. 3, cambiando solamente la etiqueta de "*ordenada*" por la de "*abscisa*" y mostrando una ecuación particular.

En este tipo de actividades, la tarea consiste en hacer un tratamiento en el registro gráfico, arrastrando horizontalmente la línea que se muestra en el área gráfica para explorar diferentes situaciones que permitan llegar a determinar la abscisa de la recta cuya ecuación se ha dado.

Observe que, tanto en las secuencias de actividades para determinar la ordenada como aquellas en las que se debe identificar la abscisa al origen, la recta que se presenta al inicio en la gráfica, incluye ciertas condiciones específicas relacionadas con la ecuación. Esto se debe a que el tratamiento gráfico solamente implica una traslación de la recta para cambiar las condiciones de la ordenada y no la pendiente de la misma; por tanto, la pendiente de la recta en la gráfica inicial debe coincidir con la pendiente de la recta en la ecuación dada.

El problema de determinar la abscisa al origen de una recta explorando el comportamiento gráfico de la recta, es una actividad con un grado mayor de dificultad al problema de determinar su ordenada al origen ya que se requiere analizar la razón entre los dos parámetros de la ecuación en su forma común ($-b/m$). En la fig. 8 se muestra el tipo de actividad que se espera realicen los estudiantes cuando están explorando situaciones relacionadas con la abscisa al origen.

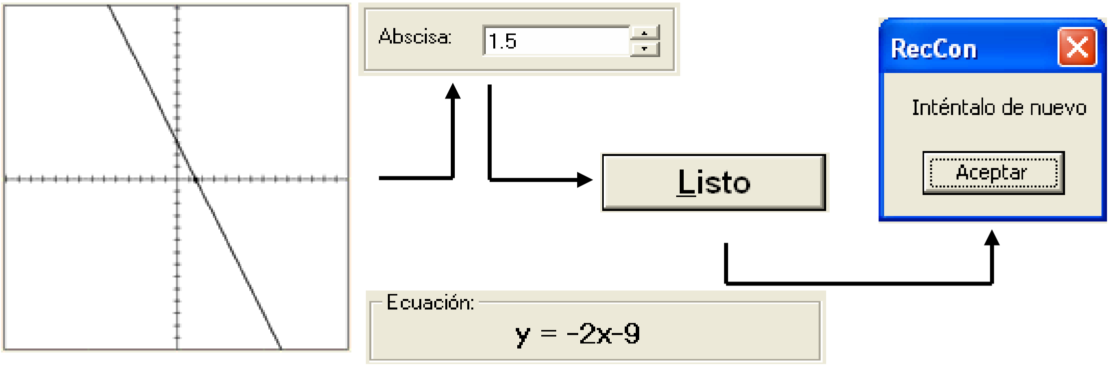


Fig. 8. Actividad para identificar la abscisa al origen de la recta

Hay situaciones, como la mostrada en la fig. 8, en las que la determinación de la abscisa al origen, mediante el tratamiento gráfico, resulta difícil por la exactitud con la que debe hacerse dicho trabajo. Por tal motivo, se da la oportunidad de escribir directamente el valor de la abscisa al origen en el cuadro de datos de la abscisa (fig. 9).

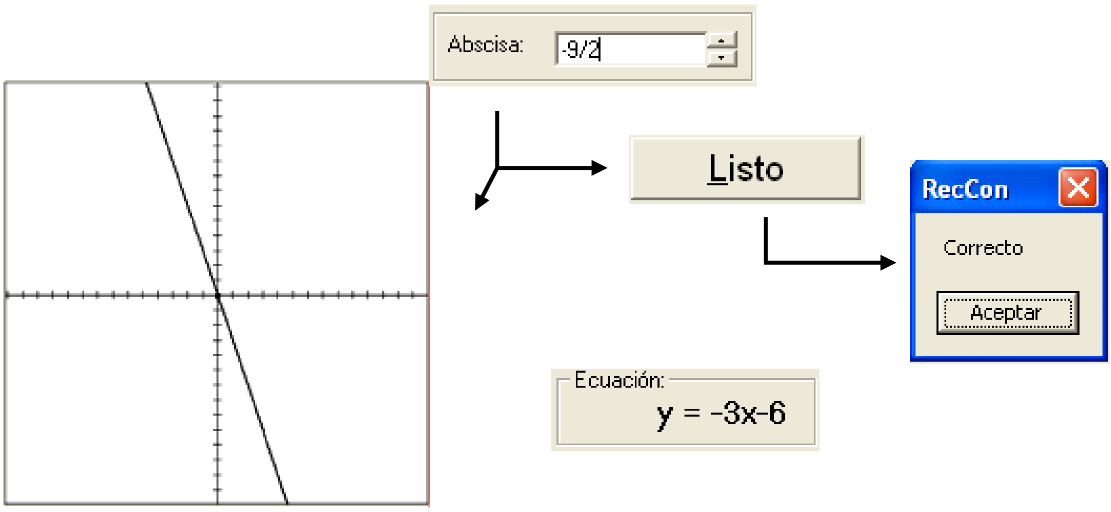


Fig. 9. Introducción numérica de la respuesta

Al igual que en el caso de los ejercicios descritos en el apartado anterior (determinar la ordenada al origen), la elección de la secuencia de opciones ***Rectas→Abscisa al origen→Forma general***, origina actividades partiendo de la ecuación $ax + by + c = 0$. Sin embargo, contrario a las tareas de ordenada al origen, en este caso las actividades resultan del mismo orden de dificultad a las de la forma común, ya que en ambos casos el estudiante tiene que la necesidad de analizar el comportamiento de dos parámetros y la forma en que éstos se relacionan ($-b/m$ y $-c/a$).

Obtener la pendiente partiendo de la ecuación

Como se ha explicado en los apartados anteriores, cuando se realizan actividades partiendo de la ecuación de la recta, se pueden utilizar dos formas algebraicas diferentes: la forma común, $y=mx + b$ y la forma general $ax + by + c=0$. En el caso de las actividades para la pendiente, también pueden utilizarse estas dos opciones, solo que ahora la tarea consiste en obtener la inclinación y/o la pendiente de la recta (fig. 10).

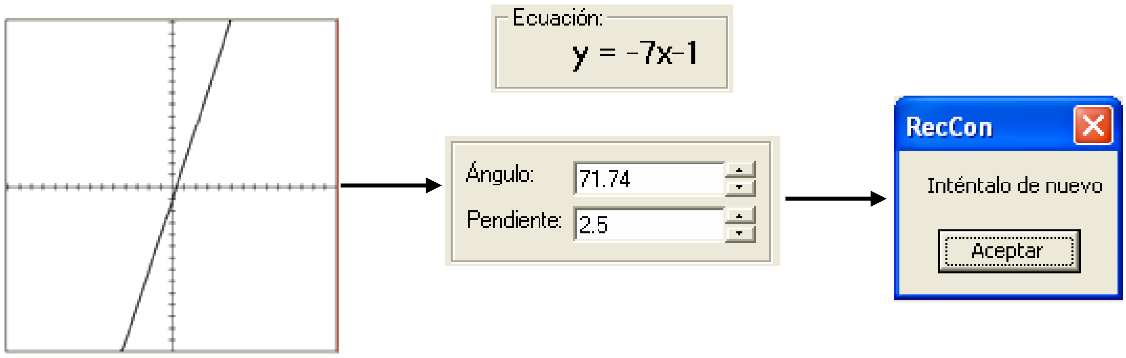


Fig. 10. Una actividad para determinar la inclinación y/o pendiente de la recta

Si bien se tiene la posibilidad de introducir los resultados a través de un tratamiento gráfico, como es de esperarse en estas actividades, la exploración por medio de un tratamiento numérico resulta más eficaz, debido al tipo de cantidades con las que se trabaja.

Las tres actividades previamente expuestas hacen énfasis en el entendimiento de los parámetros de una ecuación lineal; es decir, nos interesa que el estudiante identifique la relación entre cada uno de los parámetros y las variables visuales. Esto es, reconocer qué representan cada uno de los parámetros en una ecuación lineal en una gráfica. Estos parámetros o coeficientes son precisamente las variables significativas; aquellas que dan la información requerida para determinar el comportamiento grafico de una ecuación.

De igual manera en estas actividades se enfatiza la relación entre las representaciones gráfica y algebraica así como la conversión de una a otra.

Uno de los aspectos importantes para realizar la conversión *gráfica→ecuación* es encontrar las variables significativas de una gráfica y ver cómo se relacionan con la escritura algebraica, en el caso de gráficas de líneas rectas estos parámetros pueden ser:

1. La intersección de la recta con el eje "y", cuya traducción en términos algebraicos corresponde al término independiente (b en la forma común de la recta y c/b en la forma general).

2. La intersección de la recta con el eje "x", que al dividir al término independiente y cambiarle de signo dará el valor de la pendiente.

3. La inclinación que tiene la recta, lo cual determina el signo de la pendiente (positiva o negativa).

4. En conjunto, la intersección con el eje "x" y la inclinación de la recta, determinan el coeficiente de la variable "x" en la ecuación.

A su vez, en la conversión *ecuación→gráfica* se debe conocer lo que representa cada uno de los parámetros de la escritura algebraica y relacionarlos con la gráfica. Por ejemplo, para el caso de las ecuaciones lineales escritas en la forma común, $y = mx + b$, estos son:

1. El coeficiente independiente (b), compone la intersección de la línea con el eje y.

2. El coeficiente de “x” (m), representa la pendiente de la recta. Particularmente, su signo (positivo, negativo o cero) indica el tipo de inclinación (menor de 90°, mayor de 90° o cero, respectivamente) de la gráfica.

3. El cociente $-b/m$, que representa la intersección de la línea con el eje “x” (es decir, la abscisa al origen).

En el caso de las ecuaciones escritas en la forma general, $ax + by + c = 0$, las variables significativas que permiten la conversión *ecuación→gráfica* son:

Actividades relacionadas con la circunferencia

El estudio de la circunferencia es una de las actividades fundamentales en la geometría analítica. A nivel escolar este concepto puede servir para establecer un vínculo entre la geometría euclidiana y la geometría analítica ya que, al igual que la recta, es un concepto que se estudia en ambas asignaturas. Los estudiantes de bachillerato tienen una amplia experiencia previa con la circunferencia, tanto de sus características básicas (centro y radio) como de algunas propiedades que involucran a la circunferencia y sus segmentos, rectas y ángulos característicos.

El objetivo de las actividades con la circunferencia es establecer relaciones entre estos conceptos significativos y las características que presenta la ecuación de la circunferencia. Es en este sentido que las actividades que se describen a continuación hacen énfasis en la conversión *gráfica→ ecuación* y *ecuación→ gráfica*.

En RecCon, las actividades relacionadas con la circunferencia se activan seleccionando la secuencia de opciones ***cónicas→ círculo*** del menú principal, haciendo énfasis en el hecho de que la circunferencia es una de las curvas cónicas (ver fig. 11).

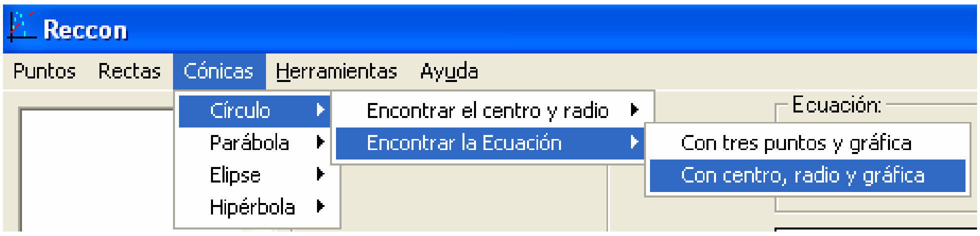


Fig. 11. Acceso a las actividades de la circunferencia

Actividad de conversión ecuación→ gráfica en la circunferencia

Para trabajar esta actividad se selecciona la opción ***encontrar el centro y radio→con centro, radio y gráfica***, que activará una pantalla semejante a la de la fig. 3, sólo que con la información correspondiente a la circunferencia (fig. 12).

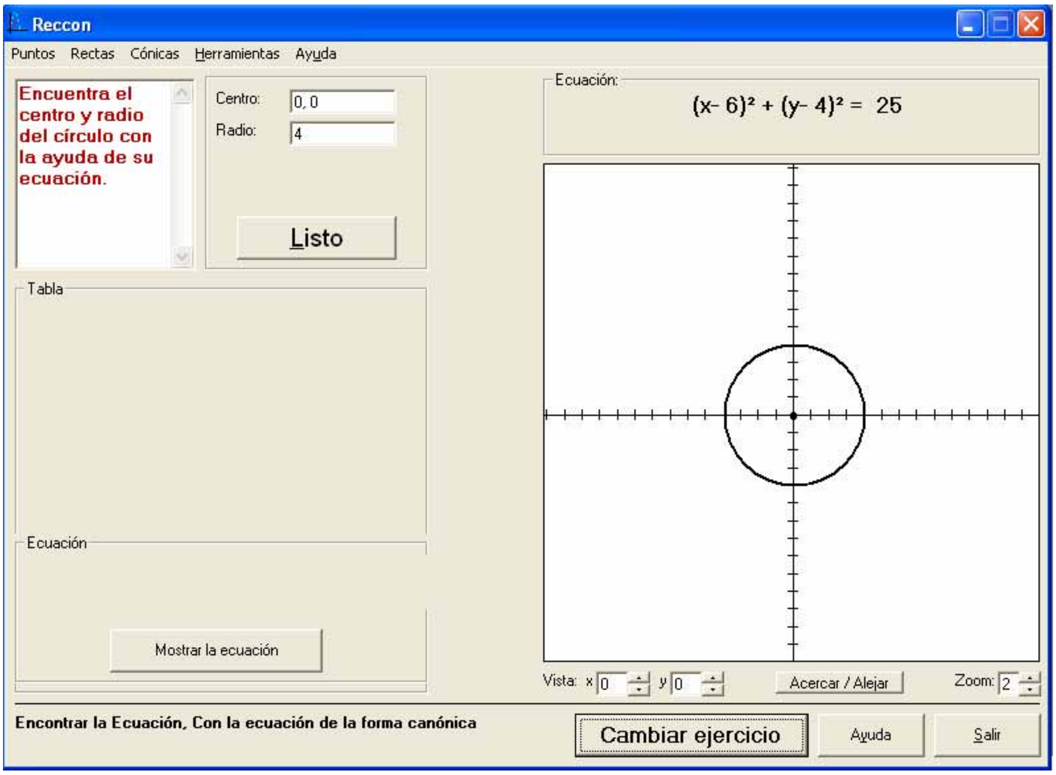


Fig. 12. Interfase de las actividades para la circunferencia

La tarea del usuario consiste entonces en mover y ajustar la circunferencia, trasladándola a partir de su centro y dilatándola utilizando su radio (fig. 13) para que la gráfica sea la representación de la ecuación que se presenta (ver secuencia de figuras 14 a 16).

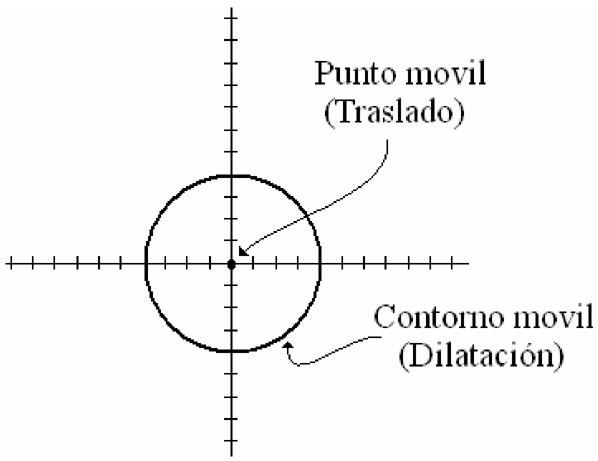


Fig. 13. Dos formas de hacer un tratamiento gráfico para la circunferencia

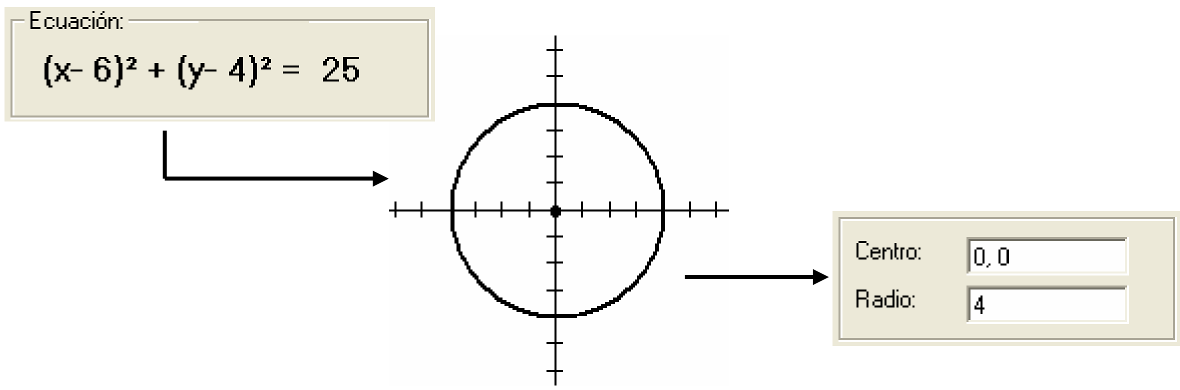


Fig. 14. Situación inicial de la actividad

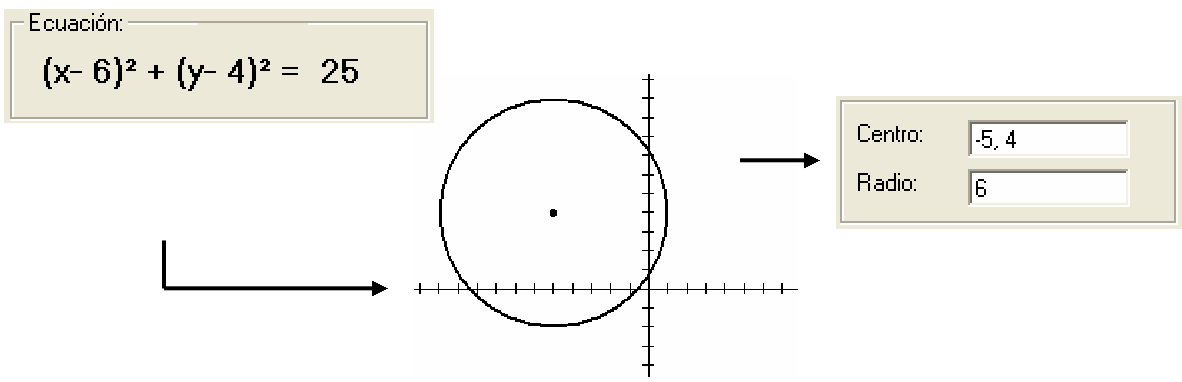


Fig. 15. Resultado de un primer tratamiento

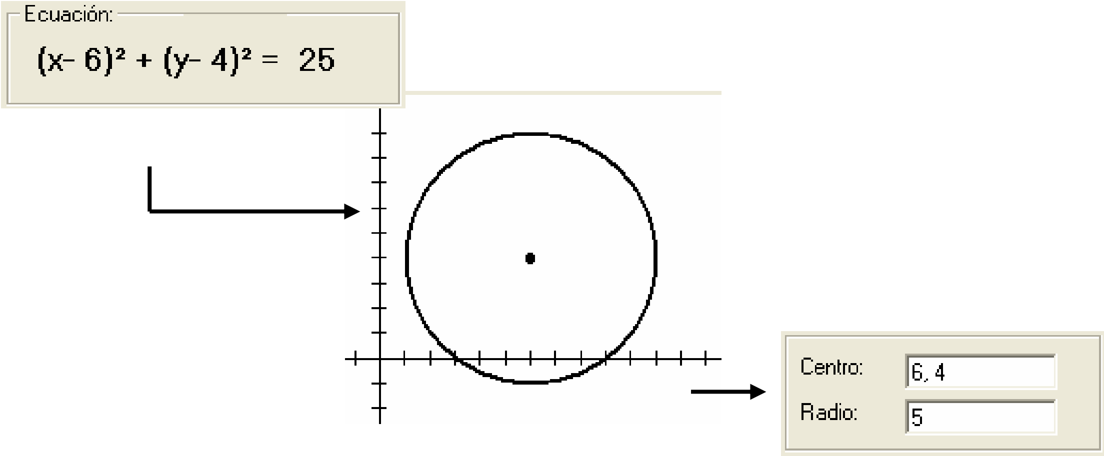


Fig. 16. Respuesta esperada

Actividad de conversión gráfica→ ecuación en la circunferencia

Estas actividades se activan mediante la secuencia de comandos ***encontrar la ecuación→ con centro, radio y gráfica***, cuya interfase es la que se muestra en la fig. 17.

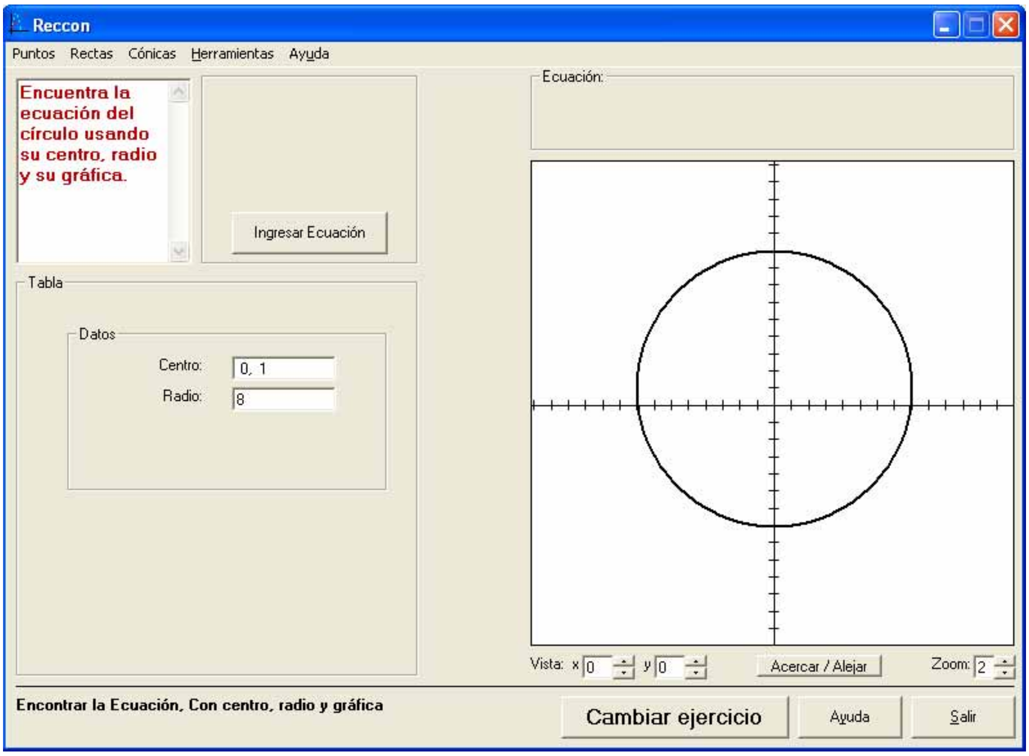


Fig. 17. Interfase de las actividades ***gráfica→ ecuación en la circunferencia***

Dos características especiales de esta interfase son: 1) la zona de datos, en donde se representan numéricamente las características de la circunferencia dada en la gráfica; y, 2) el botón ingresar ecuación, que despliega una calculadora especial incluyendo estructuras simbólicas específicas para las cónicas facilitando la introducción de la ecuación (fig. 18).

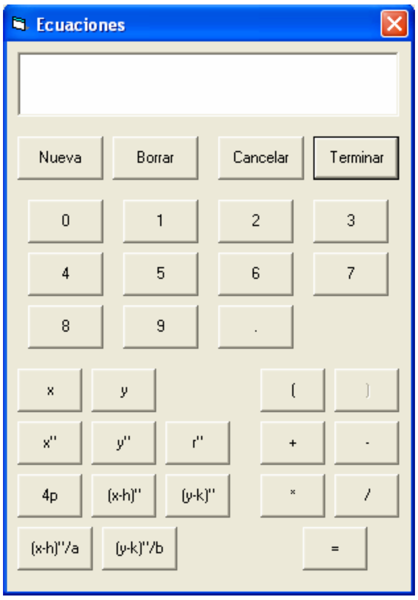


Fig. 18. Una calculadora con estructuras simbólicas específicas para las cónicas

Cuando se considera que la estructura simbólica introducida en la calculadora, corresponde a la ecuación de la circunferencia dada gráficamente, la tecla “terminar” permite la evaluación inmediata de la respuesta (fig. 19).

Secuencia de teclas para la introducción de la ecuación:

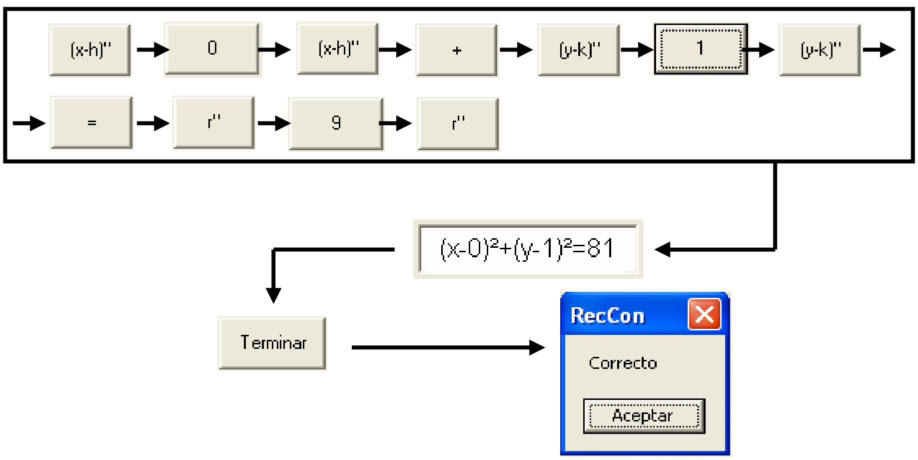


Fig. 19. Introducción de una ecuación y evaluación de la misma

Bibliografía

- Cortés, C. (2005) Manual del Software RecCon.
- DGB (2006). Dirección general del Bachillerato. Página de Internet de la Secretaría de Educación Pública. Disponible en: http://dgb1.sep.gob.mx. Consultada el 23/02/2006.
- Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: l'Articulation de deux registres. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (1988). pp. 235-253.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de las matemáticas.* SME-CINVESTAV, México, pp. 118-144.
- Hitt, F. E. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. En: *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. DME-CINVESTAV. MÉXICO 1992. pp.43-55.
- Hitt, F.- Chavez H. (1992). Visualización Relacionada a Conceptos de Cálculo con Microcomputadora. En: *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 2. UAEM. MÉXICO 1992. pp. 30-35.
- Mejia, H. (1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Memorias del Octavo seminario nacional de calculadoras* y *computadoras en educación matemática.* Universidad de Sonora. pp. 315-322.
- Suydam, M.- Dessart, D. (1980). "Skill Learning, Research in Mathematics Educations. En: R. Shumway (Ed.) *Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics. pp. 207
- Tall, D.- West, B. (1987). Graphic Insight into Calculus and Differential Equations. En: Churchhouse, R. F. et al (eds.). 1987. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. (ICMI). CAMBRIDGE: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. pp. 107-119.
- Tall, D. (1991). Computer environments for learning of mathematics. En: *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. pp.189-199.

José Carlos Cortés, Cuerpo Académico de Enseñanza de las matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México.
jcortes@umich.mx

Lourdes Guerrero, Cuerpo Académico de Enseñanza de las matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. México.
gmagana@umich.mx

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 119-147
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Las T.I.C. como herramienta educativa en matemáticas

Jesús Fernández Domínguez y José Muñoz Santonja

Resumen

Cada vez hay más personas que pueden acceder a las Tecnologías de la Información y Comunicación en todos los ámbitos sociales. En concreto en la enseñanza, la incorporación de esas tecnologías debe promover un cambio en la didáctica de muchas materias, por ejemplo de las Matemáticas. La modificación de métodos de cálculo, las posibilidades gráficas y dinámicas, el planteamiento de retos más creativos que la mera repetición de algoritmos se ven impulsados por la gran cantidad de programas interesantes que existen. En el artículo se presentan programas de utilización en clase (varios de acceso gratuito en Internet) junto con actividades concretas.

Resumo

Cada vez há mais pessoas que podem acceder às Tecnologias da Informação e Comunicação em todos os grupos sociais. No ensino, a incorporação de estas tecnologias tem de provocar uma mudança na didáctica de muitas matérias , por exemplo das Matemáticas. A modificação de métodos de cálculo, as possibilidades gráficas e dinámicas, o planeamento de objectivos mais creativos que só a repetição de algoritmos sao impulsados pela grande quantidade de programas interesantes que há. Neste trabalho vamos expor programas de utilização na sala de aula (alguns deles gratuitos na Internet) alem de actividades concretas.

Abstract

Every time there are more and more people who can get the Technologies of Information and Communication in every social circle. Talking about education, these technologies must promote a change in the teaching of many subjects, for example, in Maths. The changes in calculi methods, the graphic and dynamic possibilities, the approach of more creative challenges than the simple repetition of algorythms… are improved by many interesting programs. In this article we present programs of usage of these technologies in the classroom (there are many of them free in Internet) as well as many activities.

Introducción

Las Tecnologías de la Información y de la Comunicación son parte cotidiana de nuestra vida. Cualquier avance tecnológico en esas materias es inmediatamente asimilado por la sociedad. Cada vez más personas acceden a ellas casi a diario:

cuando utilizamos un cajero bancario, para comunicarnos a través de nuestros teléfonos móviles, cuando recibimos la información que se produce al instante en cualquier parte del mundo a través de las antenas parabólicas, etc.

A pesar de lo inmovilista que suele ser el mundo educativo (en el que en muchos casos seguimos utilizando las herramientas y procedimientos didácticos que se utilizaban hace siglos), es indudable que las T.I.C. también están influyendo en modificar los métodos de la enseñanza. Somos de la opinión (y así queremos mostrarlo en este artículo) que esas tecnologías pueden servir para una mejor adquisición de contenidos por parte de los alumnos e, indudablemente, prepararlos de una forma satisfactoria para desenvolverse en una sociedad cada vez más tecnificada.

En otras materias del periplo educativo se vienen utilizando desde hace tiempo todos los medios audiovisuales que están a nuestro alcance: proyectores de diapositiva en Historia del Arte o en Educación Plástica y Visual, retroproyectores de transparencias, videos educativos en Ciencias Naturales, aparatos de audio en clase de idioma, etc. Pero la verdad es que esos mismos elementos, útiles en la enseñanza de la matemática (donde hay excelentes videos didácticos o son innumerables las posibilidades para las representaciones gráficas con un retroproyector), no han sido aprovechados en su totalidad. Esa utilidad se ha multiplicado exponencialmente con la llegada de las T.I.C., por lo que no debemos perder esta gran oportunidad de incorporarlas a nuestras clases. La disminución en el precio de las calculadoras gráficas y los ordenadores permite que cada vez más centros educativos puedan disponer de ellos como recurso educativo.

Es verdad que nosotros nos encontramos en una situación excepcional en comparación con la que tienen que sufrir muchos de nuestros lectores. Pertenecemos a un centro público de la Comunidad de Andalucía en España. Esta comunidad ha apostado fuertemente por no perder el tren de la revolución tecnológica y está dotando de ordenadores a los centros educativos seleccionados en una convocatoria que tiene lugar todos los años. Los centros seleccionados cada año reciben una dotación de ordenadores y redes intranet que pueden variar desde convertir todas las aulas en TIC, dotando de un ordenador para cada dos alumnos o simplemente dotando de ordenadores a los departamentos y otros estamentos como biblioteca, secretaría, asociación de padres de alumnos, etc. Nuestro centro está en un nivel intermedio ya que disponemos de tres aulas fijas TIC (cuya utilización ronda a veces el 80% del tiempo disponible) y dos aulas de portátiles para un centro de secundaria con unos 24 grupos de alumnos (desde 1º de E.S.O. hasta un módulo profesional de nivel superior). Nuestro centro en concreto ya tenía inquietudes en este sentido desde hace años. En la primera tanda de introducción de los ordenadores en la enseñanza, a medidos de la década de los ochenta del pasado siglo (el conocido como Plan Alhambra), ya conseguimos un aula de Informática, que pocos años después se completó con una de Multimedia, por lo que los profesores interesados llevamos varios años trabajando con el ordenador en nuestras clases. Nuestra intención con este artículo es hablar un poco de nuestra experiencia en este campo, utilizando ejemplos concretos que nosotros llevamos a nuestras clases de matemáticas.

Las TIC en la clase de matemáticas

Partiendo del supuesto de que tenemos equipos informáticos en el centro, vamos a hablar un poco de las formas de obtener rendimiento didáctico en nuestras clases de matemáticas con ellos. Si solo disponemos de un equipo cuya imagen puede proyectarse (a través de un cañón) podremos aprovechar las posibilidades de cálculo, pero sobretodo visuales que nos permiten afrontar aspectos gráficos y geométricos difícilmente reproducibles en la pizarra. Si además contamos con un aula dotada de ordenadores de forma que cada pareja de alumnos pueda disponer de un equipo entonces estamos en disposición de sacar realmente aprovechamiento de las herramientas informáticas. Si hay más de dos por ordenador suelen plantearse situaciones problemáticas que ponen en peligro la experiencia.

El ordenador tiene gran capacidad de atracción en los alumnos, aunque hay que procurar no abusar de esa herramienta, pues de lo contrario se corre el peligro de que pierda su gran atractivo. Hemos comprobado que alumnos que son pasivos e incluso disruptivos en clase, delante del ordenador cambian su actitud y al menos trabajan dentro de sus capacidades y actitudes. En años anteriores hemos podido comprobar que el material de matemáticas al que se puede acceder, por ejemplo en Internet, es muy útil para atender a la diversidad de nuestras aulas. Ya que cada alumno puede desenvolverse a su ritmo natural de trabajo y que muchas actividades pueden ajustarse a distintos niveles de dificultad, las herramientas de las que disponemos nos permiten tener trabajando a todos los alumnos, cada uno dentro de sus capacidades y aptitudes.

Como profesores siempre debe preocuparnos que los alumnos que trabajan con las TIC estén sacando verdaderamente aprovechamiento didáctico de esos elementos, pues a veces nos podemos encontrar con que los alumnos están entretenidos, pero no sacan nada en claro del trabajo que están realizando. Por ello se debe complementar el ordenador con otra serie de pruebas y actividades donde reflejen realmente los conocimientos adquiridos.

La metodología que solemos usar con nuestros alumnos es la siguiente: cuando vamos a tratar una parte específica de la materia en el ordenador, nosotros preparamos una hoja de actividades para realizar con el programa concreto con el que vayamos a trabajar. Esas actividades se realizan en el aula de informática y los resultados van pasando al cuaderno del alumno. En posteriores ocasiones realizan una serie de actividades de evaluación, unas veces directamente con el ordenador y en otras ocasiones con lápiz y papel, o bien en una puesta en común en clase. Para nosotros es muy importante que el cuaderno de trabajo muestre las actividades, razonamientos y procesos seguidos, por lo que regularmente los recogemos y evaluamos.

Muchos compañeros de nuestro centro suelen utilizar el aula de informática como una puerta de acceso al gran banco de información, permanentemente actualizada, que es Internet, sin embargo en matemáticas existen posibilidades muy superiores al mero hecho de conseguir información en la red. Nosotros vamos a plantear aquí cómo es más provechoso utilizar programas de aplicación matemática (muchos de ellos encontrados gratuitamente en Internet) para explicar distintos contenidos, y como también es posible encontrar en Internet actividades interactivas con las que el alumno puede aprender o practicar paso a paso las actividades que queremos que realicen. Para no insistir más en las posibilidades de este recurso, vamos a pasar a poner ejemplos concretos de cómo trabajar con programas y actividades de ordenador.

¡Basta de hacer números!

Es indudable que la educación matemática ha cambiado en los últimos treinta años. Hoy en día a ningún profesor, en su sano juicio, se le ocurre explicar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada, el manejo de las tablas trigonométricas o de logaritmos. De todos modos seguimos siendo remisos a desechar una serie de operaciones aritméticas (por ejemplo los clásicos "castillitos" de fracciones) que han quedado obsoletas[1]. Actualmente nadie realiza operaciones a mano (aunque algunos alumnos son aficionados a contar con los dedos) y apenas mentales fuera del entorno educativo. Si vamos a cualquier comercio las operaciones la realizan los ordenadores o si es en comercios pequeños siempre se echa mano de la calculadora[2]. Con la introducción de las calculadoras en la vida cotidiana, está claro que la enseñanza de los números debe cambiar, debemos potenciar por ejemplo la estimación mental de forma que cuando se obtenga un resultado disparatado con la calculadora (ya que cualquiera puede equivocarse al dar a una tecla) la persona sepa darse cuenta de que existe un error, asimismo hay que desarrollar el manejo correcto de los datos y saber qué operación es la que debemos realizar (cosa que no siempre saben nuestros alumnos).

Por supuesto, el tipo de actividades debe cambiar al trabajar con un ordenador o calculadora (al menos científica). Ya no tiene sentido realizar cierto tipo de

---

[1] Un grupo de profesores canarios ha elaborado un manifiesto a favor de la abolición de los algoritmos de lápiz y papel. En la siguiente dirección puede encontrarse información sobre este tema dentro de los documentos de lectura. http://nti.educa.rcanaria.es/cep_laguna/recursos/Capicua_2002/Recursos.html

[2] En todo momento nos estamos refiriendo a lo que sucede en España y Portugal pues es lo que nosotros conocemos, ya sabemos que en muchos países iberoamericanos el panorama es diferente y es mucho más difícil acceder a las nuevas tecnologías.

cálculos (que lo hace la propia máquina), y lo importante es que el alumno comprenda el procedimiento y sepa qué significa y qué es lo que hay que realizar. Por ejemplo no tiene mucho sentido plantear el simplificar la fracción 117/175, ya que una sola tecla realiza la operación, pero la cosa cambia si le pedimos una fracción equivalente a 117/175 cuyo numerador sea 42, ya que en este segundo caso la calculadora no hace la operación si el alumno no tiene claro qué significa ser equivalente y cómo hay que hacer para calcularlo.

Del mismo modo, no tiene mucho sentido pedirle que calcule el máximo común divisor de 24 y de 18, que cualquier programa de cálculo realiza en décimas de segundo, pero es distinto pedirle cuál es la mayor medida que deben tener unos azulejos cuadrados con los que se pueda recubrir un mural de 2.40 m. por 1.80 m., también aquí si el alumno no tiene claro el concepto de máximo común divisor, será incapaz, por muy buena herramienta informática que tenga, de resolver el problema.

El ordenador nos puede servir para llamar la atención sobre la importancia de la jerarquía de operaciones y la necesidad de paréntesis. Un alumno que no tenga claro este concepto, se equivocará al calcular con la calculadora la división $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ pues lo normal es que escriba 2:3:4:9 que es en realidad $\frac{2}{3\cdot 4\cdot 9}$. Para obtener lo que se quiere, debe escribir 2:3:(4:9).

Otro ejemplo sería encontrar un número natural mayor que 500 cuya raíz cúbica esté comprendida entre 7 y 8. El alumno se puede ayudar de la calculadora para hacer las operaciones, pero desde luego ésta no le va a resolver el problema si él no tiene claro la potenciación y radicación.

Otro ejemplo sería calcular el periodo de un número decimal. El alumno debe saber que cualquier fracción lleva asociada una expresión decimal exacta o periódica y qué representa el periodo. También que para saber cuál es el periodo a veces necesitamos conocer más cifras decimales de las estándar que nos da la máquina. Por ejemplo, si preguntamos cuántas cifras tiene el periodo de la fracción $\frac{45}{127}$ necesitamos sacar más decimales de los clásicos 10 para encontrar la solución. Podemos ver un ejemplo en la imagen de la figura 1.

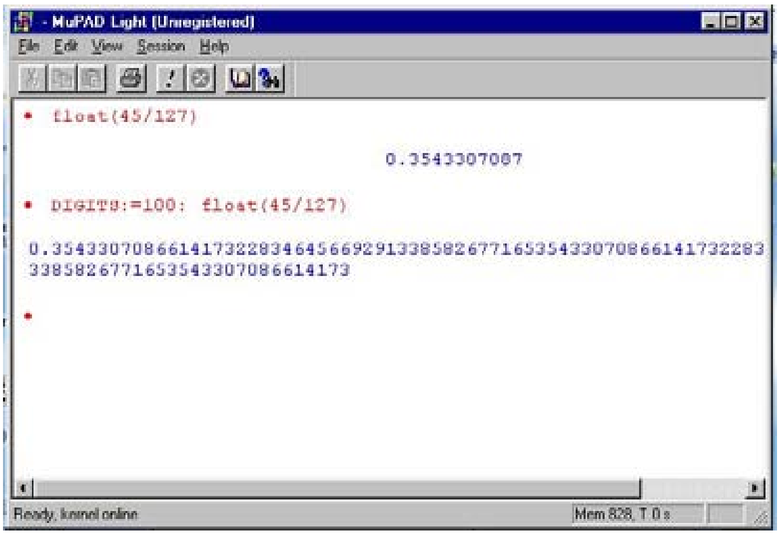


Figura 1

Vamos a hablar un poco de los programas que se pueden utilizar en esta parte. Existen multitud de programas que realizan operaciones aritméticas aunque la gran mayoría de ellos tienen muchas más aplicaciones al ser muy potentes. Quizás el más conocido y para el que hay más material es el programa Derive[3], tiene el inconveniente de no ser un programa gratuito, aunque es posible encontrar una licencia gratuita por treinta días en muchos lugares (cualquier buscador los encuentra con facilidad), a continuación te proponemos algunos de ellos:

http://derive.uptodown.com/

http://www.geomundos.com/descargas/derive_p1347.html

http://www.matematicas.net/paraiso/softwin.php

Otro programa que se puede encontrar en Internet es el MUPAD, del cual existe una versión para Windows y también para Linux. Este programa es el que hemos utilizado en la figura 1. No es gratuito (al menos la versión para Windows), pero es posible encontrar una versión MUPAD Light que tiene licencia gratuita para la enseñanza. Podéis encontrarlo por ejemplo (junto con otro programa llamado Maxima) en la dirección:

http://pcmap.unizar.es/~pilar/mupad.html

Por último, queremos hacer referencia a un programa llamado Calculadora Wiris que tiene un gran potencial tanto en el tema de aritmética como en álgebra,

---

[3] Durante un par de años, profesores de nuestro centro hemos participado en un proyecto de investigación organizado entre la Universidad Autónoma de Madrid y el Centro de Profesorado de Sevilla sobre la utilización de las TIC en el aula de matemáticas. Se trabajaba básicamente con tres programas Derive, Cabri y Excel. Quién esté interesado en la experiencia puede consultar la página www.infoymate.net donde además existen muchos otros recursos educativos interesantes.

análisis, representación gráfica en 2 y 3 dimensiones, etc. En la figura 2 podéis observar la presentación de esta herramienta:

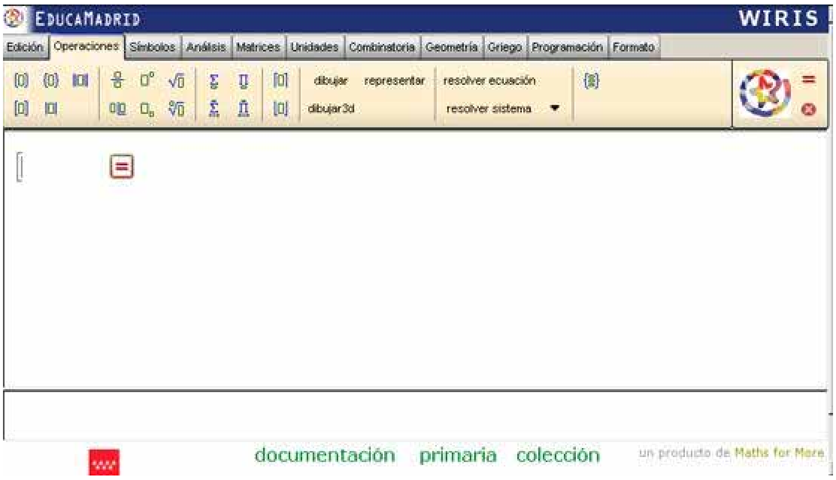


Figura 2

La misma está a disposición de todo el que lo desee en algunos lugares correspondientes a distintas comunidades autónomas españolas (existen por ejemplo una versión en catalán) y aunque en algunos es necesario darse de alta como usuario, en otros está de libre acceso como por ejemplo en la Comunidad de Madrid, que es de donde hemos tomado la imagen anterior, donde existe una clara documentación para aprender a utilizarla así como actividades concretas creadas para realizarlas con la calculadora e incluso un apartado dedicado a Primaria. Tiene el inconveniente de que es necesario estar conectado a Internet para trabajar con ella, pero tiene la ventaja de que es rápida de aprender a usar y muy potente. En la siguiente dirección se puede encontrar.

http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/

En el archivo que aparece en el Anexo hay un ejemplo de una actividad realizada con los alumnos[4]. Después de trabajar en la pizarra tres días de la semana, el cuarto íbamos a los ordenadores, se les entregaba unas hojas como la del ejemplo y durante esa sección se trabajaba actividades como las de la clase, pero con el ordenador. La única diferencia es que nosotros trabajamos con Derive y que en la hoja del ejemplo lo adaptamos a la Calculadora Wiris, para que todos puedan conectarse y probarla.

Los programas de los que hemos hablado antes, permiten también trabajar todos los aspectos de álgebra a un nivel no universitario. Podemos resolver ecuaciones y sistemas, realizar operaciones con matrices y determinantes e incluso trabajar con inecuaciones y representar recintos.

[4] Corresponde a nuestra trabajo en la investigación de la que hablamos antes y que se desarrolla en la línea que puedes encontrar desarrollada en la página de infoymate.

Como antes comentamos, eso nos obliga al trabajar con los ordenadores y a modificar las actividades que realizamos. Es absurdo quedarnos en resolver un sistema de ecuaciones que cualquier de los programas tarda menos de un segundo en encontrar la solución, pero sí es importante saber interpretar el resultado y qué quiere decir que un sistema no tenga solución o tenga infinitas, y cuál es la relación entre sus ecuaciones.

Los programas de cálculo simbólico de los que hemos hablado suelen incluir posibilidades gráficas. Por ejemplo en la figura 3 podemos ver la representación en el espacio de las tres ecuaciones lineales de un sistema, por lo que es posible observar la posición relativa de los planos que la forman.

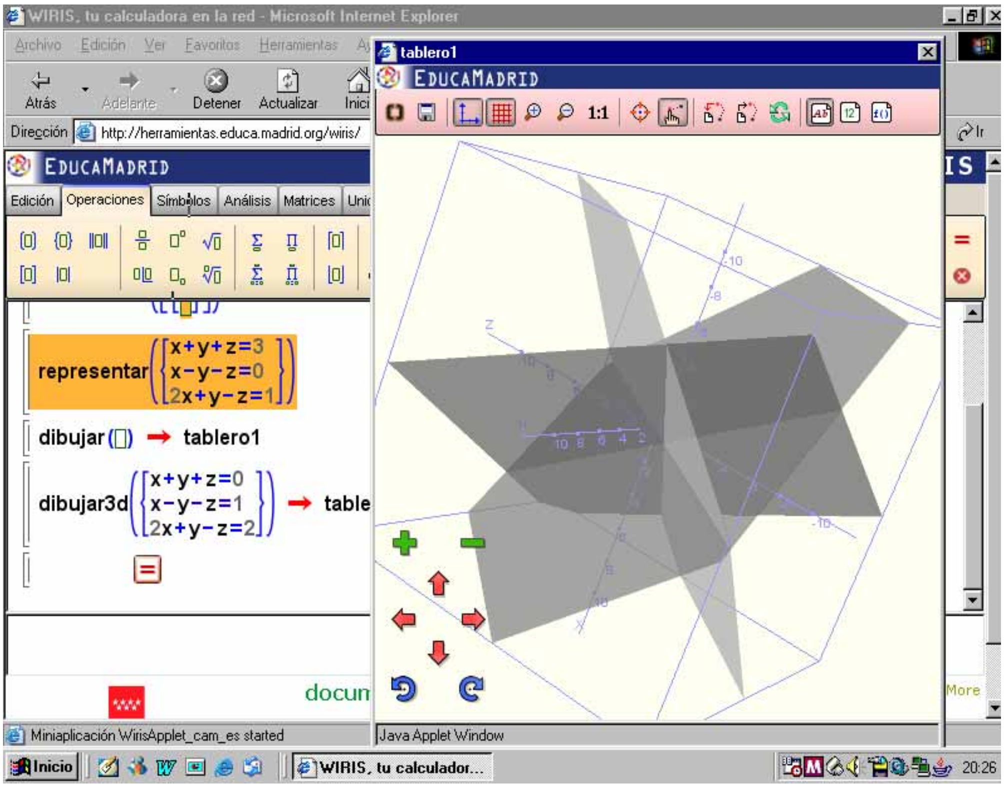


Figura 3

Ejemplo de actividades donde el alumno no tiene que hacer las operaciones pero sí tiene que tener clara la teoría que sustenta la parte en la que trabajamos son:

1. Halla un polinomio que al dividirlo entre $12x^3+5x^2-20x+9$ se obtenga de cociente $3x^2-6x+3$ y de resto $x-6$.
2. Escribe un polinomio con coeficientes enteros que tenga las siguientes raíces: $x1 = 4/3$; $x2 = 5/2$ y $x3 = -1$.
3. Escribe un polinomio de grado cinco que sólo tenga una raíz real $x=6$ y que su valor numérico para $x=1$ sea 60.

4. Halla una fracción, con un polinomio de grado 5 en el numerador, equivalente a $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2 + 3}$

En la figura 4 vemos cómo es posible resolver la inecuación $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} \geq 0$ y representar gráficamente la zona solución junto con la propia fracción algebraica. En este caso hemos utilizado el programa Derive.

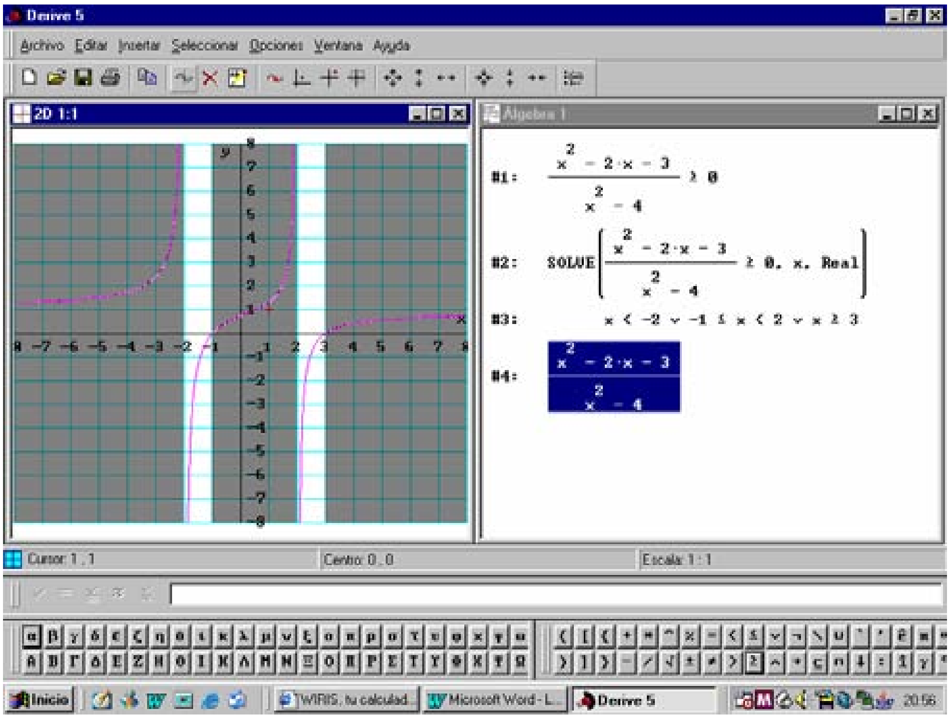


Figura 4

Geometría: … y sin embargo se mueve

Posiblemente sea la parte de Geometría donde más interés tenga la utilización del ordenador como recurso didáctico. Las posibilidades de los programas de geometría dinámica hacen que aspectos visuales de la geometría se puedan ver en movimiento y comprobar propiedades en múltiples casos, algo impensable en la pizarra. Por ejemplo, podemos dibujar en un triángulo cualquiera sus tres bisectrices, y comprobar que siempre se cortan en un mismo punto: el incentro. Incluso dibujar la circunferencia inscrita de forma muy fácil. La ventaja es que una vez dibujado podemos tomar un vértice y modificar el triángulo, mientras observamos que el incentro sigue siendo el centro de la circunferencia circunscrita.

Dentro de los programas de geometría dinámica, seguro que el más conocido es el Cabri Geometre. Este programa no es gratuito, pero pueden encontrarse en Internet licencias gratuitas por un mes, por ejemplo en la siguiente dirección.

http://www.cabri.com/v2/pages/es/downloads_cabri2plus.php

Lo importante es qué posibilidades nos da el programa[5]. Veamos un ejemplo que hemos hecho en clase. A los alumnos se les entregan unas hojas de ejercicios donde se les van proponiendo una serie de actividades en las que tienen que abrir unos ficheros Cabri (previamente realizados por nosotros), con los que se pretende que los alumnos trabajen el Teorema de Thales. En la imagen vemos una de las actividades donde aparece la pantalla que se abre al utilizar el archivo de Cabri indicado.

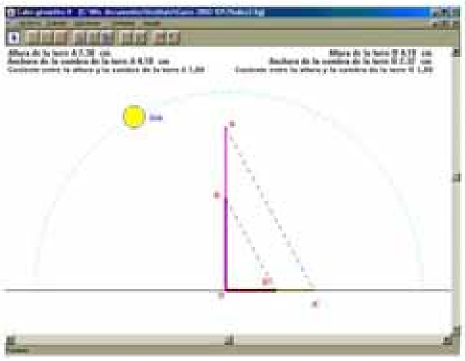
ACTIVIDAD THALES 2

Abre el fichero Thales2.fig

Ahora, en vez de un árbol se tienen dos torres cuyas alturas vienen determinadas por dos puntos A y B respectivamente. Y dos sombras definidas por otros dos puntos A' y B'.

Copia las siguientes preguntas y respóndelas en tu cuaderno

Ejercicio 1: ¿Cómo son los triángulos OAA' y OBB'?, ¿por qué tienen esa propiedad?, ¿cómo puedes comprobarlo por los valores de la pantalla?



Mueve el SOL lentamente a lo largo del arco y mira con detenimiento cómo cambian los valores de las alturas de las torres, de las longitudes de ambas sombras y de los cocientes entre las medidas de las alturas y los valores de las sombras.

Ejercicio 2: ¿Qué ocurre con las medidas anteriores cuando mueves el Sol? ¿A qué crees que es debido?

Ejercicio 3: ¿Qué ocurre con la medida de la sombra cuando el Sol "se pone", es decir, llega a la línea horizontal?

La actividad consta de tres ficheros Cabri, que de forma gráfica, manipulable y con ejemplos relacionados con la vidad real, intentan introducir y presentar el citado teorema de Thales a los alumnos[6].

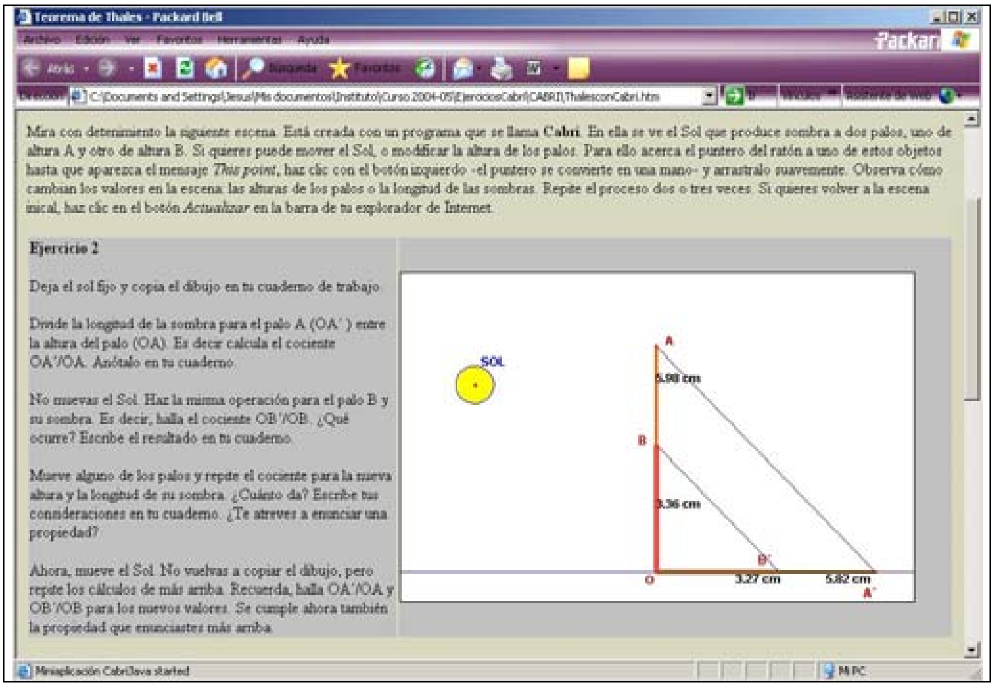
Otro método para trabajar el mismo contenido y con idéntica intencionalidad didáctica, consiste en transformar los ficheros Cabri a CabriWeb, y a continuación

[5] En la página personal de Jose Manuel Arranz San Jose pueden encontrarse muchos archivos en Cabri para utilizar en clase. La direción es http://roble.pntic.mec.es/jarran2/.

[6] Como se puede apreciar no es nuestro interés que el alumno aprenda a utilizar el programa Cabri, sino que lo utilice para aprender matemáticas. Esta será nuestra norma en todos los casos de programas que utilizamos.

crear un documento Html donde se combinan los ejercicios planteados en la hojas que se entrega a los alumnos y los ficheros Cabri, que aparecerán como escenas manipulables. Ésta presentación siempre resulta más atractiva a los alumnos, y también más cómoda de utilizar en el aula de informática.

Veamos cómo se plantea la actividad de la imagen superior con este segundo método.



En ambos casos se les pide a los alumnos que escriban en sus cuadernos de trabajo las operaciones necesarias para realizar las actividades, y las conclusiones que de ellas se deduzcan.

Otro programa que nos gusta para esta parte es el Geogebra, también de Geometría dinámica pero mucho más, como veremos en el siguiente apartado. Geogebra es un programa muy potente, software libre (y por tanto de descarga gratuita), que funciona tanto en Windows como Linux. Su entorno de trabajo es de fácil aprendizaje por parte del profesorado, y permite la creación de actividades muy interesantes por su interactividad para el alumnado de Secundaria y Bachillerato. Los contenidos que se pueden trabajar son, preferentemente, geometría y funciones.

El creador de GeoGebra es Markus Hohenwarter, y se puede bajar en la dirección www.geogebra.at . En esta página se puede encontrar información sobre el programa, foros de intercambio de actividades y tutoriales.

A continuación, veamos un ejemplo de utilización de GeoGebra. En este caso para trabajar las relaciones entre los ángulos de un triángulos en 2º ó 3º de ESO.

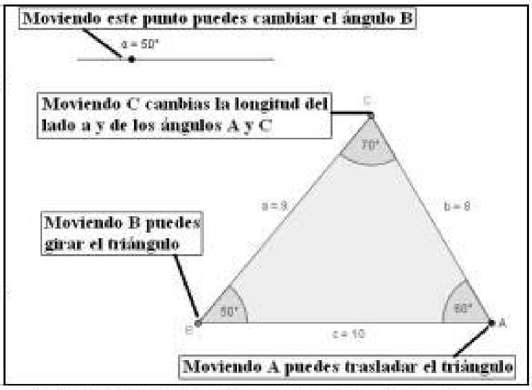
Como ya se ha hecho en otras ocasiones, al alumno se le entrega una hoja donde se les indica qué archivo GeoGebra tiene que abrir, se explica con brevedad las acciones que puede realizar en él, y seguidamente se le plantean unas actividades que debe contestar en su cuaderno de trabajo.

En la imagen siguiente se puede ver con claridad lo expuesto anteriormente.

ACTIVIDAD 1

Abre el documento Geogebra Triángulos1. Su aspecto es parecido al de la figura siguiente: Mueves los distintos objetos y observa cómo influyen en el triángulo los cambios. Al final, deja la figura como estaba al principio.

Utiliza **Triángulos1** para contestar las siguientes cuestiones.



a) Completa la tabla siguiente si α, β y γ son los tres ángulos de un triángulo.

Ángulos	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3	Triángulo 4	Triángulo 5
α	41º	35º	120º	132º	90º
β	82º	75º			
γ					

b) ¿Cuánto vale la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo?

c) Define triángulo acutángulo. Y triángulo obtusángulo.

d) ¿Qué es un triángulo rectángulo? ¿Cuánto vale la suma de los dos ángulos no rectos de un triángulo rectángulo?

e) Completa esta otra tabla donde A, B y C son los ángulos y a, b y c son los lados del triángulo.

	A	B	C	a	b	c
Triángulo 1	23º	132º		9		10
Triángulo 2		50º	100º	5		10
Triángulo 3	132º	25º		19		10
Triángulo 4	80º					10

f) ¿Encuentras alguna relación entre el tamaño de los lados y la amplitud del ángulo opuesto? Piensa y descríbela.

g) Dos triángulos con los mismos ángulos (aunque en orden diferente), ¿le corresponden los mismos lados?

h) Construye un triángulo con los tres ángulos iguales, ¿cómo son sus lados? ¿cuál es el nombre de estos triángulos?

i) Construye un triángulo con dos ángulos iguales, ¿cómo son sus lados? ¿cuál es el nombre de estos triángulos?

ACTIVIDAD 2

Con la ayuda de **Triángulos1** dibuja, en las casillas en que sea posible, un triángulo con las características que se indica. Escribe en cada caso:

a) Las relaciones de igualdad o desigualdad que existen entre los lados y los ángulos.
b) El tipo de ángulos que tiene cada triángulo y su valor.
c) La longitud de sus lados.
d) Si en alguna casilla no es posible dibujar ningún triángulo, explica la razón.

Triángulos		Según sus lados		
		Equilátero	Isósceles	Escaleno
Según sus ángulos	Rectángulo			
	Acutángulo			
	Obtusángulo			

Existen otros muchos programas de geometría en Internet de acceso libre. Entre ellos recomendamos uno llamado Regla y Compás, o el Geonext, aunque también se pueden encontrar el Kgeo o el DrGenius.

Funcionar como un reloj

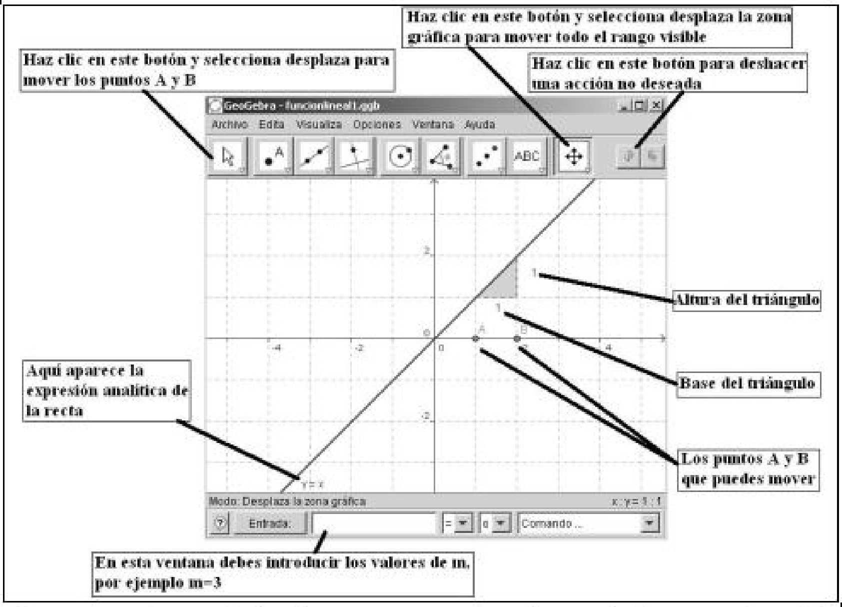
La parte de gráficas y funciones es otra que permite muchas actividades y muy interesantes, ya que la facilidad de representación gráfica y del estudio de elementos de la gráfica de una función hacen muy visual y claro el estudio de esta parte de la matemática.

Varios de los programas de los que hemos hablado anteriormente permiten actividades de funciones y gráficas. Por ejemplo, un programa potente puede ser Derive, o la calculadora Wiris de la que hablamos antes. Pero veamos otros programas, por ejemplo la siguiente actividad con Geogebra.

Como en ocasiones anteriores, se entregan a los alumnos unas hojas de actividades donde se les pide que abran un archivo GeoGebra. Al principio de esta hoja se explica de forma breve el funcionamiento del fichero (intentamos que éste sea siempre los más sencillo posible). Posteriormente, se desarrollan las actividades encaminadas en este caso a trabajar los dos parámentros asociados a la función linea: pendiente y ordenada en el origen. Se intenta que su estudio sea intuitivo, y que sea el alumno quien saque sus propias conclusiones a la vista de los cambios que se producen en la gráfica de la función lineal, al modificar estos parámetros en la expresión analítica de ella.

En esta primera página se trabajan las funciones de proporcionalidad directa.

Abre el fichero funcionlineal1, inmediatamente aparecerá un documento GeoGebra con el aspecto siguiente:



Fíjate con detenimiento en cada uno de los elementos que se describen en la figura superior. Si quieres mover un punto, o cualquier otro objeto, debes seleccionar la opción desplaza del primer botón por la izquierda de la barra de herramientas. Si lo que deseas es mover la cuadrícula, disminuir o aumentar su rango, debes elegir la opción correspondiente en el último botón de la citada barra. En la ventana de Entrada o Ingresa deberás escribir el valor de la pendiente de la recta que quieres dibujar. Por ejemplo, si la recta es $y = 3x$ debes escribir $m = 3$.

ACTIVIDAD 1

La recta que aparece en la gráfica es $y = x$, es de proporcionalidad directa con pendiente $m = 1$. Junto a la recta aparece un triángulo que te ayudará a entender el concepto de pendiente de una función lineal.

Mueve los puntos A y B, y observa cómo cambia el triángulo, pero la relación entre la altura y la base de él siempre es la misma: 1. Es decir, puedes calcular la pendiente de una recta formado estos triángulos y dividiendo la altura entre la base. Recuerda que si la recta es creciente la pendiente es positiva, y si la recta es decreciente la pendiente es negativa.

ACTIVIDAD 2

a) Dibuja con Geogebra la función de proporcionalidad directa $y = 3x$. Para ello da el valor $m = 3$. Observa como en el triángulo que se dibuja se cumple lo explicado en la actividad anterior. Es decir, al dividir la altura entre la base del triángulo el resultado es 3. Si mueves A y B se continuará manteniendo la proporción anterior. Dibuja en tu cuaderno de trabajo la recta con su ecuación y el triángulo.

b) Repite el apartado anterior para las rectas $y = -2x$, $y = 0.5x$, $y=-3x$, $y=(2/3)x$.

En la segunda hoja, se estudian las funciones lineales en general.

En las actividades de la hoja anterior estudiastes la pendiente de las funciones de proporcionalidad directa. En esta hoja vas a trabajar la **ordenada en el origen** de las funciones lineales.

Vuelve a abrir el fichero funcionlineal1. Recuerda, la función que aparece representada es $y = x$. Su pendiente es 1 y como corta al eje Y en el 0, la ordenada en el origen es 0.

ACTIVIDAD 4

Escribe en la entrada $n = 2$. Contesta las siguientes preguntas en tu cuaderno de trabajo.

a) ¿Ha cambiado la gráfica de la recta? ¿Cómo ha cambiado?
b) ¿En qué punto corta ahora la recta al eje Y?
c) ¿Cuál es la expresión analítica de la recta? ¿Cuál es la ordenada en el origen?
d) ¿Ha cambiado la pendiente respecto de $y = x$?
e) Representa la recta, señalando con claridad cual es su ordenada en el origen.

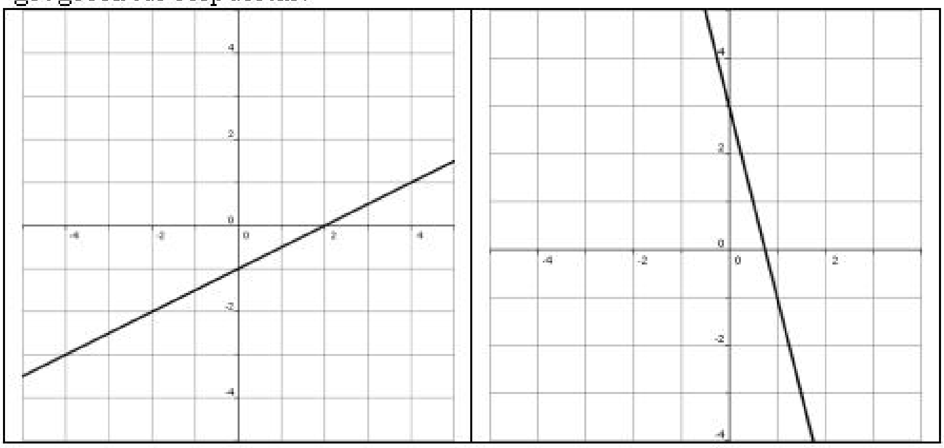
ACTIVIDAD 5

Vuelve a contestar las cuestiones de la actividad anterior para los siguientes valores de m y n:

a) $n = 4$,	b) $n = -3$,	c) $m = -3$ y $n = 1$,	d) $m = 2$ y $n = -2$

ACTIVIDAD 6

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones lineales. Comprueba con geogebra tus respuestas:



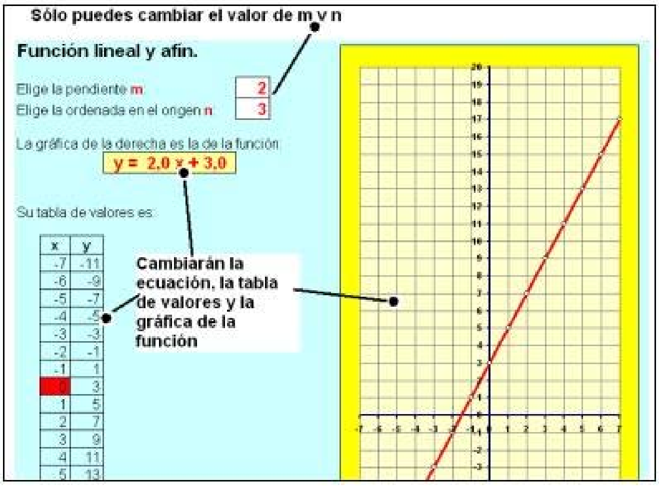
Otro programa que puede utilizarse para las funciones es una hoja de cálculo. Aunque en el apartado siguiente hablaremos más detenidamente de estas herramientas, vamos a ver aquí un ejemplo donde hemos utilizado la hoja de cálculo Excel que pertenece al programa Microsoft Office.

En concreto, esta actividad está diseñada para alumnos de 3º de ESO. Se desean trabajar los parámetros que intervienen en la función lineal: la pendiente y la ordenada en el origen.

En la imagen inferior aparece parte del contenido de la hoja que se le entrega al alumno. Éste debe trabajar con un archivo Excel que nosotros hemos creado previamente y donde están las celdas protegidas de forma que sólo puedan modificar aquellos aspectos que nos interesan, en concreto la pendiente y la ordenada en el origen.

ACTIVIDAD 1

En el disco C: de tu ordenador existe un fichero de nombre **FunciónLinealconExcel**, ábrelo. Aparece un documento de la hoja de cálculo Excel que tiene el siguiente aspecto.



El fichero permite representar funciones lineales y afines. Recuerda, estas funciones tienen una expresión del tipo $y = mx + n$. Para dibujar la gráfica debes escribir el valor de **m** y **n** en las celdas correspondientes. Obseva cómo cambian la ecuación, la tabla de valores y la gráfica.

Todas la tareas que se te van proponer debes contestarlas en tu cuaderno de trabajo, el documento Excel es sólo una ayuda.

a) Para empezar, representa las funciones $y = 2x$, $y = 2x + 3$. ¿Qué observas? ¿Cómo son las gráficas de ambas funciones? ¿A qué crees que es debido? ¿En qué puntos cortan ambas funciones al eje de las Y?
b) Haz el ejercicio 4 de la página 218 de tu libro.
c) Si las gráficas de dos de las funciones anteriores son rectas paralelas, ¿cómo son sus pendientes?
d) La función cuya grafica es una recta horizontal, ¿cuánto vale su pendiente?
e) ¿Cómo influye el valor de **n** en la gráfica de las funciones anteriores? ¿Qué relación tiene **n** con el punto de corte con el eje de las Y?

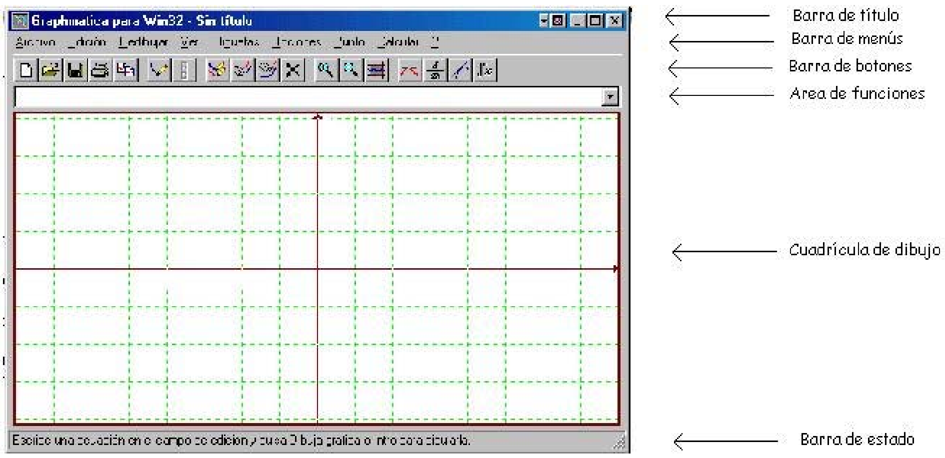
Existe otro programa que hemos utilizado bastante y que tiene muchas posibilidades. Nos referimos a Graphmática que es un programa gráfico para dibujar funciones. Aunque es muy simple de utilizar tiene unas grandes prestaciones ya que podemos citar las siguientes posibilidades:

1. Dibujar la gráfica de una función en distintos tipos de coordenadas (cartesianas, polares, logarítmicas, etc...)
2. Dibujar gráficas de funciones definidas a trozos.
3. Localizar las coordenadas de puntos correspondientes a una gráfica ya dibujada.
4. Trazado de rectas tangentes a una función.
5. Cálculo de derivadas de una función.
6. Cálculo de áreas definidas por una función continua o de regiones limitadas por varias funciones.

Es un programa de tipo Freeware (gratuito), fácil de conseguir en Internet, basta escribir Graphmatica en cualquier buscador y salen muchas páginas. En concreto, dos de las páginas donde puede encontrarse el archivo son las siguientes:

www8.pair.com/ksoft/espanol/grmat16n.html
www.matematica.uda.cl/descargas/graphmatica.html

La ventana de Graphmática es similar a cualquier otra aplicación Windows. El funcionamiento del programa es muy intuitivo, y su configuración muy adaptable.

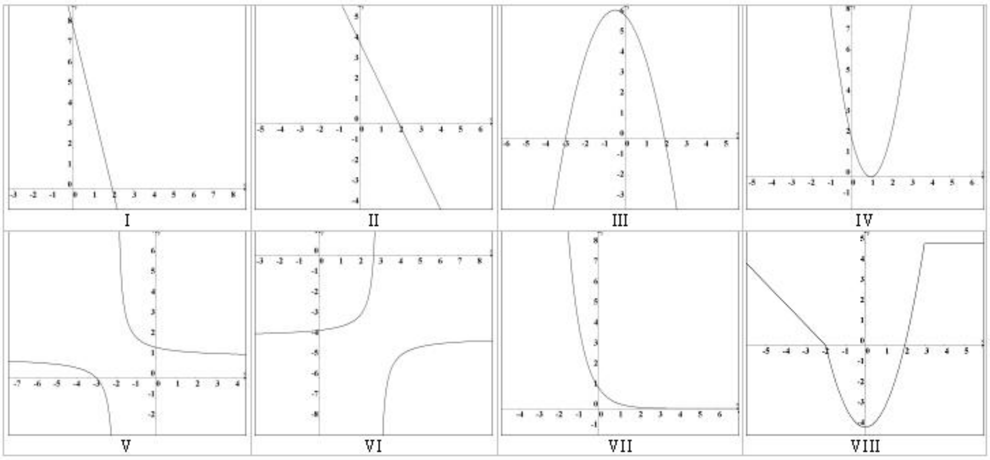


Veamos un ejemplo de utilización de este programa para trabajar las gráficas y sus expresiones analíticas de las funciones que se estudian en 4º ESO: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y definidas por partes.

Hemos utilizado esta actividad como repaso final, después de haber trabajado los contenidos descritos anteriormente. Los alumnos ya conocen cómo funciona el programa. Están distribuidos en grupos de dos por equipo informático. Se les entrega la siguiente hoja de actividades.

ACTIVIDAD

Halla las expresiones analíticas de las siguientes gráficas de funciones. Calcula también sus dominios, recorridos, posibles asíntotas y cortes con los ejes.



El objetivo de la actividad es que los alumnos deduzcan la expresión analítica de cada una de la funciones. Gracias a Graphmática (o algún programa similar), podrán comprobar rápidamente si sus respuestas son acertadas. Lo que favorece la autonomía en su trabajo, el debate entre los miembros de los grupos, y descargar al profesor de la corrección inmediata de las tareas realizadas por los alumnos.

Hay que señalar que Graphmática dispone de un zoom, lo que significa disponer de una herramienta muy útil y visual a la hora de estudiar las asíntotas de las funciones de proporcionalidad inversa, las exponenciales o las logarítmicas. Al alejar repetidas veces el zoom, se ve con claridad cómo las gráficas de las funciones se convierten en rectas rápidamente.

¡Si la Estadística no miente…!

Desde la aparición de las primeras calculadoras de bolsillo, las operaciones estadísticas fueron las primeras que desaparecieron del papel para ser realizados con la nueva tecnología. Hoy en día a nadie se le ocurre realizar los tediosos cálculos estadísticos a mano. Eso nos permite que volquemos nuestro interés en el tema de nuestro estudio, la realización de las preguntas necesarias para recoger la información precisa, la selección de la muestra y sobretodo la interpretación de los resultados.

Lo mejor para trabajar con datos estadísticos son las hojas de cálculo, que a través de sus funciones estadísticas nos permiten calcular cualquier parámetro estadístico, comparar resultados y representar gráficamente en dos o tres dimensiones los datos. La más conocida y extendida debe ser la Microsoft Excel (perteneciente al paquete Microsoft Office), pero existen otras que podemos encontrar en Internet. Para todo aquel que haya manejado Excel puede ser interesante la O.O. Calc (perteneciente al paquete Open Office) ya que es prácticamente clónica de Excel, e incluso permite manejar los archivos de Excel. El paquete Open Office (que se compone además de un procesador de textos como Word, una base de datos, un editor de fórmulas, un elaborador de presentaciones como Power Point y más cosas) es gratuito y existen versiones para Linux y para Windows, desde las siguientes direcciones puedes descargarte el paquete completo:

http://es.openoffice.org/programa/
http://open-office.malavida.com/descarga/windows/225

Otra hoja de cálculo también gratuita es GNUMERIC, inicialmente pensada para entorno Linux, pero que también puede encontrarse versión para Windows en la siguiente dirección:

http://www.programas-gratis.net/php/programa2.php?id_programa=8240

otra dirección para Gnumeric es

http://descargas.terra.es/ie/10624/Gnumeric

Gnumeric tiene incluidos numerosos cálculos estadísticos accesibles muy fácilmente. En la figura 5 puedes observar las posibilidades al desplegar el menú de herramientas.

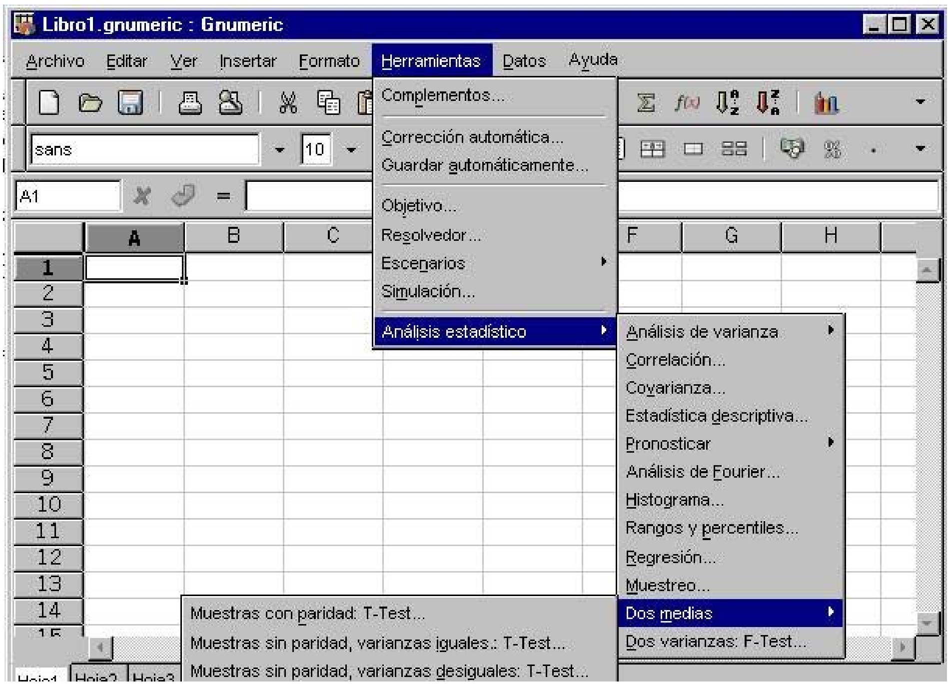


Figura 5

Cualquier cálculo que haya que realizar en una enseñanza media queda de sobra cubierto por esta hoja de cálculo.

Por ejemplo, si tomamos una serie de datos y seleccionamos la opción Estadística descriptiva nos aparece una hoja nueva con los cálculos que podemos ver en la figura 6.

	A	B
1		*Columna 1*
2	Media	5,9
3	Error estándar	0,7371114795832
4	Mediana	6,5
5	Moda	7
6	Desviación estándar	2,33095116493961
7	Varianza de la muestra	5,43333333333333
8	Curtosis	−1,01283450637962
9	Desviación	−0,44216921492324
10	Rango	7
11	Mínimo	2
12	Máximo	9
13	Suma	59
14	Cuenta	10
15		

Figura 6

La hoja de cálculo permite también preparar actividades para Probabilidad. Por ejemplo, si queremos trabajar con la Ley de los Grandes Números repartimos un dado a los alumnos de forma que cada uno realice por ejemplo 20 lanzamientos y escriba la tabla de frecuencias absoluta y relativa de los resultados. Si en una hoja vamos incluyendo los datos de cada alumno y los agrupamos, podemos observar cómo al aumentar el número de lanzamientos las frecuencias de cada cara tienden a centrarse en valores iguales. En la imagen 7 vemos cómo sería la presentación de la hoja de cálculo en las filas 4 a 9 de las columnas de la B a la Z. Se van incluyendo los resultados de los alumnos y en la tabla inferior se suman y se halla la frecuencia relativa del total. Mediante una gráfica se puede ver cómo van cambiando las frecuencias y como tienden a fijarse en un valor muy cercano para todos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1																			
2																			
3	Resultados del dado	Frecuencias absolutas																	
4	1	4	2	3	4														
5	2	5	5	2	3														
6	3	2	3	4	1														
7	4	3	1	6	6														
8	5	2	6	2	1														
9	6	4	3	3	5														
10	Total =	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11																			
12																			

	A	B	C
13	Resultados del dado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
14	1	13	0,16
15	2	15	0,19
16	3	10	0,13
17	4	16	0,2
18	5	11	0,14
19	6	15	0,19
20	Total =	80	1
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			

Figura 7

Programas y más programas

Hasta el momento hemos utilizado herramientas que no están creadas propiamente con la idea de enseñar, es decir, no son verdaderos materiales didácticos pero sí se les puede utilizar como recurso para aprender matemáticas. Sin embargo, en Internet existe un amplio mundo de programas de todo tipo creados específicamente para la enseñanza y que pueden servirnos para que los alumnos estudien, aprendan, practiquen y repasen todos los conceptos que queramos. Intentar citar aquí la mayoría de esos sitios sería impensable pues puede llevar varios años hacer un listado explicado de esas posibilidades. Nosotros vamos a indicar algunos con los que hemos trabajado en clase, que nos han dado resultados y todos ellos están a disposición gratuita de cualquiera; además, salvo la última, las demás pueden bajarse al ordenador y no es necesario estar trabajando con ellas conectados a Internet, lo que suele añadir ventajas de velocidad y fiabilidad por que no nos quedaremos colgados de pronto.

En primer lugar, podemos encontrar este tipo de programas en páginas personales de profesores. Por poner un ejemplo nos referiremos a la página personal del profesor Jordi Lagares Roset, que imparte clases en un instituto de Gerona, en el impresionante pueblo de Besalú, y que tiene programas para simular muestras estadísticas, o para explicar gráficamente la función de distribución normal. Su página es:

http://www.xtec.es/~jlagares/indexcastella.htm

Dentro de esta página existen muchos programas creados por el profesor Lagares y que distribuye gratuitamente. Por ejemplo un programa para resolver problemas de programación lineal. Muchos de sus programas tienen versiones en distintos idiomas como español y catalán, e incluso en otros idiomas: portugués, euskera, gallego.

También podemos encontrar programas propios y utilidades en la página web de los centros educativos. Existen muchas, y como ejemplo os aconsejamos la del I.E.S. Salvador Dalí de Madrid cuya dirección es:

http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/

En ella podéis encontrar materiales para calculadoras gráficas, actividades con cabri-web, programas propios y sobretodo creemos interesante el material de un premio que se le concedió por la Comunidad Autonoma de Madrid con el título: “Materiales audivovisuales, informáticos y manipulables para el tratamiento de la diversidad en la ESO”.

A veces, un profesor lanza un proyecto y muchas más personas se incorporan a él. Un caso de ello es la herramienta CLIC creada por Francesc Busquets y que fue premiada en el año 1992 por el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (PNTIC) del Ministerio de Educación de España. A ese proyecto se han acogido muchos profesores y hoy en día cuenta con un banco de actividades impresionantes. Los programas CLIC disponen de una serie de pantallas interactivas donde el alumno realiza las actividades y se va creando un informe de los aciertos y fallos. Ejemplo de actividades son, por ejemplo, asociar dos conceptos (por ejemplo una ecuación con su solución, una operación con su resultado, etc.) tal como vemos en la figura 8.

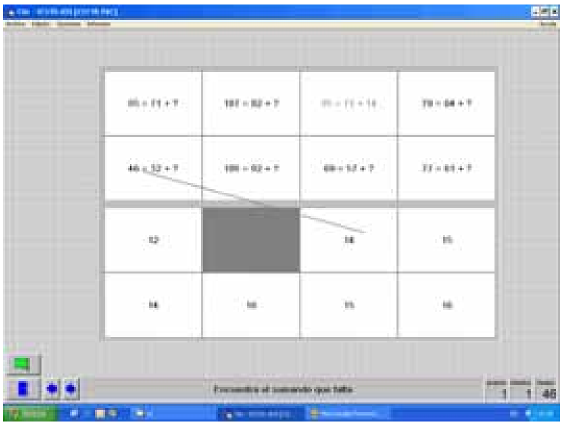


Figura 8

O crucigramas donde hay que escribir elementos matemáticos o resultados de operaciones:

Figura 9

Últimamente el programa se ha transformado en JCLIC, que va en soporte Java y por tanto puede utilizarse tanto en Windows como en Linux. Para utilizar esta herramienta es necesario instalar primero el programa y después descargarse las actividades que nos interesen (las hay de casi todas las materias y de todos los niveles no universitarios). Podemos encontrar toda la información en la dirección:

http://clic.xtec.net/es/jclic/index.htm

donde también se explica cómo es posible crear unidades nuevas por cualquier profesor interesado.

Nosotros utilizamos este programa sobre todo en una asignatura optativa que existe en Andalucía llama Refuerzo de Matemáticas que suele ir dirigida a aquellos alumnos con dificultades en la asignatura (por ejemplo los alumnos con la asignatura pendiente de cursos anteriores). Nos suele dar muy buen resultado, ya que los alumnos se entretienen y con el informe final podemos controlar cuál es el conocimiento real que tienen.

Otras veces, es una entidad educativa la que presenta el material, como vimos anteriormente con la calculadora Wiris. Entre todas las herramientas que conocemos para Secundaria, la más potente quizás sea el programa Descartes desarrollado por el CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa) dependiente del Ministerio de Educación y Ciencia. La herramienta Descartes consiste en una pantalla interactiva en la que los alumnos pueden realizar muchas actividades. A partir de esa pantalla se ha creado todo un banco de unidades didácticas, aplicaciones y herramientas para cubrir prácticamente toda la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato (en total de 12 a 18 años). En las unidades didácticas se explican los conceptos que se van a trabajar y posteriormente se plantean ejercicios que el alumno resuelve con ayuda. Una pantalla de ejemplo podemos verla en la figura 10.

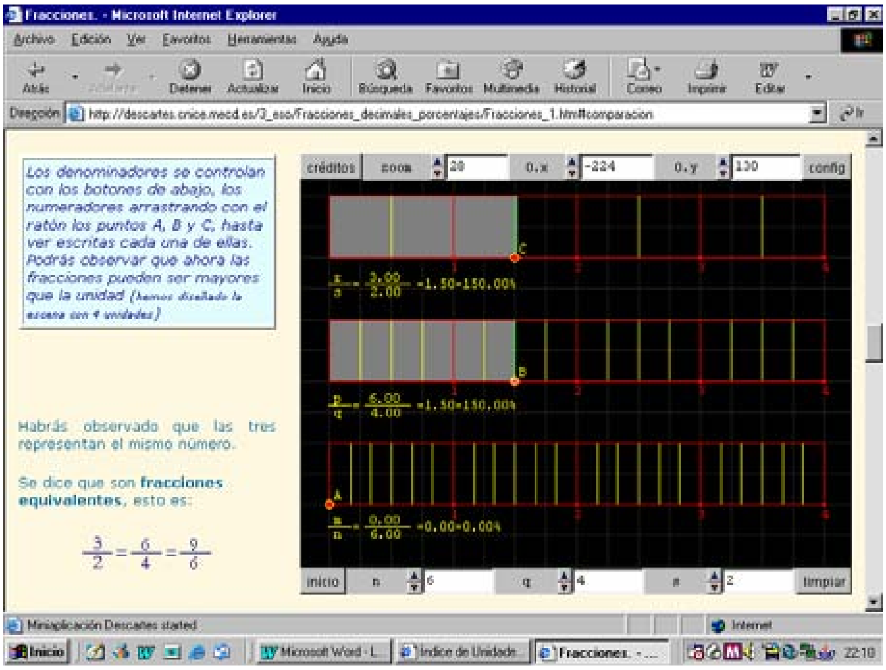


Figura 10

Las unidades didácticas a disposición del profesorado y cualquier persona con un mínimo conocimiento de creación de páginas web puede modificar fácilmente el texto y ejercicios de la unidad adaptándolo a sus alumnos. También hay cursos gratuitos por Internet para aprender a manejar la herramienta y crear unidades y aplicaciones nuevas. Toda la información puede encontrarse en la dirección

http://descartes.cnice.mecd.es/

donde nos encontraremos con la pantalla de la figura 11. En ella aparecen todas las posibilidades, incluyendo un apartado de experiencias en donde profesores que hemos trabajado en los cursos de formación contamos cómo hemos utilizado la herramienta, especificando las unidades utilizadas y la forma de llevarlas a clase y evaluarlas.

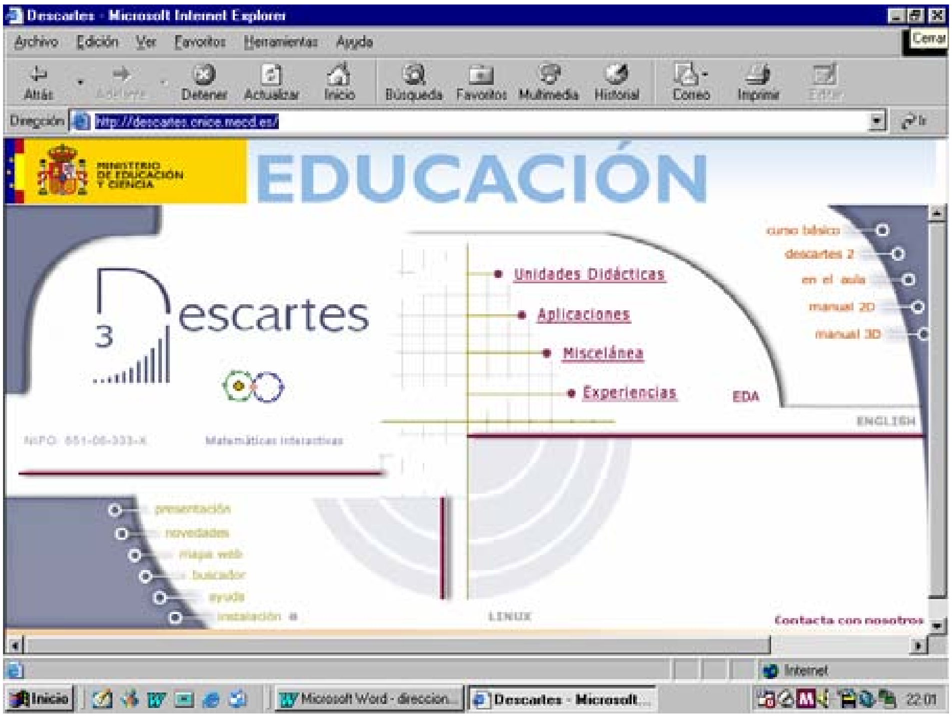


Figura 11

Para terminar presentamos una serie de materiales que, de forma equivalente, se pueden encontrar en muchas comunidades autónomas. Nosotros presentamos la que corresponde a la Junta de Andalucía, aunque es un material que es de libre acceso por parte de cualquier persona desde Internet. En la dirección:

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos/area_matematica.php3

se puede encontrar mucho material útil para el profesor y en concreto muchas actividades interactivas para los alumnos. Por ejemplo, en el apartado de *Refuerza y* *amplía tus matemáticas*, se pueden encontrar muchas pantallas con ejercicios a realizar directamente y además se van añadiendo a la lista los ya hechos a medida que se consiguen realizar correctamente. En la figura 12 podemos ver un ejemplo de una de ellas.

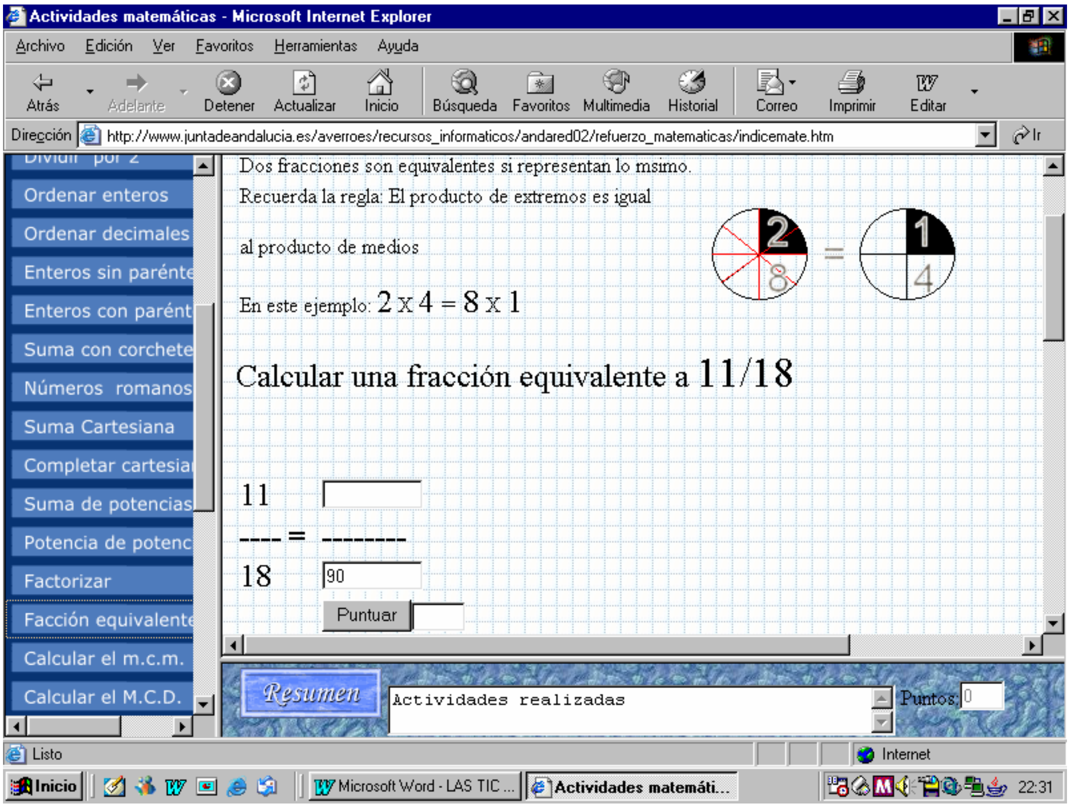


Figura 12

A veces podemos encontrar en Internet no exactamente programas interactivos, sino ejemplos visuales que permiten ver muchas propiedades matemáticas de una forma muy clara. Para ello, se utilizan archivos de movimiento en gif o archivos en java que permiten presentar demostraciones y comprobaciones matemáticas. Existen miles de páginas donde encontrar estos elementos, un ejemplo de una muy completa es la siguiente donde podemos encontrar 279 ejemplos en java para diversas partes de la asignatura:

http://www.ies.co.jp/math/java/

en la imagen siguiente puedes ver un ejemplo de como se dibuja la gráfica de la función seno.

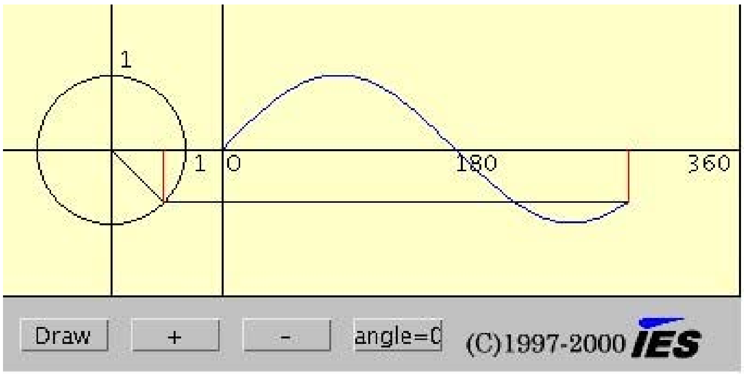


Figura 13

Para terminar

Nuestro objetivo en este artículo ha sido mostrar un poco las posibilidades que el ordenador muestra como herramienta didáctica en clase de matemáticas. Hemos hablado de parte del material que en algún momento hemos utilizado en mayor o menor medida, pero siempre dejando claro que en Internet se pueden encontrar de forma gratuita muchas más posibilidades y que depende del profesor seleccionar aquella que más le interese, atendiendo al tipo de alumnado de que dispone.

Siempre hemos intentado que la utilización del ordenador no sea abusiva (para no perder su potencia motivadora) y utilizarlo siempre englobado dentro de la práctica diaria, es decir que no se viera como un hecho extraño y aislado. Hemos potenciado también que el alumno fuera quien investigara y elaborara las matemáticas que debía aprender, es decir, que no fuera un sujeto pasivo sino el motor del proceso de aprendizaje y tenemos que decir que aunque las TIC no son un milagro (también hemos tenido alumnos a los que ha sido imposible interesar en el proceso) sí hemos conseguido que alumnos que en una clase tradicional no hacen nada provechoso, delante del ordenador participen al menos del trabajo propuesto.

Si conseguimos que alguno de los lectores que hayan conseguido llegar hasta aquí (lo que es un gran esfuerzo, hay que reconocerlo) se sienta con el interés de probar alguna de las opciones que hemos ofrecido, merecerá la pena el trabajo desarrollado en este artículo.

Por si alguien quiere ponerse en contacto con nosotros para cualquier comentario o consulta os esperamos en:

http://ficus.pntic.mec.es/~jmus0004

Paso a paso

Ejercicio 1

Calcula: $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2} \right)$

Solución:

En la **Entrada de Expresiones** escribe: 3/4/(1/6-5+1/2)

Pulsa **Calcular** ( ), y obtendrás el valor $-\frac{9}{52}$.

Ejercicio 2

Calcula el producto de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ *por* $\frac{5}{4} - \frac{2}{3}$

Solución:

Para respetar la jerarquía de operaciones, en la **Entrada de Expresiones** escribe:

(1/2+1/3)*(5/4-2/3)

Tras pulsar **Calcular** obtienes $\frac{35}{72}$.

Ejercicio 3

Halla la expresión decimal de $\frac{34}{13}$. *¿Su expresión decimal es periódica? En caso afirmativo, ¿cuál sería el periodo?*

Solución:

Escribe en **Entrada de Expresiones** **34/13*1.0**, pulsa **Calcular**[7] y obtendrás 2.6154.

Como sabes todo número racional tiene una expresión decimal exacta o periódica. **WIRIS** por defecto sólo escribe cinco cifras significativas.

En el caso del número anterior no sabemos si tiene más cifras decimales, ni podemos averiguar el periodo con las que conocemos.

Para conseguir más cifras significativas debes usar la orden **precisión**.

Escribe en el lugar correspondiente:

Precisión(15);34/13*1.0

Al pulsar en el igual obtienes el valor **2.61538461538462**.

Luego el número es periódico puro y su periodo es 615384.

Ejercicio 4

Calcula el valor de $\frac{7}{5} - 3$*, y su valor absoluto.*

Solución:

Escribe en la **Entrada de Expresiones** **7/5-3** y pulsa el igual, obtendrás $-\frac{8}{5}$.

En la solapa de **Operaciones** elige el valor absoluto (es el icono segundo por la izquierda de la parte de abajo,) y cuando aparezca en la pantalla escribe de nuevo **7/5-3**. Al pulsar **Calcular** obtenemos $\frac{8}{5}$.

---

[7] Siempre que se trabaja con fracciones el resultado es una fracción, para obtener la expresión decimal necesitamos que aparezca algún decimal por eso multiplicamos por 1.0.

Ejercicio 5

Halla el error absoluto y relativo que se comete al tomar 0.165 como valor de $\frac{13}{79}$.

Solución:

Introduce en **Entrada de Expresiones |13/79-0.165|** y pulsa **Calcular**, 0.00044304. Observa que el error cometido es menor que una milésima.

Para calcular el error relativo debe dividir el valor absoluto anterior entre la fracción, escribe por tanto en **Entrada de Expresiones**

|13/79-0.165|/(13/79),

y pulsa **Calcular,** con lo que obtendrás el valor 0.0026923.

Práctica

Ejercicio 6

Escribe la fracción resultante de las siguientes operaciones:

a) $5:\left(6+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{5}$; b) $\frac{27-34}{51-67}$; c) $\frac{3/4}{9/7}$

Ejercicio 7

¿Cuánto queda al restarle al doble de la suma $\frac{7}{3}+\frac{-3}{4}$ *la quinta parte de* $7-\frac{3}{4}$*?*

Ejercicio 8

He obtenido el resultado $\frac{22}{5}$ *al efectuar, ¿qué operación?*

a) $\frac{77/105}{6}$; b) $\frac{77}{105/6}$; c) $\frac{77\cdot105}{6}$; d) $\frac{77}{105\cdot6}$

Ejercicio 9

Halla las expresiones decimales de las fracciones siguientes y escribe sus periodos.

$$\frac{1}{7};\ \frac{2}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{5}{7};\ \frac{6}{7}$$

¿Encuentras alguna curiosidad en esos periodos?

Ejercicio 10

Indica qué tipo de expresión decimal (exacta, periódica pura o mixta) tienen los siguientes números racionales:

a) $\frac{47}{23}$; b) $\frac{2632}{2975}$; c) $\frac{4289}{3125}$; d) $\frac{67}{43}$

Ejercicio 11

¿Cuántas cifras decimales tiene el periodo de la expresión decimal de $\frac{103}{131}$*?*

Ejercicio 12

Indica de los siguientes números, cuáles son racionales y cuáles irracionales a partir de su expresión decimal.

a) $\sqrt[5]{32}$; b) $\sqrt{17}$; c) $\sqrt[3]{\frac{15}{9}}$; d) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Ejercicio 13

Halla el valor absoluto de las expresiones:

a) $\frac{4}{3}-\sqrt{2}$; b) $\pi-e$; c) $\varphi-\sqrt[3]{7}$

Ejercicio 14

Determina el error absoluto y relativo que se obtiene al tomar el valor aproximado de $\frac{13}{7}$, con sólo dos cifras decimales.

Ejercicio 15

Halla el error absoluto y relativo que se obtiene al aproximar π por el valor 3'1416. ¿Cuál es la cota de error que se obtiene en cada caso?

Ejercicio 16

De una encuesta realizada entre 1200 jóvenes aficionados a "la movida", la tercera parte eran menores de edad. De ellos tres quintas partes eran mujeres y de estas una sexta parte fuma más de un paquete de cigarrillos al día. Calcula, con una sola operación compuesta, cuántas jóvenes de la muestra tomada fuman más de una cajetilla al día.

Ejercicio 17

El 10% de los alumnos de nuestro centro están cursando un módulo de formación profesional. Si el 60% de ellos están matriculados en primero, ¿cuántos alumnos hay matriculados en 2º sabiendo que en total hay 650 alumnos en el instituto?

Ejercicio 18

Necesitamos comprar una alfombra cuadrada que ocupe 12 m^2. ¿Cuál debe ser el valor aproximado del lado tomado en centímetros? ¿Qué error se comete al tomar esa medida para el lado?

Ejercicio 19

Halla la arista de un cubo de 5 dm^3 de volumen. Si se redondea a milímetros, ¿qué error relativo se comete?

Jesús Fernández Domínguez. Profesor de Matemáticas en el I.E.S. Macarena de Sevilla. Miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Ha participado en proyectos de investigación y coordinado grupos de trabajo sobre la utilización de las T.I.C. en el aula de matemáticas. También ha trabajado en proyectos de innovación sobre la atención a la diversidad en el aula de matemáticas. Coautor de libros de texto para bachillerato.

José Muñoz Santonja. Catedrático de Matemáticas en el I.E.S. Macarena de Sevilla. Miembro de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Miembro del colectivo andaluz "Comunicar: Medios de comunicación en las aulas". Miembro del Grupo Alquerque sobre la utilización de juegos en clase de matemáticas. Miembro del proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATemático) Andalucía. Coautor de libros de texto de matemáticas para secundaria y bachillerato. Sus líneas de trabajo son: matemáticas recreativas, magia matemática, medios de comunicación, teatro y matemáticas, juegos,….

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 149-163
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

TIC y Matemáticas

Francisco Villegas Martín

Resumen

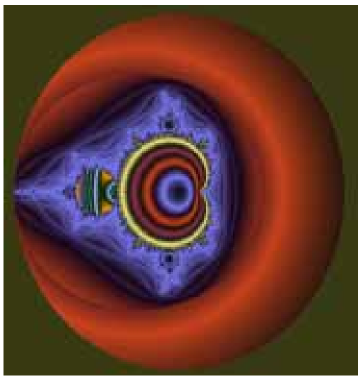
Las nuevas tecnologías, en este artículo centradas en el ordenador, nos brindan una serie de posibilidades que como docentes no podemos dejar pasar. Internet, junto al software educativo libre existente nos permite trabajar mejor las matemáticas, tanto en clase, como para hacer temas más comprensibles y atractivos para nuestros alumnos. Es un reto y a su vez un inmenso océano de posibilidades el que se abre ante nosotros.

Abstract

New technologies, referred to computer in this article, give us a variety of possibilities that we, teachers, must not ignore. Internet and the open source educational software allow us to work Mathematics better with our pupils and make lessons more attractive. It's a challenge. We have a vast ocean of posibilities in front of us.

Introducción

"Tan pronto como exista una Máquina Analítica, no cabe duda de que fijará los futuros derroteros de la ciencia. Y siempre que se busque un resultado por este medio, surgirá la pregunta: ¿cuál es el curso de computación mediante el cual puede la máquina obtener estos resultados en el menor tiempo posible?" (Charles Babbage)



XaoS, generador de fractales

Para trabajar las matemáticas, el ser humano siempre ha necesitado de herramientas que le faciliten la representación y comprensión de los conceptos o le permitan aumentar la rapidez de cálculo. El recorrido ha sido largo, desde los *calculus* de los pastores de la antigüedad, el ábaco, las regletas o palos de Neper (siglo XVI), la máquina aritmética de Pascal (siglo XVII), la máquina de Leibniz, la analítica de Babbage hasta llegar al ordenador actual basado en la lógica de Turing y Von Neumann corroboran la afirmación anterior[1].


Henri Poincaré

Resulta inquietante, por ejemplo, leer: "El primer hecho que habría de sorprendernos, si no fuese por lo acostumbrados que estamos a aceptarlo, es el de cómo es posible que haya personas que no entiendan las matemáticas. ... ¿cómo es posible que haya tanta gente refractaria a ellas" (Henri Poincaré, conferencia pronunciada a principios del siglo pasado en la Sociedad Psicológica de París), y comprobar que tras casi un siglo nos resulta actual.

Los ordenadores, y por extensión, las TIC[2] han permitido la aparición de nuevos escenarios y formas de educar que obligan a los docentes a investigar métodos que aumenten la calidad del aprendizaje, de esta forma el profesorado puede asumir su papel de facilitador que sepa seleccionar, procesar y organizar la ingente cantidad de información que tenemos a nuestro alcance para ponerla a disposición de nuestros alumnos.

Desde la escuela es necesario promover y potenciar la utilización de recursos digitales que, sustentados en desarrollos curriculares específicos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria[3] (ESO) y del Bachillerato[4], permitan al alumnado asumir un papel protagonista en el análisis, interpretación y comprensión de los conceptos matemáticos. Es fundamental que el alumnado adquiera destrezas usando software diseñado para trabajar las matemáticas y que éste le facilite acceder a los conceptos matemáticos de la asignatura. En los últimos años se han publicado numerosos estudios que avalan el potencial educativo del ordenador en el aula como instrumento para desarrollar destrezas matemáticas.

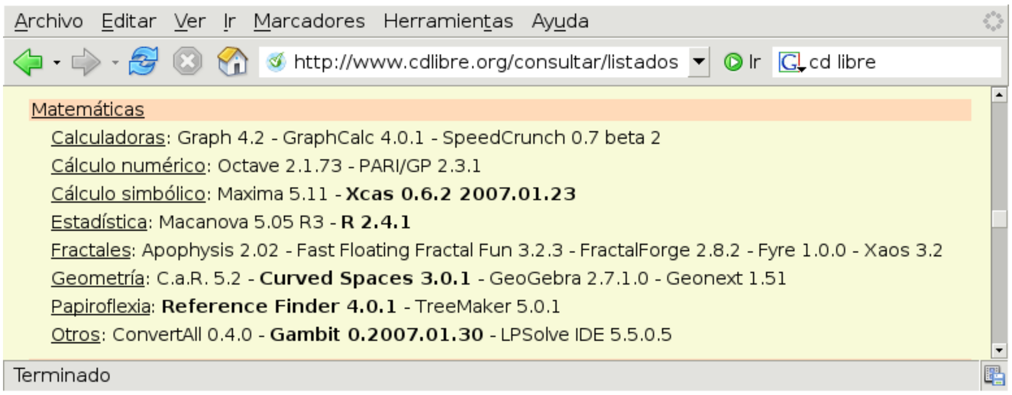
Nuestra comunidad autónoma (Andalucía), a nivel educativo, se encuentra inmersa en un proceso de cambio importante, en parte debido a los planes de incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación a los centros educativos. La iniciativa tiene por objeto acelerar la evolución del sistema educativo hacia la sociedad del conocimiento.

En consecuencia, en este artículo pretendo dar algunas ideas sobre herramientas para trabajar las matemáticas usando el sistema operativo instalado en los centros educativos andaluces (Guadalinex). En la actualidad, Guadalinex V3, es un sistema GNULinux basado en

[1] Véase [1], páginas 1383 a 1731
[2] Tecnologías de la Información y la Comunicación. http://es.wikipedia.org/wiki/Tecnologías_de_la_información
[3] Abarca de los 12 a los 16 años, 4 cursos académicos.
[4] Abarca desde los 16 hasta los 18 años, 2 cursos académicos.

Ubuntu[5] 5.10, es decir, son aplicaciones desarrolladas con software libre que podremos trabajar en cualquier centro sin coste añadido alguno.

Antes de entrar de lleno en el tema, una aclaración: la mayoría de los programas analizados en el artículo están disponibles para sistemas Windows (se indicará con el gráfico). En la Web http://www.cdlibre.org hay bastantes de ellos recopilados en un DVD/CD.



Veamos pues cómo usar algunas herramientas informáticas para trabajar sobre y con las matemáticas.

Aplicaciones para matemáticas "básicas"

Gcompris

Gcompris (http://gcompris.net/) es un programa desarrollado por Bruno Coudoin. Se trata de un software educativo libre para Linux diseñado para niños de 2 a 10 años (por lo que puede ser bastante útil en las etapas iniciales).

Incorpora[6] casi 100 actividades distintas, entre ellas destacar actividades de álgebra sencillas, puzzles, relojes, ajedrez, actividades para familiarizarse con el ordenador... Junto al icono de cada actividad aparecen una o varias estrellas que indican el nivel de dificultad de las actividades:

[5] Hasta hace un año en Debian Sarge
[6] La versión para Windows dispone de menos actividades que la versión para GNU/Linux.

Los tres primeros niveles son adecuados desde los 2 a los 6 años, y los tres últimos de 7 a 10.

En algunas actividades se puede elevar el nivel con el "dado" que aparece en la pantalla. En la parte derecha aparecen los iconos correspondientes a los bloques de actividades, pulsando con el ratón podemos ver las actividades que incorpora cada uno.

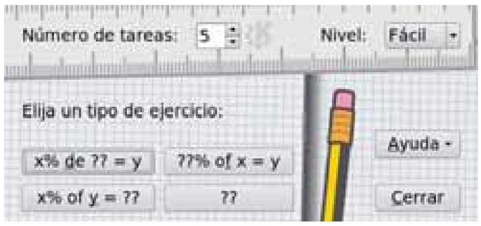
TuxMath

Lo lúdico no debe estar reñido con las matemáticas, sino todo lo contrario, las matemáticas son un juego del que si se conocen las reglas (como en todos los juegos) son muy divertidas. TuxMath es un juego matemático en el que se trabaja el cálculo aritmético básico. Una anécdota sobre él, fue mi hijo menor el que me descubrió que la tecla P permite parar el juego y hacer las operaciones en un tiempo "sensato" para mi capacidad "neuronal".

TuxMath

kPercentage

KPercentage es una aplicación matemática que ayuda a los alumnos a mejorar sus habilidades en el cálculo de porcentajes. Hay una sección especial de entrenamiento para las tres tareas básicas con varios niveles dificultad, al optar por el modo aleatorio se mezclan las tres tareas al azar. Permite al alumnado seleccionar el número de tareas a realizar (de 1 a 10). Se puede usar este recurso para trabajar el bloque de proporcionalidad en toda la Educación Secundaria (12 a 16 años). Al disponer de autoevaluación nos permite adecuarlo a los distintos niveles que se van a presentar en el aula.



Cajón de Sastre

Calculadoras

Uno de los problemas más comunes para trabajar las matemáticas usando calculadoras, es que, por un lado no todos nuestros alumnos la traen todos los días, y por otro, no podemos obligar a que lo hagan ni en su caso a que el modelo sea el mismo para todos. Pero ese problema se resuelve con dos de las mejores calculadoras disponibles para GNULinux: *gcalculate* y *qcalculate*.

gCalculate

qCalculate

WIMS[7]

Hay una serie de actividades que merecen especial atención y visita, se trata de WIMS (http://wims.unice.fr/wims/es_home.html).

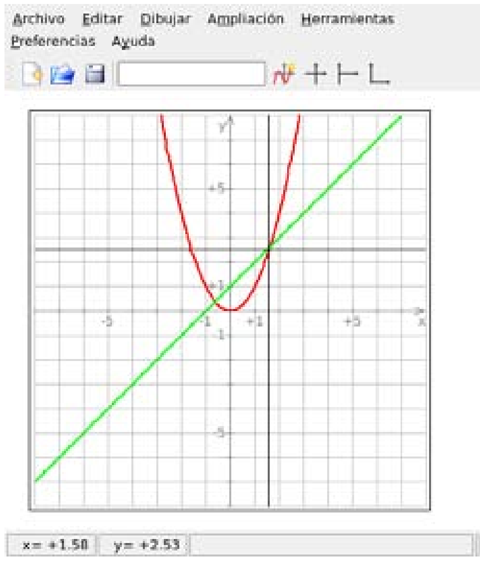
Es una Web con multitud de actividades interactivas para matemáticas. Si bien el entorno inicial no es muy atractivo, cuando se comienza a trabajar con él se ve el enorme potencial que encierra. Con los módulos existentes en la actualidad se puede desarrollar prácticamente todo el currículum de matemáticas. Permite al alumnado establecer el nivel de dificultad en el que trabajar y autoevaluar sus conocimientos. Se puede instalar en un servidor Web propio.

[7] *Interactive mathematics on the internet*

Programas para representaciones gráficas de funciones

KmPlot

Programa para representar funciones matemáticas. Es simple de usar y permite representar varias funciones simultáneamente. En definitiva una herramienta de un gran potencial en nuestras clases.

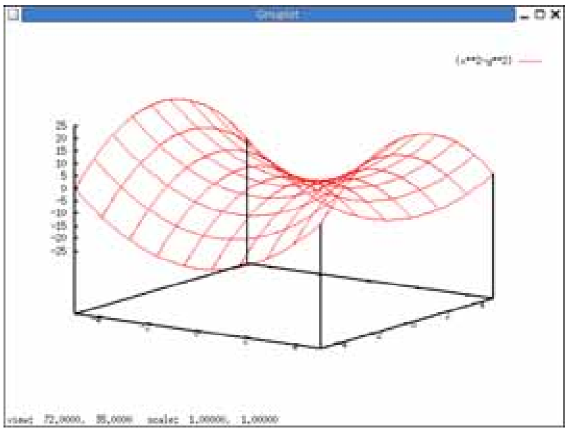


Para representar una función se pulsa sobre **Dibujar►Nuevo gráfico de función** y se escribe la función correspondiente. Repetimos el proceso para cada una de las funciones.

En la captura, se han representado dos funciones y se ha hallado el punto de corte de forma gráfica (aproximada). Con él, por ejemplo, podemos representar la derivada y la integral de una función dada.

Gnuplot

GnuPlot (http://www.gnuplot.info) es una aplicación orientada a la representación de gráficas con dos y tres variables y para la visualización de datos matemáticos. Es un clásico en el mundo GNULinux, tanto es así que programas de cálculo numérico (como Octave) o simbólico (como Máxima) lo incorporan como complemento para sus representaciones gráficas. Una de sus características más interesantes es que soporta multitud de formatos de salida, entre ellos LaTeX, fig, pdf y png.



Su uso no es inmediato, y al principio puede resultar abrumador trabajar con él[8]. Existe mucha información en la red y por supuesto en la página principal del programa.

```
gnuplot> splot [-5:5][-5:5] x**2-y**2
```

[8] Existen programas en modo gráfico que permiten trabajar con él a golpe de ratón, por ejemplo *qalculate*.

Francisco Villegas Martín

Geometría[9]

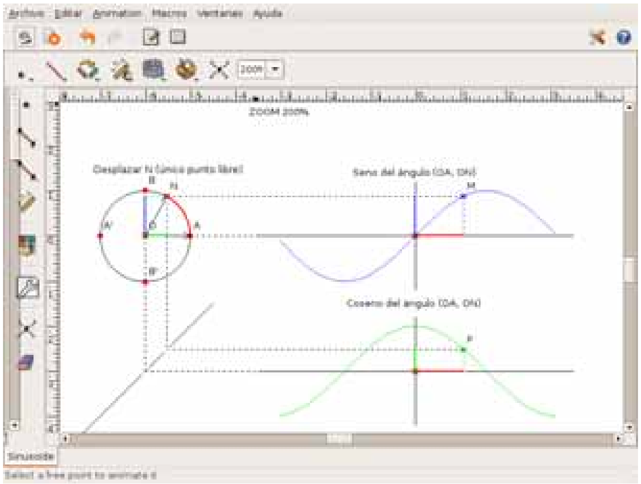
DrGeo

DrGeo (http://ofset.org/drgeo) es un programa de geometría dinámica plana muy apropiado para trabajar en Secundaria. No está tan desarrollado como Cabri pero para trabajar en clase cubre todo aquello que necesito. Entre sus posibilidades está la de exportar[10] los gráficos a LaTeX/PostScript o realizar animaciones.

En la Web del programa hay un excelente manual en castellano [2], así como algunos vídeos que explican cómo trabajar con él [3].

Su uso no presenta mayor problema gracias a la ayuda contextual (en castellano) que aparece al pasar sobre cualquiera de los elementos de las distintas barras de herramientas desplegables[11].

Hay varios ejercicios para los que creo es imprescindible, por ejemplo para comprobar gráficamente con los alumnos de secundaria (¿y por qué no de primaria?) que el baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo están alineados. O por ejemplo, para trabajar la trigonometría: a partir del fichero que permite obtener las funciones seno y coseno podemos plantear actividades del tipo:



1. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores para ambas funciones desde 0° a 720°.
2. Determina en qué cuadrantes son positivas o negativas.
3. ¿Se repite la forma? ¿cada cuánto?
4. ¿Entre qué valores oscilan las funciones seno y coseno?
5. ¿Qué relación crees que puede existir entre los valores del seno y coseno de un ángulo?

---

[9] Hay bastantes programas libres para trabajar esta rama de las matemáticas.

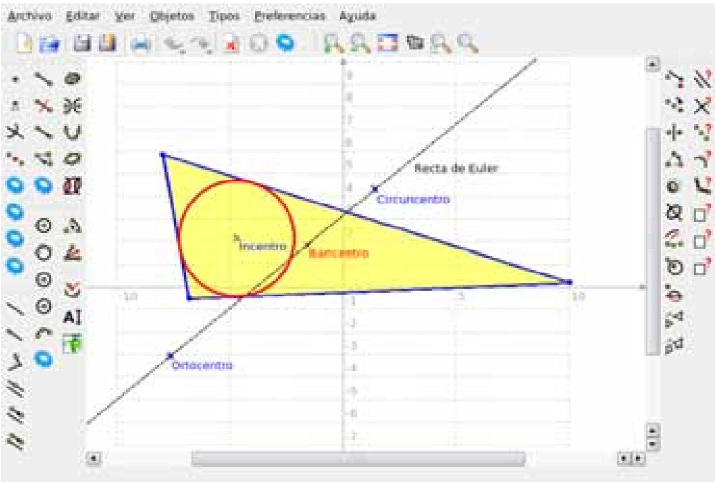
[10] Permite exportar a formato Fly Draw, se trata del formato de descripción de figuras usado por WIMS.

[11] Además de la documentación del programa, son interesantes para el aula las actividades desarrolladas para DrGenius del libro *Aprender con GNULinex* disponible en la zona de descargas de http://www.linex.org. Se trata de las páginas 165-190

Kig

Se trata de una aplicación muy interesante para el estudio de la geometría plana y que puede resultar bastante motivadora para nuestros alumnos dada su gran interactividad. Permite dibujar multitud de elementos geométricos (puntos, rectas, circunferencias, vectores, polígonos, ángulos...). También nos da la posibilidad de cambiar los colores, introducir las coordenadas de los puntos, poner etiquetas. En definitiva, podemos abarcar el estudio de la geometría desde los aspectos más simples a los más complicados.

La captura se ha realizado usando una macro disponible en http://edu.kde.org/kig/macros.php cuyo objetivo es hallar de forma inmediata los puntos notables de un triángulo. Sólo tenemos que importarla desde el menú **Tipos►Gestionar tipos…**



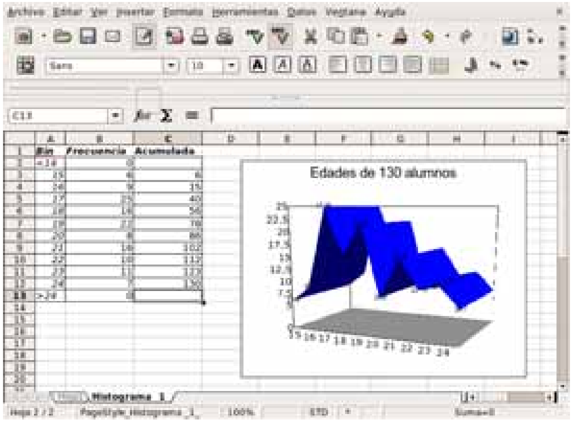
En la imagen podemos observar los iconos de las herramientas de construcción (en el panel de la izquierda, son autoexplicativos); esto junto con la ayuda contextual que aparece al mantener el puntero sobre los iconos hace que el programa sea muy fácil de utilizar y apropiado para el uso en el aula. Se puede, como en todos los programas de este tipo, arrastrar un punto y ver cómo se mueven los elementos ligados a él. El programa dibuja puntos dados por sus coordenadas cartesianas y mide distancias, ángulos y longitudes de circunferencia. Por ejemplo, desde el menú **Objetos►Transformaciones** podemos realizar transformaciones de los elementos (traslaciones, rotaciones, escalarlos...) y desde **Objetos►Opciones►Pruebas** permite comprobar el paralelismo, ortogonalidad, distancia, etc.

A diferencia de DrGeo, exporta las figuras a formato *fig* o *svg* lo que nos permite poder retocarlas con el programa xfig o cualquier herramienta de dibujo vectorial que soporte formato *svg* (por ejemplo *inskcape*).

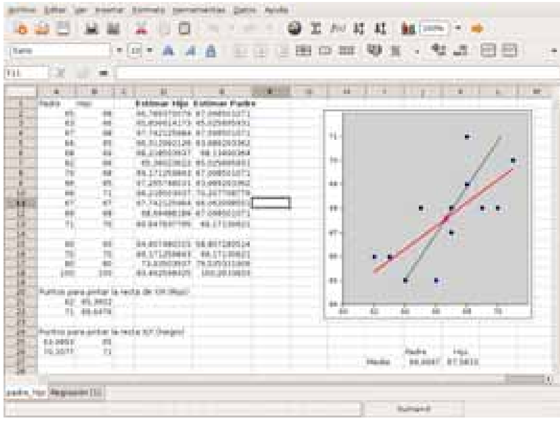
Estadística

Hojas de cálculo: OpenOffice Calc y gnumeric

Ambas hojas de cálculo, además de permitir el análisis estadístico de los datos permiten generar informes y la elaboración de gráficos y diagramas.



OpenOffice Calc



Gnumeric

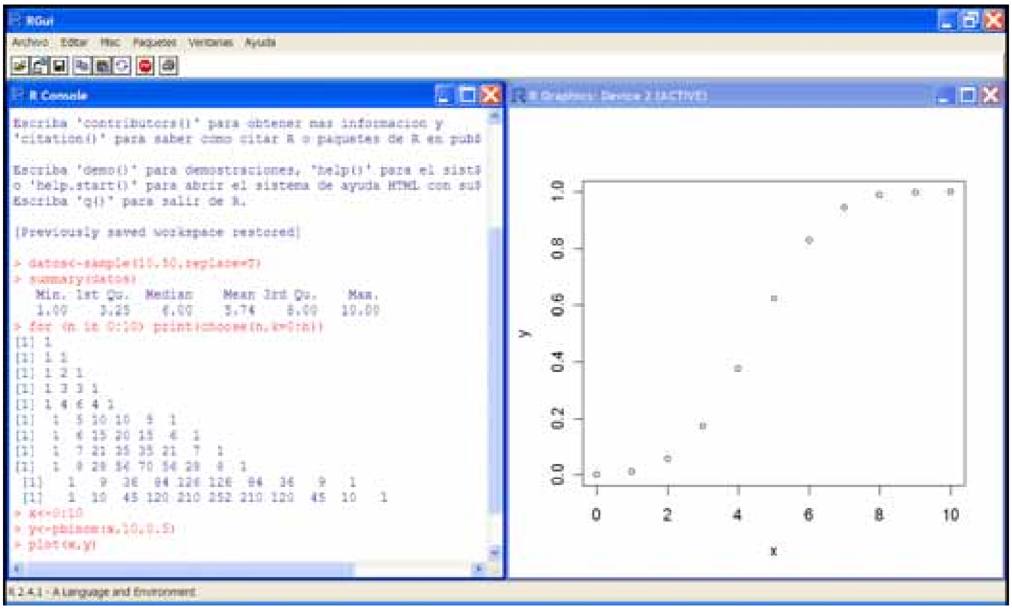
Calc forma parte de la Suite Offimática OpenOffice y es muy similar a Excel. En sus celdas podemos introducir texto, números o fórmulas con referencias a otras celdas para que la aplicación realice los cálculos programados. El programa incorpora también una amplia gama de funciones para análisis estadísticos y puede importar hojas de cálculo externas.

Las posibilidades gráficas de Calc son superiores que las de Gnumeric, sin embargo la facilidad de uso de esta última para realizar análisis estadísticos me hace decantarme por ella. Los análisis estadísticos se pueden realizar a “golpe de ratón” usando el menú **Herramientas**.

La zona de trabajo de Gnumeric es muy intuitiva y semejante a la de otros programas de estas características. Ofrece compatibilidad con los formatos de Excel, Lotus y por supuesto con la hoja de cálculo de OpenOffice.

R

Como software específico destaca R (http://www.r-project.org) ó "GNU S", se trata de un programa libre para análisis estadístico que permite calcular parámetros, inferencia, construir todo tipo de gráficos de alta calidad, etc. R permite trabajar las técnicas estadísticas más básicas, pero llegando a las más avanzadas. Además, permite que le añadamos nuevas funcionalidades, ya que podemos programar nuevas funciones o instalar nuevos paquetes.



En la imagen se muestra la forma de almacenar 50 números aleatorios comprendidos entre 1 y 10 y cómo hallar las medidas de tendencia central. También se ve la forma de obtener un triángulo de Pascal y un ejemplo de representación gráfica.

Su uso no es inmediato y su utilidad se adapta mejor al bachillerato[12] o universidad. En http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish hay diferente documentación sobre R en varios idiomas (véase [4], [5], [6], [7] y [8]).

En [9] se exponen de forma detallada una serie de actividades para realizar con él en clase, así como otras realizadas con Grace y Gnumeric para trabajar en clase la estadística y orientadas a diferentes niveles educativos.

Cálculo simbólico

Maxima

Maxima (http://maxima.sourceforge.net/) es un magnífico paquete matemático de cálculo simbólico. La versión actual es un descendiente de DOE Macsyma que fue desarrollado en los laboratorios del MIT. Está implementada usando COMMON LISP y mantenida por William F. Schelter.

Podemos utilizar Maxima para la manipulación de expresiones algebraicas que incluyan constantes, variables y funciones. Permite calcular límites, integrales,

[12] De 16 a 18 años

derivadas, resolver ecuaciones algebraicas y diferenciales, representar funciones de una y dos variables, etc. Es también un lenguaje de programación, lo que nos permite ampliar sus capacidades.

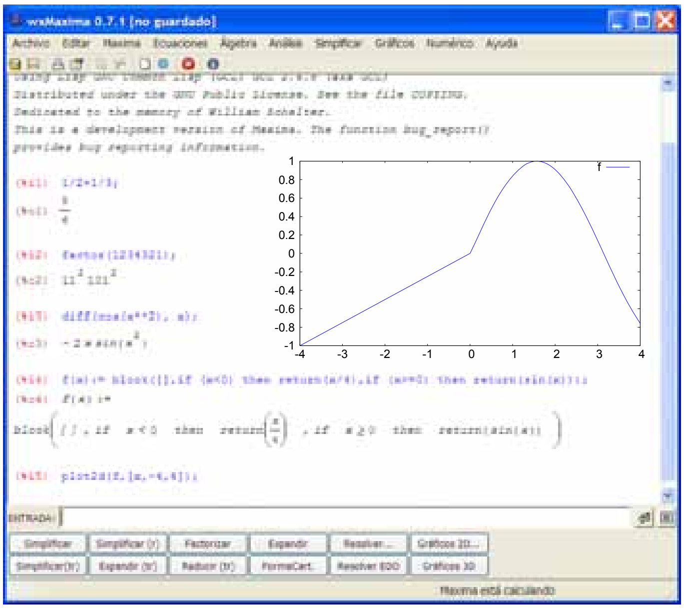
Desde la página principal del programa podemos bajarnos una amplia documentación sobre su uso. En castellano, podemos consultar un manual de introducción en [10]

El interfaz de programa, por defecto, es en modo comando, pero disponemos de dos *front-end* para trabajar en modo gráfico *xmaxima* y *wxmaxima*

xmaxima

wxmaxima

Con él podemos trabajar desde los aspectos más básicos, por ejemplo sumas y restas de fracciones, descomposición factorial de números…, hasta los más avanzados como puede ser la diferenciación o la representación de funciones definidas a trozos.



Francisco Villegas Martín

Herramientas para creación de textos científicos

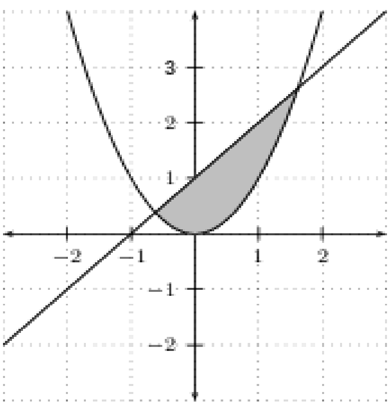
LaTeX

LaTeX es un lenguaje de macros para un lenguaje denominado TeX que se encarga del formateo del texto. TeX es una creación de Donald E. Knuth (Universidad de Standford, 1978) y su propósito inicial fue facilitar la creación de artículos para la *American Mathematical Society* (AMS). El inconveniente de TeX es que es muy complejo. Para facilitar el uso de TeX Leslie Lamport crea LaTeX en 1982. Con LaTeX establecemos qué queremos que aparezca en el documento y no cómo debe aparecer.

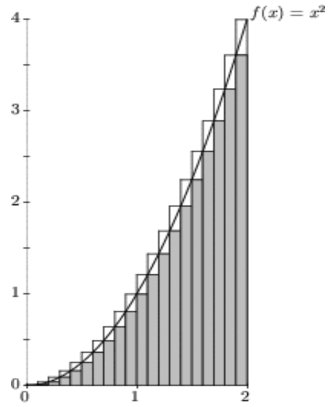
LaTeX destaca sobre todo en la edición de fórmulas y en la composición de textos matemáticos. Pero... aunque es muy potente, su aprendizaje no es inmediato.

Una de las ventajas de LaTeX es que permite añadirle multitud de paquetes en función de nuestras necesidades. Existen paquetes para fórmulas químicas, circuitos electrónicos, símbolos fonéticos, escribir en árabe, notas musicales... En http://www.ctan.org/ podemos encontrar todos los paquetes disponibles. Algunos de los paquetes o utilidades más interesantes, bajo mi punto de vista, para trabajar con LaTeX y matemáticas son:

- *Pstricks* http://tug.org/PSTricks/main.cgi es un conjunto de paquetes para LaTeX con múltiples opciones. Para hacernos una idea lo mejor es revisar en la Web anterior los ejemplos de lo que se puede hacer con ellos. Por ejemplo, lo uso para representar funciones y obtener el área encerrada entre ambas.
- No es un paquete, pero *ePiX* (*http://mathcs.holycross.edu/~ahwang/current/ePiX.html*) es una de mis herramientas favoritas para obtener gráficos de alta calidad para usar en clase o confeccionar mis apuntes. La captura de la derecha, por ejemplo, es un fichero parametrizado que permite representar funciones y tantos rectángulos (para las sumas superiores e inferiores) como desee a partir del parámetro.



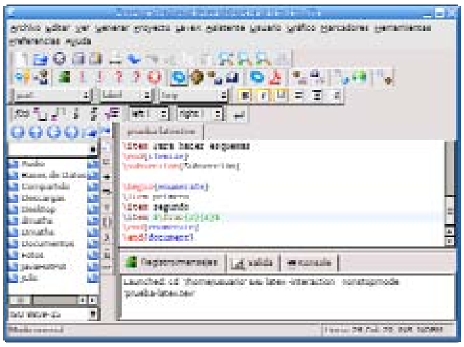
psTricks



ePiX

Kile

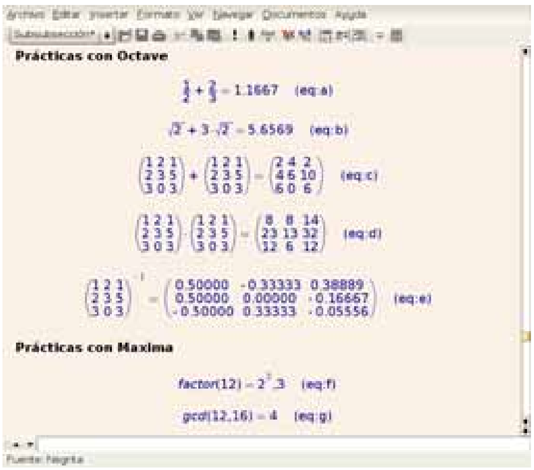
Si optamos por crear documentos con LaTeX, *kile* (http://kile.sourceforge.net) es el mejor editor que conozco para GNULinux. Se trata de un programa que facilita la composición de documentos en LaTeX. Tiene incorporados los comandos más usuales de LaTeX, lo que supone mucha más rapidez a la hora de escribir un documento. Es aconsejable, no obstante, conocer algo de LaTeX para poder sacarle todo el partido. Nos permite compilar los documentos y verlos en distintos formatos (DVI, PostScript, pdf), insertar símbolos fácilmente, dispone de magnífica ayuda en línea, etc.



LyX

Si bien la idea de LaTeX es crear documentos profesionales con el mínimo esfuerzo, la idea cobra realmente sentido cuando aparece LyX en escena. LyX (http://www.lyx.org) es obra de Matthias Ettrich y un grupo de programadores y se trata de una herramienta más intuitiva para escribir nuestros documentos matemáticos.

LyX es "un interfaz casi WYSIWIG (*What You See Is What You Get*) para LaTeX" y SGML. LyX permite componer documentos siguiendo la filosofía de LaTeX pero sin tener que conocer comandos de LaTeX. Con LyX nos centramos en lo que queremos escribir y no en cómo hacerlo. El proceso de edición y composición final es responsabilidad de LaTeX.



Para una visión más detallada, con ejemplos y prácticas, de las posibilidades que ofrece LyX se puede consultar [11]

LaTeX-Beamer

¿Qué es esto de LaTeX-Beamer? Desde mi punto de vista, para crear presentaciones de diapositivas con fórmulas matemáticas la mejor herramienta es una clase de LaTeX, la clase *Beamer*, disponible en http://latex-beamer.sourceforge.net/. Con esta clase podemos crear presentaciones de diapositivas en formato pdf de excelente calidad. Una mini guía sobre su uso con LyX se encuentra en [12].

A modo de resumen

A nivel de enseñanza superior, la demostración de la conjetura de Kepler (http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture) supone un cambio en la forma de demostrar teoremas matemáticos que no nos puede dejar impasibles ante el uso del ordenador:

"Pero es posible, y yo diría que muy deseable, que las máquinas se encarguen en el futuro de tantos desarrollos rutinarios y tantas demostraciones clónicas que mantienen ocupados a demasiados matemáticos quienes, incansables, publican obviedad tras obviedad. Llenando sin cesar, con mutuas referencias, el registro de esa grotesca casa de citas que tiene su sede en Filadelfia. Liberados por las máquinas, podrían estos artistas, siguiendo el buen ejemplo de Wiles y Hales, dedicar sus esfuerzos a resolver problemas realmente difíciles e interesantes que tengan luego cabida en Annals of Mathematics." Diario El País, 04/01/2006.

Es un reto y a su vez un inmenso océano de posibilidades el que se abre ante nosotros. Las nuevas tecnologías, en este artículo centradas en el ordenador, nos brindan una serie de posibilidades que como docentes no podemos dejar pasar. Internet, junto al software educativo libre existente nos permite trabajar mejor las matemáticas, tanto en clase, como para hacer temas más comprensibles y atractivos para nuestros alumnos.

Bibliografía

- [1] G. Ifrah (1997): Historia universal de las cifras. 2.ed. Espasa Fórum, Madrid.
- [2] H. Fernandes, A. Centomo, A. Soto (2005): Manual de usuario de DR. GEO, http://www.ofset.org/articles/80
- [3] http://documentation.ofset.org/drgeo/videos/
- [4] E. Paradis: R for Beginners, http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish
- [5] P. Kuhnert, B. Venables: An Introduction to R: Software for StatisticalModelling & Computing, http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish
- [6] J. C. Correa, N. González: Gráficos estadísticos con R, http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish
- [7] M. R. Risk: Cartas sobre Estadística de la Revista Argentina de Bioingeniería, http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish
- [8] R. Díaz-Uriarte: Introducción al uso y programación del sistema estadístico R, http://cran.r-project.org/other-docs.html#nenglish
- [9] F. Villegas (2004): Estadística con GuadaLinex Edu, http://www.picasa.org/downloads/matematicas/estadistica/estadistica.pdf
- [10] M. Arsuaga, R. Ramos (2005): Manual de Introducción a Máxima, http://www.guadalinex.org/modules/mydownloads/viewcat.php?cid=4
- [11] F. Villegas (2004): Introducción a LyX, http://www.picasa.org/downloads/linux/lyx/intro_lyx.pdf
- [12] F. Villegas (2006): Elaboración de recursos didácticos con GuadaLinex, http://www.picasa.org/downloads/linux/guadalinex/elaboracion-recursos-guadalinex.pdf
- [13] D. J.Gallego, C. M. Alonso (1999): El ordenador como recurso didáctico. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.
- [14] B. Cascales, P. Lucas, J. M. Mira, A. Pallarés, S. Sánchez-Pedreño (2000): LaTeX una imprenta en sus manos, Aula Documental de Investigación, Madrid.
- [15] J. Alonso, F. Rubio, F. Villegas (2004): Software libre y educación (curso de iniciación): Guadalinex (Debian) y aplicaciones didácticas. http://www.picasa.org

Francisco Villegas Martín es Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada. Profesor de Enseñanza Secundaria de Matemáticas. En la actualidad, Asesor de Formación del Profesorado en el ámbito Científico-Tecnológico en el Centro del Profesorado del El Ejido (Almería). Profesor de los cursos de formación a distancia sobre GNULinux, organizados por el CICA y la SAEM THALES, en las convocatorias de los años 1999 a 2005. Además, ha impartido varios cursos (presenciales y a distancia) relacionados con GNULinux y las nuevas tecnologías organizados por diversos CEP andaluces.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 165-186
ISSN: 1815-0640

Perspectiva integrada de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática: una mirada a la Educación Matemática

Marcela Falsetti – Mabel Rodríguez – Gustavo Carnelli – Francisco Formica

Resumen

Entre los numerosos elementos que confluyen en la enseñanza de la Matemática pueden mencionarse la relación entre la Matemática científica y la escolar, la imagen y la naturaleza de la Matemática, las particularidades de la actividad matemática, la formación didáctica del profesorado y la evolución en la forma de entender su enseñanza. Este trabajo tiene la intención de ofrecer una visión integradora de estas cuestiones que aporte al entendimiento de la complejidad de la enseñanza de la Matemática y dé puntos de apoyo desde donde revisar su práctica de enseñanza. Complementa otro trabajo anterior –publicado en esta revista– en el que se atendieron las cuestiones referidas al campo disciplinar.

Introducción

Fenómenos o procesos como el de enseñar y el de aprender Matemática no son ingenuos, se comprenden, explican, diseñan y ejecutan desde perspectivas ideológicas, teóricas y vivenciales que son implícitas en la mayoría de los casos. Sin embargo, cuando estas perspectivas o posturas se hacen manifiestas cobran fuerza en la difusión y en la orientación de procesos. Este efecto, se observa a partir de los trabajos de Miguel de Guzmán[1] y de Luis Santaló[2], por ejemplo, en los que se evidencian con claridad, precisión y sin tecnicismos ostentosos, estas tres componentes, ideológica, teórica y vivencial, conformando una perspectiva integrada. Más modestamente, intentamos aquí brindar un panorama general e integrador que aporte para el entendimiento de la enseñanza y el aprendizaje actuales de la Matemática. Para ello recorremos un arco que abarca las características específicas del quehacer matemático científico, teorías didácticas y tendencias de la enseñanza actual[3].

---

[1] Miguel de Guzmán Ozámis (Cartagena 1936 - Madrid 2005) matemático español, doctorado con Pedro Calderón en la Univ. de Chicago en temas de Análisis Armónico. Dedicado también a la divulgación de la Matemática. Presidente de la ICMI (International Comission of Mathematical Instruction) desde 1991 a 1998.

[2] Luis A. Santaló, (Girona 1911 - Buenos Aires 2001) matemático español quien desarrolló la mayor parte de su carrera en Argentina ha sido el máximo exponente de la Geometría Integral que se aplica con éxito a la medicina, la biología, geología, etc. englobándose dichas aplicaciones bajo el nombre de Estereología. Santaló fue además un gran pedagogo y divulgador científico con más de 250 publicaciones, entre ellos libros con gran influencia en nuestra comunidad matemática, como su Geometría Proyectiva o Vectores y Tensores.

[3] Cabe aclarar que el presente trabajo está motivado por el trabajo en un seminario con profesores formadores de docentes que coordináramos en el marco de un proyecto ministerial de la Provincia de Buenos Aires para llevar a cabo una revisión curricular.

La Matemática siempre ha tenido un lugar privilegiado en el desarrollo humano por su presencia práctica en la vida cotidiana, su protagonismo en el ámbito científico – tecnológico y su influencia en el ámbito artístico. Es además considerada como ámbito privilegiado del pensamiento humano. Probablemente este privilegio radique en el hecho que ofrece posibilidad de abstracción desde la manipulación concreta (sensorio-motriz) de objetos a temprana edad. Operaciones mentales como clasificar, cuantificar, ordenar, seriar, ubicar, discernir, comparar, simbolizar, generalizar, representar, construir teniendo en cuenta la percepción espacial, etc. se van dando en el pensamiento humano, de forma creciente en complejidad, ya desde los primeros contactos del hombre con los objetos. Justamente, hacer Matemática consiste en sistematizar acciones como las anteriores y los resultados de las mismas.

El privilegio que goza la Matemática se evidencia también en el tratamiento especial que la psicología cognitiva y la pedagogía dieron y dan a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática y en el hecho que la Didáctica de la Matemática tenga un amplio desarrollo aportando nociones ya generalizadas a otros campos como las de "transposición didáctica" y "resolución de problemas", entre otras. Sin embargo este "halo de privilegio" ha hecho que se traspasaran límites y extrapolaran competencias; así, considerando que la Matemática es el campo de conocimiento ideal para el desarrollo del "espíritu crítico", se da a entender que estudiando Matemática puede uno tener gran poder de criticismo, reflexión y rigor en otros ámbitos de la vida, la cultura y la ciencia. Esta omnipotencia intelectual que supuestamente la Matemática otorga, lejos de brindar beneficios, provoca, contrariamente, un distanciamiento entre la disciplina y el individuo común, que no tiene afinidad con ella. La enseñanza de la Matemática debiera entonces contrarrestar este efecto, para ello el profesor debe conocer la naturaleza de la disciplina, tener una clara concepción sobre esta ciencia y sobre sus alcances y limitaciones.

Acordamos con Miguel de Guzmán (Guzmán, 1993) en que enseñar Matemática es tarea difícil, *"[…] la matemática misma es una ciencia intensamente dinámica y cambiante. De manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos. Y aun en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo."* y agrega *"El otro miembro del binomio educación - matemática, no es tampoco nada simple. La educación ha de hacer necesariamente referencia a lo más profundo de la persona, una persona aún por conformar, a la sociedad en evolución en la que esta persona se ha de integrar, a la cultura que en esta sociedad se desarrolla, a los medios concretos personales y materiales de que en el momento se puede o se quiere disponer, a las finalidades prioritarias que a esta educación se le quiera asignar, que pueden ser extraordinariamente variadas...".* Como vemos, la dificultad de la enseñanza de la Matemática se debe a la necesidad de tender hacia la vinculación equilibrada de por lo menos cuatro esquemas organizacionales de pensamiento, dinámicos cada uno de ellos, que son:

- los esquemas de la "lógica" interna del individuo que aprende, regidos por sus necesidades, condicionales (afectivos, cognitivos, etc.) y posibilidades internas;
- los esquemas de organización grupal, de relaciones sociales y contractuales al interior de las instituciones educativas y del grupo de aprendizaje en relación con la disciplina.
- los esquemas de organización y fundamentación de la disciplina según los cuales es posible tejer redes conceptuales en donde los conceptos se relacionan en forma ecológica, es decir cada concepto es esencial para definir o entender otros y sin él no podría construirse la teoría, método o técnica de la cual forma parte. Es necesario aclarar que este criterio "ecologista" de organización es intrínseco a la Matemática, es decir no se rige por los fenómenos fácticos a los que los conceptos hacen referencia. En cuanto a la forma de validación, éstas son de tipo deductivas.
- los esquemas de producción del conocimiento matemático que son de tipo empírico, exploratorio, inductivo, inferencial, etc.

Para contribuir a entender la complejidad presentada, en este trabajo realizamos un recorrido por la Didáctica de la Matemática que nos permite delinear algunas pautas en lo que respecta a la enseñanza de esta disciplina. Tratamos de responder a cuestionamientos que surgen en la práctica de enseñanza tales como ¿qué vinculaciones hay, o debería haber, entre la Matemática científica y la Matemática escolar?, ¿qué respuestas aporta la Didáctica de la Matemática a los interrogantes del aprendizaje y de la enseñanza?, ¿cuáles son los cambios y las tendencias actuales en la enseñanza?, ¿cuáles deberían ser las tareas ineludibles de un profesor al enseñar Matemática? Aquí sintetizamos discusiones teóricas junto con reflexiones sobre la práctica referidas a estos asuntos.

Hemos organizado el trabajo partiendo de las discusiones más generales que hoy en día se mantienen a nivel mundial para luego ir particularizando los análisis y aportes ajustándonos a problemáticas que se encuentran actualmente en el contexto de las escuelas y de las instituciones educativas que forman profesores. Presentamos las siguientes secciones.

1. **Educación Matemática: panorama del campo didáctico.**
   En esta sección se presentan características de la Didáctica de la Matemática, su evolución, su objeto, función y sus perspectivas.
2. **Situación y perspectivas de la enseñanza de la Matemática. Problemáticas de enseñanza y aprendizaje.**
   En esta sección se realiza una presentación sobre las principales cuestiones referidas al aprendizaje y enseñanza de la Matemática en general y también una presentación más particularizada y concreta sobre la situación actual de enseñanza a partir de describir y analizar prácticas de enseñanza en el ámbito áulico.

1. Educación Matemática: panorama del campo didáctico

1.1. Evolución histórica. Tendencias

La enseñanza de la Matemática ha tenido un cambio acorde a la influencia de la psicología cognitiva en el campo de la educación pasando de la forma conductista a la forma constructivista, entendida esta última en un sentido amplio que luego explicaremos. En la forma conductista se destacó el predominio de las evaluaciones de conductas manifiestas y observables, en términos de control de aquello logrado o no logrado por el estudiante. Aunque el modelo ha sido superado por distintas teorías psicológicas que dan sustento a otras modalidades de enseñanza, esta influencia está arraigada en la historia de la formación docente y forma parte, en la mayoría de los casos, de las biografías escolares de los docentes en ejercicio y formadores. Ha sido estudiado que la biografía escolar de un docente, en muchos casos, es replicada por éste como modelo de enseñanza en el aula. De este modo, podemos afirmar que hoy en día el modelo conductista, en distintas variantes y grados, aún tiene vigencia.

En lo que respecta específicamente al campo de la enseñanza de la Matemática, en su camino hacia el constructivismo, se produjo poco antes de la década del 70 una revolución como producto de dos corrientes: el desarrollo de la teoría de conjuntos y las implicaciones educativas de las investigaciones psicogenéticas de J. Piaget. El desarrollo de la teoría de conjuntos, que se instaló en las escuelas con el nombre de Matemática Moderna, se llevó adelante sin conexión con los contenidos que hasta el momento se venían desarrollando (de Aritmética y Geometría), sino que se incorporaron como un capítulo anterior sin vinculación con el resto. La Matemática científica transitaba una etapa de formalización, propia de los avances del campo disciplinar. Se produjo un problema en la enseñanza de la Matemática a raíz de que esta formalización fue trasladada a las escuelas como “la nueva Matemática que debía enseñarse”, causando desconcierto en los docentes (que ignoraban el contenido), las instituciones, las familias y por supuesto los estudiantes. En paralelo, el marco psicológico de las investigaciones en psicología genética determinó la importancia de ciertas actividades que, supuestamente, preparaban a los estudiantes para aprender los conceptos matemáticos. Estas actividades reproducían las realizadas por J. Piaget en sus investigaciones psicológicas que tenían otra finalidad, no siendo ésta la inclusión directa de ellas en la enseñanza. Esta confusión ha causado una adaptación inapropiada de dichas investigaciones al ámbito educativo.

Los aprendizajes de los estudiantes bajo la modalidad conductista, así como la enseñanza de la Matemática Moderna y las aplicaciones de la Teoría de Piaget, se percibían insatisfactorios. Interpretamos que estudios sistemáticos de dichos aprendizajes dieron origen a un campo disciplinar que poco a poco fue configurándose y ganando autonomía: estamos hablando de la Didáctica de la Matemática. Podemos considerar, entonces, que el inicio de este campo como disciplina autónoma es relativamente reciente. El primer paso para sistematizar este campo de estudio se ha debido esencialmente a los aportes de G. Brousseau e Y.

Chevallard, ambos investigadores franceses quienes han sido los referentes principales, en las décadas de los 70 y 80, de la que hoy en día se conoce como la “Escuela Francesa” de la Didáctica de la Matemática. Desde entonces y de manera creciente, se han ido desarrollando distintas teorías y enfoques que forman parte de la Didáctica de la Matemática que actualmente se nutre de aportes provenientes de diversos investigadores de todas partes del mundo. Aunque este campo haya comenzado a desarrollarse como disciplina sobre la base de la investigación, su valor y su status sigue siendo cuestionado y criticado principalmente por la comunidad profesional (matemáticos, docentes, ingenieros, etc.). Esencialmente esto se debe a que los trabajos producidos pueden no verse como interesantes o significativos. Esto a su vez podría atribuirse a dos razones: una de tipo comunicacional, que se manifiesta porque resulta difícil transmitir la idea esencial de los trabajos producidos, y la otra por deficiencias propias de los mismos (Arcavi, 2000).

El objeto de investigación de la Educación Matemática (o de la Didáctica de la Matemática) es, en términos amplios, crear teorías y modelos sobre cómo se produce el conocimiento matemático a nivel individual y social, especialmente cómo se produce este conocimiento a nivel escolar y cuál es el conocimiento matemático adecuado, o susceptible a ser producido, en el ámbito de una institución escolar. Para ello toma como referencia el conocimiento matemático científico. Su método de investigación abarca, según el paradigma del investigador, desde el tipo de las ciencias fácticas (de la psicología, la sociología, la antropología) hasta el tipo comprensivista. En el primer caso, la forma de validar el conocimiento en esta disciplina es mediante la verificación de hipótesis. La Didáctica de la Matemática, que ha nacido como disciplina intentando desarrollar programas de investigación que respondan a problemas originados de desafíos y dificultades de la enseñanza de la Matemática, tiene, por otro lado, un rol práctico, intentando tener eficacia para resolver situaciones de enseñanza y aportar recursos para una mejor eficacia didáctica (formación de docentes) (Astolfi, 2002).

En el artículo de Font (2002) se encuentra el detalle de los programas de investigación en Didáctica de la Matemática y sus distintos aportes. Nosotros presentamos una breve síntesis de los principales enfoques.

Entre los posicionamientos de algunos de los principales programas de investigación podemos mencionar el **enfoque cognitivo** en el que se destacan dos líneas de investigación: pensamiento matemático avanzado, introducido por Tall y Vinner, entre otros, y la teoría de los campos conceptuales desarrollada por Vergnaud. Adoptan una postura constructivista para el aprendizaje, para la enseñanza, atienden a las condiciones que posibilitan el aprendizaje significativo e investigan sobre las representaciones mentales de las personas.

Otro enfoque es el **constructivismo radical** de Von Glasersfeld. Éste tiene como bases la epistemología genética de Piaget, la formación del conocimiento por medio de la acción y la reflexión sobre la acción, la evolución de los esquemas que se adaptan al mundo experiencial del sujeto y modeliza el conocimiento. El aprendizaje es constructivista e individualista, la enseñanza es respetuosa de las construcciones de los alumnos que anticipan, confrontan y validan sus razonamientos y el docente es un mero facilitador, considerándoselo, en esta línea, “aprendiz de la enseñanza”.

El **constructivismo social**, que tiene en Ernest a uno de sus referentes, adopta una ontología relativista moderada, propone la fenomenología social y entiende al mundo como el resultado de una construcción social. En su epistemología asume el conocimiento como provisorio y aceptado socialmente. La teoría del aprendizaje es constructivista, considera relevante el lenguaje, la interacción social y las situaciones de conflicto cultural y cognitivo (resurgimiento de la teoría de Vygotsky).

El **enfoque fenomenológico** debido centralmente a Freudenthal considera que los conceptos, estructuras e ideas matemáticos se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. En una enseñanza que siga este enfoque se intentan describir los contenidos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas para los que se han creado.

En el **enfoque semiótico**, introducido por Godino y Batanero, se desarrolla la teoría de los objetos institucionales y personales y la teoría de las funciones semióticas, que postulan que las funciones semióticas facilitan el estudio de las representaciones mostrables (públicas) y las mentales (privadas) puestas en juego en las prácticas de Matemática. La introducción de las funciones semióticas permite perfeccionar la idea de que un sujeto comprende un concepto matemático determinado cuando lo usa eficazmente en diferentes prácticas; revisten singular importancia en el plano relacional y de este modo las Matemáticas se consideran como una actividad de resolución de problemas, compartida socialmente como lenguaje simbólico y sistema conceptual organizado lógicamente. Su teoría del aprendizaje es constructivista. *“Aprender matemática es construir significados personales y enseñar matemática consiste en procurar que los significados personales se aproximen al significado a priori de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar”* (Font, 2002).

La **teoría crítica** reflexiona sobre la Matemática realizada en las instituciones, pensada como una herramienta para la emancipación democrática. Pretende la construcción de significados con mirada sociopolítica que complementa la construcción personal y social realizada en el aula. Considera las prácticas de la Educación Matemática en la escuela como una red de distintas cuestiones que se interrelacionan y juntas provocan las condiciones para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en esa institución y esa red en la que intervienen las relaciones entre estudiantes, profesores, grupo de profesores de Matemática, administrativos y directivos, es el objeto de investigación para esta teoría por considerarla básica para la reflexión sobre la práctica. Se resalta la importancia de entender la política de la institución, la relevancia de las Matemáticas escolares, la organización de la escuela, la comunidad de profesores, el significado que cada docente da a la Matemática en el aula para entender el funcionamiento de la Matemática escolar. Entre los representantes podemos mencionar a P. Valero y O. Skovsmose.

El **enfoque sistémico** plantea ampliar la reflexión teórica incluyendo un estudio de los contenidos matemáticos a enseñar y no limitarla al análisis de cuestiones cognitivas propias del alumno y de su aprendizaje. La Matemática es considerada como una ciencia que se ocupa de resolver problemas. El aprendizaje es concebido como constructivista y la tarea central de la enseñanza es llevar a cabo la transposición didáctica. La metodología de investigación es vista por Font como positivista, cuestión que consideramos es discutible. En este enfoque se encuadra la Teoría de Situaciones de G. Brousseau.

El **enfoque antropológico**, tiene como uno de sus principales exponentes a Y. Chevallard. La Matemática es considerada como una actividad humana llevada a cabo en distintas instituciones. El aprendizaje es concebido como constructivista. La enseñanza se corresponde con una actividad de reconstrucción de los objetos matemáticos con el fin de reutilizarlos en otros contextos. De este modo la función del enseñante es generar condiciones para llevar adelante esta reconstrucción. La metodología de investigación también es descripta como positivista.

En la Teoría de Situaciones se concibe el conocimiento matemático como una construcción resultante de una serie de situaciones interrelacionadas en las que intervienen el alumno y el profesor con distintas responsabilidades, según el momento, frente a la creación de ese conocimiento. La situación inicial, disparadora de la producción de conocimiento, debe darse a partir de un problema planteado a los alumnos. Por supuesto, quien plantea el problema es el profesor y debe hacerlo de modo tal que el alumno no note su intencionalidad de enseñanza. El problema, junto a esta forma en que se le presenta al alumno y junto a los recursos que se utilicen para que el alumno se comprometa con la resolución del mismo y se apropie de él constituyen una *situación a-didáctica.* En este tipo de situación el alumno considera el problema como un asunto propio reconociendo que éste requiere de un conocimiento nuevo que debe construir por sus propios medios, sin direccionamiento externo. La *situación didáctica* es aquella en la que el docente interviene, siempre que sea necesario, en el sistema de interacciones del alumno con el problema, ya sea mediante preguntas que continúen con la línea de pensamiento del alumno o proveyendo o sugiriendo técnicas que permitan al alumno concretar la línea de acción que trazó. En las situaciones a-didácticas y en las didácticas se destacan momentos en los que se pone cierto énfasis en el tipo de trabajo propuesto para el alumno, ellos son: las situaciones de *acción*, de *formulación* y de *validación*. En las situaciones de acción el estudiante debe poder actuar sobre el problema, hacer elecciones de conocimientos matemáticos que considere adecuados y anticipar resultados posibles. El problema debe admitir retroacción, es decir debe ser tal que le devuelva al alumno información sobre las consecuencias de esa acción, permitiéndole juzgarla sin la intervención del docente. En esta etapa tienen preeminencia las *nociones protomatemáticas*, que son aquellas que se usan pero que no son reconocidas como objeto de estudio ni como instrumento. Las nociones protomatemáticas (así como las paramatemáticas y matemáticas que se describirán a continuación) son introducidas por Chevallard en un marco epistemológico más amplio. Consideramos, de todas formas, que permiten ser adaptadas localmente facilitando la descripción de las distintas etapas de construcción de conocimiento. Las situaciones de formulación son aquellas en las que el estudiante intercambia información con otros estudiantes para su posterior debate en la clase. Es una reconstrucción de la acción en la que se toma contacto con otros procedimientos de resolución. Se trata de una forma de hablar de la situación, en la búsqueda de la construcción de un lenguaje, un sistema simbólico capaz de representar lo hecho. Se da aquí un dominio de las *nociones paramatemáticas*, es decir, nociones que se utilizan conscientemente como instrumentos que permiten describir a otros objetos matemáticos, pero que no son objeto de estudio en sí mismo. Finalmente en las situaciones de validación, el estudiante debe probar la validez, exactitud y pertinencia de su modelo, de los resultados de su acción y formulación, convenciendo a otros, quienes pueden pedir explicaciones adicionales y aún rechazar –justificando– las que no acuerden. Las acciones realizadas pueden ser reformuladas o aún desechadas –si son reconocidas como falsas– lo que implicará la búsqueda de un nuevo procedimiento, pero teniendo en cuenta los errores anteriores como parte del proceso de construcción. Las nociones dominantes en esta situación son las *nociones matemáticas*, objetos matemáticos construidos, listos para ser enseñados y utilizados. Son objeto de estudio en sí mismos y también instrumento para el estudio de otros. En las tres situaciones mencionadas, es tarea del docente la *devolución* del problema al estudiante, es decir, ubicarlo en situación a-didáctica.

Esta teoría comporta también otras nociones importantes como la de medio o "*milieu*", que puede ser entendido como el conjunto de objetos materiales y simbólicos que dan marco o contexto al trabajo del alumno (y al profesor) y al cual éste debe ir adaptándose para ir originando un tipo de conocimiento específico. En este contexto se dan las conductas del que aprende, las acciones y reacciones provocadas por la situación a-didáctica, las informaciones que surgen a partir del manejo de técnicas sobre el problema y las formulaciones que surgen de las distintas situaciones, etc. Otras nociones de la teoría son la de *institucionalización* y *contrato didáctico.* Este último es entendido como el conjunto de reglas, en su mayoría implícitas, que regulan las acciones y las responsabilidades del docente y de los alumnos quienes, estos últimos, deben producir el conocimiento para resolver el problema. La *institucionalización* es el momento en el cual el docente muestra las relaciones entre la producción del alumno por un lado y el conocimiento científico y el proyecto didáctico por otro. En la institucionalización el docente da coherencia al conocimiento construido por el alumno respecto al conocimiento instituido (científico-escolar) mostrando la relación entre el significado que los conceptos elaborados tienen en la Matemática y el sentido construido por el alumno y usado por él en el contexto de aprendizaje.

El enfoque antropológico de Chevallard es más abarcativo y no sólo da un marco teórico para explicar la actividad matemática y el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el ámbito escolar sino que enmarca la actividad matemática en el contexto de las actividades humanas que se dan según reglas, técnicas y especificidades de las instituciones. De esta manera, al aparecer lo institucional, se da un marco teórico para explicar la relación entre actividades y saberes que se dan en distintas instituciones y que guardan relación entre sí. Así por ejemplo, el saber o contenido matemático que ha sido designado para enseñar preexiste antes de esta designación en el seno de la institución Matemática (la de los matemáticos científicos). Este saber "sabio" sufre una serie de transformaciones que lo convierten en un objeto de enseñanza. El proceso de transformación que media entre estos dos contenidos o saberes es la *transposición didáctica*.

Aunque el somero panorama planteado deja entrever el auge y diversidad que tiene en estos momentos la Didáctica de la Matemática, la Escuela Francesa sigue siendo, a nuestro entender, la más difundida a los fines de la formación docente. En los institutos de formación docente, así como en las capacitaciones, casi la totalidad de enfoques y propuestas se circunscriben a la línea francesa.

Las tendencias actuales marcan una prolífica producción de trabajos de investigación en los distintos enfoques. Esto nos pone en el compromiso de tener que ampliar la mirada respecto a la formación en la Didáctica de la Matemática de los futuros docentes.

1.2. Rol de la Didáctica de la Matemática en la Formación Docente

A partir de algunos diseños curriculares de formación docente analizados[4], se observa una ausencia de definición en varios sentidos en cuanto a la Didáctica de la Matemática. En ellos, por un lado, no está explícito ni el rol ni la función de la Didáctica de la Matemática, pareciera que es una cosa obvia y transparente pero en realidad esconde una falta de definición sobre cómo se concibe la enseñanza y el aprendizaje de esta ciencia. Esta cuestión también se observa en los Diseños Curriculares de los niveles escolares (inicial y EGB) en los que no hay una línea didáctica clara que se deba seguir. Mencionamos esto como un hecho objetivo sin valoración, dado que bien podría considerarse valioso que el diseño sea expresamente abierto en estos aspectos, o por el contrario podría considerarse imprescindible una mayor definición y prescripción en los mismos.

Desde nuestro punto de vista, el futuro docente debería manejar (en el sentido de conocer y ser capaz de actuar en consecuencia) más de una teoría o modelo de la Didáctica de la Matemática. Por un lado porque concebimos que cada docente debería forjar su propia adaptación de las teorías aprendidas en la formación docente para ajustarlas a su contexto de trabajo, a sus gustos, a sus concepciones, a su visión sobre la Matemática, sobre el sujeto del aprendizaje, etc. Se espera de este modo que cada docente defina su propio marco teórico con el cual pueda ser coherente a la hora de la enseñanza, sobre todo en momentos en los que la definición teórica sobre los lineamientos didácticos en el nivel escolar está abierta a la elección justificada de las instituciones y sus docentes. Por otra parte, la formación docente se da en un cierto tiempo y contexto y el trabajo profesional se llevará a cabo en otro tiempo y contexto de modo tal que los aprendizajes logrados deberían facilitar la adecuación del futuro docente a cambios constantes y poco predecibles. Por esta razón, consideramos conveniente no sesgar la enseñanza de la Didáctica a una única mirada dado que tal vez, en un tiempo cercano, otros aportes (diferentes a la línea única seleccionada) se encuentren mejor adaptados a las necesidades docentes.

[4] Ver por ejemplo Documentos Curriculares de la Provincia de Buenos Aires.

Finalmente, una tercera razón, es que presentar la Didáctica desde un único punto de vista podría hacer que el alumno (futuro docente) responda –oficio de alumno- con lo que el profesor formador “espera oír de él”. De este modo, el futuro docente podría no estar de acuerdo con el enfoque enseñado, pero no tendría otra opción para aprobar la materia que repetir o actuar como se espera de él. En este caso, es altamente probable que este alumno cuando sea docente ignore las enseñanzas recibidas en su formación. Este último hecho, que puede ser causado por una combinación de múltiples variables, suele ser nombrado por profesores de práctica de institutos de formación docente, como una característica encontrada en las observaciones de las residencias e incluso por inspectores al observar docentes en ejercicio.

Hemos encarado hasta aquí el problema de analizar qué criterio usar para definir qué contenidos deberían incluirse en la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Nos resta enfocar dos problemas que no son menores. Por un lado queremos mencionar los propósitos de la enseñanza de la Didáctica de la Matemática, que sintetizaremos mencionando algunos conocimientos, en términos de “saber hacer” y que consideramos indispensables para los futuros docentes. Por otra parte dedicaremos un párrafo a pensar en cómo encarar la enseñanza de la Didáctica de la Matemática.

Respecto de qué cuestiones consideramos relevantes que los futuros docentes aprendan en las asignaturas afines a la Didáctica, mencionamos las siguientes:

- Seleccionar y preparar contenidos matemáticos para su enseñanza.
- Analizar problemas de la práctica docente desde diversos enfoques teóricos.
- Disponer de herramientas teóricas que permitan analizar los aprendizajes y los errores de los alumnos.
- Disponer y utilizar herramientas para el diseño y aplicación de situaciones didácticas bajo distintos modelos de aprendizaje supuestos.
- Plantear objetivos diferenciados para un mismo contenido matemático en función de los diferentes niveles, conocimiento de los alumnos, etc.
- Conocer y adaptar a distintos contextos, trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática.
- Justificar la selección de un sistema de evaluación y diseñar distintos tipos de instrumentos.

A estas cuestiones les agregamos un objetivo que a nuestro entender es central para la formación: el alumno futuro docente debe, en primer lugar, ser capaz de definirse como docente lo que implica definirse en cuanto qué Matemática él concibe para la enseñanza, cuáles son sus concepciones respecto de la enseñanza y respecto del aprendizaje según las características de los sujetos. Esto lleva implícito que el futuro docente debe:

- Conocer y elegir, justificadamente, aspectos de teorías de la Didáctica de la Matemática, de la Enseñanza y del Aprendizaje que le permitan definir su marco teórico como docente.

Desde este enfoque consideramos importante para la enseñanza de asignaturas afines a la Didáctica de la Matemática: a) proponer objetivos valiosos (en el sentido recién descrito) y b) incluir en la bibliografía básica de estas asignaturas trabajos de investigación que respondan a distintos enfoques teóricos.

Respecto de cómo encarar la enseñanza de la Didáctica de la Matemática, comenzamos abriendo una serie de interrogantes que nos preocupan y sobre los que intentaremos esbozar algunas respuestas. Nos preguntamos ¿cómo encarar el problema de enseñar la Didáctica de la Matemática?, ¿qué teorías/ investigaciones elegir?, ¿qué criterios usar?; haciendo una analogía con lo trabajado en el apartado1.2 ¿qué de la Didáctica de la Matemática enseñar que sea representativo de ella?

Haciendo una analogía con la enseñanza de la Matemática, podríamos pensar que el alumno (futuro docente) debe construir su conocimiento didáctico y esto debe hacerse a partir de una propuesta centrada en su actividad. Aunque este tipo de metodología no es usual en la formación superior, consideramos que, por lo menos para algunos contenidos, debería llevarse a cabo. Esto nos lleva a plantearnos una enseñanza de la Didáctica basada en la “resolución de problemas” (por ejemplo, a través de estudio de casos) pero problemas de la enseñanza/aprendizaje, cuyo abordaje es altamente complejo dado que en ellos se ponen en juego múltiples variables y enfoques que permiten analizar la cuestión desde distintos campos que convergen en la Didáctica (la psicología, la antropología, etc.). Es decir, proponemos que la enseñanza de la Didáctica se presente como un campo que produce explicaciones, posibles interpretaciones de problemas y permite establecer posibles respuestas a problemas y no como una serie de definiciones teóricas de conceptos que sólo le brindan al alumno un vocabulario nuevo que le permite comunicarse con sus pares pero no le permite incidir en su práctica docente. Dice J. F. Halté (citado en Astolfi, 2002), refiriéndose a la Didáctica del Francés, pero adecuable perfectamente a la Didáctica de la Matemática *“es indispensable que los maestros hagan didáctica, que piensen de manera didáctica, que se transformen en didactas, no en aplicadores de recetas mediocres, y, para continuar la metáfora, que produzcan su propia cocina. La práctica de la didáctica se reproduce como una experiencia de laboratorio... El porvenir de la didáctica pasa por el establecimiento de una relación simbiótica entre investigación y enseñanza. En síntesis hay mucho trabajo para todos en el punto en el que nos encontramos. ¡Y se trata de un trabajo interactivo!”*. Esto nos permite enunciar otros dos criterios que consideramos importantes de tener en cuenta a la hora de pensar en la enseñanza de la Didáctica de la Matemática: a) los docentes deberían recibir formación para participar en equipos de investigación y luego deberían formar equipos de investigación y b) los docentes deben reflexionar sobre la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Para que esto sea posible se deben mejorar la realidad de trabajo en los institutos de formación docente, creando condiciones para tales fines, no sólo en términos de remuneraciones sino en espacios dentro de la institución para tal fin.

Aún no se ha discutido en profundidad en la comunidad educativa el problema de la enseñanza de la Didáctica de la Matemática. Creemos que hoy en día es un campo a explorar.

2. Situación y perspectivas de la enseñanza de la matemática. Problemáticas de enseñanza y aprendizaje.

2.1 Cuestiones preliminares para entender la situación actual de la enseñanza

El movimiento reformista de la enseñanza de la Matemática Moderna fue gestándose en Estados Unidos y Francia desde los años cincuenta. A nivel mundial, desde principios de los sesenta hasta fines de los ochenta, la enseñanza de la disciplina estuvo guiada por pautas originadas en el seno de la comunidad matemática. Matemáticos de gran prestigio como H. Cartan, J. Dieudonné y G. Choquet, entre otros, indicaban, desde su perspectiva científica, cuál era el cambio que debía darse en la enseñanza, no sólo a nivel superior sino también básico. Estas indicaciones estaban influenciadas por el espíritu de las investigaciones científicas de la época, inclinadas preferentemente hacia el Análisis, las estructuras algebraicas, la Topología algebraica y por la introducción de métodos de razonamiento cada vez más complicados y abstractos para satisfacer las exigencias de rigor que se había planteado a partir de la crisis de los fundamentos de principios del siglo veinte.

Hubo en esta época varias conferencias internacionales donde matemáticos y profesores destacados perfilaban los métodos y procedimientos de la enseñanza; cabe aclarar que estos métodos estaban determinados a la luz de la Lógica y de la Matemática y en esas conferencias la discusión sobre las cuestiones psicológicas y pedagógicas involucradas en la enseñanza quedaban en segundo plano. A nivel regional, las reuniones más influyentes para nuestro país, como puntapié de la reforma, fueron la primera y segunda Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática de Bogotá (1961) y Lima (1966)[5] respectivamente. Resumidamente, enumeramos las siguientes cuestiones que surgieron en estos espacios internacionales de acuerdo y resultaron ser pautas de organización de la enseñanza de la disciplina:

1- Enseñar a los estudiantes a ordenar y encadenar sus pensamientos en forma deductiva en concordancia con el método de razonamiento que emplean los matemáticos.
2- Fomentar la facultad de abstraer y razonar sobre nociones abstractas.

[5] El objetivo central de las conferencias era de divulgar el nuevo enfoque universalista de la Matemática desarrollado alrededor de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas abstractas y la lógica matemática. También se pretendía lograr el compromiso de los delegados para que promovieran el cambio curricular en sus países. Los delegados de Argentina a dichas conferencias fueron el Dr. Luis Santaló y el Dr. Alberto González Domínguez (ver Ruiz & Barrantes)

3- No incluir en la enseñanza la cuestión de la historicidad de los conceptos para poder vincular más estrechamente la matemática escolar con la matemática contemporánea.
4- Dar unidad conceptual a la Matemática a través de las nociones de conjuntos, relaciones, funciones, estructuras algebraicas fundamentales como la de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial. Introducir las estructuras y técnicas algebraicas en el Álgebra y Geometría elementales.

Con estos principios la enseñanza de la Matemática iba dirigida a formar estudiantes con habilidades para operar con entes abstractos y a desarrollar competencias que los prepararan para continuar estudiando Matemática a nivel científico. Además, para aquellos sin intereses en seguir carreras afines, contribuía a fortalecer su formación en tanto el ejercicio del razonamiento matemático “desarrolla la claridad de espíritu y el rigor del juicio” (Dieudonné, 1971).

Sin embargo los acuerdos logrados y las reformas efectuadas no se materializaron en buenos aprendizajes. El paradigma de universalidad, de predominio de las estructuras algebraicas y del formalismo en la enseñanza de la Matemática, junto a la forma de ponderación de unos saberes matemáticos sobre otros, tuvo en la práctica, consecuencias no deseables, como por ejemplo:

1- Una excesiva insistencia en la manipulación simbólica y en el lenguaje lógico en detrimento de las ideas y de formas de pensamiento creativos, también propias del quehacer matemático, como la exploración, la analogía, la inducción, la heurística, etc. (por ejemplo: insistencia en la clasificación de relaciones: de orden, de equivalencia, a nivel de escuela media).
2- Reiteración de ciertos contenidos sin complejizarlos según el nivel escolar (por ejemplo: operaciones con conjuntos, producto cartesiano, relaciones, etc. vistos de la misma manera en distintos niveles de escolaridad)
3- La ponderación del aspecto formal de un concepto por sobre el operativo (por ejemplo el concepto de función dado por relaciones entre conjuntos en lugar de dado por correspondencia entre variables, la manipulación algebraica de cálculo con logaritmos haciendo uso de sus propiedades, la presentación de números complejos como par ordenados de números reales con ciertas operaciones que extienden la estructura de cuerpo de los reales sin estudiar suficientemente el papel de los números complejos como raíces de polinomios de coeficientes reales).
4- La pérdida de lo intuitivo, de la exploración racional del espacio físico y el consecuente empobrecimiento del estudio de la Geometría.

Otras consecuencias no deseables se ven en el plano psicológico si tenemos en cuenta que el paradigma antes mencionado ocasiona, cuando es extremado, una imagen distorsionada de ciencia acabada, irrefutable, estática, de difícil acceso, lejana de la cotidianidad, lo que ocasiona rechazo, fracaso y desinterés con respecto a su estudio por parte del estudiantado. Se ven también en el plano pedagógico en el aumento de las dificultades de aprendizaje, en la resistencia de algunos errores a ser superados, en la imposibilidad por recontextualizar temas aprendidos, etc. Por otro lado quienes logran entender los mecanismos, técnicas, teorías, tienen gusto por el formalismo y se animan a continuar una carrera afín, suelen tener dificultades cuando son estudiantes de nivel superior al abordar otros aspectos, como el de modelización y resolución de problemas. Tienen una imagen de teoría y práctica de la Matemática disociadas y una visión aplicacionista de los problemas.

Más allá de los defectos que uno pueda ahora aludir a la "revolución de las Matemáticas Modernas", hay una cuestión importante a destacar que es el compromiso y actuación de la comunidad matemática científica por decidir sobre los destinos de la Matemática a enseñar y la contundencia en la determinación de qué debía enseñarse de esta ciencia y el papel de la misma en la escolaridad.

2.2 Tendencias actuales

A partir de los años ochenta las publicaciones en Didáctica de la Matemática han adquirido protagonismo en lo que se refiere a delinear caminos en la Educación Matemática. Estos trabajos abordan cuestiones epistemológicas, metodológicas, cognitivas, socio-cognitivas por lo cual han logrado introducir distintos enfoques sobre qué es aprender y qué es enseñar Matemática y aquello que puede ser capital estable del aprendizaje de la Matemática en esta realidad cambiante e incierta del mundo actual.

La tendencia actual de la enseñanza de la Matemática, propiciada desde las investigaciones en Educación Matemática, es vincular el conocimiento del individuo que aprende con el conocimiento matemático científico, viendo a este último no sólo como un saber acabado y específico con incumbencias en campos técnicos y profesionales, sino también como un saber cultural, con características especiales, necesario para desarrollar las capacidades humanas y para mejorar la relación del hombre con su medio a través del poder interpretativo y representacional que la Matemática le brinda. Por eso es que han tenido auge en este último tiempo ideas tales como: la de "inculturación" (o enculturación) (de Guzmán, 1993), que se refiere a *"concebir la Educación Matemática como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático"* poniendo énfasis en los procesos inventivos y constructivos (intuitivos, empíricos, heurísticos) además de los procesos de formalización (simbolización, argumentación, deducción, demostración); la de *"educar al hombre informático"* (Santaló, 1990), que se refiere al desarrollo del intelecto humano en formas de pensamiento que hagan que se procese la información en forma ágil, creativa y no mecanicista para tomar decisiones conscientes y reflexionadas, en la forma más económica posible, luego de haber interpretado dicha información. Asimismo, en el ámbito de la investigación educativa, han surgido teorías como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), que enmarca la actividad matemática en el contexto de las actividades humanas que se dan según reglas, técnicas, especificidades de las instituciones y la Etnomatemática[6] que enmarca la producción matemática en relación a la tradición cultural (de acuerdo a grupos étnicos, a legados históricos, a los hábitos domésticos y a las formas informales, no escolarizadas, de aprender cuestiones matemáticas).

[6] A Ubiratán d'Ambrosio, matemático y educador brasileño, le corresponde haber popularizado esta corriente de investigación en los años ochenta.

2.2.1 *Los principales temas en el debate sobre la enseñanza*

Los principales asuntos relativos a la enseñanza que se han ido desarrollando desde los años ochenta, son: aprendizaje activo y procesos de pensamiento matemático, resolución de problemas, papel de las nuevas tecnologías de la información y de procesamiento de datos y la recuperación de la enseñanza de la Geometría.

Aprendizaje activo y resolución de problemas: El aprendizaje activo sobreentiende ponderar procesos de construcción por sobre los de transmisión-recepción para lograr desarrollar la autonomía en el aprendizaje, la capacidad crítica, la creatividad, entre otras cosas. Este tipo de aprendizaje se sustenta en las tareas que se desarrollan en el ámbito escolar, las cuales debieran, necesariamente, tender un puente entre las estructuras conceptuales básicas de la Matemática y el conocimiento de los alumnos. Las tareas deben ser gestionadas por el docente de modo de que el alumno se ubique en una situación en la que hay un asunto planteado en relación con el saber matemático. El alumno debe sentirse motivado para abordar ese asunto y comprometerse a dilucidarlo, comprenderlo, analizarlo, encontrar las relaciones no evidentes, manipular autónomamente ciertos objetos que él conoce para obtener más información sobre él. Formas para abordar la situación planteada son: explotar la analogía, hacer uso de elementos auxiliares, descomponer y recombinar, usar casos particulares para luego generalizar, trabajar hacia atrás, elegir estrategias y técnicas para aproximarse a su comprensión o resolución, evaluar la elección sea por ensayo o por anticipación de su aplicación, hallar y verificar resultados, defender los nuevos procedimientos elaborados por él, etc. Este conjunto de acciones es parte de lo que se llama “heurística”. El asunto planteado (que puede estar basado en los procesos históricos de construcción de un concepto, en modelos, en juegos, en aplicaciones), y que da lugar al abordaje antes descrito, es un *problema* y la situación (con intervención de distintos aspectos: social, física, afectiva, temporal, etc.) generada a partir de él es la *situación problemática*. Coincidimos con Labarrere (citado en Nápoles Valdés, 2000) que un problema es una proposición o un cuestionamiento en los que se plantea un asunto, fuente de curiosidades, inquietudes, desafíos, en el cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona y que ésta debe develar. La “resolución de problemas” como marco para la enseñanza de la Matemática, y como marco de investigaciones en Didáctica, se inició a partir de los trabajos de Polya (1945, 1954, 1981). En un principio este marco hizo referencia a la enseñanza y aprendizaje de las competencias necesarias para abordar un problema haciendo hincapié en distintas formas de resolver, de evaluar y optimizar métodos y técnicas (estrategias), es decir en los procesos de pensamiento más que en los contenidos. Actualmente se incorporan variantes que también incluyen el tratamiento del contenido. Según Schoenfeld (1992), la resolución de problemas involucra aspectos afectivos, prácticos, cognitivos y metacognitivos. El aspecto afectivo tiene que ver con las creencias y valoraciones sobre la Matemática y los problemas, su dificultad, su utilidad, etc.; el práctico tiene que ver con las destrezas, técnicas y uso de instrumentos; el cognitivo tiene que ver con la memoria, su contenido y su estructura, los conocimientos previos y la forma en que éstos se conectan con los nuevos, las estrategias y los procedimientos heurísticos; el metacognitivo tiene que ver con la autorregulación, monitoreo y control.

Los problemas pueden tener diferente funcionalidad de acuerdo con los modelos de enseñanza en los que se utilizan (Charnay, 1994): como criterio de aprendizaje (modelo de enseñanza normativo), se basa en la reiteración y reutilización de esquemas ya enseñados reconociendo en el nuevo problema planteado la forma de resolución de un problema análogo ya realizado; como móvil de aprendizaje (modelo incitativo), en el que el problema tiene estrecha relación con los intereses del estudiante, depende de lo ocasional y disminuye la posibilidad de ejercer control sobre la coherencia de lo aprendido; como recurso de aprendizaje (modelo apropiativo) los problemas se eligen en función del saber que se quiere construir para que den lugar a situaciones de acción, formulación, validación por parte del alumno, en interacción con sus pares, y de institucionalización por parte del docente.

Nuevas tecnologías: Con respecto a una formación matemática que aproveche en forma creativa y crítica las nuevas tecnologías, Santaló (1990) sugiere las siguientes perspectivas de enseñanza con las cuales acordamos:

- *"Educar en el planteo de los problemas en programas calculables, sin demasiada preocupación por economizar el número de operaciones o la cantidad de parámetros"* (los programas calculables a los que se refiere son algoritmos que sean fáciles de programar para hacer cálculos).
- *"Es mejor ir aprendiendo las leyes del razonamiento de manera natural, como algo inherente al lenguaje. [...] Por ejemplo, las ideas de inducción, demostración por el absurdo, condición necesaria y suficiente o «si y sólo si» hay que aprenderlas con ejemplos referentes a casos concretos a medida que van apareciendo, sin pretender filosofar sobre su significado abstracto".*
- Incluir en los ciclos de enseñanza los siguientes puntos: elementos de estadística y probabilidad, (*"elementos de la teoría de muestreo para poder entender las bases de las encuestas de opinión (...) y apreciar su grado de confiabilidad"*), elementos de teoría de grafos, teoría de juegos y programación lineal (*"puesto que la vida es un continuo de decisiones que cada uno debe tomar con frecuencia y que influyen o pueden influir en el futuro la escuela debe informar sobre la existencia de una teoría de la decisión"*).

Además de los softwares que se han desarrollado para la actividad matemática, técnica o científica, como el Mathematica, el Matlab o el Maple, existen softwares diseñados con propósitos educativos, como el Derive, Cabri, el Graphmatica, entre otros. En general todos estos paquetes favorecen la ejecución de los cálculos, la visualización de los objetos matemáticos y sus relaciones y ofrecen la posibilidad de la exploración abierta.

Así como la formación matemática contempla, como acabamos de mencionar, el uso de tecnologías, no debemos olvidarnos del aspecto formal de la Matemática.

Con respecto a este punto, consideramos que se debe ir incorporando paulatinamente, mediante actividades de clase cuidadosamente diseñadas que permitan conectar las formas iniciales de validación (intuitivas), con las formas más complejas, como la demostración matemática.

La recuperación de la Geometría como estudio de formas: En cuanto al lugar de la Geometría en el conocimiento escolar, Arendt (1997) alerta sobre la "desgeometrización" de lo cotidiano en una sociedad donde lo informático impone un predominio de lo numérico. Esta desaparición de la Geometría en lo cotidiano tiene su influencia en el aprendizaje y la enseñanza de la disciplina. Como contrapartida a este fenómeno, destaca la reaparición de la Geometría en formas más sofisticadas dentro de dominios más avanzados de la ciencia. La Geometría aparece como un campo esencial donde se construyen elementos que permiten la "inteligibilidad del mundo" y esto justifica que se defina, o redefina, su lugar en la enseñanza.

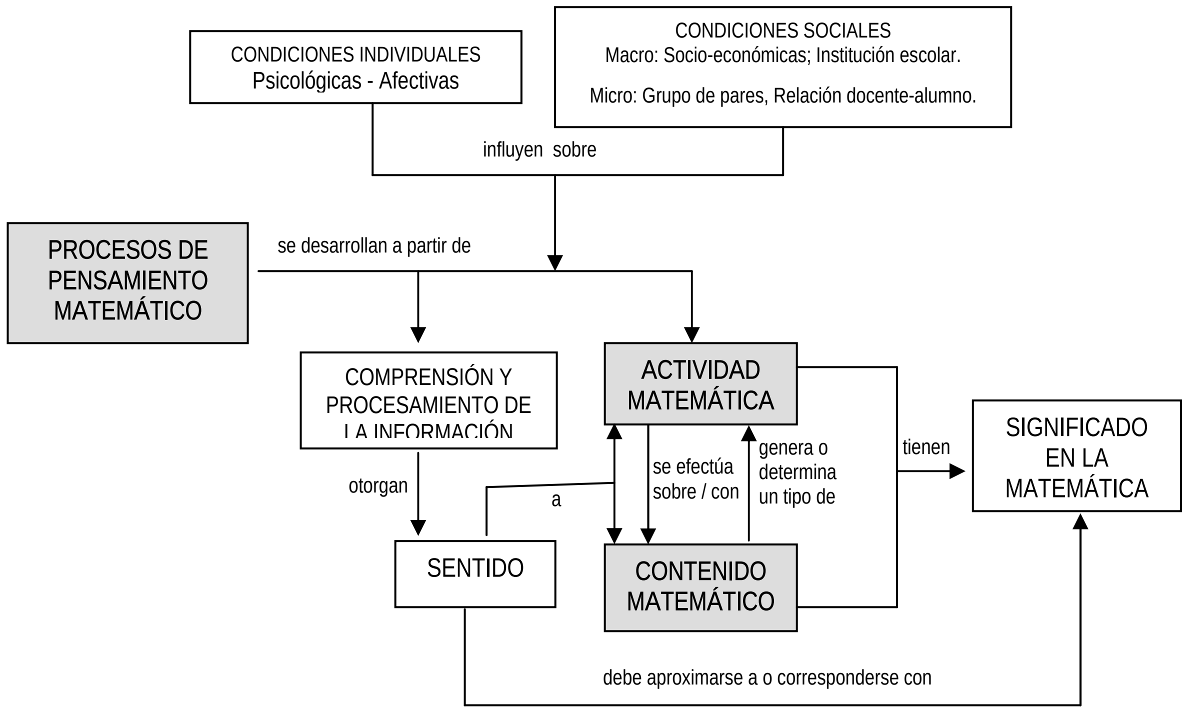
Barbin (2000) señala que el punto de partida de la enseñanza de la Geometría debería ser el estudio de las figuras y la formación de esquemas de razonamiento sobre la figura y la construcción: *"Hacer una construcción obliga a una puesta en orden [...] Este trabajo de la puesta en orden es esencial en el aprendizaje del razonamiento geométrico. Además, escribir las construcciones puede constituir para los alumnos, una primera etapa en la escritura de un texto ordenado y argumentado. Por otro lado, para construir una figura hace falta partir de las condiciones del problema y proceder por análisis remontándose a las figuras más simples a partir de las cuales ella puede ser obtenida*". Este punto de partida es compartido por Pluvinage y Rauscher (Capponi, 2000) para quienes habría que privilegiar una "Geometría construida o de tratamiento" en lugar de una "Geometría de figuras ideales" o una "Geometría de las estructuras". En esta Geometría construida se distinguen cinco etapas: a) identificar y representar los objetos y las propiedades geométricas, b) identificar los condicionantes de una situación geométrica, c) comprender los vínculos entre las propiedades, d) explicitar la distinción entre contenido y estatus de hipótesis y tesis de una proposición respecto a una situación geométrica, e) efectuar y redactar las demostraciones.

Para favorecer este tipo de aprendizaje han surgido programas de computadora (Cabri, Geometer Sketchpad o Cinderella) que fomentan un tipo de relación entre el aprendiz y la Geometría que explota la visualización, la exploración, la formulación de hipótesis, la construcción, la verificación computacional. Los conocimientos construidos a partir de estas actividades matemáticas sobre la base de estos soportes informáticos constituye lo que se llama Geometría Dinámica.

2.3 Consideraciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática

Frente a la pregunta qué significa aprender y qué significa enseñar Matemática podríamos encontrar tantas respuestas como enfoques didácticos (ver parte 2), psicológicos o pedagógicos haya. Hay acuerdos más o menos generalizados como por ejemplo que el aprendizaje no es consecuencia directa de la enseñanza y que se aprende Matemática desde "el hacer", sea éste entendido como practicar, ejercitar, resolver problemas, etc.

Desde nuestra concepción, el aprender Matemática involucra componentes básicos, que constituyen un eje central y específico, que son: los procesos de pensamiento matemático (PPM), la actividad matemática (AM), los contenidos y conceptos matemáticos (CM). En la parte 1 ya señalamos cuáles eran las características del pensamiento matemático. Con procesos de pensamiento matemático nos referimos a las formas de pensamiento que se van generando en situaciones de aprendizaje y que pueden ser intermedias o de características que se van aproximando a las ya indicadas. Por supuesto, el pensamiento del alumno no es directamente accesible al profesor sino a través de las manifestaciones simbólicas, del lenguaje matemático o no matemático, a través de los que el profesor infiere, interpretación mediante, cuáles son los logros y cuáles las falencias en la consolidación de este pensamiento matemático y evalúa para ese caso, qué información el alumno puede estar necesitando o qué actividad debería reforzar. El pensamiento se desarrolla a partir de la actividad matemática (ver parte 1 sección 1.2.1) y de la forma en que la información que vaya surgiendo de ella sea procesada y comprendida. La actividad matemática se efectúa sobre un contenido (o concepto) matemático o con él. La información es fruto de una interpretación de los datos que se van obteniendo en la realización de la actividad matemática, la cual a su vez permite un acercamiento intelectual al contenido. En dicha interpretación intervienen los conocimientos o esquemas conceptuales previos. En el procesamiento de la información y en las acciones para comprender intervienen los aspectos cognitivos, metacognitivos, afectivos y prácticos así como psicológicos y sociales. Luego de procesar la información y comprender el contenido y la actividad matemática, el alumno construye o da sentido a estos últimos. El sentido es el significado personal que un concepto o actividad tiene para un sujeto en tanto éste percibe, intelectualmente, su funcionalidad, de acuerdo a sus propios esquemas personales, y puede operar con el concepto o poner en práctica la actividad en forma consciente y acorde, desde su entendimiento, al contexto. El sentido es el que da “razón de ser” al concepto o la actividad para el sujeto y es el que permite cierta “direccionalidad intencionada” a la acción. Por otro lado el contenido matemático abordado y la actividad matemática realizada tienen un significado en la Matemática (instituida), de acuerdo a su funcionalidad (es decir qué puede hacerse con ese contenido), a cómo se relaciona con otras ramas del saber, de acuerdo a las teorías de la que forma parte, su utilidad, etc. El sentido de un contenido o concepto construido por el alumno y el significado matemático del mismo debieran ir acercándose. Cuando la información ha permitido seleccionar y realizar pautas de acción para recrear, reorganizar, modificar conocimientos previos de modo que posibilitan nuevas pautas de acción, organizadas y planificadas, es que surge un nuevo conocimiento. El conocimiento involucra entonces información, sentido y posibilidad de acción. El siguiente cuadro esquematiza lo expuesto:



De acuerdo a este esquema podríamos ahora decir que las tareas fundamentales al enseñar Matemática son: gestionar una propuesta pedagógico-didáctica capaz de poner en marcha el circuito de arriba, *"fomentando una actividad matemática viva, variada, dinámica, exploratoria en cuya práctica se desarrollen las capacidades de buscar soluciones en lugar de memorizar procedimientos, investigar modelos en lugar de memorizar fórmulas, formular conjeturas en vez de realizar simples ejercicios de aplicación"* (Fortuny & Azcárate,1994); acercar el sentido construido por el alumno al significado en la Matemática o fomentar el acercamiento entre ellos (acorde a la idea de "institucionalización" de Brousseau); supervisar que los sentidos que se construyan no contradigan los significados de la Matemática o no obstaculicen futuros vínculos entre sentido y significado (supervisión epistemológica) y proveer herramientas para que el alumno se haga consciente de sus formas de pensamiento (metacognición) y pueda así comunicarlas, y para la construcción de sistemas simbólicos o de representación variados (lógicos, gráficos, etc.) que faciliten al alumno la representación, lo más fielmente posible, de su pensamiento. En todas estas tareas fundamentales debe promoverse y regularse el aspecto social del aprendizaje, es decir deben fomentarse las interacciones entre pares y con el docente de una forma intencionada, como parte de la propuesta pedagógico - didáctica. Concebimos el aspecto social como una componente del aprendizaje que debe tenerse en cuenta como variable que el docente debe regular.

Hay cuestiones de la enseñanza que podrían provocar un "corto-circuito" en este esquema como son: a) que el alumno no logre dar sentido a la actividad matemática o al contenido, b) que el profesor desconozca el significado del contenido y de la actividad en la Matemática y por lo tanto no pueda acercar sentido a significado, c) que se haga demasiado hincapié en una de las componentes centrales (PPM, AM o CM) en detrimento de las otras.

A modo de cierre.

Hemos intentado tomar posición sobre las cuestiones que identificamos como centrales a la hora de encarar la enseñanza de la Matemática. Así mencionamos, entre otras cosas, la importancia, a la hora de realizar prácticas educativas, de: tener en cuenta el quehacer matemático científico, pensar la enseñanza desde la actividad matemática que puede generarse con la propuesta, disponer de diversos enfoques didácticos, etc.

Más explícitamente, sostenemos que entre la Matemática científica y la Matemática escolar se comparta el quehacer matemático más que el formalismo y rigurosidad que se encuentra en la Matemática comunicada entre científicos. En cuanto a la formación en Didáctica de la Matemática para futuros docentes, sostenemos que ésta debe ser amplia, no limitándose a una única corriente. Mencionamos también la importancia de que los futuros docentes sean formados en investigación en Didáctica de la Matemática.

Siguiendo el desarrollo realizado en cada uno de estos aspectos, consideramos que este documento podría ser un instrumento que brinda herramientas que podrían utilizarse para analizar la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en diversas instituciones educativas, así como también abre una serie de direcciones para seguir pensando y definiendo líneas de acción referidas a la enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles de enseñanza.

Bibliografía.

- Arcavi, (2000); Problem-driven research in mathematics education, Journal of Mathematical Behaviour, 19, pp. 141-173.
- Arendt, H. (1997); Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géometrie. Repères – IREM, 26.
- Astolfi, J-P (2002); Aprender en la escuela, Edit. Océano.
- Barbin,E. (2000); Construire la Géometrie Élementaire. Repères–IREM, 40. pp. 5-9.
- Bishop, A. (2000); Enseñanza de las matemáticas. ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos?. Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Ed. GRAO.
- Bkouche, R. La démonstration: du réalisme au formalisme. Archivo html en casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf.
- Brousseau, G (1995); Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publisher.
- Brousseau, G. (1994); Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Brousseau, G. (2000); Les propriétés didactiques de la géometrie élémentaire: l'étude de l'espace et de la géométrie. Actes du Séminaire de Didactiques des Mathématiques du Département des Sciences de l'éducation de l'Université de Créte.

- Capponi, B. (2000); De la Géometrie de traitement aux constructions dans CABRI-GEOMETRE II au college. Repères – IREM, 40. pp. 11-42.
- Charnay, R. (1994); Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las Matemáticas, (Parra-Saiz compiladoras). Ed. Paidos. Bs. As.
- Chevallard, Y. (1992); Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard, Y. Bosch, M., Gascon, (1997); J. Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Cuadernos de educación. Para profesores, padres y alumnos. Vol. 22, España., Horsori, Institut de Ciences de l´Educació, Universidad de Barcelona.
- De Guzmán, M. (1984); Panorama de la Matemática. Avances del Saber. Tomo 5. Ed. Labor.
- De Guzmán, M. (1993); Enseñanza de la Matemática. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Tendencias e Innovaciones. Ed. Popular- OEI- Madrid.
- Díaz, E. (editora) (1997); Metodología de las Ciencias Socales. Editorial Biblos. Buenos Aires.
- J. Dieudonné (1971); La abstracción en Matemáticas y la Evolución del Álgebra. La Enseñanza de las Matemáticas. Ed. Aguilar. Madrid.
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (1999); Marco General, Nivel Inicial: (Tomo I: Estructura General, Fundamentación y Propósitos de las Áreas, Expectativas de Logros, Tomo II: Organización de Contenidos) y Superior (Tomo I: Estructura General, Profesorado Inicial, Profesorado EGB, Tomo II: Profesorado de Matemática)
- Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Programa para la definición del Diseño Curricular del Nivel Polimodal. Documento base.
- Dirección de Educación Polimodal y Trayectos Técnicos Profesionales. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires (2003); Propuestas para la enseñanza de matemática en el 3er Año del nivel polimodal. Documento de apoyo Nº 1.
- Ernest, P. (1996); The nature of mathematics and teaching. Philosophy of Mathematics Education. Newsletter 9.
- Font, V. (2002); Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las matemáticas. Revista EMA Vol. 7, Nº 2. Una empresa docente.
- Fortuny , J., Azcárate,C. (1994); Parte II: Enseñanza de la Matemática. Formación del profesorado de las Ciencias y la Matemática. Tendencias y experiencias innovadoras. Gil, D. Pessoa,A., Fortuny,J., Azcárate,C. Editorial Popular.
- Gascón, J. (1998); Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Krichesky, Rodríguez, Petrucci, Guindi, de Amézola, Cerletti, “Las condiciones y posibilidades del “pasaje” de saberes y prácticas especializados: el caso particular de la formación de docentes”. Ponencia presentada en las Jornadas de Docencia de la UNGS, 2004.
- Nápoles Valdés, J., Cruz Ramírez, M. (2000); La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones., Función Continua, Nro. 8. Bs. As.
- Polya, G. (1945; 2nd edition, 1957); How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

- Polya, G. (1954); Mathematics and plausible reasoning (Volume 1, Induction and analogy in mathematics; (Volume 2, Patterns of plausible inference). Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962,1965/1981); Mathematical Discovery (Volume 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton: Princeton University Press. Combined paperback edition, 1981. New York: Wiley.
- Ruiz, A., Barrantes, H. (1998); La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática. Academia Colombiana de Ciencias. Disponible en http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/CIAEM/indice.htm
- Santaló, L. (1990); Matemática para no matemáticos. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España.
- Santaló, L. (1994); Enfoques: hacia una didáctica humanista de la Matemática. Ed. Troquel. Bs. As.
- Schoenfeld, A. (1992); Learning to think mathematically. Problem Solving, Metacognition, and sense-making in mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.) New York: Mac Millan. (disponible en formato html)

Marcela C. Falsetti es Doctora en Matemática y se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
mfalse@ungs.edu.ar

Mabel A. Rodríguez es Doctora en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática en la Universidad de General Sarmiento ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
mrodri@ungs.edu.ar

Gustavo F. Carnelli es Licenciado en Enseñanza de las Ciencias, orientación Matemática. Realiza el Doctorado en Educación y dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
gcarnell@ungs.edu.ar

Francisco A. Formica es Licenciado en Matemática y además de la investigación en Matemática se dedica al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática ocupándose de temas como: interacciones en el aula y aprendizaje matemático, aprendizaje de la validación en Matemática. Trabaja para el nivel preuniversitario y para la formación de profesores.
aformica@ungs.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 187-201
ISSN: 1815-0640

Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato

Silvia Mayén, Belén Cobo, Carmen Batanero y Patricia Balderas

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de respuestas a un cuestionario que evalúa la comprensión de diferentes elementos del significado de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos al finalizar la educación secundaria. Nuestros resultados indican dificultades compartidas con los de un estudio anterior realizado en estudiantes españoles de menor edad y sugieren la necesidad de enriquecer la enseñanza con tareas más próximas a la vida cotidiana del estudiante, incrementando así su cultura estadística.

Abstract

In this paper we present a study of Mexican students' answers. The test involved was built to evaluate the student's understanding of central tendency measures at the end of secondary school. Our results depicted difficulties that were common to younger Spanish students and suggested the need to look for a teaching improvement based on situations that are closer to students' surrounds and that increase their statistics culture.

Introducción

Recientemente (Cobo, 2003; Batanero, Cobo y Díaz 2003) se ha elaborado un cuestionario de evaluación de la comprensión de los promedios, que tiene en cuenta el contenido global de este tema, según se recoge del análisis del currículo español en la Educación Secundaria Obligatoria, así como del contenido de los libros de texto usados por los estudiantes y como marco teórico, el desarrollado por Godino (2002). En estos trabajos previos se describieron, así mismo, las principales dificultades encontradas respecto a dichos conceptos en el contexto español.

Las medidas de posición central han suscitado gran interés dentro de la investigación en educación estadística, como puede constatarse en las investigaciones que resumimos en la segunda sección y que describen errores y dificultades en estudiantes de diversas edades, incluso en alumnos universitarios. Estas investigaciones, sin embargo, han tocado puntos aislados de su comprensión y los instrumentos de evaluación empleados no se basan en un análisis de la enseñanza recibida por los estudiantes participantes en las mismas.

En este trabajo utilizamos una parte del cuestionario citado, para realizar un estudio de la comprensión de los promedios en estudiantes mexicanos de Bachillerato (17-18 años). Esta parte del cuestionario, que se incluye en este artículo como anexo, se eligió, una vez analizado el currículo mexicano y observados los contenidos coincidentes con el currículo español, en cuanto al tratamiento de los promedios, aunque el estudio de Cobo (2003), se llevó a cabo con estudiantes de menor edad (15-16 años). El propósito de este trabajo es continuar nuestras investigaciones previas y comprobar si las dificultades detectadas en el contexto español son específicas o bien compartidas por estudiantes de edades próximas, pero en un contexto educativo diferente. Este sería el primer paso para plantear propuestas didácticas que permitan superar las dificultades encontradas.

En lo que sigue analizamos cada ítem del cuestionario y presentamos la proporción de estudiantes que responde correctamente cada ítem. Comparamos también con los resultados españoles, teniendo en cuenta la menor edad de aquellos estudiantes. La comparación es posible, puesto que se siguió un criterio común de corrección de las respuestas.

Para fundamentar el trabajo describimos en primer lugar las investigaciones previas.

Investigaciones previas

A pesar de ser uno de los conceptos estadísticos básicos, los promedios no son siempre bien comprendidos por los estudiantes de educación secundaria o incluso los universitarios. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que muchos estudiantes no identifican las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada. Esta situación se produce en particular, al calcular una media a partir de datos agrupados en intervalos (Li y Shen, 1992; Gattuso y Mary, 1996, Carvalho,1998).

Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos saben invertir el procedimiento, esto es, determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Mevarech (1983) sugiere que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética satisface los axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Reading y Pegg (1996), estudiaron la forma en que los alumnos de 12-18 años reducen los conjuntos de datos, observando que algunos eran capaces de dar un resumen de datos presentados en forma numérica, pero fracasaron en la tarea, cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico estadístico.

Watson y Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes de 11 a 15 años al término "promedio" y hallaron que un gran número consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Esta idea es correcta si la distribución es simétrica, pero si no lo es, solo se cumple para la mediana. En su estudio, tratan de analizar el desarrollo evolutivo del concepto e indican también que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, sólo la entienden los estudiantes de cursos avanzados. Otros autores como Tormo (1993) y Mary y Gattuso (2005) analizan si los estudiantes tienen en cuenta el efecto de un valor cero sobre la media. Todos estos trabajos se centran en el análisis de algoritmos de cálculo o propiedades aisladas. En nuestro estudio previo (Cobo, 2003; Batanero, Cobo y Díaz, 2004) y en el que ahora planteamos, tratamos de realizar una evaluación conjunta de la comprensión de todas las medidas de tendencia central por los estudiantes, para lo cual hemos seleccionado el cuestionario que se describe a continuación.

Descripción del cuestionario

El cuestionario está orientado a la evaluación del significado que los estudiantes mexicanos y españoles asignan a las medidas de tendencia central. Es parte del construido por Cobo (2003), quien lo utilizó también con estudiantes más jóvenes. En su construcción, utilizó el marco teórico desarrollado por Godino (2002), quien considera los siguientes tipos de componentes en el significado de un concepto (en este caso las medidas de posición central):

1. Reconocimiento de los problemas que se resuelven mediante promedios.
2. Comprensión de las definiciones de media, mediana y moda.
3. Comprensión de sus propiedades básicas, tanto numéricas, como algebraicas y estadísticas.
4. Reconocimiento del lenguaje matemático, que puede ser numérico, verbal, simbólico y gráfico.
5. Capacidad de cálculo y comprensión de los procedimientos de cálculo frente a su aplicación automática.
6. Capacidad de argumentación de los alumnos para apoyar sus respuestas y observar hasta qué punto son completas y consistentes.

Estos elementos se han considerado, tanto en la construcción del cuestionario, como en la interpretación de las respuestas de los alumnos. En este trabajo en particular no tendremos en cuenta el punto 6 (tipos de argumentos), que se dejará para un análisis posterior, y respecto al punto 4 (lenguaje matemático) los ítems están todos dados en formato verbal y numérico excepto el 9 que usa el formato gráfico. Todos los ítems del cuestionario son de respuesta abierta, con el fin de recoger con detalle los razonamientos de los estudiantes y han sido adaptados de diferentes investigaciones.

A continuación analizamos los ítems propuestos:

Ítem 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en México es 2.2 hijos por familia.

a. Explica qué significa para ti esta frase.
b. Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Este ítem fue tomado de Watson (2000). Recoge dos campos de problemas asociados con la media (efectuar un reparto equitativo en una distribución de datos); y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población. Para resolverlo, el alumno podría usar las definiciones de media (dada por el algoritmo) y moda (como valor más frecuente), y las siguientes propiedades: numéricas "la media es un valor perteneciente al rango de la variable", "la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos"; algebraicas: "el cálculo de la media no es operación interna" y estadísticas: "la media o la moda son representantes del conjunto de datos". Como elemento de cálculo se requiere buscar una distribución de datos que se ajuste a una media dada, lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro y saber aplicarlo a la inversa.

Ítem 2. María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?
b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

En este ítem tomado de Watson (2000) se requiere el cálculo de la media ponderada. Este ítem nos permite también averiguar si reconocen la siguiente propiedad: "la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas" y "la media no es asociativa".

Ítem 3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos.

¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

En este ítem, tomado de Tormo (1993) se trata de interpretar la media como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme. Han de usar la definición de media, dada por su algoritmo. En este problema se puede observar si los estudiantes tienen conocimiento sobre la propiedad: "la suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula" y "media como centro de gravedad de los datos".

Ítem 4. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Tomado también de Tormo (1993), plantea un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Requiere conocer dicho algoritmo y saberlo invertir para el caso de datos aislados. No se dan dichos datos, sino la media, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Incluye las propiedades de la media, de: "ser un valor perteneciente al rango de la variable" y "ser el centro de gravedad de la distribución".

Ítem 5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?
c. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Con este ítem se pretende medir la comprensión de la definición y algoritmo de cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar, así como si los estudiantes comprenden adecuadamente el efecto de valores atípicos sobre dicho valor. Se presenta la mediana como promedio más adecuado para una distribución en la que, debido a la presencia de un valor atípico, la media no es demasiado representativa.

Este ítem contempla las siguientes propiedades: en el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no y la media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar y la media es menos resistente que la mediana.

Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores.

Ítem 6. Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Este ítem tomado de Godino (1999), se centra en la mediana y su relación con las otras medidas de tendencia. Los datos corresponden a una variable ordinal, que no admite el cálculo de la media, por lo que los únicos parámetros de centralización que se pueden usar como resumen de los datos son la mediana y la moda. Contiene las siguientes propiedades: para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta los valores numéricos de los datos, sólo su posición una vez ordenados (numérica); la mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la media no existe en este caso (algebraica); y los promedios son representantes de un colectivo (estadística).

Ítem 7. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

a. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?
b. Lucía __________ Juan __________ Pablo __________
c. ¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados.
d. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Está tomado de Gattuso (1996) y está orientado a encontrar una distribución para una media dada; incluye elementos de cálculo de la media para variable discreta con datos aislados. En la segunda parte del problema, se pretende valorar si los estudiantes conocen la propiedad de que en la media se han de considerar todos los valores de los datos, incluyendo el cero. Contiene las siguientes propiedades: en el cálculo de la media intervienen todos los valores, la media cambia cuando cambia algún dato y el cálculo de la media, como operación algebraica, es conmutativa y no tiene elemento neutro.

Ítem 8. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación:

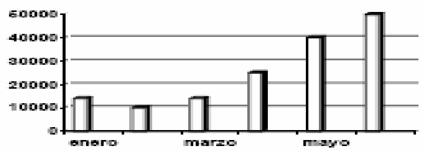
6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Corresponde al problema de encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones y en presencia de errores, cuya solución es la media. Tomado de Garfiel y Konold (1992). Aunque la respuesta esperada es la media, los alumnos podrían optar por la mediana o la moda, por lo tanto, este ítem incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas, en el caso de una variable discreta con datos aislados. Puesto que hay un valor atípico, esperamos que los alumnos lo detecten y lo eliminen si optan por calcular la media, aunque su eliminación no es requerida si optan por usar la mediana o moda.

Contiene también las siguientes propiedades: la media y la mediana pueden ser diferentes a todos los valores de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos, la media cambia al cambiar algún dato, el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es, los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo y la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero.

Ítem 9. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



a. Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
b. Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Se centra en la estimación directa de la media y mediana a partir de un gráfico, y ha sido tomado de Zawojeswki (1986). La dificultad que se presenta está en la lectura del gráfico. Este es el único ítem que usa esta representación, mientras que los restantes sólo usan representaciones numéricas y verbales. El ítem tiene dos propiedades: la mediana y media pueden no coincidir con los datos y el cálculo de la media y el de la mediana no son operaciones internas.

En la Tabla 1 se resume el contenido evaluado en cada ítem respecto a los tipos de elementos en el significado de un concepto.

Tabla 1. Contenido evaluado por ítem

	Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Definición	Media como algoritmo	×	×		×	×		×	×	
	Mediana, valor central					×	×		×	
	Mediana, dos partes					×	×			×
	Moda, valor más frecuente	×				×	×		×	
Propiedades	El Valor se encuentra en el rango	×			×					
	Puede no coincidir con los datos	×							×	
	Intervienen todos los valores y cambia con un dato					×	×	×	×	
	Operación interna (es / no es)	×							×	
	No tiene elemento neutro								×	
	No es asociativa		×							
	Media de la suma de variables		×							
	Representantes de un colectivo	×				×	×		×	
	Media, centro de gravedad			×	×					
	Posición en distribuciones simétricas					×				
	Media poco resistente					×				
	Suma desviaciones a la media			×	×				×	
	Definidas según tipo de variable						×			
Campos de problemas	Buscar la mejor estimación								×	
	Hacer un reparto equitativo	×		×						
	Encontrar el valor probable	×						×		
	Buscar un representante de datos ordinales					×	×			
	Buscar un representante de datos cualitativos						×			
Algoritmos y procedimientos	Cálculo media datos aislados	×			×	×		×	×	
	Cálculo media ponderada		×							×
	Cálculo gráfico media									×
	Invertir algoritmo media	×	×		×			×		
	Buscar distribución dada la media	×			×			×		
	Cálculo mediana datos aislados (núm. impar)					×	×			
	Cálculo mediana datos aislados (número par)					×			×	
	Cálculo gráfico mediana, datos agrupados									×
	Cálculo gráfico mediana									×
	Cálculo moda, datos aislados						×		×	

Resultados y discusión

La muestra estuvo formada por 125 estudiantes mexicanos de 17 y18 años; de siete centros de enseñanza, todos ellos públicos y del último curso de Bachillerato. En el estudio de Cobo (2003), que usaremos como comparación, los estudiantes tenían 15 y 16 años y cursaban el último año de Educación Secundaria Obligatoria.

Sería, por tanto, de esperar unos mejores resultados por parte de los estudiantes mexicanos, considerando también que el tramo de enseñanza ya no es obligatorio.

Los dos cuestionarios fueron aplicados en situaciones similares en cuanto a las instrucciones dadas por el profesor que aplicó el cuestionario: pasarlo en una de las horas de clase de matemáticas, haber estudiado el tema previamente, motivación e interés de los alumnos mexicanos y españoles.

En la Tabla 2 presentamos, para cada ítem la proporción de respuestas correctas (índices de dificultad, según Muñiz,1994), cuanto mayor es este valor significa que el ítem es más fácil de resolver para los alumnos.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas totalmente correctas y desviación típica

	Estudiantes mexicanos (N = 125)		Estudiantes españoles (N = 144)	
Ítem	% Correcto	Desviación típica	% Correcto	Desviación típica
1-1	,56	,50	,69	,46
1-2	,66	,48	,37	,48
2-1	,36	,48	,34	,48
2-2	,21	,41	,38	,49
3	,54	,50	,49	,50
4	,73	,44	,66	,48
5-1	,48	,50	,38	,49
5-2	,23	,42	,32	,47
5-3	,20	,40	,33	,47
6-1	,50	,50	,13	,33
6-2	,22	,41	,04	,20
7-1	,74	,44	,67	,47
7-2	,50	,50	,68	,47
7-3	,67	,48	,61	,49
8	,86	,34	,67	,47
9-1	,35	,48	,67	,47
9-2	,17	,38	,26	,44

Entre los estudiantes mexicanos, este índice fluctúa entre 0.17 en el ítem 9.2 (cálculo de la mediana a partir de un gráfico) y 0.86 en el ítem 8 (estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores). Por parte de los estudiantes españoles, este índice osciló entre un 0.04 de respuestas correctas en el ítem 6.2 (elegir un promedio adecuado en un conjunto de datos ordinales) y 0.69 en el ítem 1.1 (hallar una distribución de datos, dada la media).

Algunos ítems difíciles de resolver para ambos grupos fueron los siguientes:

- Ítem 9.2 (0,17-0,26), donde se ha de estimar la mediana a partir de un gráfico. La dificultad proviene del hecho de que los datos están agrupados y los estudiantes o bien no tienen en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana, obteniendo el punto medio de los valores de la variable o bien no dan respuesta.
- Ítem 2.2. (0,21-0,38), con el que se espera que los estudiantes sean capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma, aunque la dificultad no está en este punto, sino en el cálculo de la media ponderada que los alumnos han de realizar previamente.
- Ítem 5.2 (0,23-0,32), calcular la mediana con un número par de valores aislados; en unos casos los alumnos no ordenan los datos al calcular la mediana; en otros, no saben resolver la indeterminación producida al haber dos datos centrales.
- Ítem 5.3 (0,20-0,33), efecto de los valores atípicos; no todos los estudiantes son conscientes que se debe eliminar este valor al calcular la media o bien tomar la mediana como promedio más adecuado, al ser insensible a los valores atípicos.
- Ítem 2.1 (0,36-0,34), cálculo de la media ponderada, ya que los estudiantes no tienen en cuenta la ponderación, por lo que coincidimos en este punto con las investigaciones de Pollatsek, Lima y Well (1981).

Por otro lado, resultaron sencillos para los dos grupos los siguientes ítems:

- Ítem 8 (0,86-0,67), idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. Esta es una idea estadística muy potente, pues es base de los métodos de estimación; los resultados sugieren que es intuitiva para los alumnos.
- Ítem 7.1 (0,74-0,67) y 7.2 (0,50-0,68), encontrar una distribución de valores conocida sólo la media y reconocer si la solución es o no única. Este fue el ítem más sencillo, lo que contradice los resultados de otras investigaciones como las de Cai (1995), quien considera esta tarea difícil, aunque sus estudiantes eran de menor edad.
- Ítem 4 (0,73-0,66), similar al anterior, y también conocimiento del algoritmo de la media y que el valor de ésta ha de estar comprendida en el rango de valores de datos.

- Ítem 7.3 (0,67-0,61), efecto del cero sobre el valor de la media; este efecto fue reconocido por los estudiantes, en contradicción con los resultados de Mevarech (1983) quien considera ésta una propiedad difícil.
- Ítem 1.1. (0,56-0,69), idea de media como un reparto equitativo en una distribución de datos y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población, estos dos tipos de problemas fueron especialmente sencillos para los estudiantes.
- Ítem 3 (0,54-0,49), la suma de desviaciones respecto a la media ha de ser igual a cero, esto es, las desviaciones por encima se compensan con las desviaciones por debajo de la media.

Observamos las principales diferencias entre estos grupos de estudiantes en los ítems 9.1(0,35-0,67), cálculo de la media a partir de un gráfico; 1.2 (0,66-0,37), dar una justificación de por qué se construye una distribución dada la media; 5.1 (0,48-0,38), encontrar la mediana con un número impar de valores.

También se produce una clara diferencia en el ítem 6.1 (0,5-0,13) y 6.2 (0,22-0,04), donde se debe usar la mediana como resumen estadístico de unas variables ordinales. Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes mexicanos transforman las variables en escala de razón, asignando un valor numérico a las diferentes categorías (insuficiente, aprobado, etc.). El problema es que aunque la transformación conserva el orden, no conserva la escala y se llega a un resultado incorrecto. En este ítem, nosotros, a diferencia de Cobo (2003), hemos considerado también como correctas las respuestas en que los alumnos comparan los grupos a través de la media, siempre que ésta se haya calculado correctamente y se llegue a un resultado consistente con la estrategia, mientras que Cobo (2003), sólo consideró correcto si los estudiantes usaron la mediana o la moda para comparar los grupos. De ahí la diferencia obtenida en los porcentajes. En todo caso son pocos los que siguen esta estrategia y la mayoría, ni siquiera usa un promedio para comparar los grupos, sino simplemente compara uno de los valores de la variable; de ello que disminuya el número de respuestas correctas en la segunda parte del ítem. Usan así sólo una parte de los datos en la comparación, estrategia que Estepa (1993) llamó "concepción local" en su estudio sobre la asociación.

En cuanto a las desviaciones típicas, en general se agrupan alrededor de 0,50, lo que no supone una variabilidad muy elevada, es decir, los grupos son homogéneos respecto a los tipos de dificultades encontradas por los alumnos, especialmente en los ítems de alta dificultad.

Son en realidad pocas las diferencias observadas, y no siempre mejoran los estudiantes mexicanos, que tienen mayor edad. Ello sugiere la necesidad de dar mayor importancia a la enseñanza de los promedios, incluso en el tramo de Bachillerato, para preparar debidamente a los estudiantes para su ingreso a la Universidad.

Principales dificultades observadas

Para resumir, presentamos a continuación las principales dificultades encontradas respecto a la comprensión de elementos de significado, que se dedujeron del análisis cualitativo de las respuestas, aunque aquí no la incluimos con detalle, así como de los porcentajes de fallos en los ítems y del significado evaluado por éstos.

- *Problemas.* Fue difícil para los dos grupos reconocer la mediana como mejor promedio de datos ordinales, pues se producen muchos fallos en el ítem 6 y los estudiantes que lo resuelven usan preferentemente la media y no la mediana. Por el contrario, los estudiantes reconocen los problemas de estimar una cantidad desconocida (ítem 8) y efectuar un reparto equitativo (ítems 1 y 7) como asociados a la media aritmética.
- *Representaciones.* El único problema se presenta con las gráficas en ambos grupos, donde se producen mayor número de errores en la pregunta 9; ya que los estudiantes no tuvieron ningún problema con los términos o símbolos relacionados con los promedios.
- *Algoritmos.* Los estudiantes calculan con facilidad medias simples en casi todos los problemas y entienden el algoritmo de cálculo de promedios, el cual invierten correctamente para encontrar una distribución con media dada (ítem 1). Lo más difícil en ambos grupos fue el cálculo de medias ponderadas (ítem 2) y el cálculo de la mediana a partir de un gráfico (ítem 9). También tienen dificultad en resolver la indeterminación cuando el número de datos al calcular la mediana es par (ítem 5).
- *Definiciones.* La definición que causa más dificultad es la de la mediana (ítem 5, 6), pero también la de media cuando se ha de usar la ponderación (ítem 2).
- *Propiedades.* Los estudiantes tienen dificultad en reconocer que la media es poco resistente cuando hay valores atípicos y que intervienen todos los valores en su cálculo. Reconocen que el valor de la media está comprendido en el rango de variación de la variable, el efecto del cero sobre su valor y que la suma de desviaciones por encima y debajo de la media se compensa.

Conclusiones e implicaciones para la enseñanza

Los resultados son razonablemente satisfactorios, pues los alumnos reconocen intuitivamente tanto los campos de problemas como las propiedades de la media y son capaces de realizar correctamente el algoritmo, incluso invertirlo, si no aparece la ponderación. Sin embargo, aparecen todavía errores y dificultades, algunas muy frecuentes, así como gran variación en los índices de dificultad.

La semejanza de algunos resultados con los obtenidos por Cobo (2003), con alumnos de menor edad sugiere que las dificultades del estudiante para responder cuestiones sobre la media no son especificas de ninguno de los dos sistemas educativos, sino son compartidas por estudiantes mexicanos y españoles y en el caso de los mexicanos, se mantiene con la edad. Ello llama la atención sobre la posible mejora de la enseñanza.

Hacemos notar el carácter no convencional de las tareas propuestas, respecto a las que son habituales en los libros de texto (Cobo y Batanero, 2004b); pero sin embargo son más próximas a las situaciones en las que los estudiantes han de interpretar y trabajar con los promedios en su vida diaria y profesional. Una primera consecuencia para el diseño de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje es tratar de acercarlos a este tipo de situaciones, bases de la cultura estadística, según Gal (2002).

Estos resultados, no obstante, son aún provisionales, puesto que el estudio mostrado es principalmente cuantitativo. En la actualidad hemos iniciado el estudio cualitativo de las respuestas de los estudiantes mexicanos para identificar la existencia de conflictos semióticos para dilucidar sobre la hipótesis planteada por Cobo (2003), quien asume que la dificultad de las tareas sobre promedios se puede explicar por la complejidad semiótica de las mismas y la existencia de conflictos semióticos en los estudiantes durante el proceso de resolución de los problemas.

Bibliografía

- C. Batanero, B. Cobo, y C. Díaz (2003): “Assessing secondary school students’ understanding of averages”. Proceedings of CERME III. Bellaria, Italia. On line: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG5/TG5_batanero_cerme3.pdf
- J. Cai (1995): “Beyond the computational algorithm. Students’ unsderstanding of the arithmetic average concept”. En L. Meira (Ed.). Proceedings of the 19th PME Conference (v.3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.
- C. Carvalho (1998): “Tarefas estadísticas e estratégias de resposta”. Comunicación presentada en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Castelo de Vide, Portugal.
- C. Carvalho (2001): “Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade”. Tesis doctoral. Universidad de Lisboa.
- B. Cobo (2003): “Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria”. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- B. Cobo y C. Batanero (2000): “La mediana ¿Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria?”. UNO, 23, 85-96.
- B. Cobo y C. Batanero (2004a): “Razonamientos aritméticos en problemas de promedios”. SUMA, 45, 79-86.
- B. Cobo y C. Batanero (2004b). “Significados de la media en los libros de texto de secundaria”. Enseñanza de las ciencias, 22(1), 5-18.
- A. Estepa, C. Batanero y F. T. Sánchez (1999): “Judgments of association in the comparison of two samples: students' intuitive strategies and preconceptions”. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 7, 17-30.

- I. Gal (2002): “Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities”. International Statistical Review, 70(1), 1-25.
- L. Gattuso y C. Mary (1996): “Development of concepts of the arithmetic average from high school to University”. Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.
- J. D. Godino (2002): “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.
- J. D. Godino y C. Batanero (1997): “Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education”. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- D. Li y S. M. Shen (1992): “Students’weaknesses in statistical projects”. Teaching Statistics, 14 (1), 2-8.
- C. Mary y L. Gattuso (2005): “Trois Problèmes Semblables de Moyenne pas si Semblances que Ca! l’Influence de la Structure d’un Problème sur les Réponses des Élèves”. Statistics Education Research Journal, 4(2). On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ4(2).pdf
- Z. R. Mevarech (1983): “A deep structure model of students’statistical misconceptions”. Educational Studies in Mathematics, 14, 415-429.
- Pollatsek, S. Lima, y A. D. Well (1981): “Concept or Computation: Students’understanding of the mean”. Educational Studies in Mathematics, 12, 191-204
- C. Reading (2002): “Profiles for statistics understanding”. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics. Cape Town: IASE. CD ROM.
- C. Reading y J. Pegg (1996): “Exploring understanding of data reduction”. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.
- R. Strauss y E. Bichler (1988): “The development of children’s concepts of the arithmetic average”. Journal for Research in Mathematics Education, 19 (1), 64-80.
- C. Tormo (1993): “Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años”. Trabajo de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.
- J. M. Watson y J. B. Moritz (2000): “The longitudinal development of understanding of average”. Mathematical Thinking and Learning, v1 (2/3), 11-50.
- J. Zawojewski (1986). “ The teaching and learning proceses of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency. Tesis doctoral. Universidad Northwestern, Evenston, Illinois.

Patricia Balderas, Licenciada en Matemáticas, tiene Maestría en Educación en Matemáticas y Doctorado en Pedagogía (enseñanza y aprendizaje de matemáticas) por la Universidad Nacional Autónoma de México. Es profesora de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Nacional Autónoma de México. Realiza una Estancia Sabática en la Universidad de Granada con financiación de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha dirigido proyectos de investigación en educación matemática financiados por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, México. Es miembro del Comité Editorial de la Revista Educación Matemática. Ha publicado libros para la enseñanza de precálculo y cálculo; así como artículos de investigación en educación matemática. Fue miembro del comité organizador del Tercero y Quinto Simposios Internacionales en Educación Matemática "Elfriede Wenzelburger" celebrados en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Carmen Batanero, Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada.
Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Es miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y fue Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado la organización del VII Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, ICOTS-7. Fue editora de la revista Statistics Education Research Journal.

Belén Cobo, Licenciada en Ciencias (Matemáticas) y Doctora en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de Granada, España. Profesora de educación secundaria en el Instituto Los Neveros, Huétor Vega, Granada. Colabora con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, formando parte de la Junta Directiva Provincial. Tiene experiencia en organización de cursos para el profesorado, Jornadas de Investigación y Olimpiadas Matemáticas. Coautora del proyecto editorial "Construir las Matemáticas" (Editorial Proyecto Sur) y autora de diversas publicaciones relacionadas con la Educación Matemática. Ha participado en la impartición de diversos cursos para Centros de Profesorado.

Silvia Mayén, Licenciada en Economía (Métodos Cuantitativos y Modelos Econométricos) y Diplomada en Programación Neurolingüística y Educación, por el Instituto Politécnico Nacional, México. Profesora. del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos "Miguel Othón de Mendizábal" en el Instituto Politécnico Nacional de México. Realiza sus estudios de Doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. Ha sido Analista Especializada en la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas y Jefa del Departamento de Enlace Institucional del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 203-221
ISSN: 1815-0640

Evaluación de la práctica docente de un curso universitario mediante el diario del profesor

Susana González de Galindo y Patricia Villalonga de García

Resumen

Para superar falencias de las clases multitudinarias de tipo tradicional de Matemática 1, asignatura de primer año de una Facultad de ciencias, se implementó una estrategia didáctica. Se usó un material instruccional elaborado según criterios para la enseñanza, derivados de lineamientos de teorías cognitivas. En este trabajo se investiga si la práctica didáctica respondió a los criterios establecidos, analizando el diario del profesor, producto de la observación participante de las clases. Se concluyó que los criterios se cumplieron en gran medida.

Introducción

En la asignatura Matemática I se desarrollan los conceptos básicos del Cálculo Diferencial e Integral de una variable, durante el primer cuatrimestre de primer año de las carreras que se cursan en la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán, Argentina. Este trabajo es un avance del Proyecto "Metodologías de enseñanza y evaluación que favorecen aprendizajes significativos para cursos masivos de primer año de una facultad de ciencias" del Consejo de Investigación de esta Universidad. El objetivo del Proyecto fue diseñar e implementar en las clases multitudinarias de Matemática I, una estrategia didáctica basada en teorías cognitivas. Para evaluar la estrategia implementada en el año 2006, se recurrió a las siguientes fuentes de datos: las opiniones del docente que desarrolló la estrategia y las opiniones de los alumnos involucrados en la experiencia.

En este artículo se presentan los resultados aportados por el análisis de los datos registrados en el *diario del profesor*, obtenidos de la observación participante realizada por el docente que estuvo a cargo de las clases.

Las falencias más notables de las clases de tipo tradicional, implementadas en esta asignatura, eran: deficiente relación docente-alumno (1/400 en las clases teóricas y 1/100 en las prácticas), alumnos pasivos y desmotivados y mínima comunicación entre los participantes.

Para superar tales deficiencias se comenzó por caracterizar un marco teórico elaborado a partir de principios sostenidos por Piaget, Ausubel y Vigotsky (Coll y Martí, 1994; Moreira, 1997; Pérez Gómez, 1992). Los criterios que de él se derivaron, fueron explicitados en un trabajo previo (Villalonga de García y González de Galindo, 2005).

Para satisfacer tales criterios y atendiendo a las limitaciones del contexto, se diseñó una estrategia didáctica a implementar en las clases en las que se desarrollarían los contenidos relativos a “Función continua”. Dicha estrategia se basó en el uso de *un material instruccional ad hoc* elaborado desde una óptica constructivista. Este material fue diseñado dejando “espacios en blanco” para ser llenados por los alumnos durante el desarrollo de las clases. Fue sometido a validación por pares antes de ser usado (González de Galindo, Marcilla y Villalonga de García, 2006). La sección inicial de la guía se presenta en el Apéndice 1.

Previo al desarrollo de tema “Función continua” se analizaron los resultados de una prueba de lápiz y papel, destinada a evaluar los conocimientos previos de los alumnos requeridos para su aprendizaje.

La implementación de la guía en el aula se llevó a cabo en ocho horas reloj (cuatro clases), tiempo establecido para el desarrollo de estos contenidos en la planificación de la asignatura por el profesor de máxima jerarquía. Los estudiantes que participaron fueron alrededor de cuatrocientos. Por limitaciones de infraestructura edilicia fueron distribuidos en dos turnos de aproximadamente doscientos alumnos cada uno. Las clases de ambos grupos estuvieron a cargo del mismo docente quien estimuló los cuestionamientos, la formulación de hipótesis, la conexión entre contenidos y el cambio entre las distintas representaciones semióticas (Coll y Solé, 1992). El modelo de trabajo seleccionado puso énfasis en la naturaleza individual y colectiva del proceso de aprendizaje. Se decidió alternar espacios de trabajo independiente, destinados a la reflexión del alumno sobre sus estructuras cognitivas, con otros destinados a la interacción cooperativa entre los estudiantes. El trabajo en el aula estuvo planificado para ser desarrollado en seis momentos: 1) indicaciones del docente y lectura de la actividad de la guía; 2) reflexión personal; 3) discusión intra grupo; 4) discusión plenaria; 5) formalización de conceptos; 6) resolución de situaciones problemáticas (González de Galindo, Marcilla y Villalonga de García, 2006).

Para evaluar la experiencia se recurrió a los siguientes instrumentos: un *cuestionario* implementado a los alumnos y el *diario del profesor*.

Este informe presenta el análisis de los registros del *diario del profesor*. Posteriormente se triangularán las conclusiones que se obtengan de ambos instrumentos.

Marco teórico

Para este trabajo se han rescatado elementos de diversos modelos contemporáneos de aprendizaje que han mostrado ser eficientes en la enseñanza de las disciplinas científicas. Se construyó, así, el marco teórico a partir de principios sostenidos por las teorías cognitivas de Piaget, Ausubel y Vigotsky (Coll y Martí, 1994; Moreira, 1997; Pérez Gómez, 1992).

De acuerdo a las pautas establecidas por estas teorías, el modelo de enseñanza y aprendizaje que sirvió de referente en esta investigación se apoya en los siguientes fundamentos:

a) *una concepción sistémica y compleja de la realidad y de los procesos de enseñanza –aprendizaje que pretenden conocerla,*
b) *una visión constructivista e investigadora del desarrollo y del aprendizaje humano, y*
c) *una perspectiva crítica y social de la enseñanza"* (Porlán y Martín 2000: 17).

En particular, se reconoció que para lograr un aprendizaje significativo en Matemática, la enseñanza debe hacer hincapié en las estructuras básicas de los procedimientos y los conceptos matemáticos y responder a las capacidades intelectuales de los alumnos. El término estructura matemática alude a la estructura del contenido que se aborda, es decir, a la forma en que el conjunto de conocimientos matemáticos se organizan y se interrelacionan internamente (Pacheco, 2005). Por lo tanto la comprensión del conocimiento matemático depende del aprendizaje sistemático y significativo de esas estructuras, las que paulatinamente se van ampliando y profundizando.

Los principios didácticos que se derivan del modelo seleccionado y que actúan como guías en cualquier propuesta de intervención son:

i) *la investigación de los alumnos* como el proceso de construcción de normas, actitudes, destrezas y conocimientos en el aula;
ii) *la investigación de los docentes* como una manera de favorecer una práctica reflexiva y un desarrollo profesional constante y
iii) *una concepción de currículo* cuyas características fundamentales son las de ser procesual, abierto y experimental, lo que hace posible un equilibrio entre las instancias de planificación y evaluación de la enseñanza (Porlán y Martín, 2000; González de Galindo y Colombo de Cudmani, 2006).

En relación a *la investigación de los alumnos* se implementó una encuesta cuyos datos se están procesando actualmente.

En relación al *currículo* se consideró, en el caso particular de la Matemática, que debe ser diseñado en espiral, para que los contenidos aparezcan una y otra vez, de forma tal que cada nuevo abordaje sea menos intuitivo y más formalizado que el anterior, permitiendo el conocimiento de un conjunto cada vez mayor de relaciones entre los distintos contenidos matemáticos (Pacheco, 2005). Las características que deben guiar el desarrollo de un currículo matemático son (Fandiño Pinilla, 2003):

a) Con respecto a la enseñanza: se debe recurrir a situaciones a-didácticas (Sadovsky, 2005), emplear métodos participativos, hacer matemáticas como un trabajo de modelización (Chevallard, Bosch y Gascón; 1997; Gascón, 2001), incluir actividades motivadoras, aplicaciones culturales y temas actuales, mostrar a la matemática como un producto temporal e histórico, como una disciplina en constante evolución. Es decir, desarrollar actividades que promuevan la institucionalización del saber (Sadovsky, 2005).

b) Con respecto al aprendizaje: se aconseja seguir un ritmo personalizado, favorecer la comunicación entre los distintos lenguajes matemáticos, plantear situaciones de aprendizaje por descubrimiento e investigación, actividades de solución abierta y problemas complejos.
c) Con respecto a la evaluación del conocimiento matemático: evaluar razonamientos y procesos, ser cualitativa y tener carácter formativo (Villalonga de García, 2003).

En relación a *la investigación de los docentes*, el diario del profesor se constituye en un instrumento que favorece el desarrollo de los niveles descriptivos, analítico-explicativos y valorativos del proceso educativo. El mismo permite reflexionar críticamente sobre la propia actividad, posibilitando contar con nuevos referentes al momento de tomar decisiones, mejorar el nivel comunicativo y posibilitar la adopción de otros estilos de enseñanza (Kunzevich y Hosanna, 2005).

En el área disciplinar que nos ocupa, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1989, 2002) sugieren recoger diversos tipos de información sobre el proceso educativo a partir de continuas observaciones en el aula, entre otros procedimientos. Consideran necesario indagar acerca de los aspectos que contribuyen a incrementar la *potencia matemática*[1] de los estudiantes. La investigación sobre la propia práctica docente es un medio excelente de desarrollo profesional de los docentes, irrenunciable para la mejora de su acción en el aula (Montero, 1992).

Todas estas reflexiones determinaron la relevancia del *diario del profesor,* para analizar si la práctica docente respondió a los criterios orientadores para la enseñanza de la matemática, derivados de las teorías constructivistas mencionadas. Tales criterios son (Villalonga de García y González de Galindo, 2005):

En el aula el docente debiera:

C_1: Favorecer el protagonismo activo del estudiante como responsable de su aprendizaje.
C_2: Propiciar el intercambio grupal de significados.
C_3: Otorgar mayor dinamismo al proceso de enseñanza aprendizaje, con un ritmo que mantenga la atención y el interés.

[1] "La potencia matemática incluye la habilidad para explorar, efectuar conjeturas, y razonar lógicamente; para resolver problemas no rutinarios; para comunicar ideas matemáticas, y comunicarse usando la matemática como herramienta; y conectar ideas dentro de la matemática y, entre matemática y otra actividad intelectual. La potencia matemática también involucra el desarrollo personal de la auto-confianza y la disposición de buscar, evaluar y emplear información cuantitativa en la resolución de problemas y en la toma de decisiones. La flexibilidad del estudiante, perseverancia, intereses, curiosidad e inventiva también contribuyen a alcanzar la potencia matemática" (Traducción efectuada por las autoras, extraída del glosario de la versión electrónica de los estándares del N.C.T.M. (1995)).

C_4: Presentar los contenidos de modo de facilitar el desarrollo de las capacidades y destrezas propias del conocimiento matemático favoreciendo el desarrollo de la potencia matemática (N.C.T.M., 1995). Tales capacidades son: definir y demostrar (habilidades que por su propia naturaleza establecen el vínculo primario con el sistema de conocimientos), identificar, interpretar, recodificar, graficar, algoritmizar y calcular (Delgado Rubí, 2001).

C_5: Favorecer el cambio del rol docente, desde el de transmisor de conocimientos ciertos y acabados, al de facilitador de aprendizajes centrados en cuestionamientos, reflexión crítica y construcción de significados, con la capacidad de generar en la clase una atmósfera de coparticipación distendida y motivadora.

C_6: Despertar el interés por los temas del Cálculo, basándose en el uso y necesidad práctica de los mismos para resolver problemas vinculados a la carrera y a la vida diaria.

C_7: Diseñar los instrumentos de evaluación de los aprendizajes de modo que se aprecie la importancia que se conceden a los aprendizajes significativos.

Estos criterios responden, en gran medida, a un modelo docente fundamentado en una epistemología constructivista: el constructivismo psicológico, desde el cual se interpreta que enseñar matemática es brindar posibilidades para que los estudiantes construyan conocimientos matemáticos, a través de un proceso psicológico. En esta forma de constructivismo, se instrumentaliza la resolución de problemas como un medio para construir los nuevos conocimientos (Gascón, 2001).

Hipótesis

La problemática planteada orientó a enunciar la siguiente hipótesis sustantiva de investigación (Samaja, 2003):

Para contrastar esta hipótesis se enunciaron las siguientes hipótesis de trabajo:

H: “Al implementar el material instruccional, la práctica didáctica satisface los criterios para la enseñanza de la Matemática derivados del marco teórico”.

H_1: “Durante las clases el grupo de alumnos evidencia un buen nivel de atención y participación y logra razonamientos de buen nivel cognitivo”.

H_2: “Las actividades incluidas en el material didáctico, son adecuadas para ser desarrolladas en las clases, en cuanto al número y al nivel de exigencias”.

H_3: “El docente se vale del error para favorecer la construcción de significados”.

H_4: “Las preguntas que formula el docente siempre obtienen alguna respuesta, correcta o incorrecta, por parte del alumno”.

H_5: “Al formular preguntas, el docente tiene una actitud democrática al seleccionar al alumno respondiente”.

Metodología

Dado que el objetivo de este estudio fue la descripción de los aspectos más relevantes del proceso de enseñanza y aprendizaje en base a las notas de campo del diario del docente, esta investigación puede caracterizarse como un estudio de tipo descriptivo, no experimental o ex post-facto (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2000). La vertiente interpretativa del mismo se completará, en un trabajo posterior, al triangular los resultados obtenidos por esta fuente de información con los logrados de la encuesta implementada a los alumnos (Elliott, 1980).

Instrumento de recolección de datos: El diario del profesor

A partir de la observación participante de las clases, el docente volcó en el *diario* las acciones acontecidas en el aula, sus propios pensamientos, interpretaciones e impresiones, elaborando de esta manera las **notas de campo**. En el registro de estas notas se tuvieron presentes algunas de las técnicas sugeridas por Taylor y Bogdan (1987) para recordar detalles: *prestar atención*, *reproducir mentalmente las observaciones y escenas*, *tomar las notas tan pronto como resulte posible, grabar un resumen o bosquejo de la observación* sólo si hubiera retraso entre el momento de la observación y el registro de las notas de campo.

Para que la observación gozara de las cualidades de la observación científica, se la orientó hacia un objetivo determinado, estableciendo el siguiente sistema.

Sistema de observaciones: Se construyó un sistema con variables predeterminadas surgidas de los criterios establecidos, de las aportaciones de Brophy y Good (1986) y de la experiencia de las autoras (González de Galindo y Colombo de Cudmani, 2006). Se siguieron los pasos sugeridos por Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2000):

a) ***Definir con precisión el universo de aspectos, eventos o conductas a observar****.* En este caso, el universo estuvo constituido por aspectos relativos al comportamiento verbal y no verbal del grupo de alumnos, al nivel cognitivo de sus razonamientos matemáticos, al material didáctico empleado y a aspectos relativos a las preguntas del docente.
b) ***Extraer una muestra representativa de los aspectos, eventos o conductas a observar.*** En este caso, los aspectos considerados de interés en la investigación fueron: nivel de atención, de participación y cognitivo de los razonamientos de los alumnos, el material didáctico, el valor instructivo del error, el nivel de dificultad de las preguntas del docente y la modalidad de selección del respondiente.
c) ***Establecer las unidades de observación:*** éstas fueron las notas del diario.
d) ***Establecer y definir variables y dimensiones de*** observación (ver Tabla 1).
e) ***Elaborar la hoja para codificar los datos de cada clase.***
f) ***Realizar los análisis apropiados.***

Este procedimiento permitió diseñar un objeto modelo del objeto real de estudio, descrito en el parágrafo siguiente.

El objeto modelo de la investigación

Se construyó el objeto modelo de investigación, tomando como base la concepción ternaria de ciencia apoyada por Pierce y Samaja (Villalonga de García y Colombo de Cudmani, 2006).

Samaja (2003) considera que todo *dato* de cualquier investigación empírica, posee una estructura compleja invariante de cuatro componentes: unidad de análisis, variables, valores e indicadores, que se denomina *matriz de datos* y en la cual el indicador es el procedimiento aplicado a cada dimensión relevante de la variable para efectuar su medición o valoración. Tales procedimientos incluyen desde el empleo de un indicio perceptivo simple, hasta la construcción, para variables complejas, de escalas o números índices que combinan muchos ítems o dimensiones. Este autor sostiene que toda descripción de un objeto complejo (en principio, todo objeto de estudio en el área educativa es complejo) puede realizarse mediante un *sistema de matrices de datos*, considerado como una clase especial de *modelo*.

Tabla 1: El objeto modelo de la investigación

<table>
<tr><th rowspan="2">Unidad de análisis</th><th rowspan="2">Variable</th><th colspan="2">Indicador</th></tr>
<tr><th>Dimensión</th><th>Valor</th></tr>
<tr><td rowspan="19">LA NOTA DEL DIARIO</td><td rowspan="3">Nivel de atención</td><td rowspan="3"></td><td>Alto</td></tr>
<tr><td>Medio</td></tr>
<tr><td>Bajo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Nivel de participación</td><td rowspan="3"></td><td>Alto</td></tr>
<tr><td>Medio</td></tr>
<tr><td>Bajo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Nivel cognitivo de los razonamientos de los alumnos</td><td rowspan="3"></td><td>Alto</td></tr>
<tr><td>Medio</td></tr>
<tr><td>Bajo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Material didáctico</td><td rowspan="3"></td><td>Bueno</td></tr>
<tr><td>Regular</td></tr>
<tr><td>Malo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Valor instructivo del error</td><td rowspan="3"></td><td>Aprovechado</td></tr>
<tr><td>Medianamente aprovechado</td></tr>
<tr><td>Desaprovechado</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Preguntas del docente</td><td rowspan="2">Nivel de dificultad de la pregunta</td><td>Adecuado</td></tr>
<tr><td>Inadecuado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Selección del respondiente</td><td>Adecuado</td></tr>
<tr><td>Inadecuado</td></tr>
</table>

En este sistema al conjunto de variables que se escogen para describir el objeto de estudio se denomina *espacio de atributos*. El objeto modelo de la investigación queda delimitado por los distintos tipos de unidades de análisis escogidas para la indagación, mediante la aplicación de un espacio de atributos propio de cada tipo de unidad de análisis. En base a estos principios se definen a continuación los elementos del sistema de matrices de datos de este estudio.

La **unidad de análisis** fue la nota de campo volcada en el diario del profesor.

Las **variables** fueron:

Con respecto al *desempeño del grupo de alumnos durante las clases* se definieron las siguientes variables: Nivel de atención, Nivel de participación y Nivel cognitivo de los razonamientos de los alumnos. Para cada una se presenta su definición conceptual y operacional, indicando el procedimiento empleado para valorarla (González de Galindo y Colombo de Cudmani, 2006):

Nivel de atención (dimensión relativa a los criterios C_3 y C_6): manifestaciones corporales y conductas visuales evidenciadas por los alumnos durantes las clases en las que se desarrolló la guía, interpretándolas como síntomas del interés de los alumnos (esta dimensión responde a recientes investigaciones en metodología observacional, las que sostienen que los movimientos del cuerpo son índices válidos de distintos procesos psicológicos (Anguera Argilaga et al, 2000).

El nivel de atención asumió los valores Alto, Mediano y Bajo:

- *Alto*: Si el docente percibió que la mayoría de los alumnos estuvieron pendientes del desarrollo del tema y de los comentarios del docente y de los compañeros, comportamiento puesto de manifiesto a través de las posturas corporales y de la conducta visual de los alumnos que dirigían su mirada al interlocutor (procedimiento).

- *Mediano*: Si el docente percibió que fue similar el porcentaje de alumnos atentos que el de los distraídos, los que dirigían su mirada a cualquier otra parte (procedimiento).

- *Bajo*: Si el docente percibió que la mayoría se mostró distraído, aburrido, no dirigiendo su mirada al interlocutor (procedimiento).

Nivel de participación (dimensión relativa a los criterios C_1, C_2 y C_5): grado en que los alumnos participaban, formulando preguntas relativas al contenido matemático en cuestión o respondiendo las de la misma índole formuladas por el docente, e intercambiaban significados para poder completar los “espacios en blanco” incluidos en la guía y resolver las situaciones problemas planteadas, evidenciando que reinaba un clima distendido en la clase.

Los valores e indicadores para esta variable fueron:

- *Alto*: Si el docente percibió que la mayoría participaba activamente, intercambiando significados.

- *Medio*: Si el docente percibió que fue similar el porcentaje de alumnos que participaron activamente que el de los que se mostraron indiferentes o reacios a participar.

- *Bajo*: Si el docente percibió que sólo una minoría participó activamente.

Nivel cognitivo de los razonamientos de los alumnos (dimensión relativa a los criterios C_4 y C_7): medida en que los alumnos lograron razonar, estableciendo conexiones entre distintos conceptos y movilizándose entre los diferentes sistemas de representación semiótica de la Matemática: verbal, simbólico y gráfico. Los valores e indicadores para esta variable fueron:

- *Alto*: Si el docente percibió que la mayoría de las preguntas y reflexiones elaboradas por los alumnos, se refirieron a los aspectos más complejos de los distintos conceptos matemáticos desarrollados en clase.

- *Medio*: Si el docente percibió que fue similar el porcentaje del tipo de preguntas y argumentaciones que apuntaban a aspectos complejos, que el porcentaje de aquellas relativas a aspectos considerados de fácil comprensión.

- *Bajo*: Si el docente percibió que sólo escasas preguntas de los alumnos apuntaban a aspectos complejos de los contenidos desarrollados.

Material didáctico: Esta variable se refería a la presentación y desarrollo de los contenidos de la guía (variable relativa a los criterios C_4 y C_7). Su definición conceptual fue la siguiente: correspondencia entre el número y nivel de exigencias de las tareas planteadas en la guía, y el número y nivel de las realizadas en clase.

Los valores e indicadores fueron:

- *Bueno*: Si el docente comprobó que se desarrollaron la mayoría de las actividades diseñadas para las clases.

- *Regular*: Si el docente comprobó que sólo se desarrollaron alrededor de la mitad de las tareas.

- *Malo:* Si el docente comprobó que sólo se llevó a cabo un pequeño porcentaje de las actividades.

Con respecto al *desempeño del docente en la clase* se consideraron las siguientes variables: Valor instructivo del error y Preguntas del docente.

Valor instructivo del error (dimensión relativa al criterio C_5): Oportunidades en que el docente se vale del error para favorecer la construcción de significados recurriendo a procesos reflexivos. Los indicadores y valores son:

- *Aprovechado:* Si el docente constató que siempre aprovechó el error para favorecer el aprendizaje.

- *Medianamente aprovechado:* Si el docente constató que sólo a veces aprovechó el error para favorecer el aprendizaje.

- *Desaprovechado*: Si el docente constató que nunca se aprovechó el error para favorecer el aprendizaje.

Preguntas del docente (dimensión relativa al criterio C_5): Comportamientos instructivos del docente relativos al control que ejerce sobre las oportunidades de respuesta de los alumnos en situación de aprendizaje.

Las dimensiones de análisis fueron (Brophy y Good, 1986):

Nivel de dificultad de las preguntas: Para favorecer aprendizajes significativos, el grado de dificultad de las preguntas del docente debiera ser tal que permita al alumno dar alguna respuesta (correcta o incorrecta). Los valores e indicadores fueron:

- *Adecuado*: si el docente constató que se obtuvo alguna respuesta.

- *Inadecuado*: si el docente constató que no se obtuvo respuesta alguna.

Selección del respondiente: Actitud democrática del docente para elegir al alumno que responderá la pregunta. Los indicadores y valores fueron:

- *Adecuada:* si el docente seleccionaba a los alumnos en forma rotativa y facilitaba la participación activa aún de los que nunca solían ser voluntarios.

- *Inadecuada*: si el docente seleccionaba sólo a algunos respondientes.

Resultados

Al analizar el diario del profesor se consideró fundamental no sólo la descripción de lo ocurrido, sino las interpretaciones e impresiones del profesor-observador, pues son éstas las que permiten descubrir las razones profundas del comportamiento del docente (Kunzevich y Hosanna, 2005).

Con respecto al *desempeño de los alumnos en las clases* los resultados fueron:

Nivel de atención

En todas las clases el valor del indicador fue: Alto. Las notas aluden a que siempre los alumnos se mostraron interesados, dirigiendo sus miradas al docente o al compañero que hacía uso de la palabra.

Nivel de participación

El indicador tuvo el valor Alto en la última clase y Medio en las otras tres. Algunas notas fueron: *"En la primera clase algunos alumnos se mostraron temerosos de participar y emitir sus puntos de vista ante un grupo multitudinario"; "A partir de la segunda clase fue menor la resistencia a leer la guía, a expresar opiniones y se mostraron más distendidos".*

Es de destacar que en todas las clases, el cierre del tema desarrollado fue realizado por los alumnos, bajo la supervisión del docente.

Nivel cognitivo de los razonamientos de los alumnos

Sólo para una clase el valor del indicador fue Medio, los restantes fueron Bajo. La estructuración de la guía intentaba privilegiar el descubrimiento del significado de los conceptos y la conexión entre ellos. Sin embargo, registros como: "*Los razonamientos y procesos reflexivos de integración de conocimientos, surgidos como respuesta a lo leído en la guía y a las indicaciones del docente, fueron elementales",* pondrían en evidencia que avances importantes en el desarrollo del pensamiento lógico formal resultarían de un enfrentamiento permanente del alumno con situaciones del mismo tipo, ya que el proceder matemático frente a una situación problemática depende del tipo de tareas que se propongan al alumno, del trabajo con las técnicas matemáticas y de los cuestionamientos que sobre ella se hagan (Gascón, 2001).

Con respecto al *material instruccional* los resultados fueron:

Material didáctico

El valor del indicador de esta variable para todas las clases fue: Bueno. El número de las actividades y el nivel de exigencias requerido para resolverlas respondieron al tiempo disponible y al nivel cognitivo de los alumnos, respectivamente. Sin embargo, como se dijo en el párrafo anterior, los razonamientos surgidos durante el desarrollo de las clases no alcanzaron el nivel esperado.

Con respecto al *desempeño del docente en las clases* los resultados fueron:

Valor instructivo del error

El valor del indicador de esta variable para todas las clases fue: Aprovechado.

Frente al error en el que incurrían los alumnos, el docente intervenía induciéndolos a recordar y relacionar conceptos, hasta que proporcionaban la respuesta correcta. Se mencionan en el diario repetidas veces registros como el siguiente: "*Me preocupé por realizar la gestión de los errores que se presentaron".*

Preguntas del docente. Los resultados en cada dimensión fueron:

- **Nivel de dificultad de la pregunta:** El valor del indicador de esta dimensión para tres clases fue: Inadecuado. Los datos del diario indicarían que en esas clases algunas de las preguntas del docente no obtuvieron ninguna respuesta, lo que se evidencia con el siguiente registro: "*Resultó un fracaso mi intención de que los alumnos realizaran una operación mental de síntesis graficando funciones seccionalmente continuas, que cumplían diversas condiciones simultáneamente*". Se evidenció así que estas preguntas eran de alto nivel cognitivo, es decir perseguían metas elevadas y trataban de poner en funcionamiento procesos mentales complejos. También es posible que la no respuesta de los alumnos se debiera a cuestiones de inhibición ante un grupo tan numeroso.

- **Selección del respondiente:** Siempre el valor del indicador fue: Adecuado. Sin embargo, las notas registradas hacen referencia a la dificultad en las dos primeras clases para lograr la participación activa de algunos alumnos y remarcan que el docente se esforzó por evitar el monopolio de los más capaces.

Conclusiones

El análisis de las notas de campo registradas en el diario del profesor y los valores de los indicadores para cada una de las variables, mostrarían que con la nueva estrategia metodológica, se cumplirían en gran medida los criterios establecidos. Resultaron satisfactorios: a) el grado de atención puesto de manifiesto por los alumnos durante las clases, b) la presentación y desarrollo en el material instruccional de los diversos contenidos del tema: "Función continua" y c) el desempeño del docente en cuanto a la importancia otorgada al valor instructivo del error y a la manera democrática para seleccionar al alumno respondiente.

En cuanto a la participación de los estudiantes se evidenció que la misma fue activa en lo relativo al intercambio de opiniones con sus compañeros. Sin embargo, fueron escasas las preguntas formuladas al docente. Este proceder podría atribuirse al hábito del alumno a desempeñar un rol pasivo o a inhibirse ante una clase tan numerosa. Por ello, es recomendable que el docente se esfuerce siempre en crear un clima distendido, en el que no tenga cabida el miedo a equivocarse.

En relación al nivel de dificultad de las preguntas del docente, la falta de respuestas a preguntas de alto nivel cognitivo podría superarse, según Montero (1992), formulando preguntas de bajo nivel cognitivo, ya que se consideran que las mismas facilitan el aprendizaje de objetivos de alto nivel.

De la lectura del diario se deduce que existió especial interés por conocer los puntos de vista de los alumnos y se priorizó la comprensión y conexión entre contenidos, favoreciéndose permanentemente el diálogo entre los distintos participantes.

El análisis de las notas del diario y la estructuración del material instruccional revelaron la concepción de educación y la concepción de la matemática sostenido por el docente, ya que ambos son elementos que determinan el desarrollo del currículo (García Ruso, 1998; Gascón, 2001). Se evidenciaría que aún trabajando con un curso multitudinario hay un intento de alejarse de la clase magistral dialogada, al recurrir a estrategias que permiten desarrollar *habilidades* matemáticas, considerando los conocimientos previos y trabajando en la *zona de desarrollo próximo* y asumiendo el docente el rol de facilitador de aprendizajes (Coll y Martí, 1994; Talízina, 1989; Montero, 1992). Con respecto al modelo docente se puede afirmar que responde al modelo del constructivismo psicológico (Gascón, 2001).

Los resultados obtenidos con esta estrategia didáctica que recurre al empleo de un material instruccional específicamente diseñado para el contexto de enseñanza, confirmarían lo que sostienen Coll y Solé (1992: 320): "*los alumnos... aprenden más cuando sus profesores estructuran el nuevo contenido a asimilar, les ayudan a relacionarlo con lo que ya saben, controlan sus realizaciones y proporcionan las correcciones necesarias en las actividades de práctica y aplicaciones independientes, ya sean éstas individuales o colectivas*". Además concuerdan con las conclusiones obtenidas en otras investigaciones de las autoras (González de Galindo y Colombo de Cudmani, 2006; Villalonga de García, 2003).

Posteriormente se triangularán las conclusiones de este trabajo con las que se obtengan de la encuesta implementada a los alumnos que participaron de la experiencia (trabajo que se encuentra en proceso de elaboración).

Apéndice 1

Continuidad de una función en un punto

El análisis del siguiente problema brinda explicación de por qué sube la temperatura del organismo (fiebre) en caso de padecer una enfermedad bacteriana. ¿Eres capaz de deducirla?

Problema

En un cultivo están desarrollándose bacterias. El tiempo t (en horas) para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación), es una función de la temperatura T del cultivo, medida en ºC. Si esta función está dada por:

$$t = f(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{24}T + \dfrac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \dfrac{4}{3}T - \dfrac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$$

a) grafica la función f,

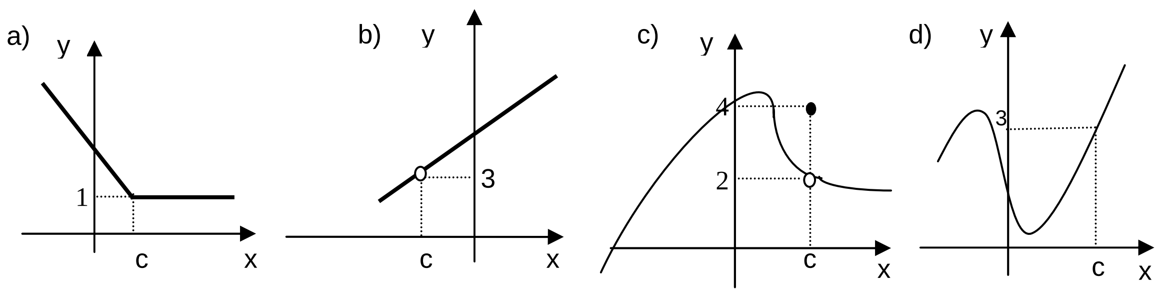
b) estudia la continuidad de la función f cuando la temperatura T es 36 [ºC],

c) interpreta el problema y brinda explicación de por qué sube la fiebre en caso de padecer una enfermedad bacteriana.

Para resolver situaciones como la planteada necesitamos estudiar los contenidos matemáticos relativos a la continuidad de una función.

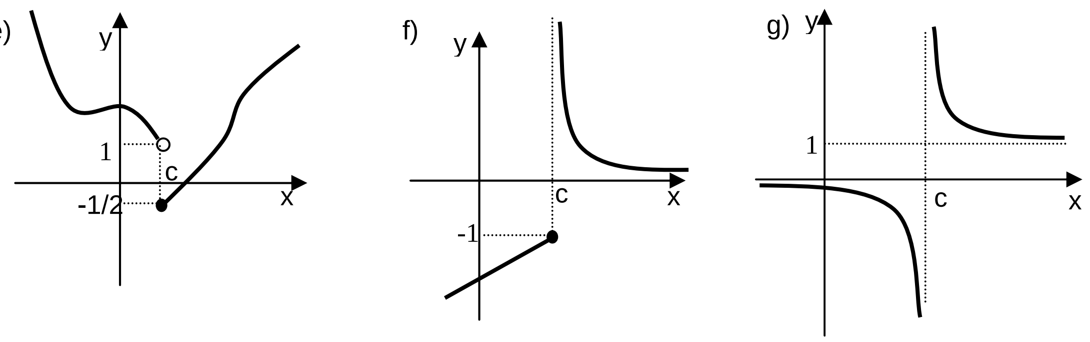
Estudiaremos, en primer lugar, las condiciones para que una función sea continua en un punto.

Considera los siguientes gráficos y analiza en cada uno la existencia de f(c) y del $\lim\limits_{x\to c} f(x)$. Si existen, indica su valor.



…………………..   ……………………..   …………………..….   …………………

…………………..   ……………………..   …………………..….   …………………



…………………………   …………………………   ……………….…………

…………………………   …………………………   ……………….…………

Figura 1

Según tu criterio, ¿cuáles corresponden a gráficos de funciones continuas en el punto c?

…………………………………………………………………………………………

Para los mismos, ¿qué relación se verifica entre f(c) y el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$?

……………………………………………………………………………………………….

Esta conclusión te permite definir función continua en un punto:

Definición de función continua en un punto c

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto c. Se dice que f es continua en un punto c si:

……………………….. = …….

La igualdad anterior implica, en realidad, tres condiciones: dos de existencia y una de igualdad ¿Puedes escribirlas?

i) ……………………………..

ii) ……………………………..

iii) ……………..=……………

Discontinuidad de una función en un punto

En cada uno de los gráficos de la Fig. 1 correspondientes a funciones discontinuas, ¿cuál o cuáles de las condiciones i), ii) y iii) no se cumplen?

. . .) i) ……..………………..………..
ii) …………………………..
iii) …………………………….

. . .) i) …………………………….
ii) ……………………………...
iii) ……………...…………….

. . .) i) ……………………..………..
ii) …………………………..
iii) …………………..………….

. . .) i) …………………………….
ii) …………………………….
iii) ……………...…………….

. . .) i) ……………………..………..
ii) …………………………..
iii) …………………..………….

Reflexiona: ¿Cuántas condiciones deben dejar de cumplirse para que puedas afirmar que una función es discontinua? ……………………………………………..

……………………………………………………………………………………

Podemos dar ahora la siguiente definición:

Definición de función discontinua en un punto c

"Una función f es discontinua en un punto c si ……………………………..

………………………………………………………………………..……………...

Tipos de discontinuidades

En la fig. 1, observa los gráficos correspondientes a funciones discontinuas.

¿Cuáles son factibles de ser transformados en gráficos de otras funciones que sean continuas, o sea, en gráficas de funciones que puedan realizarse sin levantar la mano?

....

En cada uno de estos gráficos ¿qué condición de existencia se cumple siempre?

....

Este tipo de discontinuidad se denomina evitable. Las restantes discontinuidades, por no cumplir esa condición, se denominan inevitables. O sea las discontinuidades de una función en un punto pueden clasificarse en dos tipos:

Tipo de discontinuidades	
Evitable	No Evitable
Si……………………	Si……………………

Discontinuidad infinita

Se dice que una función f tiene discontinuidad infinita en un punto c si se cumple por lo menos una de las condiciones siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \infty$; b) $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \infty$ c) $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$; d) $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = -\infty$

Ejercicios: *en cada una de las funciones que se definen a continuación, estudia la continuidad en el punto c = 2*

a) $f(x) = x - 2$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Ahora estás en condiciones de resolver la situación problemática planteada al iniciar el tema.

Bibliografía

- A. Pérez Gómez (1992): Los procesos de enseñanza – aprendizaje: análisis didáctico de las principales teorías del aprendizaje. En: Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (Eds), Comprender y transformar la enseñanza, 34-62 Editorial Morata. Madrid.
- C. Coll e I. Solé (1992): “La interacción profesor/alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje”. En: C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi: Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la educación, 121 - 139. Alianza Editorial. Madrid.
- C. Coll y E. Martí (1994): “Aprendizaje y desarrollo: la concepción genético-cognitiva del aprendizaje”. En: C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi: Desarrollo psicológico y educación, II. Psicología de la educación, 121 - 139. Alianza Editorial. Madrid.
- G. Kunzevich y G. Hosanna (2005): El planteo de nuevas categorías observacionales en las clases de Educación Física. Profesores como sujeto y objeto de las prácticas. Documento en línea. http://www.efydep.com.ar/ed_fisica/planteo.htm.
- H. García Ruso. (1998): La investigación-acción y la autonomía profesional del profesor. Contextos Educativos, 155-162.
- J. Brophy y T. Good (1986): Teacher behavior and student achievement. Citado por Montero, M. L. (1992): “Los estilos de enseñanza y las dimensiones de la acción didáctica”. En: Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A.: Desarrollo psicológico y educación II. Psicología de la educación, 273-296. Alianza Editorial. Madrid.
- J. Delgado Rubí (2001): “Los procedimientos generales matemáticos”. En Hernández Fernández, H., Delgado Rubí, J., Fernández de Alaíza, B., Valverde Ramírez, L. y Rodríguez Hung, T. Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior, pp 69-87. Homo Sapiens Ediciones. Argentina.

- J. Elliott (1980). Citado por M. Santos (1998): Hacer visible lo cotidiano. Teoría y práctica de la evaluación cualitativa de los centros escolares. 3ª edición. Ediciones Akal. Madrid - España.
- J. Gascón. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 4, Num. 2, pp. 129-159.
- J. Samaja. (2003): Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica. Eudeba. Buenos Aires.
- M. Fandiño Pinilla. (2003): Currículo y evaluación en matemáticas: hipótesis de base. Memorias del V Simposio de Educación Matemática. (pp.235-254). Chivilcoy- Argentina.
- M. L. Montero (1992): Los estilos de enseñanza y las dimensiones de la acción didáctica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi: Desarrollo psicológico y educación II. Psicología de la educación 273-296. Alianza Editorial. Madrid.
- M. Moreira (1997): La teoría del desarrollo cognitivo de Piaget. En: Moreira, M. (Ed.), Enfoques teóricos. Monografías sobre aprendizagem e encino. Material impreso sin paginar. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.
- M. T. Anguera Argilaga, A. Villaseñor; J. L. Losada López y A. Hernández Mendo (2000): "La metodología observacional en el deporte: conceptos básicos". Revista Digital. Año 5. Nº 24.
- N. E. Pacheco (2005): Comprensión y aprendizaje en Matemática. Editorial de la Facultad de Educación Elemental y Especial. Mendoza. Argentina.
- N. Talízina (1993). Citado por C. Dolores (1997): "El desarrollo de ideas variacionales y la derivada en situación escolar". Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.
- N.C.T.M. (1989): Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Sevilla. 267 pp. Edición española de Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (Tr. por la Sociedad Andaluza de Educación Matematica "Thales").
- N.C.T.M. (1995): Assessment Standars for School Mathematics. Versión electrónica. http://standars.nctm.org/Previous/AssStds/Intro.htm.
- N.C.T.M. (2002): Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla. Edición española de Principles and Standards for School Mathematics. (Tr. por Manuel Fernández Reyes). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matematica "Thales". (2000). (411 p.). Primera edición en castellano.
- P. Villalonga de García y L. Colombo de Cudmani (2006): Construcción del objeto modelo para un estudio de evaluación del aprendizaje de la matemática. Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática. Año 8- Nº 30. (pp 28-37).
- P. Sadovsky (2005): "La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática", en Alagia H., Versan A. y Sadovsky P. (Eds.) Reflexiones teóricas para la educación matemática (pp 13-65). Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.
- P. Villalonga de García (2003). Un enfoque alternativo para la evaluación del Cálculo en una Facultad de Ciencias. Tesis de Magíster no publicada. Universidad Nacional de Tucumán. Tucumán-Argentina. (223 p.).
- P. Villalonga de García y S. González de Galindo (2005): Criterios derivados de teorías cognitivas, empleados como referentes al diseñar y validar una

experiencia didáctica. Comunicación presentada en la Quinta Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires.

- R. Hernández Sampieri, C. Fernández Collado y P. Baptista Lucio (2000): Metodología de la investigación. McGraw Hill. Méjico.
- R. Porlán y J. Martín (2000): El diario del Profesor. Un recurso para la investigación en el aula. Diada Editora S. L. Sevilla.
- S. González de Galindo (2003): Resignificación de las clases teóricas, en una facultad de Ciencias, dentro de un nuevo modelo de aprendizaje. Tesis de Magíster inédita. Universidad Nacional de Tucumán. Tucumán-Argentina.
- S. González de Galindo y L. Colombo de Cudmani (2006): El análisis de la propia práctica didáctica. Enviado a la revista *Iered* el 30/10/06. (En proceso de evaluación).
- S. González de Galindo, M. Marcilla y P. Villalonga de García (2006): Estructura de una estrategia didáctica y diseño seleccionado para su implementación en aulas multitudinarias. Memorias del XIII EMCI, V Internacional Educación Matemática en Carreras de Ingeniería. Misiones- Argentina.
- S. J. Taylor y R. Bogdan (1987): Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Editorial Paidos. Buenos Aires.
- Y. Chevallard, M. Bosch y J. Gascón (1997): Cuadernos de educación 22. Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Editorial Hosori.

González de Galindo, Susana, nacida en Tucumán, Argentina el 5 de marzo de 1948. Licenciada en Matemática, por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Profesora en la Enseñanza Media, Normal y Especial (Especialidad Matemática). (UNT). Magister en la Enseñanza de la Matemática Superior. (UNT). Profesora Asociada de Matemática 1 y Matemática 2 de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Tucumán. Argentina. Es Directora del proyecto “Metodologías de enseñanza y evaluación que favorecen aprendizajes significativos para cursos masivos de primer año de una facultad de Ciencias” del Consejo de Investigaciones de la U.N.T. Ha dictado cursos de postgrado. Tiene publicados numerosos trabajos en el área Matemática y Educativa en Revistas Nacionales e Internacionales.
Email: sgalindo@fbqf.unt.edu.ar

Villalonga de García, Patricia, nacida en Tucumán, Argentina el 13 de abril de 1952. Licenciada en Matemática y Magíster en Enseñanza de la Matemática Superior egresada de la Universidad Nacional de Tucumán (U.N.T). Argentina. Profesora Asociada con dedicación exclusiva de las asignaturas Matemática 1 y Matemática 2 de la Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la U.N.T. Dictó cursos de postgrado. Actualmente es codirectora del proyecto “Metodologías de enseñanza y evaluación que favorecen aprendizajes significativos para cursos masivos de primer año de una facultad de Ciencias” del Consejo de Investigaciones de la U.N.T. Tiene publicados numerosos trabajos en el área Matemática y Educativa en Revistas Nacionales e Internacionales.
Email: pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 223-234
ISSN: 1815-0640

La Matemática en el diseño

Alicia Mirta Giarrizzo

Resumen

Si les proponemos a nuestros alumnos que de acuerdo con sus intereses elijan diferentes temas para investigar, se presentarán sin duda situaciones intra y extra matemáticas relacionadas con diferentes nociones. La siguiente experiencia sobre **diseño de ropa** pretende mostrar cómo incentivar en los alumnos[1] la búsqueda de nuevos cuestionamientos sobre problemáticas cotidianas que les permita reconocer en sus comportamientos la existencia o no de modelos matemáticos.

Introducción

Una vez elegido el tema por los alumnos, el docente deberá presentar la situación de enseñanza para promover la articulación entre los distintos **registros de expresión**: *verbal* (descripción); *tabla* (relación de correspondencia entre los valores del dominio y sus imágenes); *gráfico* (curva o puntos aislados que quedan representados en el plano cartesiano según si el dominio es continuo no discreto o discreto); *algebraico* (fórmulas expresadas a veces de formas equivalentes para establecer que responden a una misma función) y *algorítmico* (procedimiento que permite el cálculo de las imágenes a partir de los valores del dominio).

Los diferentes **marcos[2]:** *geométrico, algebraico, gráfico, aritmético,* etc., servirán para que cada uno con su lenguaje y su sintaxis genere significados que pasen a formar parte del campo de conocimientos del alumno y para que tengan en claro sus correspondencias. Seremos nosotros los que, con una visión globalizadora de los contenidos de cada año, deberemos tener en cuenta la preparación de variadas problemáticas:

– *Entre significados de un mismo concepto en marcos diferentes.*

– *Entre significados de conceptos diferentes representados en un mismo marco.*

---

[1] Edades de los alumnos comprendidas entre 15 y 16 años.

[2] Los ***marcos*** son los dominios en los que pueden intervenir la mayoría de los conceptos. Estos marcos: algebraico, analítico, físico, numérico, gráfico..., traducen conceptos que en cada uno de ellos adquieren significados a los que se les asocian significantes que pueden representar a la vez en dicho marco otros conceptos.

"…Es probable que en la mayoría de los casos, durante la investigación que realizan los alumnos, surja la necesidad de que los docentes expliquemos temas que no corresponden al programa del año que cursan. Contrariamente a lo que pueda suponerse, los alumnos aceptan de buen grado las explicaciones porque las sienten como una ayuda para solucionar sus interrogantes y continuar con sus experiencias".[3]

Con el asesoramiento de la ***Profesora en Corte y Confección: Rosa María De Sarro*** *se fueron adquiriendo los procedimientos y el vocabulario específicos y se recopilaron informaciones que se constituyeron en los datos principales para el abordaje de los contenidos que las diferentes actividades presentarán en este artículo.*

❖ **Actividad 1**: ***La parte esencial para confeccionar un molde exacto es tener en cuenta las reglas para tomar las medidas:***

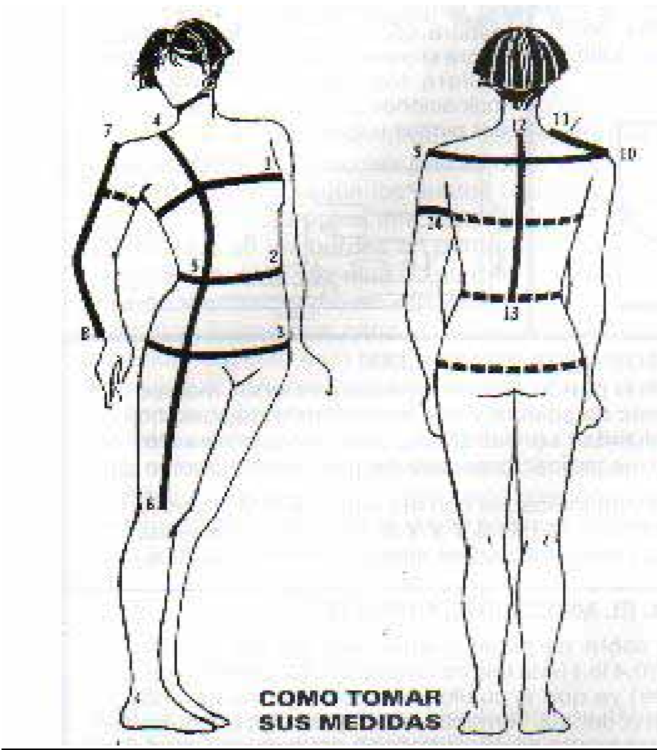


Fig. 1

- **1 Contorno de busto** - Pasando el centímetro debajo de los brazos, alrededor del mismo, por la parte más saliente del busto.
- **2 Contorno de Cintura-** A su alrededor una vuelta completa.
- **3 Contorno de cadera** - En la parte más ancha.
- **4 a 5. Largo de Talle delantero** -Desde el hombro junto a la base del cuello hasta el punto medio de cintura.

[3] Compiano Bibiana, Giarrizzo Alicia M. (1995), *"INVESTIGUEMOS PARA APRENDER. Una estrategia no convencional en Matemática"*. A-Z editora, Buenos Aires.

- **5 a 6. Largo de falda** – Desde la cintura hasta el largo correspondiente.
- **7 a 8. Largo de Manga -** Largo total y codo, teniendo ya tomada la sisa en el corpiño. Apóyese el centímetro en la muñeca, pasando por el codo, tomando nota de esta medida y continuando al hombro para el largo total.
- **9 a 10. Ancho de Espalda -** De un extremo al otro de los hombros.
- **10 a 11. Ancho de hombro** –Desde la base del cuello al extremo del hombro.
- **12 a 13. Largo de Talle de espalda -** Desde el hombro, junto a la base del cuello, colocar el centímetro recto hacia el punto medio de cintura.
- **14. Contorno de brazo** – Justo en la parte más gruesa.
- **Cuello -** A su alrededor, por la parte baja.
- **14 Sisa -** alrededor del brazo, junto al hombro.

Presentaremos algunos moldes con sus explicaciones para ***construirlos según un sistema tradicional***[4] ***y con el lenguaje textual.*** Los alumnos podrán descubrir analogías o diferencias con las palabras utilizadas por ellos en el ámbito matemático y/o en lo cotidiano y realizar los moldes a partir de las indicaciones dadas.

"Fórmese un cuadro que tenga de ancho la mitad de la medida del contorno por el largo del talle delantero"[5].

- **Espalda -** Desde el lado izquierdo, sobre la línea horizontal superior, márquese la mitad de la medida de espalda; a continuación una sexta de sisa menos un centímetro, trazando dos verticales (I y 2) con la medida del talle de la espalda, cerrando el cuadro para dibujar la misma. Para el escote de cuello, en la vertical izquierda, dos centímetros de bajada, por una sexta del mismo en la línea horizontal, únanse estos puntos con línea curva. Para dibujar el hombro, en la vertical nº 1, cinco centímetros de bajada, únase este punto al de cuello en línea recta. Desde la caída de hombro, hacia abajo, sobre la vertical nº 1, márquense dos sextas de la medida de sisa y de este punto hacia la línea nº 2, una sexta; uniendo estos puntos con línea ligeramente curva queda dibujada la sisa. En la línea de cintura, desde la vertical nº 2 hacia adentro, tres centímetros para entalle, uniendo este punto al de sisa por línea recta queda dibujada la espalda (fig. 2).
- **Delantero** - Para dibujar el escote de cuello márquese en la línea vertical derecha una sexta de la medida del mismo más dos centímetros, por una sexta en la línea horizontal, uniendo estos puntos con línea curva. Para el hombro, en la línea horizontal superior, desde el escote de cuello márquese la medida del mismo dibujado en la espalda; de este punto hacia abajo para caída del mismo, tres centímetros, uniendo este punto al de cuello en línea

[4] Sistema Mendia de Corte y Confección.
[5] Se muestran las construcciones finales de algunos de los moldes a modo de referencia.

recta. En la línea de hombro, a una distancia de cinco centímetros del escote de cuello, dibújese la pinza de busto; según el mismo varía su profundidad cinco o siete centímetros en medidas generales. (Los cuerpos con marcado busto admiten mayor medida). A continuación del hombro, auméntense los centímetros tomados en la pinza, ésta debe terminar a la altura de sisa y en dirección de la décima de cintura. Desde el punto de hombro, dibújese la sisa en línea curva a encontrarse a la ya trazada en la espalda; para mayor perfección de este trazado, a la altura de las dos sextas de sisa de la espalda, márquese una sexta menos uno de sisa, apoyando en este punto la línea curva como lo indica el croquis. Tomando el alto de costado de la espalda, ciérrese el cuadro con línea semicurva; quedando así terminado el estudio del corpiño tipo (fig. 2).

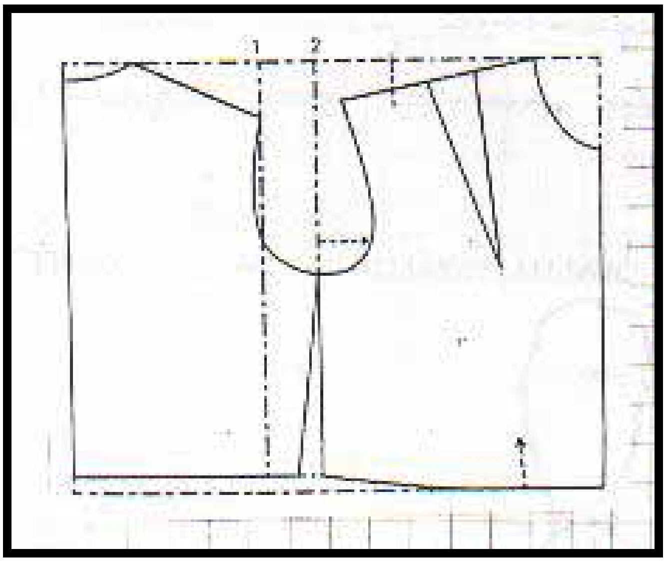


Fig. 2

"Fórmese un cuadro que tenga de ancho la medida de sisa por el largo total de la manga."

- **Manga con Costura debajo del brazo -** En la parte superior, en la línea vertical izquierda márquese nueve centímetros de bajada y en la vertical derecha trece cm.; en la línea horizontal hacia adentro márquese una sexta de sisa y de este punto hacia abajo doce cm.; uniendo como indica el croquis, con línea curva este último punto a los puntos marcados en las verticales queda dibujado el redondo de la manga. En la línea horizontal, parte inferior, márquese la mitad de la medida de sisa y de estos puntos a ambos lados la mitad de medida de puño, uniendo en línea recta a los puntos de sisa. En la línea delantera a la altura de codo, márquese hacia adentro dos cm., uniendo en línea curva a los puntos de sisa y puño; en el lado opuesto a la misma altura, márquese hacia afuera un centímetro y medio, uniendo en línea recta a la parte superior e inferior. En el puño márquese en el centro un cm. de levante y en el centro delantero dos cm. uniendo en línea curva como indica el croquis (fig. 3).

"Fórmese un cuadro con la medida de sisa por el largo deseado."

- **Manga corta -** en ambas verticales trece cm. de bajada; sobre la línea horizontal superior márquese una sexta de sisa y de este punto hacia abajo doce cm.; dibújese el redondo de la manga como en las anteriores. En la parte inferior en la línea horizontal, márquese la mitad de la medida de sisa y de este punto a ambos lados la mitad de medida de puño, uniendo en línea recta a los puntos de sisa.

Para el levante de puño márquese en el delantero un cm., uniendo en línea curva como indica el croquis.

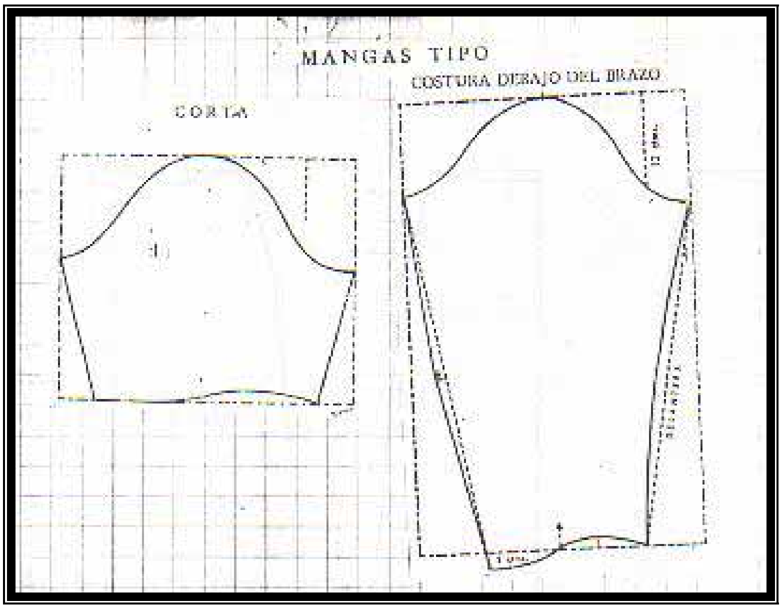


Fig. 3

- **Falda tipo sastre de dos paños -** Divídase por cuatro las medidas de cintura y cadera. Para formar la parte de la espalda, dibújese un ángulo, en la línea horizontal, márquese la cuarta parte de cintura menos dos cm., y en la línea vertical dos cm. de bajada, uniendo estos puntos con línea curva. A 18 ó 20 cm. de la cintura hacia abajo márquese la cuarta parte de la medida de cadera menos dos cm. En la línea vertical, desde el escote de cintura se dará el largo total. En la parte inferior, para vuelo, márquese la medida dada en la cadera más 5 ó 6 cm., únase este punto a los puntos de cadera y cintura en línea recta. Se redondea desde el escote de cintura. Para la parte delantera, en la cintura se dará tres cm. de bajada por cuarta parte de la misma más dos cm. A 18 ó 20 cm., la cuarta parte de cadera más dos cm. y para vuelo, la medida dada en la cadera más cinco o seis cm.; continúese el trazado como la parte de la espalda.

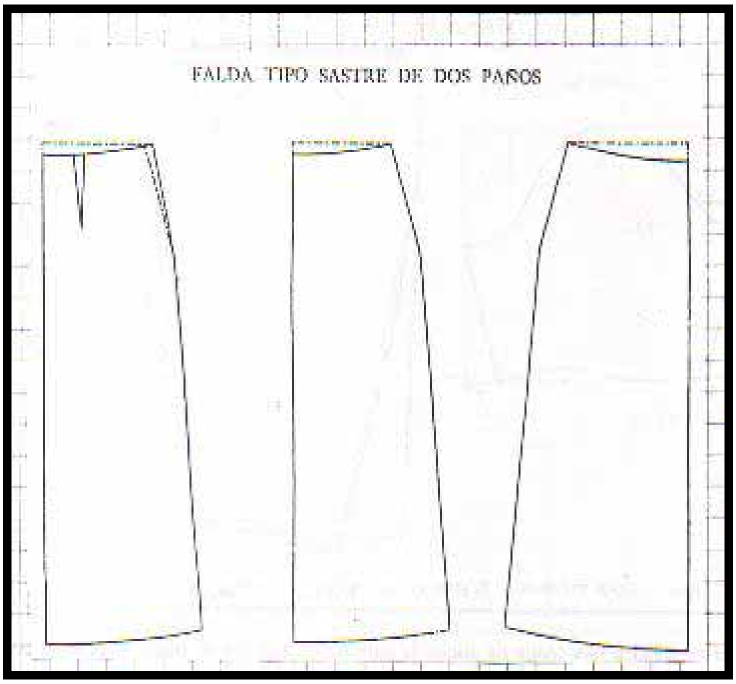


Fig. 4

- **Actividad 2:** ***Las adaptaciones de los moldes al talle inmediatamente anterior y posterior se harán trazando una línea paralela a la del molde impreso siguiendo las medidas correspondientes a las ampliaciones o reducciones que indican algunas tablas al respecto.***

A continuación se muestran las variaciones a tener en cuenta para adaptar las confecciones del talle 42; el molde del delantero con ambas modificaciones y un esquema que muestra la forma de acortar o de alargar los largos de talles especiales:

Tabla 1

Talles	Costados del corsage	Costados falda	Hombro	Talle adelante y atrás	Costados manga
40	-1cm	-1cm	-1/2cm	-1cm	-1/2cm
42					
44	+1cm	+1cm	+1/2cm	+1cm	+1/2cm

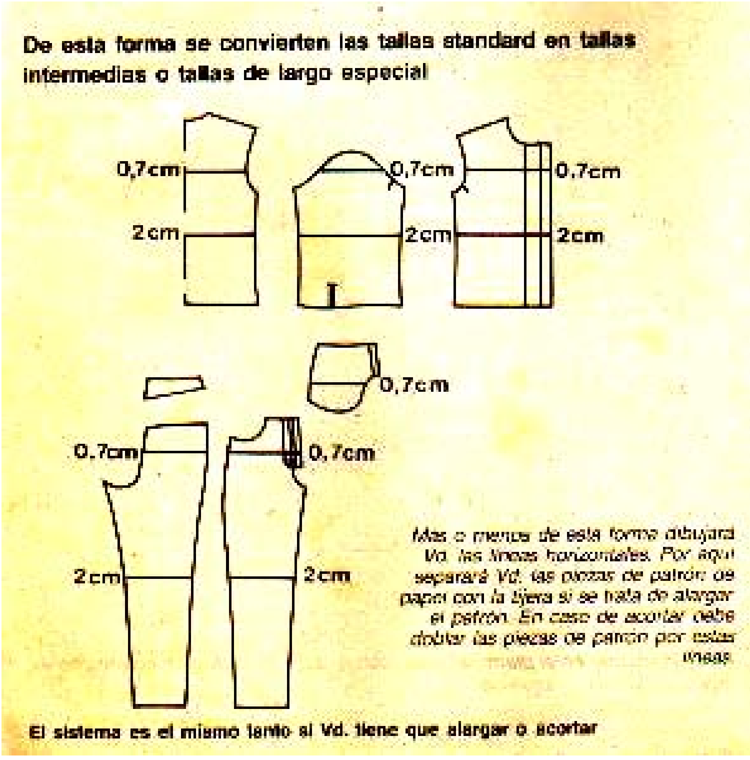


Fig. 5

En otras publicaciones se presentan así las explicaciones y los esquemas:

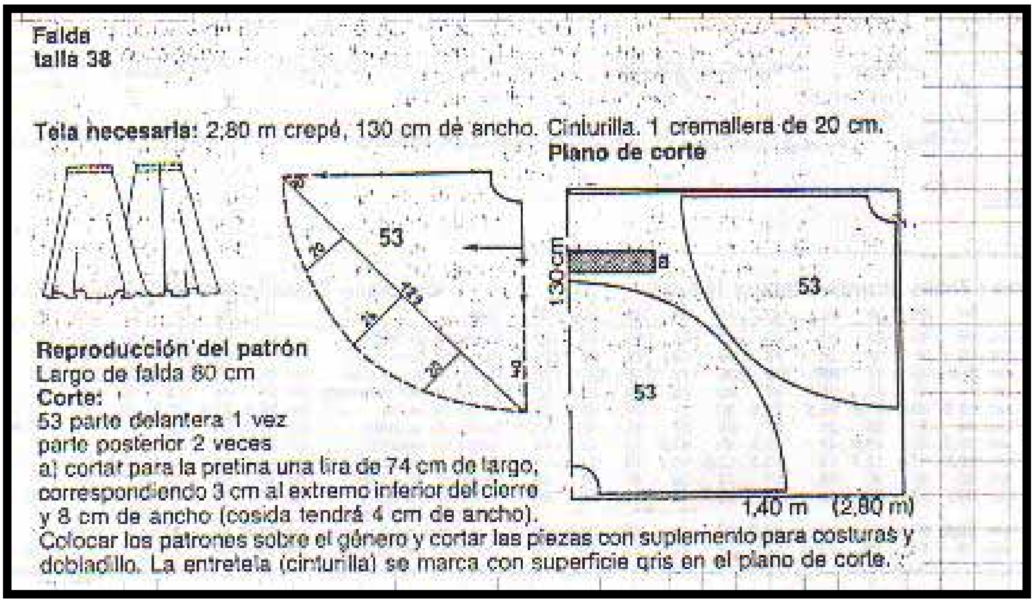


Fig. 6

Si observamos las medidas de los moldes y su distribución en la tela, podemos formular problemáticas relacionadas con el cálculo de áreas y de perímetros aplicando por ejemplo el Teorema de Pitágoras y otras propiedades. La progresión de talles permitirá analizar si se verifican las condiciones necesarias y suficientes que definen figuras semejantes[6].

- **Actividad 3:** ***¿Podrán definirse relaciones de dependencia y de variabilidad en las medidas anteriores en función de los diferentes talles?***

Partiendo de la importancia de establecer relaciones de dependencia y de variabilidad, en las que los alumnos desconocen "a priori" el comportamiento de las mismas, resulta necesario el planteo de problemáticas que permitan analizar estas relaciones y definir funciones cuando sea posible para que el alumno las considere una "herramienta de trabajo", es decir, "un instrumento para resolver problemas". Aparecerán nuevos interrogantes: *¿Por qué y para qué es necesario definir el dominio y el conjunto imagen de una función?; ¿A qué tipo de función responde?; ¿resulta una función de proporcionalidad? ¿Cuáles son los usos y las limitaciones de los diferentes registros de expresión?; ¿Cómo fundamentar los comportamientos las diferentes nociones involucradas?, etc.*

Tabla 2

Señoras - Tallas normales (altura 168 cm.)										
Talla	**34**	**36**	**38**	**40**	**42**	**44**	**46**	**48**	**50**	**52**
Contorno de busto	80	84	88	92	96	100	104	110	116	122
Contorno de cintura	63	65	68	72	76	80	86	92	98	104
Contorno de caderas	88	90	94	98	102	106	110	116	122	128
Largo talle delantero	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
Altura de pecho	25,5	26,5	27,5	28,5	29,5	30	31	32	32,5	33,5
Ancho de espalda	33	34	35	36	37	38	39	40,5	42	43,5
Largo de espalda	39,5	40	40,5	41	41,5	42	42,5	43	43,5	44
Ancho de Hombros	12,2	12,5	12,7	13	13,2	13,5	13,7	14	14,2	14,5
Contorno de cuello	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Largo de manga	58	58	59	59	59	60	60	60	60	60
Contorno parte superior brazo	25,5	26,5	27,5	29	30,5	32	33,5	35	36,5	38
Contorno de muñeca	16	16	16	17	17	18	18	19	19	20

6 Reconocidas en partes de los moldes.

Algunos procedimientos y respuestas de los alumnos fueron las siguientes:

Tabla 3

Contorno de busto en función de las diferentes tallas				
Talla t	**Contorno de busto** $f(t) = b$	**Primera relación**	**Segunda relación**	**Tercera relación**
34	80	34 + 46	34 + 34 + 12 = 2. 34 + 12	
36	84	36 + 48	36 + 36 + 12 = 2. 36 + 12	
38	88	38 + 50	38 + 38 + 12 = 2. 38 + 12	
40	92	40 + 52	40 + 40 + 12 = 2. 40 + 12	
42	96	42 + 54	42 + 42 + 12 = 2. 42 + 12	
44	100	44 + 56	44 + 44 + 12 = 2. 44 + 12	
46	104	46 + 58	46 + 46 + 12 = 2. 46 + 12	2. 46 + (t – 34)
48	110	48 + 62	48 + 48 + 14 = 2. 48 + 14	2. 48 + (t – 34)
50	116	50 + 66	50 + 50 + 16 = 2. 50 + 16	2. 50 + (t – 34)
52	122	52 + 70	52 + 52 + 18 = 2. 52 + 18	2. 52 + (t – 34)

Pudieron generalizar el comportamiento de las variables por medio de una función para una parte de la progresión de tallas, razón por la cual debieron definir su dominio en el conjunto de los números naturales y restringirlo:

$$f(t) = 2t + 12 = 2(t + 6), \text{ si } 34 \leq t \leq 46$$

Tenían ahora que encontrar la expresión correspondiente al resto de las tallas. Luego de varios cálculos llegaron a la siguiente:

$$f(t) = 2t + (t - 34) = 3t - 34, \text{ si } 48 \leq t \leq 52$$

Pero como para calcular el contorno de busto para la talla 46 se podían utilizar ambas fórmulas, un grupo de alumnos quiso demostrar que esa solución correspondía a esa única talla.

¿Qué nueva noción ayudaría a modelizar esta situación?

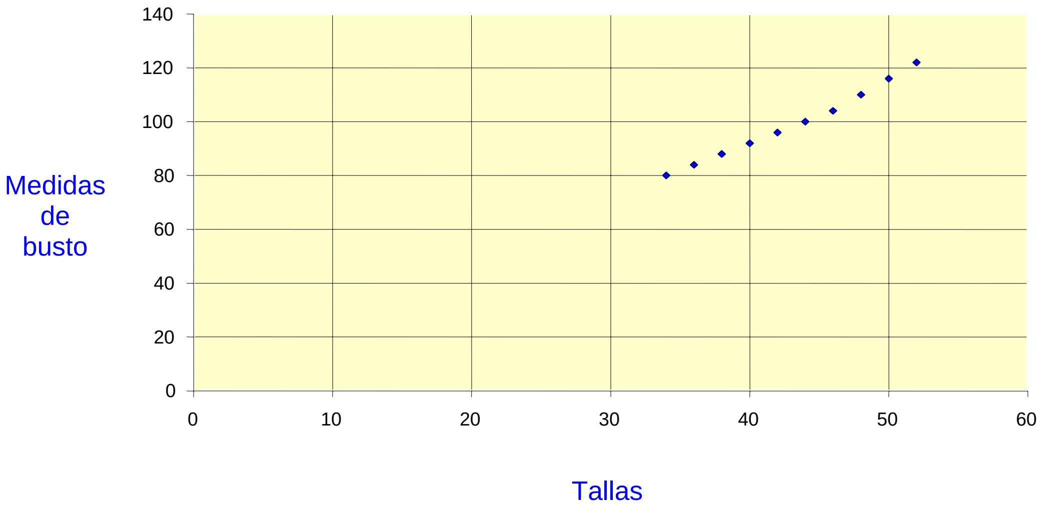
Propusieron la resolución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2t + 12 = b \\ 3t - 34 = b \end{cases}$$

“Para la talla 46 corresponde 104 cm. de contorno de busto y no hay otra solución para este sistema que resulta ser compatible y determinado”

Gráfico 1

Variación de la medida de busto en función de la talla



Para *algunas de las restantes variables* obtuvieron:

Tabla 4

Contorno de cintura	$f(t) = t + 29, si 34 \le t \le 36$ $f(t) = 2(t-4), si 38 \le t \le 44$ $f(t) = 3t - 52, si 46 \le t \le 52$
Contorno de caderas	$f(34) = 2t + 20$ $f(t) = 2(t+9), si 36 \le t \le 46$ $f(t) = 3t - 28, si 48 \le t \le 52$
Largo de talle delantero	$f(t) = 1/2t + 26$
Altura de pecho	$f(t) = 1/2t + 8{,}5, si 34 \le t \le 42$ $f(t) = 1/2t + 8, si 44 \le t \le 48$ $f(t) = 1/2t + 7{,}5, si 50 \le t \le 52$

Contorno de cuello	$f(t)=1/2t+16$
Contorno de la parte superior del brazo[7]	$f(34)=3/4t$ $f(36)=3/4t-0{,}5$ $f(t)=3/4t-1, si 38 \le t \le 52$
Contorno de muñeca	$f(t)=16, si 34 \le t \le 38$ $f(t)=17, si 40 \le t \le 42$ $f(t)=18, si 44 \le t \le 46$ $f(t)=19, si 48 \le t \le 50$ $f(52)=20$

Al representar las funciones en un mismo gráfico podrán observarse sus direcciones, siendo variadas las estrategias que permitan fundamentar, por ejemplo: *si han resultado rectas paralelas o perpendiculares; si algunas de ellas se superponen; si hay tramos constantes; si posee saltos; etc.*

Esta experiencia puede continuarse con la elaboración de un presupuesto sobre la compra de los insumos para confeccionar variadas prendas, incluyendo la posibilidad de solicitar préstamos en entidades bancarias y de analizar otras variables económicas como costo, beneficio, oferta y demanda, etc.

El alumno recurrirá a diferentes modelos matemáticos y, guiado por el docente o en el momento de la validación, podrá entonces establecer si éstos responden a la problemática elegida o si es necesario modificarlos o cambiarlos.

La modelización conducirá a seleccionar variables, relacionarlas simbólicamente, a seleccionar formas precisas y claras de representación y a establecer bajo qué condiciones se enmarca cada situación.

Bibliografía

- Artigue, Michéle y otros. (1995). “Ingeniería didáctica en educación matemática”. Grupo Editorial Iberoamericana, México.
- Compiano Bibiana, Giarrizzo Alicia M. (1995). “Investiguemos para aprender. Una estrategia no convencional en Matemática”. A-Z editora, Buenos Aires.
- Compiano, B, Giarrizzo A. Schell, H. (1999). “Matemática y su enseñanza. Problemáticas integradoras desde el álgebra”. Ed. Edicial, Buenos Aires.

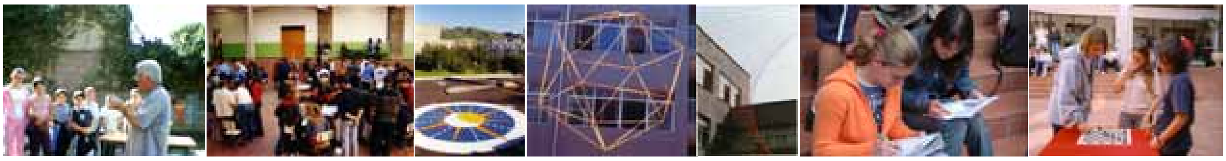
[7] Para determinar la fórmula aplicaron la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

- Chevallard, Ives. (1997). “La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado”. Aique, Buenos Aires.
- Giarrizzo, Alicia Mirta. (1992). “Matemática Financiera”. A-Z editora, Buenos Aires.
- Giarrizzo, Alicia Mirta. (2001). “¿Por qué el álgebra?”. “¿Cómo reconstruir la noción de función?”. Revista de información docente: Raíces y Alas, (9 y 10), Instituto Modelo Lomas S.R.L. Buenos Aires.
- Giarrizzo, Alicia Mirta. (2006). “Los conocimientos previos. Aportes para la problemática de su evaluación”. Revista Novedades Educativas Nº 182, 66-69. Buenos Aires.
- Parra, Cecilia y Saiz, Irma, (comp.)(1994). “Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones”. Paidós, Buenos Aires.
- Sacristán, José Gimeno. (1998). “El curriculum: una reflexión sobre la práctica”. Morata, Madrid.
- Santaló, Luis A. y colaboradores. (1994). “Enfoques: hacia una didáctica humanística de la Matemática”. Troquel, Buenos Aires.
- Stenhouse, L. (1987). “La investigación como base de la enseñanza”. Morata, España.
- Vergnaud, Gérard (coord.).(1997). “Aprendizajes y didácticas: ¿qué hay de nuevo?”. Edicial, Buenos Aires.

Alicia Mirta Giarrizzo (Capital federal, Argentina, 1954) es Profesora de Matemática y Cosmografía (Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González, 1976). Licenciada en Educación con orientación en la Enseñanza de la Matemática (Universidad Nacional de Quilmes, 2002). Es autora de varias publicaciones sobre educación matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 235-243
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

C E I P Ofra-Vistabella

Santa Cruz de Tenerife, Tenerife, España

La Venta en la Escuela

La actividad que vamos a describir está basada en una idea original de los profesores Antonio Martín Adrián y Jesús Mario Iglesias, del grupo *Capicúa* y ha sido desarrollada en el Colegio de Educación Infantil y Primaria *Ofra-Vistabella*, Santa Cruz de Tenerife (España), por la profesora Victoria Soto en colaboración con otros profesores del centro.

Debemos aclarar que en la Isla de Tenerife se conoce como “venta” a los comercios dedicados a la venta al por menor, especialmente de ultramarinos y, en zonas rurales, también como bazares y otras especialidades. Se trata, por tanto, de un espacio en el que se desarrollan actividades de intercambio de una forma interactiva e incluso lúdica, en la que se ven implicados todos los sectores sociales. En ella, además, tienen cabida casi todas las actividades Matemáticas de resolución de problemas, (cálculo, geometría, medida...).

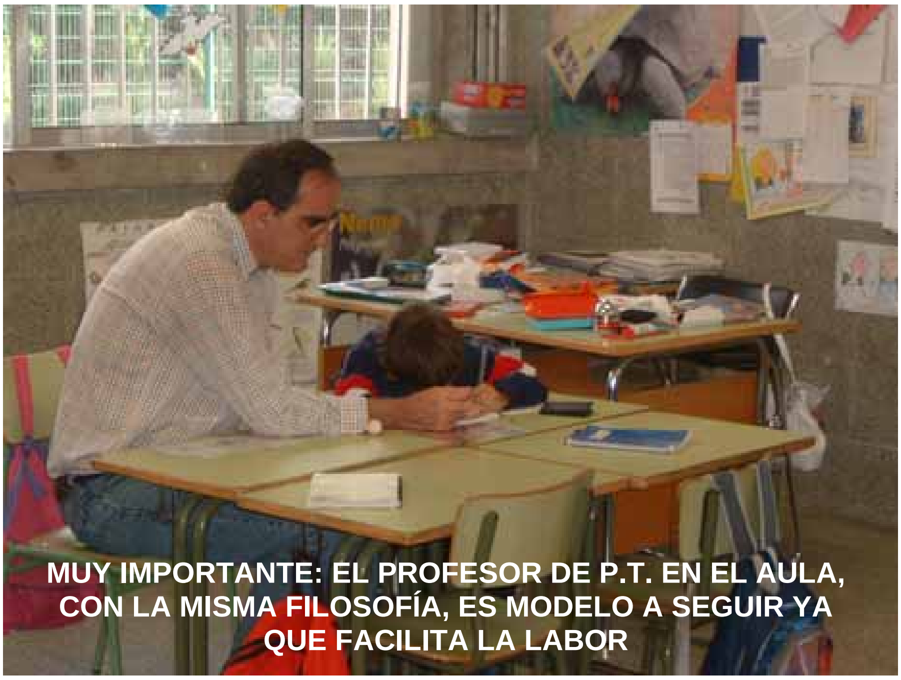
A VER ... ¿QUÉ TENGO QUÉ HACER?

Desde el punto de vista de la enseñanza activa, se hace necesario ampliar la mirada para ver todas las opciones que la historia de la educación nos ofrece; unas veces por tradicional y otras por novedosa, vamos incorporando a nuestra labor variadas estrategias de enseñanza-aprendizaje con la aspiración de dar la talla ante el reto que nos exige el nuevo siglo y con él las nuevas tecnologías, también. Se nos requiere que aportemos lo necesario para que las niñas y los niños del futuro, sean personas íntegras y estén en la línea que la sociedad les pueda exigir en su etapa adulta. La autonomía moral e intelectual debe servir como base para que dicho desarrollo les permita comprometerse con la justicia, la solidaridad y el progreso. Desde la acción pretendemos enseñarles a pensar, a desarrollar criterios y a buscar alternativas diferentes ante las opciones que se les puedan presentar y asumir las responsabilidades que de ello se derive.

La Venta, por tanto es un recurso didáctico que pretende limar la rudeza y el “anonimato” con que se presentan a veces las actividades de resolución de problemas en la escuela. El primer objetivo es, no obstante, el de reconocer en las MATEMÁTICAS su carácter universal por su uso incondicional y muchas veces inconsciente, en la vida cotidiana.

En *La Venta* hemos comprado y vendido casi de todo resolviendo problemas, de geometría, aritmética, pesos y medidas, representación gráfica… en los que el cálculo mental juega un papel fundamental y, por supuesto, la interacción social.

Hemos conectado de forma real las Matemáticas con Tutoría, Conocimiento del Medio, Lengua, Educación Artística,…



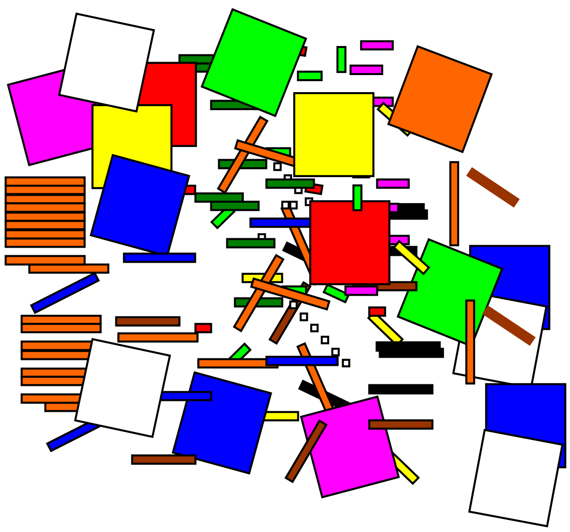
MUY IMPORTANTE: EL PROFESOR DE P.T. EN EL AULA, CON LA MISMA FILOSOFÍA, ES MODELO A SEGUIR YA QUE FACILITA LA LABOR

Para poder desarrollar la actividad es bueno flexibilizar el horario y permitir la participación de otros profesores que apoyan la labor en el aula. Otra interesante labor fue la de hacer la selección de los productos que han de existir en *La Venta* según los temas de trabajo previamente seleccionados.

Algunas de las sesiones más relevantes han sido:

- El recibo de la luz. (ahorro energía)
- La carta de reyes (consumo responsable y ahorro familiar)
- Amueblar una habitación (geometría y medida)
- La mochila de la playa. (hábitos saludables)
- Animales y habitats canarios protegidos o en peligro de extinción. (medio ambiente)

Los materiales utilizados han sido: regletas, bloques multibase, calculadoras, folletos comerciales, bolsas, recipientes, monedas y billetes… así como fichas elaboradas por las profesoras.



Colegio______________________________
Yo soy_______________________________
Hoy es_______________________________
Actividad_____________________________

Lista de la compra

Producto	Precio	Unidades	Total €

¿Cuánto dinero te queda en la cartera?
¿Cuánto dinero tenías antes de comprar?
Autoevaluación:
¿Qué tenía qué hacer?
¿Qué tal lo hice?
fecha y firma

Daremos siempre pie a situaciones de conflicto cognitivo donde se gestione la autonomía personal e intelectual. Las actividades con lenguaje simbólico serán siempre después de la manipulación, la experimentación, la construcción, y el intercambio de puntos de vista.

A los alumnos se les asignaba una cantidad de dinero y tenían la posibilidad de elegir los productos a comprar dentro del conjunto de temas que se les proponían. Realizaban los cálculos utilizando las herramientas que deseaban y terminaban cumplimentando la ficha correspondiente.

Se ha podido constatar que la presencia de otras personas en el aula motiva, refuerza y dinamiza y es evidente la gran riqueza de *La Venta* como propuesta interdisciplinar en el currículo.

La experiencia es ya una realidad en Educación Infantil (3-5 años) y en el primer y segundo ciclo de Educación Primaria (6-10 años) y una buena forma de entender cómo se realiza es viendo trabajar a los propios alumnos y alumnas. Las imágenes que mostramos pretenden ilustrarlo, esperemos que con suficiente claridad.

¿De cuántas maneras puedo hacerlo?

Adrián y Juan Manuel se organizan con la libreta

¿ Elijo aves, insectos? ¿cuál es el mejor…?

La Venta en la Escuela

Unas veces vende y prepara la caja …

…y otras compra y está o no de acuerdo

Andreína hace sus cuentas con el dinero

Mary Cruz espera paciente a que Sabrina le cobre

Tania y Sofía comparten

En Primero calculan comprando muebles

…y Javier también

Sebastián quiere amueblar su cuarto

Sofía comprueba los gastos

Daniel decide y elige

Lorena duda y necesita más tiempo

Miguel y Javier se apoyan con los bloques multibase

Sebastián discute con Paola

Presentación, puntos de vista y evaluación

La valoración puede ser positiva o no

Pero…

Nos lo pasamos bien

Actuando siempre como referencia y modelo

Hay que especificar que está implícito en este trabajo, y en todos los de nuestro centro, la filosofía del Programa de Competencia Social del Prof. D. Manuel Segura Morales, (está en la bibliografía) ya que las buenas relaciones interpersonales que se dan en la interacción social, es lo que hacen posible que surja el debate, el intercambio de puntos de vista, llegar a acuerdos o mantenerse en desacuerdos argumentados asertivamente desde el respeto y la consideración, desarrollando así una autonomía moral e intelectual que de otra manera no se daría.

Victoria Soto C.

Email:victoriacapicua@yahoo.es

Documentos consultados

▪“Los Vídeos de Toni y Mario”. Antonio Adrián Martín, Jesús Mario Iglesias.
▪Programa de Competencia Social. Manuel Segura.
▪ “Escribir y Leer”. Ministerio de Educación y Ciencia. Edelvives.
▪“El Niño Reinventa la Aritmética”. Constance Kamii. Ed. Antonio Machado Libros.
▪“La educación inteligente”. Bernabé Tierno Jiménez. Ediciones Temas de Hoy.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Marzo de 2007, Número 9 páginas 245-256
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Formação e preparação de professores para o ensino da Matemática Moderna no Brasil

Neuza Bertoni Pinto [1]

Considerado um marco histórico da Educação Matemática e com o propósito de modernizar a matemática escolar e adequá-la às exigências de um mundo cada mais complexo, o Movimento da Matemática Moderna (MMM), após vinte anos de seus primeiros passos, não conseguiu, tanto no Brasil como em outros países, atingir seus objetivos. Dentre outros fatores de seu insucesso, o de que os professores não estavam suficientemente preparados para ensinar a Matemática Moderna, tem sido um dos mais apontados.

Com o objetivo de melhor compreender essa polêmica questão, o presente estudo buscou inicialmente analisar o cenário brasileiro de formação de professores de Matemática, no momento de disseminação do movimento, bem como as ações que foram desencadeadas para que a Matemática Moderna chegasse com sucesso às salas de aula brasileiras. Para tanto, analisou nos relatórios das duas primeiras Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática, realizadas respectivamente em 1961 e 1966, em Bogotá (Colômbia) e Lima (Peru), os discursos pronunciados por ilustres representantes brasileiros sobre as questões de formação e preparação dos professores nos anos 60 em nosso país: Professor Omar Catunda, orador da Primeira Conferência realizada em Bogotá; Professora Martha Maria de Souza Dantas e Professor Osvaldo Sangiorgi, oradores na Segunda Conferência, realizada em Lima, no Peru.

Além dos discursos mencionados o estudo considerou as resoluções/recomendações emitidas pelas Conferências, sugerindo medidas a

[1] PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ - Brasil
neuzard@uol.com.br

serem tomadas pelos países participantes, tendo em vista a efetiva participação dos professores na modernização da matemática escolar.

Colocando novas questões, o estudo interroga os referenciais de formação docente, veiculados nos discursos analisados: o de formação inicial de futuros docentes de Matemática, discutido por Catunda e o de preparação de professores em serviço, apontado por Dantas e Sangiorgi, ao caracterizarem os cursos de Matemática Moderna oferecidos pelos catedráticos aos professores do ensino secundário, nos anos 60 no Brasil.

O professor de Matemática nos anos 60 no Brasil

Na abertura da Primeira Conferência (Fehr, 1969), o Ministro da Educação da Colômbia, ao congratular-se com os representantes dos vinte países presentes, sublinhou a importância do encontro em termos de uma grande renovação do ensino das ciências em escala continental e nacional. Dentre os temas da Conferência, "*La preparacion de profesores de matemáticas*", abordado pelo matemático brasileiro Omar Catunda, apresentou um quadro crítico da situação do professor de Matemática no Brasil. Alegava o orador que até na Universidade de São Paulo (USP), considerada a melhor formadora de cientistas brasileiros, a formação de futuros professores não era satisfatória: " seja pela carência de pessoal docente, ou pela rigidez da legislação, não conseguimos resolver esse problema" (p. 64). Catunda salientou o perfil do formador de futuros professores brasileiros: "A grande maioria dos professores de matemáticas das faculdades de ciências limitam-se a dar aulas expositivas, muitas vezes repetindo um livro texto ou apostilas, e suas atividades, fora das aulas, consistem em uma ou outra conferência, cursos de especialização etc " (p. 65). Referindo-se à carência de professores para o ensino secundário, informou que apenas 20% dos professores de Matemática no Brasil possuíam formação superior. Lembrou que por muito tempo os professores eram autorizados por decretos ministeriais a obter registro para lecionar sem uma preparação especializada; posteriormente, com o aumento de escolas secundárias, adotou-se no país o “exame de suficiência”, porém, muitos dos reprovados ainda mantiveram-se em seus postos. Mencionou que nos então concursos de ingressos era facultada a entrada de licenciandos de física, pedagogia, ciências sociais, desde que houvesse em seus programas de formação uma parte mínima de ensino de matemática. Segundo o orador, um dos fatores da lastimável situação era a falta de valorização da carreira docente, comparada a de outros profissionais da área de exatas. Com um salário precário, o professor de Matemática ainda enfrentava uma jornada de dez horas diárias de aulas, além do tempo desprendido com a preparação de lições, correção de provas, reuniões etc. Alegava que esse quadro sombrio só poderia ser resolvido a longo prazo e que uma das soluções seria incentivar a pesquisa entre os matemáticos professores. Observou que no Brasil os professores e matemáticos ainda não haviam se reunido para discutir “organizadamente” a introdução da Matemática Moderna nos currículos escolares. Mencionou o curso de Lógica Elementar ministrado por Georges Springer aos professores secundários e destacou o papel de Osvaldo Sangiorgi na articulação dessa iniciativa. Catunda falou também sobre a organização dos cursos de Bacharelado e Licenciatura da USP, esse último, segundo o orador, com uma estrutura inadequada para a formação de professores. Após tecer considerações sobre propostas de reformulação dos referidos cursos, afirmou que para superar o atraso em que o país se encontrava em relação à formação de professores de Matemática não era suficiente possuir formação universitária, esta deveria suprir a defasagem dos conteúdos matemáticos elementares apresentada pelos candidatos à Licenciatura, com a criação de disciplinas especiais para os futuros professores.

Em relação ao MMM, Catunda disse que a estrutura do ensino elementar brasileiro era muito frágil para resistir a uma reforma radical, por mais racional que fosse. No entanto, dizia estar de acordo que a álgebra fosse introduzida de maneira mais moderna, baseando-se nas noções fundamentais de conjunto, alegando que sua introdução prematura e seu excessivo formalismo, havia sido uma das maiores falhas do ensino médio no Brasil.Dizia ele: “a importância que os professores dão às definições, regras e fórmulas que o aluno deve aprender de memória, com enorme dano ao desenvolvimento do raciocínio" (p.64). Em relação à geometria esclareceu que no Brasil, ao contrário dos europeus que perdiam muito tempo com a geometria clássica, "os alunos praticamente não aprendem nada de geometria" (p.65), daí advogar por "pelo menos Euclides", ao invés do "Abaixo Euclides", referindo-se à famosa frase preconizada por Dieudonné.

Ao encerrar seu discurso, Catunda defendeu a formação do professor em um curso de três ou quatro anos, em que nos dois primeiros, os licenciandos tivessem uma formação matemática juntamente com os alunos do Bacharelado. Não mencionou como seriam os dois últimos, apenas ressaltou a necessidade de introdução de disciplinas especiais, como os seminários de revisão das matemáticas elementares, além de um contato mais freqüente da universidade com os professores secundários em exercício, por meio de cursos de férias, conferências e debates.

Nesta Primeira Conferência, ao concluir seus trabalhos, a comissão emitiu as seguintes recomendações aos governos e autoridades competentes:

I. Sobre a formação de professores:

a) que as universidades divulgassem a importância social da carreira de professor e investigador e oferecessem facilidades aos interessados;
b) que o professor de ensino médio fosse formado exclusivamente em universidades e sob a influência dos matemáticos mais competentes;
c) que na formação de professores de matemática do ensino médio, se modernizassem os cursos e se limitassem, nas devidas proporções, os de caráter pedagógico.

II. Sobre os professores em exercício:

a) que se regularizassem os contatos entre os professores do ensino secundário e universitários, devendo aqueles concorrer a cursos de aperfeiçoamento (regulares e especiais) para o qual deveriam incrementar os meios destinados a esse fim, tais como bolsas no país e no estrangeiro.
b) que se tomassem medidas para elevar o nível econômico e social do professor titulado de ensino médio, por exemplo, garantindo sua estabilidade, equiparando seu salário aos de outros profissionais com mesmo nível de formação acadêmica, definindo regimes de ascensão na carreira, levando em conta os anos de serviço, as atividades de aperfeiçoamento, as publicações, estabelecendo ano sabático, regime de dedicação exclusiva, diminuição de horas de trabalho.
c) que se proporcionasse o máximo de possibilidades (bolsas, subsídios etc) para que os professores do ensino médio, sem títulos e atualmente em exercício, pudessem titular-se e, por conseguinte, entrar legalmente na carreira. (Fehr, 1969, p. 183)

O treinamento de professores para ensinar Matemática Moderna

Em 1961, na Segunda Conferência, realizada em Lima (Peru), cinco anos após o encontro de Bogotá, a Professora Martha de Souza Dantas, da Universidade Federal da Bahia, abordou o tema: “O treinamento de professores no Brasil” (1966, p.166). Inicialmente explicou que se referia ao treinamento dado aos professores do ensino secundário pelas universidades e cuja finalidade era propiciar-lhes métodos modernos. A oradora lembrou que em 1959, no terceiro Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática:

> ouviram-se críticas severas à educação matemática dada nas faculdades de filosofia – mesmo nas melhores– e entre as conclusões do congresso incluímos um pedido ao Ministério da Educação e Cultura para que se estudasse uma nova estruturação dos cursos de matemática nas faculdades de filosofia Foi feito também um pedido que estas faculdades

> incluíssem em seus currículos um estudo de matemática moderna para os professores secundários. [...] Por volta do terceiro Congresso Nacional havíamos tomado conhecimento da situação do ensino de matemática no Brasil, e uma avaliação das condições da equipe de ensino revelou que estávamos completamente atrasados. (DANTAS, 1966, p.168)

Dantas criticava a Lei de Diretrizes e Bases- Lei 4024/61, já em vigor nessa época, alegando que a mesma não estimulava o professor do secundário a buscar especialização. Lembrava que enquanto a educação de professores continuava problemática no Brasil, havia uma insistência nacional e internacional por uma instrução que preparasse melhor os jovens para as exigências do amanhã. Além de complexo, a oradora considerava problemático preparar os professores para ensinar matemática moderna. Dizia que: “em alguns casos seria necessário corrigir inconveniências; na maioria deles, fornecer uma educação especial; em outros, preencher um vácuo absoluto” (p. 168) .

Prosseguindo em seu discurso, Dantas mencionou experiências concretas em andamento no Brasil, como os cursos realizados em São Paulo pelo GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), as ações desencadeadas pelo Centro de Pesquisa e Orientação Educacional (CPO) no Rio Grande do Sul, os cursos promovidos no Rio de Janeiro com o apoio do Ministério da Educação e Cultura, e os desenvolvidos a partir de 1964 na Bahia, patrocinados pela Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste (SUDENE). Referiu-se aos seis Centros para o Ensino de Ciências, criados pelo Ministério da Educação e Cultura para treinar professores nos Estados do Rio Grande do Sul, São Paulo, Guanabara, Minas Gerais, Pernambuco e Bahia. Informou que o programa desses cursos, com duração de um mês, abordava tópicos da teoria dos conjuntos, lógica matemática, probabilidade, álgebra moderna e álgebra linear. Observou, ainda, que alguns desses cursos incluíam estudos dirigidos e exames de aptidão. Mencionou, também, cursos realizados no Ceará e na Paraíba.

Concluindo seu discurso, a oradora ponderou que dada a ausência de um plano uniforme para preparação dos professores secundários, “ há uma compreensão tácita sobre como deveria ser realizado este trabalho e há mais ou menos uma educação básica comum" (172). Ao finalizar acrescentou: "A maioria dos nossos professores precisa, acima de tudo, sobrepujar as deficiências de sua educação; isto é, aprender a raciocinar bem, abstrair e generalizar e, portanto, poder receber novas informações. [...] é necessário tomar muito cuidado na preparação de tudo que será apresentado ao professor, já que uma instrução abstrata demais pode a qualquer momento desencorajá-lo definitivamente" (p. 173).

O êxito da Matemática Moderna no Brasil

Na conferência realizada em Lima no Peru, Osvaldo Sangiorgi apresentou o tema: "Progresso do ensino da matemática no Brasil" e exaltou o sucesso que o movimento vinha alcançando no Brasil. Dizendo sentir-se orgulhoso pela fase de modernização em que se encontrava o Brasil, em relação ao ensino da Matemática, o orador falou da dificuldade para precisar o alcance desse progresso nos 22 estados, 4 territórios e um Distrito Federal, portanto, na vastidão territorial brasileira. Sangiorgi apresentou números relativos a um trênio de progresso, mostrando que de 1962 a 1965, foram criadas no Brasil 33 Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras, com Departamentos de Matemática; 12 Institutos de Matemática; 6 Centros de Treinamento para Professores de Ciências e Grupos de Estudo para o Ensino de Matemática. Informou também que durante esse período, 6672 professores secundários fizeram Cursos de Aperfeiçoamento em Matemática; a taxa percentual de professores de Matemática com ensino superior passou de 22% para 47% em três anos. Só no Estado de São Paulo, dos 6276 professores de Matemática, 63% possuíam grau universitário.

Apesar de todo esse progresso, o orador salientou o *déficit* de docentes licenciados e fez referências aos cursos de 120 horas, realizados em várias regiões do país, pela Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES) e voltados para o preparo dos professores ainda não licenciados.

Reafirmando as palavras do matemático argentino na Conferência de Bogotá[2], Sangiorgi justificou a necessidade de os cursos aos professores secundários serem ministrados pelos matemáticos das Universidades.

Mencionou o papel dos 13 Institutos de Pesquisa Matemática, enquanto "fonte de alimentação dos matemáticos brasileiros" e o alto nível dos Colóquios Brasileiros de Matemática, promovidos pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Observou que:

> [...] nos Colóquios de 1961 e 1963 já foram realizadas Sessões de estudos destinadas ao ensino da matemática na escola secundária e sua articulação com o ensino superior. Nessas sessões é que se precisa justamente o que se entende por matemática, a fim de que sejam assessorados os Grupos de Estudos que orientam os professores seciundários. (SANGIORGI, 1966, p. 80)

Considerou os Congressos Brasileiros do Ensino da Matemática como um espaço de diálogo entre os professores universitários e secundários, "uma mola propulsora dos progressos apresentados pela matemática ensinada na escola secundária" (p. 80). Destacou o IV Congresso realizado em 1962 em Belém (Estado do Pará)[3] como "a maior fonte de emulação para alguns professores que embora estivessem preparados para a renovação–não o faziam por pura timidez" (p. 81).

O orador ainda considerou como sinais de progresso, os grupos de estudos criados em diversos estado brasileiros, as publicações circulavam no país acerca da Matemática Moderna, a efetiva programação adotada desde 1963 e, em vigor em "70% dos estabelecimentos secundários brasileiros" (p. 82), as Classes Experimentais orientadas pelos Grupos de Estudo em algumas capitais de estados brasileiros, além das iniciativas da Secretaria de Educação de São Paulo, como os

[2] Santaló afirmara na Primeira Conferência que: "Lo que necesita de um bueno profesor de matemáticas és principalmente, y sobre todo, saber matemáticas y quanto más mejor!" (FEHR, 1969, p.63).

[3] Vale lembra que nesse Congresso, o GEEM (Grupo de Estudo do Ensino da Matemática), coordenado por Sangiorgi, apresentou sua primeira utilização da Matemática Moderna no ensino secundário: " Sugestões para um programa moderno de matemática no curso secundário" , levantando críticas na época.

programas de TV Escolar que ofereciam aulas de Matemática Moderna para professores e alunos.

Outros fatos relevantes mencionados pelo orador para descrever o progresso do MMM no Brasil, foram: as Reuniões promovidas pela Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC) envolvendo professores universitários especialistas em ciências de um modo geral (p. 87); os cursos e as publicações relativas à matemática, do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura –IBECC– Unesco, Secção de São Paulo; o Primeiro Curso de Atualização em Matemática Moderna para Pais, realizado com grande sucesso pelo Ginásio Estadual Vocacional de São Paulo; a 1ª Olimpíada de Matemática Moderna destinada a alunos da escola secundária, realizada na Universidade Mackenzie (São Paulo); a exigência da Matemática Moderna nos Concursos de Ingresso para o Magistério Secundário Oficial e a presença dos conteúdos modernos nas provas de Matemática dos Exames Vestibulares.

Para finalizar seu discurso, o orador observou que o progresso mencionado não era programado mas um “progresso em disparada” feito pelo “idealismo de um grande número de professores brasileiros que honram o país” (p. 88).

As resoluções da Segunda Conferência, dirigidas aos Ministérios da Educação, Universidades, Organizações Internacionais, OEA, UNESCO, AID, e às Fundações de Amparo à Pesquisa em Educação Matemática, consideravam a necessidade de expandir e ampliar as recomendações de Bogotá, mesmo reconhecendo o acato de muitas delas. A Comissão justificou que:

> na América Latina, como um todo, e com maior ou menor intensidade em cada país, por diversas razões os professores de matemática continuam a ter uma preparação deficiente; que há uma falta de professores de matemática que tenham condições de escrever bons livros-texto e sejam capazes de participar ativamente da redação dos currículos. (FEHR, 1969, p. 319)

Sobre o aperfeiçoamento dos professores secundários em exercício, a comissão recomendava que fossem organizados programas e intensificados os cursos já existentes e salientava a necessidade de se criar centros permanentes em cada país ligados às universidades e o uso dos meios tecnológicos disponíveis para o aperfeiçoamento de professores em grande escala.

Considerações Finais

Em meio as descrenças de Catunda, a cautela de Dantas e o entusiasmo de Sangiorgi, um fato real é que o movimento fracassou no Brasil. Por que teria fracassado se foram propostas soluções emergenciais para a formação dos futuros docentes e para a atualização dos docentes já em exercício?

Ao contrário de Sangiorgi, o discurso de Catunda não só mostrou um quadro precário em relação à formação do professor secundário de Matemática no Brasil dos anos 60 como apontou lacunas desse empreendimento, sobretudo, na formação básica dos licenciandos e nas ações dos formadores para tal empreendimento.

A cautela de Dantas, em relação aos cursos emergenciais de “treinamento” oferecidos aos professores em serviço, chama a atenção para a inexpressiva discussão das questões pedagógicas, fator que aliado à precariedade do sistema educacional brasileiro de então, possivelmente colocava em risco, desde o início, o tão arrojado intento de modernização do ensino da matemática secundária.

Ao que tudo indica tanto os discursos sobre formação e treinamento de professores em serviço como as recomendações das Conferências, subestimaram a força da tradição pedagógica enraizada na cultura escolar, como lembra Chervel (1990), ao referir-se à história das disciplinas escolares.

> Enquanto as finalidades se impõem à escola desde decênios, a fortiori desde séculos, é através de uma tradição pedagógica e didática complexa, na verdade sofisticada, minuciosa, que elas chegam aos docentes. E não é raro ver a massa de práticas pedagógicas acumuladas

> numa disciplina ocultar, para numerosos professores, alguns dos objetivos últimos que eles perseguem. (CHERVEL, 1990, p.191)

Como revelam as conferências, a par da formação precária de futuros professores realizada pelas universidades, o movimento parece ter conduzido a preparação dos professores em serviço, por um explícito divórcio entre a teoria matemática e prática educativa. Observa-se uma ausência de problematização das práticas docentes sedimentadas em mitos e preconceitos incrustados nas concepções veiculadas nos cursos de formação, como a visão bastante generalizada na cultura escolar de que para ensinar matemática basta apenas dominar o conteúdo matemático.

A insuficiente problematização do “como se ensina” e do “para quem se ensina” atesta o lugar secundário que a formação pedagógica, tão importante como necessária para saber ensinar matemática, ocupou na disseminação do movimento. Qual referencial que orientou a formação/preparação dos professores para o ensino da Matemática Moderna: a prática do matemático ou do professor?

O vocabulário corrente utilizado pelos formadores, durante o movimento, como treinar, aperfeiçoar, capacitar, são reveladores indícios de que a educação, pedagogia e didática, não se constituíram espaços integradores nos cursos de formação e preparação de professores brasileiros durante o MMM. A matriz pedagógica dos formadores não teria contribuído para reforçar a vigente desvalorização do professor de Matemática ?

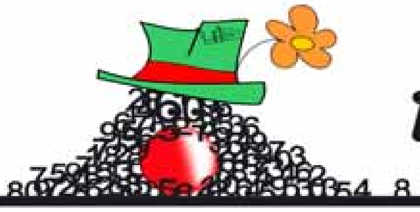
Indagar sobre a concepção pedagógica veiculada nos cursos ministrados pelos formadores, ao longo de um movimento de tamanha envergadura, apresenta-se como uma instigante questão acerca das tradições formativas e que certamente antecede qualquer inferência em relação à incapacidade dos professores para ensinar Matemática Moderna.

Bibliografía

- Catunda, O. La preparacion de professores de matemáticas. Fehr, H.F (editor). **Educacion de las Matematicas em las Américas. Um informe de la Primeira Conferencia Interamericana sobre la Educacion de lãs matemáticas**. Columbia University: Bureau os Publications, 1962, p. 64-78.
- Chervel, A. A história das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Revista Teoria & Educação**. Porto Alegre,1990, n.2, p.177-229.
- Dantas, M.M.S. Treinamento de Professores no Brasil. Fehr, H.F (Org.). **Educação Matemática nas Américas. Relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática**. Tradução de Adalberto Bergamasco e L.H. Jacy Monteiro. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969, p.166-173.
- Fehr, H.F (editor). **Educação Matemática nas Américas. Um informe de la Primeira Conferencia Interamericana sobre la Educacion de las matemáticas**. Columbia University: Bureau os Publications, 1962.
- Fehr, H.F (Org.). **Educação Matemática nas Américas. Relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática**. Tradução de Adalberto Bergamasco e L.H. Jacy Monteiro. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.
- Sangiorgi, O. Progresso do Ensino da Matemática no Brasil. Fehr, H.F (Org.). **Educação Matemática nas Américas. Relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática**. Tradução de Adalberto Bergamasco e L.H. Jacy Monteiro. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969, p. 76-88.
- Santalo, L.A. La formacion de los profesores de matemáticas. Fehr, H.F (editor). **Educação Matemática nas Américas. Um informe de la Primeira Conferencia Interamericana sobre la Educacion de las matemáticas**. Columbia University: Bureau os Publications, 1962, p.54-63.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 257-260
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

Los teoremas malditos

Las reformas de las últimas décadas en educación, han provocado que en la enseñanza no universitaria, al menos en España, los teoremas matemáticos hayan quedado reducidos a un mero papel testimonial. Los pocos teoremas que han conseguido sobrevivir en los curricula, sirven como meros enunciados que utilizar en la resolución de problemas, pero sin buscar una lógica o un razonamiento deductivo que pueda servir para mejorar el desarrollo mental de los que lo utilizan. Sin embargo, en el mundo universitario la situación cambia drásticamente.

Todas las personas que han estudiado una carrera universitaria de Ciencias y se han enfrentado a unas matemáticas superiores, recuerdan, unas con nostalgia y otras con horror, los teoremas matemáticos con los que tuvieron que pelear durante sus estudios. Había teoremas en los que lo complicado era entender porqué había que demostrar algo que era evidente. Otros, que bajo un enunciado aparentemente simple y claro, escondían un objetivo (coger desprevenido al estudiante), encerrarlo en un desenfreno de épsilon y deltas junto con series indescriptibles y aproximaciones propias de las más alucinantes pesadillas. También existían otras demostraciones, donde lo importante era tener buena memoria para recordar todos los teoremas a los que se citaban en el desarrollo, que más que un proceso lógico deductivo parecía un glosario de matemáticos famosos. Por supuesto, también existían teoremas con sentido y demostraciones con una lógica aplastante, pero siempre parecían que eran los menos.

Además de lo dicho, existían otros teoremas que normalmente no eran enseñados por los profesores, que incluso llegaban a afirmar que no existían, pero que circulaban de forma clandestina entre los alumnos de ciencias y que les hacía replantearse el orden establecido por sus mayores. Nos referimos, claro está, a los **Teoremas Malditos.**

Estos teoremas solían contradecir los patrones clásicos de la enseñanza y socavaban los propios cimientos de la Ciencia Matemática. Hoy queremos recoger en esta sección algunos de ellos.

Vamos a empezar con la parte más elemental de la matemática: la geometría clásica. Todos los que tenemos unos conocimientos amplios de esa materia sabemos el impacto tan brutal que significó la aparición de las geometrías no euclidianas, y cómo Lobachevski acabó con el monopolio que tenía Euclides en la enseñanza a través de su colección de libros de texto. Dada la tremenda revolución que las diversas geometrías no euclidianas han provocado en la enseñanza, no es de extrañar que los resultados que incluiremos en esta ocasión no quieran ser reconocidos por el Olimpo Matemático como ciertos. Los teoremas que veremos a continuación, atacan precisamente el punto más débil de la axiomática de Euclides, su axioma de las paralelas.

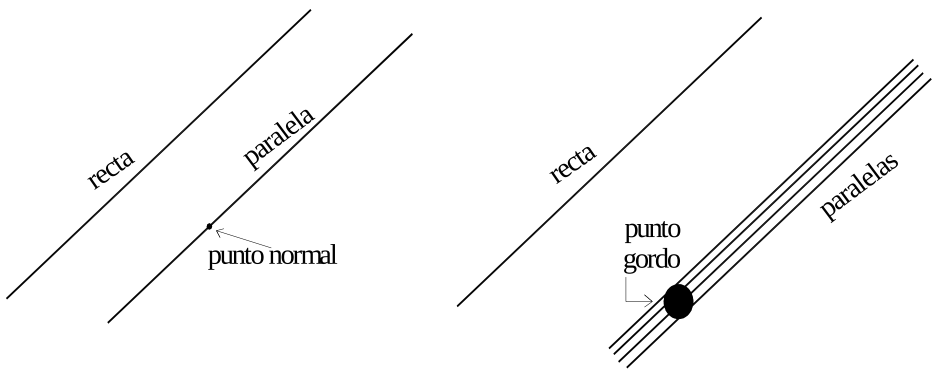
Como no queremos poner en un aprieto a nuestros queridos lectores, no vamos a meternos en farragosos desarrollos demostrativos, sino que sólo pasaremos a enunciar los teoremas. Estamos seguros de que la claridad de exposición y la simplicidad de los resultados, será suficiente para reconocer la importancia de estos enunciados. De todos modos, a modo de ayuda, añadiremos una representación gráfica que, como todo el mundo sabe salvo Diedonné, es imprescindible en Geometría.

Teorema del punto gordo

Enunciado

El número de paralelas a una recta dada que pueden trazarse por un punto exterior a la recta, depende de lo gordo que sea el punto.

Comprobación visual

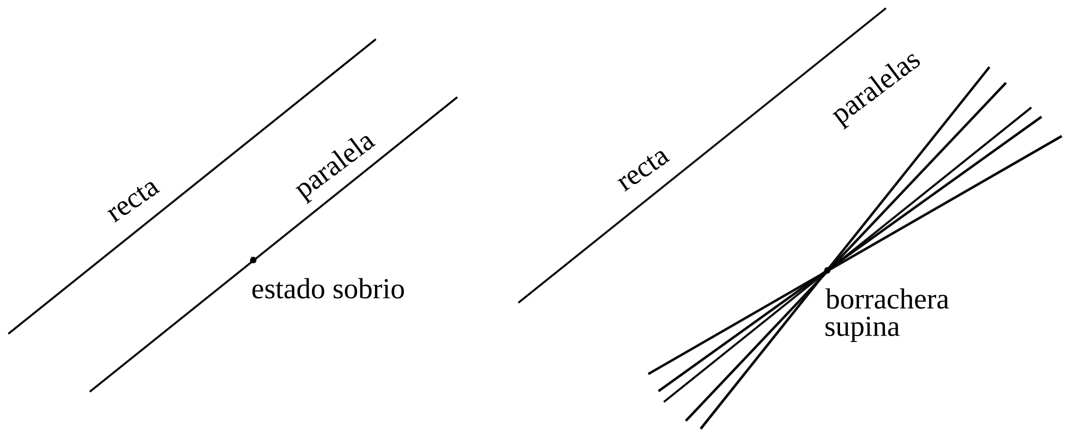


Corolario etílico

Enunciado

El número de paralelas a una recta dada que pueden trazarse por un punto exterior a ella, depende del estado de embriaguez del trazador.

Comprobación visual

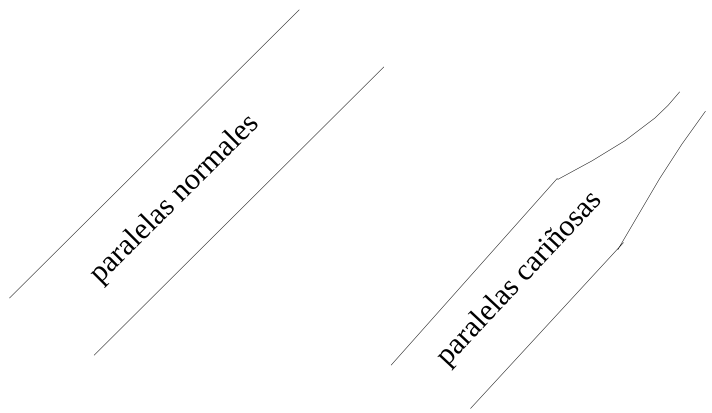


Postulado de las paralelas cariñosas

Enunciado

Dos líneas paralelas guardan siempre la misma distancia entre ellas, salvo que se tengan mucho cariño.

Comprobación visual

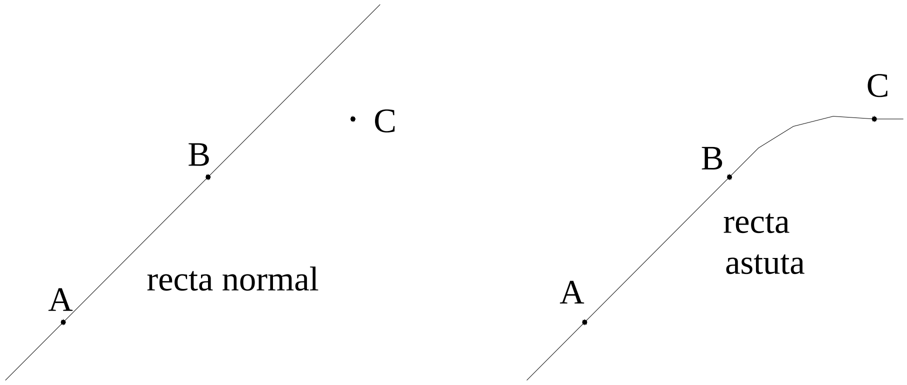


Teorema de la recta astuta

Enunciado

La única recta que puede pasar por tres puntos no alineados, es la conocida recta astuta.

Comprobación visual

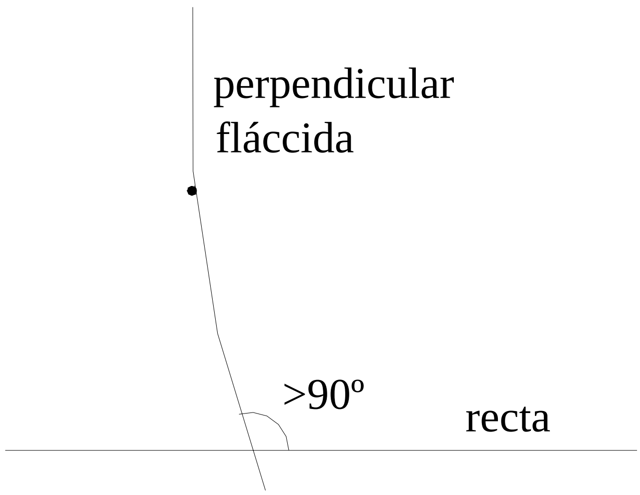


Teorema del ángulo intersección

Enunciado

Toda perpendicular a una recta dada, la corta formando dos ángulos de 90º salvo en el caso de la recta fláccida.

Comprobación visual



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 261-264
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

¿Cuál es el mayor valor que puede tener una función real, de dos variables reales, considerando valores de éstas en un determinado conjunto?

¿Será posible plantear ejemplos concretos de este problema para alumnos de secundaria o de primaria?

Tal como está propuesto, es un problema de optimización muy general, en el que pueden considerarse problemas de programación lineal y problemas de programación no lineal.

Nos hace recordar el teorema de Weierstrass según el cual el máximo existe si la función es continua y si el conjunto considerado es cerrado y acotado (y obviamente no vacío).

En esta perspectiva, es natural pensar que es un problema cuyos casos concretos solamente se pueden estudiar en cursos universitarios. Así, un ejemplo concreto es el siguiente problema:

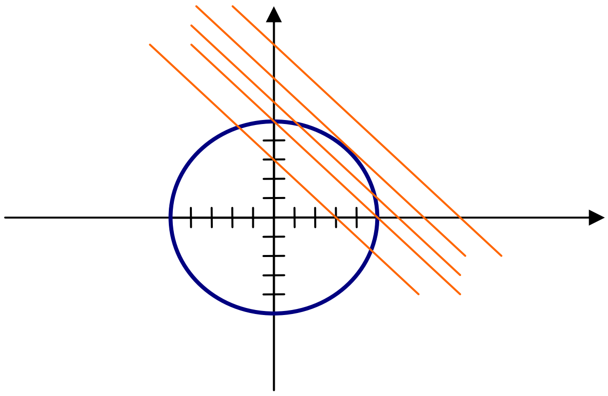
Encontrar el mayor valor que puede tener la función $f(x, y) = x + y$, considerando que (x, y) son puntos del conjunto determinado por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Hay varias maneras de resolver este problema, pero siempre será muy útil tener en cuenta que:

- La función que se desea maximizar (*función objetivo*) es una función lineal y que sus curvas de nivel son rectas.
- El o los puntos que den el valor máximo a la función, deben estar en una circunferencia de radio 5 (*la región factible*).

Con estas consideraciones geométricas, una forma sencilla y visualizable de resolver el problema es mostrando en un mismo gráfico la circunferencia de radio 5 y varias rectas de nivel de la función objetivo. A continuación se hace tal representación:



Las rectas corresponden a diversos valores de $x + y$. Podemos percibir, por ejemplo, la recta $x + y = 3$ que pasa por los puntos (0, 3) y (3, 0) y que es secante a la circunferencia; también la recta $x + y = 5$ que pasa por los puntos (0, 5) y (5, 0) y que, como la anterior, es secante a la circunferencia. Los valores de K son más altos cuanto más hacia el noreste (hacia arriba y hacia la derecha) estén ubicadas las rectas.

Como el problema es hallar el mayor valor de $x + y$, cuando (x, y) es un punto de la circunferencia, se ve gráficamente que el mayor valor se hallará cuando la recta y la circunferencia sean tangentes.

Tenemos entonces **un problema de optimización que puede ser usado en aulas de secundaria.** A continuación mostramos dos soluciones del problema interrelacionando argumentos algebraicos y geométricos usados en la secundaria:

Solución 1

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x + y = \mathrm{K}$$

donde K es una constante cuyo valor debe ser el mayor posible, pero tal que el conjunto solución del sistema sea sólo un punto. Esto se consigue examinando la ecuación de segundo grado en la variable x que resulta al reemplazar $y = \mathrm{K} - x$ en la ecuación de la circunferencia. Debe exigirse que el discriminante – que dependerá de K – sea cero. Haciendo cálculos se obtiene que el discriminante es $-4K^2 + 200$, y en consecuencia $K = 5\sqrt{2}$.

Solución 2

Observar que en el punto de tangencia la recta y el radio deben ser perpendiculares. Como las rectas tienen pendiente -1 (determinan triángulos rectángulos isósceles con los ejes coordenados), el radio debe tener pendiente 1 y en consecuencia en el punto de tangencia se debe tener $x = y$. Así

$$2x^2 = 25$$

y concluimos fácilmente que $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, con lo cual el mayor valor de $x + y$ es $5\sqrt{2}$.

Volvamos ahora a la pregunta hecha cuando comenzamos a analizar el problema inicial.

¿Será Imposible una forma concreta del problema en primer grado de primaria?

Respondemos con el siguiente problema, que puede ser resuelto por niños de primer grado:

> *Jorge escribe en la pizarra los números 4, 7, 3, 8, y 5. ¿Cuál es la mayor suma que se puede obtener sumando dos de los números que escribió Jorge?*

En esta formulación no está explícita la función objetivo, pero podemos darnos cuenta que está presente: es también la función $f(x, y) = x + y$. Es evidente que el conjunto factible es {4, 7, 3, 8, 5}. Ciertamente no es necesario usar estos términos al trabajar con los niños, pero es muy importante que los profesores tengan una visión amplia del contexto matemático del problema.

A continuación mostramos otras dos formas de presentar, esencialmente, la misma dificultad, para niños de primaria. La segunda sugiere trabajar dinámica y participativamente con los niños.

I) *En el siguiente cuadro, se indica cuantas canicas tienen Abel, Bruno, Carlos, Daniel y Esteban:*

Abel	*Bruno*	*Carlos*	*Daniel*	*Esteban*
4	*7*	*3*	*8*	*5*

Si se reúnen las canicas de dos de estos niños ¿Cuál es el mayor número de canicas que se pueden obtener?

II) *Abel, Bruno, Carlos, Daniel y Esteban forman el equipo A y Róger, Samuel, Tomás, Ulises y Víctor forman el equipo B. El profesor tiene una bolsa con muchas canicas y nueve papelitos envueltos, en los que antes ha escrito los dígitos del 1 al 9. Cada alumno del equipo A saca un papelito al azar y el profesor le entrega tantas canicas como indica el número en tal papelito. Cada papelito se utiliza una sola vez. Se hace lo mismo con los alumnos del equipo B, haciendo intervenir todos los papelitos al inicio. Así, cada integrante del equipo tiene un determinado número de canicas, como se indica en el siguiente cuadro:*

A					*B*				
Abel	*Bruno*	*Carlos*	*Daniel*	*Esteban*	*Róger*	*Samuel*	*Tomás*	*Ulises*	*Víctor*
4	*7*	*3*	*8*	*5*	*2*	*9*	*4*	*3*	*5*

Cada equipo debe seleccionar dos jugadores para que jueguen con los dos jugadores seleccionados en el otro equipo. Si para el juego se necesita tener el mayor número posible de canicas, ¿quiénes deben ser seleccionados de cada equipo? ¿Con cuántas canicas en total se presentarán los seleccionados de cada equipo?

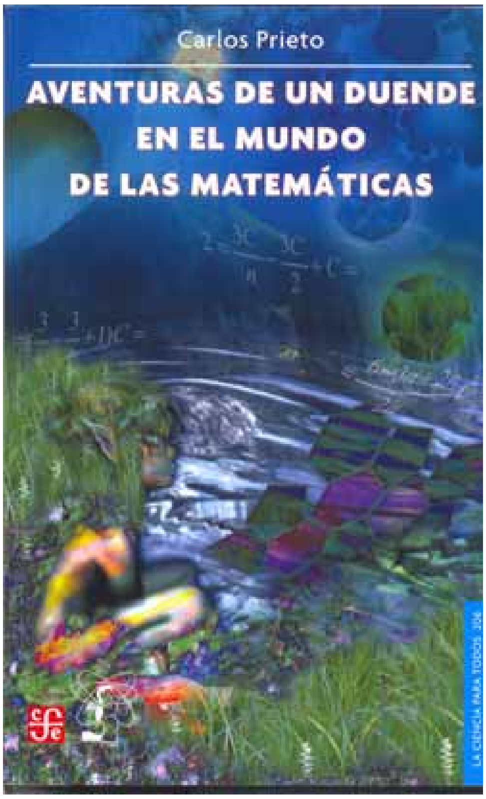
Un trabajo interesante para los profesores es motivar a los niños para que justifiquen que la elección que hicieron en cada equipo es realmente la mejor. Es una ocasión para hacer varias sumas muy sencillas, buscar la manera de hacerlas ordenadamente (por ejemplo haciendo un cuadro para registrar todas las parejas de sumandos y las sumas que se van obteniendo), y practicar la relación "mayor que", al ir comparando los resultados.

Vemos, así, que es posible trabajar problemas de optimización desde el primer grado de primaria y tener ocasiones de estimular el pensamiento científico, tratando adecuadamente la información y justificando afirmaciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Marzo de 2007, Número 9, páginas 265-266
ISSN: 1815-0640



Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas

Autor: Carlos Prieto

Edita: Fondo de Cultura Económica, México

Año: 2005

159 páginas

ISBN: 968-16-775-4

El libro “Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas” escrito por el matemático mejicano Carlos Prieto, está estructurado en trece aventuras que tienen como hilo conductor a un duende, a saber:

“Los sólidos platónicos: son solo cinco”; “Caos y belleza de los fractales”; “Año 2001: comienza un nuevo siglo y un nuevo milenio”; “El enigma del milenio: el último teorema de Fermat"; "¿Qué forma tiene el universo? Parte I. La forma de la Tierra"; "¿Qué forma tiene el universo? Parte II. La forma del espacio-tiempo"; "Crecimiento y decaimiento: el misterio de la exponencial"; "Arreglos geométricos de números"; "Las matemáticas y el arte ¿se llevan bien?", "Cuadrados mágicos"; "Nudos de colores"; "Nudos de polinomios"; "Nudos y biología molecular".

Podríamos decir que su estilo se encuentra a medio camino entre los libros *"El diablo de los números"*, de Hans Magnus Enzensberger y *"El universo de las Matemáticas"*, de William Dunham, ya que los inicios de los capítulos están novelados, pero después hay un desarrollo con un espíritu esencialmente divulgador. Además, los capítulos se acompañan de pequeñas bibliografías de los matemáticos que aparecen citados.

El orden elegido para los capítulos puede parecer aleatorio (¿quién discute a un duende la elección y el orden?), pero de manera intencionada o no, ha conseguido alternar temas de más sencilla compresión, con otros de mayor grado de dificultad.

Los conocimientos necesarios para leer el libro con comodidad pueden variar mucho de unos temas a otros. Hay temas que pueden seguirse con conocimientos casi nulos de matemáticas, como "Año 2001: comienza un nuevo siglo y un nuevo milenio", mientras otros presentan un grado de dificultad relativamente alto, como "Nudos y polinomios".

Este último hecho, lo hace, posiblemente, un libro recomendable para profesores de Matemáticas, y de Ciencias en general, ya que algunos temas se interrelacionan con contenidos de otras ciencias, como física, química o biología. Además, la mitad de los capítulos son asequibles a alumnos de bachillerato y se pueden leer de manera independiente.

Este libro contiene, además de los temas clásicos en libros de divulgación matemática, como problemas de tipo geométrico, los fractales, el último teorema de Fermat, la relación entre las matemáticas y el arte, otros menos usuales, como la forma del universo o la teoría de nudos.

Como conclusión podríamos decir que es un libro que anima a leerlo, posiblemente saltándose algunas aventuras, dependiendo del nivel de conocimiento matemático de cada uno, en una primera lectura. Para después, intentar completarlo en una segunda, al darse cuenta que seguramente sólo se ha tenido dificultades en tres o cuatro de las trece aventuras.

Reseña: Antonio Bonilla
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

Marzo de 2007, Número 9, páginas 267-270
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca

Leer sobre Arquímedes

Papiro:

Lámina flexible sacada del tallo de la planta con el mismo nombre, que los antiguos empleaban para escribir.

Pergamino:

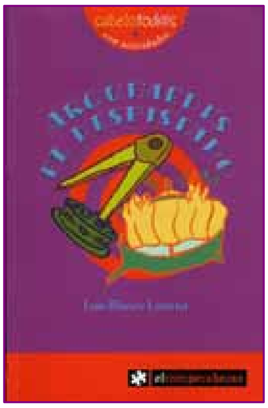
Piel de oveja, cabra... preparada para escribir en ella.

Palimpsesto:

Manuscrito en el que se ha borrado el texto primitivo para volver a escribir otro nuevo.

Título: *Arquímedes el despistado.*
Autor: *Luis Blanco Laserna.*
Editorial: *El rompecabezas. (www.elrompecabezas.com).*
Colección: *Sabelotod@s.*
Número de páginas: *121.*

Arquímedes el despistado



He aquí un pequeño pero interesante libro que se compone de 9 capítulos y un epílogo. Presenta también algunas actividades en su final.

Los protagonistas de este libro son el pequeño Andrea y su abuelo, que es quien cuenta las historias sobre Arquímedes al niño. Andrea se encuentra de vacaciones en casa de sus abuelos, en Siracusa (Sicilia). Siracusa es probablemente el lugar en el que nació Arquímedes, alrededor del año 287 a.C.

A partir de este pretexto, y a lo largo de los diferentes capítulos del libro, se narran de manera amena las anécdotas más conocidas de la vida de Arquímedes: las que tienen que ver con las poleas, con la palanca y con los espejos; su tornillo elevador de líquidos, las máquinas de guerra que diseña para hacer frente a los romanos cuando asediaron Siracusa, la famosa anécdota de la bañera... También se hace referencia a sus viajes y a la correspondencia que mantiene con sus amigos, Eratóstenes entre otros. Se narra, además, el episodio de la muerte de Arquímedes a manos de un soldado romano.

En uno de los capítulos se cuenta como llegó hasta nosotros una de sus obras, la que se denomina ***El Método***.

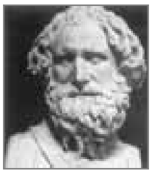
Arquímedes escribió en rollos de papiro *el método* que usaba para hacer sus descubrimientos. Esta importante obra se perdió, pero hace tan sólo cien años apareció una copia de la misma que pasó por múltiples vicisitudes.

El trabajo de Arquímedes se transmitió en copias sucesivas hasta la Edad Media. Alrededor del año 1000 un escriba de Constantinopla hizo una copia en *pergamino* y la encuadernó formando un libro. Pero en el año 1200 un monje cristiano desmontó las hojas para reutilizarlas, limpiándolas y escribiendo un libro de oraciones sobre lo que ya había sido escrito. Este hecho permitió que se conservara la redacción inicial.

En 1906, un estudioso danés llamado Heiberg, localizó el *palimpsesto* con las obras de Arquímedes en la biblioteca de la iglesia del Santo Sepulcro de Constantinopla. Fotografió sus páginas y después publicó un libro con su trascripción.

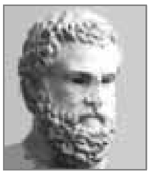
Un año después alguien robó el manuscrito y no volvió a aparecer hasta 1930 cuando una coleccionista francesa de antigüedades lo compró en Estambul. En 1998 se vendió en subasta pública en la casa Christie's de Nueva York y allí lo compró, por más de dos millones de dólares, un millonario desconocido que lo cedió al Museo Walters de Baltimore en Estados Unidos.

Arquímedes el despistado me pareció un libro muy entretenido y muy interesante dado que su lectura llega a enganchar. Además, resultan también muy interesantes las actividades que vienen al final. Os animo a que lo leáis.



Arquímedes de Siracusa
287-212 a.C.

G. H. Hardy
7-2-1877/1-12-1947



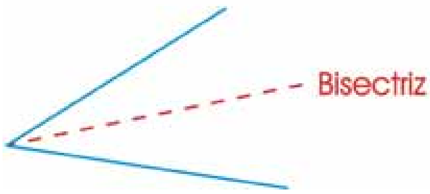
Esquilo
525-456 a.C.

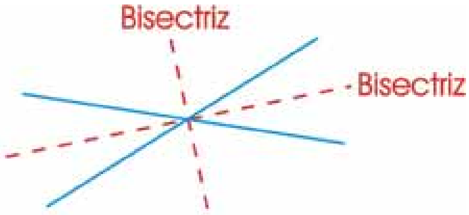
Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren y las ideas matemáticas no.
La "inmortalidad", signifique lo que signifique, puede ser una palabra absurda, pero un matemático tiene, probablemente, la mejor oportunidad de alcanzarla.

G. H. Hardy.

BISECTRICES EN UN TRIÁNGULO

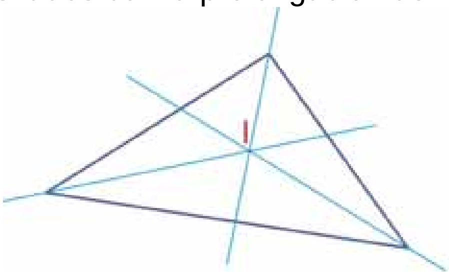
La ***bisectriz de un ángulo*** es la recta que, pasando por su vértice, lo divide en dos partes iguales; es decir, el *lugar geométrico* de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

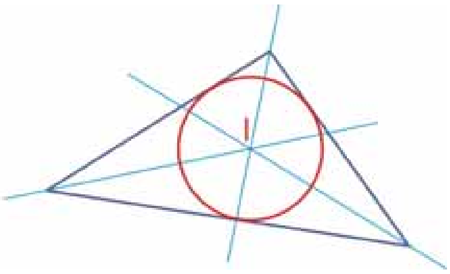




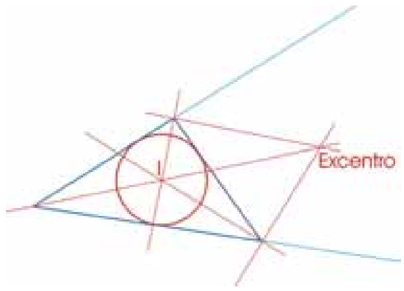
Solemos dar por supuesto que cuándo hablamos de las ***bisectrices de un triángulo*** nos estamos refiriendo a las rectas que, pasando por cada vértice, dividen a los ***ángulos interiores*** en dos partes iguales. Incluso sabemos que esas tres bisectrices se cortan en un punto llamado ***incentro*** pues resulta ser el centro de la circunferencia *inscrita*.

Todo esto está muy bien, pero ¿quién se para a pensar, con diligencia similar, en los ***ángulos exteriores*** del triángulo? Es decir, aquellos que determinan cada uno de los lados con la prolongación del otro.

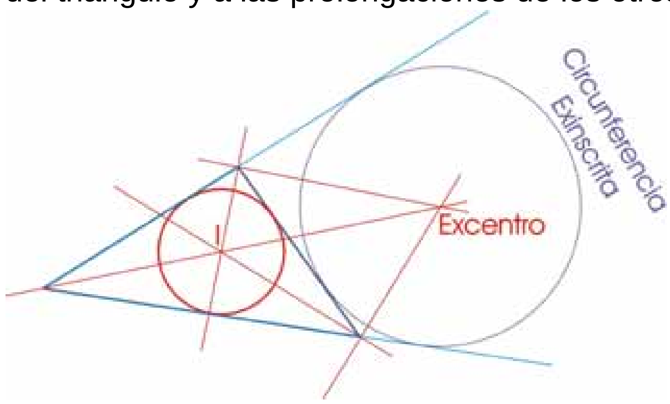




¿Qué ocurre con las *bisectrices* de los *ángulos exteriores*? Observemos en primer lugar que, para cada vértice, las correspondientes bisectrices interior y exterior son **perpendiculares**. Además, cada dos bisectrices exteriores se cortan con la bisectriz interior correspondiente al tercer vértice en un punto común. Obtenemos así tres puntos que se denominan ***excentros*** del triángulo.



Cada *excentro* es el centro de una circunferencia llamada ***circunferencia exinscrita*** al triángulo, que tiene la propiedad de ser tangente a un lado del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos.



Isabel S. C. 3º ESO.

Herón de Alejandría

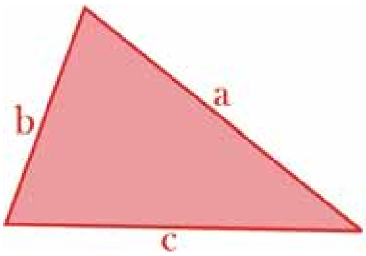
En la época histórica en la que pretendemos movernos pueden encontrarse diversas informaciones referidas a distintos personajes con el nombre de Herón. Nosotros queremos hacer mención a un importante geómetra, distinguido matemático y científico experto en mecánica.

Herón de Alejandría nació probablemente alrededor del año 10 en Alejandría (Egipto), donde llevó a cabo la mayor parte de su trabajo, y falleció hacia el año 75 también en Egipto. Es razonable pensar que habría trabajado en el museo de Alejandría dando cursos de matemáticas y mecánica.

Escribió por lo menos 13 obras (algunas de ellas son claramente libros de texto) sobre mecánica, matemáticas y física en general. Inventó varios instrumentos mecánicos, gran parte de ellos para uso práctico, diseñando más de 100 máquinas con diferentes utilidades.

Sin embargo, es conocido sobre todo como matemático, tanto en el campo de la geometría (cálculo de áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares y áreas y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros conos y esferas) como en el de la geodesia (rama de las matemáticas que se encarga de la determinación del tamaño y configuración de la Tierra). Herón trató los problemas de las mediciones terrestres con mucho más éxito que cualquier otro de su generación. También inventó un método de aproximación a las raíces cuadradas y cúbicas de números que no las tengan enteras.

En su obra llamada *"La Métrica"*, además de hablar de polígonos, volúmenes de cuerpos sólidos y problemas de geometría, hace mención a la famosa fórmula para calcular el área de un triángulo en función de sus lados:



$$\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

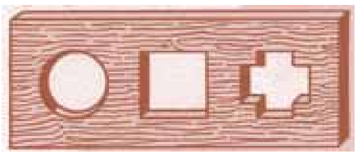
$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Antía C. S, 3º ESO.

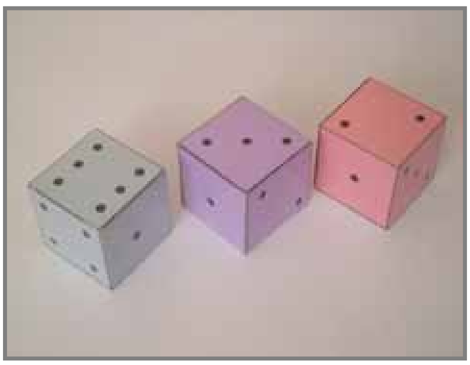
PENSAR ES DIVERTIDO

Tres en uno

¿Seremos capaces de diseñar una pieza que encaje en estos tres orificios?



¿Cuál de estos dados está bien construido?



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 271-272
ISSN: 1815-0640

Información

XII CIAEM – 15 al 18 de julio de 2007

Estimado Colega

Distraigo un momento tu atención para hacerte llegar un afectuoso saludo del **Comité Interamericano de Educación Matemática** (**CIAEM**), en particular de su Presidenta María Salett Biembengut (BRASIL), el Primer Vicepresidente Angel Ruiz (COSTA RICA), el Secretario Patrick Scott (USA) y de quien suscribe.

También nos dirigimos a tí para informarte que conjuntamente con la **Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas** (**ANPM**) y con el apoyo de las autoridades de la **Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera"** (**ENEQ**), te participamos de la celebración de la **Doceava Conferencia Interamericana de Educación Matemática** (**XII CIAEM**), del **15 al 18 de julio del 2007**, en las instalaciones de la ENEQ en la hermosa Ciudad de Santiago de Querétaro.

El proceso de inscripción al XII CIAEM, además de la reservación de hoteles, transporte y otros servicios turísticos, se podrá realizar en línea por medio de la página web que la empresa encargada, Convention Center, asignó para este propósito: **http://www.convention-center.net/ciaem**

Este sitio ya está disponible desde este momento, pero la opción de hoteles y otro tipo de reservaciones se activarán definitivamente desde el mes de abril del año en curso.

Sin embargo, podrás descargar en tu computadora una imagen, como archivo "jpg", del póster oficial del XII CIAEM, con la cual podrás tener a la mano los datos más importantes o ayudarnos a dar a conocer la realización de esta importante reunión académica, también encontrarás un archivo elaborado en "Power Point" con los datos más relevantes del CIAEM, la ANPM, la ciudad sede y la ENEQ.

De acuerdo con las fechas de publicación, el primer y segundo aviso estarán disponibles en el mismo sitio. Adicionalmente, otros documentos como el programa general se incluirán en su momento en este recurso de comunicación.

Para informes sobre aspectos específicos relacionados con inscripciones, reservación de hoteles, turismo, transportes, etc, puedes escribir a la dirección electrónica: **ciaem@convention-center.net**

Para informes sobre aspectos relacionados con la organización del programa y otros asuntos académicos puedes dirigirte a la dirección electrónica: **mancera.eduardo@gmail.com**

El Comité que preside la Dra. María Salett Biembengut me ha designado para coordinar la organización general del XII CIAEM, por ello, con gusto, personalmente atenderé tus preguntas, sugerencias o comentarios sobre esta conferencia internacional.

A T E N T A M E N T E

Dr. Eduardo Mancera Martínez
Segundo Vicepresidente del CIAEM

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 273-274
ISSN: 1815-0640

Información

eTWINNING

(Hermanamientos escolares en Europa y en el mundo)

***eTwinning* es la acción principal del Programa eLearning de la Comisión Europea. Ofrece a todos los centros escolares la posibilidad de trabajar más allá de las fronteras nacionales y de aprovechar los beneficios pedagógicos, sociales y culturales de esta colaboración a través de un *Espacio de Hermanamiento* seguro donde se ofrecen herramientas de comunicación como correo interno, foros, salas de Chat, página Web del hermanamiento, etc.**

Participan directamente en eTwinning 28 países de Europa, que cuentan con Servicios Nacionales de Apoyo (SNA), creando puentes de comunicación entre centros educativos. Los contactos se establecen principalmente a través de Internet y de las Tecnologías de la Información (TIC). **Aunque un proyecto de hermanamiento se debe iniciar con dos centros de dos países europeos, pueden sumarse al mismo, centros de cualquier país del mundo**.

Actualmente hay más de 14.000 centros registrados, de los que cerca de 2.000 son centros españoles. Aproximadamente un 20% de los registros están desarrollando un proyecto de hermanamiento. Los temas seleccionados por el profesorado y el alumnado para trabajar con otros centros son muy variados. En la tabla siguiente se muestran la relación de temas y los porcentajes de incidencia:

Temas	Porcentaje
Arte Visual, Teatro, Música, Danza	5,65 %
Civismo, Religión y Ética, Filosofía	8,13 %
Deportes	2,55 %
Educación para necesidades educativas especiales	0,82 %
Europa	8,69%
Geografía	7,09%
Historia/Tradiciones	12,41%

Idiomas extranjeros	17,24%
Industria, Economía, Mundo laboral	2,16%
Informática/TIC	10,52%
Interdisciplinares	11,79%
Lengua/Literatura	6,53%
Matemáticas	**2,65%**
Medios de Comunicación	2,97%
Medio ambiente	7,58%
Sistemas Educativos y Pedagogía	3,04%

No hay limitaciones en cuanto a los objetivos, la duración o el alcance de las actividades, salvo el valor pedagógico del proyecto para el centro escolar y para su alumnado y el uso de las TIC.

En España el SNA lo constituye el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) que en coordinación con las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas crea los cauces para ayudar a los centros educativos en los hermanamientos y para dar el soporte necesario en la creación de proyectos educativos. Los hermanamientos pueden obtener etiquetas de calidad eTwinning y formar parte de la Galería de proyectos donde se irán incluyendo aquellos que resulten interesantes y que sirvan de inspiración a otros centros educativos. Aquellos proyectos de mayor interés podrán optar a los premios eTwinning, que se convocan anualmente.

La dirección del portal web europeo es http://www.etwinning.net En el apartado de “eTwinning por temas”, tanto para Matemáticas como para el resto de materias, se dispone de Kits de proyectos prefabricados, Recursos, Forum y Galería de proyectos. También el SNA español dispone de un portal web que ofrece numerosas posibilidades. La dirección es http://etwinning.cnice.mec.es

Claudia Lázaro del Pozo

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, páginas 275-277
ISSN: 1815-0640

Información

Nueva convocatoria de Adopta una Estrella y Ciencia en Acción

El programa Ciencia en Acción y Adopta una Estrella, son una iniciativa de la Real Sociedad Española de Física, la Real Sociedad Matemática Española y la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología en coordinación con EIROforum. Su principal objetivo es aumentar la cultura científica a través de soluciones innovadoras que hagan la ciencia atractiva y educativa para amplios sectores de la población. Así llegaremos a su octava edición, con la novedad de ampliar algunas de sus categorías a países de habla hispana o portuguesa.

El concurso ”Adopta una Estrella” está dirigido a alumnos no universitarios de cualquier país de habla hispana o portuguesa. Deberán presentarse en grupos de tres alumnos de primaria o secundaria, bajo la tutela de un profesor. Es obligatorio realizar la inscripción *on line* en la página web del programa y enviar un resumen de 15 líneas en inglés y otro en español. El plazo de presentación de los trabajos finaliza el 30 de agosto del 2007.

Fases a desarrollar

- Seleccionar una estrella u otro objeto celeste (planeta, galaxia, cometa, etc.) o bien un fenómeno astronómico (eclipse, tránsito, ocultación, etc.) y descubrir sus características.
- Obtener fotografías (efectuadas por el equipo, o extraídas de libros o de Internet).
- Comparar con otro objeto o fenómeno similar, marcar analogías y/o diferencias. Buscar información acerca de su pasado y su futuro.
- Realizar actividades prácticas (llevar a cabo una observación, diseñar un experimento, etc.).
- Mencionar las referencias utilizadas (libros, páginas web...).

La **presentación** de los trabajos será en dos fases:

En primer lugar, los materiales deberán cumplir las normas que se detallan y ser remitidos por e-mail a ciaccion@mat.upc.es. El informe del trabajo se ajustará a las siguientes normas:

1. estar escrito en *html* para poder ser incluido en la web de “Ciencia en Acción”,
2. tener una extensión máxima de 10 páginas tamaño A4, incluidas las imágenes,
3. estar redactado en cualquier idioma oficial del estado español o portugués,
4. las imágenes deben tener enlaces directos desde el fichero principal,
5. el informe debe ser fácilmente legible e imprimible (por ejemplo evitar texto en blanco sobre fondo negro),
6. se usará el modelo de página inicial que se puede encontrar en la página web (incluyendo: título, nombre de los autores y edad, foto del grupo, índice, referencias y logotipos del concurso).

En segundo lugar, si el trabajo es uno de los ganadores, deberá presentarse (via webcam) en la final del certamen de septiembre de 2007.

El concurso “Ciencia en Acción” está dirigido principalmente a profesores de enseñanza primaria, secundaria y de universidad; a investigadores, divulgadores científicos de los medios de comunicación o pertenecientes a museos y organismos relacionados con la ciencia, así como a cualquier persona interesada en la enseñanza de la ciencia Los interesados deberán presentarse de forma individual al concurso. Es preciso realizar la inscripción a través de la página Web a la que se enviará un resumen detallando las características de la propuesta (objetivos, estructura, metodología, contenidos, público al que se dirige…). El resumen tendrá una extensión de 15 líneas, deberá estar redactado en inglés y en castellano o portugués.

Información

El plazo de presentación de las modalidades finaliza el **30 de julio del 2007**.

Estas categorías son:

- **"Materiales Didácticos de Ciencias"** donde pueden presentarse diferentes materiales en forma de cuadernillo de trabajo, libros, CD-Rom, páginas web….
- **"Trabajos de Divulgación Científica"**, donde se incluyen libros, artículos de premsa escrita, folletos, emisiones de radio, videos o programas de televisión…
- **"Ciencia, Ingeniería y Valores"** donde se pueden presentar trabajos relacionados con la promoción de los valores humanos en la ciencia y la ingeniería, en cualquier tipo de formato.

Su presentación se hará en dos fases:

En primer lugar, se enviará una copia de la ficha de inscripción y el resumen, junto con el trabajo sobre papel, o soporte informático, o videos de los programas de TV o cintas de las emisiones de radio, a la dirección de la RSEF (siempre incluyendo resumen y todos los materiales por triplicado).

En segundo lugar, si el trabajo es uno de los ganadores, deberá mostrarse en la fase final del certamen nacional (vía webcam) participando el concursante en la presentación conjunta correspondiente.

El 7 de septiembre se facilitará la lista de **ganadores** que serán invitados a participar, via webcam, en el **Certamen nacional del 28 al 30 de septiembre de 2007** en Zaragoza.

Más información en la página web: www.cienciaenaccion.org

Rosa Mª Ros
Directora de "Ciencia en Acción"

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2007, Número 9, página 279
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org