UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 16

Diciembre de 2008

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Editorial

UNIÓN, una revista consolidada

Un pequeño grupo de colegas pensamos, en su momento, que la comunidad formada por el profesorado de Matemáticas del ámbito iberoamericano necesitaba una revista que recogiera sus experiencias e investigaciones. Hacerlo en formato papel nos pareció inalcanzable por costes y por organización. Finalmente decidimos presentar un proyecto de revista digital a la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), por entender que era el órgano que debía avalarlo y apoyarlo. En la propuesta se esbozaban nuestros propósitos, la organización y el equipo de personas que nos haríamos cargo. La FISEM decidió aceptar la idea de crear UNIÓN y concedernos la codirección por un período de tres años que, al final, han sido cuatro al prorrogarse un año más.

El pasado mes de octubre de 2008, tras el oportuno procedimiento de convocatoria de la dirección de UNIÓN y la correspondiente resolución de la misma, la Junta de Gobierno de la FISEM ha designado a las profesoras argentinas Norma Cotic y Teresa Braicovich como nuevas responsables de la revista a partir del próximo año. Así pues, nuestra etapa finaliza con este número 16 y en marzo de 2009 saldrá el primero de la nueva dirección. Enviamos a dichas profesoras nuestra calurosa felicitación y el deseo de muchos éxitos en la labor que ahora emprenden y para la que pueden contar con nuestra total colaboración.

En el proyecto y en la editorial del primer número, publicado a principios del año 2005, anunciábamos que nuestro deseo era realizar una revista que canalizara y diera a conocer trabajos sobre Educación Matemática; debían estar destinados al profesorado en activo de nuestro ámbito cultural, de todos los niveles educativos, esto es, desde Educación Infantil hasta la Universidad. Y añadíamos que, puesto que disponíamos en nuestra Comunidad de un amplio conjunto de docentes e investigadores de alta cualificación, podríamos conseguir una revista de gran calidad y utilidad para todos. Han pasado ya cuatro años, hemos colgado en la red los dieciséis números que se han publicado y podemos decir que nos hemos acercado a los niveles de calidad a los que aspirábamos inicialmente. Se han dado, al menos, los primeros pasos para hacer realidad el proyecto de una ambiciosa revista que tiene garantizada su continuidad en las profesoras Cotic y Braicovich.

Pensamos e insistimos en destacar que el cambio de dirección supone la consolidación de UNIÓN como revista de la FISEM, como una publicación que ya es patrimonio de toda nuestra comunidad iberoamericana de Educación Matemática y no un proyecto exclusivo del equipo que la puso en marcha.

Para nosotros es la hora de la despedida y, por tanto, de la gratitud. En primer lugar a la Junta de Gobierno de la FISEM, por aceptar nuestra propuesta de crear la revista UNIÓN y confiar en nosotros para dirigir sus primeros números.

Gracias a los autores, pues a ellos se debe que esta revista sea una realidad. En algunos casos nos hemos visto en la necesidad de rechazar el trabajo presentado y en otros de pedirles modificaciones de sus textos. Pues bien, prácticamente la totalidad han aceptado con profesionalidad la decisión final del comité editorial acerca de la publicación o no de su trabajo.

En todos los casos la decisión de aceptación se ha basado en criterios que hemos querido objetivos y hemos estado auxiliados en esa delicada labor por un amplio conjunto de evaluadores, que han asegurado, con su dedicación y rigor, que el proceso de publicación posea controles que aseguren la calidad de los trabajos que finalmente han visto la luz en UNIÓN. Muchísimas, muchísimas gracias a todos ellos por su generosa e invalorable colaboración.

También queremos agradecer a las personalidades del Consejo Asesor su aceptación para formar parte de este órgano de colaboración con la dirección, pues sus prestigios han elevado y avalado también el valor de UNIÓN, además de ayudarnos con sus opiniones y consejos.

Es natural que nuestro agradecimiento llegue a su máximo grado al expresarlo a los miembros del Comité Editorial, amigas y amigos con los que hemos formado equipo para hacer realidad esta revista número a número: Alicia Bruno, Dolores de la Coba, Carlos Duque, Antonio Ramón Martín Adrián, Aurelia Noda e Inés Plasencia. Cada uno de ellos ha cumplido, con creces y con generosidad, el cometido al que se comprometió

Por último, gracias a los lectores, a quienes debemos que UNIÓN se haya consolidado y extendido en nuestra Comunidad como una publicación de Educación Matemática, mucho más de lo que podríamos prever en nuestro proyecto inicial. Su gran número permite afirmar que la revista cuenta con una amplia aceptación entre los profesionales de la enseñanza de las Matemáticas en los diferentes países de Iberoamérica. En este sentido, reconocemos la ayuda prestada por la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, así como la generosa colaboración de la *Fundación Carolina* que ha creído en nuestro proyecto y lo ha apoyado económicamente.

El éxito que haya podido alcanzar UNIÓN es éxito de todos, del conjunto de la comunidad iberoamericana de Educación Matemática. Para mantenerlo y acrecentarlo solicitamos que desde todos los rincones de nuestra geografía lleguen trabajos con experiencias y reflexiones, con investigaciones y estudios, al nuevo equipo editor.

Luis Balbuena y Antonio Martinón, Directores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, página 5
ISSN: 1815-0640

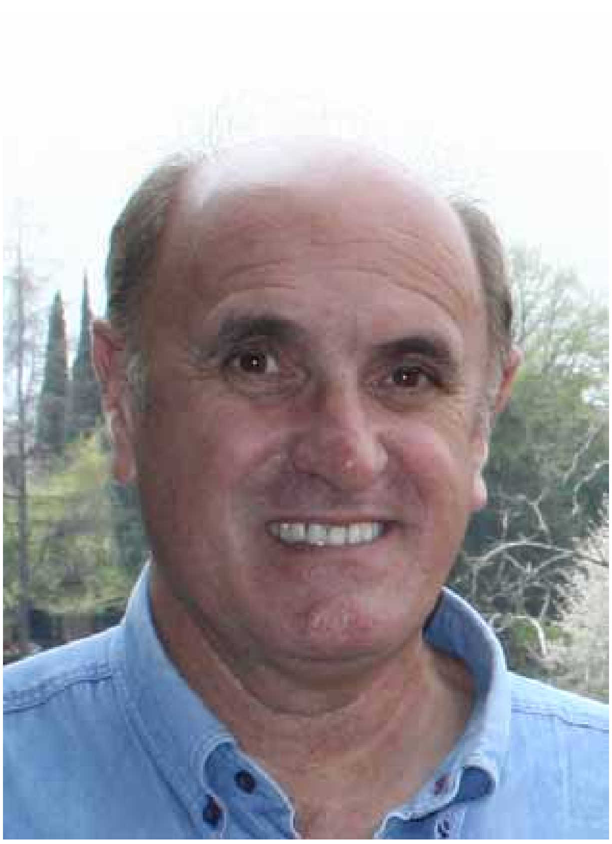
firma invitada

Rafael Pérez Gómez

Breve reseña

Rafael Pérez Gómez es doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada.

Su principal línea de investigación se centra en Simetría Cromática. La última tesis doctoral que ha dirigido se titula Construcciones en Geometría Hiperbólica y teselaciones mediante Grupos NEC poligonales. Algoritmos de automatización. También ha trabajado en Teoría de la Elección Social, donde ha codirigido la tesis titulada Representación proporcional. Representación parlamentaria. Así mismo, ha participado en diversos proyectos de investigación, siendo el investigador principal en el llamado Software para la Edificación.



Actualmente es Profesor Titular de Universidad, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, impartiendo docencia en las escuelas de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos y de Arquitectura. Es el Coordinador del Máster Oficial de la Universidad de Granada titulado Seguridad Integral en Edificación. Fue Catedrático de Bachillerato.

Ha creado y dirigido las revistas de Educación Matemática Epsilon, Suma y Uno.

Ha realizado programas de televisión y radio con TVE1, TVE2 y BBC, fundamentalmente.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2008, Número 16, páginas 7-27
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Matemáticas para compartir la belleza

Rafael Pérez Gómez

El poder de las Matemáticas es sólo comparable al de la pasión y al de la insania, de ahí que uno las ame o las aborrezca con la intensidad reservada a lo divino.

Jorge Volpi

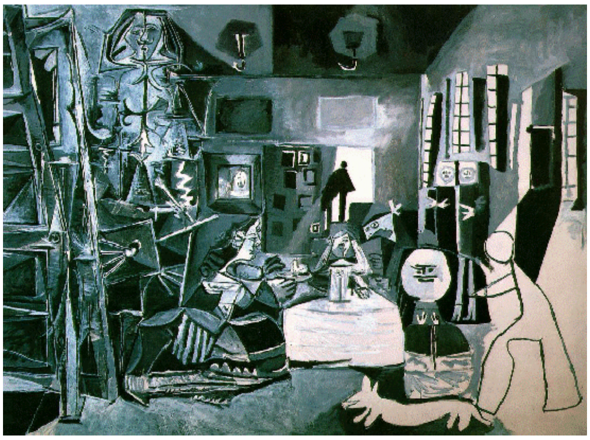
Introducción

Siempre aprendí que una persona es un animal racional, cualidad ésta que nos distingue del resto de los seres vivos. Con el tiempo he comprendido que somos más animales emocionales que racionales ya que la mayoría de las decisiones las tomamos desde el corazón y no con el cerebro. Entonces, ¿qué será más importante: educar en la práctica de pensar bien o en el control de las reacciones? Desde la enseñanza de las Ciencias y Tecnologías se persigue, entre otros, el objetivo de aprender a razonar en situaciones problemáticas; desde las Humanidades, el desarrollo de la sensibilidad y equilibrio emocional. Viene de antiguo la exigencia de educar en el *trivium* y *cuadrivium*, las 7 artes liberales, para llegar a ser “personas libres”. Mas, en un mundo globalizado, no basta con que la ciudadanía tenga capacidad para utilizar las tecnologías y asumir los avances científicos sino que debe desarrollar valores que caractericen a esa nueva sociedad que estamos forjando entre todos. Paz, democracia y solidaridad deben ser tres puntos obligados para definir este nuevo plano social sin olvidar otros logrados con anterioridad como la libertad, la igualdad y la fraternidad. El desarrollo de la inteligencia emocional, y no sólo la racional, es pieza clave en esa nueva educación necesaria para lograr que otro mundo sea posible.

Ahora, con rabiosa actualidad, surgen voces que exigen una mejor formación ciudadana en Matemáticas que garantice el desarrollo científico y tecnológico de un estado, o conjunto de ellos, a fin de evitar la dependencia tecnológica de otros y alcanzar el equilibrio socioeconómico y político al que aspiramos. Está bien, pero llegados a este punto, conviene recordar las palabras de Jacobi en una carta a Legendre en julio de 1830:

La finalidad primordial de las Matemáticas no consiste en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales… sino en rendir honor al espíritu humano.

Son demasiadas las personas que, a fuerza de recibir suspensos en Matemáticas, han acabado renegando de ellas. Como, intrínsecamente unidos a los recuerdos están las sensaciones y las emociones, hablar de Matemáticas puede provocar escalofríos en personas ajenas a nuestra disciplina. Las líneas que siguen están concebidas para que las utilicemos como un intento de reconciliación con ellas. Voy a hacerlo mostrando cómo han servido las Matemáticas para crear una belleza que sin ellas hubiera sido imposible conseguir y cómo me explico, a mí mismo, la que puedo percibir a mi alrededor. Por tanto, mi ya querido lector o lectora, voy a presentarle cómo seducir matemáticamente, ¡claro está!, a una persona de "Letras" escribiendo una larga conversación que mantuve con don Diego de Velázquez y Silva y Pablo Ruiz Picasso, simultáneamente. Tuvo lugar en Madrid, el día 23 de Junio de 2006. Eran las 10.40 horas de la mañana cuando llegué a estar entre "dos meninas". Por un momento me sentí infante ya que a mi izquierda estaban *Las meninas* que permanentemente se exhiben en el Museo del Prado, y, a la derecha, *Las meninas* que ocasionalmente se encontraban también allí, enfrentadas a las primeras, procedentes del Museo Picasso de Barcelona. Había ido a visitar la exposición que, con motivo de los 25 años con el Guernica, se organizó en los museos madrileños del Prado y Reina Sofía: *Picasso, tradición y vanguardia*.



Figuras 1 y 2. Las meninas de Velázquez y las de Picasso

En aquel momento tenía enfrentadas formas precisas de un lado y, del otro, otras que no lo eran (algunas incluso estaban reinventadas); a mi izquierda había una sinfonía de colores perfectamente orquestada en contraste con blancos y negros o grises azulados de mi derecha; una luz lateral y otra al fondo, cinco del mismo lado más, también, la del fondo; un lienzo vertical y otro horizontal;… Comenzaron a resonar y, a la vez, a apelotonarse muchas preguntas en mi cabeza, provocadas sin duda por mis rápidas y desordenadas miradas hacia ambos lados en donde se encontraban los cuadros. Nada más parecía existir a mí alrededor. Ya estaba inmerso en la búsqueda de las claves que tanto Velázquez como Picasso habían plasmado en sus obras. ¿Qué estaban diciéndome ambos pintores? Tras el desasosiego inicial (¡siempre sucede igual!) viene la calma y la reflexión serena. Es entonces cuando comienzo a elaborar, ordenadamente, conjeturas. Desde mi formación sé que las Matemáticas juegan un papel importante a la hora de facilitar la comunicación entre personas, aunque sus culturas estén distantes aún en el tiempo. El uso de **símbolos** con significado colectivo y universal es una característica de las Matemáticas. El Arte, en general, se apoya en la reproducción de ciertos códigos con los que cada artista nos hace llegar su mensaje, sin tiempo ni lugar, utilizando como medio de comunicación su obra. Además, la creación artística exige el dominio de determinadas técnicas y normas compositivas que, en ocasiones, han ido unidas al conocimiento matemático de la época. El hecho de darme cuenta de que una obra de arte "habla" a quien sabe interrogarla, ha creado en mí la práctica de intentar acercarme a quien la creó estableciendo una "conversación" que gira a su alrededor. Desde los símbolos que veo en ella y su composición estructural, busco las claves que han hecho que sea auténtica, bella y tenga valor actual, características obligadas que ha de tener una producción artística para que sea considerada obra de arte universal. De esta forma puedo profundizar en ellas, ver más allá de lo que puede ser evidente y descubrir toda su belleza para, después, compartirla con los demás ofreciendo un punto de vista, ni mejor ni peor que el de otras personas, que es el mío propio.

Durante la visita al Prado gocé hasta el punto de emocionarme, como para que se humedeciesen mis ojos en más de una ocasión. Pude ver bastantes aspectos y realizar un sin fin comparaciones, también de anotaciones que me permitieron seguir pensando de vuelta a casa. Velázquez y Picasso me hablaron sobre todo lo que sigue.

Dos genios, dos geometrías y un cuadro: *Las meninas*

Hace algo más de 125 años que nacía en Málaga Pablo Ruiz Picasso. Todo un referente del vanguardismo artístico del siglo pasado y, sin lugar a duda, el pintor español más influyente de dicho siglo. No voy a entrar en las diferentes etapas de su pintura que desde los períodos azul y rosa, el cubismo, la recuperación del orden clásico en los años 20, su relación con el movimiento surrealista, los difíciles años entre la Guerra Civil española y la II Guerra Mundial hasta las fértiles últimas décadas de su producción. Sólo voy a referirme a la serie que realizó de *Las meninas* cuando contaba con 76 años de edad, era multimillonario y contaba con el reconocimiento internacional como artista. Entonces, ¿por qué hace 58 cuadros en dicha serie? Es evidente que nunca pretendió copiar a Velázquez. Así mismo, tampoco necesitaba dinero porque ya tenía más que suficiente. Entonces, ¿qué buscaba?

El lenguaje de Velázquez

Diego de Velázquez, con su barroquismo, muestra diferentes cuadros dentro de un mismo cuadro. Es el caso de *La familia real*, nombre inicial de *Las meninas*, a pesar de que faltan en la escena el príncipe Baltasar Carlos (fallecido con anterioridad a la realización del cuadro) y la infanta María Teresa.

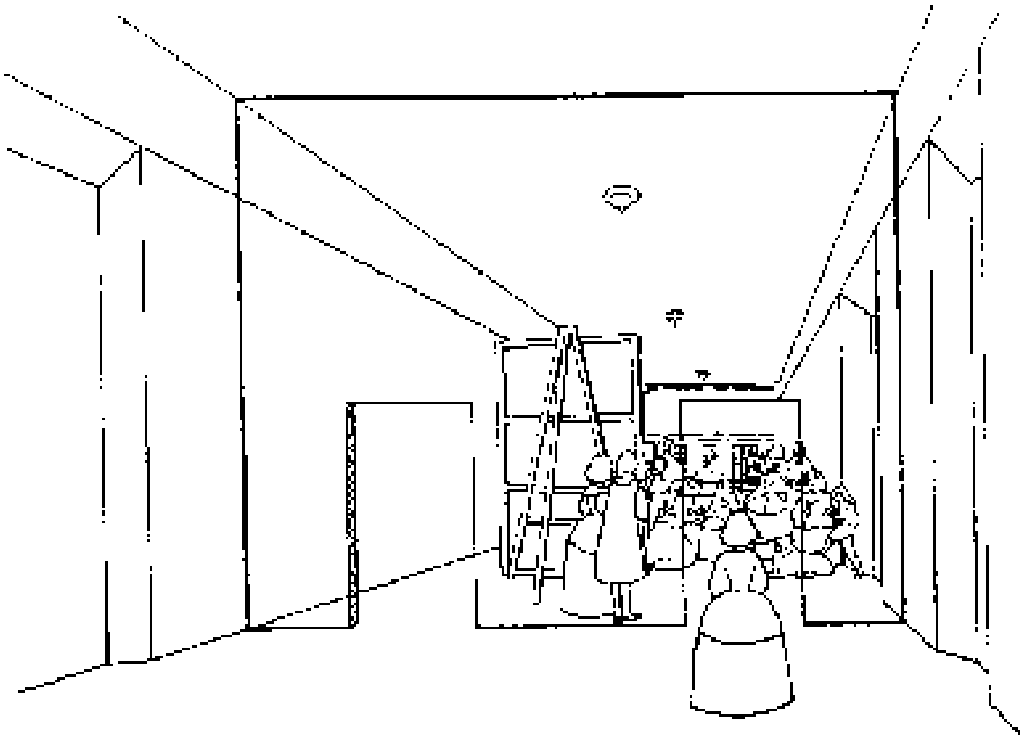


Figura 3. Posible situación de los personajes durante las sesiones de elaboración de *Las meninas*. La habitación en la que se representa la escena forma parte de los que fueron aposentos del príncipe Baltasar Carlos. Fuera, y de espaldas, se encuentra la infanta María Teresa, razón por la que no se refleja en ningún espejo. Ya, dentro de ella, también de espaldas, podemos ver a los reyes.

El pintor barroco. Nos narra diferentes historias ligadas a personajes, unos de la Mitología (como Minerva y Aracne o Apolo y Marsias, en sendos cuadros colgados en la pared del fondo)y otros de la familia real (como Felipe IV, su esposa doña Mariana de Austria y la infanta Margarita, hija de ambos) junto a su corte: las dos meninas, doña María Agustina de Sarmiento y doña Isabel de Velasco, entretenedores de la infanta, como la enana María Bárbola y Nicolasito Pertusato (que no era ningún niño, a pesar de su apariencia), las personas encargadas de su vigilancia, Mercedes de Ulloa y Diego Ruiz de Azcona, y el aposentador de la reina Nieto Velázquez.

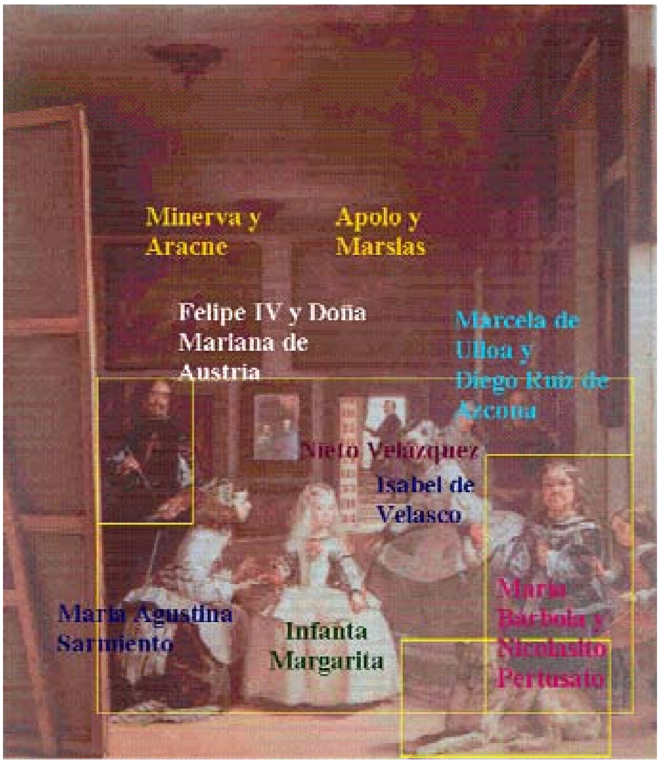


Figura 4. Personajes de Las meninas

También se dibuja a sí mismo en la escena reivindicando la faceta intelectual de su trabajo, considerado hasta el momento como meramente artesanal, lo que le daba carácter caballeresco y no de artesano, y lo hizo sin tener el atrevimiento de figurar junto a los reyes, razón por la cual los hace aparecer reflejados en el espejo de la pared del fondo. Velázquez se encuentra pintando un cuadro. Hay quien sostiene que se trataba, recursiva y barrocamente, de las mismas Meninas. Pero también hay quienes sostienen que se trata de un lienzo sin trazo alguno, cuan *tabula rasa*, en alusión a la mente de la infanta Margarita que, al igual que el cuadro, hay que desarrollar de forma armoniosa desde la educación en los clásicos (de ahí las escenas mitológicas antes dichas de los cuadros que hay en la habitación).

Por último, debo señalar que la escena central refleja una costumbre de la época como es la bucarofagia. Consistía en comer un barro rojo que provocaba la eliminación de glóbulos rojos en la sangre y daba a la piel el tono blanquecino que la moda del momento imponía. Además, servía como anticonceptivo y corrector de desarreglos hormonales. Lope de Vega lo dice en “El acero de Madrid”: *Niña de color quebrado/o tienes amores/o comes barro*. Ese es el motivo central del cuadro: doña Agustina de Sarmiento entrega un búcaro a la infanta Margarita, no para que beba agua sino para que se coma el barro.

La composición geométrica. Desde el punto de vista técnico, *Las meninas* de Velázquez marcan el cenit de la pintura basada en el uso de la perspectiva y en la composición geométrica. Esta última se basa en la creación de espacios según rectángulos áureos, en los que se inscriben tanto personajes como elementos decorativos de la habitación, y en la iluminación de la escena central creando una atmósfera con un aire inigualable que se "mueve" siguiendo una espiral, también áurea o de Durero, que se crea mediante el método de los rectángulos recíprocos internos a partir de un rectángulo áureo[1]. Salvador Dalí, al ser preguntado en una entrevista acerca de qué salvaría del Prado en caso de incendio, dijo que "Salvaría Las Meninas de Velázquez. Concretamente, el aire que hay en ellas que es el mejor aire jamás creado en un cuadro".

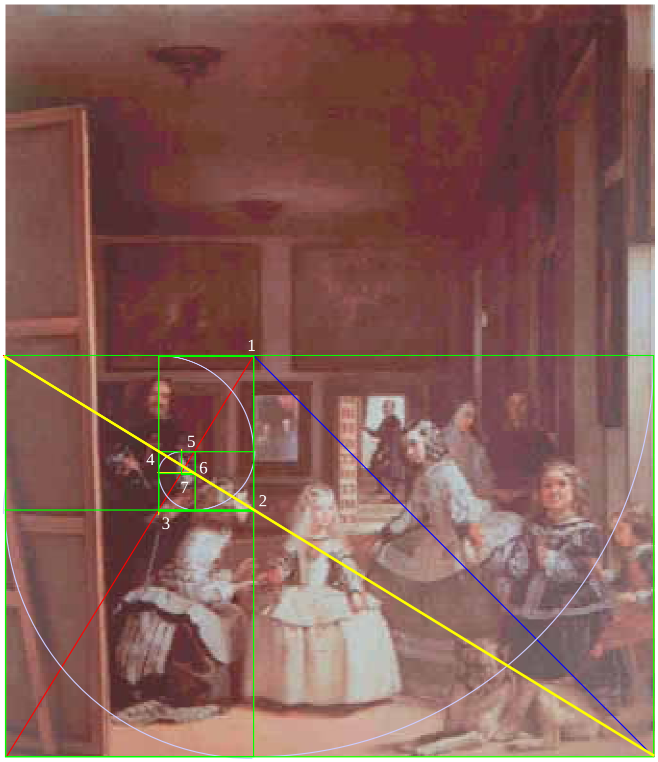


Figura 5. Espiral de la luz

Obsérvese cómo la luz que entra por las ventanas laterales de la habitación sigue el camino marcado por la espiral hasta llegar, prácticamente, a la paleta del pintor. Otro guiño más que Velázquez nos hace, ya que toda la luz del cuadro sale realmente de dicha paleta. Picasso es plenamente consciente de la importancia del "aire" de *Las meninas* y la resalta al dibujar ni más ni menos que 5 luminosas ventanas (ver Figura 2) en lugar de una.

Figura 6

[1] **Ver figura 6**
Para que un rectángulo sea considerado áureo o de oro, su proporción (cociente entre la longitud del lado mayor y la del menor) tiene que ser el número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Actualmente, las cartillas de ahorro y tarjetas de crédito pueden ser consideradas como rectángulos áureos. En la imagen han sido colocadas de forma que se visualice la construcción de un rectángulo áureo, la tarjeta Maestro de Caja Granada, recíproco interno al también áureo materializado por la cartilla de ahorro que está debajo en la composición.

Antes de continuar, conviene hacer una breve reflexión. Al estar presente el pintor en la escena es fácil imaginar que utilizó un gran espejo para verla reflejada en él mientras la dibujaba. Pero no resulta tan fácil si se piensa que los espejos invierten la orientación del espacio (recuérdese cómo figura escrito el nombre AMBULANCIA sobre tales vehículos) y para que tal cosa no se produzca hemos de trabajar sobre la imagen reflejada en un segundo espejo para que se deshaga la inversión. Esto nos lleva a pensar que Velázquez trabajó mirando la escena en un doble espejo colocado en el suelo como un libro abierto por unas “páginas” que son espejos; en el de la derecha se refleja la imagen directa de la escena y esta, a su vez, se refleja en el de la izquierda.

Las meninas de Velázquez están consideradas como el cuadro en el cual se aplican de forma magistral todas las teorías sobre el uso de la perspectiva descubiertas hasta el s.XVII. Nadie ha conseguido mejorar la representación del espacio físico tridimensional en un cuadro[2]. De ahí, que *Las meninas* de Velázquez marcasen un antes y un después en la Pintura al aplicar, no sólo la perspectiva lineal, sino también la menguante, la del color, la aérea y la alternancia luz-penumbra.

Figura 7. El geógrafo. Vermeer, 1668-69.

[2] Vermeer of Delft, fue un pintor barroco como Velázquez. Aunque preocupado por escenas cotidianas de la sociedad holandesa en al que vivió, puede verse en ellas su preocupación por la ciencia. Un buen ejemplo de ello lo tenemos en el cuadro *El geógrafo*. Sólo se conocen cuatro de sus cuadros en los que representa a hombres, siendo este uno de ellos. El nombre se debe a que un cartulano, mapa del mundo conocido, adorna la pared, y el personaje además se inclina con un compás sobre un extenso pliego que podría ser un mapa, disponiéndose a medir lo que pueden ser unos planos. En realidad no se sabe cuál es el motivo de la escena, excepto que se trata de un científico ya que Vermeer nos presenta a su figura realizando una actividad concreta, de tal manera que no se presentan como figuras alegóricas, sino en el marco de lo cotidiano.
Vermeer también recrea magistralmente el espacio tridimensional y es un gran maestro de la luz. Sin embargo, usó una cámara oscura para producir perspectivas realistas en sus pinturas. **Ver figura 7.**

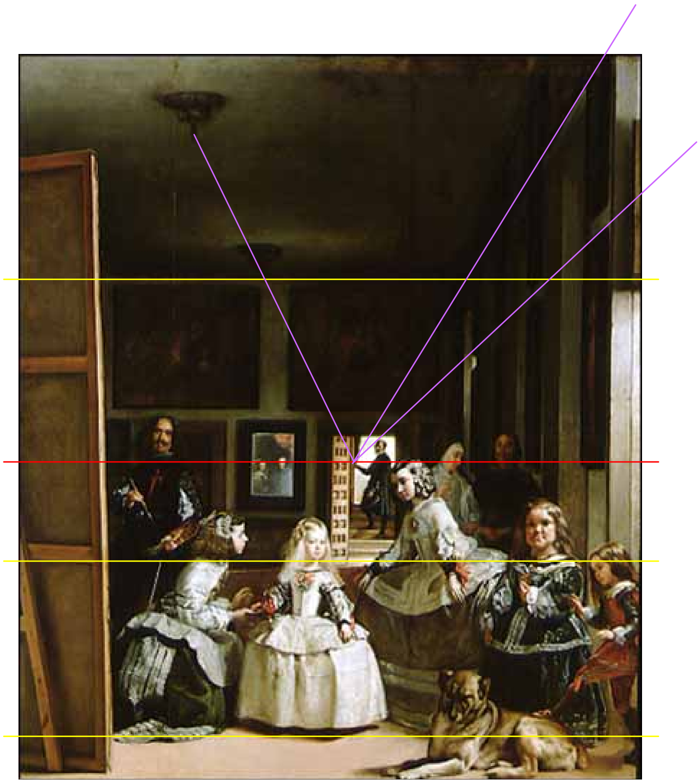


Figura 8. Perspectiva lineal

La perspectiva lineal. En el siglo XV se produjo el descubrimiento y la aplicación de la perspectiva *artificialis*, cuya base matemática y geométrica, es decir, científica, elevó a los artistas a una categoría superior. La pintura pasará de arte manual -artesanal- a arte liberal. Se creará así un espacio pictórico, homogéneo, continuo e infinito, en el que, según Nicolás de Cusa, cualquier punto puede tomarse como centro. Generalmente se utiliza una perspectiva central en la que los ejes vertical y horizontal -línea del horizonte-, en su intersección, coinciden con el punto de fuga. Es la perspectiva lineal.

Los artistas del Renacimiento reconocieron que la perspectiva, que era una técnica importante para crear la ilusión de la tridimensionalidad en sus pinturas, no estaba completamente desarrollada con la geometría de Euclides. El punto evidente de partida es que mientras las líneas paralelas nunca se cortan en la geometría de Euclides, en la perspectiva lo hacen en el punto de fuga. La perspectiva ha sido descrita como una geometría visual mientras que la de Euclides es una geometría táctil.

Si bien Filippo Brunelleschi (1377-1446) es quién tiene reconocida la introducción de la Perspectiva en la pintura, la formalización matemática la hizo en el siglo XVI el francés Girard Desargues. Este siglo fue el de los descubrimientos y exploraciones. Según avanzaban las naciones europeas en su dominio del mundo, así se hacían de necesarios los mapas de todo tipo. El trabajo de transferir la información geográfica del globo esférico a un trozo de papel plano es también un problema de Geometría Proyectiva, razón esta por la cual cobró gran protagonismo y fue desarrollada con interés.

Esta rama de las Matemáticas, conocida como Geometría Proyectiva, fue a su vez olvidada durante dos siglos para ser después redescubierta y constituir un campo importante de las Matemáticas puras o, avanzando en sus aplicaciones, desarrollar las técnicas propias de la Descriptiva. En aquel momento se produjo la escisión que llega hasta nuestros días y que hace que los procedimientos propios de la Descriptiva sean sólo algoritmos para la resolución gráfica de problemas geométricos. La siguiente anécdota me permite poner de manifiesto lo inconveniente de tal escisión. Recuerdo que un colega estaba estancado en su investigación para acabar un capítulo de su tesis doctoral y decidió solicitar mi colaboración. Tenía que obtener la verdadera medida de unas longitudes en la facha de un edificio a partir de una fotografía. El problema, matemáticamente hablando, era doble. Primero, había que determinar el punto exacto desde el cual estaba hecha la foto y, segundo, trazar desde él una radiación de rectas que se cortarían con las rectas horizontales de la fachada del edificio de la foto en los puntos que determinaban los extremos de los segmentos cuya longitud se deseaba calcular. El primer paso se reducía a emplear el método de los lugares geométricos para determinar el punto desde el que se hizo la fotografía. El segundo consistía en saber que el único invariante de la Geometría Proyectiva es la razón doble de cuatro puntos alineados. En resumen, de nada sirve conocer procedimientos algorítmicos sin la base necesaria para conocer sus porqués. Sin embargo, lo más lamentable es que los matemáticos están, en general, muy lejos de las técnicas propias de la Descriptiva y los técnicos, también en general, aún más lejos de las Matemáticas.

Figura 9. Perspectiva de color

Perspectiva de color. En este caso, cuanto más lejos aparece representado un objeto, más tenues son sus colores. Existe también en el mundo real un desvaimiento de los tonos al aumentar la lejanía. El color para el primer plano es el blanco de la luz de la ventana, el segundo plano presenta blancos amarillentos en los vestidos y rostros de las meninas y la infanta, el tercer plano está determinado por los tres personajes que hay tras ellas y los colores se oscurecen considerablemente tanto en rostros como en vestidos y el cuarto, y último, plano lo da la pared del fondo con tonos casi negros con los que se produce la penumbra.

Figura 10. Perspectiva menguante

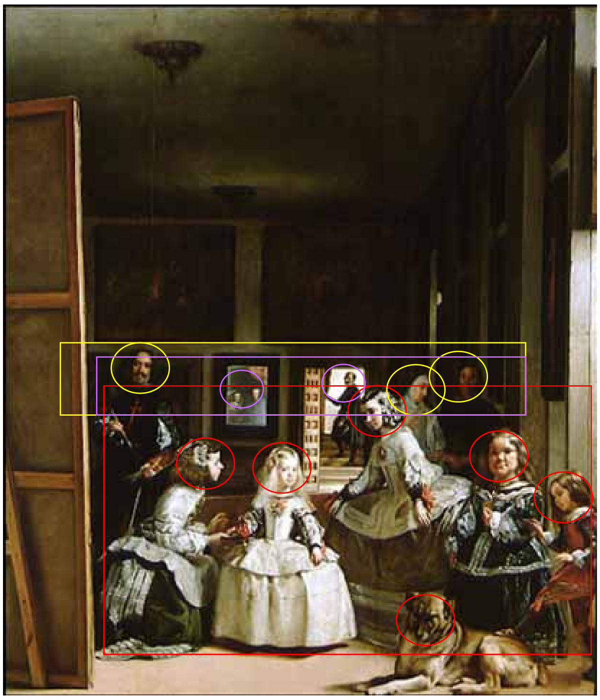


Figura 11. Alternancia luz-penumbra

Perspectiva menguante. A medida que aumenta la distancia, disminuye la nitidez, los contornos se van haciendo borrosos y desdibujados, al igual que ocurre en la realidad.

Alternancia de luz y penumbra. La parte inferior de la escena aparece iluminada, supuestamente, por la luz del día que entra por la ventana; la superior, está oscura, en penumbra. De este modo se enfatizan los personajes del primer plano y se da profundidad al espacio de la habitación.

¿Sabía Velázquez Matemáticas? Ante el despliegue de medios técnicos que Velázquez usa para pintar, no sólo *Las meninas*, me surgió la duda acerca de su conocimiento matemático. Son muchos sus cuadros los que requieren de un profundo conocimiento de las geometrías Euclídea y Proyectiva como para pensar que el uso explícito que en su obra gráfica hizo de la proporción áurea y de todo tipo de perspectivas con las que interpretar el espacio físico tridimensional, fue sólo mera intuición o casualidad. Hace tiempo pensé que si quería saber qué sabía una persona podría empezar echando un vistazo a los libros que tiene en casa o en el despacho. Así empecé a buscar referencias bibliográficas que me acercasen a este conocimiento en cuanto a Diego de Velázquez se refería. Encontré un artículo revelador: La Librería de Velázquez, Homenaje a Menéndez Pidal[3]. En él figuran 154 asientos con los libros que Velázquez tenía en su biblioteca:

1 *Summa...* (2), Aritmética de Luca de Burgo –clásica en el Renacimiento-.
1 *Arismética algebrática* (79), de Marco Aurel
1 *Manual de contadores* (51), Aritmética del Bachiller Juan Pérez de Moya
1 Aritmética (95) de José Unicornio
1 Aritmética (103) de Antonio Fines
1 Aritmética (39) del abad Jorge de la Caja
1 Álgebra (68) de Pedro Núñez (*Nonius*), rey de Portugal
1 Tratado de Geometría (141) de Alberto Durero
2 Tratados prácticos de Geometría (28 y 73) ¿Cristóforo Clavio y Juan de Alzaga?
1 *Libro del modo di dividire le superficie* (85) de Andrés de Céspedes
1 *Libro de instrumentos nuevos de Geometría muy necesarios para medir distancias y alturas sin que intervengan números* (81) de Andrés de Céspedes
1 *Teatro de los instrumentos y figuras matemáticas y mecánicas* (93) de Diego Besson
1 *Mechaniche* (82) de Guido Ubaldo
1 *Diálogos de Medicina* (87) de Francisco de Villalobos
1 *El modo de andar a caballo* (83) de Federico Grisoni
1 *Jenofonte* (134)
1 *De los hechos del Magno Alexandre* (59)
1 *Décadas* (137) de Tito Livio
1 *Crónica del mundo* (1)
1 *Discorsi sopra le Antichitá di Roma* (10) de Vincenzio Scamozzi
1 *Roma sotterranea* (19) de Antonio Bossio
1 *Philosophia secreta... con el origen de los ídolos y los dioses de la gentilidad* (61) por Juan Pérez de Moya
1 *Antigüedades y principado de la illustríssima ciudad de Sevilla*... (65) de Rodrigo Caro
1 *Arte de música*
1 *Elementos* (36) de Euclides
2 *Perspectiva* (49 y 91) de Euclides
1 *Números y medidas* (55) de Tartaglia
1 *Sciencia matemática* (132) de Megarense
1 *Alberto Durero, Geometría* (141)
1 *Templo de Salomón y mapas de Iglesia* (118)
1 *Trattato d'Architettura* (15) de Leon Bautista Alberti
1 *Trattato di Architettura* (12) de Pietro di Giacomo Cataneo
1 *Libri IV dell'Architettura*
1 *Simetría* (11) de Alberto Durero
1 *Notomia* (142) de Andrea Vesalio
1 *Historia de la composición del cuerpo humano* (53) de Juan Valverde de Amusco
1 *Trattato della Pintura* (145) de Leonardo da Vinci
1 *Escultura y pintura* (92) de Bonarrota
1 *Arte de la escultura y pintura* (110) de Bonarrota

Sin comentarios. La lista habla por sí sola.

[3] F.J. Sánchez Cantón, La Librería de Velázquez, Homenaje a Menéndez Pidal, Madrid, Hernando 1925, vol. III.

¿Tienen los pintores de ahora una formación geométrica equivalente a la de Velázquez? Quienes están considerados universalmente como referentes, sí. Por ejemplo, Salvador Dalí fue un personaje genial muy singular. Actuaba ante los medios de comunicación como nadie. Quienes lo conocieron hablan de una persona que se transformaba cuando aparecía una cámara o un micrófono. No me interesan los aspectos humanos del pintor ampurandés. Es más, creo que como persona dejaba bastante que desear. Sin embargo, como artista, hay que reconocerle su genio creativo y su manejo de casi todas las técnicas pictóricas y escultóricas, con una fuerte base en su magistral forma de dibujar haciendo uso de conceptos geométricos de muy diversos calados. ¿Cómo los obtuvo? Al igual que en otros aspectos, sus conocidos –a veces, amigos- le aportaron gran parte de su conocimiento. Es conocida su relación con Buñuel y García Lorca y no lo es tanto su amistad con el matemático rumano Matila Ghyka, que le enseñó todo lo que necesitó acerca de la proporción áurea y lo utilizó en sus cuadros durante la década de los años 40. De esta época son los cuadros Semitaza gigante volante con anexo inexplicable de cinco metros de longitud o Leda atómica, por citar sólo dos obras importantes hechas desde el conocimiento antes dicho. O, al final de sus días, con el matemático francés René Thom a quien invitó a su casa para conocerlo a raíz de que le concediesen la Medalla Field por su Teoría de las Catástrofes, teoría que le causó un gran impacto y a la que dedicó algunos cuadros llegando incluso a adaptar su firma a la gráfica de una curva que aparece en una de las 7 catástrofes elementales, la cola de golondrina.

Figura 12. El rapto topológico de Europa. Homenaje a René Thom[4]. Dalí, 1983.

[4] Si se desea ver en profundidad un trabajo que hice sobre este cuadro, véase Pérez Gómez, R. "¿Paranoia o topología trascendental? Salvador Dalí, 100 años" La Gaceta de la RSME 7.3: 655-664 (2004).

Aparte de estos contactos, en la biblioteca de Dalí figuran numerosos libros de Geometría y revistas científicas a las que estaba suscrito. En resumen, al genio se le unía un gran olfato y curiosidad por el conocimiento científico en general que llega hasta el punto de que su obra puede servir como excusa para hacer un recorrido por los avances científicos más importantes del siglo XX.

También en escultura, dentro de la tendencia actual de escultura geométrica en la cual el objeto artístico coincide con el geométrico, conozco el caso del reconocido escultor australiano John Robinson, afincado en Londres, que está relacionado con Ronald Brawn, un buen matemático inglés especialista en teoría de nudos y que es la base para sus creaciones. Como anécdota, diré que Ronald es el padre del autor del *best seller* Código da Vinci. O en música, en la que desde hace tiempo surgió la dodecafónica basada en algoritmos matemáticos con los que se crean series numéricas que determinan tiempos y compases. En este último caso se encuentra el compositor canario Gustavo Díaz Jerez, quien en su web ofrece la descarga de un editor musical, que llama *fractalmus*, con el que se pueden hacer composiciones de este tipo.

Para cerrar este breve panorama, citaré dos casos relevantes: Escher y Gaudí. La Alhambra ha sido musa de un sin fin de artistas. Escritores, pintores, músicos, arquitectos, etc. la han interpretado magistralmente en sus creaciones. Tengo la fortuna de tener una carta de H.S.M. Coxeter, matemático canadiense de reconocidísimo prestigio mundial, en la que me explica cómo explicó a M.C. Escher, el pintor holandés tan apreciado por los matemáticos, el modelo para la geometría hiperbólica basado en el disco de Poincaré, a partir del cual creó el conocido *Ángeles y demonios*. Escher dejó escrito que fue precisamente en uno de sus viajes a Granada cuando al visitar la Alhambra se dio cuenta de la división regular del plano y que no salía de su asombro cómo algo tan "evidente" no se le había ocurrido a ningún otro artista antes que a él. Hay que decir que, en este momento de su obra, la influencia de su hermano mayor fue enorme porque era cristalógrafo ya que los principios estructurales de los mosaicos que decoran los palacios nazaríes se basan en el uso de la simetría del plano y, hace ya muchos años, publiqué[5] cómo estaban presentes en este singular conjunto monumental las 17 "redes" básicas con las que se explicaría la cristalografía bidimensional, de ahí la importancia de los conocimientos que su hermano le enseñara. Yo mismo, he dirigido una tesis doctoral a un amigo de Bellas Artes que hace diseño asistido por ordenador y se ha acercado a mí para que lo introduzca en el mundo de las estructuras periódicas de la mano de la Teoría de Grupos como técnica creativa de composición pictórica.

[5] Pérez-Gómez, R., The four regular mosaics missing in the Alhambra. Comp. and Math. With Appls., vol **12**, nº 2, 133-137, (1987).

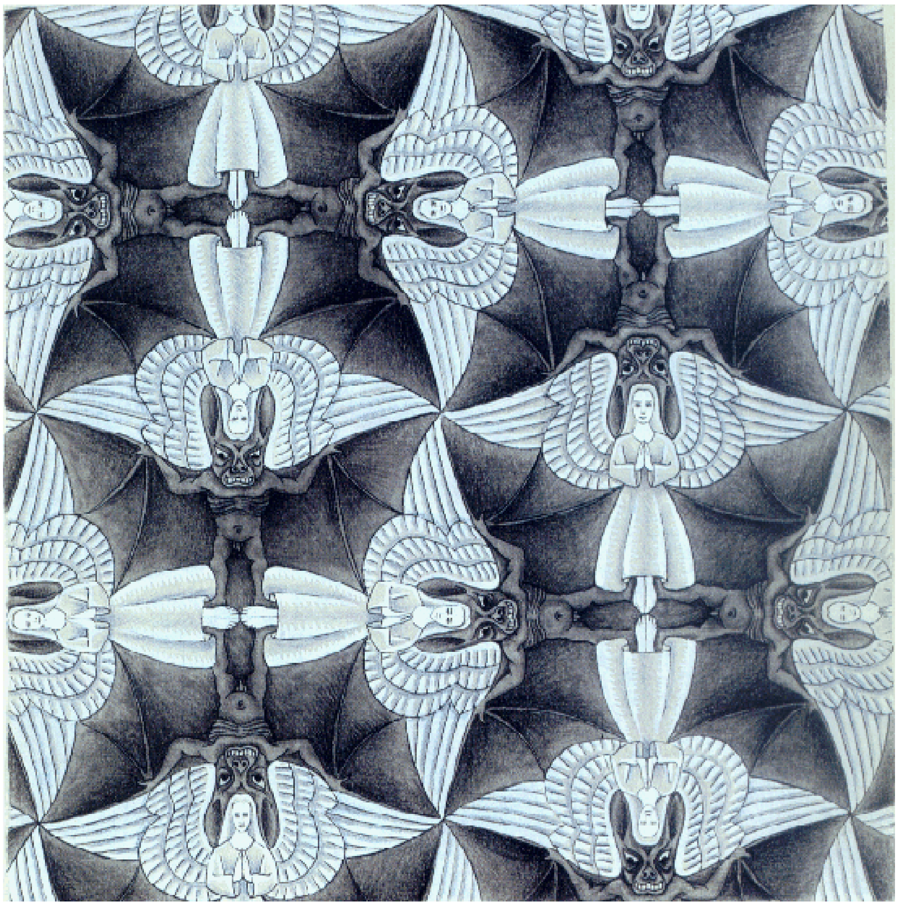


Figura 13. Ángeles y demonios. M. Cornelius Escher, 1960.

El caso de Gaudí es también importante. En uno de los pocos documentos escritos por él, el Manuscrito de Reus, dice cosas como “analizando fotografías de la Alhambra he descubierto que...” y sigue explicando sus teorías arquitectónicas. Gaudí hizo sus estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura de Barcelona y se guardan en ella, entre otros documentos relacionados con Gaudí, las fichas de los libros que sacaba de la biblioteca para su lectura. Hay una gran cantidad relativa a libros sobre la Alhambra de Granada. Una vez que es arquitecto, nos consta que hizo un viaje a Granada, Córdoba y Sevilla acompañado de su mecenas, el Marqués de Comillas y dueño de la Transmediterránea, para tomar contacto directo con la arquitectura islámica de estas ciudades y hacer el proyecto de una catedral para Tánger. Este proyecto nunca se realizó y fue la base de la Sagrada Familia. Las influencias de estas arquitecturas andalusíes, directamente observables, son muchas y muy significativas. Citaré dos ejemplos. El primero, la epigrafía en lengua árabe que figura sobre los muros y fuentes de los recintos nazaríes se presenta en latín sobre las torres de los evangelistas; y el segundo, las bases de las columnas son sellos de Salomón que acaban en columnas dóricas perfectas y que son una correspondencia directa del mosaico existente en los muros interiores del patio de la Alberca del palacio de Comares.

El lenguaje de Picasso

Ya he dicho antes que el desarrollo de la Geometría Proyectiva se vio favorecido durante el siglo XVI por la necesidad de realizar mapas y cartas geográficas con las que poder llevar a acabo viajes y descubrimientos de nuevas partes del mundo. La solución adoptada con más frecuencia consistió en proyectar la esfera sobre un cilindro que toca a la esfera en su ecuador; es conocida como la proyección de Mercator. Desde entonces ya ha llovido mucho. Las fotografías que suministran los satélites dejan atrás a todas las técnicas empleadas hasta nuestros días. Pero si volvemos la mirada al siglo pasado, cabe preguntarse acerca del fundamento teórico en el que se apoyó la elaboración de un atlas que aún hoy usamos. Imagine una esfera, similar al globo terrestre, a la que se pegan pequeños papelitos de forma que quede totalmente recubierta por ellos. Sobre cada papelito se proyecta, ortogonalmente de dentro afuera, el trozo de esfera sobre el cual está pegado. Cada papelito formará una "carta" que, haciendo un libro con ellas, formarán un "atlas". La formalización de estas ideas es parte de la llamada Geometría Diferencial, una geometría propia del siglo XX, en la que los "papelitos" son planos tangentes en puntos de cartas locales de la esfera, y que estudia localmente curvas y superficies[6]:

"El problema de construir mapas planos de la superficie de la tierra fue uno de los que dio origen a la geometría diferencial, que se puede describir a grandes rasgos como la investigación de las propiedades de curvas y superficies en el entorno de un punto."

El término "geometría diferencial" fue usado así por primera vez por Luigi Bianchi (1856 – 1928) en 1894, pues se trata de un marco teórico más general en el cual se integran las geometrías no euclidianas y más que eso: todas las geometrías. La geometría ya no trata de puntos o rectas del espacio, sino de lo que se llama *variedades*. El punto de partida puede decirse que era el trabajo realizado por Gauss en la construcción de mapas y la llamada Geodesia, que apoyaría un nuevo enfoque sobre la naturaleza del espacio.

La geometría diferencial trata de las propiedades de las curvas y superficies que varían de un punto a otro, y están sujetas a variaciones (de punto en punto) donde tiene sentido la utilización de las técnicas del Cálculo. Gauss, en su *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*, ofreció la nueva idea que usaría Riemann: una superficie se podía ver como un espacio en sí mismo. En su investigación, Riemann concluyó que, para estudiar el espacio, debía hacerse localmente y no como un todo: el espacio se debía analizar por pedazos. Una variedad diferencial es uno de esos pedazos a estudio. Constituye, de esta forma, la Geometría Diferencial un elemento revolucionario para la concepción del espacio, más aún que las restantes geometrías, dado que éstas mantenían la imagen de un espacio real intocable en el cual se encontraban las figuras, cuyas propiedades 'reales' tenían que desvelarse matemáticamente bien con unos métodos sintéticos puros, bien con unos medios de coordenadas no intrínsecas.

[6] Bell, E.T., Historia de las matemáticas, p. 365, Ed. Fondo Cultura Económica (2003).

Figura 14. Red de triángulos para definir "un espacio". Cuadro de la serie de *Las meninas* de Picasso.

El cubismo. Por todo lo visto anteriormente, *Las meninas* de Velázquez están asociadas al concepto clásico del espacio –habitación en la cual se está desarrollando la escena- en el que se encuentran las figuras –los personajes del cuadro-. ¿Cabe pensar en unas *meninas* desde el nuevo concepto del espacio que da la Geometría Diferencial? La respuesta es afirmativa: Sí.

Pablo Ruiz Picasso recrea el espacio "a trozos" de *Las meninas*. El espacio no sólo tiene tres dimensiones que hay que representar fielmente en el lienzo. Se estudia localmente, de ahí la evidente triangulación de este cuadro que forma parte de la serie aludida al comienzo. Si en el cuadro de Velázquez se hace desaparecer un personaje o un elemento decorativo de la habitación, el espacio no se verá modificado, sólo lo hará la escena; si, por el contrario, se elimina un trozo de esta versión de Picasso, el espacio hay que reorganizarlo completamente de nuevo. Es una nueva concepción del espacio como una red de redes en cuyos vértices se encuentran los puntos que definen a cada una de ellas y que se eligen siguiendo un mismo criterio.

Por otro lado, como ya ha quedado de manifiesto, Velázquez utiliza todo el conocimiento disponible en su época sobre diferentes perspectivas para que su cuadro fuese perfectamente visto por cualquier persona que lo observe a la distancia adecuada (perpendicularmente a su plano, delante de él, justo en el medio y a una distancia igual a su anchura). A Picasso se le ocurrió cómo se vería el cuadro desde dentro del cuadro; es decir, cómo lo verían los personajes que forman parte de él. ¡Genial!, ¿verdad? Claro, cada uno vería "su trozo", como si fuese uno de los papelitos a los que me refería antes sobre los que se proyectaba la esfera "localmente" (es decir, por entornos de puntos) que después se "pegarían" juntos para hacer el atlas. Concretamente, de doña Agustina de Sarmiento verían sus compañeros y compañeras de cuadro los siguientes elementos que, junto al punto de vista externo, son suficientes para representar completamente al personaje[7] (recuérdese que todos los papelitos pegados deben representar la tierra entera):

Figura 15. Doña María Agustina de Sarmiento vista por 6 ojos.

[7] Corrales Rodrigáñez, C., Un paseo por el siglo XX de la mano de Fermat y Picasso, Ed. U. Complutense (2001)

a) Bandeja, desde arriba y búcaro –vistos por Agustina Sarmiento–, b) palma de la mano –vista desde la posición de Velázquez–, c) contorno de cabeza y pelo –visto por la Velasco y los guardadamas–, d) ojo izquierdo –visto por Nieto Velázquez–, e) ojo derecho y lazo en lado derecho de su cabeza –vistos por cualquier espectador del cuadro– f) y garganta –vista por el mastín, desde abajo–. Pegados los trozos convenientemente, queda:

Figura 16. Doña María Agustina de Sarmiento. Picasso, 1957.

¡Qué bien entendió este pintor malagueño la geometría propia de su tiempo! ¿Cómo, si no es que estaba investigando sobre un nuevo lenguaje pictórico, puede entenderse tal dedicación a esta serie? Seis planos de coordenadas, seis proyecciones sobre ellos y no sólo tres como en la Geometría Euclídea, son los propios para representar el espacio de cuatro dimensiones: ¡eso es el cubismo de Picasso! Esto responde completamente a la pregunta que hacía al comienzo de este epígrafe. No me cansaré de llamar genio entre los genios a ese insigne pintor andaluz, sin lugar a dudas el pintor español más influyente del siglo pasado.

¿Sabía Matemáticas Picasso? No he tenido acceso a ninguna biblioteca desde la que poder dar respuesta a esta pregunta como lo hiciera anteriormente con Velázquez. Sin embargo, sí es conocido el que en diversas reuniones de la conocida como *La bande à Picasso*, grupo formado por el pintor malagueño y sus ruidosos amigos, se hablara de problemas matemáticos. Por ejemplo, el 22 de noviembre de 1908, en el número 13 de la place Ravignan (en la actualidad place Emile Goudeau) de París, estaba instalado Picasso y, según la policía, era un "nido de anarquistas, nihilistas, simbolistas, bohemios y otras gentes de mal vivir", en la cena homenaje al pintor que llamaban el Aduanero Rousseau, el poeta Max Jacob planteó el siguiente problema:

> "Seis amigos beben cerveza en la tasca de Azon y, en total, bebieron 21 vasos. Si cada uno de ellos ha bebido distinto número de vasos, ¿cuántos vasos ha bebido cada uno?"

En la misma reunión, aparecieron el pintor madrileño Juan Gris y el también poeta Guillaume Apollinaire. Este último, propuso (dirigiéndose a Picasso):

> "Partiendo de la teoría de descomponer las figuras en formas geométricas, nuestro amigo ha inventado el cubismo. Pues bien, yo os propongo lo siguiente: A ver si somos capaces de dibujar un rectángulo en un papel cuadriculado sombreando las casillas del contorno. Así, el número de casillas, es decir, de pequeños cuadrados que componen la cuadrícula, será menor, igual o mayor que el número de casillas del interior del rectángulo. Y ahora pregunto: ¿podremos dibujar un rectángulo de proporciones tales que el borde (de una casilla de anchura) contenga un número igual de casillas que el rectángulo blanco interior?

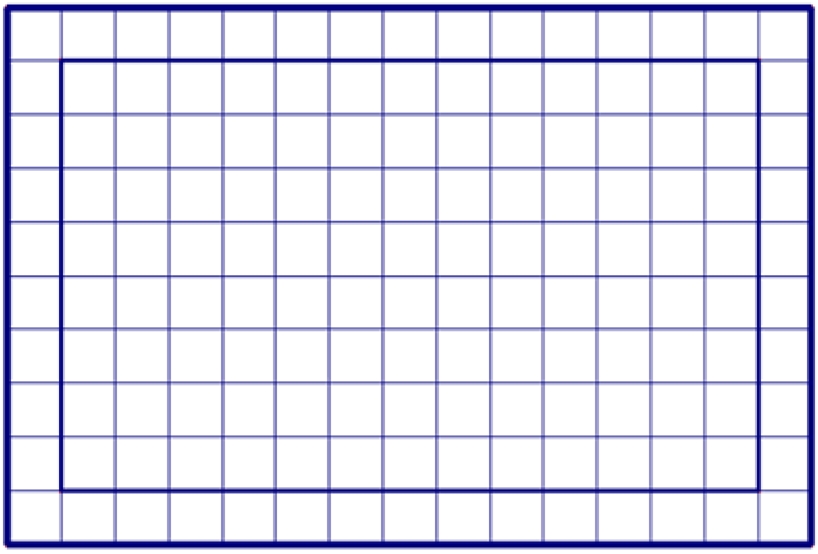


Figura 17

A la misma reunión se incorporaron Alice B. Toklas y Gertrude Stein, unas americanas que deseaban comprar algún cuadro de Picasso. Al ver que estaban con el problema anterior, Alice dijo:

> "Esta mañana me encontré con un problema muy curioso pintado con tiza sobre la acera. Y como al que lo pintó le debía de temblar el pulso, pues los cuadrados eran muy poco cuadrados."

Alice, poniéndose en pie cogió un carboncillo y dibujó en el suelo tres cuadrados que formaban una figura en forma de L. Todos los componentes de la banda, al ver a la norteamericana dibujando en el suelo del estudio, dejaron de resolver el problema del rectángulo y se acercaron en bloque, justo cuando ella se levantaba y decía:

> "Así estaban colocados los 3 cuadrados.
>
> El enunciado del problema decía:
>
> ¿Cuál es el número mínimo de casillas que se deben colorear en un tablero de 6 x 6 casillas cuadradas para que sea imposible recortar de la parte sin pintar un pedazo con la siguiente forma:"

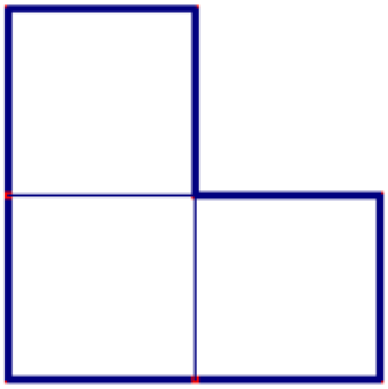


Figura 18

No pretendo decir con esta anécdota que Picasso se preocupara por las Matemáticas. Sin embargo, como decía antes, queda claro que en su entorno sí se hablaba de problemas ingeniosos de Geometría y, desde luego, es evidente su gran intuición geométrica a la hora de interpretar el espacio de cuatro dimensiones en su intersección con el de tres.

A modo de epílogo

Ha debido quedar clara la importancia de las concepciones de espacio para crear ambas "meninas". El del siglo XVII que se aplicara para crear Las meninas de Velázquez y el existente en el siglo XX con el que se elaboró el lenguaje cubista de Picasso. Ambas obras enfrentan la concepción clásica del espacio como una "caja", en cuyo interior se encuentran los objetos, con la moderna, como una red de conexiones entre sus puntos. La Geometría de Euclides y la Geometría Diferencial, respectivamente. Cada obra obedece al conocimiento geométrico de su tiempo. ¡Fantástico! Pero, ¿hubiera sido posible hacerlas de otra forma? Tanto en el siglo XVII como en el XX, no si en los cuadros se desea dejar constancia de los avances geométricos habidos en ellos.

Últimamente han surgido nuevas teorías para imitar formas que sólo la Naturaleza puede crear, que no son construibles con regla y compás. Me refiero a los "fractales". Una línea fractal es la línea de una costa, el dibujo que hace en el cielo un rayo durante una tormenta, etc. De nuevo, el mundo del arte su "pone las pilas" e incorpora estos monstruos modernos a sus creaciones. Ni más ni menos que José Saramago describe un fractal en una de sus novelas (*Todos los nombres*, Alfaguara) en uno de sus capítulos titulado **El cementerio general**. En él describe una forma natural, la de una dendrita, que admite un modelo teórico como un objeto fractal. El concertista y compositor canario Gustavo Díaz Jerez se suma a los nuevos estilos musicales y trabaja en la llamada "música seriada", basada en series numéricas obtenidas a partir de algoritmos propios de la fractalidad... Y el Arte sigue su camino, haciendo que reconozcamos la belleza como uno de los valores irrenunciables en nuestra sociedad, en el que las Matemáticas pueden ser una gran herramienta para poder compartir con los demás esa belleza que toda obra de arte encierra. ¿Cómo serían unas meninas con esta nueva geometría?

Desgraciadamente, la enseñanza de las Matemáticas no ha conseguido que sean entendidas como lo que son: 'Una forma de pensar'. ¿Cuáles serían algunas características de esta forma de pensar? Fundamentalmente, reconocer los problemas, enunciarlos y elaborar conjeturas para iniciar la búsqueda de soluciones y, si las hubiere, detectando cuál es la mejor. Es decir, saber analizar una situación, haciéndonos preguntas y buscándoles respuestas, mediante el uso de una serie de técnicas que nos permiten pensar bien en el sentido de que no damos lugar al olvido de algún caso o a la incorrección del razonamiento en alguno de sus pasos. Pero también hay que decir que forma parte de esta "forma de pensar" el concebir nuestra tarea frente a un problema como un juego o reto en el que nos gusta participar. La pena es que no se consigue trasladar al alumnado el gusto por la belleza de las Matemáticas, por el arte de pensar mejor, ni la importancia que tienen en nuestra sociedad porque, la mayoría de las veces su uso es poco visible y otras es el propio profesorado quien lo desconoce y se refugia en sus clases en "orgías" de torres de quebrados y problemas tan maravillosos como inútiles. No obstante, en caso de haberse producido, estas malas experiencias no justifican el que determinadas personas a quienes, por ejemplo, se les supone la formación universitaria, cometan la temeridad de afirmar públicamente que "las Matemáticas no sirven para nada". A ellas van dirigidas las palabras del matemático británico Hardy[8]:

"Las civilizaciones babilónica y asiria han perecido… pero sus matemáticas son todavía interesantes y el sistema sexagesimal de numeración se utiliza aún en Astronomía… Las matemáticas griegas perduran más incluso que la literatura griega. Arquímedes será recordado cuando Esquilo haya sido olvidado, porque las lenguas mueren y las ideas matemáticas no".

Ojalá que "ningún Esquilo" desaparezca, pero es seguro que Euclides no lo hará.

[8] Hardy, G., Apología de un matemático. Ed. Nivola, 2000.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, página 29
ISSN: 1815-0640

Coordinado por Alicia Bruno Castañeda

Monográfico

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 31 -32
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Introducción

La enseñanza de las matemáticas para personas con necesidades educativas especiales es una tarea que, por afectar a un sector minoritario de la población estudiantil, no debe quedar olvidada por parte de los profesionales implicados en la enseñanza: profesores, instituciones educativas, investigadores, etc.

Este número monográfico, que hemos titulado “Matemáticas especiales para alumnos especiales”, quiere ser una pequeña contribución de la revista Unión en la ayuda a los profesionales que trabajan con “alumnos especiales” para la mejora de su aprendizaje matemático. Entendemos como “especiales” al alumnado que requiere un tratamiento específico en el aula de matemáticas, e incluimos tanto a los que presentan dificultades de aprendizaje, debido a determinadas discapacidades (sordos, ciegos, deficientes mentales…), como a los que presentan altas capacidades o talentosos y también a los que tienen otro tipo de características diferenciales, como los que aprenden matemáticas en edad adulta.

La declaración del año 2000 como el año mundial de las matemáticas planteó la reflexión de cómo poner al alcance de *todo el alumnado* las matemáticas necesarias para formar ciudadanos del siglo XXI. Los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (desarrollados por el National Council of Teachers of Mathematics, 2000) presentan seis principios que describen las características de una educación matemática de alta calidad. Estos principios son: *Igualdad, Currículo, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación y Tecnología*. El *principio de igualdad* manifiesta que “la excelencia en la educación matemática requiere igualdad; altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes”. Se señala que “todos los alumnos”, con independencia de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para aprender matemáticas. Es un principio loable y justo.

Conseguir la igualdad para todos los alumnos requiere principalmente, *ayudas* y *tiempo. Ayudas* al profesorado para que disponga de recursos (humanos y materiales) que permitan trabajar las situaciones propias de este alumnado; *Tiempo* para que los profesores realicen las adaptaciones del currículo o creen materiales adaptados y *tiempo* también para los estudiantes que lo necesitan, para desarrollar las tareas que les permitan consolidar el conocimiento matemático.

Aunque somos conscientes de que no hemos tratado en este monográfico todas las necesidades educativas especiales, los trabajos presentados muestran el esfuerzo de profesores e investigadores por crear recursos y por profundizar en entender la manera en que este alumnado tan característico, aprende matemáticas.

La profesora Mª Trinidad Cámara presenta un material curricular adaptado para alumnado sordo, dedicado a la enseñanza de los números en la educación secundaria. Dicho material es el fruto de una necesidad real de profesores que contaban en su centro con alumnado sordo.

La investigación en educación matemática también se ha acercado a los alumnos especiales. En este monográfico, este hecho queda de manifiesto a través de los tres artículos. El trabajo de la profesora Juana Mª Ortega muestra la importancia del uso del ordenador en el aprendizaje matemático del alumnado con síndrome de Down. La autora aporta información sobre herramientas informáticas que dan respuesta a las dificultades del alumnado con deficiencias en el aprendizaje matemático. Los profesores Nuria Rosich y Ángel Casajús presentan un estudio en el que se compara el conocimiento de alumnos con Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) en la resolución de problemas aritméticos-verbales frente a alumnado sin esta deficiencia. Los errores manifestados por los estudiantes con TDAH en estos problemas han servido para dar pautas metodológicas que ayudan a mejorar su aprendizaje. Muy diferentes son las necesidades de los alumnos con talento en matemáticas, como así nos lo hace ver el trabajo de los profesores Enrique Castro, Maryorie Benavides e Isidoro Segovia. Estos autores sintetizan una investigación realizada con alumnado talentoso, en la que han desarrollado un test para evaluar el conocimiento sobre la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Dicho test ha servido, al mismo tiempo, para conocer los errores que cometen los alumnos de altas capacidades en la resolución de este tipo de problemas.

En España, el proyecto ESTALMAT, que tiene como objeto detectar y estimular el talento precoz en matemáticas, está ampliamente consolidado en diferentes comunidades autónomas. Los profesores Eugenio Hernández y Mercedes Sánchez nos muestran en su trabajo cómo se desarrolla en la actualidad el proyecto, así como algunos ejemplos de actividades que realizan con los alumnos.

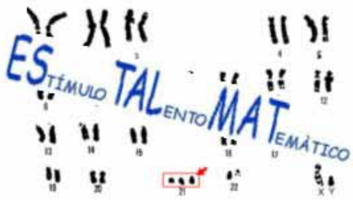
En esta misma línea, los profesores Ana Mª Martín y Ángel Tenorio presentan la organización de un curso denominado Aula Abierta de Mayores en la que reciben formación matemática personas con edades superiores a los 55 años, en la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla. Nos presentan la estructura del curso y algunos ejemplos de actividades matemáticas que han diseñado.

Un carácter diferente tiene la entrevista realizada al profesor Armando Arencibia por parte del profesor Luis Balbuena, ya que en este caso, la discapacidad la presenta el profesor. La entrevista nos narra la trayectoria de un profesor de matemáticas ciego. Su experiencia y su esfuerzo es un ejemplo de cómo se puede realizar una labor profesional ejemplar con una discapacidad física. Como él mismo nos transmite, su experiencia, los materiales que ha creado y su manera de acercarse a las matemáticas, le pueden servir en el futuro para ayudar a alumnado que presente esta misma discapacidad.

Esperamos que los artículos de este monográfico sirvan de referencia y de apoyo, y ayuden en la búsqueda de nueva información a los profesionales que trabajan con alumnos especiales. El equipo editorial de Unión agradece a todos los autores su contribución en este número “doblemente especial”.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Matemáticas especiales para alumnos especiales

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 33 - 44
ISSN: 1815-0640



Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Cinco cuadernillos para el estudio de los números dirigidos a alumnos con deficiencia auditiva

Mª Trinidad Cámara Meseguer

Resumen

Un grupo de profesores de Matemáticas e intérpretes de Lengua de Signos del IES Juan Carlos I de Murcia realizamos cinco cuadernillos en los que adaptamos los temas sobre números Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales a alumnos con deficiencia auditiva. Estos cuadernillos se realizaron a través de un proyecto de innovación llamado “El estudio de los números para alumnos con deficiencias auditivas (ESO y Bachillerato, 12-17 años)”. En este artículo se explica cómo surgió el proyecto, la estructura de los cuadernillos realizados, su puesta en práctica y las perspectivas futuras.

Abstract

A group of Mathematic teachers and Signal Language Interpreters of the Secondary School Juan Carlos I of Murcia made five booklets in which the study of Natural, Integer, Rational, Irrational and Real numbers was adapted for students with audio deficiencies. These booklets were made as part of an innovation project called “Numbers study for students with audio deficiencies (ESO and Bachillerato, 12-17 years)”. This paper explains the origin of the project, the booklets structure, the application of the project and possible future applications.

Introducción

Los alumnos oyentes (sin deficiencia auditiva) completan las explicaciones del profesor con la lectura de libros de texto y recuerdan continuamente cómo se dice $\sqrt{\ }$, $\frac{3}{4}$, 127,… pues lo están oyendo cada vez que el profesor los nombra en sus explicaciones.

Los alumnos con deficiencia auditiva y que se comunican en Lengua de Signos reciben la explicación a través de lo que sus ojos ven en la pizarra y los signos que la intérprete de Lengua de Signos realiza para comunicarles la explicación del profesor.

Pero, ¿cuándo ve escrito el alumno las palabras “raíz cuadrada”, “tres cuartos”, “ciento veintisiete”,…? ¿la terminología usada en los libros de texto resulta comprensible para una persona con deficiencia auditiva? ¿qué le cuesta más al alumno, entender las expresiones en español de un libro de texto o el concepto matemático?

Un grupo de profesores e intérpretes de Lengua de Signos del IES Juan Carlos I de Murcia, hemos realizado cinco cuadernillos sobre números en los que utilizamos estrategias distintas a las de otros libros de texto para tratar de solucionar los problemas antes expuestos.

¿Cómo surge el proyecto?

El IES Juan Carlos I de Murcia ha sido desde el curso 93-94 hasta el curso 06-07 uno de los centros de Murcia donde se integraban de forma preferente alumnos con deficiencia auditiva. La mayoría de estos alumnos se comunican en Lengua de Signos y en clase además del profesor de la asignatura, tienen un intérprete de Lengua de Signos.

Como profesora de Matemáticas trabajé con ellos por primera vez en el curso 98-99. En dicho curso me encontré con 2 alumnas en 1º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud y 2 alumnos en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales (16 años, es una enseñanza no obligatoria y preparatoria para la Universidad o módulos profesionales de grado superior). Los cuatro alumnos se comunicaban en Lengua de Signos y en todas mis clases tenía una intérprete de Lengua de Signos que hacía de puente de comunicación.

A pesar de tener intérprete de Lengua de Signos, me resultaba muy desagradable no poder dirigirme a mis alumnos directamente y necesitar siempre de una intérprete. Decidí comenzar a aprender Lengua de Signos y pronto pude relacionarme con ellos de forma más directa.

Al curso siguiente, al comenzar a comunicarme en Lengua de Signos con cierta soltura, desde jefatura de estudios se plantea la posibilidad de dar clase de matemáticas a los alumnos de 3º y 4º ESO (los 2 últimos años de enseñanza obligatoria, 14-15 años) en pequeños grupos formados por alumnos con deficiencia auditiva. Durante este curso, al tratar a los alumnos de forma más directa e individual, observé algunas situaciones curiosas:

- Así, una alumna que ya realizaba actividades como calcular $\sqrt{1024}$ con cierta soltura, se queda parada ante la siguiente actividad:
  “Halla la raíz cuadrada de: a) 121 b) 900 c) 1764”

Le pedí que leyese otra vez la actividad porque sí sabía hacerla, y al observar sus manos vi como la expresión “raíz cuadrada” la signó como “raíz de un árbol y un cuadrado (polígono)”

Esto me hizo pensar ¿cuándo le había dicho yo que $\sqrt{}$ se dice "raíz cuadrada"? Y si se lo dije fue una sola vez, mientras que sus compañeros oyentes lo estaban oyendo continuamente en clase.

- Otra vez en un examen había dos preguntas:
  1. Descompón en factores: a) 256 b) 363 …
  2. Halla el m.c.d. y m.c.m. de 1024 y 500.

Una alumna contestó correctamente a la segunda cuestión pero ni siquiera empezó la primera. Al preguntarle por qué no hizo la primera pregunta me dijo: "¿qué es "descompón en factores"?"

- Al trabajar con programas de ordenador, lo que más les costaba a estos alumnos eran actividades en las que se relacionaban polígonos con su nombre, números con su nombre,…

Todas estas experiencias y las que la intérprete observaba, nos llevaron a plantearnos la posibilidad de escribir los temas adaptados a su lengua para que tuviesen un libro de consulta y refuerzo, al igual que lo tenían sus compañeros oyentes.

En un principio, se pensó en adaptar los libros de texto que llevaban sus compañeros, pero esto era muy arriesgado ya que estos libros cambian después de unos años. La otra opción que barajamos, y que finalmente llevamos a la práctica, era la de escribir los temas adaptados independientemente de cualquier editorial.

Realización del proyecto

Al comenzar el curso 00-01 un grupo de profesores del departamento de Matemáticas y las dos intérpretes de Lengua de Signos del IES Juan Carlos I, solicitamos ayuda a través de un proyecto de innovación para realizar cinco cuadernillos adaptados a alumnos con deficiencia auditiva sobre los números:

1. Los números naturales.
2. Los números enteros.
3. Los números racionales.
4. Los números irracionales.
5. Los números reales.

Estos temas no se corresponden con el curriculum de ningún curso pero sí forman un bloque importante que se estudia desde los primeros cursos de secundaria hasta primero de bachillerato.

Así, el primer tema es abordado por alumnos oyentes en la etapa de primaria (hasta 12 años), pero para una persona con deficiencia auditiva la resolución de problemas con texto resulta muy complicada y se pospone su estudio hasta la etapa de secundaria (12-15 años). Los temas 2 y 3 se estudian de forma cíclica a lo largo de toda la secundaria (12-15 años). Los temas 4 y 5 se desarrollan sobre todo en 3º y 4º de ESO (14-15 años) y en 1º de Bachillerato (16 años).

Las diferencias entre la forma de abordar estos temas en estos cuadernillos y en un libro de texto normal son:

1. Recordar de forma reiterada como se dicen los símbolos y números que aparecen en el texto.
2. Explicar mediante sinónimos, dibujos o Lengua de Signos aquellos términos que consideremos interesantes que un alumno conozca.
3. Adaptar las explicaciones tanto de teoría como de problemas resueltos. Para ello, en lugar de realizar la explicación usando muchas frases (como acostumbramos a hacerlo con alumnos oyentes), hacemos explicaciones más visuales: con flechas, color, frases cortas,…
4. Transcribir la explicación teórica adaptada a una explicación tal y como aparece en cualquier libro de texto para que se vayan familiarizando con la terminología y expresión de los libros de texto normales.
5. Abordar en cada cuadernillo el tema con la misma profundidad que lo harían los libros de texto normales.

Estructura de cada cuadernillo

Cada tema o cuadernillo se divide en tres partes:

- Teoría.
- Problemas resueltos.
- Problemas propuestos.

El apartado de teoría se realiza en doble versión:

- Las páginas derechas desarrollan el contenido tal y como puede aparecer en cualquier libro de texto y las realizaron los profesores del departamento de Matemáticas (Fig. 1).
- En las páginas izquierdas aparece el texto adaptado. Tratan el mismo contenido que la correspondiente página derecha, pero usando otros recursos que hiciesen más fácil la comprensión a un alumno con deficiencia auditiva (Fig. 2). Estas páginas las realizamos entre las intérpretes de Lengua de Signos y yo (profesora de Matemáticas con conocimiento de Lengua de Signos y experiencia en la enseñanza a alumnos con deficiencia auditiva).

Los recursos utilizados para adaptar el texto fueron: frases modificadas para tener una estructura más cercana a la Lengua de Signos (Fig. 3), flechas (Fig. 4), uso del color (Fig. 4 y 5), explicaciones al margen (Fig. 6),…

Posteriormente, una alumna sorda profunda de 1º de bachillerato de ciencias leía las páginas adaptadas y marcaba todas las palabras o expresiones que no entendía. Si lo marcado creíamos que se podía cambiar o explicar de otra forma, lo modificábamos, pero si no, se ponía en cursiva y se aclaraba al margen usando un sinónimo, una explicación, un dibujo o un signo (Fig. 7). También, se usó el margen para recordarles cómo se leen determinadas expresiones matemáticas, números, fracciones, raíces,... (Fig. 8).

LOS NÚMEROS REALES

Llamamos números reales al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales. Los números reales se representan como R.

$$\boxed{R = Q \cup I}$$

Así, los números que hemos visto en estas 5 unidades se pueden resumir en:

$N = \{0, 1, 2, ...\}$

$\downarrow$

$Z = N \cup \{-1, -2, -3, ...\} = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\downarrow$

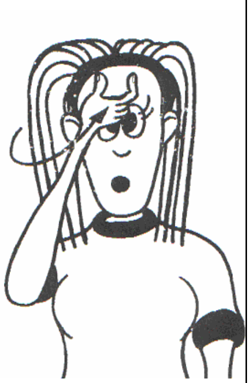
$Q = Z \cup \{$ fracciones $\}$ $\quad$ $I = \{$números con expresión decimal infinita$\}$

$R = Q \cup I$

En este tema vamos a definir una serie de conceptos que afectan a todos los números estudiados hasta ahora.

Figura 1: Ejemplo de un fragmento de lo que sería una página sin adaptar.

Recuerda: $\cup$ quiere decir unión



concepto

NÚMEROS REALES

Los números reales son los números racionales + los números irracionales. Su signo es R.

$$\boxed{R = Q \cup I}$$

Resumen de los números que ya hemos visto en los temas 1 hasta el 5:

$N = \{0, 1, 2, ...\}$

$\downarrow$

$Z = N \cup \{-1, -2, -3, ...\} = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\downarrow$

$Q = Z \cup \{$ fracciones $\}$ $\quad$ $I = \{$números con expresión decimal infinita$\}$

$R = Q \cup I$

En este tema, vamos a explicar algunos *conceptos* que valen para todos los números ya estudiados hasta ahora.

Figura 2: Ejemplo del mismo fragmento de la Figura 1 pero en la página adaptada.

Para hacer algunas operaciones (ordenar, suma y resta) hacen falta fracciones con el mismo denominador (nº de abajo). ¿Cómo se hace?	Para realizar ciertas operaciones que después explicaremos, como: ordenación, suma y resta, necesitamos que todas las fracciones que intervienen en dicha operación tengan el mismo denominador.

Figura 3: Ejemplo del mismo texto en la página izquierda (adaptado) y en la página derecha. Se trata de construir frases con una estructura parecida a la Lengua de Signos y que el vocabulario empleado sea de fácil comprensión.

Ejemplos:

$\frac{7}{2} \rightarrow$ Hacemos la división

$$\begin{array}{l|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

resto　　cociente

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar los radicales, primero descomponemos el radicando (el número dentro de la $\sqrt{\ }$) y después, si podemos simplificamos, ¿cómo?

1. Sacar números fuera de la raíz. ¿Cómo? los exponentes divididos (:) entre índice de la raíz. Salen fuera números ¿cuántos? Según cociente. Números dentro ¿cuántos? según resto.

índice

Ejemplo:

$\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4}$ (9 y 4 son exponentes)

descomponemos en factores

$$\begin{array}{l|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

dentro 2^0　Fuera 2^3　　dentro 3^1　Fuera 3^1

$$\sqrt[3]{41472} = \sqrt[3]{2^9 \cdot 3^4} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot \sqrt[3]{3}$$

Figura 4: Ejemplos de cómo el uso del color y de las flechas ayudan al alumno a seguir la explicación, evitando utilizar texto. Fragmentos de páginas adaptadas.

Por ejemplo 543

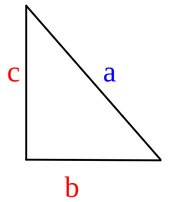
centenas	decenas	unidades
5	4	3

5 centenas, 4 decenas y 3 unidades → 5 veces cien, 4 veces diez y 3 unidades → 500 + 40 + 3

Figura 5: Ejemplo de cómo el uso del color es el que hace que el alumno relacione centenas con el número de cientos y con 00. Fragmento de una página adaptada.

Recuerda: *Teorema de Pitágoras*. Es una fórmula que dice:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado = cateto al cuadrado + otro cateto al cuadrado



$a^2 = b^2 + c^2$

a se llama hipotenusa

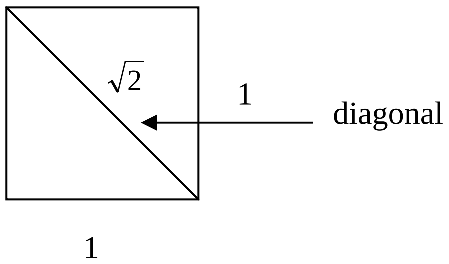
b y c se llaman catetos

Primos entre sí: dos números son primos entre sí ¿cuándo? Descomponemos; si no hay factores iguales, son primos entre sí

<u>Número par</u>: si número es igual a 2 · otro número.

SIEMPRE si nº ↑ 2 es par entonces nº es par

c) Un cuadrado, con lado entero (un número sin decimal, sin coma) entonces la diagonal mide un número irracional. Ejemplo un cuadrado con lado = 1, usamos el *teorema de Pitágoras*, y la diagonal mide $\sqrt{2}$



$\sqrt{2}$ es irracional, ¿cómo lo sabemos? Irracional quiere decir que no es igual a una fracción.

Ejemplo: Si $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$; simplificamos $\frac{c}{d}$ hasta que no podamos más $\rightarrow \frac{a}{b}$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a y b son enteros, y *primos entre sí*.

Entonces pasamos b arriba → $b \cdot \sqrt{2} = a$

y elevando al cuadrado $\uparrow^2 \rightarrow b^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow b^2 \cdot 2 = a^2$

Entonces a^2 es un número (da igual cuál), pero par, porque: $a^2 = 2 \cdot b^2$ Si a^2 es par entonces a es par, lo que quiere decir que a es igual a 2 · otro número (da igual cuál), por ejemplo t → a = 2 · t

$a^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow (2 \cdot t)^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow 4 \cdot t^2 = 2 \cdot b^2 \rightarrow \frac{4}{2} \cdot t^2 = b^2 \rightarrow 2 \cdot t^2 = b^2$

Entonces b^2 es par (porque $b^2 = 2 \cdot t^2$) → Entonces b es par.

Eso es imposible, porque yo antes he dicho que a y b son primos entre sí, no pueden ser los dos par.

Figura 6: Ejemplo de explicaciones al margen como complemento a la explicación. Fragmento de una página adaptada.

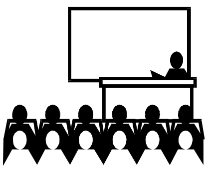
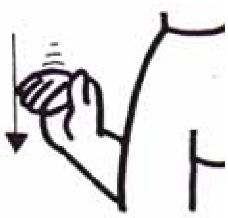
mides → del verbo medir	Muchas veces cuando tú *mides* una cosa, no puedes decir el número exacto, dices el número aproximadamente ….
sótano = pisos bajo tierra. Ejemplo: garaje de coches en El Corte Inglés	Los números naturales no valen para todas las situaciones de la vida. Por ejemplo seguro tú has visto un ascensor. El ascensor tiene números negativos (-), por ejemplo -1, -2, -3 que quiere decir *sótanos* de un edificio; la temperatura también puede ser negativa, ejemplo -10º, -11º, -3º, que quiere decir "menos de 0".
JERARQUÍA = orden	***JERARQUÍA* DE OPERACIONES**
 *bono*	Jorge para ir al instituto tiene que coger el autobús que le cuesta 1 € por viaje. a) ¿Cuánto se gasta al mes en el autobús? b) Si saca un *bono* de 20 viajes que le cuesta 18 €, ¿gastará más con el bono o menos?
 2 filas con 6 *asientos* en cada fila	En un cine hay 20 filas y 25 *asientos* en cada fila. ¿Cuántas personas pueden sentarse en el cine?
 *contar*	Estos números se empezaron a usar hace mucho tiempo, y se usan mucho para *contar* cosas, aunque nosotros también las usamos para otras cosas:
 *Descuento/rebajado*	En unos grandes almacenes están *rebajados* todos los artículos un 20%. Indica el precio final de cada uno de los siguientes artículos: a) Una falda de 36´14 euros. b) Una cámara de fotos de 70´3 euros c) Un juego de 30´12 euros

Figura 7: Ejemplos de cómo usamos el margen para explicar las palabras que aparecen en cursiva en el texto. Estas palabras han sido marcadas por alumnos sordos profundos como desconocidas. Fragmentos de páginas adaptadas.

1/8 se dice un octavo $\frac{162}{135}=\frac{54}{45}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$ se dice: 162 partido por 135 es igual a 54 partido por 45 es igual a 18 partido por 15 es igual a seis quintos	1 / 8 de pizza quiere decir: de una pizza hacemos 8 partes y cogemos 1 … $\frac{162}{135}=\frac{54}{45}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$ …..
los números -1, -2, -3, ... se llaman números **negativos** y los números 1, 2, 3, ... se llaman números **positivos.** Los números negativos se leen: -1 → menos uno -2 → menos dos …	Los números naturales no valen para eso, necesitamos otros números: los números enteros. El conjunto de números enteros se llama Z y son los números 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 ... Z = {......, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}
Depende n se dice: $\sqrt{\ }$ raíz cuadrada $\sqrt[3]{\ }$ raíz cúbica $\sqrt[4]{\ }$ raíz cuarta $\sqrt[5]{\ }$ raíz quinta …..	

Figura 8: Ejemplos de cómo usamos el margen para recordarles como se leen distintos números. Fragmentos de páginas adaptadas.

El motivo por el que se escribió la teoría a doble página era que los alumnos fuesen capaces de entenderla en las páginas izquierdas y pudieran comparar con las páginas derechas y de esta forma, en un futuro, fueran capaces de entender otros libros de matemáticas.

Los apartados de problemas (tanto problemas resueltos como problemas propuestos) tienen un formato diferente al de la teoría. Se escriben sólo en una versión y, por tanto, no hay distinción entre páginas derechas e izquierdas.

Los enunciados aparecen tal y como pueden aparecer en cualquier examen o libro de texto, y sólo llevan aclaradas al margen (con un signo, un dibujo, una explicación o usando sinónimos) todas aquellas palabras o expresiones que los alumnos sordos de nuestro centro nos indicaron que no conocían (nunca se adaptan estos enunciados).

Las palabras o expresiones aclaradas al margen, aparecen en cursiva en el texto para indicar al alumno que tiene una explicación en el margen.

En el apartado de problemas resueltos, las soluciones tienen una estructura diferente a la que podemos encontrar en otros libros. Aquí sustituimos explicaciones largas y con mucho vocabulario por esquemas, dibujos, color y frases cortas con una estructura adaptada para que resulte más cercana a la estructura de la Lengua de Signos, aunque intentando que esta estructura sea correcta en Lengua Castellana (Fig. 9). En el caso de los problemas propuestos sólo aparece la solución final.

Expresa en gramos:

a) Tres cuartos de kilo.
b) Medio kilo.
c) Un kilo y medio.

Solución

Tú sabes que: 1 KILO = 1000 GRAMOS

a) **Tres cuartos** de kilo = $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \times$ 1000 gramos

$$\frac{3}{4}\cdot 1000 = \frac{3000}{4} = 750 \text{ gramos}$$

b) **medio** kilo = **La mitad** de un kilo = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times$ 1000 gramos

$$\frac{1}{2}\cdot 1000 = \frac{1000}{2} = 500 \text{ gramos}$$

c) Un kilo y medio = Un kilo y medio kilo = 1000 gramos + 500 gramos = 1500 gramos

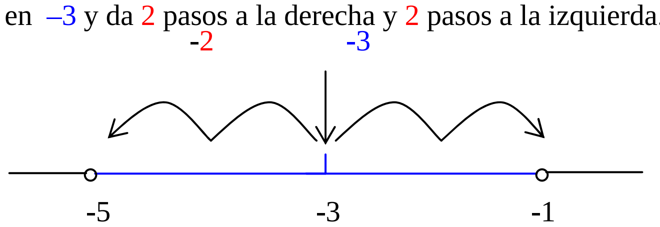
cuyo = suyo

Escribe en forma de intervalo abierto un entorno de la recta real *cuyo* centro sea –3 y su radio sea 2.

Solución

E(-3, 2) = (-3 – 2, -3 + 2) = (-5, -1)

Empieza en –3 y da 2 pasos a la derecha y 2 pasos a la izquierda.



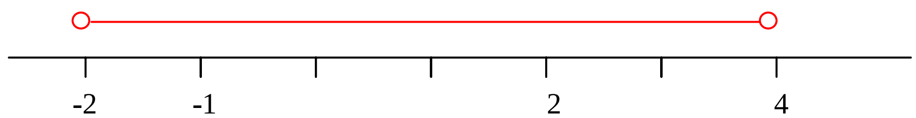
Dados = me dan

determina = di

intersección = ∩

Dados los intervalos I = (-2, 4) y J = [-1, 2] *determina* la unión e *intersección* de ambos.

Solución



I ∪ J todos los puntos de la línea azul y la línea roja. I ∪ J = (-2, 4)

I ∩ J puntos dentro de la línea azul y también de la línea roja.

I ∩ J = [-1, 2]

Figura 9: Ejemplos de problemas resueltos. Usando el color, flechas,… evitamos explicaciones llenas de frases. Aprovechamos el margen para aclarar palabras que no conocen.

Puesta en práctica del proyecto

Una vez realizados los cuadernillos seguimos dos vías de actuación:

1. Tratar de conseguir su publicación en formato libro.
2. Trabajar estos cuadernillos en el aula con alumnos con deficiencia auditiva.

El primero de los objetivos no se pudo conseguir porque al ser cuadernillos que usaban varios colores resultaba muy cara su publicación, y la Consejería optó por su publicación en formato CD (ver bibliografía).

El no disponer de estos cuadernos en forma de libro hizo que trabajáramos con cuatro o cinco copias que cada año reutilizaban diferentes alumnos. De esta forma la experimentación no fue tan completa como deseábamos.

Sí fue muy positiva, desde mi punto de vista, la apuesta que el centro hizo por estos alumnos, consiguiendo las suficientes horas de apoyo en Secundaria como para que yo pudiese trabajar sólo con ellos y darles clase en pequeños grupos separados de sus compañeros. Yo impartía estas clases en Lengua de Signos y trabajaba con ellos estos cuadernillos y otros temas no adaptados. Observé que tras unos primeros días de explicación de los cuadernillos y de atención individualizada, los alumnos eran capaces de seguir ellos solos el libro realizando preguntas puntuales.

Así, dependiendo de la tipología del grupo de alumnos se siguieron distintas metodologías:

- En grupos muy heterogéneos, cada alumno trabajaba un cuadernillo diferente, según el nivel en que se encontraba (Naturales, Enteros,…) que se le iba completando con más ejercicios propuestos. Ellos solos, a través de la lectura de los problemas resueltos y algo de la teoría, eran capaces de realizar los problemas propuestos y sólo realizaban preguntas puntuales, sobre todo de vocabulario. Esto permitía una atención individualizada y que cada alumno avanzase según sus capacidades.
- En grupos más homogéneos y sobre todo en 4º de ESO (15 años), curso anterior a bachillerato, en donde estos alumnos se incorporaban al aula normal en clase de Matemáticas, se siguió una metodología más parecida a la usada en clase con alumnos oyentes. Así, yo les explicaba los contenidos teóricos en Lengua de Signos, les proponía problemas para casa, y al día siguiente se resolvían estos problemas en la pizarra y se discutían dudas, tanto matemáticas como de vocabulario. Así, por ejemplo, me resultó curioso el día que al trabajar los porcentajes y realizar un ejercicio sobre el IVA (impuesto del valor añadido) y tratar de explicarles qué era el IVA, mis alumnos no supiesen qué eran los impuestos, que sus padres pagaban al estado un impuesto y que este se pagaba también al comprar una casa o un coche,… Ese día la discusión no fue matemática sino sobre por qué había que pagar impuestos, para qué usaba el estado ese dinero,…

No se experimentaron estos cuadernillos en Bachillerato, cuando el alumno ya estaba integrado en el aula. Sólo algún alumno pidió prestado alguno de ellos para repasar algún concepto.

Futuros proyectos

En la actualidad los alumnos con deficiencia auditiva de Murcia están integrados de forma preferente en otro centro en el que se ha puesto en marcha este año un nuevo proyecto de atención a alumnos con deficiencia auditiva llamado proyecto ABC.

Para que estos cuadernillos sean útiles a cualquier alumno con deficiencia auditiva, es imprescindible su reproducción en forma de libro que se pueda distribuir entre todo el que desee tenerlo como libro de consulta. Si esto fuese posible, debería:

1. Mejorarse el apartado de problemas propuestos, completando la colección de problemas ya que la experiencia nos indicó que eran escasos.
2. Realizar otros cuadernillos de temas interesantes y que en los libros de texto normales aparecen con mucho vocabulario como: proporcionalidad numérica, ecuaciones y sistemas de ecuaciones,…

Bibliografía

- Coordinadora: M. T. Cámara Meseguer (2002): “El estudio de los números para alumnos con deficiencias auditivas (ESO y Bachillerato)”. Edición digital. Consejería de Educación y Cultura. Dirección General de Formación Profesional, Innovación y Atención a la Diversidad. Región de Murcia.

Mª Trinidad Cámara Meseguer es licenciada en Matemáticas e Ingeniera Informática por la Universidad de Murcia y profesora de Matemáticas en el IES Juan Carlos I de Murcia, donde coordinó el programa de sordos durante los cursos 02-03 a 06-07. Ha participado en varias ponencias y publicaciones relacionadas con la enseñanza de deficientes auditivos, y en la elaboración del proyecto ABC para Secundaria (Consejería de Educación y Cultura de Murcia, Dirección General de Atención a la Diversidad). Es coautora de varios libros de texto de Matemáticas para Bachillerato y Taller de Matemáticas para ESO (editorial Edelvives) y del libro blanco del Taller de Matemáticas (Ministerio de Educación).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 45 - 61
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Trabajando las Matemáticas con personas mayores

Ana M. Martín Caraballo y Ángel F. Tenorio Villalón

Resumen

Durante los últimos cursos académicos, son varias las sesiones realizadas en el Aula Abierta de Mayores de la Universidad Pablo de Olavide que estaban dedicadas a tratar algunos contenidos matemáticos con una perspectiva atractiva y útil para el alumnado (cuya edad supera los 55 años). A este respecto, se buscaron temáticas que estuviesen presentes y relacionadas con la vida cotidiana. Más concretamente, se trataron temas como arte, naturaleza y matemáticas, juegos de azar, encuestas o algunos divertimentos matemáticos. Tanto la metodología como la temática de cada sesión permitieron que tanto alumnado como profesorado hayan quedado plenamente satisfechos al finalizar estas experiencias.

Abstract

In the last academic years, Senior Citizens' Open Lecture Room of Pablo de Olavide University has held several sessions about mathematical topics from an attractive, useful perspective for the students (whose age is greater than 55). Regarding this, the topics considered were related to their daily lives. More concretely, the following themes were dealt in the sessions: Art, Nature and Mathematics, games of chance, surveys or some mathematical entertainments and pastimes. Both the methodology and the theme for each session allow that both students and teaching staff are very pleased with these experiences.

1. ¿En qué consiste un aula de mayores?

Es en la década de los 60 cuando se plantea la necesidad de preparar y diseñar políticas sociales cuyos destinatarios fuesen las personas mayores. Obviamente, estas políticas tendrían que depender de las particularidades propias de cada país. Más concretamente, la atención a los mayores quería centrarse en los siguientes tres ejes fundamentales: pensiones, asistencia y servicios sociales.

Sin embargo, hubo que esperar a 1982 para que se celebrase la I Asamblea Mundial sobre el Envejecimiento, que conllevó un cambio esencial en la estructuración anteriormente citada para la atención a los mayores. Todas la modificaciones planteadas en esta asamblea fueron recogidas posteriormente por el Plan Internacional sobre el Envejecimiento (ONU, 1982), con el que se pretendía que tanto gobiernos como sociedad civil actuasen efectivamente ante la situación de nuestros mayores. Entre las recomendaciones del citado plan, aparece la necesidad de programas educativos pensados para ellos, en los que sus recursos y contenidos estuviesen adaptados a sus necesidades e intereses. Todas estas ideas sobre la formación de nuestros mayores se han recogido posteriormente en el concepto de "educación permanente" dado por la UNESCO (2000) y sus indicaciones al respecto. Para un comentario crítico acerca de las recomendaciones 45 a 51 del Plan Internacional sobre el Envejecimiento (las relativas a Educación para mayores), puede consultarse la referencia de Pavón (2002).

Las características demográficas de los mayores en España han de tomarse en consideración a la hora de elaborar acciones educativas para este colectivo. Tales características son:

1. El aumento constante y permanente de la esperanza de vida.

2. El aislamiento socio-cultural al que se ha sometido a este colectivo.

3. El compromiso social correspondiente a las políticas de bienestar.

En referencia al tercer punto, la Universidad debe trabajar en una concepción del aprendizaje como proceso permanente, teniendo en cuenta que la sociedad actual requiere de una formación continuada debido a que los conocimientos de sus ciudadanos van quedándose desfasados con respecto a los cambios que se suceden continuadamente.

La Universidad tiene un papel muy destacado en la educación y formación de mayores, ya que tiene que ser uno de los principales artífices en romper el aislamiento social padecido por nuestros mayores y debe buscar el favorecer tanto su propia autonomía como las relaciones intergeneracionales.

En las décadas de los 50 y de los 60, aparecieron las primeras Universidades de mayores y de la Tercera Edad en Europa, siendo Francia uno de los países pioneros (Castellón et al., 2004; Velázquez y Fernández, 1998). Hoy día, esta tendencia se ha generalizado y es una realidad en nuestro país y aparece incluida en el Plan Gerontológico Nacional (IMSERSO, 1993), el Plan de Acción para las personas mayores 2003–2007 (IMSERSO, 2003) y el Plan Andaluz de Servicios Sociales (Junta de Andalucía, 1989).

En la Comunidad Autónoma Andaluza, las universidades organizan actividades formativas para mayores, siendo estas promovidas desde las Administraciones Públicas de acuerdo con el artículo 31 de la Ley 6/1999. Estas actividades pueden presentarse siguiendo tres formatos diferentes: las aulas de formación, los cursos de perfeccionamiento y otras actividades distintas a las anteriores. Todo ello se realiza sin exigir el nivel académico necesario para acceder a la educación universitaria reglada, con lo que estas actuaciones no permiten la obtención de títulos oficiales.

Desde una perspectiva global, existe una enumeración hecha por la UNESCO (1998) indicando cuál debería ser la oferta educativa de las universidades dirigida hacia las personas mayores. En ella se resalta como prioritaria la apertura de los centros universitarios a los adultos ofreciendo "oportunidades" de aprendizaje "flexibles, abiertas y creativas".

En la actualidad, muchas instituciones educativas han preparado e implantado programas universitarios para este colectivo. El propio Programa Sócrates de la Comisión Europea engloba al programa GRUNDTVIG de cooperación europea en Educación para Adultos (Comisión Europea, 2006). Análogamente, el programa Sócrates también financió entre 1997 y 2000 la red Learning in Later Life, en el que puede consultarse un amplio catálogo de las instituciones educativas españolas con programas educativos y formativos para mayores.

Si nos limitamos al estado español, los programas universitarios para personas mayores se han incrementado de cinco a principios de los noventa hasta los más de cincuenta actualmente, siendo el número de alumnos superior a los 22.000 (Vila, 2002).

En la Ponencia-marco del VI Encuentro Nacional de Programas Universitarios para Mayores (Bru, 2002), se estableció la organización de Aulas de Mayores como una función de la Universidad Española. Además, otros dos puntos de interés justifican también la apertura de la Universidad a los mayores:

1. El envejecimiento poblacional: a mediados del s.XXI, los mayores de 50 mantendrán las estructuras económicas y de financiación de la Universidad en nuestro país.
2. El retraso de la jubilación: que conlleva un reciclaje profesional de los conocimientos poseídos por las personas mayores de 50.

Si hacemos una recopilación de las temáticas consideradas en los planes de estudio de las diversas Aulas de Mayores o de la Experiencia en España, podremos distinguir cinco áreas de conocimientos:

a) Humanidades y Ciencias Sociales;
b) Ciencias Jurídicas y Económicas;
c) Ciencias de la Tierra y del Medio Ambiente;
d) Ciencias Biosanitarias;
e) Ciencias Tecnológicas.

El porcentaje más elevado (con una clarísima diferencia con respecto de las restantes áreas) corresponde a las asignaturas de las áreas a) y b), en ese orden. Por su parte, el área e) es la que presenta el menor porcentaje de todas. De este modo, se observa que en estos programas el peso principal es soportado por las asignaturas que han sido tradicionalmente denominadas "de Letras", siendo residual el número de sesiones correspondientes al bloque de Ciencias Tecnológicas.

Como ya se indicó anteriormente, todas estas actividades corresponden a enseñanzas no regladas y, por tanto, no suele depender del Vicerrectorado encargado de la ordenación académica de la Universidad. En la siguiente tabla indicamos cada una de las Universidades Andaluzas y el Vicerrectorado que se encarga de su aula de mayores:

Universidad	Vicerrectorado	Nombre del Aula
Almería	Cultura, Extensión Universitaria y Deportes	Mayores en la Universidad. Ciencia y Experiencia
Cádiz	Alumnos	Aula Universitaria de Mayores
Córdoba	Relaciones Institucionales e Internacionales	Cátedra Intergeneracional "Profesor Francisco Santisteban"
Granada	Enseñanzas de Grado y de Posgrado	Aula Permanente de Formación Abierta
Huelva	Extensión Universitaria	Aula de Mayores y de la Experiencia
Jaén	Extensión Universitaria	Universidad de Mayores
Málaga	Bienestar Social e Igualdad	Aula de Mayores
Pablo de Olavide	Participación Social	Aula Abierta de Mayores
Sevilla	Relaciones Institucionales, Relaciones Internacionales y Extensión Cultural	Aula de la Experiencia

En cualquier caso, también existen universidades cuyos destinatarios son únicamente las personas denominadas “mayores”, siendo una de las de mayor tradición la Universidad de la Tercera Edad (UTE). Las titulaciones de la citada universidad corresponden a los bloques a) y b).

En los programas para mayores encontramos un alumnado diferente al que estamos acostumbrados. Es altamente exigente, receptivo y activo, implicándose mucho más en su formación que un estudiante universitario modelo. Además, requieren e incluso exigen una docencia centrada en la práctica cotidiana.

El perfil de este alumnado es, en general, el de una persona mayoritariamente inactiva laboralmente y cuyo nivel educativo puede variar completamente, siendo lo más habitual tener hasta Educación Secundaria (Vila, 2002).

Finalmente, queremos remarcar algunas de las conclusiones sobre la Educación de mayores obtenidas en el VI Encuentro Nacional de Programas Universitarios para Mayores (Bru, 2002):

a) Una persona puede aprender a cualquier edad; solo depende de su voluntad.
b) La formación personal ha de primar ante fines competitivos o profesionales.

c) La capacidad de adaptación debe fomentarse a cualquier edad.
d) Los cursos son gratificantes para los alumnos, ayudando a la realización personal y al fomento de las relaciones interpersonales y a la convivencia.
e) Los cursos facilitan la comprensión de la realidad actual, creando estímulos para mantenerlos activos física y psíquicamente y para alcanzar las competencias necesarias sobre salud, ocio y vida cotidiana.

2. Un caso particular: la Universidad Pablo de Olavide

En la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla (en adelante UPO), la formación universitaria para mayores comenzó su andadura en el curso académico 2002/03, cuando arrancó un programa de formación científica, cultural y social para mejorar la calidad de vida de las personas mayores y, de esta forma, fomentar su participación como dinamizadores sociales. El nombre del programa era el de Aula Abierta de Mayores y su planteamiento era el de un espacio dirigido a mayores de 55 años que respetase las directrices comentadas en la sección anterior acerca de la Educación de Mayores.

El Aula Abierta se ha puesto en marcha en aquellos municipios y comarcas de Sevilla cuyas distancias a la capital dificultaban su acceso a la formación y participación en ámbitos universitarios, siendo ocho las sedes que actualmente existen. A continuación, se indican las mismas apareciendo entre paréntesis el año en que comenzó su andadura:

- Carmona (curso 02/03).
- Marchena (curso 02/03).
- Aznalcóllar (curso 03/04).
- Alcalá de Guadaíra (curso 05/06).
- Gerena (curso 05/06).
- Almensilla (curso 06/07).
- Gines (curso 07/08).
- Montellano (curso 07/08).

Solo se exige un requisito a los participantes: interés por aprender y conocer cosas nuevas. Con esta filosofía en mente, se decidió no poner prerrequisitos relativos a la posesión de títulos previos. Esto hace que los contenidos se traten a un nivel divulgativo.

El programa formativo del Aula Abierta de Mayores se estructura en tres cursos académicos de 100 horas lectivas cada uno. En cada curso se trabajan tres bloques de conocimientos: de Ciencias Sociales, Científico-Técnico y Jurídico-Económico.

Son varias las instituciones involucradas en la financiación del Aula de Mayores, ya que esta aula tiene su origen en la colaboración entre instituciones y organismos sociales que actúan sobre el ámbito educativo y la protección de las personas mayores. Además de la UPO, las entidades que financian esta actividad son:

- Ayuntamientos que demandan la actividad.
- Diputación Provincial de Sevilla.
- Consejería de Asuntos Sociales.
- Matrículas de los alumnos participantes.

La contribución de la UPO consiste en aportar sus recursos organizativos y de gestión, además del apoyo administrativo general. En cuanto a los gastos por docencia y funcionamiento de cada programa, se subvencionan mediante convenios con las instituciones anteriores.

El lector interesado en una mayor información sobre el Aula Abierta de Mayores puede consultar (Universidad Pablo de Olavide, 2004–2008; Vicerrectorado, 2004).

3. Actividades matemáticas para el aula de mayores

A continuación se expondrán algunas de las sesiones con contenido matemático realizadas en algunas de las sedes del Aula de Mayores. En concreto, trataremos aquellas que fueron o serán impartidas por alguno de los autores. Antes de exponer los objetivos y la metodología empleados en estas sesiones, se indicará el listado de actividades por curso académico:

1. Curso 04/05: “Las Probabilidades: una aplicación de las Matemáticas a los juegos de azar”.
2. Curso 05/06: “Anecdotario matemático, o cómo reírse con las Matemáticas”.
3. Curso 06/07:
    a. “Entretenimiento y magia matemática”.
    b. “Anecdotario matemático, o cómo reírse con las Matemáticas”.
    c. “La belleza de las Matemáticas y las Matemáticas de la Belleza”.
4. Curso 07/08:
    a. “¿Cómo interpretar las encuestas que aparecen en los medios de comunicación?”
    b. “Matemáticas en la Naturaleza”.

Aunque todas y cada una de las sesiones se catalogaron oficialmente como conferencias, decidimos no hacer uso de una metodología puramente expositiva para así ser coherentes con la máxima de la Educación para Mayores: motivarles, hacerles partícipes activos en la obtención del conocimiento y usar sus experiencias vitales en las sesiones. Además, la elevada heterogeneidad en la formación de los asistentes llevaba a plantearnos que una sesión puramente expositiva sería contraproducente para mantenerles motivados e interesados. En nuestra opinión, esto último podría conseguirse fomentando la participación continuada de los asistentes durante las sesiones, buscando así que ellos fuesen el motor de la sesión y origen de motivación constante.

Como puede entenderse de los títulos de cada sesión, los principales aspectos matemáticos que fueron tratados consistían en: la vertiente lúdica de las Matemáticas y su uso en la vida cotidiana.

Como es bien conocido, la Matemática Recreativa consiste en utilizar las Matemáticas (y, más concretamente, algunos de sus resultados y nociones) como base para juegos y trucos que le permiten al docente disponer de de una cantidad considerable de recursos recreativos para compaginar enseñanza con diversión y entretenimiento. De este modo, pueden tratarse algunos conceptos de forma lúdica y fomentar una mejor motivación por parte de nuestro alumnado. Pese a que el grado de dificultad en la fundamentación teórica de estos recursos puede variar cuantitativamente, la mayoría se pueden explicar y mostrar cómo llevarlos a cabo, sin necesidad de preocuparnos del nivel educativo de nuestro alumnado. Solo tienen que adaptarse y simplificarse las explicaciones pertinentes. Además, como ya se ha indicado, la Matemática Recreativa permite realizar actividades matemáticas muy atractivas para los asistentes que no solo aprenden, sino que pasan un magnífico rato. Para ver cómo se lleva a cabo una actividad completa en esta aula, el lector puede consultar la referencia de Fedriani y Tenorio (2006).

En cuanto a ver cómo influyen las Matemáticas en nuestra vida diaria y cuáles son sus posibles usos en ella, se han utilizado recursos didácticos que permiten trabajar tópicos como la relación entre Matemáticas y arte, los juegos de azar, la naturaleza, medios de comunicación, encuestas…

Teniendo en cuenta que la función de estas sesiones era fundamentalmente divulgativa, los objetivos de las mismas debían ser principalmente actitudinales, ya que deberían alcanzarse en sesiones de no más de dos horas. No obstante, se procuraron trabajar (en la medida de lo posible) algunas competencias conceptuales y procedimentales relativas a los tópicos tratados y que no requiriesen de conocimientos previos.

3.1. Probabilidades: una aplicación de las Matemáticas a los juegos de azar

Esta sesión tuvo lugar durante el curso 2004/05 en la sede de Marchena del Aula de Mayores. En ella, se plantearon preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles son las opciones de que a uno le toque el premio en alguno de los múltiples juegos de azar que son promocionados en nuestra sociedad?
- ¿Podemos ganar dinero con la lotería o con la ONCE?
- ¿Es difícil ganar en un juego de azar?

Para responder a estas y otras preguntas, se procedió a estudiar diversos juegos calculando las probabilidades de ganar en cada uno de ellos y viendo cuáles son las dificultades que encontramos para conseguirlo. Más concretamente, se comenzó con algunos juegos clásicos de cartas y de dados, para pasar a los juegos de azar más conocidos hoy en día: ONCE, quinielas, loterías, bingos…

Usando los juegos de azar como motor de la sesión, se trabajó el concepto de suceso aleatorio. En ningún momento se trató este concepto con formalismos academicistas, sino que toda la explicación estuvo basada en la exposición de ejemplos que ponía tanto el profesorado de la sesión como el propio alumnado. Los ejemplos empleados en esta parte de la sesión se sacaron de tirar un dado y una moneda.

Una vez el alumnado mostró tener claro en qué consistía un suceso aleatorio, se procedió a explicarles la Ley de los Grandes Números. Obviamente, se les enunció la ley de una manera sencilla y sin tener que trabajar con las probabilidades formalmente. Naturalmente, tras enunciar la ley, se procedió a indicarles algunos ejemplos para que viesen en qué consistía en la práctica. Uno de los ejemplos expuestos, fue el de simular un lanzamiento de una moneda doscientas veces y ver cuál era la relación existentes entre el número de caras que se iban obteniendo y el número total de lanzamientos realizados en cada momento. A continuación, mostramos la transparencia usada en la sesión con los datos obtenidos en la simulación del experimento.

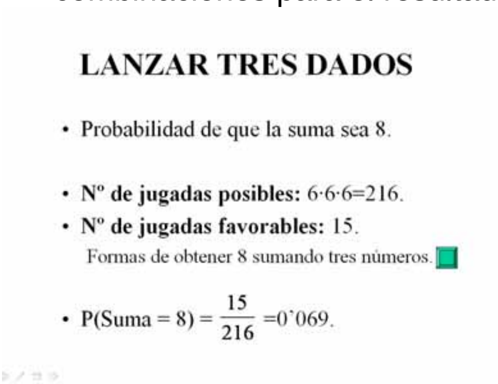
Nº de lanzamientos	10	20	30	40	50	60	70
Nº de caras	6	11	16	20	27	31	37
Cociente	0’600	0’555	0’533	0’500	0’540	0’517	0’528

Nº de lanzamientos	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**	**130**	**140**
Nº de caras	**43**	**48**	**53**	**57**	**62**	**68**	**72**
Cociente	**0’537**	**0’530**	**0’530**	**0’518**	**0’516**	**0’523**	**0’514**

Nº de lanzamientos	150	160	170	180	190	200
Nº de caras	77	83	86	92	95	101
Cociente	0’513	0’519	0’506	0’511	0’500	0’505

El poder llegar a la Ley de los Grandes Números de manera empírica y basándose en la experiencia propia, permitió establecer la noción de probabilidad de un suceso y obtener empíricamente la Regla de Laplace para obtener probabilidades. Fue tras exponer esta regla que se empezó a calcular las probabilidades de ganar en diversos juegos de azar. Entre los juegos que se expusieron en la sesión, indicamos los siguientes:

- Obtener una determinada suma de puntos con el lanzamiento de tres dados. Como ejemplo particular, se calculó la probabilidad de obtener el ocho como resultado de sumar los puntos, indicando todas las posibles combinaciones para el resultado deseado:



- Obtener un seis doble al lanzar dos dados. Con este ejemplo el alumnado pudo llegar por sí mismo a la conclusión de que cuanto mayor fuese el número de tiradas que realizaran, más posibilidades tenían de obtener un seis doble en el cómputo total de las tiradas realizadas.
- Obtener una figura en una baraja de cartas española.
- Obtener una pareja de sotas, caballos o reyes.
- Tener el número premiado en el sorteo nacional de lotería o en el sorteo de la ONCE, comprando un único décimo.

- Obtener cada uno de los premios en una quiniela futbolística, teniendo en cuenta que solo se obtiene premio al acertar quince, catorce, trece o doce de los quince resultados posibles.

- Obtener la combinación ganadora de la Lotería Primitiva. Este juego consiste en acertar una combinación de 6 números. Los números están comprendidos entre el 1 y el 49, no pudiéndose repetir números.

Queremos resaltar que los asistentes mostraron una gran curiosidad frente a la problemática subyacente a conseguir el premio en los múltiples juegos de azar tratados, sorprendiéndose por la escasa probabilidad de salir premiados en ellos.

Son variados y diversos los estudios probabilísticos que existen sobre los juegos de azar y que pueden ser de utilidad a la hora de preparar una actividad como esta. Por ejemplo, pueden consultarse los trabajos de F.J. Ruiz (2000) y J. Haigh (2003).

3.2. Anecdotario matemático, o cómo reírse con las Matemáticas

Fueron dos las sesiones realizadas bajo este título en dos años sucesivos. Tanto sus contenidos como sus objetivos eran similares, celebrándose la primera sesión en la sede de Aznalcóllar durante el curso 2005/06 y la segunda en la sede de Almensilla durante el curso 2006/07. Las sesiones se estructuraron en cinco bloques temáticos, trabajados en el siguiente orden: ilusiones ópticas, juegos de lógica, laberintos, humor gráfico y juegos topométricos.

Solo expondremos brevemente el contenido de las sesiones, recomendando la consulta de Fedriani y Tenorio (2006) para una visión más completa de las actividades realizadas en esta actividad.

El bloque de ilusiones ópticas se trabajó de forma práctica, mostrando a los presentes cierto número de fotografías y dibujos que conllevasen una duplicidad en su percepción. Además, se explicaba cuál era la fundamentación teórica para que tengamos distintas percepciones a partir de una misma imagen. Dos muy buenas referencias para trabajar las ilusiones ópticas son DiSpezio (2002) y Meavilla (2004).

Seguidamente se trabajó un bloque de juegos lógicos para que se pudiese observar cómo nuestro sentido “común” y nuestra percepción de la realidad se modeliza con razonamientos lógicos y conceptos matemáticos (esencialmente, se trabajaron los de tipo geométrico).

Para el bloque de laberintos, se trabajó con varios laberintos clásicos y se explicaron algunas técnicas para recorrerlos por completo y/o salir de ellos. Dichas técnicas estaban basadas en la Teoría de Grafos y, más concretamente, en la obtención de recorridos en el grafo obtenido al considerar como vértices los intersecciones entre dos veredas del laberinto y como aristas, la existencia de una vereda entre dos intersecciones. Obviamente, no se hizo un tratamiento formalizando los conceptos de Teoría de Grafos (de hecho, ni se mencionó la palabra grafo), pero sí se pudieron explicar y tratar algunas técnicas de obtención de caminos y circuitos en grafos. Además, el estudio matemático de los laberintos tratados estuvo amenizado por la inclusión de algunas curiosidades históricas relativas a las diferentes civilizaciones en las que tuvieron lugar su aparición.

Tras un toque de humor con chistes gráficos de contenido matemático sacados de la prensa (muchos de ellos de la inolvidable Mafalda y sus amigos) y que permiten ver la percepción que tiene la sociedad de las Matemáticas, se pasó a trabajar con puzzles manipulativos, siendo esta actividad muy bien acogida por todos los asistentes. De este modo, se pudo tratar la percepción espacial con el alumnado y las estrategias para resolver algunos de estos puzzles. Nótese que el uso de los puzzles, tanto de madera como de alambre, han sido y están siendo ampliamente estudiados en Didáctica de las Matemáticas, tal y como puede comprobarse en trabajos como el de Montoya y Flores (2003) y Muñoz (2003).

Como se puede observar de todo lo anterior, las sesiones estuvieron basadas en la interacción alumno-profesor y alumno-alumno, dotando a las mismas de una mecánica en la que los asistentes eran parte activa en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cada contenido se trató usando problemas prácticos, que fueron trabajados por los asistentes, que buscaron soluciones a las situaciones planteadas.

3.3. Entretenimiento y magia matemática

Con este nombre se llevó a cabo una sesión en la sede de Alcalá de Guadaíra durante el curso 2006/07. El objetivo de la misma fue trabajar las Matemáticas desde uno de sus aspectos más lúdicos: la magia matemática. Se trabajaron varios juegos y trucos de magia cuya base se encuentra en las Matemáticas. Todos los juegos que se trabajaron eran sencillos y no requerían de complejos conceptos teóricos. Se comenzó con dos trucos muy conocidos en el ámbito de las Matemáticas, pero que para las personas profanas causa un efecto espectacular y sorprendente. Una muy buena y completa selección de trucos de magia matemática pueden encontrarse en Muñoz (2003) y en Ruiz y Alegría (2002).

1. Obtención de la letra del DNI a partir del número asignado, consistente en la división del número entre 23 y la asignación de la letra en la siguiente tabla correspondiente al resto de la división.

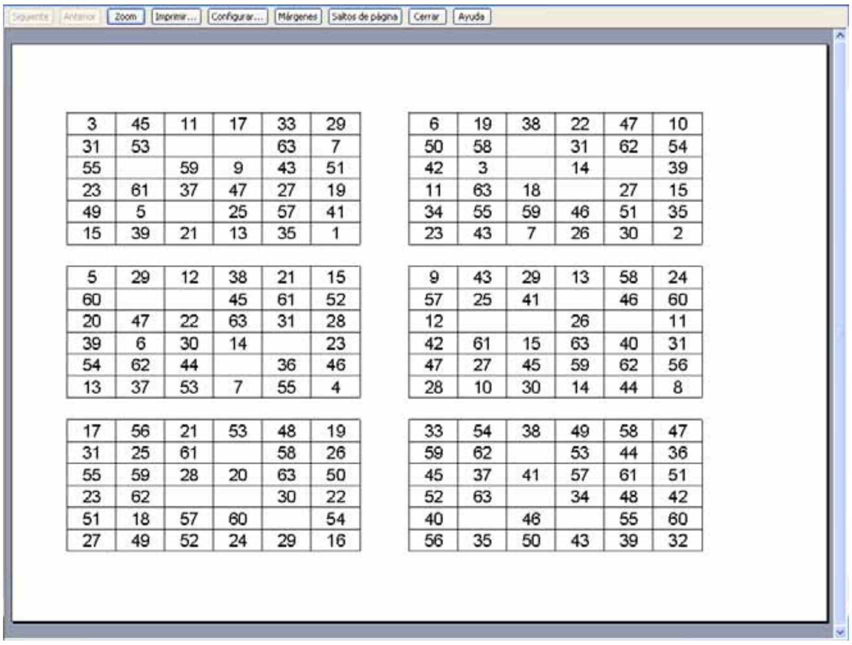
RESTO	LETRA
0	T
1	R
2	W
3	A
4	G
5	M
6	Y
7	F
8	P
9	D
10	X
11	B

RESTO	LETRA
12	N
13	J
14	Z
15	S
16	Q
17	V
18	H
19	L
20	C
21	K
22	E

2. Preparación de tarjetas "mágicas" para "adivinar cualquier número entre 0 y 264. Para ello, se descompone cada número usando el sistema binario y se considera una tarjeta para las siguientes potencias de 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 y 2^5. Si un número, por ejemplo el 50, se descompone como:

$$50=2^5+2^4+2^1$$

Por lo tanto, deberíamos incluir el número 50 en las tarjetas asociadas a esas tres potencias. De este modo, si solo nos dan esas tres tarjetas, sabremos que el número pensado por nuestra "víctima" es el 50. A continuación, ponemos una posible distribución de las tarjetas (las potencias de 2 asociadas a cada tarjeta está en la esquina inferior derecha de cada una de ellas):



3	45	11	17	33	29
31	53			63	7
55		59	9	43	51
23	61	37	47	27	19
49	5		25	57	41
15	39	21	13	35	1

6	19	38	22	47	10
50	58		31	62	54
42	3		14		39
11	63	18		27	15
34	55	59	46	51	35
23	43	7	26	30	2

5	29	12	38	21	15
60			45	61	52
20	47	22	63	31	28
39	6	30	14		23
54	62	44		36	46
13	37	53	7	55	4

9	43	29	13	58	24
57	25	41		46	60
12			26		11
42	61	15	63	40	31
47	27	45	59	62	56
28	10	30	14	44	8

17	56	21	53	48	19
31	25	61		58	26
55	59	28	20	63	50
23	62			30	22
51	18	57	60		54
27	49	52	24	29	16

33	54	38	49	58	47
59	62		53	44	36
45	37	41	57	61	51
52	63		34	48	42
40		46		55	60
56	35	50	43	39	32

Pero no solo nos limitamos a este truco de la tarjeta, sino que fueron diversas las actividades de Matemática Recreativa que se construyeron con materiales de los que disponemos en nuestro hogar, como pueden ser cartón, cartulina, tijeras, rotuladores... De esta forma, se preparó algunos materiales que permitiesen la puesta en escena de algunos otros trucos basados en las propiedades numéricas del número 9.

Por poner un ejemplo, se pidió a los asistentes que fuesen realizando una seria de operaciones aritméticas básicas (sumas, restas y multiplicaciones): súmale a tu edad el número de hermanos y hermanas que tienes, réstale el número de tíos que tienes, multiplícalo por el número de letras que tiene el nombre de tu calle… Tras hacer todo eso, debemos asegurarnos que multiplican el resultado obtenido por un múltiplo de 9. Una forma de hacerlo (hay tantas como imaginación le echemos al asunto) es pedirle a los asistentes que multipliquen por 6 el resultado obtenido, le resten 9 y, finalmente, lo multipliquen por 3. Finalmente, les pedimos que sumen todas las cifras que componen al número resultante y que vuelvan a hacerlo hasta que el resultado sea un número de dos cifras. Una vez que tienen ese número, deben mirar la siguiente imagen:

Nosotros podremos “leer la mente” de nuestro alumnado y decirles que la figura que les ha salido es la del mago. En este juego estamos utilizando la siguiente propiedad de los números divisibles por 9: la suma de los dígitos que lo componen es 9. Por tanto, colocando la misma imagen en todos los múltiplos de 9 (que es lo que ocurre en la figura anterior), podemos “adivinar” cuál es la figura que han obtenido nuestros alumnos y alumnas.

Finalmente, se trabajó con puzzles (juegos topométricos) de alambre que permiten realizar efectos “mágicos”, con lo que estos juegos manipulativos podían presentarse ante nuestro público como trucos de “magia”.

Como puede entenderse de lo comentado anteriormente, la sesión se afrontó como un espectáculo lúdico al puro estilo de un show de magia, en el que el mago enseñaba sus trucos a los asistentes, que o bien actuaban como asistentes del “mago” o bien como los propios magos.

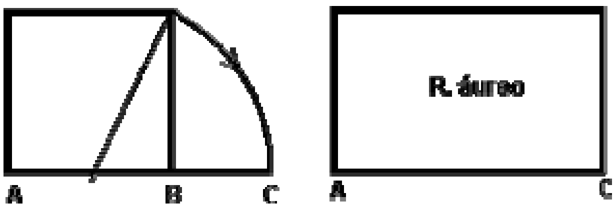
3.4. La belleza de las matemáticas y las matemáticas de la belleza

Esta sesión fue la más cercana de todas las comentadas al bloque de Humanidades. Se realizó durante el curso 2006/07 en la sede de Carmona, ya que su temática central versó sobre las proporciones áurea y cordobesa y su relación con el arte y la belleza. Para introducir ambos conceptos, se pidió a los asistentes que ordenasen una serie de esculturas divididas en distintos grupos (prehistóricas, griegas, romanas, contemporáneas, etc.) comenzando con la que más le gustara hasta llegar a la que menos le gustara. Se pidió que hicieran lo mismo con una serie de obras arquitectónicas.

Tras realizar este primer ejercicio, los asistentes tuvieron que hacer una serie de mediciones con el ancho y el alto de las figuras expuestas. De este modo, pudieron observar que la razón entre el alto y el ancho de las figuras elegidas en primer lugar (las más bellas en opinión de los alumnos) siempre coincidían. Esto permitió introducir la razón áurea a los presentes, mostrando también cómo en la naturaleza la pueden encontrar hasta en los lugares más insospechados.

La razón áurea aparece ya formulada en los *Elementos* de Euclides, en una construcción geométrica llamada *División de un segmento en media y extrema razón*: "el todo se divide en dos partes tal que la razón proporcional entre la parte menor y la mayor, es igual a la existente entre la mayor y el total, es decir, la suma de ambas".

Se explicó a los alumnos cómo construir un rectángulo áureo a partir de un cuadrado: dividimos por la mitad uno de los lados del cuadrado y unimos el punto medio de ese lado con uno de los vértices del lado opuesto. Dejamos "caer" el segmento resultante, de modo que quede en horizontal, desde el punto medio del segmento AB, obteniendo el punto C, por último, dibujamos el rectángulo de base AC y altura AB. El rectángulo obtenido tiene proporción áurea.



Otra de las partes en la que se dividió la charla trataba de encontrar la proporción áurea en la naturaleza, en sitios tan insospechados como en los huesos del cuerpo humano, pájaros, flores, crecimiento de las conchas, etc., como ejemplo se muestra la figura siguiente:

Por último, también se introdujo a los alumnos otras proporciones que se dan en el arte, no tan famosa y utilizada como la áurea, como es la proporción cordobesa, que se define como la relación entre el radio de la circunferencia circunscrita al octógono regular y el lado de éste:

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cong 1.3065629...$$

Como ejemplo de proporción cordobesa se puede citar las bellas arcadas de la Mezquita de Córdoba.

Nos gustaría resaltar que la experiencia fue muy grata tanto por parte de la profesora como de los alumnos, ya que éstos mostraron un especial interés desde el comienzo de la clase. Para ellos, suponía una experiencia muy novedosa y bastante diferente de lo que habían visto hasta ese momento, ya que esta sede de Carmona del Aula de Mayores se centra en las Humanidades, como ya se indicó anteriormente. Para estos alumnos era la primera vez que tenían contacto con una disciplina "más científica".

4. Conclusiones

Queremos resaltar que trabajar como docente en el Aula Abierta de Mayores es una experiencia sumamente gratificante, ya que el alumnado asistente presenta una predisposición altamente remarcable a la hora de aprender y es sumamente activo en el aula, aportando sus experiencias, ideas y dudas. De hecho, muchas de las cuestiones que plantearon (por no decir todas) fueron altamente gratificantes para nosotros, los docentes, ya que mostraron una gran implicación en las actividades y buscaban soluciones y planteamientos para las situaciones y dificultades que se les iban planteando.

Al pensar en cuáles son los problemas (desde un punto de vista didáctico) que un docente se encuentra en este tipo de sesiones, no se nos ocurre ninguno que no sea subsanable (o al menos suavizable) con una elección de tópicos y temáticas que no requieran de conocimientos previos para su comprensión. Además, ha de tenerse siempre presente que las temáticas tratadas sean interesantes para nuestro alumnado, ya que éste se encuentra más motivado e involucrado si trabajamos con situaciones relacionadas con su entorno y vida cotidiana y que les sean de alguna utilidad o aplicación.

Pese a que podría parecer complicado encontrar contenidos matemáticos que puedan tratarse del modo en que se indica, el presente artículo ha mostrado algunos temas que pueden utilizarse para este tipo de actividades. Es nuestro deseo que las experiencias que hemos presentado permitan al lector interesado el pensar otros ejemplos de temas a trabajar desde una perspectiva matemática interesente para nuestros alumnos.

Bibliografía

- C. Bru (ed.) (2002): "Los Modelos Marco de Programas Universitarios para Mayores". *Actas del VI Encuentro Nacional de Programas Universitarios para Mayores*. Universidad de Alicante, Alicante.
- A. Castellón, M.A. González y A. Martos (2004): "Análisis de la satisfacción en los mayores de la Universidad de Granada". *Rev. Mult. Gerontol.* 14:5, 252-257.
- Comisión Europea (2006): Programa Grundtvig. Disponible en: http://ec.europa.eu/education/programmes/llp/grundtvig/index_en.html.
- M.A. DiSpezio (2002): *Experimentos sencillos sobre ilusiones ópticas*. Ediciones Oniro, Barcelona.
- E.M. Fedriani y A.F. Tenorio (2006): "Geometría para mayores de 55 años: una experiencia en un Aula de Mayores". *Epsilon*, 22:2, 217–229.
- J. Haigh (2003): *Matemáticas y juegos de azar: jugar con la probabilidad*. Tusquets, Barcelona.
- IMSERSO (1993): *Plan Gerontológico Nacional*. Madrid.
- IMSERSO (2003): *Plan de Acción para las personas mayores 2003–2007*. Consejo de Ministros de 29 de agosto. Disponible en: http://www.seg-social.es/imserso/normativas/planppmm20032007.pdf.
- Junta de Andalucía (1989): *Plan Andaluz de Servicios Sociales*. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía de 12 de mayo.
- Junta de Andalucía (1999): *Ley 6/1999, de 7 de julio, de Atención y Protección a las Personas Mayores*. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía nº 87 de 29 de julio. Disponible en: http://www.juntadeandalucia.es/boja/boletines/1999/87/d/2.html.
- Red Europea Learning in Later Life (1995-2008). Disponible en: http://www.lill-online.net/hauptmenu/S/haupt.html.
- V. Meavilla (2004): *Figuras imposibles: geometría para heterodoxos*. Proyecto Sur, Granada.
- C. Montoya y P. Flores (2003): "Los puzzles en alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas". *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española*, 6:3, 665-684.
- J. Muñoz (2003): *Ernesto, el aprendiz de matemago*. Nivola, Madrid.

- ONU (1982): *Resolution 37/51: Vienna International Plan of Action on Ageing*. Disponible en: http://www.un.org/esa/socdev/ageing/vienna_intlplanofaction.html.
- F. Pavón (2002): "La otra universidad: las aulas de la experiencia. A los mayores españoles les va interesando Internet". *Actas de la X Jornada Universitaria de Tecnología Educativa*. Disponible en: http://dewey.uab.es/pmarques/evte/pavon.html.
- F.J. Ruiz (2000): "Juegos de azar: Una breve historia: La ruleta de Las Vegas y la lotería primitiva, ¿cómo funcionan?". *Epsilon*, 16:3, 257-268.
- J.C. Ruiz y P. Alegría (2002): "La matemagia desvelada". *Sigma*, 21, 145-174.
- UNESCO (1998): *Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el s.XXI*. Disponible en: http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm.
- UNESCO (2000): *Informe final del Foro Mundial sobre la Educación*. Disponible en: http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001211/121117s.pdf.
- Universidad Pablo de Olavide (2004–2008). *Web del Aula Abierta de Mayores*: http://www.upo.es/general/centros_depart/otros_centros/aula_mayores/otros_a mayores.html.
- M. Velázquez y C. Fernández (1998): *Las Universidades de mayores. Una aventura hecha realidad*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Vicerrectorado de Promoción Social y Extensión Universitaria de la Universidad Pablo de Olavide (2004): *Aula Abierta de Mayores. Memoria Evaluativa Curso 2003–2004*. Disponible en: http://www.upo.es/general/centros_depart/otros_centros/aula_mayores/docu/memoria2004_aam.pdf.
- D. Vila (2002): "Las Aulas de la Experiencia". *Muf@ce. Revista electrónica* 18/188. Disponible en: http://www.map.es/gobierno/muface/o188/educ.htm.

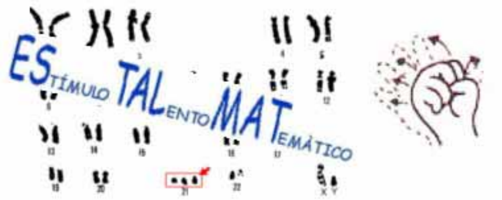
Ana M. Martín Caraballo, Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla en 1993 y Doctora por la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla (febrero de 2005). Actualmente es Profesora Colaboradora en la Universidad Pablo de Olavide y Secretaria Provincial de la SAEM THALES en Sevilla. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a indicadores de pobreza y desarrollo, además de la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.

Ángel F. Tenorio Villalón, nacido el 7 de julio de 1977 en Sevilla. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 2000) y Doctor por esa misma universidad (diciembre de 2003). Actualmente es Profesor Ayudante en la Universidad Pablo de Olavide y Delegado Provincial de la S.A.E.M. THALES en Sevilla. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Lie, la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 63 - 83
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales



Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

El alumnado con déficit de atención e hiperactividad (TDHA) en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles obligatorios

Núria Rosich Sala, Ángel Casajús Lacoste

Resumen

En este artículo mostramos las dificultades de aprendizaje de los alumnos con déficit de atención e hiperactividad (TDHA) en la resolución de problemas aritméticos- verbales. En primer término se muestran los estudios realizados sobre el tema con alumnos ordinarios y los que se han realizado con alumnos con TDAH. En segundo lugar se presentan los distintas tipologías de errores que realizan durante el proceso resolutor de ejecución de los problemas aritmético- verbales. Finalmente se dan pautas metodológicas para abordar su enseñanza.

Abstract

In this article we show the difficulties of the students' learning with deficit of attention and hyperactivity (TDHA) in the resolution of arithmetic problems - verbal. In first term the studies are shown carried out on the topic with ordinary students and those that have been carried out with students with TDAH. In second the different types of errors is also presented that carry out during the process resolute of execution of the arithmetic problems - verbal. Finally methodological rules are given to approach their teaching.

Introducción

Sabemos que el trastorno de déficit de atención (TDA) es un trastorno que actualmente parece emerger de forma importante en nuestras aulas. Si revisamos la bibliografía del tema, vemos que fue descrito por primera vez hace un siglo aproximadamente, aunque se diagnostica con una frecuencia relativamente alta en las escuelas desde hace relativamente poco tiempo. Estudios recientes sobre el posible número de alumnado con TDAH varia según los autores, entre un 3% y un 10 %, pero las más citadas la fijan alrededor de un 5 %.

Antes de hablar del aprendizaje matemático de este alumnado, se hace necesario precisar algunos de los términos que vamos a utilizar en el artículo y que pueden evitar confusiones.

Desde hace mucho tiempo existe una preocupación por las dificultades que tienen los alumnos, en general, en los aprendizajes escolares y, en particular, en el aprendizaje matemático, las cuales son conocidas de forma abreviada por las siglas DAM (Dificultades de aprendizaje de las matemáticas), aunque consideramos que el término de dificultades de aprendizaje conlleva una definición muy amplia y a veces resulta confusa. Los problemas generales de aprendizaje se manifiestan con un cierto retraso general de todo el proceso, observándose por parte de los profesores y padres una lentitud, desinterés, deficiencia en atención y concentración de los alumnos, que conlleva un rendimiento general bajo. Este tipo de características se pueden presentar en alumnos con un desarrollo normal y con inmadurez en el área cognitiva o verbal, y también en alumnos con ciertos retrasos mentales, o con dificultades auditivas severas que no se les han tratado.

En el caso de las DAM, las primeras dificultades de aprendizaje matemático que han sido estudiadas son las llamadas discalculias, las cuales se manifiestan en alumnos que tienen dificultades en las habilidades de memoria, atención, orientación (alienación de números y símbolos), de razonamiento matemático, etc., es por ello que muchas veces se ha incluido a los alumnos con TDHA en este grupo de alumnos.

Nosotros cuando hablamos de TDA nos referimos a una diferencia leve, pero demostrable, en el funcionamiento cerebral normal que hace que un alumno con un coeficiente intelectual normal rinda poco en los estudios y en el caso de los alumnos que además son hiperactivos tienen un comportamiento inquieto en el aula. Nosotros nos referiremos de forma indistinta a ambos.

Entendemos que las dificultades en el aprendizaje de los alumnos con TDHA son obstáculos específicos por aprender en el día a día y que vienen generados por la misma sintomatología del trastorno, provocando en el alumno retrasos académicos significativos, aunque éste tenga capacidad.

Estudios realizados sobre el tema

A pesar del creciente número de alumnos que se diagnostican de TDA en nuestras escuelas son pocos los estudios que han tratado sobre les dificultades matemáticas de estos alumnos en esta área. Los primeros estudios que se hicieron señalaban el cálculo como una de estas dificultades. Geary (1993) propone tres tipos de déficit que podrían explicar el trastorno del cálculo en este tipo de alumnos:

a) ***Aspectos metodológicos del cálculo***. Las dificultades del cálculo pueden ser debidas a su falta de atención, ya que estos alumnos en las edades tempranas que han de aprender el significado del número, no terminan de adquirirlo correctamente. De la misma manera, también puede influir negativamente la lentitud en la adquisición del uso de procedimientos y estrategias aritméticas para la resolución de las operaciones básicas, como son la utilización de los dedos, los palotes, etc., como soporte del conteo.

b) ***Recuperación automática de hechos numéricos de la memoria semántica***. Los problemas relacionados con los hechos numéricos se manifiestan por las dificultades en adquirir y mantener datos matemáticos básicos suficientemente automatizados para qué sean adecuadas para la adquisición y el uso de las habilidades superiores del cálculo. Los hechos numéricos, que constituyen el conjunto más básicos en el cálculo, pueden ser considerados similares a un vocabulario básico visto durante la lectura. Reflejan bits aislados de información que se pueden utilizar para completar un problema y son más útiles si se pueden recordar más rápidamente y prestar mayor atención a un procesamiento de alto nivel. La precisión y la fluidez en los hechos numéricos básicos son fundamentales para un buen rendimiento del cálculo. Los niños y las niñas con este tipo de déficit recuperan menos hechos en la memoria, y cuando esto sucede su velocidad es más lenta y poco sistemática, y presentan una gran proporción de errores. Este déficit en la recuperación de hechos persiste típicamente durante la escuela primaria y muchas veces se producen simultáneamente con ciertas formas de déficit verbal del lenguaje y la lectura.

c) ***Habilidades visoespaciales***. El déficit en esta habilidad implica problemas en la representación espacial y en la interpretación de la información numérica, como pueden ser la alineación defectuosa de números en problemas de cálculo con varias columnas numéricas y la interpretación incorrecta del lugar que ha de ocupar el valor.

Entre los autores que más estudios han realizado sobre el tema hemos de citar a Zentall que dedica varias investigaciones sobre los alumnos con TDAH. En 1994 Zentall et al. realizan un estudio para ver la incidencia en los problemas de cálculo en la resolución de problemas aritméticos sencillos, de una operación, utilizando números enteros con el ordenador. Los resultados muestran la baja productividad de los alumnos con TDHA, detectan que a muchos alumnos les cuesta acabar las operaciones (dejando muchos de los problemas en blanco) y también descubren que estos alumnos suelen cometer más errores que sus compañeros (sin déficit), es por esto que los autores señalan que no les extrañan que sus puntuaciones de rendimiento académico sean un tercio más bajas que las de sus compañeros sin déficit. Este equipo investigador identifica dos tipos de dificultades para el cálculo: dificultades en la memoria semántica relacionada con dificultades de lecto-escritura y dificultades en los procedimientos que utilizan, ya que si se comparan con los procedimientos que usan los alumnos ordinarios (a partir de cuarto curso) se ha visto que cambian típicamente de una estrategia para contar de manera física o mental a otra de recuperación de la memoria.

Otros autores como (Ackerman et al., 1986) atribuyen la vulnerabilidad del cálculo en el alumnado con TDAH a errores en la automatización, que a la vez incide en un déficit de la memoria y de velocidad de procesamiento Una escasa velocidad de recuperación de la memoria altera la adquisición y el mantenimiento de los hechos numéricos y esta interferencia da lugar a una computación lenta e inexacta, así como la consiguiente alteración en la adquisición y uso de las operaciones de cálculo más avanzadas.

Si bien las dificultades de cálculo aparecen de forma destacada en estos grupos de alumnos y sea quizás por esto que se han realizado más estudios sobre esta parte de las matemáticas, en los últimos años, los currículos escolares y las evaluaciones de matemáticas han puesto el acento en el valor de la resolución de los problemas como una forma de poner en juego los conocimientos matemáticos y de favorecer el pensamiento y el razonamiento matemático, las cuales pueden ayudar al individuo para la resolución de problemas de la vida cotidiana (NCTM, 2000; Pisa, 2003, 2006).

Este aspecto de la resolución de problemas también está recogido el currículo matemático como una competencia que debe adquirir el alumnado de la enseñanza obligatoria.

Si bien Zentall et al. (1990, 1993, 1994) como hemos visto, dedican un estudio en el que una parte está implicada la resolución de problemas, las conclusiones del mismo apuntan más al entorno de las dificultades del cálculo que no a los problemas.

El estudio de la resolución de problemas aritmético-verbales

Uno de los estudios más recientes sobre la resolución de problemas aritmético-verbales con alumnos hiperactivos es el que ha realizado Casajús (2005). Este autor diseña una prueba diagnóstica adaptada para cada uno de los tres ciclos de la enseñanza de primaria y de los dos ciclos de la enseñanza secundaria, con la finalidad de mostrar las dificultades que tienen estos alumnos respecto a los alumnos sin déficit. Utiliza tres pruebas que constan de una serie de problemas con una estructura bastante parecida a lo largo de los diferentes Ciclos de la Enseñanza Primaria, respetando los niveles curriculares. Las diferencias entre los ciclos vienen dadas por una creciente dificultad, debido a la progresiva introducción de los niveles de numeración (números hasta el 99 en el ciclo inicial, introducción de números decimales, etc.), y también la introducción progresiva de los algoritmos (suma, resta, multiplicación etc.), etc. Las comparaciones vienen determinadas en el estudio descriptivo tanto de la tipología de problemas, como por los errores que cometen los alumnos de ambos grupos.

La prueba diagnóstica se pasa a un total de 75 alumnos (37 con TDAH y 38 sin déficit), en la elección de la muestra estaban representados los tres ciclos de la enseñanza primaria de escuelas públicas y concertadas.

El objetivo de la elaboración de dicha prueba es la de poder comparar los resultados del grupo Experimental con los del grupo de Control para observar el comportamiento diferencial de ambos grupos y poder extraer las conclusiones pertinentes.

En la corrección de los problemas resueltos se tiene en cuenta: la corrección o no de la resolución del problema, también se analizan las diferentes tipologías de errores, ya que los errores de cálculo en la fase de ejecución no deberían esconder una correcta comprensión del problema. El análisis del planteamiento del problema se realiza para obtener información sobre la correcta comprensión del enunciado. Se parte del hecho de que al aplicar en la fase de resolución los algoritmos correspondientes, los alumnos denotan que la información que han interpretado en el enunciado es la correcta.

Los resultados de estas pruebas ponen de manifiesto que en general los alumnos con TDHA en todos los ciclos, tanto de primaria como de secundaria, obtienen puntuaciones inferiores a los alumnos sin déficit. Pero también han mostrado que a medida que aumenta la edad y por tanto, los cursos el número de respuestas correctas también aumenta (exceptuando el ciclo superior de primaria).

Antes de analizar las diferencias en la resolución de PAEVs entre los alumnos con TDAH y sin Déficit, se muestran los datos por Ciclos, que nos dará una idea sobre la evolución en este campo de los alumnos con Déficit de Atención e Hiperactividad en su tarea de resolver los problemas aritméticos (Tabla 1). Observamos la tabla general de su comportamiento resolutor, en la que se ha tenido en cuenta, las posibilidades que hemos contemplado en la corrección de las pruebas.

Problemas	**C. inicial P.**	**C. Medio P.**	**C. Superior**	**2º Ciclo ESO**
Correcto	114 (48,7%)	210 (56,5%)	239 (53,3%)	322 (63%)
Bien planteado	19 (8,1%)	61 (16,4%)	113 (25,2%)	109 (21,3%)
Incompleto	0	1	0	1
Mal planteado	78 (33,3%)	76 (20,45%)	81 (18%)	38 (7,4%)
No se sabe qué ha hecho	9	11	7	14
Sin contestar	14	13	8	27
Total	234	372	448	511

Tabla 1. Resultados globales por etapas y ciclos

En la Figura 1 se puede observar que en la evolución porcentual de los aciertos aumenta de una manera progresiva (exceptuando el Ciclo Superior de Primaria debido, creemos, a la introducción en la ejecución del problemas de los números decimales desde el Ciclo Inicial de Primaria hasta el Segundo Ciclo de la E.S.O.

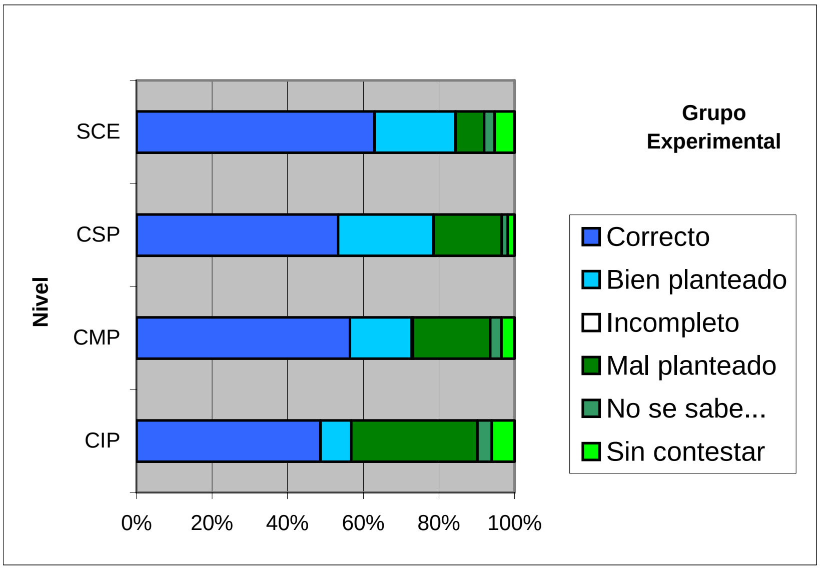


Figura 1. Comportamiento resolutor e índices totales de cada Ciclo de la escolaridad obligatoria.

También se puede ver en el gráfico que no sólo evoluciona positivamente el número de problemas correctos a lo largo de la escolaridad, sino que progresivamente la comprensión de los mismos mejora, no sólo en aras de la corrección – lo cual indica que entre otras cuestiones, mejora el cálculo adecuado a su edad, con las sucesivas introducciones curriculares, sino también del correcto planteamiento.

Más significativa aún es la evolución de los problemas bien planteados, que unidos a los bien resueltos – lo que podemos significar como problemas que se han comprendido – denotan una trayectoria constante positiva desde el Ciclo Inicial de Primaria hasta el último Ciclo de la E.S.O.

En la Figura 2, se observa la evolución positiva a lo largo de la escolaridad obligatoria.

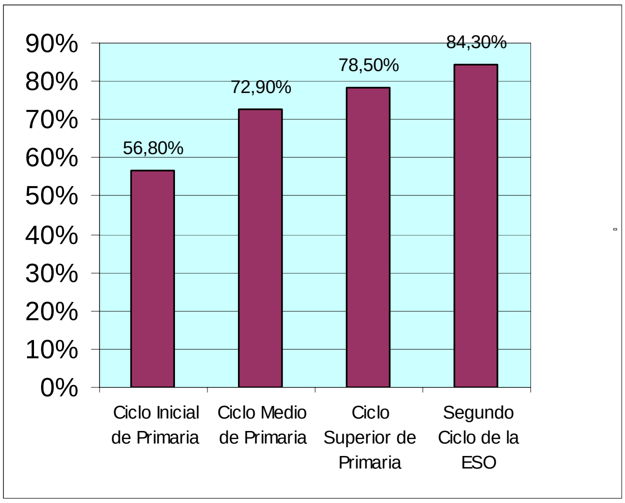


Figura 2. Evolución porcentual en los problemas bien planteados por la muestra con TDAH

Aquí se refleja que a pesar de que la evolución es constante hasta alcanzar un porcentaje superior al 84% en el Ciclo Superior de la ESO, aún muestran dificultades en la representación del problema una proporción importante de los alumnos con TDAH al acabar la escolaridad obligatoria.

Otro aspecto a tener en cuenta para los profesores y psicopedagogos, etc., es el estudio más pormenorizado de los resultados por ciclos ya que estos nos informan de las dificultades que muestran los alumnos, tanto con déficit como de los alumnos control que han intervenido.

De esta forma si miramos los resultados del ciclo Inicial de Primaria podemos ver en el gráfico de la Figura 3, que el porcentaje de problemas bien resueltos del grupo de Control (65,4%) es significativamente mayor que los resueltos por el grupo Experimental (48,7%). El grupo Control efectúa correctamente más ejercicios que los erróneamente ejecutados, en cambio en el grupo Experimental se invierte este hecho, realizando más problemas incorrectos que correctos.

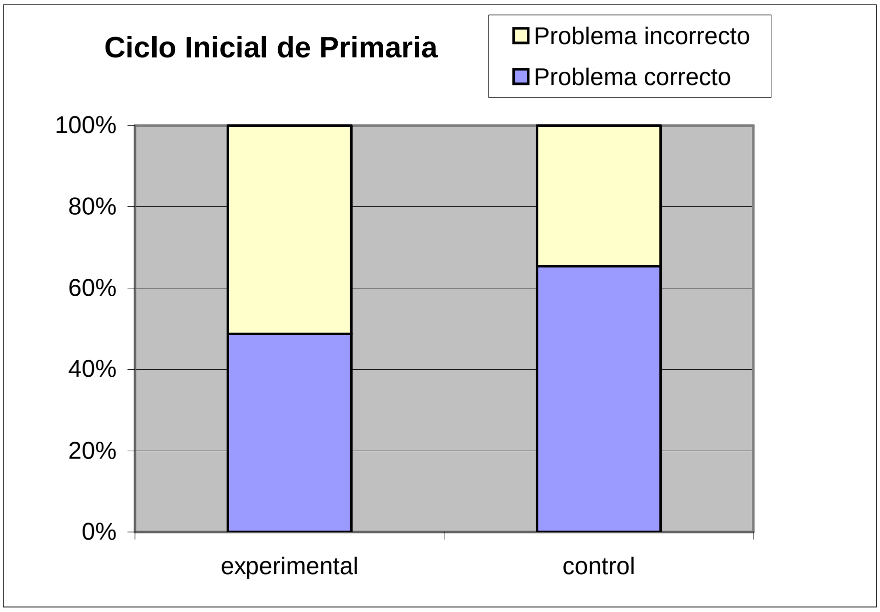


Figura 3. Resultados de los problemas Ciclo Inicial de Primaria

En un análisis general, en la Figura 4 se puede observar que en el **Ciclo medio de primaria** aumentan los porcentajes de resolución correcta e incorrecta entre los dos grupos. Ahora el grupo Experimental aumenta el porcentaje de ejecución correcta (56,5 %), pero aumenta de la misma manera el porcentaje del grupo de Control (72,7 %) ampliando la diferencia al 16 % entre ambos grupos. El grupo de alumnos con TDAH ya resuelve más problemas que los que falla, pero el grupo Control se acerca al 75 % de ejercicios correctos.

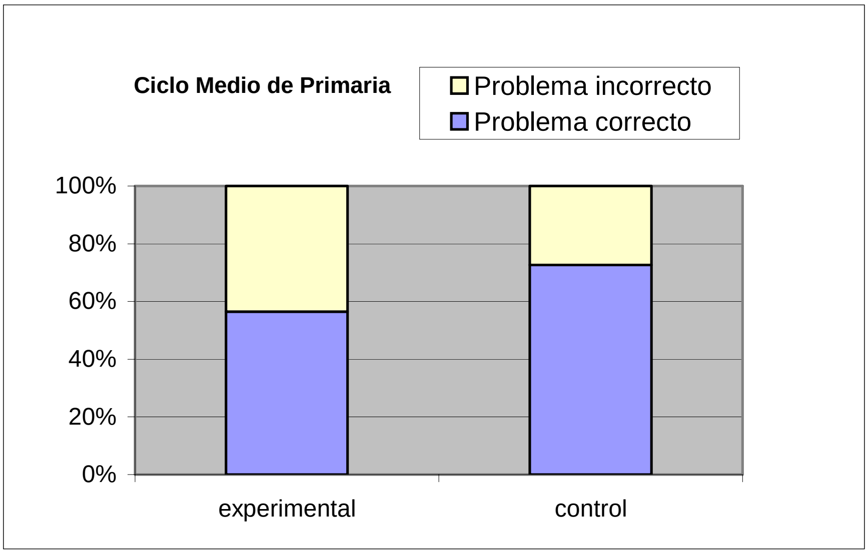


Figura 4. Resultados de los problemas en el Ciclo Medio de Primaria

En el **Ciclo Superior de Primaria** los valores porcentuales bajan, creemos que debido a la introducción en los datos de números decimales, ya que muchos de los errores son atribuibles a las operaciones con los mismos. Aquí el grupo Experimental realiza un 53,3 % de problemas correctos ante un 63,4 % del grupo de Control, bajando también la diferencia porcentual entre ambos grupos (Figura 5).

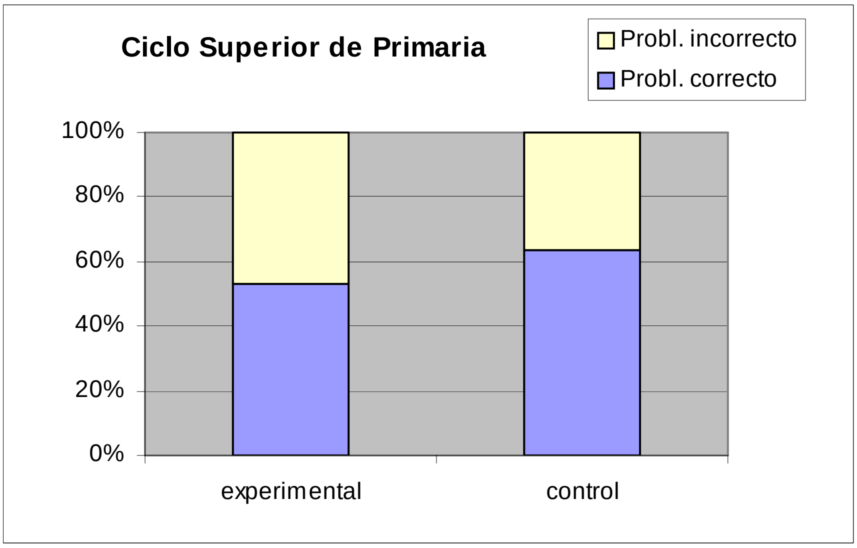


Figura 5. Resultados de los problemas de Ciclo Superior de Primaria

Otro aspecto interesante desde el punto de la investigación es el estudio más exhaustivo que realiza el autor atendiendo a las diferentes categorías en que se suelen estudiar los problemas llamados aritmético verbales. En los últimos años ha resurgido un interés por el estudio de los problemas aritmético enunciado verbal (PAEV), sobre todo en el alumnado de la escolarización obligatoria. Entre los autores que han dedicado parte de sus estudios a la resolución de estos problemas podemos citar a Puig y Cerdán (1988), Nesher (1982), Carpenter y Moser (1982), Bermejo y Rodríguez (1990). De acuerdo con los parámetros estudiados por un buen número de los autores citados, el estudio de Casajús (2005) se centra en tres variables: variables sintácticas, de contexto y de contenido. En el caso de las categorías semánticas, se ha estudiado especialmente las de tipo aditivo (con las subcategorías de problemas de cambio, combinación, comparación e igualación) problemas multiplicativos, problema de enunciado largo, problema de enunciado con varias preguntas, problemas de varias etapas con la incógnita en diferentes lugares. Además, se incluyeron algunos problemas en los que se estudiaron las variables sintácticas.

En el caso del ciclo inicial de Primaria los resultados comparativos mostraron que la práctica totalidad de los grupos se decantan a favor del grupo de Control, con diferencias muy significativas en la resolución de los problemas de Cambio (con más de un 25% de aciertos), dentro de las categorías semánticas, aquellos problemas en los que en un mismo enunciado se formulan varias preguntas y los que en el enunciado aparecen cifras (no todos datos) en números y letras (en ambos casos con una diferencia del 44%, aproximadamente), los cuales presentamos en la tabla 2.

% Correcto Experim.	% Correcto Control	% Planteado Experim.	% Planteado Control	Grupos de categorías de problemas
70,4	96,3	74,1	100	Cambio
72,2	77,8	83,3	88,9	Combinación
60,0	73,3	68,9	80	Comparación
22,2	22,2	22,2	22,2	Con la solución en el enunciado
46,3	55,6	61,1	72,2	Igualación
0,0	11,1	11,1	11,1	De enunciado largo
33,3	77,8	33,3	77,8	De varias preguntas
18,5	33,3	25,9	40,7	De varias etapas con incógnita en diferentes lugares
11,1	55,6	11,1	66,7	Con números en cifra y letra

Tabla 2. Resultados del ciclo Inicial de Primaria por categorías

La diferencia entre los dos grupos respecto a los problemas de cambio creemos que puede responder a que éstos se basan en una transformación enmarcada en una acción temporal, con lo que esto conlleva, ya que los alumnos con TDAH interpretan peor, a opinión de sus profesores, las secuencias temporales dentro de una información, como es el enunciado, en este caso.

Respecto a la diferencia entre ambos grupos sobre los problemas de enunciado con varias preguntas, la falta de atención - manifiesta de los alumnos con TDAH -hace que la mayoría contesten sólo a la primera pregunta, obviando las siguientes.

Asimismo, en un análisis de las categorías semánticas, los problemas más fáciles para este ciclo han sido para el grupo experimental y por este orden, los de combinación, seguidos de los de cambio, comparación e igualación. Para el grupo de control el orden es cambio, combinación, comparación e igualación. Por lo tanto, el grupo de control sigue la misma tendencia que los resultados de Riley y otros

(1983) que han indicado para el estudio de alumnos, en general (sin TDHA), siendo alterado en la forma indicada por los del grupo experimental.

En el ciclo medio se observa de nuevo que las diferencias en la resolución de la mayoría de las categorías se decantan a favor del grupo de control (Figura 6). Hay diferencias importantes en la resolución de los problemas de comparación (con más de un 20% de aciertos superior), bajando unos puntos porcentuales los de cambio (18 %), pero aumentando considerablemente las diferencias en las categorías de combinación e igualación. Aumenta de manera muy considerable en aquellos problemas con las incógnitas en diferentes lugares del enunciado (28%) y en dos de las categorías, los resultados se decantan a favor del grupo experimental, curiosamente, una de ellas es aquella en el que la respuesta formaba parte del enunciado. En el problema con cifras en números y letras, la diferencia se ha invertido, al contrario de lo que observamos en el Ciclo Inicial de Primaria.

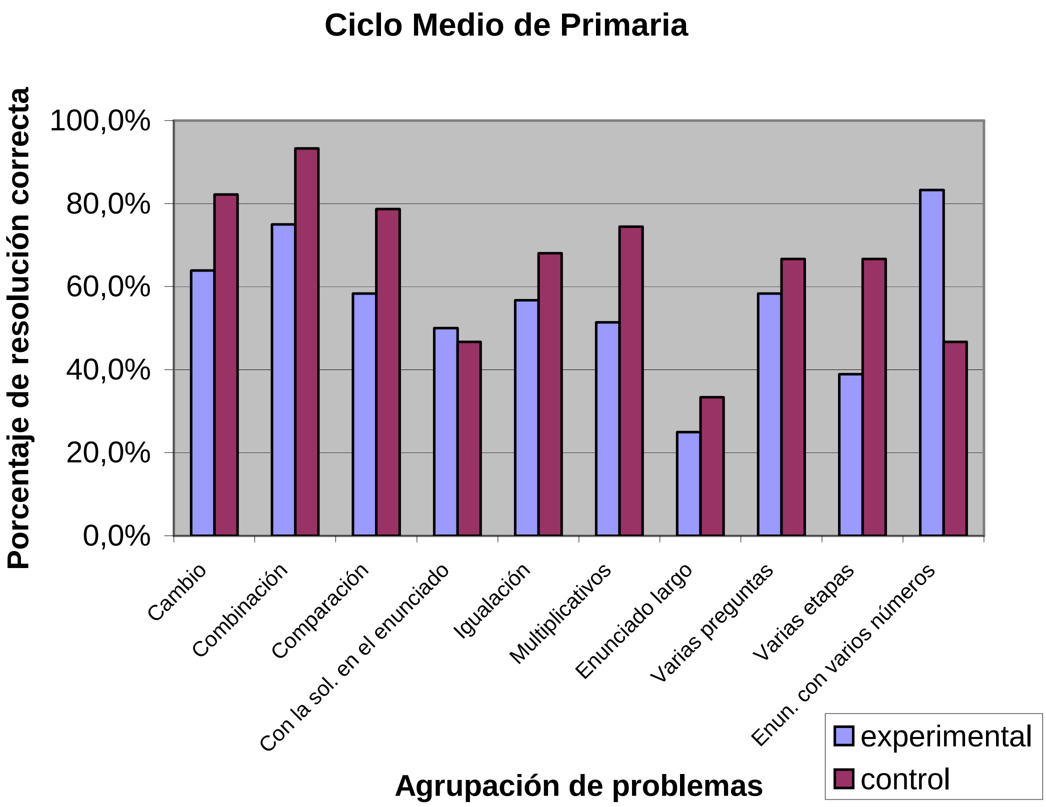


Figura 6. Porcentajes de respuestas correctas en las diferentes categorías de problemas de los alumnos del Ciclo Medio de Primaria

Como podemos observar, las diferencias entre el grupo con TDAH y el de alumnos del grupo de control quedan patentes. En dos categorías además, el grupo de control sobrepasa el 80% en la ejecución correcta. Destaca el problema de enunciado largo, categoría en la que tanto el grupo experimental como el de control, consiguen unos resultados muy bajos, superando el grupo con TDAH al de control.

Es en este ciclo, cuando las diferencias son menos acusadas si nos atenemos a las categorías semánticas, se da en los problemas aditivos, aunque se mantiene la diferencia en los problemas multiplicativos.

Los problemas multiplicativos mantienen la misma diferencia, del 23%, tanto si se mide la resolución correcta del problema como si se trata del correcto planteamiento. Parece ser que a los alumnos con TDAH les cuesta más adquirir el concepto de multiplicación y división.

En el **Ciclo Superior de Primaria** las diferencias mayores continúan en la categoría de problemas de combinación (21%), seguidas de la de cambio y comparación. Por primera vez, en los problemas de igualación, el grupo experimental aventaja al grupo control, así como en los problemas con la incógnita en diferentes lugares del enunciado, y el grupo experimental aventaja ligeramente en los problemas multiplicativos. El orden de facilidad para la categoría semántica cambia: combinación – cambio – igualación y comparación, tanto para los del grupo experimental como los de control. En los problemas multiplicativos, el grupo de alumnos con TDAH supera al grupo de control, aunque por una estrecha diferencia, así como en la categoría en la que se proponen problemas con la incógnita en diferentes lugares del enunciado (Figura 7).

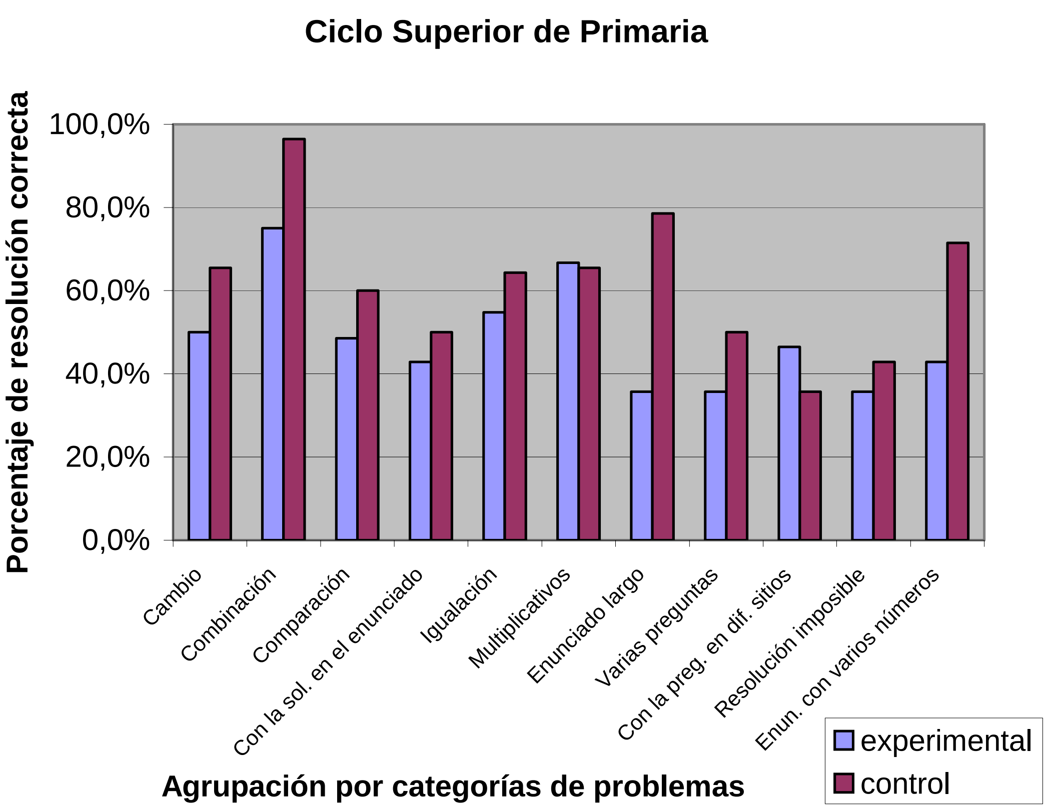


Figura 7. Porcentajes de respuesta en las diferentes categorías de problemas de los alumnos del Ciclo Superior de Primaria

Al final de los estudios obligatorios de ESO los problemas que durante los otros ciclos quedaban definidos como más fáciles para los alumnos (problemas de combinación), en este último tramo de la ESO, llegan casi a igualarse, manteniéndose o aumentando las diferencias, en cambio en las demás categorías semánticas de problemas aditivos.

Continúan las diferencias en la resolución de los problemas multiplicativos. El problema de enunciado largo sufre un fuerte crecimiento diferencial entre ambos grupos, ya que lo resuelven bien los alumnos del grupo control en una proporción aproximada de 2,5 veces.

A continuación mostramos los resultados comparativos por etapas y ciclos entre los alumnos control y los alumnos con TDHA.

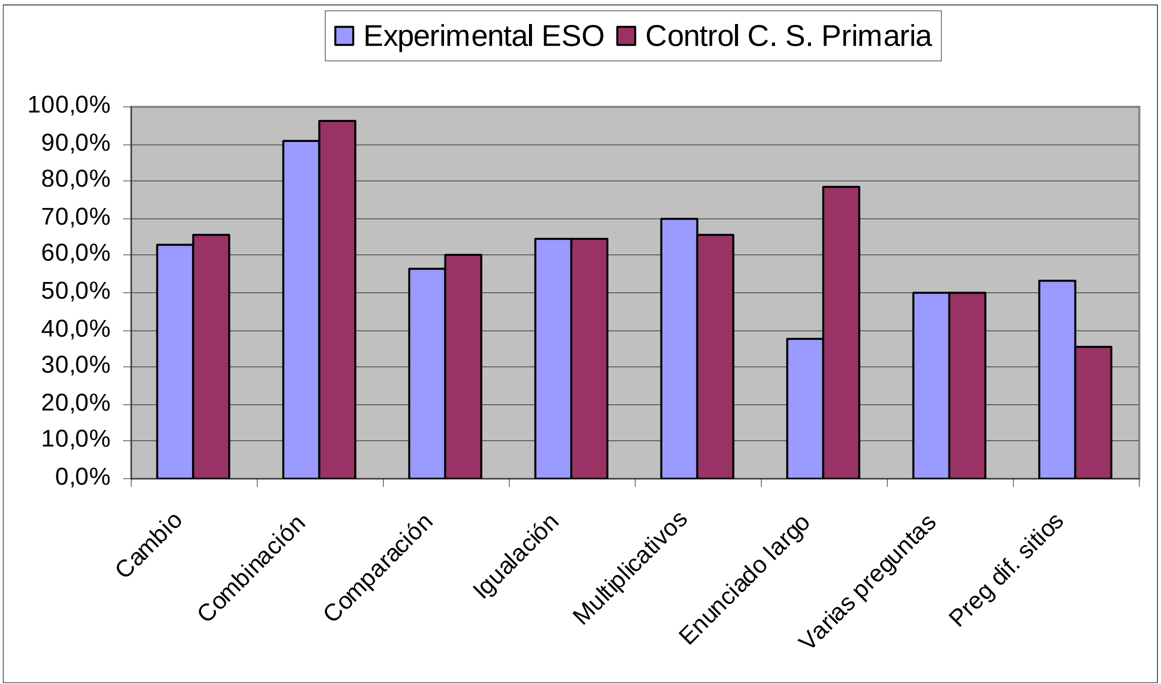


Figura 8. Resultados comparativos por etapas y ciclos

Se observa que aún las diferencias de logro se decantan globalmente hacia los alumnos sin déficit, sobretodo en el problema de enunciado largo.

Otro aspecto que se analizó en este amplio estudio fue el análisis de los errores de ejecución de las operaciones en la fase de resolución. Concretamente se han estudiado las siguientes categorías:

a) Errores debidos al proceso operacional (con números naturales y decimales).
b) Errores en el cálculo con decimales.
c) Errores de Cálculo.
d) Errores debidos a la falta de atención.

En el estudio se han detectado los errores que se muestran en la tabla, tanto operando con números naturales como con decimales.

Tipo de error	Nº problemas fallados por este error. G. Experim.	% del total de probl. del G. Experim. (1566)	% problemas G. Experim. con errores específicos (386)	Nº problemas fallados por este error. G. Control	% del total de probl. del G. Control (1595)	% probl. del G. Control con errores específicos (258)
Colocación incorrecta de las cifras al ponerlos en una operación	33	2,1%	8,54%	11	0,68%	4,26%
Coloca mal los miembros de la resta (minuendo por substraendo)	40	2,55%	10,36%	14	0,87	5,42%
En una resta, siempre restan los números mayores menos los pequeños.	11	0,7%	2,84%	2	0,12	0,77%
Total erróneos	84	5,35%	21,76%	27	1,69%	10,46%

Tabla 3. Resultados de los diferentes tipos de errores

En la primera columna observamos que el mayor porcentaje de errores corresponde al que los alumnos colocan mal los miembros de la resta (minuendo por sustraendo) de manera incorrecta, es decir, saben que en los problemas se ha de restar, pero no lo colocan correctamente.

En la Figura 9 se muestran los tres errores detectados en este apartado, repartidos en el total de problemas de cada grupo.

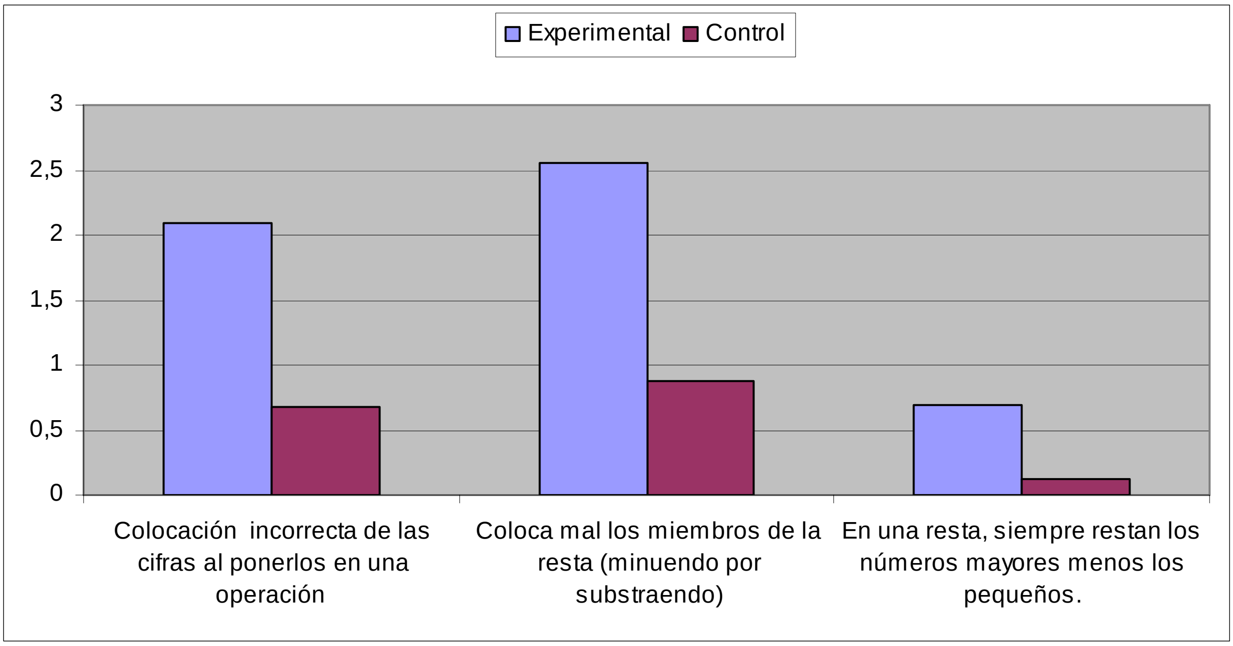


Figura 9. Gráfico comparativo de los distintos tipos de errores

Este error se detecta indistintamente en alumnos, tanto de Ciclo Inicial de Primaria, hasta el Segundo Ciclo de la ESO, pasando por todos los ciclos de enseñanza obligatoria. La resolución, en estos casos, pasa por restar la cifra de mayor orden. Vemos algunos ejemplos:

Juan tenía 26 euros, y su tío le dio unos cuántos euros más. Ahora tiene 42 euros. ¿Cuántos le dio su tío?

$$\begin{array}{r} 26 \\ -\ 42 \\ \hline 84 \end{array}$$

R: Su tío le dio 84 euros

Respuesta de Luis (Ciclo Inicial de Primaria)

Veamos otro ejemplo

El Sr. Juan tiene 2368 gallinas y su vecino Andrés tiene 3290 gallinas. ¿Cuántas ha de vender Andrés para tener tantas como Juan?

$$\begin{array}{r} 2368 \\ -\ 3290 \\ \hline 1078 \end{array}$$

Respuesta de Alberto (Ciclo Medio de Primaria)

El otro error a destacar es aquel en que en una resta siempre se sustraen los números pequeños de los mayores, tanto estén en el minuendo como en el sustraendo. Este fenómeno a opinión de Giménez y Girondo (1990) se produce porque el alumno no opera con los números en cuestión, sino que ve sólo dígitos, restando el pequeño del mayor, por lo que habría de trabajarlo leyendo previamente los números.

Vamos a mostrar un ejemplo de este tipo de errores.

Juan tenía ahorrados 1026,68 euros, y su tío le dio unos cuantos euros más. Ahora tiene 1242 euros. ¿Cuántos le dio su tío?

$$\begin{array}{l} 1026{,}68 \\ -\ \quad 12{,}42 \\ \hline 1039{,}10 \text{ euros} \end{array}$$

Respuesta de Sergio (Ciclo Superior de Primaria)

El último de los errores de esta categoría, es aquel en el que los alumnos colocan incorrectamente las cifras al ponerlos en una operación de suma o resta, el grupo de control produce el error sólo en la tercera parte de las ocasiones respecto del grupo experimental. En este apartado se han incluido tanto las operaciones con números naturales como con números decimales, o en operaciones entre un número natural y otro decimal. Sabemos que los alumnos sin déficit, al operar con números decimales muestran muchos más errores al efectuar las operaciones que cuando operan con números naturales, este hecho se agrava en el caso del alumnado con TDAH.

Otro aspecto interesante son los resultados de los aspectos formales de la realización de los problemas. Para ello se analizan: i) la organización espacial, ii) la pulcritud iii) la caligrafía.

1. ***Organización espacial****.* Los resultados han indicado que muchos alumnos con TDAH no respetan el espacio físico del problema, ocupando o bien la parte superior o inferior. En un principio se podría pensar que esto pasa en los cursos inferiores de primaria, pero el hecho es que se produce en todas las etapas y cursos (ver ejemplo de la Figura 12).
2. ***Sobre la pulcritud****.* En el proceso de ejecución operacional, los aspectos como la impulsividad e hiperactividad, propios del déficit provocan unos problemas añadidos, como son la pulcritud en la presentación de los ejercicios, que hacen que muchas veces sean difíciles de realizar las correcciones.

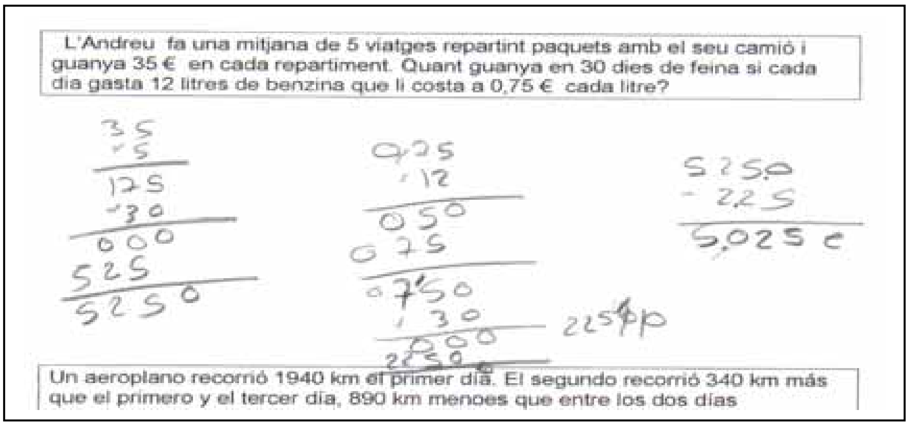


Figura 12. Resolución de un problema de un alumno en el cual se puede ver la dificultad de mantener el orden en colocación de las cifras y de las operaciones.

3. ***Respecto a la caligrafía****.* Muchas veces la impulsividad de los alumnos con TDAH les lleva a realizar trazas deficientes en la representación de las cifras, que algunas veces son difíciles de reconocer.

Hasta aquí hemos mostrado algunas de las dificultades que tienen los alumnos con TDAH y que nos ayudarán a plantear metodologías que se adapten a sus dificultades, las cuales podrán ser tenidas en cuenta, tanto por los docentes de aula ordinaria como los de reeducación.

Orientaciones didácticas

No podemos terminar este artículo sin mostrar algunas pautas metodológicas que se desprenden de los estudios realizados.

En sesiones de reeducación con profesores y alumnos con hiperactividad, Casajús (2005) pudo constatar que los profesores utilizaban una serie de estrategias metacognitivas que, aunque no eran específicas para las matemáticas, sino que se utilizaban más globalmente para la consecución de unos hábitos de trabajo, hacían más óptimo el proceso de aprendizaje. Estas estrategias pueden ser aplicadas al campo de la resolución de problemas aritméticos, las cuales explicaremos a continuación.

Es importante que antes de realizar un problema se intente que el alumno con TDAH interiorice un proceso compuesto de una serie de pasos, para que éste lo pueda seguir y, en todo momento, sea consciente hasta donde ha llegado y donde se para. Es por esto que los profesores de reeducación suelen tener una hoja con los pasos a seguir para que el alumno los pueda consultar en todo momento. El proceso es el siguiente: 1) Coge solamente lo más *imprescindible* (libro, material, etc.), 2) Organízate el *tiempo*, 3) Lee el *enunciado* del primer problema, 4) Piensa *qué* hace falta hacer, 5) Piensa *cómo* lo harás, 6) *Hazlo*, 7) *Repásalo*. ¡Muy bien!, Ya tienes uno hecho. Repite los pasos para 3, 4, 5, 6 y 7 con los demás problemas.

Cuando este proceso general se adapta a la resolución de problemas matemáticos, el esquema es el siguiente:

a) Lee atentamente el enunciado.
b) ¿Cuáles son los datos que me dan?
c) ¿Qué me piden?
d) ¿Qué operaciones he de hacer?
e) Lo hago
f) Repaso

Hay bastantes estudios sobre las dificultades y errores que hacen los alumnos en el proceso de la resolución de problemas de alumnos con dificultades, entre estos podemos citar el de Kintsch (1987) que mostró tres posibles fuentes de error al resolver problemas aritméticos sencillos: a) mal uso o desconocimiento de estrategias aritméticas, falsas concepciones y fracaso en el procedimiento de conteo, b) comprensión equivocada del problema (sobretodo lingüísticas), c) sobre carga de elementos en la memoria a corto plazo.

A partir de las escuelas que han participado en el estudio hemos podido observar que no hay metodología uniforme que utilicen los profesores de reeducación específica y que cada profesor aplica la suya ya que la mayoría de ellos no ha recibido pautas en este sentido.

Orrantia y otros. (1993) han desarrollado en una de sus investigaciones un programa de instrucción que intenta recoger diferentes aspectos relacionados con la resolución de problemas, especialmente aquellos que tienen que ver con la representación problemas verbales (como puede ser las destrezas en la descodificación, representaciones espaciales, etc.). En las dos primeras etapas de su programa hacen referencia a la comprensión del enunciado y se refieren a las ayudas textuales, entendiendo como tales la reescritura y la representación lingüística. Existen investigaciones que han mostrado que cuando se presentan los problemas con una serie de ayudas lingüísticas que hacen explícita la relación entre los conjuntos puestos en juego, es a decir, su estructura semántica, la ejecución mejora.

Orrantia en este mismo estudio propone para facilitar la comprensión de los PAEV de suma y resta una representación correcta, seguir las pautas siguientes:

a) ***Problemas de cambio.*** Por ejemplo: “Teresa tenía 8 caramelos y Pilar le da 4 más. ¿Cuántos tiene ahora Teresa?
Podemos ver que en los problemas de cambio se pasa de una situación inicial a una de final después de una modificación o cambio. Dado que los alumnos con TDAH tienen dificultades en las secuencias temporales que están bien definidas, se propone enmarcar correctamente la acción en la secuencia temporal, con ayudas de palabras en el enunciado tales como: al principio, antes, ahora, mientras, después, etc., para entender de forma correcta la acción de crecimiento o decrecimiento. Por tanto, el problema podría ser rescrito como:
“Teresa tenía al principio 6 caramelos y Pilar le da después 4 más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Teresa?

b) ***Problemas de combinación***. En los problemas de combinación se describe una relación entre conjuntos con un esquema parte- parte- todo. En este caso lo más importante no es la secuencia temporal, sino que aquí es el conocimiento de pertenencia de la cantidad de cada una de las partes. Veamos un ejemplo: “Carmen y Juan tienen 84 cromos entre los dos. Si Carmen tiene 28 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan? La dificultad se encuentra en saber diferenciar las cantidades de las dos partes. Por tanto, una posible reescritura puede ser la siguiente. “Carmen y Juan tienen 84 cromos entre lo dos. De estos cromos 28 son de Carmen y el resto de Juan. ¿Cuántos cromos son de Juan?

c) ***Problemas de comparación***. En este tipo de problemas lo que resulta difícil para los alumnos con TDAH es lo qué hace referencia al conjunto mayor o menor, haciendo una sentencia que matice estos hechos. Así el problema: “Nuria tiene 105 cromos, que son 24 más de los que tiene Juan. ¿Cuántos cromos tiene Juan? Se puede rescribir por “Nuria tiene más cromos que Juan. Nuria tiene 105, que son 24 más de los que tiene Juan. ¿Cuántos cromos tiene Juan?”

d) ***Problemas de igualación***. Estos problemas son los que resultan más difíciles para todos los alumnos, aunque más para los alumnos con TDAH, ya que la comparación entre las cantidades se establece por la expresión "tantos como". Por lo tanto, para una correcta interpretación los alumnos han de reconocer las tres cantidades que entran en juego (la de referencia, la comparada y la diferencia) y han de saber especificar los conjuntos mayor y menor. A modo de ejemplo, si el problema dice: "María tiene 73 euros y su hermana Nieves tiene 48 euros. ¿Cuántos euros le faltan a Nieves para tener tantos como a María?". La reescritura pasaría por: "María tiene 73 euros y su hermana Nieves menos, ya que solamente tiene 48 euros. ¿Cuántos euros hemos de dar Nieves para que tenga tantos euros como María?".

Es interesante resaltar que en el estudio que realiza Casajús (2005) una parte esta dedicada a la reescritura de problemas PAEVs con alumnos con TDHA en los niveles de Primaria y de ESO obteniendo buenos resultados.

Veamos otro ejemplo de problema reescrito:

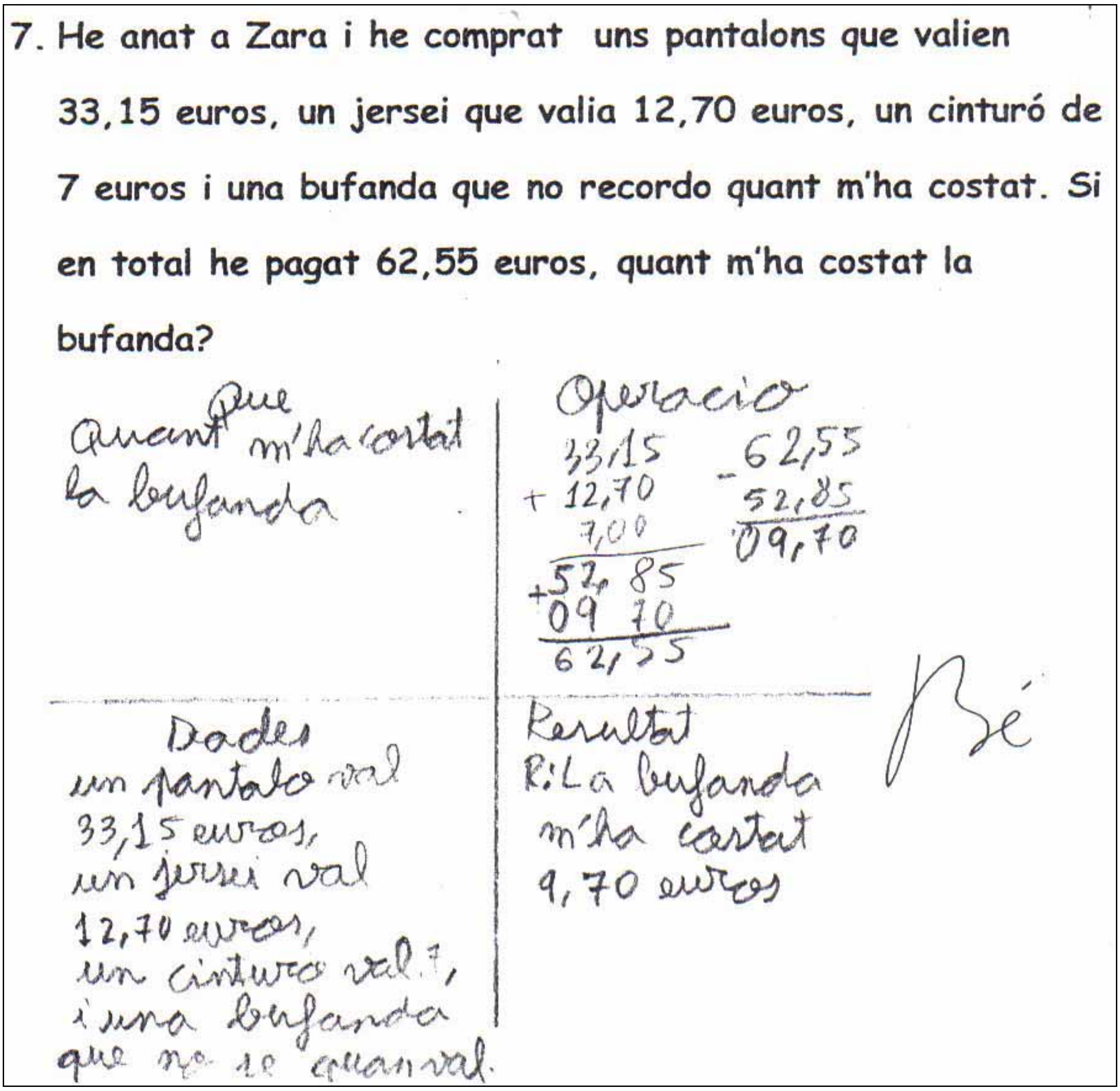
"Marta tiene 245 euros y su hermana Nuria tiene 123 euros. ¿Cuántos euros le faltan a Nuria para tener tantos como Marta?"

Problema reescrito:

"Marta tiene 356 euros y su hermana Nuria menos, ya que sólo tiene 234 euros. ¿Cuántos euros hemos de dar a Nuria para tener tantos como Marta?"

A la vista de los resultados vemos que el alumnado dice que prefieren que estén reescritos, en mayor grado en los problemas de la categoría de cambio. Los resultados de los problemas de comparación no se muestran con una preferencia clara, incluso los de Igualación son preferidos aquellos sin reescribir, aunque estos sólo fueron pasados a alumnos de ESO, que al mostrarse tan fáciles preferían los *"que tienen menos letra (enunciado)".* Aunque habría de realizarse un estudio más exhaustivo y mucho más profundo sobre las categorías semánticas en todos los ciclos, parece que los problemas reescritos serían muy adecuados para los alumnos de Primaria. Nuestra pequeña muestra, así parece indicarlo. En cambio, en cursos más elevados la preferencia no parece indicar una reescritura de los enunciados, porque no lo necesitan, o porque prefieren que no se modifiquen.

Para ayudar a la organización del espacio en la resolución de problemas PAEV se ha visto que una buena estrategia operacional es parcelar el espacio del problema, separando cada trozo en la determinación de la incógnita (¿Qué me piden?), la explicación de los datos, el espacio para el cálculo operacional y el destinado al resultado. De esta forma se tiene controlado en todo momento los elementos del proceso. Veamos un ejemplo en la Figura 12



7. He anat a Zara i he comprat uns pantalons que valien 33,15 euros, un jersei que valia 12,70 euros, un cinturó de 7 euros i una bufanda que no recordo quant m'ha costat. Si en total he pagat 62,55 euros, quant m'ha costat la bufanda?

Figura 12. Muestra de una buena distribución del espacio de un problema

Este tipo de organización, además, facilita al alumno con TDAH la organización del espacio físico, que como hemos indicado es una de las cuestiones que les cuesta mucho.

Hemos visto que gracias a los estudios realizados nos permiten conocer detalladamente las dificultades que muestra el alumnado con TDHA en el aprendizaje matemático, cuáles son los errores suelen cometer en la resolución de los problemas PAEV y cómo el conocimiento de éstos, pueden contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Bibliografía

- Ackerman, P. T.; Anhaldt, J.M.; Dykman, R.A.; Holcomb, P. (1986): "Effortful processing deficits in children with learning and attention disorders": Topic *in Learning and Learning Disabilities*, nº 7, pp. 12-22.
- Bermejo V.; Rodríguez, P. (1987). "Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición". *Infancia y aprendizaje*, nº 39-40, pp. 71-81.
- Bermejo V.; Rodríguez, P. (1990). La operación de sumar. En V. Bermejo, El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones. Barcelona, Piados Educador.
- Carpenter, T.P.; Moser J.M. (1982). "The development of addition and subtraction problem- solving skills. En T.P. Carpenter J.M. Moser ycogni T.A. Romberg (Ed.) Addition and subtraction: A cognitive perspective, pp. 9.24. Hillsdale, N.J. Erlbaum Associates.
- Carpenter, T.P.; Moser J.M. (1983). "The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Ed.). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, pp. 7-44. Orlando, Florida. Academic Press.
- Carpenter, T.P.; Moser J.M. (1984). "The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three." *Journal for Research in Mathematics Education*, nº 15, pp. 179-202.
- Casajús, A. (2005). La resolución de problemas aritmético- verbales por con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH). Tesis doctoral. Universidad de Barcelona.
- Casajús, A.; Rosich, N. (2005). "La resolución de problemas aritméticos en alumnos con Transtorno de Déficit de Atención. Estudio comparativo. UNO: Revista de Didáctica de las matemáticas, nº 39, pp. 51-68.
- Geary, D. C. (1993). "Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychol. Bull*, nº 114, pp. 345-362.
- Giménez J.y Girondo LL. (1990). Càlcul a l'escola. Reflexions i propostes. Barcelona. Graó.
- Informe Español Pisa (2003). Informe Español Pisa. Estudios Internacionales de evaluación. Madrid, INCE-MEC.
- Informe Español Pisa (2006). Programa para la evaluación Internacional de alumnos de la OCDE. Estudios Internacionales de evaluación. Madrid, INCE-MEC.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000). "Estándares Curriculares de Matemáticas", disponible en http:// nctm.org.
- Nesher, P.; Greeno, J.J.; Riley, M.S. (1982b). "The development of Semantic Categories for Addition and Subtraction". *Educational Studies in Mathematics*, nº 13, pp. 373-394.
- Nesher, P. (1982). "Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems." En T. P. Carpenter, J.M. Moser y T. Romberg, Addition and subtraction: A cognitive perspective. Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum Associates.

- Orjales, I. y Polaino - Lorante, A, (1992). Estilos cognitivos e hiperactividad infantil: los constructor dependencia- independencia de perceptivo e impulsividad - reflexividad. Bordón, nº 44, (4) pp. 421-430.
- Orjales, I. (2003). Déficit de atención con hiperactividad. Madrid. CEPE.
- Orrantia y cols. (1993). “La resolución de problemas de matemáticas: dificultades e instrucción”. Siglo cero, Vol. 28 (6), pp. 25-46.
- Puig & Cerdán (1988). Problemas aritméticas escolares. Madrid. Síntesis.
- Pisa (2003). Pruebas matemáticas y de solución de problemas. Instituto Nacional de evaluación y calidad del Sistema Educativo. Madrid. MEC.
- Rico, L. (2006). “Marco teórico de evaluación en Pisa sobre matemáticas y resolución de problemas.” *Revista de Educación*, nº extraordinario, pp. 277-294.
- Riley, M.; Greeno, J.y Séller, J.(1983).“Development of children’s problem – solving ability in arithmetic”. En H. Ginsburg: The development of mathematical thin kings. N.Y: Academic Press.
- Zentall, S.S. (1990). “Fact- Retrieval Automatization and Math Problem Solving by Learning Disabled, Attention- Disordered, and Normal. *Journal of Education Psychology*, nº 82, pp. 856-865.
- Zentall, S.S. y Ferkis, M: A. (1993). “Mathematical problem solving for youth with ADHD, with and without learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, nº 16, pp. 6-18.
- Zentall, S.S., Smith, Y.N., Lee Y.B. y Wieczorec, C.H. (1994). “Mathematical outcome of attention deficit hyperactivity disorder”. *Journal of Learning Disabilities*, nº 27, pp. 510-519.

Núria Rosich Sala Doctora en Ciencias de la Educación (Didáctica de las Matemáticas). Profesora Titular de Universidad de la Universidad de Barcelona. Desde hace años se ha especializado en el conocimiento del alumnado con necesidades educativas especiales en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. También en esta línea dirige el grupo Diversimat.
nuriarosich@ub.edu

Ángel Casajús Lacoste es psicopedagogo y atiende alumnos con diversos tipos de dificultades en matemáticas en su instituto Pla de Boet (Barcelona). Se ha especializado en el conocimiento del aprendizaje y enseñanza de alumnos con hiperactividad. Forma parte del grupo Diversimat.
acasajus@xtec.cat

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2008, Número 16, páginas 85 - 105
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Síndrome de Down: contenidos matemáticos mediados por ordenador

Juana Mª Ortega Tudela

Resumen

En el presente trabajo, se intenta ofrecer una visión específica de cómo los materiales multimedia ofrecen una serie de posibilidades que favorecen el aprendizaje de contenidos matemáticos a personas con síndrome de Down. A partir de la investigación realizada, se analizan las posibles dificultades a las que se enfrentan las personas con síndrome de Down en el aprendizaje de los conceptos básicos matemáticos. Con el presente artículo se trata de mostrar herramientas sencillas de trabajo que nos ofrecen múltiples opciones de respuesta a las dificultades existentes en el aula.

Abstract

This paper aims to show how the multimedia material can help Down Syndrome (DS) children to learn mathematical contents. We review recent research characterising the mathematics learning by DS children as well as the role of new technologies to improve this domain-specific learning. All this will provide simple work tools that can help teachers to manage some classroom situations.

1. Introducción

Una de las ciencias más abstractas y difíciles de comprender por la gran mayoría de las personas es la Matemática. Este nivel de abstracción ha hecho que habitualmente se considere un ámbito inaccesible para personas con necesidades educativas especiales, y más aún para personas con dificultades derivadas de alteraciones cognitivas, como ocurre con las personas con síndrome de Down (SD).

Este hecho ha ocasionado que durante muchos años la Matemática haya sido una de las áreas menos estudiadas en referencia a los procesos de aprendizaje de las personas con SD. Esta falta de estudios exhaustivos ha provocado, así mismo, que determinados autores afirmen que estas personas presentan especiales dificultades a la hora de enfrentarse a este tipo de contenidos (Carr, 1988, Byrne et al. 1995).

Sin embargo, la historia nos ha demostrado cómo las dificultades, que en muchas ocasiones se atribuían a estas personas, eran solventadas y se conseguían logros hasta ese momento impensables. El aprendizaje de la lectura y de la escritura, por ejemplo, también fueron en su momento contenidos vedados para estas personas, pero únicamente el empeño de los profesionales que los atendían y el esfuerzo diario de estas personas fueron necesarios para conseguir superar estas metas.

En la actualidad, cada día nos encontramos con más autores que ponen su atención en el estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en las personas con SD (Caycho et al. 1991; Casey et al. 1988, Sloper et al. 1990; Shepperdson, 1994; Aguilar et al, 2003, entre otros). El auge en este campo de investigación está dando la oportunidad de que se conozcan, más detenidamente, las características de las personas con SD que hacen posible la adquisición de este tipo de contenidos. Desde nuestro punto de vista, sólo el conocimiento de dichas características y la adecuación de métodos y materiales a estas características harán posible un aprendizaje efectivo y eficaz de estos contenidos (Ortega-Tudela y Gómez-Ariza, 2006; Ortega-Tudela, 2005; Ortega-Tudela y Parras, 2002).

Siguiendo esta argumentación, a continuación se expondrán las características cognitivas de las personas con síndrome de Down atendiendo a los tres procesos fundamentales que rigen el aprendizaje: atención, percepción y memoria. Posteriormente se tratará de analizar cómo estos procesos se ven involucrados en la adquisición de contenidos matemáticos para obtener una mayor comprensión del problema. Para finalizar trataremos de dar una visión de cómo los productos y metodologías resultantes de la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación pueden ser utilizados para optimizar las posibilidades de las personas con SD y así tratar de dar respuesta a las necesidades planteadas debido a su diversidad cognitiva.

2.- Síndrome de Down y Matemáticas: necesidades derivadas

Parece obvio que algunas de las características de las personas con SD pueden, en muchas ocasiones, dificultar el acceso a la información y por tanto al aprendizaje de los contenidos conceptuales, sean estos del tipo que sean. Sin embargo, algunas de estas características van a dificultar en mayor medida los contenidos conceptuales del ámbito de las matemáticas, dado el nivel de abstracción de los mismos.

Características sensoriales (desórdenes oftalmológicos, audiológicos y otorrinolaringológicos) como las que pueden presentar las personas con SD pueden dificultar su acceso a la información y por tanto determinar su estilo y posibilidades de aprendizaje (Dahle y Baldwin, 1994; Pueschel y Sustrova, 1997). Para acercarnos a este estudio, analizaremos las dificultades observadas en los procesos de Percepción, Atención y Memoria.

2.1.- Dificultades en Percepción

En la actualidad, la mayoría de las dificultades en los sistemas receptivos pueden ser solventadas mediante ayudas técnicas que favorezcan la recepción de la información, bien por el canal menos deteriorado o bien maximizando las posibilidades de los restos hábiles que posea la persona (auditivos o visuales). El uso de los modernos audífonos o correctores de visión, favorece que se solventen gran parte de las dificultades de acceso a la información de muchas personas con Síndrome de Down. No obstante, una vez solventadas las posibles dificultades derivadas de problemas en los órganos receptores de información, estas personas pueden presentar, en menor o mayor grado, deficiencias en los mecanismos encargados del procesamiento de la información recibida, especialmente cuando la presentamos por el canal auditivo frente al visual (Marcell y Amstrong, 1982; Lincoln et al, 1985; Pueschel, 1990; Rondal et al, 1997).

La percepción es la capacidad por la cual recibimos los estímulos del exterior a través de los sentidos y los transferimos al cerebro para, posteriormente, dotarlos de significado procesándolos. Este acto de interpretar los estímulos externos viene mediado, en primer lugar, por los órganos receptivos. Sin embargo, en muchas ocasiones, a pesar de no existir ninguna dificultad sensorial, existe una dificultad a la hora de dar significado a esa información relevante, ya sea por problemas biológicos o de otra naturaleza. Dentro de las especificidades derivadas del SD, nos encontramos con alumnos que, o bien tienen dificultades para extraer información visual y auditiva de su entorno, o bien tienen dificultades para dotar de significado y procesar esa información que les llegan a través de los órganos receptores. (Buckley, 1995; Cunninghan, 1995). En ocasiones alumnos que no presentan dificultades sensoriales propiamente dichas, ya que reciben perfectamente esta información del exterior, no son capaces de dotarla de significado por dificultades en el procesamiento posterior de la información. Estas peculiaridades han de ser atendidas específicamente mediante métodos que faciliten la discriminación de la información relevante, de aquella otra información que no ofrezca elementos de apoyo al desarrollo de la tarea.

Dada la relación existente entre percepción, atención y memoria, es comprensible que aparezcan determinados problemas en la codificación y recuperación dependientes de la modalidad de la información. Así, las personas con Síndrome de Down presentan mayores dificultades en estos procesos ante información de tipo verbal que frente a información con apoyos visuales. Los procesos de codificación y recuperación además, requieren la participación de los mecanismos de atención, por lo que cualquier dificultad en este sistema puede repercutir en el procesamiento de la información.

Todas estas diferencias en el modo de percepción y procesamiento de dicha información van a dar lugar a distinciones en los estilos y ritmos de aprendizaje en las personas con SD. A su vez, van a mediatizar el proceso de enseñanza haciendo necesaria la planificación de metodologías, lo suficientemente ricas y flexibles, como para atender a la diversidad.

2.2.- Dificultades en Atención

La atención puede ser entendida como un sistema complejo encargado de dirigir, optimizar y controlar el procesamiento de la información. Se asume que este sistema tiene funciones de orientación/selección, alerta/vigilancia y control ejecutivo.

Entendemos por orientación la capacidad de movilizar los sistemas sensoriales hacia un estímulo relevante.

Por otro lado, la función de alerta hace referencia al grado o estado de vigilancia que permite a la persona estar en disposición de reaccionar ante un estímulo y mantener este estado en el tiempo.

Por último, el control ejecutivo implica, entre otras cosas, la capacidad de gestionar los recursos cognitivos para poder realizar tareas concurrentes o resolver conflictos de procesamiento.

Dada la complejidad de este sistema, los problemas de atención suelen ser habituales en las aulas, existiendo diferentes niveles de dificultad a este respecto. Cuando nos referimos a personas con Síndrome de Down, estas dificultades suelen presentarse con una gran incidencia. Algunos de los problemas que se observan en este sentido son los relacionados con:

- Diferencias en la amplitud de la atención. Nos encontramos con alumnos que pueden presentar un foco de atención excesivamente centrado en algo (por lo que pueden perder información relevante) o excesivamente amplio. En este último caso, el gran número de estímulos que hay que procesar puede causar una sobrecarga.
- Fallos en las posibilidades de cambio del foco de atención de un estímulo relevante a otro. Algunos alumnos presentan dificultades para modificar el foco de atención ante una demanda nueva.
- Problemas de concentración, tanto por exceso, como por defecto. Podemos encontrarnos alumnos que se centran demasiado en un determinado estímulo y otros en los que sus niveles de concentración son tan vagos que no pueden focalizar la atención adecuadamente.
- Distraibilidad, ante la imposibilidad de obviar los estímulos irrelevantes.
- Escasez de recursos atencionales. Fallos en los mecanismos de distribución o incapacidad para atender a dos estímulos a la vez.
- Fatigabilidad. Hace referencia a alumnos que presentan una dificultad para mantener la atención en una determinada tarea, independientemente de que existan elementos distractores. Se produce una fatiga en el mantenimiento de la atención lo que da lugar al abandono o retraso en la ejecución de la tarea.
- Disfunciones en la vigilancia. Se presentan niveles de alerta y receptividad excesivamente bajos o altos.

2.3.- Dificultades de memoria

Otro de los factores que dan lugar a las dificultades percibidas en las personas con SD viene derivado de las alteraciones en los procesos de memoria. Más concretamente, la investigación ha señalado a las dificultades en la memoria de trabajo (MT), como uno de los sistemas cognitivos que mayores implicaciones tiene en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La MT es un sistema de capacidad limitada, encargado tanto del almacenamiento temporal de la información como de su procesamiento. De esta manera, la MT está implicada en un gran número de tareas cognitivas, como la comprensión y la resolución de problemas. Su importancia radica en la posibilidad que nos ofrece de crear una representación mental de los acontecimientos integrando la información parcial que tenemos en un momento dado con el conocimiento previo que poseíamos sobre el tema (del lenguaje, el tema del texto, etc…). Al mismo tiempo, la MT nos permite actualizar sus contenidos, manteniendo activa la información relevante e inhibiendo la información redundante o menos importante.

En la práctica educativa puede observarse que algunas de las dificultades que presentan los alumnos con SD están relacionadas con el funcionamiento eficiente de la MT, lo que exige poner en práctica determinadas estrategias didácticas, como la repetición de elementos importantes de la tarea de forma continuada para conseguir una mejor ejecución. Algunas de las dificultades encontradas hacen referencia a problemas en el almacenamiento a corto plazo y en los procesos de codificación y recuperación que requieren cierto control atencional (Pelegrina, Gómez-Ariza y Bajo, 2001).

Por otro lado, las personas con SD presentan en ocasiones dificultades debido a la mayor dificultad que poseen para la utilización de estrategias de memoria. Estas estrategias de memoria son procesos mentales que las personas ponen en marcha voluntariamente, y de forma controlada, con el objeto de mejorar su ejecución en una tarea de aprendizaje. Algunas de estas estrategias de memoria son (Bjorklund y Douglas, 1997):

- Repaso: repetir abierta o encubiertamente el material para mantenerlo activo en la memoria de trabajo.
- Organización: intentar estructurar el material organizándolo o clasificándolo en categorías para darle una estructura y facilitar su activación.
- Elaboración: intentar dotar de un significado extra la información a memorizar para que sea más fácil de recordar, añadiendo información al contenido para, de alguna manera, crearnos una imagen más completa que facilite su recuerdo.

Estas estrategias aparecen gradualmente con el desarrollo de los niños. Sin embargo, en ocasiones los alumnos con síndrome de Down no las ponen en práctica de forma voluntaria en situaciones que requerían de su uso. La investigación ha demostrado que la enseñanza explícita de este tipo de estrategias facilita su adquisición y aplicación a diversos contextos.

3.- Down y Matemáticas

Las alteraciones en los procesos de atención, percepción y memoria presentes en las personas con SD van a ser en gran medida las definitorias de su aprendizaje. Estas características van a mediar la forma en que las personas con SD se acercan al conocimiento de cualquier tipo de materia, incluidas las matemáticas. Como mencionamos con anterioridad, durante algún tiempo los estudios realizados hacían pensar que las personas con SD poseían una especial dificultad que impedía su acceso a los contenidos matemáticos (Gelman y Cohen, 1988; Porter,1999; entre otros.) Sin embargo en la década de los 90, autores como Buckley y Sacks (1987) y Carr (1988) comienzan a prestar atención al aprendizaje de las matemáticas por parte de las personas con SD, encontrando datos alentadores que hacían pensar que, aunque si bien era cierto que estas personas presentaban dificultades en el acceso a este tipo de contenidos, en algunas ocasiones estas dificultades se veían influenciadas por factores externos y ajenos a la persona, como por ejemplo el tipo de escolarización (Sloper, Cunningham, Turner, Knussen, 1990; Casey, Jones, Kugler y Watkins, 1988, Shepperdson, 1994). Este hecho demuestra que la dificultad ante las matemáticas, que presentan las personas con SD, no es una dificultad inherente a sus características e imposible de solventar, sino una característica modificable y solucionable mediante el uso de las ayudas pertinentes.

En los últimos años se ha observado un incremento en las investigaciones que tratan de conocer cómo aprenden matemáticas los niños con SD (Nye, Clibbens y Bird, 1995; Monari, 2002), intentando en muchos casos desbancar la idea existente de que las personas con SD únicamente pueden adquirir aprendizajes matemáticos de forma superficial o literal y sin comprender aquello que retienen. Sin embargo, si pretendemos dar una respuesta a las necesidades que las personas con SD muestran ante los contenidos matemáticos, debemos preguntarnos en qué medida sus dificultades en atención, percepción y memoria pueden dificultar su acceso a dichos contenidos.

Tal y como señalamos anteriormente, la mayoría de las dificultades que presentan los alumnos con Síndrome de Down en los sistemas sensoriales pueden ser corregidas mediante ayudas técnicas que facilitan y en muchos casos posibilitan el acceso a la información. Audífonos, gafas o implantes, entre otros, van a ser algunos de los instrumentos que las personas con SD utilizan para solventar los problemas perceptivos. Hemos de tener en cuenta que una mala recepción de la información puede dificultar, aún más, los problemas que estas personas tienen a la hora de enfrentarse a los contenidos matemáticos. El lenguaje matemático utiliza números, figuras, signos, incluso espacios, que en ocasiones transmiten una gran cantidad de información, pero que no son fácilmente accesibles. Clarificar el lenguaje matemático, hacerlo lo más accesible posible, sería uno de los trabajos claves para solventar problemas que se puedan presentar en la recepción de dicha información. A las ayudas técnicas que podamos utilizar habría que unir el uso del canal menos defectuoso para presentar la información. Así, a los alumnos que posean deficiencias a nivel auditivo debería presentársele la información matemática clara y concisa utilizando fundamentalmente el canal visual, empleando imágenes que dinamicen el acceso a la información para este tipo de alumnos. Por otro lado, alumnos que posean deficiencias a nivel visual, deberán tener ayudas auditivas, con mensajes claros y concisos que faciliten su acceso a la información.

Sin embargo, una vez solventado el primer filtro de los órganos receptivos nos encontramos con personas que no son capaces de dotar de significado aquella información que obtienen del exterior. Las dificultades en procesar la información recibida del exterior se ve claramente reflejada en las dificultades que presentan las personas con SD a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas. Ejercicios simples de resolución de sumas o restas pueden presentar para ellos un nivel de abstracción difícilmente solucionable de no utilizarse metodologías específicas. Dichas metodologías deben facilitar la discriminación de la información relevante de aquella otra que no ofrezca elementos de apoyo al desarrollo de la tarea.

La utilización de problemas gráficos ayuda a dinamizar la recepción y posterior procesamiento de la información, especialmente en materias con el nivel de abstracción que presenta la matemática. Ejemplo claro de este tipo de herramientas son los materiales usados en el Tutorial Inteligente sobre Conceptos Lógico-Matemáticos elaborado en la Universidad de La Laguna (Bruno, Noda, Aguilar, González, Moreno y Muñoz, 2006)

Junto con los problemas de percepción nos encontramos que las deficiencias atencionales que pueden presentar las personas con SD imposibilitan, en muchos casos, el acceso a los contenidos matemáticos. Así, los problemas derivados de las dificultades en el foco de atención pueden provocar que algunos alumnos con un foco de atención excesivamente centrado en algo, no sean capaces de abstraer toda la información relevante presentada en un problema. Por otro lado, alumnos con un foco de atención excesivamente amplio, pueden verse perjudicados por un exceso de información y una incapacidad para saber en cada momento cual es la información relevante y clave para resolver un determinado ejercicio.

Las dificultades en el cambio de foco de atención dificultan el dinamismo necesario a la hora de resolver problemas matemáticos. Los alumnos que presentan esta dificultad van a requerir de estímulos salientes que orienten en cada momento cuál ha de ser el destino de su atención en cada paso.

Los problemas de concentración por exceso y por defecto, van a obstaculizar la recepción, acceso y procesamiento de la información, en cualquier contenido y especialmente cuando estamos haciendo referencia a contenidos de la complejidad o abstracción de la matemática. De aquí se va a deducir la necesidad de presentar materiales matemáticos en los cuales no se presenten elementos distractores que dificulten el acceso a los datos importantes, ni por otro lado, fichas con un carácter marcadamente sobrio y sin elementos que identifiquen cuáles han de ser los elementos más destacados de las mismas.

Otro de los problemas más importantes que se presentan en referencia a la atención por parte de las personas con SD es el relativo a la escasez de recursos atencionales. Estas personas presentan muchas dificultades para atender a dos estímulos a la vez, recurso que en muchas ocasiones se utiliza para enfatizar el mensaje, pero que en estas ocasiones no es más que una dificultad añadida a la tarea matemática. Ante esto, siempre se ha de tener clara la necesidad de presentar los problemas matemáticos unificando los mensajes y estímulos de manera que no se presenten informaciones que no sean complementarias a través de dos canales perceptivos diferentes.

La fatiga en el mantenimiento de la atención suele ser otro de los problemas claves, pero, quizás, uno de los de más fácil solución y a los que más respuestas se están dando desde las tecnologías de la información y la comunicación. El uso cada vez más frecuente de programas multimedia interactivos, con un marcado carácter lúdico, consiguen que los alumnos se olviden en muchas situaciones de que están aprendiendo y disfruten con el juego matemático, sin presentar ningún signo de fatiga.

En lo referente a las dificultades de memoria y los problemas que se pueden presentar al afrontar contenidos matemáticos, nos encontramos con que la memoria de trabajo está directamente relacionada con prácticamente la totalidad de contenidos y operaciones matemáticas. Todas las dificultades presentadas en el almacenamiento a corto plazo de la información y en la codificación y recuperación de contenidos (Pelegrina, Gómez-Ariza y Bajo, 2001) van a dificultar en gran medida los distintos contenidos matemáticos. Desde el conteo a la resolución de problemas, mantener elementos activos en la memoria mientras procesamos nueva información va a ser una de las premisas claves de la dinámica matemática, por lo que en gran medida este es uno de los problemas más graves a los que nos enfrentamos cuando abordamos este tipo de dificultades. La enseñanza explícita de estrategias de memoria va a ser fundamental para solventar este tipo de problemáticas observadas.

4.- Las TICs como un modo de responder a la diversidad en la atención a personas con Síndrome de Down

Por todo lo dicho con anterioridad, hablar de diversidad implica ser consciente de que existen diferencias entre las personas y comprender que éstas viven en una constante interacción con el medio que nos rodea. Este intercambio constante ofrece a la persona herramientas para desarrollarse y evolucionar, pero también la posibilidad de modificar este ambiente para que sea cada vez más favorecedor.

No obstante, tal y como señala Alba (1998), no debemos olvidar que el desarrollo tecnológico en muchas áreas, tales cómo la informática o las telecomunicaciones, no ha producido avances que hayan tenido como objetivo fundamental ayudar a mejorar la calidad de vida de las personas con síndrome de Down. Sin embargo, todos estos avances han tenido el efecto colateral de ofrecer nuevos escenarios de desenvolvimiento para estas personas. El desarrollo de las tecnologías aplicadas al aula facilita el trabajo con el alumnado ofreciendo múltiples alternativas al proceso tradicional de enseñanza-aprendizaje. Pero ¿cómo puede el ordenador favorecer las capacidades de las personas con Síndrome de Down?

El auge de las TICs está haciendo aparecer un gran número de materiales y productos capaces de ofrecer respuestas que optimicen el acceso, procesamiento y recuerdo de la información. Sin embargo, uno de los aspectos fundamentales que hay que tener en cuenta a la hora de hablar del uso de los medios, hace referencia a los efectos que estos producen en los individuos o en los contextos en que se desenvuelven. Estas consecuencias de las tecnologías les van a afectar directa o indirectamente (García, Roces González, 2002). Según Pérez (2000) existen cuatro posibles efectos de estos medios:

- Alteraciones en los procesos y en las estructuras del conocimiento. Cada medio exige una acomodación al tipo de contenido presentado, de manera que cada formato utilizado va a ser distinto en función del medio que lo genere. Así, por ejemplo, la estructura del contenido será distinta en función de si se presenta en formato texto o en formato vídeo o en formato web.
- Alteraciones en el repertorio de habilidades o destrezas de los individuos. Estas alteraciones van a producir consecuencias en sus estructuras psicológicas, afectando así a los mecanismos de comprensión y memorización. Las acciones de manejo, codificación y decodificación de la información terminan alterando la propia información, además de los modos en cómo esta se comprende, almacena o utiliza. Nos encontramos, por tanto, que existen diferencias sustanciales en cómo conocemos a través de un libro, un texto manuscrito o un material multimedia.
- Alteraciones en los valores motivacionales de los estímulos, que provocan escalas de interés. Estas alteraciones van a provocar que la prioridad que le damos a una determinada información o formato dependa, en ocasiones, del medio y el lenguaje utilizado para su difusión.
- Alteraciones de la naturaleza socio-comunitaria, afectando principalmente a las redes que intervienen en los procesos de generación del pensamiento, al tipo de representaciones sociales que se forman y a los mecanismos que intervienen en estos procesos. En definitiva, al sistema que soporta los pensamientos, su producción, su desarrollo y su difusión o mantenimiento.

Si partimos del concepto de diversidad, la escuela ha de ofrecer estrategias de enseñanza diversificadas que posibiliten que todos los alumnos accedan al aprendizaje. Para favorecer esta diversidad de experiencias educativas es necesario ofrecer itinerarios formativos diversos, capaces de dar respuesta a las necesidades de cada uno de los alumnos.

Desde esta perspectiva, el ordenador puede crear un espacio útil, interactivo y multisensorial que facilita a la persona con Síndrome de Down un entorno comprensible y flexible en el que puede desarrollar al máximo sus potenciales. Esto es así, básicamente, por dos motivos:

- Por las posibilidades de uso y soporte de gran número de sistemas simbólicos.
- Por la oferta de estos sistemas simbólicos de forma flexible y multisensorial.

El ordenador ofrece un entorno rico y adaptable que favorece la creación de diferentes itinerarios de acceso al conocimiento, individualizando en cada momento la ruta de adquisición del mismo. De igual forma, ofrece al alumno la posibilidad de aumentar el grado de autonomía e independencia personal, al poder trabajar sólo y necesitar menos ayuda de otros. Otra de las características del ordenador es que permite una mayor rapidez y calidad en el resultado del trabajo, lo que ahorra al alumno considerable esfuerzo y contribuye a eliminar el sentimiento de fracaso. Por otro lado, el ordenador puede almacenar datos de logros de cada niño y permite en ocasiones establecer un control más objetivo sobre el progreso del alumno y la validez del programa.

Todas estas posibilidades que nos ofrece la tecnología facilitan la planificación de una metodología coherente para la enseñanza de las matemáticas a la persona con síndrome de Down. Concretamente, uno de los materiales más flexibles y que mayores posibilidades tienen a la hora de adaptarse a las diferencias individuales es el material multimedia.

Los materiales multimedia hacen referencia a recursos informáticos que unen en un mismo programa elementos como textos (secuenciales e hipertextuales), gráficos, imágenes, vídeos, sonidos y música, entre otros. Son muchas las ventajas que ofrece dicho material, y algunas de las más importantes se resumen en este cuadro: (Marquès, 1997).

Ventajas del Material Multimedia en la Enseñanza (Marquès, 1997)
Posibilita una mayor adaptación a las características, actitudes y aptitudes de los usuarios, además de a las características del contenido en sí, ofreciendo un mismo hecho desde diferentes sistemas simbólicos.
Posibilita la interconexión de información de diferente índole y naturaleza.
Facilita el acceso a la información con gran rapidez.
Despierta actitudes positivas en el estudiante, atracción, motivación, carácter lúdico.
Desarrolla la aplicación de nuevas estrategias de aprendizaje, no basadas en el aprendizaje superficial.
Facilita el dinamismo en el aula, ya que puede ser compartido por más de un alumno.

Sin embargo, no debemos olvidar la necesidad de exigir cierta dosis de aspectos atractivos. Sin ellos, el instrumento educativo podría llegar a convertirse en algo aburrido para el niño y tener mayores dificultades para cumplir el objetivo para el que fue creado. Esto viene respaldado por estudios que muestran que la motivación es un requisito primordial del aprendizaje académico. Cuando se trata de niños y, más aún, cuando son niños con Síndrome de Down, el impulso motivador se consigue a menudo mediante la presentación lúdica de las diversas actividades. Más aún, cuando mediante el material multimedia pretendemos dinamizar la comprensión de materias, tradicionalmente tan áridas, como las matemáticas. Esta es una de las razones por las que el software educativo pretende presentar, en mayor o menor medida, un aspecto exterior llamativo que frecuentemente incluye imágenes, sonido, colores y movimiento, todo ello unido al contenido educativo.

No obstante, este aspecto lúdico no se da en el mismo grado en todo el software educativo. En algunos aparece tan evidente y sofisticado que puede llegar incluso a anular el contenido educativo y convertirse en un mero pasatiempo. En otros, se muestra de una forma atenuada y divertida de manera que el niño aprende con la sensación de estar jugando y su objetivo se ve cumplido (Bright y Harvey, 1984). No obstante, en ocasiones nos encontramos con materiales en los que se prima el contenido educativo sobre el lúdico aunque, según los casos, se intenten introducir elementos llamativos con el fin de que su empleo se convierta en una actividad más placentera.

Como se puede comprobar, a la hora de realizar la elección del material multimedia que pretendemos utilizar en el aula, es extremadamente importante tener en cuenta por un lado todos los aspectos técnicos y por otro los estéticos, optando por materiales que presenten una buena conjunción de ambos componentes. En este sentido, Marqués (1997) realiza una propuesta sobre cómo han de ser los buenos materiales multimedia que, de alguna manera y matizada, puede ser extrapolada a cómo han de ser los materiales para atender a las características y necesidades de las personas con Síndrome de Down.

5.- Multimedia como respuesta a dificultades de percepción, atención y memoria

Uno de los objetivos de la educación es ofrecer entornos de aprendizaje que posibiliten el mayor desarrollo de las potencialidades de todos los alumnos. Para dar respuesta a este objetivo primero se han de conocer no las limitaciones, sino las posibilidades de estas personas, para a partir de ellas optimizar todo el proceso de aprendizaje. De este análisis se deducen una serie de implicaciones educativas que es necesario destacar y que potenciarán el uso del ordenador como medio enriquecedor de enseñanza aplicada a las personas con Síndrome de Down.

Por un lado, las dificultades en atención hacen que sea imprescindible que en el estilo de enseñanza utilizado se adopten instrucciones claras y muy detalladas (Macías, 1999). Es importante hacer que estos alumnos entiendan lo que se les pide y sólo así se conseguirá el éxito en la meta que se les propone. Esta necesidad también viene respaldada por las dificultades que presentan en el procesamiento de la información. Es conveniente ofrecer las actividades secuenciadas según el grado de dificultad. Este planteamiento favorece la interiorización del aprendizaje cuando se parte de lo más simple a lo más complejo.

Los estudios de Clements y Samara (2002) muestran que los alumnos tenían un mayor acceso a la información cuando se presentaban tareas organizadas en el ordenador, incluso mejor que ante tareas manipulativas, ya que se favorecía la representación mental de sucesos gracias al dinamismo que ofrece este material. En este sentido, Ortega-Tudela y Gómez-Ariza (2006) demostraron que un grupo de niños con síndrome de Down aprendía mejor los procesos de conteo y cantidad mediante un material multimedia, que otro grupo de niños también con síndrome de Down, pero que aprendían utilizando metodologías tradicionales. Esta mejor ejecución se observó incluso ante tareas manipulativas que no fueron trabajadas previamente. Una de las conclusiones presentadas en este estudio hace referencia a las dinámicas de conteo que aprendían los niños del grupo multimedia.

Una de las conclusiones de este estudio es que podría pensarse que esto sucedía debido a las estrategias de focalización de la atención que se utilizaban al presentar la información con estos materiales. El uso del ordenador parecía favorecer el aprendizaje de estrategias de conteo en mayor medida que la enseñanza tradicional, gracias a las distintas posibilidades de dinamización y representación que utiliza, tales como la iluminación, el resalto o el movimiento de los elementos a contar. Una vez más se pone de manifiesto la importancia del uso de materiales multimedia para dinamizar y hacer accesibles materiales con un alto grado de abstracción para las personas con Síndrome de Down.

Los profesores tienen ante sí una serie de avances tecnológicos para dar respuestas a las necesidades educativas de los alumnos con estilos y ritmos de aprendizajes diferentes. Así, mediante la utilización de este tipo de materiales se puede dar solución a problemas de atención derivados de, entre otras cosas, la monotonía. El ordenador puede proponer diferentes actividades de carácter atractivo y lúdico, lo cual puede favorecer que no se produzcan pérdidas de atención por el carácter monótono de la situación académica.

No obstante, es necesario ser consciente de que el uso de un determinado programa puede agravar los problemas de atención de nuestros alumnos, si no se tienen en cuenta los posibles estímulos distractores. Nos encontramos en situaciones en las que se nos presentan materiales multimedia de gran riqueza instrumental, pero que poseen lagunas metodológicas. Una de las lagunas más importantes que suelen tener los programas multimedia comerciales es que el esmero con que se ha cuidado la calidad estética del mismo hace que, en ocasiones, se descuide la calidad metodológica y se presenten tantos estímulos al niño que se conviertan en objetos distractores.

Esta herramienta también puede contrarrestar las dificultades en motivación y fatiga que pueden presentarse en el alumno. Se ha mencionado como las tareas y metodologías de enseñanza pueden dar lugar a un sentimiento de cansancio e incluso frustración cuando se le plantean actividades monótonas y con un elevado grado de dificultad. Al presentar actividades con el ordenador podemos aprovechar sus posibilidades lúdicas y motivadoras para favorecer un aprendizaje mucho más atractivo para el alumno. Diferentes investigaciones muestran las posibilidades que presenta el ordenador como instrumento de enseñanza por su alto componente lúdico y motivador, contrarrestando así la posible aparición de la fatiga. En este sentido, cabe señalar la investigación llevada a cabo por Chen y Bernard-Opitz (1993), en la que se muestra una tasa de entusiasmo más elevada en el caso de la enseñanza asistida por ordenador que en el caso de la enseñanza tradicional.

Así mismo, si no se tiene en cuenta el momento en el que se encuentra el alumno, el tiempo de duración de la tarea puede ser inadecuado. Tareas demasiado cortas, que no dan la oportunidad al niño de experimentar lo suficiente o tareas excesivamente largas que lo fatigan, hacen que su nivel de atención descienda repentinamente.

Ante todo, la enseñanza debe apoyarse en los rasgos menos deficitarios del niño, y los aprendizajes deben intentar conseguir la máxima superación de sus dificultades, por lo que es mucho más efectivo el uso de programas educativos que faciliten el trabajo personalizado. El uso del ordenador potenciaría en gran medida esta individualización, al posibilitar multitud de entornos de enseñanza y favorecer la adecuación del proceso al ritmo y estilo de aprendizaje del niño.

Otra de las características observadas en los alumnos con necesidades educativas especiales derivadas de la diversidad cognitiva es la necesidad de más tiempo y mayor práctica ante una situación nueva de aprendizaje, debido a dificultades en atención, percepción y memoria. El ordenador puede ser un profesor tremendamente paciente y repetitivo que puede facilitar este aspecto, proporcionando al alumno múltiples posibilidades de aprendizaje y evaluación. Además facilita el aprendizaje de estrategias de codificación que, de otra manera, pueden presentar dificultades en su aparición de forma voluntaria.

Todo esto haría pensar en los programas educativos multimedia como grandes medios que favorecen la atención a la diversidad, siempre que cumplan ciertos requisitos de adaptabilidad a las características y necesidades de los alumnos. Así, se ha comprobado cómo el uso del ordenador en la educación de alumnos con necesidades educativas especiales ofrece una serie de beneficios. Algunos de ellos son comunes en su aplicación a la educación, en general, y otros resultan específicos en la medida en que suponen para el alumno un medio de acceso al currículo, que facilita su progreso escolar.

Las TIC, y más concretamente el material multimedia, ofrece una gran versatilidad y flexibilidad, al permitir múltiples aplicaciones con objetivos diversos, así como la aplicación a cada caso particular. Incluso es posible el uso de un mismo aparato o programa para varios niños, con sólo cambiar las adaptaciones a la hora de trabajar. Este aspecto facilita la individualización de la enseñanza, adecuando las tareas al nivel de competencias de cada alumno y de acuerdo con su propio ritmo de aprendizaje. Por otro lado, posibilita la repetición del ejercicio y la autocorrección al poder comprobar los resultados de inmediato.

6.- Uso de materiales multimedia y creación de los mismos

Después de todo lo dicho con anterioridad nos podemos preguntar cómo escoger un material multimedia para personas con síndrome de Down. Ante todo, hemos de ser conscientes de que no se puede considerar que el ordenador sea la panacea de la enseñanza para estas personas.

Actualmente existe un gran número de programas educativos en el mercado que no son accesibles a estas personas por determinadas características técnicas de presentación de la información, como por ejemplo el número de distractores, el tipo de letra utilizado o la complejidad del vocabulario presentado (Ortega-Tudela, 2001). No obstante, estas barreras de los programas multimedia se pueden eliminar fácilmente, favoreciendo así el uso de estos programas por las personas con Síndrome de Down.

Con objeto de conocer estas características que pueden hacer que un material favorezca, o no, el aprendizaje de las personas con Síndrome de Down, se realizó la Escala de Evaluación de Material Multimedia (Ortega-Tudela y Parras, 2002). Dicha escala permite analizar el material multimedia en términos de su adecuación para las personas con este síndrome. Algunas de las características que debe presentar un material multimedia y que podemos considerar adecuadas para el trabajo con estas personas son las siguientes: (Ortega-Tudela, 2001)

Características definitorias de un buen programa multimedia (Ortega-Tudela, 2001)
Posibilidad de programación por parte del profesor: Dada la necesidad de una enseñanza individualizada, se considera de gran importancia que el profesor pueda manipular el programa de forma que pueda cambiar el orden de los ejercicios, su dificultad, añadir información, suprimirla o modificarla.
Información al profesor: El profesor o la familia en el caso de utilizarse dentro del ámbito del trabajo en casa, deben tener la suficiente información para poder extraer el máximo partido al material educativo multimedia.
Ayudas y repeticiones al alumno: Cuando nos referimos a personas con Síndrome de Down, hablamos de un colectivo que en muchas ocasiones necesitan información adicional para realizar un ejercicio, la repetición del enunciado o una simple aclaración de determinados aspectos, de ahí la importancia de que el material posea opciones de ayuda o tutorial para dar información adicional, ejemplos, o simplemente información sobre el desarrollo de la actividad por parte del alumno.
Almacenamiento de la información: A la hora de realizar un seguimiento del alumno, es necesario disponer de un banco de datos en el que se recojan las diferentes ejecuciones del alumno en sesiones anteriores. Esto justifica la necesidad de que el programa sea capaz de almacenar datos de ejercicios o sesiones concretas, como una opción para poder realizar un estudio de su aprendizaje.
Esquema de actividades: El mantener un esquema de actividades fijo, facilita al alumno la ubicación dentro del programa, contextualiza su ejecución y le ayuda a no distraer su atención con elementos nuevos que puedan suponer

otro elemento a controlar. Si el alumno conoce todo el repertorio de estímulos atrayentes que le propone la tarea, centrará más la atención en la resolución del problema que se le plantea.

Número de intentos: Las características de las personas con Síndrome de Down hacen que los programas deban darles oportunidades o un número de intentos adecuado a la hora de resolver los problemas. La excesiva exigencia, el dar el ejercicio por mal en el primer intento puede hacer caer al alumno en un sentimiento de "no saber" que tiende a provocar cierta aversión al trabajo. Es necesario darle la oportunidad de equivocarse, hacerle saber que ha cometido un error, pero que esta equivocación no supone ningún problema que no pueda solucionar ya que puede volver a intentarlo. Esto facilitará la confianza del alumno y fomentará el tratar de hacerlo bien.

Fácil uso para el alumno: Todo aquello que rodea a los ordenadores, suele tener un halo de complejidad, que puede ser difuminado en el momento en que tomamos un contacto real y constante con este instrumento. Para una persona con Síndrome de Down el ordenador puede ser una herramienta excesivamente compleja o por el contrario, puede ser un útil lúdico. La experiencia con niños con Síndrome de Down, muestra que el trabajo con el ordenador puede llegar a ser para ellos un juego con el que aprender, pero esto ha de ser apoyado por el material que se les presenta. Si este material requiere un excesivo trabajo de dominio (hipervínculos excesivamente pequeños, complejidad en imágenes o en el movimiento de ejercicio a ejercicio...) aparte del trabajo que supone la resolución del problema planteado, el alumno con Síndrome de Down verá el uso del ordenador como una prueba dura de superar, más que como una ayuda en su trabajo.

Carácter lúdico: Este aspecto es de suma importancia para aprovechar todas las potencialidades que nos presenta el ordenador y el material multimedia. El trabajo ha de presentarse de forma atrayente para el alumno, ha de captar su atención con elementos motivantes para él, que fomenten su interés por la tarea, que favorezcan ver el trabajo que ha de realizar como una actividad que le brinda la oportunidad de aprender jugando.

Velocidad de presentación de estímulos: Las personas con este síndrome son menos rápidas en el procesamiento de información y requieren más tiempo para contestar. De ahí la importancia de que el material multimedia tenga una velocidad de presentación de estímulos adecuada o al menos modificable, y que a su vez no posea un tiempo límite de respuesta. Además también es importante, que el profesorado pueda modificarlo para hacerlo adecuado a las necesidades de estos alumnos.

Uso diferentes códigos: Así mismo, se conocen las dificultades que poseen para recibir informaciones por dos códigos visual y auditivo, y señalamos la necesidad de potenciar uno frente a otro dadas sus menores complicaciones a la hora de dar significado a la información presentada por el canal visual. En el material multimedia debe primar una complementariedad de ambos lenguajes para así poder dar un mayor abanico de posibilidades para la comprensión del mensaje.

Adecuación de imágenes: Todo el material presentado por el canal visual (tanto imágenes como texto escrito) debe presentar un determinado formato que facilite, a los alumnos con Síndrome de Down, la lectura y comprensión del mismo. En capítulos anteriores se han tratado las dificultades visuales que poseen estos alumnos, por lo que no podemos olvidar que las imágenes han de ser claras y con contornos nítidos, usando con mayor frecuencia colores vivos. El texto escrito deberá tener unas características muy específicas para ser legible por las personas con este síndrome. Un ejemplo de este último punto, es que la letra debe tener un tamaño y un color que la haga resaltar especialmente del fondo en el que se encuentre ubicada.

Adecuación del sonido y vocabulario: Así mismo, el sonido y todo aquel material que se presente de forma audible debe presentarse siguiendo una normas que faciliten su procesamiento. El material audible, es de suma importancia, ya que se han de seguir trabajando estos canales como complemento y para realizar la reeducación de los mismos. Al hacer referencia a órdenes orales, la voz ha de ser perfectamente perceptible, el vocabulario claro y las órdenes deben cumplir los mismos requisitos que las escritas.

Adecuación de las órdenes: Como se ha señalado con anterioridad, las órdenes tanto habladas como escritas, deben poseer unas características fijas para facilitar la comprensión por parte del alumno con Síndrome de Down. Es importante que el vocabulario sea conocido por el niño, que la orden sea clara y directa y que contenga toda la información de lo que debe hacer.

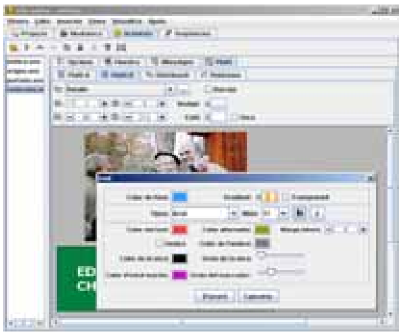
Reforzadores: Ante situaciones nuevas de trabajo, el alumno con Síndrome de Down presenta gran desconfianza en sí mismo, con el consecuente recelo a realizar esa nueva tarea. Los reforzadores ayudan al alumno a confiar más en su trabajo y a la vez fomentan el gusto por realizar la tarea que se le presenta. Estos reforzadores habrán de ser distribuidos de forma coherente, por lo que sería adecuado, que el profesorado pudiera manipular la frecuencia de estos y qué acciones ha de realizar el alumno para obtenerlos. El conocimiento que el profesor posee de su alumno, puede ser decisivo a la hora de administrar de forma adecuada y atrayente los reforzadores.

Distractores: Las dificultades de atención que muestran estos alumnos son, en gran medida, uno de los hándicaps para el proceso de aprendizaje. Al ser el ordenador un instrumento sumamente atractivo, puede entrarse en una dinámica en la que los elementos que se introducen para captar su atención dificulten la percepción de los elementos realmente importantes y decisivos para la realización del ejercicio propuesto. Esto ha de ser escrupulosamente observado para evitar introducir elementos que dificulten la concentración en la tarea a realizar.

6.1.- Herramientas para la creación de contenidos y materiales didácticos multimedia

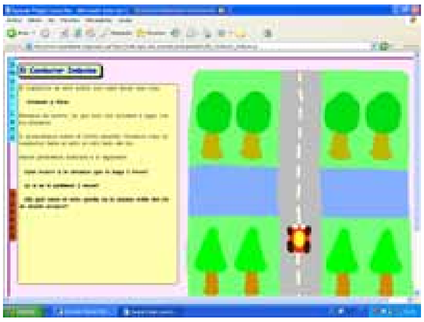
No obstante, una vez analizada la importancia de la selección y evaluación de los programas, podemos llegar a la conclusión de las posibilidades que presenta un material elaborado por el profesorado o los propios estudiantes, menos ambicioso, pero a la vez con mayores posibilidades de adaptación al futuro usuario. En ocasiones, el material que encontramos en el mercado nos ofrece grandes opciones a nivel estético, pero es más pobre en cuanto a la adaptación o posibilidades de respuesta a las necesidades concretas de nuestro alumno. De ahí las posibilidades que presenta la elaboración de nuestros propios materiales multimedia totalmente adaptados a las necesidades concretas de nuestros alumnos. Las herramientas para la creación de contenidos y materiales didácticos multimedia son cada vez más usadas y más sencillas de utilizar. En la actualidad, nos encontramos con entornos de creación muy intuitivos que nos invitan a emplear estas herramientas para favorecer la creación de nuestros propios materiales. A continuación te presentamos algunas de las herramientas más utilizadas. (Ortega-Tudela, 2007)

Herramientas gratuitas



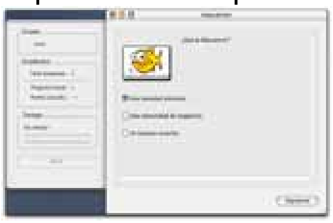
JCLIC: Desde principios de los años 90, el clic es una de las herramientas de creación de material multimedia más utilizados por el profesorado. Es una de las más extendidas por la red, pudiendo encontrarse múltiples aplicaciones para todos los niveles educativos. Hemos de destacar su facilidad de uso y el ingente número de ejemplificaciones que podemos encontrar en la red.

HOT POTATOES: Por otro lado, el programa HOT POTATOES ofrece la posibilidad de realizar materiales didácticos que incluyan cuestionarios interactivos en las Webs. Es un programa útil por su universalidad, ya que sus ejercicios son páginas web que pueden difundirse a través de Internet. Además, su simplicidad al generar los ejercicios, la facilidad de modificación y, por último, su coste, al ser gratuito igual que el JCLIC, hacen que sea una de las herramientas de mayor uso en los últimos tiempos.



SQUEAK: Este programa ofrece la posibilidad de desarrollar contenidos y hacer ejercicios de programación a diferentes niveles. En estos momentos está siendo adaptado al español por un grupo de trabajo (Small Land) http://swiki.agro.uba.ar/small_land y además se está intentando implementar y poner en funcionamiento en distintas administraciones como la Junta de Extremadura y la Junta de Andalucía.

MALTED: es un proyecto financiado por la Comunidad Económica Europea, resultado de la colaboración de profesionales del mundo de la educación y de la empresa de varios países (Reino Unido, Francia, Irlanda y España). Esta herramienta de autor permite la creación de actividades, unidades interactivas y cursos multimedia para la enseñanza de cualquier materia, aunque se diseñó para la enseñanza de idiomas.



KEDUCA: Por otro lado, Keduca es un programa de evaluación tanto para estudiantes como para centros educativos o profesores. Este programa nos permite crear exámenes sencillos con varios formatos. Es una herramienta muy sencilla de elaborar y con unos resultados muy atractivos.

Aplicaciones no gratuitas

TEXTOYS: Se trata de dos herramientas de autor: WebRhubarb y Websequitur que facilitan la creación de ejercicios para fomentar la comprensión lectora y la memoria. Por un lado se permiten actividades de revisado de textos, en las cuales el alumno completa textos previamente estudiados, y por otro, se pueden realizar actividades de secuenciación lógica de textos.

MACROMEDIA FLASH: Flash es un programa gráfico basado en vectores para realizar páginas webs animadas. Cuenta con herramientas de dibujo suficientes como para realizar cualquier dibujo, y se basa en una línea de tiempo con fotogramas en los que se pueden incluir elementos gráficos, botones, vídeo, animaciones, sonidos…

SWISH: Por último, SWISH es una aplicación que ofrece un interfaz más sencillo e intuitivo, herramientas para dibujar, efectos, permite introducir código, todo ello mediante el uso del ratón.

7.- Conclusiones

El ordenador puede crear un espacio útil, interactivo y multisensorial que facilita a la persona un entorno psicológicamente comprensible y flexible en el que puede desarrollar al máximo sus aptitudes. Este desarrollo se produce básicamente por dos motivos:

a) El medio informático soporta todos los sistemas simbólicos.
b) La interacción con el sistema simbólico es flexible y multisensorial.

Sin embargo, no podemos dejar de preguntarnos cómo se han de incluir las nuevas tecnologías en el aula. Una mala inclusión de las TICs en el currículo escolar va a dar lugar a un mal aprovechamiento de sus potencialidades. La planificación de las actividades y su formalización mediante microproyectos o programas-guía, son opciones metodológicas del equipo educativo. Se ha de partir siempre de los puntos fuertes del alumno, de su estilo preferido de aprendizaje, y en función de éstos seleccionar los recursos (software, comunicadores, hardware, vídeos, mapas,...) y estrategias didácticas que les puedan ayudar a estimular sus capacidades. Este uso de estrategias y recursos va a ir siempre encaminado a desarrollar las capacidades más eficientes a niveles aún más altos y tratar de optimizar al máximo las posibilidades en aquellas en que puedan presentar dificultades.

Siempre hemos de introducir las tecnologías a partir del conocimiento del estilo de aprendizaje de las personas, saber cómo aprenden mejor y apoyarnos en aquello en lo que se sienten más seguros para que sea el propio alumno quien descubra y construya sus propios conocimientos. Si una persona aprende principalmente por medio de imágenes y el profesor avanza en nuevos contenidos apoyándose exclusivamente en la palabra oral o escrita, es muy probable que este alumno no siga el ritmo del resto de la clase.

Las NTs han de poner el énfasis no en los aspectos relativos a la discapacidad del individuo, sino en las destrezas y habilidades que puede desarrollar. Deben proporcionar un marco en el que los alumnos puedan aprender a manejar sus dificultades, partiendo siempre de sus puntos fuertes. Hemos de empezar a pensar que la persona con Síndrome de Down, no es una persona discapacitada, sino una persona que presenta una serie de características que la hacen distinta al resto. Una persona que va a requerir ayudas diferentes en momentos diferentes, como todos y cada uno de nosotros.

Bibliografía

▪R. M. Aguilar, A. Bruno; C. González; V. Muñoz y A. Noda (2003). Teaching mathematics to children with Down's syndrome. En 11th international conference on artificialintelligence in education 2003. Workshop advanced technologies for mathematics education. Sydney Australia.
▪C. Alba (1998): "Perspectivas de futuro en la utilización de las nuevas tecnologías de la información y comunicación en la formación como respuesta a la diversidad", Revista Píxel-bit, 10 , 37-46.
▪D. F. Bjorklund y R.N. Douglas (1997):The development of memory strategie. En N. Conwan (ed.): The development of memory in childhood. Hove: Psychology Press, 201-246.
▪B. Bright y T. Harvey (1984): "Computers games as instructional Tools", Computers in Schools. The Hawort Press, NY, 1, 3.
▪A. Bruno; M. Noda, R. Aguilar, C. González, L. Moreno y V. Muñoz (2006) Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con síndrome de Down. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Julio, vol.9, (2), 211-226.
▪S. Buckley (1995): Attaining basic educational skills: Reading, writing and number. En D. Lane y B. Stratford (Eds): Current approaches to Down syndrome. London: Holt, Rinehart y Winston, 315-343.
▪S. Buckley y R. Sacks (1987) The adolescent with Down's síndrome. Portsmouth, United Kingdom: Portsmouth Polytechnic.
▪A. Byrne, S. Buckley, J. MacDonald y G. Bird (1995). Investigating the literacy, language and memory skills of children with Down's syndrome. Down's syndrome: Research and practice, 3, 53-8.
▪J. Carr (1988). Six weeks to twenty-one years old: A longitudinal study of children with Down syndrome and their families. Journal of child psychology and psychiatry, 29, 407-431.
▪W. Casey, D. Jones, B. Kugler y B. Watkins (1988). Integration of Down syndrome children in the primary school: A longitudinal study of cognitive development

and academic attainments. British journal of educational psychology, 58, 279-286.

- L. Caycho, P. Gunn y M. Siegal (1991). Counting by children with Down syndrome. American journal on mental retardation, 95, 575-583.
- S.M. Chen y V. Bernard-Opitz (1993). Comparison of personal and computer assisted instruction for children with autism. Mental retardation, 31, 368- 376.
- D. H. Clements y J. Samara (2002): "Building blocks for young children's mathematical development", Journal of educational computing research, 27, 1-2. 93-110.
- C. Cunningham (1995): El desarrollo psicológico en los niños con síndrome de Down, en, J. Perera (Dir): Síndrome de Down. Aspectos específicos. Barcelona: Masson
- A.J. Dahle y R.L. Baldwin (1994). Problemas audiológicos y otorrinolaringológicos. In, S. M. Pueschel & J. K. Pueschel (Eds), Síndrome de Down. Problemática Biomédica. Fundación Síndrome de Down de Cantabria. Barcelona: Masson.
- M.S. García; C. Roces y P. González (2002) Nuevas Tecnologías y Educación. En J.A. González-Pienda, R.González, J.C. Núñez y A.Valle (Coords). Manual de Psicoogía de la Educación. Madrid. Ed. Pirámide
- R. Gelman y M. Cohen (1988). Qualitative differences in the way Down Syndrome and normal children solve a novel counting problem. En L. Nadel (Ed.), The psychobiology of Down syndrome. Cambridge, MA: MIT Press.
- S. Lanfranchi, C. Cornoldi y R. Vianello (2004) Verbal and visuospatial working memory deficits in children with Down Síndrome. American journal on mental retardation. 109, 456-466.
- A.J. Lincoln, E. Courchesne, B.A. Kilmany R. Galambos (1985). Neuropsychological correlates of information-processing by children with Down Syndrome. American journal of mental deficiency, 89, 403-414.
- M.J. Macias (1999): El síndrome de Down. Características generales, en C.J. Fernández (Coord): Discapacidad y trastornos del niño en el ámbito escolar. Actas II Jornadas de Psicología. Úbeda: Gráficas Minerva, 153-169.
- M.M. Marcell y V. Amstrong (1982). Auditory and visual sequential memory of Down Syndrome and nonretarder children. American journal of mental deficiency, 87, 86-95.
- P. Marquès (1997): "La informática en la Enseñanza Primaria", Revista Aula de Innovación Educativa, 67.
- E. Monari (2002). Learning mathematics at schooll… and later on. Down Síndrome News and Update 2 (1), 19-23.
- M.J. Navarro (2002): "La utilización de la tecnología: otro modo de atender a la diversidad" Revista Píxel-Bit.(18) http://www.sav.us.es/pixelbit/articulos /n18/n18art/art184.htm
- J. Nye, J. Clibbens y G. Bird (1995). Numerical ability, general ability and language in children with Down´s Syndrome. Down syndrome research and practice, 3, 92-102.
- J.M. Ortega-Tudela (2001). Escala de Evaluación de Material Multimedia para Personas con Síndrome de Down. Estudio de Validación. Tesina no publicada, Universidad de Jaén.
- J.M. Ortega-Tudela y L. Parras (2002). Escala de Evaluación de material multimedia para personas con Síndrome de Down. En F.J. Soto y J.

Rodríguez, Las Nuevas Tecnologías en la Respuesta Educativa a la Diversidad. Murcia: Consejería de Educación y Cultura.

- J.M. Ortega-Tudela (2005): Bondades y limitaciones del material multimedia para personas con síndrome de Down. Revista de Síndrome de Down, 22, 84-92.
- J.M. Ortega-Tudela (2007) Las Tics y la diversidad cognitiva. En M. Córdoba, J.M. Fernández y J. Cabero (Coords) Las Tics para la igualdad. Nuevas Tecnologías y Atención a la divesidad. TrillasEduforma. Madrid, 131-153.
- J.M. Ortega-Tudela y C.J. Gómez-Ariza (2006): Computer-assisted teaching and mathematical learning in Down syndrome children, Journal of computer assisted learning. 22, 298-307.
- S. Pelegrina, C.J. Gómez-Ariza y T. Bajo (2001): Necesidades Educativas Especiales relacionadas con la atención, percepción y memoria, en F. Salvador (Dir): Enciclopedia Psicopedagógica de las necesidades educativas especiales. Madrid, Aljibe, 327- 354.
- R. Pérez. et al.(2000) Redes, multimedia y diseños virtuales. Oviedo: Ramón Pérez Editor.
- J. Porter (1999). Learning to count: A difficult task? Down syndrome research and practice, 6, 85-94.
- S.M. Pueschel y M. Sustrova. (1997). Percepción visual y auditiva en los niños con Síndrome de Down. In J.A. Rondal, J. Perera, L. Nadel & A. Comblain, Síndrome de Down: Perspectivas psicológica, psicobiológica y socioeducacional. Madrid: Imserso.
- S.M. Pueschel (Ed) (1990). A parent's guide to Down syndrome: Toward a brighter future. Paurl H. Brookes, Baltimore.
- J.A. Rondal, J. Perera, L. Nadel y A. Comblain (1997). Síndrome de Down: Perspectivas psicológica, psicobiológica y socioeducacional. Madrid. Imserso.
- B. Shepperdson (1994). Attainments in reading and number of teenagers and young adults with Down's syndrome. Down syndrome: Research and practice, 2, 97-101.
- P. Sloper, C. Cunningham, S. Turner y C. Knussen(1990). Factors relating to the academic attainments of children with Down Syndrome. British journal of educational psychology, 60, 284-298.

Juana Mª Ortega Tudela, Profesora del Departamento de Pedagogía de la Universidad de Jaén del área de Didáctica y Organización Escolar. Directora del Secretariado de Universidad de Mayores del Vicerrectorado de Extensión Universitaria. Miembro del Grupo D.I.E.A. Colaboradora con la Asociación Síndrome de Down Jaén y Provincia.
Líneas de investigación: Nuevas Tecnologías aplicadas a la Educación; Educación Especial; Enseñanza de las matemáticas en alumnos con Síndrome de Down; Atención a la diversidad a través de las Tecnologías de la Información y la comunicación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 107 - 112
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Armando Arencibia de Armas, profesor de matemáticas y ciego

Entrevista realizada por Luis Balbuena

Me acerqué al instituto donde trabaja que está en la Villa de Moya, (Gran Canaria, Islas Canarias). Para mí era ya grato ir porque es precisamente mi lugar de nacimiento. Armando, que es natural de Montaña Cardones, en Arucas, me esperaba en el departamento de matemáticas, con el resto de sus compañeros porque era, precisamente, la hora de la reunión semanal. Les saludé y comentamos aspectos de la enseñanza, en general, y de la enseñanza de las matemáticas en particular.

-*El alumnado es muy noble*, me dijeron. *Además es un instituto pequeño, pues son poco más de trescientos.*

Cuando sonó el timbre que marcaba el cambio de hora, se fueron los otros cuatro y me quedé con Armando para mantener la entrevista que había tenido a bien concederme. Nuestro común amigo Carlos Duque había hecho de embajador. Su situación de profesor de matemáticas y ser ciego, nos permite tener un magnífico testimonio para el número especial de UNIÓN dedicado a “las matemáticas especiales para alumnos especiales”.

-Creo que podemos empezar recorriendo tu vida académica.

-De acuerdo. Aunque no puedo separarla del resto de mi vida como vas a escuchar. Hice el bachillerato en el instituto Domingo Rivero de Arucas. Bueno, cuando empecé el BUP (Bachillerato Unificado Polivante) aun era sección delegada del instituto Cairasco de Figueroa de Tamaraceite, pero antes de acabar ya se convirtió en instituto.

-Y de ahí, tras el COU, pasaste a la Universidad de La Laguna.

-Sí, en efecto, a estudiar matemáticas. Pero cuando estaba en segundo de carrera sufrí un glaucoma y tuve que abandonar para tratarlo. Me reenganché al curso siguiente repitiendo segundo. Había perdido la visión en un ojo y, como puedes imaginar, no me encontraba con muchos ánimos para seguir, pero el apoyo incondicional de mis padres fue la clave para que siguiera.

- Una vez que acabaste la carrera, ¿preparaste la oposición enseguida?

-Sí. La aprobé en 1989. Estuve un año de interino, las preparé y las saqué a la primera. Mi primer destino fue en el Instituto de Santa María de Guía; conocido en aquella época como Guía I, donde impartí clases durante tres cursos, hasta que me otorgaron la plaza definitiva en el *Saulo Torón* de Gáldar. Después de otros tres cursos en dicho Instituto, concursé voluntariamente al Instituto Doramas de Moya, en el que sigo hasta la fecha de hoy.

-En el momento de aprobar la oposición, ¿cuál era la situación de tu vista?

-No tenía visión en un ojo y, en ese momento, la del otro casi normal, aunque para los Oftalmólogos, el que mantuviera una visión casi perfecta en el ojo izquierdo era como un milagro.

De pequeño, con dos años, tuve una serie de enfermedades que obligaron a ponerme oxígeno en varias ocasiones. En una de ellas, me fue suministrado con demasiada pureza que, aunque me salvó la vida, me dejó secuelas. Ya en ese momento me afectó al ojo derecho, se me produjo un desprendimiento de retina, que al no ser tratado, me hizo perder la visión de dicho ojo, casi por completo. En 1982, fue a este mismo ojo, al que le afectó el glaucoma que me sobrevino cuando estaba en segundo de carrera y que me dejó ciego el ojo por completo.

Pero hace ocho años, sin venir a cuento, se me desprendió la retina del ojo izquierdo. Después de sufrir cuatro operaciones para intentarla colocar en su sitio fue imposible y tuvieron que extirparla casi por completo.

Entre operaciones y periodos post-operatorios muy duros, pasaron unos 2 años, en los que estuve de baja médica.

-Y en este momento, ¿cómo tienes la visión?

- Solo me queda un resto de visión en el ojo izquierdo, con un campo visual muy reducido, como si viera por un agujero muy, muy pequeño y una agudeza visual que apenas alcanza un 10%.

-Pasemos entonces a hablar de tu trabajo en el aula. Con relación al sistema de dar clase, ¿qué cosas has tenido que cambiar o adaptar: libros de texto, trabajo en la pizarra,…?

- Por lo que se refiere a los libros de texto, el mismo material que usa el alumnado lo tengo transcrito al braille, material que me ha proporcionado la ONCE.

En la pizarra me ayudo de la poca visión que me queda y voy escribiendo. A veces me ocurre que, al tener el campo visual muy reducido, no borro del todo y escribo después sobre lo que estaba escrito, pero ya se encargan los alumnos de advertírmelo. Así que no tengo demasiados problemas en ese aspecto. De todas formas me he tenido que ir creando estrategias que me ayuden a controlar el aprendizaje. Por ejemplo, cuando un alumno me quiera preguntar algo, me dice primero su nombre para yo saber quién es. Hasta hace poco tiempo, al pedir a un alumno que saliese a la pizarra para hacer un ejercicio o alguna tarea de casa, como no veía bien el campo en el que él escribía, invertía mucho tiempo en la corrección. Ahora lo hago de una forma que me da buenos resultados porque controlo varias cosas al mismo tiempo. Consiste en que le presto mis brazos al alumno, pues él me va diciendo lo que tengo que escribir en la pizarra para resolver el problema que él tendría que hacer. De esta forma tiene que usar las palabras adecuadas porque si no, simulo como que no le entiendo: *¡No, profe, eso no!* , me dicen. Y yo les contesto*: Pues eso es lo que tú me has dicho que escriba, así que afina y reformula lo que quieres decir* y esa misma repetición del lenguaje preciso hace que los demás también se lo aprendan.

-Por lo que acabas de decir, la ONCE te ha apoyado.

- Sí, recibo ayuda en recursos materiales: libros transcritos al braille, aparatos que me facilitan la preparación de las clases, de los exámenes, etc. Por ejemplo, un lector de pantalla, Jaws, que me va dando en lenguaje hablado lo que está escrito en la pantalla, lo verbaliza todo menos las fórmulas, imágenes, gráficos, etc. Para éstas lo que hago es pasarlas al Word y ponerlas a tamaño 500 y ya con eso puedo verlo, el problema es que al poco tiempo ya los ojos los tengo muy cansados y me escuecen. Además del lector de pantalla tengo una impresora braille, calculadora científica, etc., todo parlante y adaptado perfectamente para ciegos.

-¿Cómo reaccionan tus alumnos ante tu presencia en el aula, en el desarrollo de la clase, en la rutina cotidiana del centro?

-Mi presencia en el centro es ya conocida por los alumnos por la cantidad de años que llevo y como les doy clases a partir de 3º ESO, cuando pasan por mis manos están completamente al tanto. Así que no tengo realmente demasiadas dificultades para llevar a cabo una clase, o por lo menos no distintas que cualquier otro profesor.

El primer año sí fue un poco duro, porque había desconfianza en que pudiera hacerlo bien. Pero a pesar de los consejos que me daban en el sentido de jubilarme, yo no quería irme sin saber si era capaz de dar clase o no. Me hubiese quedado siempre esa incertidumbre, así que le eché arrestos al asunto. Estuve en Sabadell, en un Centro de Rehabilitación Integral de la ONCE preparándome a fondo y empecé a elaborar el material que necesitaría. Para mí, este periodo fue como empezar a vivir porque me enseñaron a adaptarme a la nueva situación y a superar mi angustia y mi inseguridad.

Cuando más me presionaban para que solicitara la jubilación adelantada (*O te jubilas o te incorporas*, me decían), tuve la enorme suerte de tropezarme, por casualidad, con un amigo que trabaja en la Consejería de Educación al que le comenté que quería intentar volver a dar clase pero que necesitaba un poco de tiempo para poner los materiales a punto. El caso es que mi amigo consiguió que me ofrecieran un destino en los servicios centrales de la Consejería, en la Dirección

General de Ordenación e Innovación Educativa, y allí estuve el año que necesitaba para prepararme. Preparar el material en braille lleva su tiempo. Volví al instituto Doramas de Moya porque, al ya haber trabajado allí un montón de años, conocía el Centro, a la mayoría del profesorado, al resto del personal no docente y, dada la calidad humana de todos ellos y la nobleza del alumnado del Centro, era el sitio idóneo para intentar esta aventura.

Aquella desconfianza inicial, que te confieso que yo fui el primero en tenerla, se disipó muy pronto. Me quedé sorprendido de lo bien que me salían las cosas. Hasta un compañero me llegó a decir: *No daba un duro por ti, pero me has convencido*.

Tengo asumida mi situación y mis alumnos la aceptan de buen grado. A veces pasan cosas curiosas. Aquí tenemos la costumbre de acudir todo el claustro al centro cuando hay visitas de padres (lo digo en sentido genérico, es decir, que me refiero a padres y madres). Así que no solo vienen los tutores encargados de cada grupo, sino que venimos todos por si hay algo que responder a algún padre. Yo estaba en la sala de profesores tratando de leer con una lupa que tengo, cuando una madre preguntó en voz alta por *ese profesor de matemáticas, cieguito el pobre*… Cuando levanté la cabeza y le dije que era yo, la señora no sabía dónde meterse, se deshacía en disculpas porque pensaba que me iba a molestar por haberme llamado *cieguito*. Ya le dije que no pasaba nada porque lo tengo totalmente asumido y que podía usar el término sin temor…

-Pero con ese alumno díscolo que casi siempre existe, ¿qué haces?

Supongo que lo que hace todo el mundo. Por suerte apenas tengo problemas de ese tipo. Por eso te hablaba de la calidad humana del alumnado. Es muy noble. Claro que también suelo utilizar mis recursos. El otro día, en una de esas casualidades que a veces se me dan de ver al bulto, vi cómo un alumno tiraba algo a alguien. Una alumna preguntó que quién le había tirado aquello y yo le dije: *fue este señor de la tercera fila*, y lo señalé con el dedo. Imagínate. Pero este profe, ¿ve o no ve? Bueno, son cosas que me hacen la clase también más manejable.

-¿Cómo resuelves lo referente a exámenes, controlar los cuadernos de los alumnos, etc.?

-Para los exámenes también utilizo estrategias variadas. Cuando nadie me puede acompañar a vigilar, una de ellas es darles distintos tipos de exámenes, aunque todos tienen el mismo grado de dificultad. De esta manera, cada uno tiene el suyo. Se me ha dado el caso de alguno que responde una pregunta con algo que no tiene nada que ver con lo que se pide. Se ha copiado del de delante que ha respondido a otra cosa. Cuando le digo que se ha copiado, queda todo descolocado porque piensa que lo he visto…

En la corrección de exámenes, trabajos, cuadernos, etc., me ayudo de una persona de mi confianza. Ella me lee y yo le voy indicando las anotaciones que tiene que hacerles. A esta persona le doy una cantidad de dinero todos los meses en función de las horas mensuales trabajadas. Para ello recibo una pequeña subvención de la ONCE.

-¿Notas dificultades especiales para desarrollar tu trabajo?

-Pues creo que las que puede tener cualquiera en lo que se refiere a la gestión del aula. Yo pido a los compañeros que me permitan no tomar el segundo de bachillerato para evitar la presión de la *Prueba de Acceso a la Universidad*. Ellos lo comprenden y con mis cursos desarrollo las clases de la forma habitual. Ya te digo que cada año voy afinando mis estrategias, preparo materiales en braille, que cada vez tengo más, colecciones de exámenes, hojas de problemas, mecanismos para que no copien en los exámenes, etc. y así consigo que mis alumnos hagan un curso normal a pesar de mi limitación.

-La formación permanente supongo que será inexistente…

-Sí, claro, a nivel oficial es nula. Ten en cuenta que todos esos programas que puedan venir para ayudar al profesorado no están adaptados para un profesor ciego. Los cursos de perfeccionamiento del profesorado hoy en día son, casi todos, *on line* y, por tanto, totalmente inaccesibles para un ciego, por no estar adaptados para los lectores de pantalla. Aunque hay directrices en España para que lo sean, las Administraciones son las primeras en saltarse sus propias directrices. Incluso los documentos en *pdf*, como puedan ser anexos de los boletines oficiales, son bastante inaccesibles. Es algo que me imagino que se irá mejorando en el futuro. Así que, mientras, tengo que buscarme la vida en ese asunto y te aseguro que no dejo de hacerlo, porque además de que me interesa, me gusta.

Te voy a mostrar en ese ordenador las posibilidades que tengo y cómo me las arreglo para estudiar, preparar mis exámenes y todas estas labores propias del trabajo.

-Ya veo las posibilidades que tienes. ¿Sabes de algún profesor más que esté en tus condiciones?

-Estuve en contacto telefónico con un profesor de Matemáticas de Barcelona, que me proporcionó buenos consejos antes de mi reincorporación al aula. En Canarias no conozco a ningún profesor de matemáticas. Sé de un profesor de filosofía aquí, en Las Palmas y en La Laguna he oído que hay una psicóloga que se llama Rosi y no sé si da clase.

-**Conozco a Rosi. Estudió en el IES *Viera y Clavijo* de La Laguna y después de terminada su carrera de psicología estuvo en el Instituto participando en la lectura de cuentos que se hace durante toda la mañana del Día del Libro. Además en uno de esos años, Funcasor (que es una fundación de ayuda al sordo), desplazó al instituto a un grupo de sordos y mientras Rosi leía un cuento en braille, una intérprete de signos lo comunicaba a los sordos. Fue una experiencia interesante porque puso de manifiesto hasta qué punto se pueden superar ciertas barreras. ¿Has impartido clases a alumnos ciegos?**

- Cuando aún veía, di clases a un par de alumnos deficientes visuales, en mi mismo Instituto. Después de perder la vista no se me ha dado la oportunidad. Da la casualidad que en 2º ESO hay un niño deficiente visual, hermano de uno de los mencionados anteriormente, y quizás se me de la oportunidad de tenerlo como alumno en los próximos cursos.

Me gustaría mencionar que el año que pasé en la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, trabajé en el Área de Necesidades Educativas Especiales, donde aprendí mucho del alumnado canario con necesidades educativas especiales, en particular de los niños con ceguera o deficiencia visual, pues estuve muy vinculado con el equipo de especialistas que se encargan de asesorar a los Centros que cuentan entre sus alumnos con niños ciegos o deficientes visuales. De ellos aprendí la forma de vencer los miedos o las ansiedades que se les produce al profesorado que tienen que atender a este tipo de niños, fruto del desconocimiento. Por ello, me gustaría algún día, contar con algún alumno ciego para poder vivir la experiencia y poner en práctica todos los consejos y tácticas metodológicas aprendidas de aquellos buenos profesionales.

-¿Qué dirías a la Administración a la vista de tu experiencia?

-Creo que deben aumentar su sensibilidad hacia estas situaciones. Yo no llegué a mi ceguera de forma voluntaria. En mi opinión, la actitud debería de ser la de ayudar al máximo. Una cosa es que yo me quiera ir, por sentirme incapaz, y otra bien distinta es que quiera seguir, o al menos intentar seguir, y que me cierren las puertas, habiendo tantas que se pueden abrir. ¡Imagínate que me hubiera jubilado! No sé qué habría sido de mí,… cuando he demostrado que puedo desarrollar mi trabajo con normalidad. Fíjate que en mi caso fue el azar, el encuentro fortuito con aquel amigo, el que me dio la posibilidad de seguir.

-¿Qué dirías a los que estén en tu situación?

-Ten en cuenta que el que tiene una minusvalía tiene que demostrar que vale antes de tener una oportunidad. A los “normales” no se les pide demostrar nada, aunque no valgan para el trabajo que van a desempeñar, pero a nosotros sí y además, de forma continuada. Yo he sido Jefe del Departamento de Matemáticas y cuando nos pedían algún documento me esforzaba por ser el primero en entregarlo y no justificar el no hacer las cosas a tiempo en mi discapacidad.

Les diría que tienen que luchar, con tesón y con fe en sus propias posibilidades, que sepan que hay medios para poder desarrollar una labor como esta. No deben quedarse con las ganas de saber si lo pueden hacer. No tener esa incertidumbre para siempre porque puede ser fatal. Al menos intentarlo y si no sale bien ya habrá tiempo para jubilarse.

Por último, me gustaría resaltar que el apoyo de mi mujer, Montse, de mis hijos Andrea y Mario, y del resto de mi familia ha sido, y sigue siendo, decisivo en mis pequeños logros. Asimismo, la ONCE ha sido muy importante en el sentido de las ayudas y la orientación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 113 - 122
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

ESTALMAT: Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz

Eugenio Hernández y Mercedes Sánchez

Resumen

El programa ESTALMAT para detectar y estimular el talento matemático precoz fue ideado por el Profesor Miguel de Guzmán (1936-2004) y puesto en funcionamiento en 1998 en la región de Madrid bajo los auspicios académicos de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Se ha extenido ya a varias regiones de la geografía española. En este artículo se describe el proceso de selección y el tipo de actividades que se realizan, incluyendo algunos ejemplos.

Abstract

ESTALMAT is a program to detect, stimulate and guide the talent of mathematically gifted children. It was designed by Professor Miguel de Guzmán and started in 1998 in the region of Madrid under the academic guidance of the Royal Spanish Academy of Sciences. The program is now running in several regions of Spain. In this article we describe the selecction process and the type of activities done, icluding some examples.

Introducción

La estimulación matemática en la edad escolar tiene una trascendencia enorme para la sociedad. Sin creatividad no hay innovación, es decir no hay progreso; necesitamos gente capaz de articular ideas matemáticas aparentemente enloquecidas y desconcertantes que nos ayuden a resolver los retos que la ciencia tiene planteados.

Se podría definir el talento de una persona como "el conjunto de cualidades intelectuales que esa persona tiene"; y de forma análoga, el "talento para algo" será las cualidades intelectuales para ese algo presentes en la persona. Por lo general, las capacidades puramente físicas son fáciles de observar, detectar y estimular; es cierto que también existen actividades llamadas intelectuales que dependen mucho de algunas habilidades físicas que han de ser entrenadas. Sin embargo podemos decir que son las oportunidades de acceso a ciertas construcciones intelectuales las que determinan el desarrollo de las cualidades mentales de las personas. Pero no solo es ese contacto, sino que también las circunstancias en las que se desarrolla y su continuidad en el tiempo, son determinantes en la disposición futura de la mente.

Los comportamientos que pueden aportar claves importantes para descubrir el talento matemático son los siguientes:

- Una curiosidad intensa sobre la información numérica.
- Una rapidez asombrosa para aprender, comprender y aplicar las ideas matemáticas.
- Una gran habilidad para la abstracción, para ver pautas y relaciones matemáticas.
- Una gran habilidad para abordar los problemas matemáticos de un modo flexible y creativo en lugar de hacerlo de la manera tradicional.
- Una gran capacidad para transferir lo aprendido a situaciones nuevas.

Los estudiantes que tienen algunas de las características anteriores requieren oportunidades diferentes para resolver sus necesidades, necesitarían desarrollar al máximo sus habilidades, de modo que puedan realizar actividades de aprendizaje con nivel y ritmo adecuados. Estos estudiantes requieren experiencias de pensamiento creativo en la resolución de problemas, también necesitan relacionarse intelectualmente con otros estudiantes de sus características y precisan desarrollar su independencia y disciplina en el aprendizaje.

El proyecto ESTALMAT permite que los estudiantes con una habilidad especial para las matemáticas tengan acceso a las construcciones matemáticas más bellas en un ambiente estimulante. Es fundamental que no estén desarraigados de su entorno familiar para poder conjugar un desarrollo armonioso de las capacidades intelectuales con las emotivas y afectivas, en compañía de otros compañeros que tienen las mismas inquietudes, lo que sin ninguna duda determinará un buen desarrollo de su capacidad matemática que les ayudará en su devenir personal cualquiera que sean sus estudios futuros.

Los objetivos

En 1988 el profesor Miguel de Guzmán puso en marcha, en la Comunidad de Madrid, el proyecto Estalmat de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, siguiendo las ideas de otros proyectos que con la misma finalidad ya se habían desarrollado en otros países. Ya han pasado 10 años y con el generoso patrocinio de la Fundación Vodafone España y la dirección de Amable Liñán Martínez, miembro de la Real Academia de Ciencias y Premio Príncipe de Asturias 1993 de Investigación Científica y Técnica y Premio de Investigación de la Comunidad de Madrid "Miguel Catalán" 2007, el proyecto continúa y se ha extendido a otros territorios de nuestra geografía: Cataluña y Castilla-León se incorporaron al proyecto en 2003, Andalucía y Canarias lo hicieron en 2005, Galicia y Valencia en 2007 y este año 2008 Estalmat se inicia en Cantabria.

La idea principal que llevó a Miguel a desarrollar este proyecto fue la siguiente:

Con seguridad, se encuentran en una comunidad escolar de una cualquiera de nuestras grandes ciudades veinte niños entre doce y catorce años con un talento especial para las matemáticas. ¿Qué sucederá con ellos? Muy probablemente transcurrirán sus años inadvertidos, frustrados, sin fruto para la sociedad, por falta de un tratamiento adecuado; posiblemente van al fracaso y a la inadaptación por aburrimiento.

¿Qué sucedería si se pudiera atender de algún modo a su orientación? Sin duda una gran satisfacción personal para ellos, un gran beneficio para la sociedad, una gran utilidad para el avance de la ciencia y tecnología a la larga en nuestra comunidad. ¿Por qué en nuestro país no se hace nada a este respecto? Hay quienes piensan que tomar medidas positivas en esta situación contribuiría a fomentar el elitismo al favorecer a unos pocos en detrimento de la atención igualitaria. Como más adelante veremos más pormenorizadamente, sucede lo contrario. No hacer nada significa que entre estos niños y niñas solo se desarrollarán plenamente aquellos que provienen de medios familiares pertenecientes a un estrato superior de la sociedad. La justicia social y la atención al bien común deberían motivar la preocupación activa en este problema de quienes tienen la responsabilidad de dirigir la política educativa. Los gastos que una acción educativa razonable requeriría son mínimos y el rendimiento que de ellos se obtendría sería inmenso. Sin duda alguna, la comunidad que logre encauzar el talento que tiene podrá ir mucho más allá que la que no se preocupa por conseguirlo.

Así pues el objetivo principal del proyecto es detectar, orientar y estimular el interés de estudiantes de 12 a 14 años que se sienten especialmente atraídos por la belleza, la profundidad y la utilidad de las matemáticas.

La orientación y el estímulo se lleva a cabo de manera continuada mediante actividades semanales. El método elegido es el de reuniones durante tres horas semanales durante todo el año académico. Se seleccionan estudiantes que tienen 12 o 13 años, ya que se considera que ésta es la edad en la que se comienza a realizar razonamientos formales.

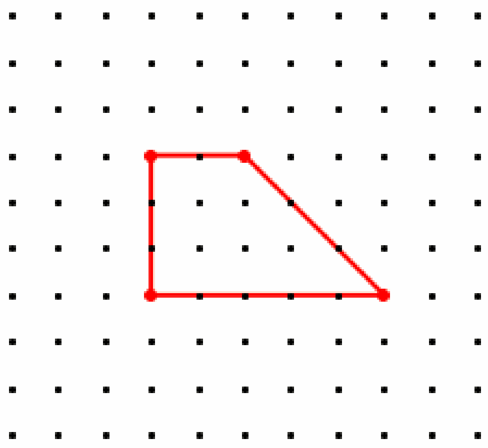
El proceso de selección

El proceso de selección es muy importante para el buen desarrollo del proyecto. Es una tarea que se realiza durante parte del invierno y de la primavera de cada año académico.

Se distribuye información sobre el proyecto Estalmat entre alumnos, padres y profesores durante el mes de abril. Esta información se envía a todos los centros educativos por correo electrónico y por carta, y se hace llegar a todos aquellos alumnos que participan en competiciones matemáticas locales. El papel de los profesores es muy importante para identificar a aquellos de sus alumnos que tienen un talento especial para las matemáticas. También se ponen anuncios en periódicos locales y en las páginas Web de cada uno de las regiones en las que se realiza el proyecto. Los alumnos son recomendados por sus profesores y presentados por sus padres bien por carta o por correo electrónico indicando sus datos personales y la intención de presentarse a la prueba de selección.

Los candidatos deben realizar una prueba de selección que consiste en la resolución de varios problemas. Esta prueba se realiza a finales del mes de mayo o a comienzos del mes de junio y es básicamente común en todas las regiones en las que se realiza el proyecto. En la prueba se proponen problemas muy variados, de números, de geometría, de lógica, de organización… cuyo enunciado debe estar escrito en un lenguaje muy claro y sencillo, en los que haya varias cuestiones graduadas, de fácil a difícil, de manera que cada uno pueda hacer algo, pero sobre todo que sirvan para discernir quienes son los mejores y en los que se pueda valorar la aptitud y la actitud y no tanto los conocimientos.

Presentamos un ejemplo extraído del proceso de selección del año 2005. En este problema se consideran trapezoides muy especiales. Deben tener dos ángulos rectos y un ángulo de 45º y todos sus vértices deben ser puntos de una malla cuadrada. Mira el trapezoide de la figura: puesto que contiene 18 puntos, contando también los que hay sobre sus lados, decimos que 18 es un **número trapezoide**



a) Dibuja una figura que muestre que 35 es un número trapezoide.
b) Dibuja todos los trapezoides que tienen 18 como número trapezoide y justifica que estos son todos los que se pueden dibujar.
c) Explica por qué cualquier número impar mayor que 3 es un número trapezoide.
d) Halla todos los números entre 4 y 50 que no sean números trapezoides.

Después de corregir los ejercicios y seleccionar a los mejores se realiza una entrevista con ellos y con sus padres separadamente para valorar su compromiso de asistencia a las sesiones y evaluar su integración en el grupo. Finalmente tenemos conformando un grupo de 25 niños y niñas por cada una de las regiones en que se desarrolla el proyecto dispuestos a pasar 3 horas a la semana durante dos años consecutivos realizando actividades para estimular su talento matemático.

El número de candidatos que se presentan cada año a las pruebas de selección es de unos 2500 y de ellos se seleccionan aproximadamente 200 que serán los que inicien el proyecto en las distintas sedes repartidas por la geografía española.

El programa de actividades

Una vez seleccionados los estudiantes las actividades comienzan con un campamento que se realiza durante un fin de semana, generalmente en un ambiente rural. Esta actividad permite que los seleccionados se conozcan entre sí y conozcan a algunos de sus profesores. Se realizan actividades lúdicas y matemáticas y se aprovecha para observar el comportamiento de los seleccionados a fin de dividirlos en grupos de trabajo afines.

Otra de las actividades que se realizan al comienzo del curso es la sesión inaugural a la que se invita a los padres y familiares de los seleccionados. La correspondiente sesión de inauguración del curso 2008-09 en Madrid tuvo lugar en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y estuvo presidida por la Ministra de Educación, Política Social y Deporte, Dª Mercedes Cabrera Calvo-Sotelo.

Las actividades que se realizan con estos alumnos duran dos años. Las tres horas de actividades semanales se dividen en dos sesiones de una hora y 20 minutos cada una, con un descanso de 20 minutos entre ambas. Los estudiantes se dividen en grupos pequeños (normalmente 5 por grupo) y bajo la dirección de dos profesores, elegidos entre profesores de Universidad y profesores de Enseñanza Secundaria, se dedican a realizar actividades relativas a:

- Grafos, números primos, juegos de estrategia, poliedros, geometría con ordenador, mosaicos, combinatoria, divisibilidad, paridad, el principio del palomar, teoría de Ramsey, fractales, aritmética modular,...

El principal objetivo de estas actividades es crear las condiciones apropiadas para desarrollar la creatividad matemática de los seleccionados. Ya sean sesiones dedicadas a explorar áreas avanzadas de las matemáticas o a descubrir resultados relevantes, siempre hay una gran cantidad de problemas para resolver. Al preparar estas actividades usamos nuestros conocimientos y la literatura matemática existente, de la cual destacamos el libro "Mathematical Circles (Russian Experience)" por Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, publicado en inglés por la American Mathematical Society.

Sería imposible hacer una descripción completa de todas las actividades que se realizan durante este periodo de dos años. Pero diremos algo sobre ellas, invitando al lector a que visite la página Web www.uam.es/estalmat --> Actividades para obtener más información.

Cuando se trata de conocer áreas avanzadas de las matemáticas (por ejemplo, teoría de grafos, probabilidad,…) el profesor hace una pequeña introducción y a continuación propone actividades que guíen al alumno a través de los principales conceptos y les permitan ir descubriendo nuevos resultados. El trabajo de los alumnos se realiza en grupo, proponiendo ideas y soluciones que deben ser discutidas con sus compañeros de mesa de trabajo.

En otras ocasiones el profesor comienza presentando un problema, que en principio puede ser complicado, y pide a los estudiantes que busquen soluciones en casos particulares o traten de simplificar el problema para tratar de encontrar una solución.

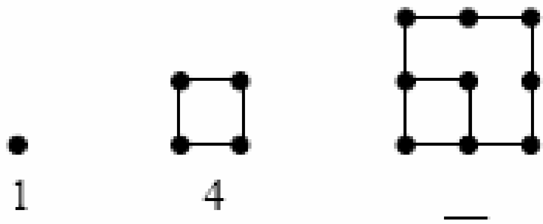
En algunas ocasiones las actividades presentadas para realizar en una sesión se terminan, pero en otras ocasiones quedan incompletas, dejando preguntas sin solucionar para que las trabajen los estudiantes. Es importante mencionar aquí que los estudiantes no tienen deberes que realizar entre estas sesiones, puesto que se trata de no distraerles de sus actividades escolares, también importantes para su desarrollo social e intelectual. Por supuesto, que pensar acerca de preguntas no respondidas no está prohibido, y pueden discutir con sus profesores las soluciones a estas preguntas.

Al cabo de dos años, los estudiantes reciben un diploma que acredita su participación en el proyecto. Pero, el proyecto continúa; después de haber permanecido durante dos años, de manera voluntaria, para los que quieren seguir profundizando en el conocimiento matemático se les ofrece una sesión cada mes. Durante estas sesiones se realizan actividades más complicadas y nos permite mantener la relación con los alumnos hasta que alcanzan el nivel universitario.

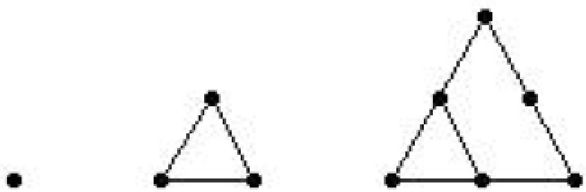
Ejemplo de una actividad: números poligonales

Los matemáticos han dado nombres a los conjuntos de números y tú ya sabes algunos de ellos: números naturales, enteros, racionales, etc. Algunos números están asociados a polígonos y tienen nombres geométricos. Los puntos de las siguientes figuras representan números de estos últimos.

1. Rellena los espacios en blanco y continua dibujando figuras según esta idea, escribiendo en cada caso el número de puntos que obtienes.



2. Observa ahora estas figuras (continua tú dibujando, siguiendo el modelo del ejercicio anterior y escribe el número de puntos que vas obteniendo)



Los números determinados por las figuras del primer grupo se llaman **números cuadrados**, los del segundo **números triangulares**. A veces utilizamos abreviaturas o símbolos para escribir estos números, por ejemplo, S_4 para el cuarto número cuadrado o T_2 para el segundo número triangular. Así pues, $S_5 = 25$, $T_3 = 6$, por ejemplo.

1. Completa la siguiente tabla (por lo menos hasta n=24):

n	1	2	3	4	...																			
S_n	1	4	9	16																				
T_n	1	3	6	10																				

2. Dibuja una estructura que represente el número cuadrado S7. ¿Puedes partirla en dos que representen números triangulares consecutivos? ¿Cuáles? ¿A qué número cuadrado es igual T9 + T10? ¿Y Tn + Tn+1?
3. Completa la tabla (por lo menos hasta n=10):

n	1	2							
T_n	1	3							
$1+8T_n$	9	25							

¿Qué observas en los números de la fila tercera? Intenta demostrar eso que conjeturas, sea cual fuere n.

4. Escribe las fracciones

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} \text{ y } \frac{T_n}{T_{n+1}}$$

Por lo menos hasta n=10 y conjetura algo sobre si se pueden simplificar o no. Demuestra esa conjetura.

5. Completa la tabla de la figura. Enuncia lo que parece que observas en las filas tercera y cuarta y demuéstralo luego.

n	1	2	3	4
S_n				
$\frac{n+S_n}{2}$				
$\frac{n-S_n}{2}$				

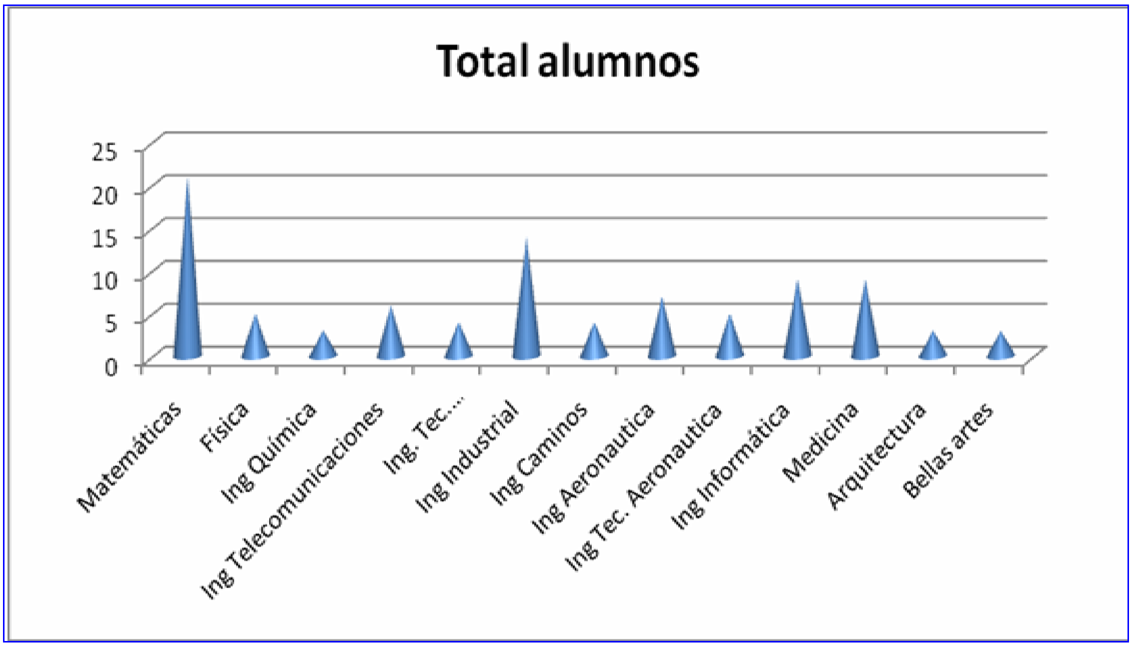
Resultados

La evaluación que realizan los Estudiantes al final de cada año académico muestra un alto grado de satisfacción de muchos de los participantes: prefieren trabajar en grupo en lugar de hacerlo individualmente y un gran porcentaje de ellos se divierte con las actividades, a pesar de que piensan que son bastante difíciles. Con estas opiniones podemos concluir que los objetivos inmediatos del proyecto Estalmat se han cumplido.

Los objetivos a largo plazo del proyecto se habrán cumplido si los participantes realizan "*extraordinarias contribuciones al desarrollo cultural, científico y tecnológico del país*" (Miguel de Guzmán). Pero es demasiado pronto para evaluar si se ha cumplido este objetivo.

Alguna tendencia puede observarse de los estudios elegidos por los estudiantes de las cinco generaciones de Estalmat-Madrid (en total 125 alumnos) que han alcanzado la edad de realizar estudios universitarios. El cuadro de la derecha y el gráfico inferior muestran las preferencias de 93 de ellos (el resto corresponden a carreras con menos de tres estudiantes). Los estudios de Matemáticas son los más elegidos, junto con diversas Ingenierías, entre las que destaca la Ingeniería de Telecomunicaciones. De estos 125 alumnos, once de ellos realizan dobles titulaciones, combinando generalmente Matemáticas e Ingeniería.

Matemáticas	**21**
Física	**5**
Ing Química	**3**
Ing Telecomunicaciones	**6**
Ing. Tec. Telecomunicaciones	**4**
Ing Industrial	**14**
Ing Caminos	**4**
Ing Aeronautica	**7**
Ing Tec. Aeronautica	**5**
Ing Informática	**9**
Medicina	**9**
Arquitectura	**3**
Bellas Artes	**3**



Los premios obtenidos por los participantes en Estalmat son numerosos. Algunos han tenido premio Nacional de Bachillerato, otros han tenido muy buenos resultados en la Olimpiada Matemática Internacional, en la Iberoamericana, en la española, en la de Física y en la de Química. Hay que resaltar que de los seis participantes en la Olimpiada Matemática Internacional del año 2008, cuatro procedían de Estalmat-Madrid, y han conseguido dos medallas de bronce y dos menciones de honor.

Epílogo

Miguel de Guzmán fue un hombre de una calidad humana excepcional, tenía un espíritu eternamente joven, siempre optimista, animaba las reuniones con su espontaneidad y la profundidad de sus reflexiones. Era un convencido de la fuerza de las ideas cuando éstas van acompañadas del saber hacer. Después de su etapa investigadora quiso dar un paso adelante para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Una vez más no quiso renunciar a la utopía y decidió ser coherente llevando a la práctica Estalmat, su último proyecto en educación matemática.

Estalmat es una experiencia alentadora, un portal de entrada a un mundo de juegos y actividades matemáticas con un profundo valor educativo. De gran interés para la sociedad y una delicia para todos los que participamos en ella.

Bibliografía

- www.estalmat.org es la página principal de Estalmat España y desde la que se puede acceder a las páginas de las distintas sedes del proyecto.
- www.uam.es/estalmat --> Actividades, contiene muchos materiales usados durante las actividades de Estalmat.

Eugenio Hernández, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad Autónoma de Madrid.
Email: eugenio.hernandez@uam.es

Mercedes Sánchez, Catedrática de Matemáticas (IES Ortega y Gasset, Madrid) y Profesora Asociada de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.
Email: merche_sanchez@mat.ucm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 123 - 140
ISSN: 1815-0640

Matemáticas especiales para alumnos especiales

Coordinadora: Alicia Bruno Castañeda

Diagnóstico de errores en niños con talento

Enrique Castro, Maryorie Benavides e Isidoro Segovia

Resumen

Partimos del supuesto de que los niños con talento deben formar parte de la atención a la diversidad en los sistemas educativos. Frente a la situación existente en épocas anteriores, se ha producido una evolución recogida por documentos curriculares que avalan la necesidad de atención especial que se le debe prestar a estos alumnos. Dentro de las distintas estrategias de identificación e intervención que se han propugnado, resaltamos la identificación orientada a la intervención basada en los trabajos de Julian Stanley. Concretamente en este trabajo nos hemos centrado en un aspecto de ella "el pretest diagnóstico" y mostramos los errores que comenten niños con talento chilenos en el campo conceptual de la estructura multiplicativa.

La atención a la diversidad

La atención a la diversidad está siendo objeto de atención en los sistemas educativos de distintos países, pero hay que tener en cuenta que la diversidad se manifiesta de diversos modos: diversidad de centros, diversidad del profesorado, diversidad del alumnado (Gutiérrez y Maz, 2004). En lo referente a los estudiantes, la diversidad se hace ostensible en sus diferentes capacidades, facultades físicas y psíquicas, intereses, motivaciones, ambiente sociocultural, factores étnicos o religiosos y, a ella, se debe dar respuesta educativa promoviendo el respeto a las minorías y atención a las diferencias individuales. "Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades" (Machado, 2004, p. 9). Sin embargo, esto no ha sido siempre así y, a pesar de que estas diferencias están presentes, no han sido tenidas en cuenta por los sistemas educativos, ni por los profesores, que han ofrecido respuestas educativas uniformes a realidades muy diversas (Gutiérrez y Maz, 2004).

La UNESCO ha sido sensible al tema de la diversidad y, en numerosos documentos auspiciados por este organismo internacional (Machado, 2004), se ha incidido en la necesidad de atender las diferencias individuales en educación:

> "Cada niño tiene características, intereses, capacidades y necesidades que le son propias; si el derecho a la educación significa algo, se deben diseñar los sistemas

educativos y desarrollar los programas de modo que tengan en cuenta toda la gama de esas diferentes características y necesidades" (p. 9).

Continuando en esta línea, Ruiz y Márquez (2006) señalan que "la diversidad implica reconocer y responder mediante acciones educativas concretas a las diferencias de los niños derivadas de sus características específicas" (p. 217) en la que la diversidad considere, o tenga en cuenta, que hay niños potencialmente sobresalientes. También destacan estos autores que la escuela regular no ofrece una respuesta educativa diversificada, sino excluyente, en la que los niños son tratados de manera homogénea sin considerar sus diferencias y necesidades vinculadas a sus características específicas.

Una de las consecuencias de la falta de atención a las diferencias individuales es que muchas personas no desarrollen plenamente sus talentos y capacidades. "Un buen porcentaje de alumnos con talento puede ver limitado el desarrollo de sus potencialidades, o bien presentar dificultades de aprendizaje y de participación, al no considerar sus necesidades educativas específicas" (Machado, 2004, p. 9).

Respuesta educativa a los niños con talento

La diversidad de alumnos en las aulas, presenta múltiples necesidades, una de ellas es la atención a los niños con talento. Pero este colectivo de sujetos ha sido uno de los últimos con necesidades educativas especiales al que los sistemas educativos han empezado a prestar atención. Las razones son varias: actitud de los docentes, falta de formación para atender la diversidad, la homogeneidad de la enseñanza, entre otras. Incluso el supuesto de que este colectivo no necesita una atención especial, puesto que saldrán adelante sin ayuda, ha contribuido durante mucho tiempo a que se les olvide.

Hasta la segunda mitad del siglo XX la atención a los estudiantes con talento no era motivo de preocupación por parte de los distintos estamentos implicados en la educación. Progresivamente se ha cambiado de parecer y, en la actualidad *"existe una mayor conciencia de que estos alumnos sí requieren ayudas y apoyos especiales para lograr el máximo desarrollo de sus capacidades"* (Blanco, Ríos y Benavides, 2004, p. 49). Estos autores señalan que, a pesar de este reconocimiento, "las demandas educativas de estos alumnos no son suficientemente atendidas por los sistemas educativos, más preocupados por aquellos que tienen discapacidad o problemas de aprendizaje" (p. 49). Recomiendan que los sistemas educativos y las escuelas desarrollen acciones encaminadas a dar una respuesta educativa que promuevan el pleno desarrollo y aprendizaje de los escolares con talento excepcional.

Los niños superdotados y con talento tienen cualidades generales comunes. Freeman (1988) señala dos de ellas: a) aprenden más rápidamente, y b) tienen mayor profundidad y extensión en el aprendizaje. Sin embargo, Blanco, Ríos y Benavides (2004) señalan que no constituyen un grupo homogéneo y que difieren en muchos aspectos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de planificar una intervención. Una de las recomendaciones que propugnan es que se realice:

> "una evaluación del alumno o alumna en el contexto educativo en el que se desarrolla y aprende que permita conocer sus necesidades educativas específicas y que sirva para la toma de decisiones sobre las adaptaciones del currículo y sobre los recursos y ayudas que hay que proporcionar a cada uno para optimizar el desarrollo de sus capacidades" (p. 50).

La atención de los niños con talento matemático

De forma paralela a la atención de niños con talento en general, la educación de los niños con talento matemático está empezando a recibir atención en los sistemas educativos de distintos países, pero en el pasado ha sido una minoría olvidada. Así lo reconoce el National Council of Teachers of Mathematics en el documento An Agenda for Action (1980): *"Los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su potencial, son los estudiantes superdotados de matemáticas"* (p. 18).

El National Council of Teacher of Mathematics, pone de manifiesto que todos los niños pueden aprender matemáticas y no sólo unos pocos. Esta idea de "matemáticas para todos", se explicita en varios de sus documentos: Los Standards (1989) hablan de objetivos para todos los estudiantes; los Professional Standards (1991) exponen que *"todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente"* (p.21); y los Principles and Standards for School Mathematics (2000) subrayan el aprendizaje matemático para todos en su principio de equidad (The Equity Principle). Entre los grupos de estudiantes a los que afecta este principio mencionan a los estudiantes que muestran interés especial por las matemáticas y a los que poseen un talento excepcional en matemáticas. Estos estudiantes podrían necesitar programas especiales o recursos adicionales para alcanzar su desarrollo potencial. Destaca este documento que el interés o el talento de estos estudiantes debería ser atendido para que puedan alcanzar una formación excelente en matemáticas.

Estas ideas también las subraya Lappan (sin fecha), como miembro activo en varios documentos del National Council of Teachers of Mathematics y presidenta durante un tiempo de dicho Consejo:

> "Nuestro primer objetivo debería ser potenciar matemáticamente a todos los estudiantes. A menudo hablamos de ofrecer oportunidades a los estudiantes más desfavorecidos. Pero entre los estudiantes que tenemos en nuestros cursos algunos tienen altas capacidades. Nuestros programas deberían incluir también oportunidades para estos estudiantes. En el futuro estos estudiantes serán usuarios de las matemáticas: científicos, matemáticos, estadísticos, ingenieros, técnicos e investigadores. Merecen que se les tenga en cuenta en la programación de igual manera que se tiene en cuenta otro tipo de necesidades especiales." (p. 1).

El sentido del Principio de Equidad propuesto en los Principles and Standards for School Mathematics (2000), también lo describe Van de Walle (2001), identificando la diversidad de sujetos en una sala de clases: los estudiantes con problemas de aprendizaje, los estudiantes con diferencias culturales, las diferencias según el sexo y los estudiantes con talento matemático.

Intervención

Se han propuesto varias estrategias de intervención para ser aplicadas a niños con talento. Unas son de carácter organizativo, y se refieren al modo de ubicar a los sujetos con talento respecto a sus compañeros: integración, agrupamiento, individualización; otras son estrategias relativas a los contenidos del currículo y, entre ellas, cabe destacar el enriquecimiento y la aceleración. Ambas fórmulas son válidas y se aplican con fines distintos. El enriquecimiento es la fórmula usual cuando a los alumnos se les dan clases al margen de la enseñanza oficial, con el ánimo de potenciar sus dotes excepcionales. Los problemas y las actividades que se les proponen suelen evitar excesiva dependencia con los conocimientos matemáticos, a veces incluso no tienen conexión con el contenido matemático del currículo escolar. La aceleración es otra de las modalidades que se han adoptado en la intervención de niños con talento, en la que a los niños se les evalúa y se les ubica en un curso más avanzado del que les corresponde por su edad.

Identificación orientada a la intervención

Desde el ámbito educativo, la finalidad que tiene la identificación de los niños superdotados y con talento es someterlos a un proceso de intervención, bien en un ambiente integrado con el resto de su clase, o en cursos especiales enfocados al enriquecimiento del sujeto o a la aceleración de su proceso académico. La mayoría de las técnicas que se han empleado (y se emplean) para la identificación de estos niños excepcionales no transcienden la fase de identificación, en el sentido de que no se obtiene del proceso de identificación información adicional que pueda guiar el proceso instructivo de los niños superdotados. Pensamos que debe haber una evaluación posterior a la fase de identificación, de carácter diagnóstico, que sirva para planificar parcial o totalmente el programa de intervención. En este sentido señala Johnson (1983) que:

> "Deberíamos encontrar formas de ampliar nuestros procesos de identificación que incluya información cualitativa e integrar esa información en nuestras decisiones de lo que es un superdotado en matemáticas. Esta información podría utilizarse inmediatamente en la planificación de la programación" (p. 55).

Nuestra propuesta va en esta línea, se refiere a la evaluación de los niños con talento en la fase inicial de identificación o inmediatamente posterior a ella, con el deseo adicional de que obtengamos información para la intervención posterior con estos niños. Planteamos un marco teórico en el que dicho proceso esté motivado por la intención y la posibilidad real de ofrecer servicios o programas adecuados a sus necesidades. Así mismo, tanto los procesos de identificación como las características del programa de intervención deben ajustarse al tipo de talento que se vaya a trabajar, al nivel de desarrollo de los alumnos y al campo de conocimiento específico que se trabaje. La atención de estos alumnos en sus aulas desde un enfoque integrador requiere conocer cuáles son las necesidades específicas diferenciadas que tienen estos alumnos “especiales” y la mejor forma de desarrollar su talento y, concretamente en nuestro caso, el talento matemático.

Situando lo anterior, y desde un enfoque cognitivo, vemos la necesidad de que el proceso de identificación sirva para conocer no sólo las altas puntuaciones de los sujetos en un test de inteligencia general, sino también aspectos cualitativos relacionados con la resolución de problemas. Creemos necesario un análisis cualitativo de las producciones de los sujetos obtenidas del proceso de resolución de problemas de matemáticas. Proponemos, además, que el proceso de evaluación diagnóstica que seguiría al proceso de identificación de niños con talento sea lo más cercano posible al proceso de instrucción, en una parcela específica de conocimiento ligada al nivel de desarrollo de los conocimientos curriculares del alumno en matemáticas. La identificación de las estrategias que emplean los estudiantes en un campo de conocimiento específico y los errores que comenten, es un punto de partida (Socas, 1997; Rico, 1993), y proporciona al profesor una base cognitiva para tomar decisiones e intervenir en el aula para desarrollar el talento matemático de los estudiantes superdotados.

Así pues, abogamos, dentro de una intervención integradora del alumno superdotado en su aula, por instrumentos de identificación que sean útiles no sólo para diferenciar a los sujetos por sus puntuaciones en un test de inteligencia, o por las capacidades de pensamiento generales que permiten evidenciar, sino que somos partidarios de instrumentos que cumpliendo con una función diferenciadora entre sujetos, proporcionen además elementos de juicio para una intervención que esté basada cognitivamente y centrada en un ámbito curricular concreto del área de conocimiento que se esté tratando. Esto no es contradictorio con un programa de enriquecimiento o de aceleración curricular, lo vemos como complementario, es decir, se pueden proponer actividades de enriquecimiento que tengan un carácter general, pero nosotros proponemos además utilizar el conocimiento que hemos adquirido de la prueba de diagnóstico para proponer actividades que potencien las estrategias detectadas en los alumnos y que permitan corregir los errores observados.

Evaluación diagnóstica-enseñanza prescriptiva

La idea de evaluación diagnóstica como parte de un modelo de identificación e intervención en un colectivo de niños con talento no es nueva, y se enmarca en lo que se denomina, en general, enseñanza diagnóstica. Dentro del ámbito de los sujetos con talento matemático hay modelos pioneros en este sentido, como el SMPY de Julian Stanley (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005).

Stanley desarrolló el modelo: “Diagnostic Testing → Prescriptive Instruction”, para utilizarlo con estudiantes matemáticamente precoces. El modelo es útil para asegurarse de que los estudiantes con talento no se saltan conceptos importantes o tienen lagunas en su periodo de formación. La noción de evaluación diagnóstica y enseñanza prescriptiva tiene sus raíces en la educación especial, y ha tenido cierta repercusión en educación matemática. Este enfoque aplicado a niños especiales consiste en evaluar a los estudiantes con instrumentos de un nivel diferente al que le correspondería por su edad. Una de las primeras investigadoras de niños superdotados Leta Hollingworth (citada en Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), reconoce que la idea de evaluar con instrumentos que corresponden a un nivel diferente, podría ser útil para los estudiantes superdotados, los cuales podrían ser evaluados con tests diagnósticos diseñados para cursos superiores a los que pertenecen los niños. Julian Stanley extendió las ideas de Hollingworth en los últimos años de la década de 1960 y en los primeros de la de 1970 y desarrolló el modelo "Diagnostic Testing → Prescriptive Instruction" para identificar en los estudiantes con talento matemático, fortalezas y debilidades y señalar aspectos que necesitan trabajar. En 1971 se inició oficialmente el programa Study Mathematical Prococity Young (SMPY) en la Universidad de Johns Hopkins y, sus objetivos fueron identificar, estudiar y proporcionar educación a niños que inicialmente están en los dos primeros años de la escuela secundaria inferior, es decir, que tienen entre doce y catorce años.

Nuestra propuesta recoge la tradición del modelo de Stanley en su versión más actual (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), pero con algunas modificaciones que intentan hacerlo más operativo y actual, como veremos a continuación.

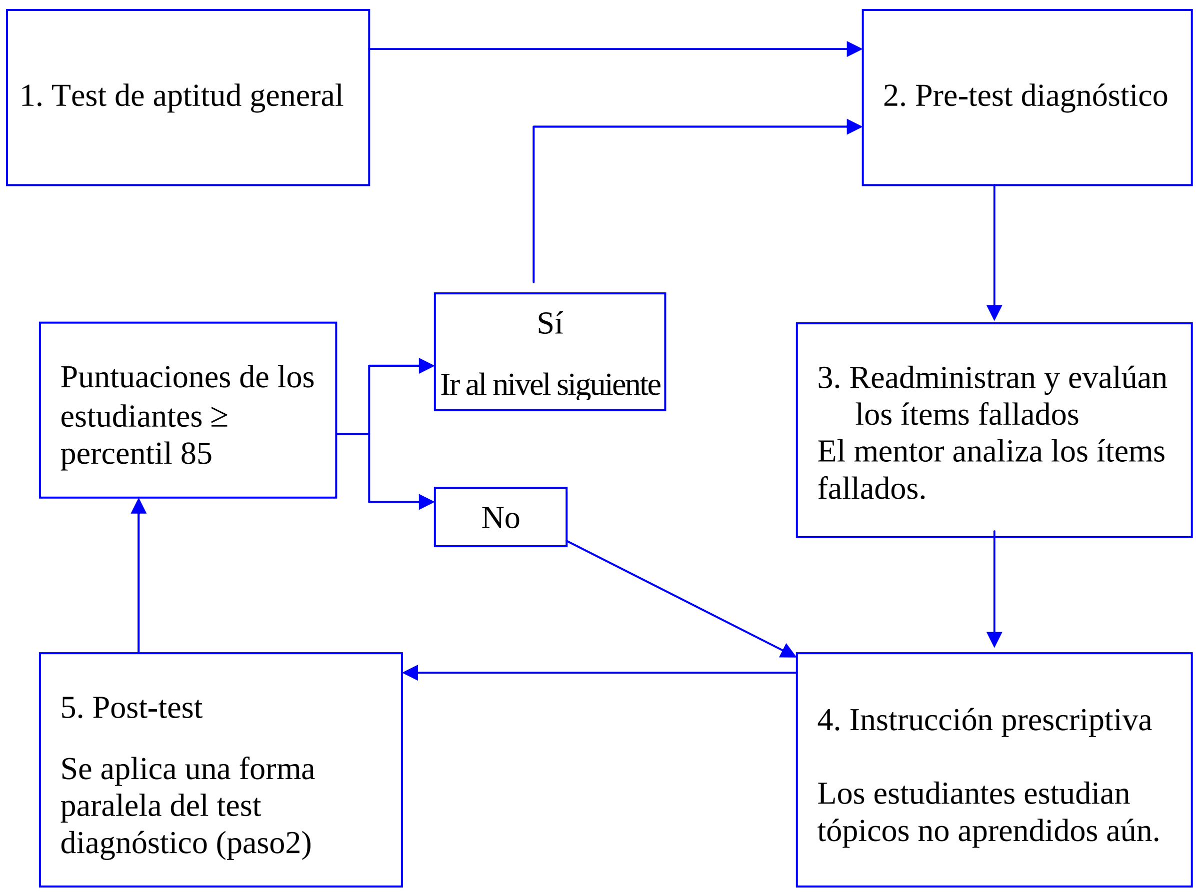


Figura 1. El modelo FD-PI (tomado de Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005)

La primera fase del modelo de Stanley (veáse fig. 1) es una fase de identificación de niños con talento en la que se utiliza una prueba de aptitud general. Normalmente esta fase requiere aplicar un test de inteligencia o de aptitud general (ej., test de Raven) y precisa de un experto psicólogo para su interpretación. Posteriormente, se requiere de otro profesional, el profesor especialista, para la fase de intervención.

En la segunda fase de este modelo de Stanley se administra un test diagnóstico de aptitud específica de un nivel superior al que se encuentran los niños. Aquí es donde nuestra investigación realiza una primera aportación original. Pensamos que una de las opciones alternativas que se pueden dar es que el test diagnóstico esté constituido por ítems que sean problemas pertenecientes, o que estén dentro, de un campo conceptual de la matemática (Vergnaud, 1990) que permita diagnosticar las lagunas de conocimientos, los errores, las estrategias incipientes que manifiestan los niños y las representaciones que realizan en ese campo conceptual.

El problema requiere, inicialmente, construir un test de aptitud específico, es decir, un test ligado a un campo conceptual de contenido matemático específico que pudiera cumplir función diagnóstica dentro del campo conceptual correspondiente, del cual se pudieran realizar con facilidad réplicas similares que pudiesen aplicarse, una vez realizada la intervención, como postest.

La estructura multiplicativa

Acorde con lo anterior, nuestras ideas las hemos contextualizado en un campo conceptual (Vergnaud, 1990) de la matemática escolar, el de la estructura multiplicativa (Vergnaud, 1983, 1998), y hemos construido un test constituido por una batería de problemas, a modo de test de aptitud específico, relativo a ese campo de conocimiento (Benavides, 2008; Castro, Benavides y Segovia, 2006). Con la finalidad de identificar en alumnos con talento de primer ciclo de secundaria, las estrategias específicas de resolución en ese campo conceptual y los errores que cometen. Para la construcción del test hemos seleccionado problemas que han sido ítems representativos de investigaciones previas dentro del campo conceptual de la estructura multiplicativa.

La noción de campo conceptual lo propuso Vergnaud (1983), con el interés de comprender la adquisición y el desarrollo de conocimientos específicos y de destrezas relacionadas con situaciones y problemas. El campo conceptual de la estructura multiplicativa ha sido estudiado desde la década de 1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores que cometen los resolutores en tareas ligadas a este campo conceptual (Bell, Greer, Grimison y Mangan, 1989; Castro, 1995; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1983, 1988). Algunas de las tareas que se han utilizado en estas investigaciones son problemas que plantean cierta dificultad a los mejores alumnos de una misma etapa educativa, y pensamos que pueden ser útiles para evaluar de manera diagnóstica el conocimiento matemático de los alumnos con talento en el ámbito de la estructura multiplicativa en un determinado estadio de su desarrollo.

Método

1.- Preguntas de investigación

Cuando pensamos en niños superdotados o en niños con talento, damos por supuesto que suelen hacer bien todas las tareas que se les proponen. Evidentemente, en general, su rendimiento es superior a la media, pero ello no conlleva que durante la fase de aprendizaje escolar no cometan errores en las tareas que se les proponen. Conviene saber no sólo si cometen errores, también es conveniente conocer los errores que cometen en tareas enmarcadas dentro de un campo conceptual de la matemática. Esto es un aporte importante de la fase diagnóstica y facilitaría y permitiría al profesor realizar una instrucción adecuada. Por ello, nos plantemos las preguntas:

- ¿Cometen los sujetos con talento errores? Y en tal caso,
- ¿Qué tipo de errores cometen los niños con talento al resolver problemas de un campo específico de conocimiento que en este trabajo es la estructura multiplicativa?

2. Sujetos

Las preguntas anteriores las hemos estudiado con alumnos chilenos de los últimos cursos de educación básica**.** En la investigación han intervenido un grupo de 30 estudiantes con talento a los que se les ha aplicado el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa. Poseen unas características comunes: son niños de ambos sexos seleccionados de dos comunas de Santiago de Chile: Puente Alto y La Florida; tienen una edad comprendida entre 11 y 13 años y están cursando sexto u octavo año de Educación Básica, y provenían de establecimientos educacionales de una zona de nivel socioeconómico medio. Estos estudiantes fueron seleccionados por sus profesores para que participaran en un programa de identificación de talentos. Entre los participantes se seleccionaron los que tuvieron una puntuación igual o superior al percentil 75 en el test de Raven. Una vez seleccionados, el grupo de los 30 estudiantes con talento participaban semanalmente en un programa para niños con talento en la Universidad.

3. Instrumento

En este trabajo de investigación hemos utilizado un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa, que hemos construido *ad hoc* y que hemos denominado cuestionario PEM. La estructura multiplicativa implicada en el cuestionario PEM es una de las más ricas de la matemática por la variedad de contextos y situaciones a los que puede referirse, por las diferentes posibilidades en cuanto al tipo de cantidades implicadas y por la variedad de categorías semánticas (Bell y otros 1989; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1988). La estructura multiplicativa se desarrolla durante un amplio intervalo de tiempo, es por tanto, una estructura implicada en todas las etapas de desarrollo y aprendizaje; determinadas situaciones pueden ser adquiridas y resueltas en los primeros niveles de la Educación Primaria y otras tienen dificultad en su resolución en las últimas etapas de la Educación Secundaria Obligatoria. Las características anteriores hacen muy pertinente su presencia en una prueba en la etapa de desarrollo en la que se encuentran los sujetos de la investigación.

Con respecto al contenido de los ítems incluidos en el cuestionario PEM, además de las variantes de problemas simples que se dan dentro de la estructura multiplicativa se le han impuesto otras características adicionales a los problemas, como el tipo de número que aparece como dato o el contenido matemático implícito, que nos permite clasificar los 12 problemas del cuestionario PEM en cinco grupos. La tabla 3.2 recoge los 12 problemas que conforman el cuestionario PEM agrupados según los cinco tipos que han sido considerados.

Tabla 3.2. Tipos de problemas de estructura multiplicativa

Tipo de problemas	Problemas	Característica
1	**1 – 4 – 8 – 12**	**Problemas de comparación**
2	**3 – 9**	**Problemas de combinatoria**
3	**6 – 10**	**Problemas de escala**
4	**5 – 7**	**Problemas complejos**
5	**2 – 11**	**Problemas de proporcionalidad simple con números decimales**

4. Procedimiento

El cuestionario se aplicó al grupo de estudiantes del programa de talentos y al grupo de contraste, en dos instancias separadas por una semana, la primera aplicación constó con 6 problemas y la segunda con los siguientes 6 problemas aparte. La razón para hacerlo en dos sesiones separadas fue debido a que en el cuestionario había problemas "parecidos" y se quería que no influyera en las respuestas.

A los estudiantes del programa de talentos se les administró el cuestionario en su sala de clases, mientras asistían a cursos en la universidad. La realización de la prueba duró en cada instancia aproximadamente una hora.

La aplicación del cuestionario al grupo de estudiantes que no participan del programa de talentos se realizó en sus respectivos colegios, previa coordinación con la profesora jefe de la unidad técnico-pedagógica o encargada del programa PENTA-UC de cada establecimiento educacional. La aplicación del cuestionario se realizó en algunas ocasiones en la sala de clases de los niños aplicando el instrumento a todo su curso, por solicitud del colegio, y en otras ocasiones, en la biblioteca del establecimiento educacional.

La aplicación del cuestionario se realizó durante los meses de marzo y abril del 2003, visitando un total de 6 colegios de las comunas de la Florida y Puente Alto en la ciudad de Santiago de Chile. El tiempo máximo disponible para la contestación de los cuestionarios fue de dos horas aunque todos los sujetos lo terminaron antes de dicho plazo. Al niño se le dieron unas instrucciones previas. Se insistió en la necesidad de que escribieran todas las operaciones necesarias para resolver los problemas.

Resultados

Criterios para definir los errores

El proceso de resolución de problemas comprende dos fases: comprensión y solución (Mayer, 1986). La fase de solución conlleva un aspecto de planificar y ejecutar las operaciones necesarias para obtener un resultado. Por tanto, los errores se pueden producir en una de estas fases, o bien, en las dos. Después de un análisis exhaustivo de las producciones de los sujetos con talento, hemos observado que en la fase de ejecución de las operaciones no hay errores que resulten significativos ni por su naturaleza ni por su frecuencia, pero que sí los hay en la fase de comprensión. Por lo tanto, exponemos sólo los errores producidos en la fase de comprensión.

Los errores que han cometido los sujetos con talento los hemos clasificado en siete tipos o categorías: Conmutar los datos, Cambio de estructura, Inversión de la operación, Omitir una operación, Error en un concepto, Cambio de significado de una relación, y Emplear una estimación. Además, hemos considerado una categoría complementaria de "No responde", que se refiere al caso que no se ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. El significado de estos errores es el siguiente:

1. Conmutar los datos

En las operaciones aritméticas se puede distinguir las que cumplen la propiedad conmutativa (adición y multiplicación) de las que no la cumplen (substracción, división, potenciación). Cuando aplicamos estas operaciones para resolver problemas, puede que lo hagamos sin comprender el significado de cada uno de los datos, esto en las operaciones aritméticas que son simétricas no se aprecia, pues no importa el orden en el que operemos con los datos, pero en las operaciones que no son simétricas sí se aprecia, pues el orden es importante de cara a la solución. Por ello, ha sido en las operaciones no simétricas de carácter multiplicativo (multiplicación y potenciación) donde hemos observado el error de confundir el papel de alguno de los datos. Lo hemos detectado en los casos en que el resolutor elige una operación que es adecuada para solucionar el problema, pero le asigna al menos a un dato un papel que no le corresponde en la operación, o que le correspondería al otro dato. Al menos un dato no está ubicado en la operación de manera correcta, por lo cual no desempeña la función que debiera según el problema. Esto queda patente en los problemas que requieren una división cuando intercambiamos el divisor y el dividendo: así mismo, se da cuando en una potencia se intercambian el valor de la base y el exponente.

Este error se ha presentado de manera significativa en un problema complejo de combinatoria, y en un problema con números decimales. En el problema con números decimales los sujetos que cometen este error escogen correctamente la operación aritmética, la división, pero intercambian la función o el papel que desempeñan los dos datos, en una operación que no es conmutativa, por lo que la traducción a operación aritmética que hace el resolutor del problema no es correcta y, por tanto, el resultado no es el adecuado.

En el problema de combinatoria, se le asigna a uno de los datos del problema, el número 5, el papel de otro dato, el del número 2, utilizando la operación de 5^5 (5 elevado a 5) para resolver el problema, cuando debía utilizar 2^2.

2. Cambio de estructura

El nombre de este error lo hemos tomado de la literatura existente sobre resolución de problemas matemáticos (Castro, 1994; Castro, Rico y Castro, 1992). Se localiza en aquellas soluciones en las que los sujetos realizan una regresión hacia estructuras más sencillas, fundamentalmente de carácter aditivo. El sujeto, al resolver el problema, en vez de emplear las operaciones de multiplicar o dividir, pertenecientes a la estructura multiplicativa, y que son los pertinentes en estos problemas, emplea la suma o la resta, que son conceptos en cierta medida paralelos, pero pertenecientes a la estructura aditiva y, por tanto, no le conduce a la solución correcta del problema. Es decir, el resolutor ha dado la solución a un problema de estructura multiplicativa como si éste fuese de estructura aditiva.

El error de cambio de estructura se ha presentado en las producciones de los niños con talento en los problemas de comparación, de números decimales, problemas de combinatoria y en problemas de escala, y lo ha hecho de dos formas con distinto nivel de complejidad, a las que referimos como forma simple y forma compleja. La frecuencia de aparición de este error ha resultado significativa en los problemas de números decimales y en los problemas de combinatoria simples, denominado por algunos autores como problemas de producto cartesiano.

El error de cambio de estructura, en su forma más simple ha aparecido en problemas de comparación multiplicativa. Un tipo de representación errónea de este problema suele venir dada por la resta de los datos

$$\begin{array}{r} \mathbf{180} \\ \underline{\mathbf{-\ 60}} \\ \mathbf{120} \end{array}$$

es decir, se sustituye la división por la resta.

Como hemos indicado, este error de cambio de estructura, se manifiesta cuando los sujetos escogen la operación de sustracción que es inadecuada para resolver el problema. Decimos que cambia de estructura porque para resolver el problema el resolutor escoge una operación que corresponde a una estructura más simple, la estructura aditiva, dentro de esta estructura ha escogido la resta de datos cuando la representación correcta se realiza utilizando la operación de división. Pensamos que esto se debe a que interpretan la expresión *veces menos estatura* como si fuese *¿cuánta menos estatura?* Esta idea se puede apreciar en la respuesta de un sujeto de la investigación que da como solución "120 cm menos de estatura".

Una versión más compleja del error de cambio de estructura se ha dado en los problemas con números decimales, en los que el error se ha manifestado de dos formas:

a) los que restan los dos datos: restan las dos cantidades que corresponden a magnitudes de naturaleza distinta. En este caso calculan la diferencia entre el peso y el precio, que son magnitudes diferentes.
b) compensación entre magnitudes diferentes (restan compensando). En este caso la resta además de ser entre magnitudes diferentes, intenta obtener el valor tal que se acerque a la unidad del peso y del precio.

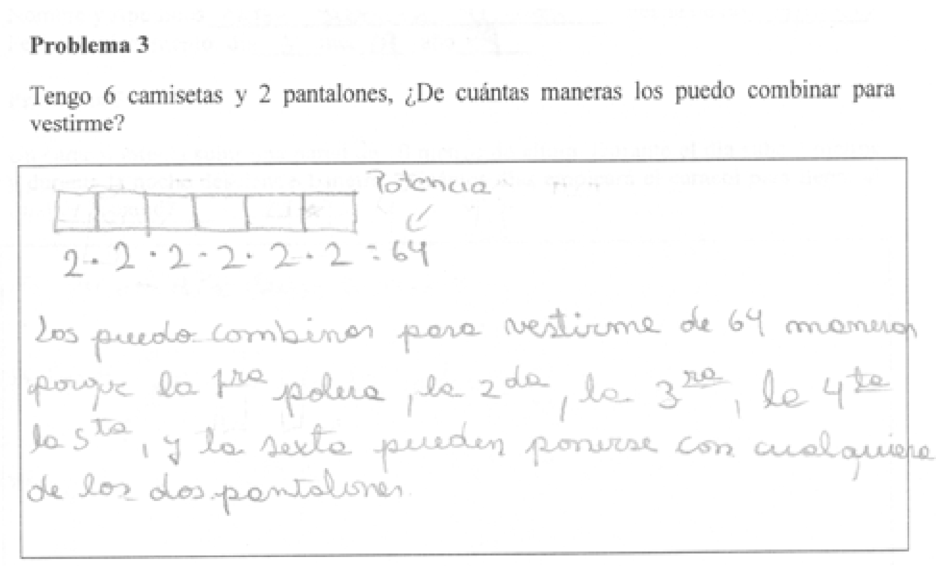
En el problema de combinatoria, tipo producto cartesiano, se ha dado el error de cambio de estructura de tres formas diferentes:

1. sumar 6+2, en vez de multiplicar 2×6,
2. multiplicar $2\times2\times2\times2\times2\times2$ en vez de sumar 2+2+2+2+2+2, y
3. multiplicar 6×6, en vez de sumar 6+6.

En la primera forma, el estudiante argumenta que la solución es "6+2=8 por que son los únicos números y la operación es razonable. Tengo 8 maneras".

La segunda forma consiste en multiplicar 6 por 6 y da como respuesta 36 y además, para obtener la solución uno de los estudiantes emplea un bosquejo de diagrama de árbol, parte de dos puntos que representan los dos pantalones y de cada uno de ellos saca seis ramas correspondientes a las seis camisetas, pero en vez de sumar las seis ramas de cada pantalón, lo que daría 6+6 que daría el resultado correcto, las multiplica $6\times6=36$, dando como resultado 36: "Los puedo combinar de 36 maneras para vestirme". ¿De dónde proviene aquí el error? ¿De falta de conocimiento de la situación descrita en el enunciado del problema? Creo que no, pues es una situación familiar a cualquier sujeto. En este caso se entiende que se debe combinar camisa con pantalón como se desprende de los niveles representados en el diagrama de árbol, pero es la propia funcionalidad del diagrama de árbol, al utilizarlo sin referencia a la situación real, el que provoca que se cometa el error. El resolutor ha traducido el problema a un diagrama de árbol y a partir de ahí es el diagrama de árbol el que ha impuesto la solución. Y ello en la manera de cómo entiende el resolutor el diagrama de árbol.

La forma de solución es la siguiente:


Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

Potencia

2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 64

Los puedo combinar para vestirme de 64 maneras porque la 1ra polera, la 2da, la 3ra, la 4ta la 5ta, y la sexta pueden ponerse con cualquiera de los dos pantalones.

2×2×2×2×2=64, en ella se puede observar que el resolutor ha traducido el enunciado en un esquema lineal que le sirve para elegir las operaciones que tiene que realizar. En este caso el diagrama elegido no es adecuado para representar el problema.

3. Inversión de la operación

Este nombre lo hemos tomado de la literatura sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa (Castro, Rico y Castro, 1992; Castro, 1994). Consiste en utilizar la operación inversa de la que se debe emplear en la resolución del problema. En un principio, puede asimilarse al error ya citado de conmutar los datos, pero queremos resaltar la diferencia, pues no es lo mismo intercambiar el dividendo por el divisor, que cambiar la división por la multiplicación. Este error se produce cuando el sujeto escoge la operación aritmética inversa a la requerida para solucionar el problema. Si la operación necesaria para resolver el problema es la multiplicación escoge incorrectamente la división, y viceversa, y lo mismo puede ocurrir con la adición y sustracción en un modelo aditivo.

Este error ha ocurrido en cuatro de los doce problemas empleados en el estudio: en los dos problemas de números decimales, en un problema de comparación y en un problema de escala. El error se ha presentado en la forma siguiente:

En los problemas de números decimales, este error de manifiesta de la siguiente forma: En uno de los problemas, el error de inversión se pone de manifiesto cuando los sujetos en vez de multiplicar 0,923×6,5 realizan la operación de dividir 0,923 : 6,5 entre esos mismos datos. Y, en el otro problema, que es el problema inverso del anterior, el error se manifiesta cuando los sujetos en vez de realizar la operación de dividir 6 : 0,923 lo que hacen es multiplicar los datos 0,923×6, esta solución está acompañada de operaciones de cambio de unidad, como dividir 6 entre 1000.

En uno de los problemas de comparación, este error se produce cuando el sujeto utiliza la operación multiplicación $180\times3 = 540$, en vez de la operación división 180:3, dando como solución 540. En otro de los problema de comparación, se da cuando interpreta de manera equivocada la expresión "veces menos", realizando la operación 180×3 para resolver el problema.

En uno de los problemas de escala, aparece como error dividir la distancia real de la escala en la distancia del papel entre las dos ciudades, cuando lo que debería hacer es multiplicarlas. Así ocurre, por ejemplo, cuando se realiza la división de 4000000 : 3.

4. Omitir una operación

Este error se produce cuando en la representación aritmética de un problema el resolutor no tiene en cuenta una condición incluida en el enunciado del problema, bien de manera implícita, o de manera explícita. Hay que poner de manifiesto que ha sido este error el que ha aparecido con más frecuencia.

En uno de los problemas se ha dado el error de generalizar lo que se daba en los primeros casos, sin advertir que esa pauta se quebraba por una condición que no estaba explícitamente dicha en el enunciado.

La dificultad que ocasiona a los niños la interrelación entre área y perímetro ha provocado también la omisión de operaciones en el resultado. En uno de los problemas, que incorpora los conceptos de área y perímetro, y en el que se pedía hallar la diferencia entre el área de un cuadrado y otro obtenido disminuyendo su perímetro, hay sujetos que dan como respuesta un resultado intermedio: el área del cuadrado disminuido. Es decir, en la fase de comprensión del problema omiten una relación, la final, que corresponde a la diferencia de áreas del cuadrado inicial y del cuadrado disminuido. Es pues un error de integración global de las relaciones del problema. Más precisamente, en vez de responder a la diferencia de áreas entre el cuadrado inicial y el cuadrado final disminuido, entienden que se les pregunta por el área del cuadrado disminuido, y dan como respuesta el área de este último. No cometen errores de cálculo.

Por ejemplo, un sujeto procede de la siguiente manera:

$$P_1 = 8\times4 = 32,$$

$$A_1 = 8\cdot8 = 64,$$

$$P_2 = 32-8 = 24,$$

$$P_2 = 4 = 6 = l_2,$$

$$A_2 = l_2 \times l_2 = 36$$

Dando como respuesta 36 que es el área del cuadrado disminuido A_2. Otro sujeto ni siquiera ve necesario calcular el área del primer cuadrado A_1.

5. Error en un concepto

Entendemos que hay un error en un concepto cuando en la producción de un sujeto se puede observar que se ha plasmado un concepto de manera equivocada. El error conceptual puede tener su origen en la carencia por parte del resolutor de algún conocimiento específico matemático que le impide resolver el problema correctamente, y que en algunos casos le hace producir respuestas inventadas erróneas, pero no se descartan otras razones.

6. Cambio de significado de una relación

En un problema intervienen conceptos y relaciones y, en ocasiones, las producciones de los sujetos reflejan que una relación se está utilizando con un significado que no es el adecuado desde el punto de vista matemático. En este sentido, hablamos de cambio de significado de una relación porque los sujetos que cometen este error utilizan toda la información presente en el problema, pero hacen una interpretación alternativa equivocada de alguna de las relaciones presentes en él.

El error de cambio de significado de una relación ha aparecido muy repartido en los distintos tipos de problemas. En los problemas de comparación, los sujetos hacen una traducción de la relación comparativa que denota que no han utilizado su significado matemático correcto, interpretan la expresión comparativa “veces menos” como una expresión compuesta. Para obtener cuántas veces menos es 60 que 180, empiezan restando 180-60=120 y dividiendo 120:60 y dan como solución “dos veces menos”. Y, en uno de los problemas, cuando se le dice que un objeto miden 180 cm y el otro 3 veces menos, ante la pregunta ¿cuánto mide este último? Después de hacer correctamente la división de 180 entre 3 dan como resultado: “No mide, mide 0 cm.” Es decir, han cambiado el significado de la pregunta.

En el problema que incorpora las nociones de área y perímetro, interpretan de manera equivocada una de las relaciones del problema. Este error lo cometen los sujetos que interpretan la expresión "se disminuye en 8" como si fuese la expresión "se disminuye a 8".

7. Emplear una estimación

Utilizar una estimación numérica es una estrategia que se emplea para resolver problemas, o para detectar la razonabilidad de una respuesta. Si el contexto lo requiere el realizar una estimación para resolver un problema puede ser adecuado, pero entendemos que no es el caso de los problemas que hemos planteado en este estudio y, por lo tanto, si el sujeto ha empleado una estrategia de estimación consideramos que ha incurrido en un error al que hemos dado este nombre.

Este error sólo se ha dado de manera significativa en los problemas con números decimales.

Ha aparecido de las siguientes maneras:

a) Interpretan el "trozo" de queso como la mitad.
b) Establecen una equivalencia inadecuada entre los dólares y los gramos, por ejemplo, 1,5 dólares =75 gramos.

8. No responde

Esta categoría incluye los casos en que el resolutor no ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. En general, no responden a un único criterio, aunque la mayoría de los casos se refieren a las respuestas de los sujetos que *no responden,* esto ocurre en algunos problemas en los que no hay respuesta, es decir, aparecen en blanco; en menor medida, también hemos incluido respuestas en las que el *resolutor hace algo*, como es el caso del sujeto que construye la figura de un cuadrado, le añade las medidas de sus lados y se detiene.

Reflexión final

De los datos que hemos recogido sacamos como conclusión que, en contra de lo que se podría pensar, los sujetos con talento cometen una gran variedad de errores, que en cierta medida son sistemáticos, cuando resuelven problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Si bien la frecuencia de errores que cometen los sujetos con talento es menor que la de un grupo de sujetos no catalogados como tales, no por ello deja de ser importante y representa una oportunidad para corregirlos y tratar de profundizar con este tipo de estudiantes en el conocimiento de la estructura multiplicativa.

Los errores pueden ser un punto de partida sobre los que apoyar nuestra actuación didáctica, no sólo para corregir los errores y completar una formación errónea, sino también para extender el conocimiento que tienen los estudiantes sobre aritmética e ir más allá de lo que lo hace el colectivo de estudiantes de su edad.

Cuando se analizan las producciones de los sujetos con talento hay que ser cautos a la hora de catalogar una respuesta como errónea. Los sujetos con talento son especialmente creativos a la hora de resolver problemas y suelen utilizar estrategias de solución poco usuales, que nos pueden hacer pensar en un principio que hay un error en la solución.

Bibliografía

- Assouline, S. G. & Lupkowski-Shoplik, A. (2005). *Developing math talent: A guide for educating gifted and advanced learners in math*. Waco, TX: Prufrock Press.
- Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems. Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434-449.
- Benavides, M. (2008). *Caracterizacion de sujetos con talento en resolucion de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Blanco, R., Ríos, C. G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago: Oreal-Unesco.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades, 11* (13), 4-22.
- Castro, E., Maz, A., Benavides, M. y Segovia. I. (2006). Talento matemático: diagnóstico e intervención. En M. D. Valadez, M. A. Zavala y J. Betancourt (Eds.), *Alumnos Superdotados y Talentosos. Identificación, Evaluación e Intervención. Una Perspectiva para Docentes.* (pp. 453-473). México, D.F.: Editorial El Manual Moderno.
- Castro, E., Rico, E. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Grahan, *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Vol. 1, (pp. 113-120). Durham, NH (USA): University of New Hampshire.
- Freeman, J. (1988). *Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos*. Bilbao: Santillana.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Gutiérrez, M. P. y Maz, A. (2004). Educación y diversidad. En M. Benavides, A. Maz., E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 15-24). Santiago (Chile): OREALC/UNESCO.
- Johnson, M. L. (1983). Identifying and teaching mathematically gifted elementary school students. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 25-26, 55-56.
- Lappan, G. (Sin fecha). 'Mathematics for all' must include high-ability and highly motivated students**.** Disponible en: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=1010. (06/08/2007)
- Machado, A. L. (2004). Presentación. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 9-13). Santiago (Chile): OREALC/UNESCO.
- Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: El autor.

- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: El autor.
- NCTM (1991). Professional Standards. Reston, VA: El autor.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.19-41). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Comps), Educación Matemática (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Ruiz, L. y Márquez, M. (2006). Estrategias de identificación e intervención para niños potencialmente sobresalientes. En M. D. Valadez, M. A. Zavala y J. Betancourt (Eds.), *Alumnos Superdotados y Talentosos. Identificación, Evaluación e Intervención. Una Perspectiva para Docentes* (pp. 213-245). México, DF: Editorial El Manual Moderno.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Addison Wesley Longman.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structure. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Florida: Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Sructures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Enrique Castro Martínez, Universidad de Granada, España.
Email: ecastro@ugr.es

Maryorie Benavides Simon, Universidad de Granada, España.

Isidoro Segovia Alex, Universidad de Granada, España.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 141 - 155
ISSN: 1815-0640

El concepto de función a través de la Historia

Sastre Vázquez, P.; Rey, G.; Boubée, C.

Resumen

Analizar los procesos históricos en el desarrollo de la Matemática permite conocer la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollan los métodos, las ideas, los conceptos y las teorías de esta ciencia. En este trabajo se realiza una revisión bibliográfica de los hechos más importantes en el desarrollo histórico del concepto de función. El objetivo es ofrecer una reseña histórica que pueda ser utilizada como una herramienta pedagógica, que al mostrar los caminos recorridos, permita buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto "función".

Introducción

La historia de la Matemática está llena de anécdotas y de problemas interesantes que pueden motivar el aprendizaje de los estudiantes y colaborar en el desarrollo de actitudes positivas, permitiendo un acercamiento a esta ciencia desde un punto de vista humano. Puede ser sumamente útil explorar los inicios de un concepto, las dificultades con las que tuvieron que enfrentarse los matemáticos y las ideas que surgieron al enfrentar situaciones nuevas.

El desarrollo de la Matemática como ciencia está marcado por los procesos dialécticos que se dan con las contradicciones en las cuales surgen y evolucionan los conceptos, leyes y procedimientos. En la enseñanza no se puede repetir el curso de la historia evolutiva de las ciencias; pero el carácter lógico que sigue la enseñanza también requiere reconocer, por ejemplo, que los sistemas de numeración son el resultado de un proceso continuo de actividad intelectual, que la Aritmética y la Geometría están vinculadas entre sí desde sus inicios, que la interpretación mecánica de ciertas relaciones aportaron muchas ideas que penetraron con fuerza en el pensamiento matemático de aquellos que se dedicaban a la actividad relacionada con la producción de conocimientos matemáticos y que fueron motivos de enfrentamientos y crisis en sus fundamentos.

Es decir, la Ciencia Matemática sigue un curso evolutivo que la práctica docente no puede seguir. Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje se ofrecen los resultados matemáticos bajo una fuerte sistematización de sus teorías y ello hace que el conocimiento tome formas de presentación graduada en el contenido que se explica, y coloca al profesor en la situación de plantear los conceptos, leyes y procedimientos, que conduzcan al alumno al desarrollo de sus capacidades intelectuales y de la concepción científica del mundo de manera dinámica y eficiente, cual si se revelara como un descubrimiento o una investigación.

Todo profesor de Matemática debiera tener un conocimiento aceptable de la historia de esta ciencia, no con el objetivo de organizar un curso con contenidos históricos, sino para poder utilizar, en el plano del acercamiento del objeto de estudio al alumno, las consideraciones más relevantes de su desarrollo y, sobre todo, para favorecer la comprensión de que esta ciencia evoluciona en el marco del desarrollo socio-cultural de la humanidad.

En resumen, la comprensión de una teoría matemática no puede ser completa si se desconocen sus orígenes. Ir a ellos y ver cómo esa teoría ha influido en el conocimiento son pilares fundamentales para el educador y para el investigador, porque constituyen una herramienta pedagógica de gran valor al mostrar los caminos recorridos por la ciencia, condición necesaria para poder buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades.

En esta revisión bibliográfica se realiza la exposición siguiendo el criterio de Youschkevitch, (1976) quien organiza la evolución del concepto de *función* distinguiendo tres períodos: Época Antigua, Edad Media y Período Moderno.

Época Antigua

Se conoce como "Matemática Antigua o prehelénica" a aquella que se desarrollaba en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India.

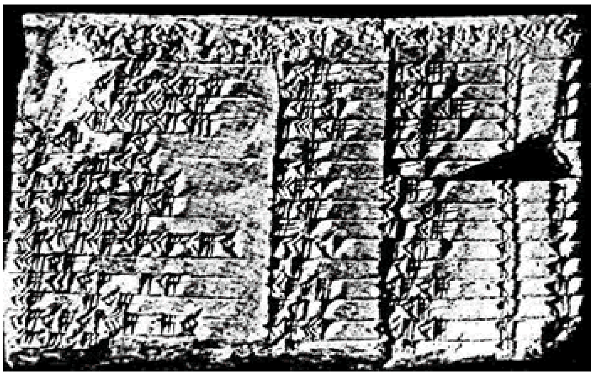
En la época antigua no existía una idea abstracta de variable, y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. Sin embargo, en este período, comienzan a desarrollarse algunas manifestaciones que implícitamente contienen la noción de *función*.

El conteo implica una correspondencia entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Ya los cavernícolas dejaron huellas de una actividad que pareciera ser la de contar. Por ejemplo, sobre restos óseos se han encontrado ciertas marcas sencillas que pudieron servir para llevar alguna cuenta. Puede decirse entonces, que la noción de *función* tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de *número*.

Las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables. En las tablas numéricas babilónicas (2000 a.C. – 500 a.C.) se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones, de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la de la suma de *n* términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos, o las que muestran la utilización de reglas de tres, simples y compuestas. Los babilonios tenían un manejo algebraico muy desarrollado, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables, y hasta el uso de la ley exponencial. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado, e incluso reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluidos, a las de segundo grado.

Si bien los babilonios no manejaban aún el concepto de *función*, la noción de este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, ya que éstas reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol.

Tablilla con motivos geométricos (DivulgaMat)



Tablilla Plimpton con las ternas pitagóricas(DivulgaMat)

Más tarde, (500 a.C. - 500 d.C.), durante la época de la cultura helénica, aparecen cambios en los contenidos que traen aparejados consigo un mayor estudio de la Geometría. Aparecen los llamados problemas “clásicos”, como por ejemplo: a) la cuadratura del círculo, al cual se dedicó Anaxágoras, y b) la duplicación del cubo, con Menecmo, (discípulo de Eudoxo), quien demostró que se trataba de un problema no plano (se consideraban planos a los problemas que se resolvían utilizando regla y compás), y que en realidad era un problema sólido, en cuya resolución intervenían las cónicas. Los esfuerzos para resolver estos problemas trajeron consigo la creación de diferentes curvas por parte de Apolonio, Arquímedes y Pappus, entre otros.

Los griegos trataron con problemas que tenían implícita la noción de *función*, pero no fueron capaces de reconocerla y, menos aún, de simbolizarla. Sin embargo, ellos calcularon áreas, volúmenes, longitudes y centros de gravedad y desarrollaron tablas de acordes y tablas de senos similares a las actuales. A principios del siglo II a.C., los astrónomos griegos adoptaron el sistema babilónico de almacenamiento de fracciones y, casi al mismo tiempo, compilaron tablas de cuerdas de un círculo. Para un círculo de radio determinado, estas tablas daban la longitud de las cuerdas en función del ángulo central correspondiente, que crecía con un determinado incremento. Eran similares a las modernas tablas del seno y coseno, y marcaron el comienzo de la Trigonometría. Pero todos estos desarrollos de los griegos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o mediante ejemplos. A modo de síntesis, puede decirse que estos estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, si bien no respondían explícitamente al concepto de *función*, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura helénica.

Edad Media

La Edad Media comienza con la caída de Roma en el año 476, y finaliza en el año 1453, con la caída de Constantinopla en manos turcas. Aunque pueda suponerse que en esta etapa, muchas veces caracterizada como de oscurecimiento de las ciencias, las Matemáticas se mantuvieron estáticas, esto no fue tan así. Durante este período, Europa estaba constituida por una colección de pueblos aislados y de poco nivel cultural, con la Iglesia Católica como albacea intelectual. En lo referente a lo cultural, no existía mucha relación con la mayor parte del pensamiento clásico griego, distancia que ya se había establecido desde el mismo Imperio Romano. Sin embargo, los árabes, además de recuperar un buen número de obras griegas, van a proporcionar a Occidente un gran tesoro que desarrollará de forma increíble la Aritmética, sentando, además, las bases de una nueva rama de las Matemáticas: el Álgebra.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así, la evolución de la noción de *función* se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban las fórmulas.

El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323 - 1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas. En su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, las funciones aparecen dibujadas por primera vez, trasladando al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los nombres, y llamó *longitud* y *latitud* a los antepasados de lo que hoy llamamos *abscisa* y *ordenada*.

Oresme asoció el cambio físico con figuras geométricas. El área completa representa la variación en cuestión, aunque sin hacer referencia a valores numéricos. (Kline, 1972). Este matemático consideraba que todo lo que varía se puede imaginar como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo. Así, en la representación gráfica del cambio de la velocidad a través del tiempo, utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo (longitud), y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en líneas verticales (latitud).

En la Figura 1 se observa la representación de una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O, a cero en B, quedando dibujado un triángulo. El rectángulo OBDC, determinado por E (punto medio de AB) tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo.

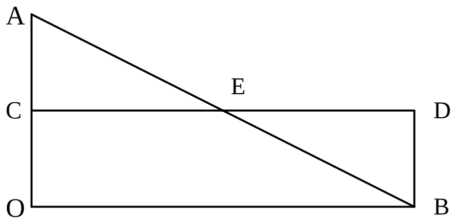


Figura 1

Si bien durante la Edad Media se lograron algunos resultados de interés en Matemáticas, puede decirse que éstos no fueron de una gran trascendencia. La situación cambió durante el Renacimiento bajo la acción de las importantes transformaciones sociales, culturales y políticas asociadas a este período.

Período Moderno

En los inicios de esta época, que comienza a finales del siglo XVI, las funciones fueron equivalentes a expresiones analíticas. Kleiner (1989), señala que desde 1450 a 1650 se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de *función*: 1) La extensión del concepto de *número* al de números reales, e incluso a números complejos (Bombelli, Stifel), 2) La creación del Álgebra simbólica (Vieta, Descartes), 3) El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo) y 4) La unión entre el Álgebra y la Geometría (Fermat, Descartes).

Hasta el siglo XVII el Álgebra estuvo subordinada a la Geometría, pero a partir de este momento el rol se invirtió y, con ello, se dio un cambio sustancial en la historia de las Matemáticas. La dependencia del Álgebra de la Geometría comenzó a invertirse cuando Vieta (1540 -1603), y luego Descartes, emplearon el Álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas. Vieta vislumbró la posibilidad de usar el Álgebra para tratar la igualdad y la proporción entre magnitudes, sin tener en cuenta de qué campo científico provenían los problemas, (Kline, 1972). Además, este matemático francés fue quien propuso el uso de letras para representar las variables.

Quien también contribuyó a la creación de la idea de *función* fue Galileo (1564 - 1642). Él introdujo lo numérico en las representaciones gráficas y expresó las leyes del movimiento, a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, dando un sentido de variación directa o indirectamente proporcional, lenguaje que junto con la teoría de la época encubrió aspectos de la variación continua. En su obra se encuentran numerosas expresiones de relaciones funcionales. Con palabras, y en el lenguaje de las proporciones, muestra claramente que está tratando con variables y funciones.

Con la llegada de la obra de Descartes, (1596 - 1650) se produce un enorme avance. Descartes buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al Álgebra por medio de la Geometría. Fue revolucionario al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Recordemos que en la Antigüedad, para que una curva existiera, era necesario que hubiera un procedimiento con regla y compás para poder construirla.

Así es que Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica. Él quería reducir la solución de todos los problemas algebraicos y de ecuaciones, a un procedimiento estándar que le permitiera encontrar las raíces. Este matemático fue el primero en poner en claro que una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable.

Descartes rechaza la idea de que solo son legítimas las curvas factibles de ser construidas con regla y compás, y propone nuevas curvas generadas por construcciones mecánicas. Clasifica las curvas en “mecánicas” y “geométricas”. Establece que las curvas “geométricas” son aquellas que pueden expresarse mediante una única ecuación algebraica, de grado mixto, en *x* e *y*, con lo que acepta la concoide y la cisoide, mientras que llama “mecánicas” a todas las demás curvas, como la espiral y la cuadratriz.

La ampliación del concepto de “curvas admisibles” significó un paso importante que permitió incorporar curvas antes rechazadas, y además, permitió ensanchar su dominio, ya que dada cualquier ecuación algebraica en *x* e *y* podía obtenerse una curva y así generar nuevas curvas. (Kline, 1972).

Además mostró, en sus trabajos de Geometría, que tenía una idea muy clara de los conceptos de *variable* y *función*, realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados y reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan.

La distinción de Descartes entre curvas “geométricas” y “mecánicas”, dio lugar a que Gregory (1638 - 1675) realizara la distinción entre funciones “algebraicas” y “trascendentes”. En 1667, este matemático dio la definición más explícita del siglo XVII, definiendo una función como:

> *“una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable”*

Con la última expresión quiso mostrar la necesidad de añadir, a las cinco operaciones del Álgebra, una sexta operación que él definió como el paso al límite. (Kline, 1972).

No puede dejar de mencionarse que Fermat (1601 - 1665) aplicó el análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos y presentó en un estilo moderno, con las notaciones de Vieta, los principios fundamentales de la Geometría Analítica. A pesar de que Fermat escribió sobre estos temas antes que Descartes publicara sus trabajos, su obra fue publicada de manera póstuma y posterior a la de Descartes.

La Geometría Analítica fue decisiva para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, que constituyó una auténtica revolución en el pensamiento matemático. La aparición del Cálculo, significa hacer referencia a Newton y a Leibniz, a la creación de una de las herramientas matemáticas más potentes y al nacimiento de un nuevo paradigma científico: la Naturaleza puede ser explicada a partir de ecuaciones diferenciales. Esto conlleva a la consideración continua y dinámica de las relaciones funcionales, en contra de la consideración discreta y estática imperante hasta el momento.

Se introducen las variables y se comienzan a utilizar expresiones de relaciones entre variables por medio de ecuaciones. Surgen así muchos ejemplos de funciones, aunque aún no se distinguen las variables dependiente e independiente en una ecuación.

Es de hacer notar que los objetos de estudio del Cálculo desarrollado por Newton y Leibniz no fueron las funciones, sino las curvas. Se intentaban solucionar problemas referidos a longitudes, áreas y tangentes relacionadas a curvas, como así también encontrar la velocidad de puntos moviéndose a través de curvas.

Leibniz (1646 - 1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra *función* en 1692, (Struik, 1969). Usó esta palabra para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que *"una tangente es una función de una curva"* (Iacobacci, 1965). También introdujo las palabras: *constante*, *variable*, *coordenadas* y *parámetro* en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. Clasificó a las curvas en: "algebraicas", las representadas por una ecuación de cierto grado y "transcendentes", las representadas por una ecuación de grado infinito o indefinido. Es de hacer notar que Leibniz no utilizaba el concepto de *función* como lo entendemos en la actualidad ya que, para él, una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.

En 1665, Newton utilizó la palabra *fluent* para representar cualquier relación entre variables. Además introdujo la noción de *diferencial,* designada por la palabra *momento,* el cual es producido por una cantidad variable llamada *genita*, en una aproximación al concepto de *función*.

Newton y Leibniz contribuyeron decisivamente al desarrollo del concepto de *función*, introduciendo el desarrollo de función en una serie de potencias. En esta época la idea de *función* era muy restringida, pues se reducía a funciones analíticas, abarcando inicialmente las que se podían expresar mediante una ecuación algebraica y poco después, las desarrollables en serie de potencias.

En el siglo siguiente, XVIII, aparece uno de los matemáticos más prolíficos de la historia: Euler, quien había sido precedido por una familia de matemáticos suizos realmente sorprendente: los Bernoulli (Johann y Jacob). El concepto de *variable*, aplicada a objetos geométricos se sustituye por el concepto de función como una fórmula algebraica. El estudio se desarrolla alrededor de la representación, en particular en serie de potencias de las funciones.

Euler (1707 - 1783) continúa el camino para precisar la noción de *función* comenzando a definir nociones iniciales como son: *constante* y *cantidad variable* y, en 1755, define *función* como una expresión analítica:

> *"la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes". (Ruthing, 1984)*

Si bien Euler no define qué es una *"expresión analítica",* la que fue definida formalmente recién en el siglo XIX, explica que las expresiones analíticas admisibles son las que contienen las cuatro operaciones elementales, raíces, exponentes, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas e integrales. Clasifica a las funciones en: 1) "algebraicas y trascendentes", 2) "univariadas y multivariadas" y 3) "implícitas y explícitas".

Euler se enfrenta al problema de que si a toda función le corresponde una curva, también toda línea curva debería representarse por una función. Así admite como funciones a las llamadas *curvas mecánicas*. Al ampliar el concepto de *función* distingue dos clases: las "continuas" y las "discontinuas".

El significado de estos dos términos era distinto al significado actual. Para Euler, una función "continua" es aquella que está representada por una sola ecuación, aún cuando su dibujo conste de más de un trazo, como el caso de la hipérbola. Las "discontinuas", por su parte, son las *curvas mecánicas.* Es decir, son aquellas para las que no hay una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido.

Resumiendo, durante este período aparecieron nuevas funciones (las "trascendentes") que ayudaron a resolver problemas relacionados con la Física (cicloide, catenaria, lemniscata, etc). Euler lleva más allá la idea de *función*, considerando como ente matemático lo que hasta ese momento era considerado como una herramienta para resolver problemas, generalmente relacionados con la Física. Abre así la posibilidad de estudiar las funciones como objetos matemáticos.

El concepto de *función* evolucionó, enriqueciéndose y cambiando su significado a partir de la controversia iniciada entre Dalambert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. Dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma de alguna manera inicial y se la suelta para que vibre. El problema consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante.

La discusión entre Dalambert (1717 - 1783), y Euler y D. Bernoulli (1700 -1782) se centró alrededor del significado de la palabra *función* y versó sobre las funciones que solucionaban este problema, sosteniendo los dos últimos autores que se debían buscar soluciones más generales.

Para entender mejor esta controversia se debe tener en cuenta que durante el siglo XVIII los matemáticos aceptaban por "artículo de fe", es decir sin demostración y sin duda alguna, que:

> *"si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes"*

En 1747, Dalambert propone una solución para el problema de la cuerda vibrante. Al año siguiente Euler publica un artículo sobre el mismo problema, coincidiendo con la solución dada por Dalambert, pero discrepando en su interpretación, ya que él consideraba que esa solución no era la "más general". En 1753, Bernoulli, propone una nueva solución al problema de la cuerda vibrante. Tanto Euler como Dalambert, rechazaron esta solución, basando sus argumentos en el "artículo de fe" de la época. Ellos señalaron que dado que *f(x)* y la serie coincidían en un intervalo, éstas debían coincidir en todos lados, concluyendo que la solución de Bernoulli conducía al absurdo de una función *f(x)* que es par y periódica. (Kleiner, 1989).

Si bien, a primera vista pareciera que las soluciones de Euler y Dalambert, para el problema de cuerda vibrante, eran iguales, si se tiene en cuenta el hecho que ellos usaban palabras iguales para referirse a objetos diferentes, es claro que ambas soluciones no son idénticas. Tanto Euler como Dalambert aceptaban que si dos expresiones analíticas toman los mismos valores en todos los puntos de un intervalo, deben ser idénticas. También coincidían en que la palabra "ecuación" significaba igualdad de dos expresiones analíticas, aunque sin entrar a discutir qué constituye una expresión analítica. Sin embargo, su concepto de *función* era diferente: Dalambert entendía por ello cualquier expresión analítica, mientras que Euler entendía que se trataba de cualquier curva dibujada libremente a mano.

El mayor efecto que produjo el debate sobre el problema de la cuerda vibrante fue la extensión del concepto de *función* para permitir en él la inclusión de: 1) Funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y 2) Funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica

A partir de 1720, y hasta 1820, comenzó a desarrollarse en el seno del campo de la Matemática una nueva disciplina cuyo objeto de estudio fueron las funciones: el Análisis. Antes de esto las funciones fueron mayoritariamente definidas y aplicadas en el Cálculo. Entonces se discutía si las funciones debían ser representadas geométricamente (en la forma de una curva), analíticamente (en la forma de una fórmula), o lógicamente (en la forma de una definición).

Fourier (1768 - 1830), estudiando el flujo de calor en cuerpos materiales, contribuyó a la evolución del concepto de *función* al considerar la temperatura como función de dos variables: tiempo y espacio. Conjeturó, pero no probó matemáticamente, que era posible desarrollar una función dada en un intervalo apropiado mediante una serie trigonométrica.

Todos estos desarrollos rompieron el "artículo de fe" imperante en el siglo XVIII, dejando en claro que dos funciones dadas por diferentes expresiones analíticas pueden coincidir en un intervalo y ser diferentes fuera del mismo. Fourier puso las representaciones de funciones por medio de expresiones analíticas (algebraicas) al mismo nivel que las representaciones geométricas (curvas).

Los trabajos de Fourier obligaron a reexaminar el concepto de *integral* y fueron el punto de partida que condujo a Cantor a la creación de su Teoría de Conjuntos.

Además, a partir de estos trabajos se renovó el énfasis en las expresiones analíticas, lo cual condujo a una revisión del concepto de *función*. (Edwards, 1982; Langer 1947).

Los matemáticos desde Euler hasta Cauchy, pasando por Fourier, parecían estar de acuerdo con la naturaleza "arbitraria" de las funciones, pero en la práctica ellos pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas. Dirichlet fue el primero en considerar la noción de *función* como una "correspondencia arbitraria". Y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función.

No puede dejar de mencionarse que Fourier utilizaba en sus trabajos unos razonamientos matemáticos que serían claramente inaceptables en nuestra época. Fue Dirichlet (1805 - 1859), quien se dedicó a la tarea de convertir el trabajo de Fourier en un trabajo matemáticamente aceptable, encontrando que el resultado de Fourier, que afirmaba que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso. En 1829 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que tal representación sea posible y definió *función* de la siguiente forma:

> *"y es una función de la variable x, definida en el intervalo a<x<b, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia."*

Como ya se ha dicho, hasta ese momento, las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, y es Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una "correspondencia". Presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica o curva que la represente. Es el primer ejemplo que ilustra el concepto de *función* como una correspondencia arbitraria y también es ejemplo de una función que es discontinua en todas partes, en el sentido actual, no en el de Euler. A partir de los trabajos de este matemático, el concepto de *función* adquiere un significado independiente del concepto de *expresión analítica*, (Bottazzini, 1986; Grattan-Guinness, 1970; Youschkevitch,1976).

La función presentada por Dirichlet es una función de variable real que no es continua en ningún punto de la recta y se define en el intervalo [0,1] de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 0, \text{ si } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

La función vale la unidad para todo punto de [0,1] irracional, y cero para todo punto racional del mismo intervalo. Por lo tanto, la función está definida para todo punto de [0,1]. La representación gráfica de esta función es un poco difícil: entre dos puntos racionales cualesquiera de [0,1] hay infinitos puntos irracionales, y la recíproca también es cierta, así es que la gráfica de la función consta de una nube lineal de puntos de ordenada unidad y otra nube lineal de puntos de ordenada nula.

Los trabajos Dirichlet sugirieron que el nuevo camino era la completa separación de los conceptos de *función* y de su *representación analítica*. En 1872, Weierstrass construyó un ejemplo de una función continua que no es derivable en ningún punto de su dominio, demostrando que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados. (Ver Fig. 2)

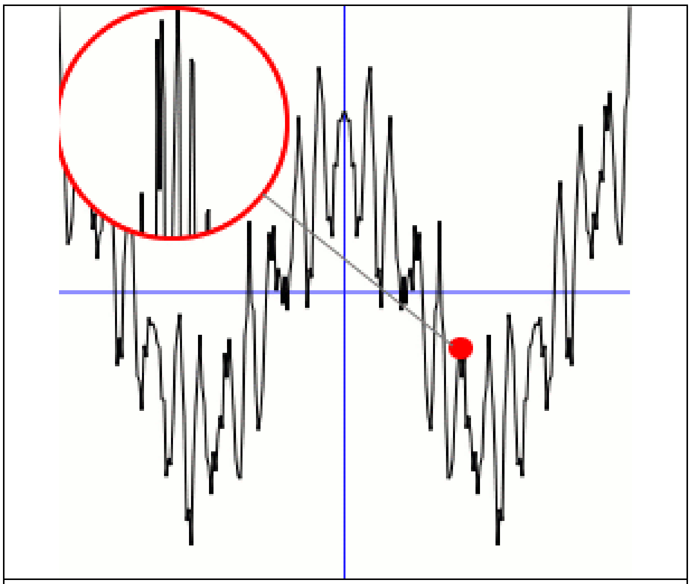


Fig.2 :Función de Weierstrass en el intervalo [−2, 2].
La función tiene un comportamiento fractal.(Wikipedia®)

Durante algún tiempo, las definiciones de *función* dadas por Dirichlet y Weierstrass, fueron totalmente aceptadas por la comunidad matemática. Sin embargo, recientemente se hizo claro que no todos los matemáticos estaban completamente de acuerdo respecto del valor y el sentido de estas definiciones: algunos señalaron que la definición de Weierstrass es excesivamente restrictiva; otros la encontraron perfecta; otros, demasiado general, y aún otros, carente de significado.

La Teoría de Conjuntos iniciada por Cantor (1845 - 1918) produce una nueva evolución del concepto de *función*, extendiéndose la noción para incluir:

> *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjuntos numéricos o no numéricos"*

La evolución continuó: desde el concepto de *correspondencia*, los matemáticos pasaron al concepto de *relación*. Desde 1900 hasta 1920 se introdujeron conceptos como: *espacio métrico*, *espacio topológico*, *espacio de Hilbert* y *espacio de Banach*. Estos desarrollos condujeron a nuevas definiciones de *función* basadas en conjuntos arbitrarios que ya no son los números reales. Caratherdory (1917) define función como:

> *"una regla de correspondencia desde un conjunto A en los números reales" (Malik, 1980)*

A medida que avanza el nivel de la Matemática, haciéndose más abstracta, ocurre lo mismo con la definición de *función*. Los desarrollos en el campo del Álgebra abstracta y de la Topología dan lugar al surgimiento de nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki, en 1939, definió *función* como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Monna, 1972; Youschkevitch, 1976):

> *Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función.*

Bourbaki también formuló una definición de *función equivalente*, como un conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989). En sus palabras:

> *"una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF"*

La forma de ver una función por Bourbaki difiere del punto de vista de Dirichlet en que el dominio y el codominio no están restringidos al conjunto de números reales. En la definición de Dirichlet el dominio de la función es un intervalo finito de números reales y el codominio está formado por números reales.

Conclusiones

Durante alrededor de 3700 años se trabajó con objetos matemáticos que solo llevaban implícitos el concepto de *función*. Pero fueron necesarios 300 años para la formación y desarrollo del concepto como tal, el que inicialmente surgió en relación con problemas del Cálculo y del Análisis.

A lo largo de la historia, los conocimientos matemáticos relativos a las "funciones" se han ido construyendo, bien sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y de cada época.

La conceptualización de función aceptada actualmente, desde un punto de vista didáctico, admite representaciones en diferentes registros, cada uno con diversos alcances y limitaciones, cuyos antecedentes y significaciones pueden rastrearse a lo largo de la Historia.

Así, en el inicio de la génesis del concepto, la construcción de las tablas babilónicas puede asimilarse a lo que actualmente es la representación a través de tablas de valores. Del mismo modo, el trabajo con curvas desarrollado por los griegos puede ser interpretado como las primeras representaciones gráficas de las funciones.

Posteriormente, con la aparición de la Geometría Analítica se introducen las variables, y las relaciones entre ellas se expresan por medio de ecuaciones, aunque sin distinguir las variables dependientes de las independientes. Con la llegada del Cálculo los estudios continúan alrededor de las representaciones geométricas, aunque ya se vislumbra el inicio de las representaciones analíticas. En los comienzos de lo que luego sería el Análisis, el concepto de función pasa de ser concebido como expresión analítica (fórmula arbitraria) a ser entendido como curva.

Al constituirse el Análisis Matemático en la ciencia general de las variables y sus funciones, se define una función como una expresión analítica y toda la propuesta es algebraica. Pero luego, con los trabajos de Fourier, dichas representaciones algebraicas se colocan a igual nivel que las representaciones geométricas. Posteriormente, las funciones se independizan de las expresiones analíticas: la nueva definición considera que una función es una correspondencia arbitraria.

El siguiente cuadro resume la evolución de las definiciones de “función” de los últimos tres siglos.

Época	Definición
Siglo XVII	Cualquier relación entre variables
	Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra operación imaginable
	Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva
	Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y constantes
Siglo XVIII	Cantidades que dependen de una variable
	Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma por variables y constantes
	Cualquier expresión útil para calcular
Siglo IX	Correspondencia entre variables
	Correspondencia entre un conjunto A y los números reales
	Correspondencia entre dos conjuntos

Adaptación a partir de Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept. Seoul Apt. 2-1002, Yeoeuido-dong, Yeongdeungpo-gu, Seoul 150-010, Korea; Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education Vol. 3, No. 1, May 1999, 35–56

Conocer la génesis de los principales contenidos escolares puede convertirse en una importante herramienta didáctica que los docentes pueden utilizar creativamente en la búsqueda de aprendizajes cada vez más significativos.

Cada docente es constructor de su propia metodología de enseñanza, y al diseñar toda situación didáctica pone en juego una determinada concepción de la ciencia en general y de la Matemática, en particular. Enseñar y aprender un contenido matemático es también, inevitablemente, enseñar y aprender una concepción de la ciencia Matemática. En este marco, resulta relevante considerar el devenir histórico de los conocimientos para promover una conceptualización de la Matemática como una ciencia en construcción permanente, dedicada a la elaboración de conocimientos como recursos para resolver problemas, al desarrollo de procesos dirigidos a demostrar la validez de esos conocimientos y a la comunicación de los saberes producidos…, una Matemática que es producto de construcciones socio-históricas y, por tanto, resultante de interacciones sociales…, una Matemática que no es eterna ni inmutable.

Bibliografía

- F. Capra (1994): “A teia da vida”. 9. ed. Cultrix, São Paulo.
- U. Bottazzini (1986): “The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass”, Springer-Verlag.
- C. H. Edwards (1979) The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag.
- Grattan-Guinness (1970):”The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann”, M.I.T Press.
- R. F. Iacobacci,(1965): “Augustin-Louis Cauchy and the Development of Mathematical Analysis”, Ph.D. Dissertation, New York Univ (University Microfilms, no. 65- 7298, 1986.)
- I. Kleiner, (1989): “Evolution of the function Concept: A Brief Survey”. The college Mathematics Journal, Published by: Mathematical Association of America September 1989, Vol. 20, Number 44,pp. 282-300.
- M. Kline, (1972): “Mathematical Thought from Ancient to Modern Times”. Oxford Univ.Press.
- R. E. Langer, (1947): “Fourier Series: The Genesis and Evolution of a Theory,” The First Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper, Math. Assoc. of America, 1947. (Suppl. to v. 54 of the Amer. Math. Monthly, pp. 1-86).
- Malik, M.A. (1980): “Historical and pedagogical aspects of the definition of function”. Int. Journal of mathematics education in science and technology , 11(4),489 –92
- F. Monna, (1972/3): “The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussion Between Baire, Borel, and Lebesgue,” Arch. Hist.Ex. Sci. 9 (1972/73) 57–84.
- D. Rüthing (1984): “Some Definitions of the Concept of Function from John. Bernoulli to N. Bourbaki,” Math. Intelligencer 6:4 (1984) 72–77.
- A. P. Youschkevitch (1976): “The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century,” Arch. History Exact. Sci. 16 (1)(1976/77) 37–85.

Patricia Sastre Vázquez, nacida en Capital Federal, Argentina, el 5 de julio de 1951. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Area de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Tecnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Email: psastre@gfaa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.ar

Graciela Rey, nacida en Azul, Argentina, el 7 de agosto de 1961. Ingeniero Agrónomo por la Facultad de Agronomía Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA) Argentina. Diplomatura Superior en Ciencias Sociales con Mención en Constructivismo y Educación. FLACSO (Argentina). Post Título de Formación Docente con Especialización en EGB 3 y Polimodal. Instituto Superior de Formación Docente Nº 22 de Olavarría, (Argentina). Técnico en Saneamiento Ambiental. Escuela Superior de Sanidad Subsede Azul. (Argentina). Se encuentra realizando la Especialización en Constructivismo y Educación, FLASCO (Argentina). Jefe de Trabajos Pácticos del Area Fisico/Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Es Integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía, en Revistas Nacionales. Email: grey@faa.unicen.edu.ar

Carolina Boubée, nacida en Azul, Argentina, el 22 de abril de 1974. Profesora de Matemática, Física y Cosmografía, por Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 156 "Palmiro Bogliano". Azul, (Argentina) y Licenciada en Educación. Orientación: Enseñanza de la Matemática por la Universidad Nacional de Quilmes, (Argentina). Se encuentra cursando estudios en la Especialización / Maestría en Docencia Universitaria. Facultad de Humanidades. Universidad Nacional de Mar del Plata, (Argentina). Es Profesora de: "Historia de la Matemática", "Perspectiva Pedagógico Didáctica II (Didáctica Especial)" y "Educación, Ciencia y Tecnología"del Instituto Superior de Formación Docente, Azul (Argentina). Ayudante graduado del Area Fisico/Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Es integrante del Proyecto: "La enseñanza de la Matemática en una Facultad de Agronomía: Una perspectiva desde la Teoría de los Obstáculos Epistemológicos". Secretaria de Ciencia y Tecnica de la UNCPBA. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionada con la Agronomía, en Revistas Nacionales e Internacionales. Email:cboubee@faa.unicen.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 157 - 168
ISSN: 1815-0640

Vivencias, intuiciones y emociones matemáticas

Pedro Buendía Abril

Resumen

La matemática es parte de tu forma de pensar y de ser. Nuestro pensamiento tiene que revolotear libremente como una mariposa en el jardín de los números y en el paisaje de las formas. En "Mete el lápiz y saca el metro" se propone construir el edifico de la medida. En "El uno, el todo y la parte" pensamos el uno en la vida y hacemos operaciones con las manos utilizando objetos sobre plantilla de cartulina... Y en "El paisaje de las formas" formamos un rectángulo humano, buscamos las esencias del cálculo de superficie y del volumen, y redescubrimos las fórmulas de áreas y volúmenes con experiencias sencillas.

Abstract

Maths is a way of thinking and being. Our thought has to fly freely like a butterfly in the garden of the numbers and in the landscape of the geometric. "Hide the pencil and take out the tape measure". It tries to build the building of the measure. "In the number one, in the everything and in the part". We link the number one to life and we make sums with the hands using objects in cardboard template... And in the landscape of the geometric we make a human rectangle. We look for the most important thing of the surface and volume calculation. And we rediscover the formulae of areas and volumes with simple experiences.

Introducción

¿Qué es Matemática? Matemática eres tú, la matemática es parte de tu forma de pensar y de ser. Todos llevamos un matemático dentro que crece y crece, cuando encuentra un ambiente propicio donde no se enjaule el pensamiento entre barrotes de fórmulas sin alma. Nuestro pensamiento tiene que revolotear libremente como una mariposa en el jardín de los números y en el paisaje de las formas.

Para practicar esta metodología de trabajo en la educación matemática tenemos que vivir intuiciones y emociones en un Taller Matemático, en el que disfrutaremos de experiencias que enlacen "las matemáticas de las manos" con "las matemáticas de la mente".

La propuesta de trabajo para el Taller viene en forma de carta matemática:

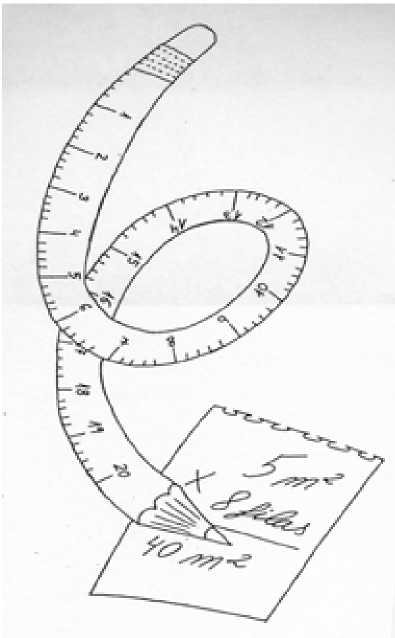
Queridos/as amigos/as:

Alrededor de mi cabeza gira una nubecilla de palabras: conciencia, natural, esencia, sencillez, intuición, emoción, pasión, alegría, fiesta, creatividad, valores, animación…
Entiendo que el triángulo Matemáticas-Creatividad-Educación en Valores es un todo integrado en torno a la Animación, capaz de estimular en los aprendices la conciencia de su ser matemático, favorecer sus procesos de inteligencia creadora y mejorar sus relaciones con el mundo y con los seres que lo habitan.
De esta manera contribuiremos a desarrollar la competencia de la alfabetización matemática enamorando cada vez a más y más aprendices de este saber.
Y quiero que sintamos juntos la emoción de la aventura por los paisajes del Universo Matemático, animando a los estudiantes, en un ambiente festivo de alegría y bullicio, al experimentar con las medidas, los números y las formas.
Un fuerte abrazo y números cordiales.

A continuación se proponen unos guiones de trabajo con algunas experiencias a modo de orientación, que se podrán adaptar a distintos niveles educativos, unas en educación primaria de seis a once años, y otras en educación secundaria de doce a dieciséis años, o bien en educación de adultos, en búsqueda permanente de nuevas vivencias matemáticas, en torno a medidas, números y formas.

Medidas: "Mete el lápiz y saca el metro"

Vamos a construir el edificio de la medida. La expresión "Mete el lápiz y saca el metro", el lápiz, un símbolo de "aprendizaje más teórico", y el metro, un símbolo de "aprendizaje más práctico", quiere llamar la atención sobre lo importante que es empezar haciendo experiencias reales tomando medidas en primer lugar, para no hacer cuentas en el vacío. Las siguientes experiencias nos pueden ayudar a practicar una metodología capaz de favorecer el aprendizaje por descubrimiento.



1. **Hacemos un metro decímetro a decímetro con cañitas de refrescos.**

Metemos sobre un hilo de metro diez cañitas de refresco de un decímetro, de una en una, combinando dos colores diferentes. Tomamos medidas en el entorno y en nuestro cuerpo. Podemos crear figuras geométricas planas, y también en volumen. Y hasta nos puede servir de modelo para ver la intersección de planos…

2. **Construimos el "Edificio de la medida":**

- **La primera piedra: el metro.** Lo situamos sobre el suelo.
- **El solar de metro cuadrado.** Desplegamos un cuadrado de papel de un metro de largo y un metro de ancho para cubrir el solar de metro. Lo ideal es que el cuadrado de papel esté cuadriculado en trozos de decímetro cuadrado. Así vemos que el solar de metro está compuesto de diez filas con diez decímetros cuadrados en cada una.
- **La casa de metro. El cajón de metro. El metro cúbico humano.** Levantamos un metro sobre el suelo, bien con varillas de plástico o madera, o bien desenrollando verticalmente cada uno de los cuatro metros que colocamos previamente sobre cada una de las esquinas del solar. Acabamos de delimitar un espacio de metro cúbico. Podría ser una casita o un cajón, por ejemplo. Para seguir conociendo el espacio también podemos formar un metro cúbico humano, entre cuatro personas, sentadas unas frente a otras sobre cuatro sillas, y extendiendo sus brazos para abrazar el metro cúbico al mismo tiempo que se abrazan entre sí, y respiran el aire de su interior.
- **La caja de litro.** Es más grande de lo que parece. Si colocamos una botella de vidrio de un litro llena de agua, junto a una caja de cartulina de un decímetro cúbico, nos da la sensación de que se van a llenar unas dos cajas. La manera de salir de dudas es comprobar si el agua entra de verdad en la caja. La impermeabilizamos con una bolsa de plástico, y nos admiramos al ver ¡cómo se produce el milagro y el litro entra increíblemente en su caja como no podía ser de otra manera! Ahora la situamos sobre uno de los cuadrados de decímetro de lado del solar de metro; y por comparación, de un simple vistazo, percibimos que entran mil cajas de litro en el cajón de metro. Si le ponemos nueve tabiques de cartulina conseguimos dividir la caja en 10 decilitros. El café o la manzanilla por ejemplo la tomamos en vasitos de decilitro. Si partimos cada uno de estos apartados en 10 tubos ya tenemos el centilitro, que coincide con el contenido de una cucharada sopera, por ejemplo. Cada uno de estos tubos, a su vez, lo podemos rellenar con 10 cajitas de centímetro cúbico, o mililitro.
- **La cajita de garbancito, también llamada centímetro cúbico y mililitro.** Con papel milimetrado es muy fácil montar una cajita de centímetro cúbico, llamada así por sus medidas, un centímetro de larga por un centímetro de ancha y por un centímetro de alta. Colocando esta cajita junto a la caja de litro adivinamos fácilmente que entran mil cajas, por eso se llama mililitro, porque hacen falta mil cajitas para rellenar la caja de litro. Y también podemos practicar una sencilla experiencia que consiste en introducir un garbanzo dentro de esta caja, comprobando que encaja perfectamente, y seguramente le ayudará a la mente a tener una buena referencia a la hora de recordar esta

medida. Si le sacamos el garbanzo y la llenamos con agua destilada fresca a cuatro grados de temperatura, podemos hacer otra sencilla experiencia que consiste en vaciarla en la palma de la mano ¡para notar el frescor de un gramo de agua!

3. **Ahora continuamos con dos pruebas pasadas por agua:**

- **¿Flotará o se hundirá?** La experiencia consiste en sopesar un paquete de 500 hojas DIN A4, y emitir un juicio de si flotará o se hundirá, según la sensación que nos dé al tacto. Después hay que comprobar lo que ocurre realmente echando el paquete plastificado, para que no se estropeen las hojas, en un recipiente con agua. Una buena explotación didáctica de esta situación consiste en hacer cálculos con los datos que hay en el letrero del paquete de hojas buscando una explicación de lo observado en función de la comparación de las densidades del agua y el papel.
- **Números bajo la lluvia.** Esta experiencia es mejor hacerla si realmente está lloviendo. Supongamos que llueve aproximadamente con una intensidad entre fuerte y moderada. Si mostramos un bote sin tapadera de unos diez centímetros de alto y preguntamos ¿cuánto tiempo tardará más o menos en llenarse si lo ponemos bajo la lluvia?, las respuestas por tanteo suelen ser generalmente: cinco minutos, un minuto, diez minutos, media hora, dos minutos… Nos espera una gran sorpresa cuando pongamos el bote bajo la lluvia y comprobemos que no se llena tan rápido como esperábamos. Ahí es donde empieza la situación a ponerse interesante, es justo el momento adecuado para buscar explicaciones matemáticas al "extraño fenómeno del bote que no se quiere llenar tan rápido como suponíamos", es el momento idóneo para "escurrirle números al agua".

Números: "El uno, el todo y la parte"

El uno, la primera piedra de este edificio, el rey de los números, parece la foto del dedo índice, que ha levantado un niño para decir que tiene un añito. Los dedos de las manos son la herramienta más cercana que tenemos para calcular. Las experiencias de manipular objetos de nuestro entorno, botellas y vasos con agua, platos con almendras…, nos van a permitir juntar, separar, repetir y repartir números. Doblando una simple hoja de papel estamos tocando el todo y la parte de los números fraccionarios. Dichas experiencias están situadas en los primeros peldaños de una escalera que sigue con la representación en dibujos, esquemas y modelos, y con el paso de los años llega al rellano de la abstracción de los números.

1. **Pensando el uno en la vida**. La lección de los números podría empezar pensando el uno en la vida y diciendo o cantando: un niño, una niña, un sol, una luna, una alfombra, un caramelo, un gato, un pájaro, una paloma de la paz, una sonrisa, un recreo, un bocadillo, un vaso de agua, un lápiz, un libro, una canción, un sueño…

2. **Asociamos los números a las cosas del entorno.** El nacimiento de los números en la mente de un aprendiz está ligado a su mundo: 1 nariz, 2 ojos, 2 manos, 5 dedos en cada mano, 4 personas de familia, 4 patas de la mesa, 6 sillas, 7 flores en la maceta, 3 tazos… Pensar en "unos compactos", irrompibles, como una bicicleta o una persona, y "unos frágiles", que se pueden fraccionar como un queso o una naranja, ayuda a reforzar el cimiento del edificio de los números.

3. **Practicar "el sano deporte del cálculo mental".** El tanteo es una herramienta muy poderosa que tiene la mente para decir "este resultado no puede ser, es un verdadero disparate", o bien "estoy de acuerdo, pues más o menos debe dar eso". Pienso que es muy conveniente utilizar la calculadora en combinación con el cálculo mental.

4. **Expresión plástica del número 111**. El "1" verdadero y el "1" más mentiroso cuanto más a la izquierda está situado. Podemos utilizar diversos materiales: cromos, canutillos de refrescos, almendras... Si hacemos la experiencia con almendras, debemos preparar once platos pequeños con diez almendras en cada uno y dejaremos una almendra suelta. Colocaremos esta almendra que se corresponde con el 1 verdadero, a su izquierda un plato con diez almendras, que se corresponde con un 1 que ya nos engaña porque no es una almendra sino un plato con diez almendras, y más a la izquierda un cubo lleno con diez platos de diez almendras en cada uno, que se corresponde con otro 1 que nos miente 100 veces… Esta experiencia ayuda a ver muy claro desde el principio el valor posicional de los números en base diez.

5. **Hacemos "sumas" y "restas", con las manos, tocando almendras sueltas (unidades) y platos con almendras (decenas), sobre plantilla de cartulina.** *"...Ninguna instrucción sobre las reglas de aritmética puede ser realmente valiosa a menos que se haya revelado el proceso a los estudiantes a través de numerosos ejemplos concretos"* (pág. 222 de Didáctica de Matemáticas de A. Orton). Si juntamos por ejemplo 28 almendras (2 platos a la izquierda y 3 almendras sueltas a la derecha), con 15 almendras (1 plato y 5 almendras sueltas), todo esto colocado sobre dos filas en la plantilla de cartulina, vemos claramente que al juntar las almendras sueltas de la derecha, 8 y 5 llenan 1 plato y sobran 3 almendras, y que ese plato lo juntamos con los otros 3 y tenemos 4 platos llenos. Así podemos entender el verdadero significado del algoritmo: "8 y 5 son 13, anoto 3 y me llevo 1 (un plato lleno con una decena)", que lo junto con los otros 3 platos. Ahora vamos a usar este modelo para la resta. Para quitar por ejemplo 4 almendras sobre un total de 23 almendras, lo podemos hacer mentalmente para empezar y ya sabemos que son 19. Si lo queremos calcular con el modelo, tenemos que replegar la cartulina a una sola fila y así tomamos conciencia del significado de una resta, que es la existencia

de una sola cantidad, de la que tenemos que quitar algo. Al intentar quitar 4 almendras sufrimos la sensación de que no podemos hacerlo, como mucho podemos quitar 3 almendras. Y vemos claro que una posibilidad es vaciar un plato, así ya tenemos 13 almendras en la parte derecha de la plantilla, de donde podemos coger tranquilamente 4 y nos quedan 9. A la izquierda de la plantilla nos queda un plato, por tanto nos quedan 19 almendras. Acabamos de conectar con el significado del algoritmo.

6. **Rellenamos con almendras las tablas de multiplicar. La esencia de las veces de las cosas.** Un modelo de tabla de cartulina de 10 por 10 cuadrículas (de 2,5 cm por 2,5 cm cada cuadrícula), nos sirve para construir todas las tablas de multiplicar rellenándolas por ejemplo con almendras o bien con piedrecitas, y así entrar en el significado de una multiplicación, descubriendo que la esencia está en ir completando filas.

7. **Hacemos divisiones con las manos, repartiendo platos de almendras.** Si repartimos por ejemplo 57 almendras (5 platos de 10 almendras y 7 almendras sueltas) entre dos personas podemos ver claramente que le tocan en principio 2 platos a cada una. Pero es ahora cuando surge el problema puesto que queda un solo plato. Se resuelve vaciando el plato, y así conseguimos tener 17 almendras, que repartimos entre las dos personas tocando a 8 almendras para cada una, y hasta se ve que queda 1 almendra de resto.

8. **Fracciones pasadas por agua. La suma de un medio y un cuarto de litro.** La experiencia consiste en llenar un vaso grande de “medio litro”, y un vaso pequeño de “cuarto litro”. Si planteamos sumar ambas cantidades, lo primero que podemos hacer es utilizar un mismo tamaño de vaso, lo más cómodo es vaciar el vaso grande en dos pequeños, así conseguimos tener una sencilla suma de 2 vasos y 1 vaso, que son 3 vasos pequeños. Una vez que hemos sumado la fracción pasada por agua, la podemos hacer doblando papel, la hoja representa el litro, la media hoja el vaso de medio litro y la cuarta parte de la hoja es el vaso pequeño de cuarto de litro. El aprendiz ya se encuentra preparado para hacer esta suma con papel y lápiz, reduciendo a común denominador, y controlando en cada paso el algoritmo, “aprendiendo matemáticas de las manos a la cabeza” pasando por el papel y el lápiz.

9. **La potencia de un saco de trigo o “cómo entender intuitivamente que cualquier número elevado a cero es uno”.** Imaginemos un agricultor que tiene un saco de trigo cuyo rendimiento es de 3 sacos. Si lo siembra cuando haya pasado 1 año recoge 3 sacos (3^1 año = 3 sacos), si vuelve a sembrar cada uno de esos 3 sacos consigue 9 sacos al cabo del segundo año (3^2 años = 9 sacos), y así sucesivamente en el tiempo adelante. ¿Y ahora mismo, en el “año cero”, ahora que todavía no ha sembrado el saco porque no ha pasado el tiempo, cuántos sacos tiene? Evidentemente la intuición nos dice que tiene el saco (3^0 años = 1 saco). Y para verlo más claro en el transcurso del tiempo, nos podemos preguntar cuánto trigo sembraría el año anterior, y llegamos a la conclusión fácil de saber que tuvo que sembrar la tercera parte del saco (3^-1 año = 1/3 sacos). Y dos años atrás en el tiempo se ve muy claro que tuvo que sembrar la tercera parte de la tercera parte del saco (3^-2 años =

1/9 sacos) Y así sucesivamente en el tiempo atrás. El modelo del saco sirve para ver claro eso de que cualquier número elevado a cero es uno, por lo menos cuando la base de la potencia es positiva.

10. **Resolver problemas tomados de la vida real, sacados de su casa, de su escuela, de su entorno y de la vida.** Los números están en todas partes, en los bosques, en el campo, en la huerta y en la ciudad, en lo natural y en lo inventado, en las plantas y en los animales, en las nubes, en los torrentes, en los ríos, en los lagos y en el mar, en el sol y en la sombra, en los alimentos y en los excrementos, en los jardines y en los basureros, en la lluvia y en el viento, en la tierra, en el fuego, en el agua y en el aire... Los números corren al ritmo de las cosas que se mueven, con las bicicletas, los coches, los trenes y los camiones, nadan con los peces, navegan con los barcos, vuelan con los aviones, los cohetes y los pájaros... Los números están en el cuerpo, nos salen del corazón a un ritmo medio de 60 a 80 pulsaciones por minuto, los notamos en la presión arterial del torrente sanguíneo, y están en el aire que respiramos... Con la cantidad de números que nos ofrece la vida no tiene mucho sentido abusar de las cuentas con números sin acompañante, solitarios, con números huérfanos sin apellidos de cosas, con números carentes de significado. Hacer números en el vacío, hacer operaciones amasando números mecánicamente no tiene mucha gracia por no decir ninguna, a no ser que estemos haciendo un entrenamiento para aprender la mecánica de las operaciones, pero de ninguna manera antes de haber digerido muy bien el significado de cada una de ellas: la suma, la resta, la multiplicación, la división... Sumar, restar, multiplicar y dividir caramelos para endulzar el aprendizaje, calcular nuestros espacios tanteando y midiendo la clase y el patio de recreo para saber dónde nos movemos, hacer números a nuestros movimientos para tomar el pulso a nuestro ritmo de vida, escurrirle números al agua para saber los litros que caen por metro cuadrado en cada lluvia, medirnos la sombra cuando salimos a tomar el sol para descubrir la proporcionalidad geométrica… es escurrirle números a la vida.

11. **Saboreamos un “postre de frutos secos”.** Llegar un día a clase con un montón de 6 nueces, 9 cacahuetes y 12 pistachos, por ejemplo, e invitar a los estudiantes a repartirlos en el mayor número de postres posible, sin que quede nada sin repartir, que los postres sean iguales entre sí, y sin poder partir ningún fruto, es una experiencia bastante interesante. No siempre sale bien a la primera, y eso es lo bueno porque estimula el pensamiento. Cuando conseguimos por fin el reparto equilibrado, en este caso concreto con 3 postres de 2 nueces, 3 cacahuetes y 4 pistachos en cada uno de ellos, es el momento de hacer la descomposición factorial de cada una de las tres cantidades de frutos que había en el montón inicial, y descubrir el máximo común divisor, en esta situación. Después nos comemos los frutos para terminar con buen sabor de boca. Y también nos podemos beber unos decilitros de zumo para seguir aprendiendo de forma agradable las medidas en una situación real. ¡Buen provecho!

Formas: "El paisaje de las formas" y "Lo redondo y el pi"

La observación de las formas en el entorno cercano, en el mundo y en la vida nos abre las puertas de la Geometría. Recortar triángulos, rectángulos y círculos, trocearlos y recomponerlos de diferentes maneras a modo de rompecabezas, ayuda a entender la esencia de las formas en dos dimensiones. Construir, rellenar y comparar cuerpos geométricos de tres dimensiones son experiencias básicas para aprender Geometría de una forma natural y atractiva.

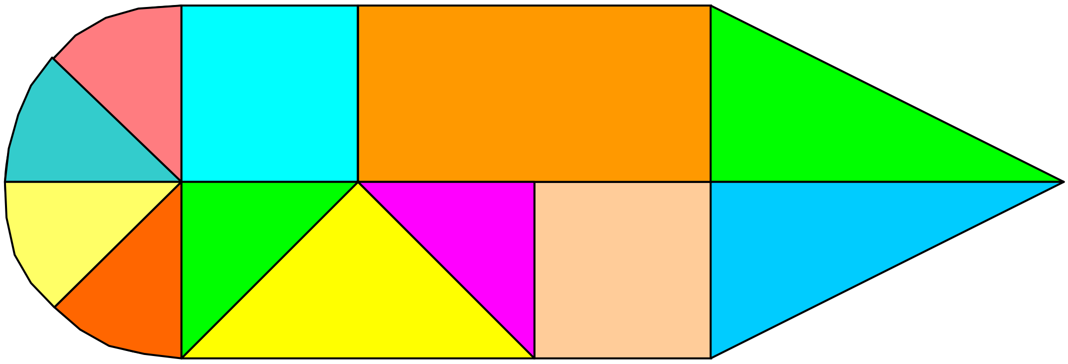
1. **El árbol de la esencia de las formas: rama plana y rama voluminosa.** El árbol de la esencia de las formas hunde sus raíces en lo natural y en lo inventado, transformando la savia bruta de las formas en savia elaborada de formas geométricas. Podemos dibujar nuestro árbol para decorar la clase.

2. **El "rectángulo humano" de 6 personas.** Análisis de posibles expresiones:

   - 3 filas por 2 personas.
   - 2 filas por 3 personas.
   - 3 personas por 2 personas.

   La experiencia consiste en observar un rectángulo humano desde tres puntos de vista estratégicos. Hay dos puntos de vista que no ofrecen ninguna dificultad, los que están frente a un lado o frente al otro; estos puntos de vista ven filas. Pero el punto de vista que observa el rectángulo desde una esquina es más difícil, pues ve dos personas si la vista se le va por un lado y tres personas si se le va por el otro. Esta experiencia nos permite descubrir intuitivamente que la esencia del cálculo de superficie está en las filas.

3. **Jugando con las formas.** Combinamos las piezas para hacer una figura global prevista, y después la deshacemos para crear nosotros otras diferentes. Con unas piezas de cartulina, madera o cualquier otro material, como por ejemplo, las que se muestran en la siguiente figura, podemos combinarlas de diferentes maneras sobre una plantilla base hasta conseguir encajarlas en ese contorno, a modo de puzzle con varias soluciones. Y también podemos quitar la plantilla para construir otras composiciones, más por libre. En cualquier caso se puede establecer algún tipo de criterio como que se toquen las piezas al menos en un punto, o que se toquen en un lado… o bien intentar conseguir un perímetro mínimo o máximo… Jugando con las formas se fomenta la creatividad, aprendemos geometría y disfrutamos de la belleza geométrica.



4. **La esencia del cálculo de la superficie: el átomo de la superficie y la fila de la orilla.** Construimos un modelo de cartulina: la calculadora de superficie. Un sencillo modelo de cartulina ayuda al aprendiz a descubrir la fórmula del cálculo de la superficie del rectángulo. Recortar y tocar un cuadrado, por ejemplo de un centímetro de lado, te hace tomar conciencia del "uno" de la superficie, en ese caso particular. Al desplazarlo a lo largo de una fila descubres la superficie de la orilla, a lo largo del rectángulo. Y al desplazar la fila de la orilla a lo ancho de ese rectángulo, estás descubriendo toda la superficie del rectángulo, según el número de veces que se repite la fila. Acabas de entrar en el auténtico significado de la fórmula del área del rectángulo.

5. **La esencia del cálculo del volumen: el átomo del volumen, la fila voluminosa de la orilla y la capa de abajo.** La experiencia consiste en modelar dados de plastilina de un centímetro cúbico, entre las yemas de nuestros dedos para construir en grupo un cuerpo geométrico estratificado en capas. Como en la experiencia anterior, se trata de poner a los aprendices en situación para que descubran la esencia del cálculo del volumen al construir su "pequeño edificio del volumen", poniendo una primera piedra que es el "átomo del volumen", y continuando su construcción a lo largo de la fila voluminosa de la orilla, la capa o piso de abajo y el resto de las capas.

6. **Formamos un redondel humano con triángulos de colores.** Esta experiencia tiene una connotación intercultural. Primero preparamos unas piezas de cartulina, que podemos considerar triángulos curvos, con dos lados rectos más largos, y un lado curvo más corto. Una manera sencilla de prepararlo es juntando un cuadro con cuatro cartulinas de diferentes colores, y trazando un gran redondel desde donde se unen los cuatro vértices de las cartulinas. Si dividimos la circunferencia en veinte partes, conseguiremos veinte piezas de cuatro colores diferentes. Una propuesta interesante es que cada miembro del grupo lleve una pieza en la mano, y todos se vayan acercando cada vez más hasta formar un círculo de colores. Y ahora es el momento preciso en el que podría sonar una música ambiental agradable que

invitara a darse un gran abrazo colectivo alrededor del círculo. Es una muy buena ocasión para conectar las Matemáticas con la Educación en Valores. Y podemos seguir jugando con las formas transformando este círculo en dos filas iguales de triángulos, una frente a otra, que parecen “la dentadura abierta de un cocodrilo”. Y si le cerramos la dentadura al cocodrilo estamos descubriendo la fórmula de la superficie del círculo a partir de la del rectángulo.

7. **Si no te acuerdas de la superficie del círculo “no te preocupes, sé feliz”.** De entrada no parece nada pedagógico este consejo. La siguiente experiencia quiere demostrar su valor didáctico. En realidad, si un alumno ha aprendido la superficie del círculo solamente de memoria sí debería estar preocupado y muy preocupado. Pero la siguiente experiencia es una alternativa para descubrir la superficie del círculo, y así poder recordarla con memoria inteligente. Se propone empezar la experiencia con un cuento: *“Había una vez un carpintero, hace mucho tiempo, que hacía mesas de tablero rectangular. Para calcular lo que tenía que cobrar por el tablero multiplicaba el largo por el ancho. Hasta que un día llegó un caprichoso y le encargó una mesa redonda. A la hora de cobrar multiplicó el largo (diámetro) por el ancho (diámetro) y… ¡se había pasado por las cuatro esquinas! Tuvo que ingeniarse otra manera de hacer los cálculos, estaba harto de pasarse y acabó multiplicando el radio por el radio, obteniendo la tabla cuadrada del radio. Y, por tanteo, a ojo de buen carpintero, pensó que era justo cobrar tres tablas cuadradas del radio”.* Pero para afinar el tanteo del carpintero, nosotros podemos utilizar una sencilla balanza, poner en un platillo un redondel de cartulina que representa el tablero redondo, y en el otro platillo vamos echando las “tablas del radio”, del mismo gramaje de cartulina. Como no se equilibra con las tres tablas, cortamos la

cuarta tabla de cartulina en diez trozos, y probamos a echar uno de los trozos, y casi se equilibra; ya vamos por 3,1 tablas. Volvemos a cortar uno de los diez trozos en otras diez partes, echamos cuatro de éstas en el platillo, y se produce el equilibrio. ¡Acabamos de sacar dos decimales al número pi! Si un aprendiz ha participado en el cuento del carpintero y ha pesado el número pi, jamás de los jamases se deberá preocupar si no se acuerda de la superficie del círculo porque siempre la podrá recordar con memoria inteligente. Una buena música para ambientar esta reflexión pedagógia es “Don’t worry, by happy”.

8. **Hacemos prismas, pirámides, cilindros y conos de cartulina.** Los forramos con papel milimetrado para descubrir las fórmulas de sus áreas, observando su descomposición plana. En el prisma vemos las dos bases y tantos rectángulos laterales como lados tiene cada una de sus bases. En la pirámide vemos su base y los triángulos de sus caras laterales. En el cilindro vemos dos círculos iguales y un rectángulo cuyas dos medidas para el cálculo del área son la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro. En el cono vemos el círculo de su base y otra pieza que podemos considerar un triángulo de lado curvo de longitud la de la circunferencia de la base, y altura la generatriz del cono. Y los rellenamos de arroz o de garbanzos por ejemplo, para experimentar con sus volúmenes. Si comparamos un prisma y una pirámide, o bien un cilindro y un cono, que tengan la misma base y la misma altura, podemos comprobar experimentalmente que necesitamos el volumen de tres pirámides para rellenar un prisma, o bien tres conos para rellenar un cilindro. Lo bueno de esta experiencia es que suele sorprender al aprendiz puesto que al ver la pirámide junto al prisma, o bien el cono junto al cilindro, piensa por tanteo “a ojo de buen cubero” que hacen falta sólo dos pirámides para llenar el prisma, o bien dos conos para llenar el cilindro. Esta experiencia le sirve de base para recordar en el futuro con memoria inteligente que todas las fórmulas de los volúmenes de los cuerpos geométricos “que empiezan en algo” y “terminan en punta, en un punto, en nada”, se dividen entre tres.

9. **Construimos un enjambre de conos y experimentamos con una naranja.** La unión de muchos conos pequeños de cartulina, mejor si es de color naranja (de una altura de unos 4 o 5 centímetros), desde la base al vértice, por la generatriz, utilizando clips para enlazar, tiende a formar una esfera del tamaño de una naranja aproximadamente. Con la imaginación podemos intuir que la esfera está formada por muchísimos conos. Si ahora le damos un corte a una naranja de verdad, del mismo calibre que el modelo de cartulina, y con un círculo de papel a la medida del corte intentamos envolverla, podemos calcular por tanteo “a ojo de buen cubero” que necesitamos unos cuatro papeles del corte para conseguirlo. El recuerdo de esta experiencia intuitiva nos va a ayudar a recordar visualmente la superficie de la esfera, como cuatro veces la superficie del “círculo del corte de la naranja”. Para saber el volumen de nuestra esfera podemos imaginar la desintegración de los conos de cartulina colocados verticalmente sobre un círculo del tamaño de la corteza, equivalente a cuatro círculos del corte; y puestos a imaginar cambiamos todos esos conos por un gran cono como “un sombrero de chino”. A través de esta imagen visual vemos claramente que para calcular el volumen basta con multiplicar el

"círculo de la corteza de naranja" por el radio y dividirlo entre tres para obtener el volumen del gran cono equivalente a la esfera. Con estas experiencias podemos recordar fácilmente la fórmula del volumen de la esfera como $4\pi r^2 r/3$, que es como "una radiografía" de $4\pi r^3/3$.

Bibliografía

- P. Buendía Abril (2000): "Diario de matemática desnuda o Aventuras por los paisajes del universo matemático". 1. ed. Consejería de Educación y Cultura, Murcia. España.
- A. Orton (1998): "Didáctica de Matemáticas". 3.ed. Ministerio de Educación y Cultura y Ediciones Morata. Madrid.

Pedro Buendía Abril, nació en Mula (Murcia) España en 1958. Cursó los estudios de Profesor de Educación General Básica por la especialidad de Ciencias Físico Matemáticas. Actualmente desempeña el cargo de Director del Centro Comarcal de Educación de Adultos "Río Mula", en Mula (Murcia). En sus veintiséis años de docencia ha atendido grupos de alumnos de diversos niveles educativos en la Región de Murcia (España). Desde hace unos diez años participa como "animador matemático" en cursos y actividades de formación del profesorado, relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: "El Taller de las Fiesta de los Números, "Aventuras por los Paisajes del Universo Matemático", "Animación a las Matemáticas desde la Creatividad y la Educación en Valores", "Aprendiendo Matemáticas con las manos"... También ha publicado diversos artículos relacionados con la didáctica de las Matemáticas, y ha escrito el libro "*Diario de matemática desnuda o aventuras por los paisajes del universo matemático"*, que recoge experiencias, intuiciones y aventuras acerca del saber matemático básico. Se puede descargar de www.educarm.es, en Información – Publicaciones. Edita Consejería de Educación y Cultura de la Región de Murcia, (2000) 232 páginas.
Email: pedro.buendia@educarm.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 169 - 182
ISSN: 1815-0640

Equação: noção matemática ou paramatemática?

Alessandro Jacques Ribeiro

Resumen

O presente trabalho tem por objetivo investigar se a noção de equação é concebida na literatura como uma noção matemática ou como uma noção paramatemática, segundo as idéias da Transposição Didática de Chevallard (1991). A partir da literatura analisada verificou-se que não há consenso entre os autores escolhidos quanto à apresentação ou não de "definição" para a noção de equação. Pode-se concluir ainda que equação é concebida como uma noção paramatemática. Como reflexão final é deixada a seguinte questão: Como abordar equação e seus diversos significados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática?

Abstract

The aim of this paper is to investigate whether the notion of equation is conceived in the literature as a mathematic notion or as a paramathemathic notion, following to the ideas of Chevallard's Didactic Transposition (1991). From the analyzed literature, it was verified that there is not an agreement among the chosen authors about the presentation of a "definition" for the notion of equation. It was also possible conclude that equation is considered as a paramathemathic notion. As a final reflection, the following question is raised: How can we approach equation and its different meanings in the teaching and learning of Mathematics?

Introdução

Esse trabalho originou-se das análises dos resultados de pesquisas como Kieran (1992), que levanta o fato de se trabalhar em demasia com o aspecto processual da Álgebra; as situações como as vividas por Cotret (1997) em sua pesquisa sobre as dificuldades que surgem quando do equacionamento de problemas escritos; Ribeiro (2001) que identificou um resultado pouco expressivo quando alunos de 13-14 anos trabalharam com questões envolvendo equações e em Dreyfus & Hoch (2004) que discutem a dificuldade que alunos de 14-17 anos têm para reconhecer e tratar as estruturas internas das equações.

Kieran (1992) destaca a necessidade de não se permitir que os alunos passem muito tempo entendendo e concebendo as expressões algébricas e equações como sendo um amontoado de letras e símbolos sobre os quais se opera somente com números. A autora levanta a questão da importância de propiciarmos aos alunos, situações em que eles percebam a possibilidade de entender essas entidades – expressões algébricas e equações – como objetos sobre os quais recaem propriedades e se podem efetuar diversas outras operações, além de somar, subtrair, dividir ou multiplicar.

Cotret (1997) em sua pesquisa sobre os problemas e dificuldades que surgem no equacionamento de problemas escritos, discute a pertinência e adequação das equações que são usadas para modelar problemas intra e extra Matemática. Ela reconhece que muitas vezes não sabemos justificar a escolha de um determinado modelo de equação para representar um certo problema, a não ser pela resolução e pela busca da resposta do problema. Apresenta ainda uma reflexão muito pertinente ao meu trabalho, uma vez que apresenta uma discussão sobre o fato de se considerar – ou não – a resolução de equações como sendo um saber matemático e que, em se considerando assim, se é importante então que se observe isso – a resolução de equações – do ponto de vista do processo de modelização (ou modelagem).

Ribeiro (2001), ao analisar o desempenho de estudantes de faixa etária entre 13-14 anos de escolas públicas brasileiras, em relação às questões de Álgebra elementar, observa que vários desses alunos obtiveram um resultado insatisfatório quando estavam trabalhando com questões envolvendo equações, tanto em situações contextualizadas, ou seja, aquelas que envolvem o equacionamento de problemas verbais, como em situações não-contextualizadas, nas quais as equações são dadas e o que se exige basicamente são procedimentos de resolução.

Outra pesquisa interessante, que faz parte do presente cenário, é a de Dreyfus & Hoch (2004), que discutem uma abordagem estrutural para as equações. No trabalho desenvolvido com alunos de idade equivalente aos alunos do nosso ensino médio, os autores solicitaram que os alunos falassem o que pensavam sobre equação. Dentre os resultados dessa pesquisa, o que mais nos interessou foi a constatação dos autores sobre a pouca capacidade daqueles alunos em reconhecer a estrutura interna de uma equação, caracterizando a idéia de equação, na maioria das vezes, como um processo de resolução, i.e., relacionando equação com o processo de sua resolução.

Aliando os resultados das pesquisas apresentadas às investigações feitas com professores em formação continuada e alunos de Licenciatura em Matemática, acerca de suas idéias sobre a noção de equação, foi possível perceber muitas vezes que, excetuando-se a ênfase dada na busca da solução da equação, ou seja, na aplicação de métodos e técnicas para a sua resolução, pouco se discutia sobre o que eles pensavam a respeito da noção de equação.

Nesse sentido comecei a me questionar sobre o porquê de uma noção aparentemente simples, como a noção de equação, gerar tantas dúvidas quando se levantavam questões sobre o que se entende, de um ponto de vista conceitual, por equação. Assim, esse trabalho tem por objetivo: **Investigar se a idéia de equação é apresentada na literatura como uma noção matemática ou como uma noção paramatemática**. Esse objetivo parece conduzir à seguinte questão de pesquisa: **É possível considerar equação como uma noção matemática?** Baseando-se nas leituras de pesquisas apresentadas no cenário da Educação Matemática mundial, no que se refere ao ensino e aprendizagem da Álgebra; em minha experiência como professor-pesquisador e no objetivo declarado para este trabalho, apresento um estudo de cunho teórico desenvolvido acerca da noção de equação na literatura especializada sobre o assunto.

Aspectos teorico-metodologicos

Levando-se em conta a natureza teórica do presente trabalho, iniciei minha investigação com um levantamento bibliográfico no qual selecionei algumas pesquisas nacionais e internacionais na área da Educação Matemática, como as apresentadas anteriormente, pesquisas essas que apontaram para a necessidade de uma investigação bibliográfica que pudesse elucidar as indagações que foram surgindo, as quais já foram apresentadas na secção anterior.

Nesse sentido, prossegui minhas investigações com um levantamento e um estudo feito em obras de diferentes naturezas, como: livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e livros didáticos, sempre buscando compreender como são apresentadas as "idéias" relacionadas com o termo equação, não perdendo de vista à questão norteadora deste trabalho.

As "idéias" que encontrei nas obras investigadas, as quais apresentarei em seguida, são analisadas considerando o trabalho de Chevallard (1991) – *Sobre a noção de Transposição Didática* – trabalho esse que me forneceu elementos teóricos no sentido de buscar uma resposta para a questão de pesquisa anunciada para o presente trabalho.

As discussões propostas por Chevallard (1991), trazem à tona questões referentes aos objetos do saber e outros objetos, principalmente os objetos a ensinar. Chevallard destaca que *um "objeto do saber" somente passa a existir como tal, no campo da consciência dos agentes do sistema de ensino, se a sua inserção no sistema dos "objetos a ensinar" parece útil à economia do sistema didático"*. (Chevallard, 1991, p. 49)

Porém, isso não quer dizer que um objeto do saber seja somente identificado e designado como objeto a ensinar, a partir do momento em que a transposição didática esteja potencialmente concluída, pois, na verdade, essa continua mesmo depois da introdução didática do objeto do saber.

Mas, de fato, o que é um objeto do saber? Para o professor de matemática, por exemplo, é necessário que se coloque nessa categoria certamente as noções matemáticas, como a adição, o círculo, a derivação, as equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, dentre outros, lembrando-se que esses exemplos fazem sentido numa mesma comunidade de professores de matemática.

Contudo, ao lado das noções matemáticas, colocam-se as que Chevallard chama de **noções paramatemáticas**, como, por exemplo, a noção de parâmetro, a **noção de equação**, a noção de demonstração. Essas noções são úteis para a atividade matemática, mas não são normalmente objetos de estudo para o matemático.

É importante, que fique bem entendido, que não há uma divisão absoluta entre os dois domínios: a noção de equação e a noção de demonstração são hoje objetos matemáticos em lógica matemática, por exemplo, e essa distinção então deve sempre se referir à uma prática de ensino precisa (nível do curso, lugar, tempo, setor da matemática, etc.).

Em geral, as noções matemáticas são construídas e sua construção pode tomar a forma de uma definição ou de uma construção propriamente dita, seguida de uma demonstração. Além dessa construção – que é muitas vezes uma definição – as noções matemáticas têm propriedades e têm também aplicações intra e extra matemática.

A propósito, Chevallard chama a atenção para:

> (...) *dos objetos do saber* que são as *noções matemáticas*, o professor espera que o aluno saiba (eventualmente):
> - dar a *definição* (ou retraçar a construção);
> - dar as *propriedades* (“principais”), as *demonstrar*;
> - *reconhecer* um certo número de *ocasiões de emprego*;
> - etc. (CHEVALLARD, 1991, p. 51)

Ele afirma ainda que somente os objetos do saber podem vir a se tornar objetos de ensino, e que as noções paramatemáticas não se tornam objetos de ensino, porém, são necessárias no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos propriamente ditos, funcionando como objetos de saber auxiliares. Ele diz: *“Eles devem ser ‘aprendidos’ (ou ainda:’conhecidos’), mas eles não são ’ensinados’ (segundo o plano de ensino das noções matemáticas)*. (Chevallard, 1991, p. 51)

Outro ponto importante que Chevallard toca faz referência ao fato de que, normalmente, somente as noções matemáticas são objetos de uma avaliação direta por parte do professor. Vejamos na citação abaixo, exemplos dessa afirmação:

> O professor solicitará, por exemplo, ao aluno para “resolver a equação: $x^2 - 8x + 9 = 0$”. As noções paramatemáticas são normativamente excluídas de uma avaliação direta. O aluno que não consegue responder à questão: “Resolver e discutir a equação $x^2 - \lambda x + (\lambda + 1) = 0$”, o professor poderá concluir que o aluno “não compreendeu a noção de *parâmetro*”. Em um outro nível, ele dirá, por exemplo, que o aluno “não compreendeu a noção de *demonstração*”. O professor de matemática que, numa festa mundana, encontra um convidado que lhe declara: “Ah, você é professor de matemática! Eu, eu nunca compreendi porque $ax^2 + bx + c = 0$”, poderá concluir que este último “não compreendeu a noção de *equação*”. (Chevallard, 1991, p. 51)

Além das noções matemáticas e das noções paramatemáticas existe uma camada mais profunda de noções, as quais são mobilizáveis implicitamente pelo contrato didático (Brousseau, 1986), que Chevallard chamou de noções protomatemáticas, como, por exemplo, a noção de padrão.

Por fim, as noções matemáticas, as noções paramatemáticas e as noções protomatemáticas constituem camadas cada vez mais profundas e complexas no funcionamento didático do saber. Faz-se necessária uma profunda análise didática que leve em conta as diferenças de natureza cognitiva existentes entre essas noções:

> (...) é assim que a análise da transposição didática de tal noção matemática (por exemplo, a identidade $a^2 - b^2 = (a+b)\ (a-b)$) supõe a consideração de noções paramatemáticas (por exemplo, as noções de *fatoração* e de *simplificação*), que por sua vez devem ser vista à luz de certas noções protomatemáticas (a noção de “padrões”, de “simplicidade”, etc.). (Chevallard, 1991, p. 55)

Segundo o próprio Chevallard (1992), as primeiras análises propostas em sua Teoria da Transposição Didática – publicada em 1991, só foram inicialmente concebidas nos anos 80 e:

> (...) limitavam-se a distinguir objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos. O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise, conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse aparecer. (...) Assim se passa de uma máquina restrita para pensar um universo didático *restrito* para uma maquinaria de mais vasto alcance, apta, em princípio, a permitir-nos situar imediatamente a *didática no seio da antropologia*. (Chevallard, 1992, p. 86-87)

Com isso, é importante compreender em que sentido Chevallard caracteriza e diferencia as noções matemáticas e as noções paramatemáticas. Pode-se notar que, em algumas situações, é necessário que se eleve, a um certo nível superior de explicitação, certas noções paramatemáticas, como, por exemplo, a noção de equação ou de demonstração, as quais podem ser objetos de definição precisa em lógica matemática. Assim, uma certa noção paramatemática pode se tornar, num discurso didático explícito, uma noção matemática.

A partir dessa discussão – a respeito do que é noção matemática e noção paramatemática – passo a analisar as “idéias” apresentadas na literatura consultada acerca da noção de equação. Essas “idéias” serão analisadas sob à luz da teoria da Transposição Didática, apresentada nesta seção.

Analisando a literatura consultada

Dentre as leituras feitas encontrei algumas definições e considerações apresentadas por especialistas da área de Matemática e de Educação Matemática que subsidiaram o desenvolvimento desse trabalho.

Escolhi para discutir nesse artigo as "idéias" apresentadas em cinco livros didáticos de Matemática direcionados ao ensino fundamental (11 a 14 anos): Bourdon (1897), Giovanni e Giovanni Jr (2000), Di Piero Neto & Soares (2002), Imenes & Lellis (2002) e Pires, Curi e Pietropaolo (2002); em um livro didático de Matemática direcionado ao ensino médio (14 a 17 anos): Tsipkin (1985); e em livros didáticos direcionados ao ensino universitário: Bourbaki (1976), van der Waerden (1991), Rogalski (2001) e Caraça (2003); e em dois dicionários matemáticos: Warusfel (1969) e Sügakkai (1977)

Inicio a apresentação por Marc Rogalski, matemático francês, que em sua obra *Carrefours entre ANALYSE ALGÈBRE GÉOMETRIE* não vê equação como propriamente um objeto da Matemática, ao contrário de uma função, um triângulo, uma integral ou um grupo, por exemplo. Ele acredita que *"o termo equação é evocado* ***quando existe a intenção, por parte de alguém, de se resolver um certo tipo de problema"*** (Rogalski, 2001, p. 18).

De um modo bastante preciso e formal, ele apresenta qual o tipo de problema que acaba por evocar a palavra "equação":

> Seja $f: E \to F$ uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** $(e_{f,y})$, e notamos $(e_{f,y})$: **f(x) = y**, **quando estamos a procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos a procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambigüidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado em F, e procuramos a incógnita x em E. (Rogalski, 2001, p. 18)

Segundo esse autor, com essa noção bastante geral de equação, pode-se unificar, generalizar e formalizar numerosos exemplos de equações discutidas e adotadas em inúmeras situações. O principal interesse dessa noção é poder englobar, sob um mesmo formalismo, equações muito diferentes, cujas incógnitas podem ser números (inteiros, reais, complexos,...), ou funções (contínuas, deriváveis, reais, complexas,...), ou polinômios, ou seqüências numéricas, até mesmo aplicações ou conjuntos quaisquer.

Bento de Jesus Caraça, professor português, em sua obra, *Conceitos* Fundamentais *da Matemática*, não traz definição para o termo equação, mas define equação algébrica como:

> Toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + ... + a_n = 0$; n, número inteiro e positivo, chama-se grau da equação; à variável x chama-se incógnita e aos números a_0, a_1, ... , a_n, coeficientes da equação. (Caraça, 2003, p 144)

Discuto a seguir a idéia de equação encontrada em André Warusfel, matemático francês, que em seu *Dictionnaire Raisonné de Mathémathiques*, traz a seguinte explicação quando se refere ao termo equação em sua obra:

> Problema que consiste em procurar, dado um conjunto *E*, os elementos *x* que satisfazem a uma relação *R(x)*; *x* é a **incógnita**, e x_i, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Dessa forma, o problema é bastante amplo, e contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa de lugar geométrico, por exemplo. Também é reservado, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde *E* = *R*, *C*, R^n ou C^n , e que *R(x)* pode ser escrita na forma: *f(x)* = 0 (...) **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela, e se necessário determinar a ordem de cada uma. (Warusfel, 1966, p. 168)

Nihon Sügakkai, matemático japonês, o qual também não apresenta em sua obra, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, definição para o termo equação, traz a seguinte definição para equação algébrica:

> Seja F_1 (x_1, ... , x_m), ... , F_r (x_1, ... , x_m) os r polinômios em m variáveis x_1, ... , x_m, sobre um corpo k. Então, as equações $F_1=0$, ... , $F_r=0$, são chamadas equações algébricas em m incógnitas
> (...)
> Por várias razões, é importante considerar uma equação na forma f(x)=0, onde $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, $a_0 \neq 0$. Isso dá a forma geral da equação algébrica com uma incógnita. (Sügakkai, 1977, p. 38)

Acredito ser pertinente destacar aqui o fato de que Sügakkai não apresentar uma definição para equação, porém, ao longo de seu dicionário apresenta definições para tipos específicos de equação, como equação algébrica, equação diferencial, entre outras.

Apresento a seguir as idéias sobre equação que aparecem em livros didáticos. A primeira obra investigada é *Éléments d´Algèbre*, de M. Bourdon. Essa obra, datada de 1897, traz em seu bojo uma vasta discussão sobre equações, que vai desde suas noções preliminares até a teoria das equações.

No capítulo sobre as noções preliminares de equação, o autor apresenta a seguinte idéia para o termo:

> (...) escrevemos algebricamente as relações que o enunciado estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais que é chamada de *equação*".(Bourdon, 1897, p. 45)

Ao analisar a obra *Élements de Mathématique* – Algèbre I – de Nicolas Bourbaki, não encontrei definição para equação, mas sim, para equação linear, a qual segue abaixo:

> Seja E,F dois A-módulos (A um anel). Toda equação da forma $u(x) = y_0$, onde u: E $\rightarrow$ F é uma aplicação linear dada, y_0 um elemento dado de F e onde a incógnita x toma seus valores em E, chama-se *equação linear*; (...) Todo elemento $x_0 \in$ E tal que $u(x_0) = y_0$ é chamado *solução da equação linear* $u(x) = y_0$. (Bourbaki, 1970, p. 48)

A. G. Tsipkin, em sua obra *Manual de Matemáticas para la enseñaza media* traz a seguinte definição para equação:

> *Equação* é uma igualdade que se cumpre somente para certos valores das letras que se encontram nela. As letras que entram numa equação, segundo a condição do problema, podem não ser equivalentes: umas podem adquirir todos os valores admissíveis (são os chamados *parâmetros* ou *coeficientes* da equação (...)); outras, cujos valores são necessários encontrar, são chamadas *incógnitas* (...). Em sua forma geral, a equação pode ser escrita como segue: F $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. (...) Os valores das incógnitas que convertem a equação em identidade chama-se *solução* da equação. Resolver uma equação significa achar o conjunto de suas soluções ou demonstrar que as mesmas não existem. (Tsipkin, 1985, p. 148-149).

Na obra – *Álgebra, vol 1* – do matemático alemão, B L van der Waerden, observei que no capítulo introdutório são apresentados conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra e que serão discutidos ao longo de sua obra, porém, em momento algum, ele traz alguma definição ou alguma idéia do que se entende por equação. Entretanto, o autor se reporta ao termo equação da seguinte forma: *"a solução u de uma equação a = b + u, para a > b é designada por a – b"*. (Waerden, 1991, p. 5)

É importante destacar que, em seu livro *Álgebra, vol 1*, van der Waerden traz um curso de álgebra abstrata para cursos superiores e/ou cursos de pós graduação na área da Matemática, apresentando num capítulo introdutório conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra. Ele discute e define função, por exemplo, mas, não traz nenhuma referencia conceitual para a idéia de equação.

Acredito ser importante ressaltar aqui uma justificativa por ter inserido nesta pesquisa bibliográfica as obras de van der Waerden e Bourbaki. Os textos desses autores são normalmente considerados clássicos em cursos mais avançados em Álgebra, e são, certamente, grandes paradigmas de rigor. Por esse motivo então, achei importante investigar se eles discutem ou não a idéia de equação em suas obras.

O livro didático Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª série, de José Ruy Giovanni & José Ruy Giovanni Jr. apresenta uma definição de equação na unidade *“Estudando as equações”* trazendo, no item *“Equação”*, uma resposta para a questão: *“O que é uma equação?”*:

> Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos dessa sentença, é denominada *equação*. Cada letra que representa um número desconhecido chama-se *incógnita*. (Giovanni & Giovanni Jr 2000, p. 151)

Outro livro didático escolhido foi *Matemática em atividades, 6ª série*, de Scipione de Piero Netto e Elisabeth Soares. Nesse livro a idéia de equação é discutida no capitulo 3 *“Equações, sistemas de equações e inequações”*. Os autores recorrem à idéia de “sentenças matemáticas” para discutir equação, que aparece, especificamente, no item *“Um tipo especial de sentença matemática: a equação”*. Vejamos:

> Uma sentença é um conjunto de palavras que exprimem um pensamento com sentido completo. (...) São sentenças matemáticas aquelas que podem ser escritas utilizando-se da linguagem matemática. (...) Equação é uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. (Di Piero Netto & Soares 2002, p. 86-87)

A seguir apresento a obra *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*, de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis. Esse livro traz a idéia de equação no capítulo *“Equações”*, sendo apresentada pelos autores acompanhada da resolução no item *“Resolvendo equações”*:

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. (...) Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (Imenes e Lellis 2002, p. 230)

Na obra acima, observamos que os autores recorrem ao termo igualdade para definir equação, porém, não se discute o que é uma igualdade, a não ser pela característica de uma igualdade conter o sinal de igual. Todavia, a seguir, dá-se uma nova característica para equação: procurar o número desconhecido.

Um outro livro didático que apresento é o livro *Educação Matemática: 6ª série*, de Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo. Essa obra traz a idéia de equação no módulo *"Equações"*, em uma seção intitulada *"É preciso saber"*. Vejamos:

> Em Matemática, dizemos que equação é uma sentença aberta, porque nela há valores que não são conhecidos, que expressa uma igualdade. (...) O valor de *x* que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira é chamado **raiz da equação**. (Pires, Curi e Pietropaolo 2002, p. 211)

Partindo das "idéias" sobre equação discutidas nas obras apresentadas, procuro desenvolver uma análise e levantar questões para reflexão sobre as diferentes situações encontradas na literatura consultada. Essas reflexões e discussões são conduzidas sob a luz das idéias de Chevallard. Apresento ainda algumas conclusões e indagações que gostaria de deixar para reflexão neste trabalho.

Inicio a discussão levantando alguns aspectos relevantes a respeito das idéias apresentadas por Rogalski e Warusfel. Observei que a idéia geral que ambos têm sobre equação, certamente não considera-a como uma noção matemática, deixando claro que **o termo equação está ligado a um problema no qual se tem um valor a determinar, a partir de um valor dado**.

Fazendo uma análise comparativa entre Rogalski, Warusfel, Sügakkai e Caraça pude observar que enquanto Rogalski e Warusfel procuram tratar o termo equação de uma maneira mais genérica, sem defini-la e sem se referir a um tipo específico de equação; Sügakkai e Caraça particularizam a situação e apresentam definição para o termo equação algébrica, sem definir ou discutir uma idéia mais global de equação.

Bourbaki em sua obra, apesar de ser um livro didático e de todo o formalismo característico dessa obra, não apresenta definição para a noção de equação, mas traz uma definição para equação linear. van der Waerden também não faz nenhuma referencia à definição de equação em sua obra, contudo, por exemplo, traz uma definição para função numa capítulo intitulado "revisão".

Além das justificativas apresentadas, levanto outra questão fundamental para a discussão que proponho no presente trabalho: **Será que os autores citados não apresentam definição para equação justamente por essa idéia não ser uma noção matemática e sim uma noção paramatemática?**

Bourdon em seu *Éléments d´Algèbre,* logo no capítulo sobre as noções preliminares de equação, faz um alerta para o fato de que nem sempre se considerar em Álgebra que, os problemas cujos enunciados podem ser traduzidos algebricamente, estão ligados à idéia de equação.

Ele ressalta que as situações em que os problemas são colocados na forma de equação dividem-se em duas partes: a primeira que se destina a escrita algébrica do problema, a qual podemos entender como equacionamento do problema, e a segunda parte, onde se deduz uma série de outras equações, sendo que na última delas encontra-se o valor da incógnita. Essa segunda parte entendo como sendo o processo de resolução da equação.

Um fato que me chamou a atenção na obra de Bourdon é que o autor anuncia logo no início do capitulo analisado que: *"como as regras a serem seguidas para se colocar um problema numa equação são um pouco vagas, começaremos por nos ocupar com a segunda parte, que é submissa a regras fixas e invariáveis"* (Bourdon, 1897, p. 45).

Com isso, o autor discute por várias páginas as transformações algébricas utilizadas para a resolução de equações, para só então retomar o que ele chama de "primeira parte", ou seja, partindo de problemas escritos chegarmos às equações.

Retomando a discussão principal desse trabalho, verifiquei ainda que nos livros didáticos para alunos de 12 a 16 anos, como nos de Tsipkin, de Giovanni & Giovanni Jr, de Di Piero Neto & Soares, de Imenes & Lellis) e de Pires, Curi e Pietropaolo são apresentadas definições para a noção de equação.

Além disso, quero destacar o fato de que as definições apresentadas por Bourdon, Tsipkin, Giovani & Giovanni Jr, Di Piero Neto & Soares, Imenes & Lellis e Pires, Curi e Pietropaolo, embora não dêem esse destaque, estão definindo na verdade equação algébrica, pois consideram que o valor a ser encontrado – as incógnitas – são números.

Conclusões e considerações finais

É possível constatar-se que não há consenso na literatura consultada sobre a "definição" de equação. Aliás, se quer é possível encontrar um consenso na apresentação ou não de definição para essa idéia matemática. Enquanto alguns nem definem equação, outros, quando o fazem, definem explícita ou implicitamente, equação algébrica.

Considerando-se que, das treze obras analisadas, seis delas não definem equação e as sete que o fazem, na verdade, mesmo que de forma implícita, estão definindo equação algébrica, **concluo que a noção de equação é apresentada na literatura consultada como uma noção paramatemática.**

Outro ponto que pude perceber é que, algumas das "definições" apresentadas para equação, como em Bourdon ou em Imenes e Lellis, estão diretamente associadas a problemas, **que a meu ver só vem ratificar a concepção de Rogalski,** ou seja, relacionar a noção de equação à resolução de problemas.

Dando ênfase nessa perspectiva – relacionar à idéia de equação a resolução de problemas – corrobora-se com os resultados das pesquisas de Rojano (1985) e

Cotret (1997), as quais discutem a importância de se trabalhar com problemas, quando se está discutindo Álgebra, e nesse caso em particular, as equações.

Num outro sentido, gostaria de destacar também o fato de que algumas das "definições" apresentadas para equação, e que na verdade estão ligadas à equação algébrica, podem gerar obstáculos didáticos posteriormente quando do estudo de equações onde o valor a determinar não for números, como nas equações diferenciais ou equações trigonométricas, por exemplo.

Ainda assim, gostaria de ratificar a conclusão apresentada nessa pesquisa, corroborando as idéias de Chevallard, no sentido de **não se definir equação**, considerando assim, por esse aspecto, que **a noção de equação é uma noção paramatemática**.

Contudo, por outro lado, levanto uma reflexão que incorpora o seguinte desafio: **Ainda que a idéia de equação não seja uma noção matemática, não podendo assim tomar lugar junto aos objetos de ensino, devemos discutir sim, essa idéia, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.**

Todas as reflexões e considerações apresentadas até aqui me parecem ser um ponto de partida para uma discussão mais profunda e consistente no que diz respeito à busca de significado para a noção de equação.

Sendo assim, apresento mais uma reflexão que penso ser importante para todos aqueles que, de alguma forma, estão envolvidos com aulas de Matemática: **Como podemos abordar e discutir diferentes tipos de equação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática?**[1]

Apesar da reflexão acima poder ser mais amplamente contemplada na referida tese (Ribeiro, 2007), trago a seguir algumas considerações que lá se encontram, considerações estas que têm o objetivo de apresentar neste trabalho algumas indicações principalmente para os professores de Matemática.

Após ter sido desenvolvido um estudo de caráter teórico, o qual considerou aspectos epistemológicos e didático-matemáticos sobre as equações, concebi em minha tese de doutoramento diferentes significados para equação, que optei por chamar de ***multisignificados de equação***. Esses diferentes significados parecem ganhar relevância no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática, se considerarmos a importância de se trabalhar com diferentes registros de representação semiótica (Duval, 1993).

Os multisignificados de equação, a saber: *intuitivo-pragmático, dedutivo-geométrico, estrutural-generalista, estrutural-conjuntista, processual-tecnicista e axiomático-postulacional*; procuram contemplar diferentes registros de representação. Assim, o trabalho com estes significados em sala de aula pode

[1] Considerações acerca de respostas e aprofundamento em relação a esta reflexão, podem ser encontradas na tese de doutoramento do autor (Ribeiro, 2007), disponível em www.pucsp.br/pos/edmat.

oferecer a possibilidade de o aluno interpretar e tratar as equações utilizando-se de situações que envolvam diferentes ramos da Matemática, assim como diferentes tipos de equações.

Referências bibliográficas

- Bourbaki, N. *Elements de Mathématique: Algèbre I*. Paris: Hermann, 1970.
- Bourdon, M. *Éléments d´Algèbre*. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897.
- Brousseau, G. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 7, n. 2. Grenoble, 1986, p. 33-115.
- Caraça, B de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 5ª ed. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 2003.
- Chevallard, Y. *La Transposition Didactique*. Cap. 4. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991, p. 49-56.
- _______ *Cencepts fondamentaux de la dadactique: perspectives apportées par une approche antropologique*. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.
- Cotret, R. S. *Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits*. IX Séminaire Franco-Italien de Didactique de l´Algèbre, 1997, p. IX-23 – IX-37.
- Di Pierro Netto, S., Soares, E. *Matemática em Atividades: 6ª série*. São Paulo: Scipione, 2002.
- Dreyfus, T., Hoch, M. *Equations: A structural approach*. Proceedings of the 28th Conference Of Internatoinal Group for the PME, 2004, p. 1-152 – 1-155.
- Duval, R. *Registres de Représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. ULP, IREM Strasbourg 5, 1993, p. 37-65.
- Giovanni, J R, Giovanni, J. R. Jr. *Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª* série. São Paulo: FTD, 2000
- Imenes, L. M. P., Lellis, M. C. T. *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*. São Paulo: Scipione, 2002.
- Kieran, C. *The learnig and teaching of school algebra*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992.
- Pires, C. C., Curi, E, Pietropaolo, R. *Educação Matemática: 6ª série*. São Paulo: Atual, 2002.
- Ribeiro, A J. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP.* São Paulo, 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- _______ *Equação e seus Multisignificados no Ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico.* São Paulo, 2007, 142p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Rogalski, M. *Carrefours entre Analyse, Algèbre et Géomètrie.* Paris: Ellipses, 2001.
- Rojano, T. *Problem Solving: From the development of algebric ideas to algebric thinking*. Centro de Investigacoin y Estudios Avanzados del IPN, México, 1985.
- Sügakkai, N. *Encycolpedic Dictonary of Mathematics*. Massachusetts: The MIT Press, 1977.

- Tsipkin, A. G. *Manual de Matemáticas para la enseñanza media.* Moscou: Editorial Mir Moscú, 1985.
- Waerden B. L. van der. *Algebra: Volume I*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1991.
- Warusfel, A. *Dictonnaire Raisoné de Mathématiques*. Paris: Éditions du Seuil, 1969.

Alessandro Jacques Ribeiro. Doutor em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pela PUC/SP. Professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN).
Email: alejacques@uol.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 183 - 196
ISSN: 1815-0640

Reflexões sobre os currículos de Matemática em Portugal

Rui Feiteira e Marília Pires

Resumen

Neste trabalho procuramos dar uma perspectiva, ainda que superficial, sobre a evolução dos currículos de Matemática, em Portugal, desde a segunda metade do século XX na sua relação com os contextos sociais. A nossa atenção centra-se principalmente sobre o ensino secundário e o terceiro ciclo do ensino básico e nos temas matemáticos a tratar nestes ciclos. Na parte final, apresentamos uma proposta de temas a incluir, formal ou informalmente, nestes ciclos de ensino.

Abstract

In this work we try to give a superficial overview of the evolution of Mathematics *curricula* in Portugal over the last years together with its social context. We focus our attention in the secondary school *curriculum* and the third cycle of basic school curriculum, since the second half of XX century and in the mathematical topics to be treated in those grades. We also present a proposal concerning themes that we think could be included in those grades, in a formal or informal way.

Introdução

É grande a confusão entre os conceitos programa e currículo. Não temos qualquer pretensão de analisar estes conceitos detalhadamente, mas, por uma questão de clarificação, vamo-nos socorrer duma citação de Ponte, Matos e Abrantes (1998, pág. 9) com a qual nos identificamos:

"…conjunto de orientações sobre o ensino de um dado ciclo de estudos ou de uma dada disciplina, acompanhado de indicações para a sua implementação prática. De um modo geral, um currículo contempla objectivos, conteúdos, metodologias e materiais e formas de avaliação".

O currículo de Matemática, em Portugal, tem sofrido mudanças ao longo dos tempos que, de uma forma geral, reflectiram alterações ao nível das necessidades de ordem social e política (Porfírio, 1998). Este autor afirma mesmo que as reformas curriculares em Portugal têm assumido a forma de *mudança por decreto*. Nesta óptica, um currículo nunca pode ser tido como definitivo, pois a sociedade está em constante mutação. Deverá a Matemática escolar reflectir apenas mudanças sociais e políticas? Qual o papel reservado à Matemática, enquanto ciência em desenvolvimento permanente? Deverá a Matemática escolar mudar "atrás" das mudanças sociais, ou, pelo contrário ser ela própria agente dessa mudança?

Neste trabalho focamos a nossa atenção essencialmente na evolução dos conteúdos embora seja feita uma abordagem superficial às outras componentes do currículo.

Passado e Presente

Já que todo o currículo é influenciado pelas características e necessidades sociais, cada currículo deverá ficar definitivamente impregnado pelas marcas do tempo e da sociedade a que se refere. A influência das necessidades sociais no desenvolvimento curricular, pode ser questionável, uma vez que sempre existiu um currículo nacional, sendo as necessidades sociais bem diferenciadas, às vezes em regiões do país bem vizinhas. O desenvolvimento curricular é principalmente influenciado por outros factores, tais como a forma como se encara o que é importante na disciplina, as suas principais características e natureza que influenciam a prioridade dos temas a integrar no currículo e a forma de os trabalhar (Porfírio, 1998). Vejamos de seguida, de forma abreviada, como evoluiu o currículo de Matemática desde o pós-guerra.

Segundo Ponte (2003a) o currículo de Matemática sofreu uma grande evolução na segunda metade do século XX. Na primeira metade desse século, a Matemática era encarada como uma "disciplina mental" e o seu ensino era marcadamente elitista (Abrantes, 1994). Ponte (2003a) afirma que durante muitos anos, no ensino pré-universitário, os alunos estudavam Aritmética, Geometria e Álgebra. Os programas eram pouco mais do que uma lista de conteúdos a tratar e, em todos os níveis de ensino, a ênfase era colocada no treino e técnicas de cálculo. Para Ponte (2003a) o ensino da Matemática, nesta altura, em Portugal, era essencialmente orientado para a aprendizagem do cálculo.

No período pós-segunda guerra mundial, a rápida evolução da tecnologia e as condições socioeconómicas influenciaram uma mudança profunda no ensino da Matemática a nível internacional[1]. Esta nova abordagem apresentava a Matemática de uma forma unificada, apoiando-se na linguagem dos conjuntos, dando especial destaque às estruturas algébricas e à lógica (Ponte, 2003a; Abrantes, 1994).

Começava assim o movimento da Matemática Moderna. Segundo Matos (2006), esta reforma inicia-se em 1959, em Royaumont, com uma convenção de 60 professores de 20 países, sob o auspício da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE). Neste encontro pretendia-se lançar as bases para uma reforma do ensino da Matemática pré-universitária. Este movimento procurava proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas, e ao mesmo tempo, melhorar as suas competências de cálculo (Ponte, 2003a). Na altura, argumentava-se que as dificuldades dos alunos decorriam do

[1] Segundo Porfírio (1998) e Ponte (2003a), neste período, ao nível do ensino universitário, introduziram-se novos temas resultantes de investigações recentes, como por exemplo, a teoria de conjuntos, a lógica e a teoria da probabilidade. Assim, os matemáticos reclamavam a necessidade de o ensino da Matemática, nos níveis de ensino mais elementares, preparar os alunos para os estudos daqueles temas.

facto de estes não relacionarem conceitos. Em Portugal este movimento começou a fazer-se sentir no início da década de 60. Até aí os programas de Matemática datavam de 1947 e eram apoiados por livros únicos escolhidos pelo Ministério da Educação e usados por todo o país. O movimento da Matemática Moderna, segundo Ponte (2003a), conheceu em Portugal dois momentos distintos, uma primeira fase, de carácter experimental, incidiu sobre o então chamado 3.º Ciclo do ensino liceal, correspondente aos actuais 10.º e 11.º anos de escolaridade[2], sob orientação do professor José Sebastião e Silva. Segundo Matos (2006), esta reforma curricular começou a ser implementada em 1963 em três turmas constituídas pelos melhores alunos do 6.º ano (actual 10.º ano de escolaridade), uma em cada um dos liceus nacionais (Lisboa, Porto e Coimbra). Até 1965 o número de turmas iria aumentar para dezanove, distribuídas pelos liceus de Lisboa, Porto, Coimbra, Braga e Leiria. O programa experimental incluía novos temas como a Lógica, a Teoria dos Conjuntos, Álgebra (grupos, anéis, corpos, números complexos, álgebra de Boole, álgebra linear), Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico aproximado. Alguns temas "clássicos" mantinham-se (Cálculo Diferencial, Trigonometria e Geometria Analítica) e desaparecia a Aritmética Racional (Matos, 2004), embora alguns tópicos de Aritmética Racional aparecessem diluídos ao longo do programa. Nesta fase experimental os alunos eram sempre os melhores dos respectivos liceus e os professores que leccionavam a chamada “turma piloto” eram cuidadosamente escolhidos. Da autoria de Sebastião e Silva havia um manual e um “livro guia” distribuído em fascículos aos alunos e professores. A edição destes textos era feita pelo Ministério da Educação com a cooperação da OCDE.

Esta “turma piloto” tinha mais um tempo lectivo semanal do que as outras turmas que seguiam o programa tradicional. Nos anos 70[3] deu-se início à segunda fase da introdução da Matemática Moderna: a Matemática Moderna para todos! Elaboraram-se novos programas e manuais escolares e apareceram novas indicações metodológicas, ainda que de forma muito incipiente. Enquanto, na primeira fase, a mudança de conteúdos foi precedida por uma reflexão acerca dos métodos a usar e por um acompanhamento constante dos poucos docentes intervenientes, que, recorde-se, trabalhavam com turmas de poucos e bons alunos, já na segunda fase, tendo-se este ensino generalizado a todos os níveis, alunos e professores, não houve a mesma preocupação (Porfírio, 1998). Nessa altura desenvolveram-se várias acções de formação apenas com o intuito de actualizar cientificamente os professores. Estes programas, com alguns retoques, sobreviveram em Portugal até 1991, tanto para o 3.º Ciclo do Ensino Básico[4] como para o Ensino Secundário e, de uma forma geral, o domínio de técnicas teve sempre um grande peso nestes programas retocados (Porfírio, 1998).

[2] Em Portugal, actualmente, estes níveis de escolaridade, não obrigatórios, são parte integrante do Ensino Secundário (15 – 17 anos), composto por 3 anos de escolaridade.

[3] Segundo Matos (2004), em 1977 é lançado o Ano Propedêutico (actual 12º ano). Faziam parte do programa para este ano: cónicas, análise infinitesimal, estruturas algébricas, números complexos e vectores e transformações geométricas.

[4] Este nível de ensino (obrigatório), precede o ensino secundário, e é composto por 3 anos de escolaridade (11- 14 anos).

Assim, no nosso país

> "*…o treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar. Em vez de uma substituição da Matemática tradicional pela Matemática moderna, verificou-se uma integração das duas.*"
>
> (Ponte, 2003a, p. 12)

Enquanto em Portugal se generalizava a filosofia da Matemática Moderna a todo o ensino, na década de 70 nos Estados Unidos da América já apareciam críticas ferozes ao movimento da Matemática Moderna. Com efeito, como as competências dos alunos tanto no raciocínio, como na resolução de problemas e no cálculo não mostrassem quaisquer progressos (Ponte, 2003a), antes pelo contrário, o movimento *back to basis* ganha algum terreno. No entanto, este movimento entra rapidamente em declínio, tendo como principal causa a publicação dos resultados do *Second International Mathematics Study*. Segundo este estudo, o Japão é o país que consegue os melhores resultados, seguido de perto por várias nações europeias. Simultaneamente este estudo revelou uma situação preocupante no ensino da Matemática dos Estados Unidos (Matos, 2004). Em Portugal o movimento *back to basis* passou praticamente despercebido. Segundo Ponte (2003a) não haveria razões para a comunidade portuguesa reclamar mais destaque para as competências do cálculo, pois, na realidade, apesar das alterações curriculares ditadas pelo movimento da Matemática Moderna, as competências de cálculo continuavam a ser fundamentais para ultrapassar com sucesso os exames de acesso à Universidade.

A década de 80 trouxe a publicação de alguns documentos tais como, *Agenda for Action*, *Mathematics Counts* e *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*, e viu surgir um novo movimento de reforma no ensino da Matemática a nível internacional. O movimento da Matemática Moderna tinha trazido consigo um novo simbolismo, por vezes incompreensível, um rigor de linguagem que não se adequava já ao informalismo social e que, por isso, não era adoptado pelos alunos e professores com grande entusiasmo. O surgimento de uma juventude com pouca apetência pelo esforço intelectual, fruto das modificações sociais da época e da primeira grande massificação do ensino, foi outro dos factores de insucesso desta experiência.

Em 1988, em Portugal, a recém-criada Associação de Professores de Matemática edita o documento *Renovação do Currículo de Matemática.* Neste documento, pela primeira vez entre nós, é dada especial atenção à resolução de problemas e à utilização das novas tecnologias. São aí também expostas as principais orientações curriculares dos anos 80. Segundo Porfírio (1998) estas perspectivas contrastavam fortemente com os programas que estavam em vigor nessa altura.

A Lei de Bases do Sistema Educativo aprovada em 1986 proporcionou ao Ministério da Educação o ensejo para proceder a uma reformulação geral dos programas de Matemática no início da década de 90 (Ponte, 2003a). No que diz respeito ao ensino secundário, esta reforma ficou fortemente marcada pela diminuição de uma hora semanal na escolaridade da disciplina de Matemática (de 5 para 4 horas). Com programas concebidos para uma escolaridade de 5 horas semanais, nos 10º e 11º anos a extensão dos programas cedo se fez notar. Nos finais da mesma década acontece nova revisão curricular, inevitável tendo em vista a desadequação da extensão dos programas às horas lectivas dedicadas à disciplina. Segundo Ponte (2003b), este processo foi conduzido de uma forma completamente diferente de outras reformas ou revisões curriculares. Os professores, desta vez, foram apoiados, nomeadamente através de vários mecanismos de acompanhamento que incluíam, por exemplo, publicação de brochuras, criação de um corpo de professores acompanhantes e cursos de formação. Esta última reformulação curricular[5] tentou acompanhar as novas correntes que, entretanto, se tinham vindo a afirmar no panorama internacional (Santos, Canavarro & Ponte, 2000). A Geometria, a Estatística e as Probabilidades surgiram valorizadas e, segundo Santos, Canavarro & Ponte (2000), na abordagem aos conceitos deu-se primordial importância à ligação com a realidade. Em consonância com as *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* foram recomendadas novas metodologias, como por exemplo, o trabalho de grupo e a introdução das novas tecnologias (calculadora gráfica e computador). Para Buescu (2003) esta reforma foi infeliz por duas razões: primeiro, porque foi realizada sem a intervenção da comunidade matemática, segundo, porque não teve em conta as críticas desta mesma comunidade, no sentido de evitar erros desnecessários. Ainda segundo Buescu, quando esta reforma foi implementada entre nós, muitas das suas propostas já tinham sido abandonadas. Por exemplo, em 1995 a Comissão de Acompanhamento Curricular, do Reino Unido, aconselhava a que se abandonassem as calculadoras nos exames nacionais. Em Portugal foram fortemente introduzidas por essa época.

No início da década de 90 foram igualmente apresentados os novos programas para o 3.º Ciclo do Ensino Básico. Nesta reforma foram introduzidos tópicos de Estatística e Probabilidades e reservou-se um papel de destaque para a Geometria. Este programa não era tão rígido quanto os anteriores, pois permitia alguma margem de manobra ao professor, e simultaneamente centrava o trabalho mais nos alunos, apontando para uma aprendizagem construtiva (Cabrita, 1992). Mas, logo em 1994[6], começaram a levantar-se algumas vozes de descontentamento entre os professores que leccionavam estes níveis. Estes afirmavam ser praticamente impossível cumprir o programa, caso se quisesse obter sucesso educativo (Batista e Barros, 1994). Este facto já tinha sido colocado em evidência pelos professores que estiveram envolvidos na fase de experimentação destes programas (Cabrita, 1992).

[5] Segundo Ponte (2003b), este programa dá continuidade à iniciação à Análise Infinitesimal e Cálculo Algébrico, reservando um lugar significativo à Geometria, à Estatística e às Probabilidades.

[6] Estas críticas tornam-se relevantes pois permitem avaliar como decorreu a implementação no terreno da reforma, ganhando mais força, por se referirem a um ciclo de ensino por completo.

Em 1994, Batista e Barros defendiam a existência de um "*programa mínimo exequível*" baseado nos temas considerados prioritários. Sugerem que alguns temas sejam excluídos, tais como semelhanças de figuras, lugares geométricos, estatística, espaço - outra visão e os subtemas rotações e isometrias. Estas autoras sugerem a exclusão destes temas não por terem menos interesse do que outros, mas pela possibilidade de integrar alguns destes temas noutras unidades temáticas e, principalmente, pela grande extensão do programa que obrigava a retirar vários temas.

No que diz respeito à extensão do programa concordamos plenamente com estas autoras. A nossa experiência profissional confirma-o. Principalmente em relação aos 7.º e 9.º anos de escolaridade. Nestes anos, o cumprimento integral do programa só pode ser feito à custa da qualidade do ensino. De facto, em todos os anos lectivos em que leccionámos aqueles anos de escolaridade não conseguimos cumprir o programa. Não fomos caso isolado, pois os colegas que à altura leccionavam connosco aqueles anos de escolaridade também não cumpriram o programa. O conteúdo mais prejudicado, independentemente de ser do 7.º ou 9.º ano, era, invariavelmente, a Geometria. Isto porque usualmente nas planificações a longo prazo, nas escolas, este tema surgia como o último a tratar, por ser de maior complexidade. Tal facto poderá ajudar a explicar as dificuldades que grande parte dos alunos do 10.º ano de escolaridade sentem durante quase todo o 1.º período, onde os conhecimentos de Geometria têm que ser necessariamente mobilizados.

Em 2001, foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (CNEB), que passou a coexistir com os programas de 1991. Um dos efeitos desta reorganização curricular foi a diminuição da carga semanal da disciplina de Matemática que passou de 200 para 180 minutos. A este propósito Marques de Sá (2003), em *Alguns pontos críticos no Ensino da Matemática*, refere que esta disciplina tinha em 1997, um peso relativo de 13% em relação ao total da carga horária prevista para o 3.º Ciclo do Ensino Básico. Tendo esse peso descido[7] para os 11%[8] depois da reorganização curricular.

Dificilmente se entende esta redução horária numa disciplina que frequentemente coloca muitos problemas aos alunos, principalmente quando simultaneamente se pede aos professores que trabalhem o programa colocando a ênfase na resolução de problemas e nas experiências de aprendizagem.

Centremo-nos agora no CNEB. Sem proceder à exclusão de temas[9] que tinha vindo a ser insistentemente sugerida por variados autores/professores, esta reforma

---

[7] Aconteceu o mesmo para a disciplina de Português. Esta pequena mudança não foi positiva, na medida em que, é por demais conhecida a dificuldade de grande parte dos alunos do Ensino Básico em interpretar os enunciados dos exercícios ou problemas. Este facto torna-se mais grave, pois a aprendizagem da leitura pode influenciar certos aspectos da aprendizagem da matemática, como por exemplo, a resolução de problemas (Morais, 2006).

[8] Fonte Deb (2001).

[9] Os conteúdos matemáticos a tratar são: Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidade; Álgebra e Funções. Segundo (Santos, Canavarro & Machado, 2006) estas áreas associam-se com facilidade aos temas centrais dos programas do 3.º Ciclo, em vigor desde 1991.

introduziu um novo conceito: as **competências** essenciais. Sejam elas de carácter geral ou específico, todo o edifício se constrói baseado nas competências que se espera que os alunos adquiram no fim de cada ciclo de estudos. Tudo deve ser ajustado ao que se espera que o aluno seja capaz de fazer, das atitudes que se espera que seja capaz de ter.

As competências são então definidas em função de oito aspectos que combinam atitudes gerais dos alunos com capacidades matemáticas específicas (Santos, Canavarro & Machado, 2006). Segundo Ponte, Matos, e Abrantes, (1998), na realidade a definição de *competências* acaba por ser equivalente a definir um programa mínimo que todos os alunos devem receber, ou seja, ao definir-se competências está-se na realidade a "impor" objectivos mínimos. Para estes autores, esta definição de competências pode, na prática, estar a criar dois currículos distintos, correndo-se o risco de os professores optarem na sua generalidade por pôr em prática o mais limitado (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998).

Para Crato (2006) a introdução do *Currículo Nacional* de 2001 criou uma ambiguidade legal. Na realidade de acordo com os objectivos deste currículo, o currículo de 1991 teria obrigatoriamente de deixar de ser usado. Mas tal não aconteceu, o currículo de 1991 não foi revogado. Como consequência deste vazio legal, ambiguidade e até, nalguns casos, uma certa incompatibilidade, os professores refugiam-se cada vez mais nos manuais, que como bem sabemos, em grande parte, são de qualidade duvidosa[10]. Também Serrazina e Oliveira (2005) destacam a falta de um acompanhamento, sob a forma de apresentação e divulgação de possíveis formas de concretização do CNEB, o que levou a constrangimentos na implementação deste e à confusão de conceitos como *objectivos* e *competências*.

Assim, os programas de 1991, mais prescritivos, assumem os temas matemáticos como conceitos estruturantes; o currículo, mais orientador, equilibra os conteúdos matemáticos com as lógicas das abordagens respectivas (Santos, Canavarro & Machado, 2006).

Mais recentemente, no ano lectivo 2003/04, entrou em vigor uma nova reforma no ensino secundário onde foram criadas 3 novas disciplinas de Matemática: Matemática A, para os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas; Matemática B, para os Cursos Científico-Humanístico de Artes Visuais e para os cursos Tecnológicos; Matemática Aplicada às Ciências Sociais, para os alunos do Curso Científico-Humanísticos de Ciências Sociais e Humanas e para o Curso Tecnológico de Ordenamento do Território. Segundo Santos, Canavarro & Machado (2006), a diversidade de disciplinas em Matemática ficou a dever-se à procura de uma maior adequação dos alunos aos diferentes percursos académicos ou profissionais que pretendem seguir.

Curiosamente vários cursos universitários, da área das engenharias, admitem alunos oriundos quer do percurso que contém Matemática A quer do percurso que

[10] O que levou, em 2005, o Ministério da Educação a introduzir a certificação de manuais através de uma comissão especializada designada para o efeito.

contém Matemática B, o que está a tornar algo caótica a integração dos alunos que ingressam no primeiro ano destas engenharias.

Não poderíamos finalizar esta secção sem referir o novo programa[11] de matemática para o ensino básico, homologado em Dezembro de 2007. Este documento tenta fazer uma ligação entre os programas de 1991 e o CNEB. A equipa redactora do documento apresenta algumas inovações ao nível de conteúdos a leccionar. Por exemplo, reforçaram-se os conteúdos de Estatística (com a introdução ao estudo de dados bivariados), estuda-se a função quadrática simples $y = ax^2, a \in Z$. Alguns conteúdos que antes se estudavam no 3.º ciclo passam a ser leccionados no ciclo anterior, por exemplo, os números compostos e primos. Os conteúdos estão organizados por ciclo tal como acontece no CNEB. Introduzem-se as capacidades transversais e existe uma preocupação clara com a articulação entre ciclos. Para implementar e desenvolver este programa parece-nos essencial que seja aumentada a carga horária semanal da disciplina, pelo menos para o 3.º ciclo. Com efeito, além do programa ser extenso, é ainda pedido que ao longo do ciclo se efectuem experiências matemáticas ricas, como jogos, pequenas investigações, trabalhos de projecto/grupo. Na nossa opinião, só com mais tempo para leccionar a disciplina esta abordagem terá resultados positivos.

Antes da implementação a nível nacional está prevista uma fase experimental no ano lectivo 2008/09 com 40 turmas de todos os ciclos do ensino básico. Só depois esta mudança deve ser generalizada a todo o país.

Depois desta pequena incursão temporal, há duas conclusões que podemos retirar de modo imediato:

I. as reformas curriculares, em Portugal, para a disciplina de Matemática, seguiram no essencial os movimentos internacionais vigentes, à excepção do movimento *back to basis*, que não teve grande repercussão entre nós;
II. o desenvolvimento da Matemática como ciência, apenas por duas vezes, teve algum peso na construção do currículo:

    a. na reforma do professor Sebastião e Silva. Introduziram-se tópicos sobre teoria de conjuntos, lógica, teoria da probabilidade e cálculo numérico. A introdução destes temas, seguiu a tendência internacional e resultou de uma pressão da comunidade matemática. Com efeito, esta reclamava, na altura, a necessidade de o ensino da Matemática, nos níveis de ensino mais elementares, preparar os alunos para os estudos daqueles temas;
    b. na inclusão de tópicos de Estatística no 3.º ciclo do Ensino Básico. Segundo (Ponte, Matos, e Abrantes, 1998) esta é uma área que corresponde a uma maneira actual de fazer Matemática, e tem uma importância crescente na sociedade

[11] Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/programa_matematica/programa_matematica.asp

Novos temas para o currículo

No documento *Renovação do Currículo de Matemática*, que data de 1988, a certa altura pode-se ler:

> *"Novos temas poderão ganhar o direito a um lugar no currículo, ao mesmo tempo que alguns dos conteúdos existentes serão tratados noutra perspectiva e outros poderão perder a sua importância ou mesmo desaparecer:*
> *Tópicos a ser introduzidos, poderão incluir, por exemplo: (…)*
> *3. Matemática discreta. Serão de considerar diversos tópicos ligados ao estudo das propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas finitos, incluindo o estudo de grafos e das suas representações matriciais, um estado mais aprofundado de sucessões e séries, de cálculo combinatório, e de equações às diferenças.*
> *4. Métodos de Matemática numérica. Poderão ter um lugar relevante tópicos como métodos iterativos de solução de equações e sistemas de equações algébricas, cálculo matricial, aproximações e erros."* (APM, 1988, p. 61-62)

As normas do NCTM apontam nesta mesma direcção: a introdução de novos temas no currículo. Além disso, *Principles and Standards* (2000), da NCTM, dão especial importância a temas de Matemática Discreta, defendendo que estes temas deverão ser leccionados ao longo de toda a escolaridade. As áreas que a NCTM privilegia, dentro da matemática discreta, são a combinatória, os processos iterativos e a teoria de grafos. Na nossa opinião existem 2 temas que podem e devem ser trabalhados: a teoria de grafos, a partir do 3.º Ciclo do Ensino Básico; a teoria de jogos, no ensino secundário. Julgamos que a integração destes temas daria uma visão bem diferente da Matemática aos nossos alunos. Com efeito, estes são temas que põem em evidência, de uma forma imediata, a presença e a importância da Matemática no nosso dia-a-dia.

Teoria de Grafos

Nos currículos actuais quer do ensino obrigatório quer do ensino secundário, na sua generalidade, não é contemplada qualquer unidade didáctica sobre Teoria de Grafos. A única e saudável excepção é o caso da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, destinada a alunos das áreas de Ciências Humanas e Sociais e ao Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

Dentro da sala de aula, este tema revela grandes potencialidades tanto ao nível do trabalho individual como ao nível do trabalho de grupo. Sendo este um ramo do conhecimento com aplicações em muitas outras áreas (Biologia, Sociologia, Psicologia, Relações Internacionais, Arquitectura, Engenharia, Música, Química…) coloca em evidência, de forma muito clara, a importância da Matemática no nosso quotidiano. É ainda possível mostrar, de forma simples e natural, o facto do conhecimento de algumas técnicas matemáticas poderem desempenhar um papel importante no processo de tomada de decisões pelas empresas.

O ensino de Teoria de Grafos, a um nível elementar, apresenta a grande vantagem de não necessitar de pré-requisitos, permitindo assim que tanto bons alunos como alunos com mais dificuldades, acompanhem com alguma facilidade e interesse o desenvolvimento dos conceitos escolhidos, ajudando assim a combater o desinteresse que por vezes se instala dentro da sala de aula de Matemática (Feiteira, 2007). Por ser um tema que se presta a modelar, de forma simples, situações da vida real constitui uma oportunidade ímpar de levar os alunos a fazer a ligação problema $\rightarrow$ modelo $\rightarrow$ solução $\rightarrow$ implementação $\rightarrow$ validação.

Além de mais, a Teoria de Grafos é uma área onde existe muita investigação. Muitas são as teses de doutoramento e os artigos científicos que se produzem actualmente neste tema. Oferece, assim, uma oportunidade de mostrar aos alunos uma Matemática activa e viva. Um exemplo do que afirmamos é o do problema do caixeiro-viajante, que pode ser facilmente apresentado aos alunos, conjuntamente com algumas das heurísticas mais ingénuas, mas cuja resolução exacta, em tempo útil, contínua a ser objecto de inúmeros estudos e está longe de se encontrar resolvido.

A integração de uma unidade, ou mais unidades dispersas ao longo dos anos de escolaridade, que contenha(m) alguns tópicos de teoria de grafos poderá permitir um excelente desenvolvimento ao nível da resolução de problemas, comunicação, raciocínio e modelação. Esta integração poderia surgir de duas formas distintas. Uma a um nível informal, onde o professor poderia trabalhar alguns conteúdos de teoria de grafos entre unidades didácticas ou como motivação na introdução de um novo tema,como por exemplo, funções ou sequências numéricas (ver Feiteira, 2007, capítulo III). Outra a um nível formal, fazendo um reajustamento dos conteúdos por ciclo, nomeadamente agrupando-os de uma forma diferente.

Acabamos esta secção com um pequeno exemplo que ajuda a ilustrar as potencialidades deste tema dentro da sala de aula.

Numa determinada turma, a uma determinada disciplina, um professor identificou as seguintes situações: a Ana não pode estar sentada perto da Raquel porque falam demais entre si; a Ângela não pode estar sentada perto da Catarina e da Maria, pela mesma razão; a Catarina não pode estar sentada perto Maria, pela mesma razão. Como distribuir estas alunas pela sala de modo a que não perturbem o funcionamento da aula? (retirado de Feiteira, 2007) Esta situação pode ser modelada por um grafo. Assim, Suponhamos que o vértice 1 representa a Ana, o vértice 2 representa a Raquel, o vértice 3 representa a Ângela, o vértice 4 representa a Catarina e o vértice 5 representa a Maria. Construindo um grafo de incompatibilidades, isto é, um grafo em que dois vértices estão ligados caso representem pessoas que não podem estar juntas, obtemos o grafo da figura 1. De seguida, iremos colorir o grafo de tal forma que os vértices adjacentes tenham cores diferentes (figura 2).

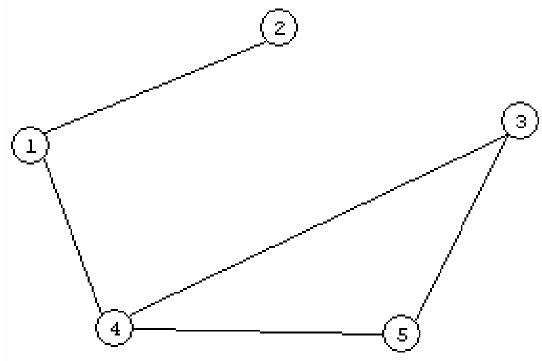


figura 1

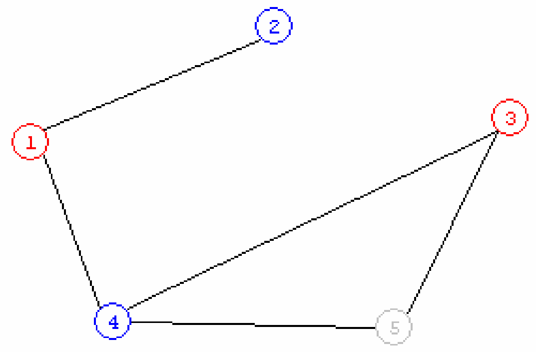


figura 2

Analisando a figura 2 o professor poderá sentar a Ana com a Ângela (ambas têm a mesma cor), a Catarina e a Raquel, enquanto que a Maria terá que se sentar num sítio afastado de qualquer uma das suas amigas. Note que esta coloração não é única pois o vértice 1 também pode ser pintado de cinzento e o vértice 2 pode ser pintado a vermelho ou azul. Desta forma o professor dispõe de três configurações diferentes para sentar estas amigas, podendo então optar por aquela que achar melhor. Esta questão poderá suscitar a discussão entre os elementos da turma sobre a melhor solução. Poderá acontecer que, trabalhando esta questão em pequenos grupos, os diferentes grupos determinem soluções diferentes.

Teoria de Jogos

Informalmente, a teoria dos jogos estuda as soluções ou equilíbrios possíveis em situações de conflito de interesses. A sua origem está intimamente ligada ao matemático John Von Neumann[12], que em 1928 publicou *Zur Theorie der Gersellschaftsspiel* (Sobre a teoria dos jogos de estratégia) e estabeleceu os primeiros esboços de uma teoria especializada em lidar com a natureza humana.

A premissa fundamental da teoria dos jogos é que os jogadores agem racionalmente, tomando as decisões de uma forma egoísta. De certa forma é equivalente afirmar que os jogadores da teoria dos jogos se assemelham aos responsáveis máximos pelas grandes decisões, sejam eles empresários ou políticos, e daí esta teoria ser uma ferramenta tão poderosa na análise de contextos sociais. Para ilustrar a afirmação anterior analisemos o famoso dilema dos prisioneiros. Imaginemos que dois assaltantes são capturados pela polícia e que, apesar de todos os esforços, a Polícia Judiciária não consegue obter provas suficientes para incriminar, de forma inequívoca, os dois assaltantes. Como último recurso, o inspector responsável pela investigação separa os dois assaltantes (de modo a que estes não tenham hipóteses de falar um com o outro) e apresenta-lhes a seguinte situação: se ambos confessarem o crime cumprirão 4 anos de prisão; se ambos não confessarem cumprirão 3 anos de prisão; por fim, se um confessar e o outro não

[12] John Von Neumann (1903-1957), matemático, nascido na Hungria, radicado nos Estados Unidos da América desde os anos 30.

confessar, o delator cumprirá 1 ano de prisão e o outro cumprirá 6 anos de prisão. A matriz que traduz a situação é a seguinte:

		Prisioneiro B	
		Confessa	Não Confessa
Prisioneiro A	Confessa	-4, -4	-1, -6
	Não Confessa	-1, -6	-3, -3

Como em qualquer das hipóteses os prisioneiros cumprem pena, estes acabam por perder anos de vida. Esse facto traduz-se pela presença de números negativos na matriz. Em qualquer uma das quadrículas preenchidas com números, o primeiro número diz respeito ao prisioneiro A e o segundo diz respeito ao prisioneiro B. Como devemos ler a tabela? Imaginemos que o prisioneiro A confessa e o prisioneiro B não confessa. Neste caso, a quadricula que traduz a situação é (-1, -6), isto é, o prisioneiro A cumpre um ano de prisão enquanto o seu colega cumprirá seis anos. Qual será a estratégia[13] a seguir por cada um dos prisioneiros? Olhando para a matriz anterior, facilmente se conclui que a melhor estratégia a adoptar (para qualquer um dos jogadores), se um deles escolher não confessar, é confessar. Por outro lado, se um deles escolher confessar, a melhor estratégia também é confessar. Portanto, se os dois assaltantes agirem racionalmente e individualmente, confessarão o crime (dado que se um deles não confessar fica claramente prejudicado). Este resultado deriva do facto dos prisioneiros não poderem contactar entre si, e por isso, não poderem estabelecer compromissos. O curioso e paradoxal neste jogo é que se ambos seguirem uma lógica individual acabam mais prejudicados do que se seguirem uma lógica colectiva (de confiança no parceiro).

Outros jogos poderiam ser analisados, a nível do ensino secundário, como os jogos de estratégia pura ou jogos de estratégia mista (Feiteira, 2006). Estes jogos poderiam ser trabalhados recorrendo apenas aos conhecimentos que os alunos já dominam, nomeadamente a programação linear.

Esta é uma das poucas teorias de que dispomos que definem procedimentos racionais para situações que antes eram encaradas como irracionais. Durante a segunda grande guerra, áreas como a logística, a guerra submarina e a defesa aérea basearam-se directamente na teoria dos jogos que, depois disso, se desenvolveu no contexto das ciências sociais. Hoje, a maioria dos jogos com aplicações práticas são aqueles em que se podem formar várias coligações entre os jogadores, podendo existir comunicação entre eles e em que a conjugação de esforços pode melhorar a solução para todos. Por tudo isto, na nossa opinião, este é um tema que deveria ser abordado no nosso ensino secundário.

[13] Entendemos como estratégia qualquer regra para escolha de decisões. Um jogador procura sempre uma estratégia que aumente os seus ganhos e diminua as suas perdas.

Considerações finais

A teoria de grafos e a teoria de jogos fazem parte de uma Matemática com desenvolvimento recente. São portanto uma nova forma de fazer Matemática e, o que é mais importante, têm uma importância crescente na sociedade.

Qualquer um dos temas que referimos, ainda que muito superficialmente, tem a enorme vantagem de, de uma forma simples, mostrar aos nossos alunos a Matemática como uma ciência necessária e fundamental para o funcionamento da sociedade.

Cada currículo tem a marca temporal de uma sociedade, mas também deve reflectir as necessidades dessa sociedade. A sociedade actual, em constante mudança, obriga a que a Escola responda e acompanhe essas mudanças, reflectindo e antevendo as necessidades dos alunos na sua inserção na sociedade.

Neste sentido, o currículo da disciplina de Matemática deve sofrer um desenvolvimento que reflicta o desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência, e das novas áreas proporcionadas por esse desenvolvimento.

Bibliografía

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: Uma experiência do projecto MAT$_{789}$* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Associação Professores de Matemática (1988), *Renovação do Currículo de Matemática*, Disponível em: www.apm.pt/rinovacao/inovacao.pdf
- Batista, D., Barros, J. (1994), Programa de Matemática do 3.º Ciclo – uma reflexão crítica, *Educação e Matemática,* 30, p.9-10, Lisboa: APM
- Buescu, J., (2003), Ensino da Matemática: um sintoma, várias causas, *Gazeta da Matemática*, n.º 145. Lisboa: SPM
- Cabrita, J. (1992), Os Novos Programas de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico *In Actas do ProfMat 1992*, Viseu: APM
- Crato, N. (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: como recuperar o tempo perdido?*, p. 121-130, Lisboa: Gradiva
- Departamento do Ensino Básico, (2001), Reoganização Curricular do Ensino Básico – Princípios, Medidas e Implicações. Disponível em: http://www.dgidc.min-edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorganizacao_curricular_EB.asp
- Feiteira, R. (2006), Programação Linear e Teoria dos Jogos: que lugar podem ocupar nos actuais programas de Matemática?, *Educação e Matemática*, n.º 88, pp.2-6, Lisboa: APM
- Feiteira, R., (2007), *Grafos para todos – sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve), Colecção de Teses, Lisboa: APM
- *Matos, J. (2004),* Reformas curriculares e livros de texto de Matemática*.* Disponível em: http://phoenix.sce.fct.unl.pt/jmmatos/CLIVROS/CLINICIO.HTM

- Matos, J. (2006), A penetração da Matemática Moderna na revista Labor, *Union – Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*, n.º 5, p. 91-110, Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática. Disponível em: http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php?id=19#indice
- Marques de Sá, E. (2003), Alguns pontos críticos no Ensino da Matemática *In* Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 69-87, Lisboa: Conselho Nacional de Educação
- Morais, J. (2006), As relações entre a aprendizagem da leitura e a aprendizagem da matemática *In* Crato, N. (coord.), *Desastre no Ensino da Matemática: como recuperar o tempo perdido?*, p. 155-178, Lisboa: Gradiva
- National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics for school Mathematics,* Virginia: NCTM
- Ponte, J., Matos, J., Abrantes, P., (1998), Investigação em educação matemática – *implicações curriculares*, Lisboa: Instituto de Inovação Educacional
- Ponte, J. (2003a), *Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal.* Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf
- Ponte, J. (2003b), O Ensino da Matemática em Portugal: uma prioridade educativa? *In* Conselho Nacional de Educação (org), *O Ensino da Matemática – Situação e Perspectivas*, p. 21-56, Lisboa: Conselho Nacional de Educação
- Porfírio, J. (1998), Os currículo de Matemática: como têm evoluído, *Educação e Matemática,* 50, p.32-38, Lisboa: APM
- Santos, L., Canavarro, A., Machado, S. (2006), *Orientações curriculares actuais para a Matemática em Portugal.* Disponível em: http://www.ualg.pt/ese/eiem2006/Grupos%20de%20Discussão.htm
- Serrazina, L., Oliveira, I. (2005), O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática *In* Grupo de Trabalho de Investigação (eds), *O professor e o desenvolvimento curricular*, p. 35-62, Lisboa: APM

Rui Feiteira, (Évora, Portugal, 1976), professor de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário. Mestre em Matemática pela Universidade do Algarve.
Email: ruifeiteira@gmail.com

Marília Pires, (Lisboa, Portugal, 1955), professora Associada do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. Doutora em Matemática pela Universidade do Algarve.
Email: mpires@ualg.pt

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 197 - 214
ISSN: 1815-0640

Matechistes de fracciones

Liliana Elena Dri, Pablo Flores

Resumen

Los maestros de Matemáticas tienen que realizar grandes esfuerzos para lograr que sus alumnos aprendan una asignatura que no goza de buena prensa. En este artículo relatamos una experiencia que hemos llevado a cabo empleando el humor como recurso didáctico en el aprendizaje de las fracciones. La experiencia ha tenido lugar con niños de 11 a 13 años de séptimo grado de una escuela municipal de la Ciudad de Buenos Aires. La maestra ha pedido a los chicos que elaboren chistes gráficos sobre las fracciones. Presentamos las producciones de los niños y su análisis.

Abstract

Mathematics teachers must make a great effort to get their pupils to learn a subject which lacks good press. In this article we tell about an experience we have undertaken using humour as a didactic resource in the fractions learning process. The experience has been done with children from 11 to 13 years old studying in the seventh grade of state school belonging to the city of Buenos Aires' Town Hall. Thus on teaching this topic, the teacher asked children to elaborate graphic jokes about it.

1. Introducción

Cuando la tarea docente se lleva a cabo con auténtica vocación, lograr que los alumnos puedan unir el placer al aprendizaje es una aspiración máxima, es alcanzar el éxito. Muchos profesores ven facilitado su trabajo, si no con todos, con la mayoría de sus estudiantes. Por ejemplo, las actividades deportivas de la clase de Educación Física atraen sin dudas a los niños; o las Ciencias Naturales son disfrutadas por un alto porcentaje de los que deben aprenderlas.

Pero un maestro de Matemática debe aplicar grandes esfuerzos para lograr un mínimo de adhesión. En principio, la asignatura no goza de buena prensa por lo tanto ya el punto de partida suele ser negativo. Es cierto que existen alumnos con manifiesta inclinación por los números y todas sus aplicaciones pero son los menos y a veces, lamentablemente, esa tendencia es ahogada en las aulas por sus mismos profesores con presentaciones poco significativas o no adecuadas a la etapa operatoria de quienes las reciben.

Afortunadamente, en Pedagogía y Didáctica siempre son posibles nuevos caminos incluso en esta época en la que se compite con importantes estímulos que se ofrecen a niños y adolescentes y que acostumbran su atención a ritmos muy diferentes de los mantenidos por la escuela. Uno de esos senderos lo ofrece el humor y así fue propuesto a niños de 11 a 13 años de séptimo grado de una escuela municipal de la Ciudad de Buenos Aires. El proyecto surgió durante la búsqueda de ideas motivadoras y estimulantes, en el marco de otra propuesta mayor que, involucrando diversas tareas adaptadas de otras asignaturas y ya probadas en años anteriores, tenía como meta final aprender Matemática mirándola con otros ojos, de manera positiva, sin temor y con placer.

La primera firmante ha llevado a cabo una actividad innovadora, consistente en explotar la disposición positiva de los niños hacia el humor, para pedirles que elaboren chistes gráficos sobre conceptos matemáticos. La experiencia ha sido gratificante y ha permitido no sólo mejorar la relación didáctica, sino también la que establecen con las Matemáticas. En este artículo relatamos esta experiencia, centrándonos en la parte relativa a las fracciones.

Comenzamos por describir la experiencia general, sus antecedentes y el proceso que hemos seguido. Posteriormente nos centramos en una de las partes, la referida a los matechistes de fracciones, que concretamos. Posteriormente analizamos las producciones de los niños, tanto desde el punto de vista matemático como desde el empleo de recursos del lenguaje gráfico y humorístico. Finalizamos con unas conclusiones sobre el interés didáctico aportado por la experiencia.

2. Matechistes

Sus antecedentes pueden ubicarse en ciclos escolares previos en los que, coincidiendo con algunos temas en curso, se habían ofrecido algunos chistes publicados con anterioridad en distintos medios gráficos, con el objeto de romper la seriedad de los temas planificados. La idea había sido recibida con cierto agrado por los alumnos y, aunque esta inclusión no configuraba una tarea en sí misma, permitió realizar interesantes observaciones.

En primer lugar, se pudo constatar que los estudiantes sólo identificaban lo gracioso de la situación humorística si habían comprendido completamente el contenido con el cual estaba relacionado el chiste. Esa comprensión era condición necesaria para manejar el código implícito en él.

En segundo término, sabemos que a los niños, en su mayoría, les agrada dibujar porque constituye una vía que les permite jugar, expresarse e incluso, mostrar sentimientos y conflictos profundos. También es un hecho que el aprendizaje los somete con frecuencia a momentos de tensión y frustración. Uniendo ambas ideas, fue posible suponer que los chistes les agradaban porque tal vez les permitían, a través de un dibujo más o menos atractivo y el relato de una situación graciosa relacionada con un tema en estudio, ver el reflejo de algunas de esas situaciones conflictivas.

Por último, unos pocos niños, estimulados por estos chistes, realizaron, sin mediar consigna alguna por parte de su docente, sus propias creaciones humorísticas. Sus compañeros inmediatamente manifestaron admiración por esas obras y festejaban con más entusiasmo lo realizado por sus pares que aquellas hechas por profesionales.

Enlazando todas estas piezas, se pudo concluir que, ya que la experiencia había sido positiva, podría proponerse la producción humorística de los estudiantes integrada en la planificación anual de la asignatura. Como toda propuesta innovadora, en principio los objetivos no estaban completamente definidos, pero lo que sí se buscaba era una relación más suelta y fluida de los niños con la Matemática.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, se pensó que el momento más adecuado para proponer la tarea sería al final de cada tema. El proyecto incluía una secuencia de trabajo compuesta por las siguientes etapas: 1: Desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de una unidad temática, 2: Trabajo de evaluación, 3: Presentación de un chiste relacionado con el contenido dado, 4: Interpretación individual y puesta en común, 5: Creación propia de una situación humorística y 6: Difusión grupal

Es importante señalar que desde el principio se dejó expresamente aclarado que el trabajo no sería evaluado en el sentido escolar del término. Se explicó a los niños que su adhesión a la propuesta era voluntaria pero que era importante que participaran y que su aporte creativo serían siempre apreciado y bien valorado.

La aceptación fue casi total. Las reservas del comienzo fueron desapareciendo conforme sus intervenciones fueron llevando a aumentar el entusiasmo. Al iniciar el ciclo lectivo las obras se relacionaron más con juegos de palabras pero, avanzando el año, los niños se esforzaron por incluir los contenidos y sus trabajos fueron ganando profundidad.

Por supuesto, no todos los alumnos fueron capaces de crear su chiste en todos los temas pero en ocasiones, algunos ofrecieron más de un trabajo. Hubo estudiantes a quienes la inspiración no les llegó en el aula sino más tarde en su hogar. Otros, ya comenzaban a pensar en qué harían cuando se comenzaba un nuevo tema. Por último, sólo unos pocos no se comprometieron con la tarea en ningún momento del año. Para dar una idea cabal de la proporción de adhesión, de los cincuenta niños de la clase, solamente cinco no la aceptaron aunque, a pesar de ello, igualmente realizaron sus aportes en más de una ocasión, tal vez llevados por el entusiasmo general.

Al finalizar el curso, encuestas de evaluación permitieron conocer las opiniones de los alumnos respecto de la propuesta. Su actitud hacia la Matemática se mostraba altamente positiva y recordaban el proyecto que ellos mismos habían llamado “Los Matechistes”, como una de las experiencias más gratificantes de ese año.

3. Matechistes de fracciones

De acuerdo con el desarrollo de la planificación propuesta, al llegar a la mitad del período escolar se comenzó el estudio de fracciones. Para esta época, muchos niños ya habían alcanzado una "madurez artística" suficiente como para incluir conceptos importantes que quedaron plasmados en sus chistes.

La propuesta innovadora que nos planteamos se justificaba además por ciertos hechos que colaboraron a determinar las características del trabajo. En primer lugar nos basamos en las recomendaciones de abrir el currículo de matemáticas, de manera que la formación matemática contribuya a la formación ética, social e intelectual de los alumnos (Sesa y otros, 2001). Esta idea nos muestra una enseñanza más globalizada, en la que quepan actividades que den una dimensión cultural a las matemáticas.

Según el Diseño Curricular para el segundo ciclo de la Enseñanza Primaria de la Ciudad de Buenos Aires (Gobierno de la ciudad autónoma de Buenos Aires, 1999), que engloba las secuencias que corresponden a cuarto, quinto, sexto y séptimo grados, los contenidos de Matemática se encuentran agrupados en tres grandes bloques: "Números y operaciones", "Geometría" y "Medida". Los temas correspondientes a Fracciones, ubicados en el primer apartado, constituyen un extenso capítulo, posterior a los números naturales. Es importante hacer saber que, de acuerdo con la Ley Federal de Educación surgida de la reforma educativa llevada a cabo en la década pasada, el último de los grados nombrados dejaba de pertenecer al nivel primario. Posteriormente, por diferentes causas, la ciudad Capital de la República Argentina no se plegó a los dictados de esa ley y el séptimo grado volvió a insertarse en la escuela primaria. Por este motivo, sus contenidos en realidad, no aportan un caudal significativo en el diseño general sino que más bien configuran un repaso importante del nivel y agregan una profundización de los conocimientos, proponiendo, por ejemplo, actividades con mayor grado de dificultad. La amplitud del segundo ciclo y el hecho de que durante muchos períodos lectivos sólo se contara con un "prediseño" que, como su nombre indica, mostraba su cualidad de provisional, provocó que la mayoría de los docentes aplicara su propio criterio al planificar, restando integración y articulación al resultado final.

Por esta causa, la realidad repetida año tras año, nos muestra que los alumnos, llegan al último grado de su escuela primaria con niveles de preparación desiguales y que muchos de ellos presentan serias dificultades en la comprensión de temas que debieran dominar. Por lo tanto los contenidos de séptimo grado deben incluir en todos los temas una profunda revisión de lo correspondiente a grados anteriores buscando la integración y si el grupo lo permite, elevar un escalón en la dificultad de las actividades. Todo el trabajo tiene en última instancia, un objetivo ineludible: la preparación para el primer año de la escuela secundaria en el que los requerimientos pedagógicos son exigentes y dan por hecha la consecución de los aprendizajes previos.

Resulta así una planificación extensa con una enorme variedad de niveles en sus componentes por lo que es muy difícil conseguir un único texto apto con que acompañar su desarrollo. Por esta razón, se diseñó un material especial que incluye: la teoría ofrecida en clase y amplia cantidad y diversidad de actividades. El contenido de esta especie de manual está adaptado de diferentes fuentes tales como los documentos de apoyo brindados por los organismos oficiales de asesoramiento y publicaciones gráficas comerciales de distinta procedencia (Sesa y otros, 2001, entre otros).

En este contexto, las fracciones no son una excepción y el grupo con el que se llevó a cabo el proyecto de “Los Matechistes” realizó un importante repaso con abundantes explicaciones partiendo de los contenidos más elementales.

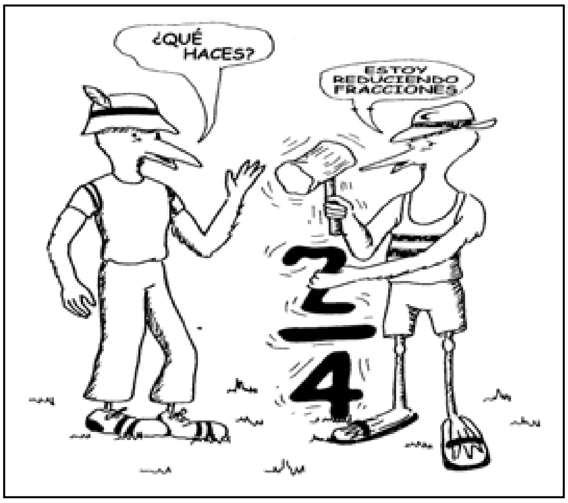


Figura 1: Britton y Bello, 1992

Muchos de los alumnos, que para esta altura del año tenían ya 12 ó 13 años en su mayor parte, mostraban con claridad estar alcanzando la transición entre el estadio de las operaciones concretas y el de las operaciones formales, evidenciada por su nivel de comprensión y capacidad de razonamiento. Además, presentaban una base de conocimientos previos más que aceptables. Es así que el desarrollo de esta unidad pudo extenderse hasta niveles interesantes de dificultad y fue posible, asimismo conseguir valiosos aportes al proyecto.

En estas circunstancias los contenidos incluidos en la unidad *“Números racionales, fracciones y números decimales”* fueron: Concepto de fracción, Representación gráfica, Fracciones más usuales, El entero, Fracciones propias, impropias y aparentes, Número mixto, Fracción de un número, Fracciones equivalentes, Fracciones decimales, Comparación de fracciones, Suma y resta de fracciones, Multiplicación y división de fracciones, Simplificación, Ejercicios combinados con fracciones, Ecuaciones con fracciones, Fracción de fracción, Números decimales, Operaciones con números decimales, Resolución de situaciones problemáticas. Todos estos puntos se ofrecían observando especialmente los límites que impone la etapa operatoria de los estudiantes. Sin embargo, en todo momento se les hacía saber que en ciclos posteriores irían alcanzando nuevos niveles de esos mismos conocimientos.

El desarrollo de la unidad completa duró alrededor de siete semanas de clases en los que la dinámica del trabajo incluía constantemente una importante actividad de autocorrección por parte de los estudiantes. Finalizada la unidad se ofrecieron, como ya era costumbre, dos chistes para ser analizados y comentados. Las situaciones humorísticas elegidas debieron, como en todos los temas precedentes, cumplir con la característica fundamental de estar al alcance de la comprensión de niños de esta edad, por lo que se seleccionaron los de las figuras 1 y 2 (figura 1 Britton y Bello, 1992, y figura 2, Chris Brown).

A partir de ellos tenían que:

- Relatar brevemente la escena identificando lo gracioso y explicando por qué los hace reír
- Realizar comentarios en común con el grupo.
- Crear su propia situación humorística gráfica, incluyendo a las fracciones como protagonistas, ya fuera como personajes ellas mismas, o como elementos de una acción.

En la consigna no se les pedía tocar ningún punto en especial de fracciones.

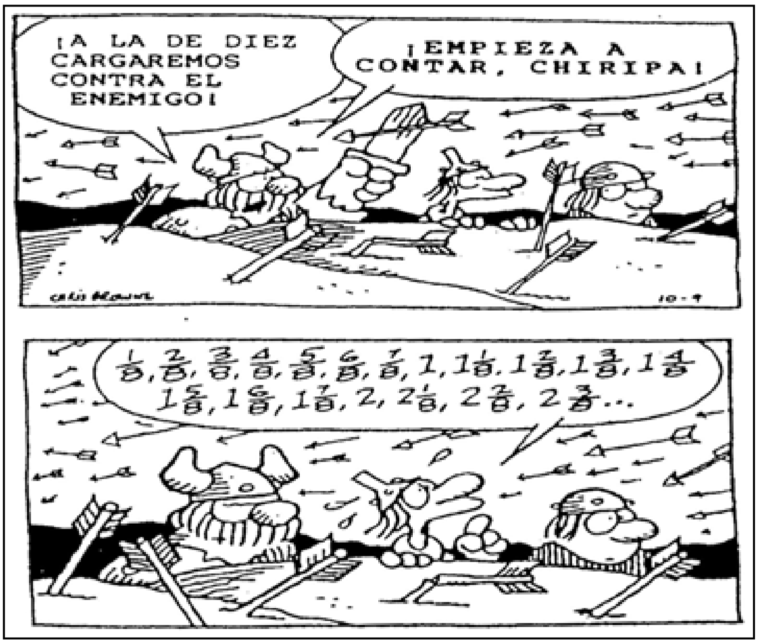


Figura 2: Chris Brown

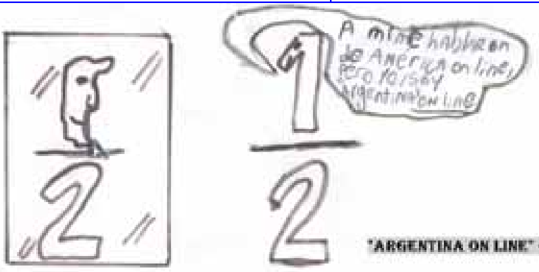
Como era de esperar, el primero de estos chistes fue comprendido de inmediato por la mayoría de los niños que rieron instantáneamente ante la confusión de la figura principal. Un grupo menor identificó con rapidez la astucia del vikingo al demorar su salida a combate.

La reducción de fracciones se llevó los mayores aplausos y la explicación de esta preferencia podría estar dada por algunos comentarios que los mismos alumnos dieron al final del año sobre sus gustos respecto a las tiras cómicas. Es así que la picardía del guerrero movía a la risa, sin lugar a dudas, pero la interpretación del primer personaje era algo que podía ocurrirle a ellos y eso permitió una identificación inmediata.

Entregaron 18 chiste, elaborados por 16 niños (8 chicos y 8 chicas). En ellos reflejan tanto lo que han aprendido sobre fracciones como lo que les parece que se presta a una interpretación humorística. A continuación aparecen estas viñetas, en las figuras 3 a 5.

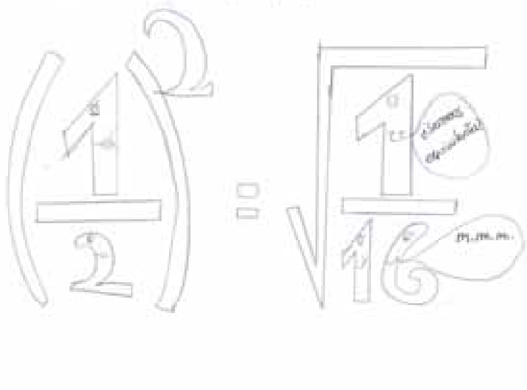
"Fracción tentadora" - Yahel Elías, 7º 2005 **1**

"Quebradero de cabeza" - Rocío Alonso, 7º 2005 **2**



"ARGENTINA ON LINE" - MARCOS ALVAREZ, 7º 2005 **3**

"Fracción helada" - Brian Coronel, 7º 2005 **4**



"¿Equivalencia?" - Gisella Donelli, 7º 2005 **5**

"Imagen equivalente" - Rocío Alonso, 7º 2005 **6**

Figura 3: Matechistes 1 a 6

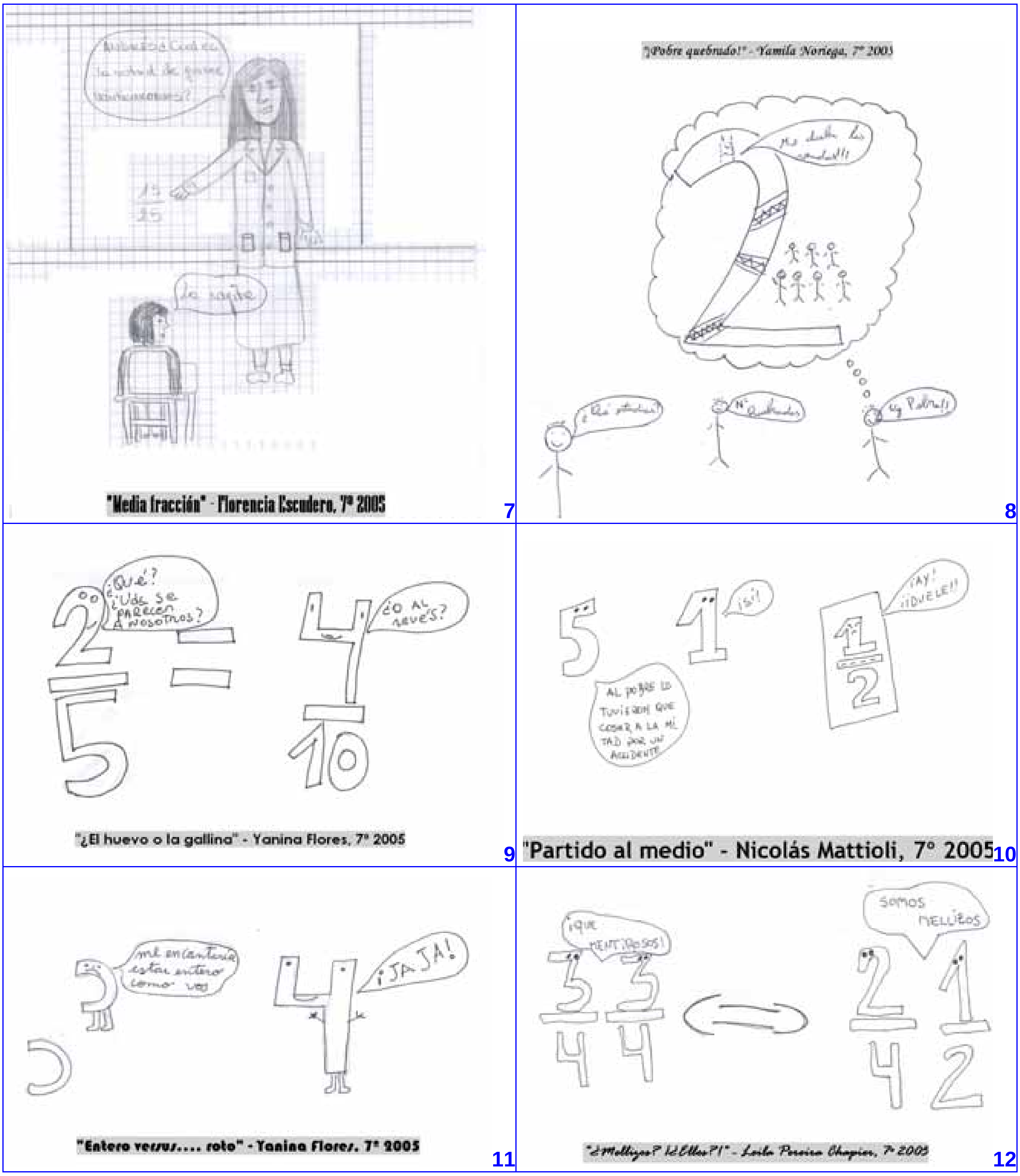
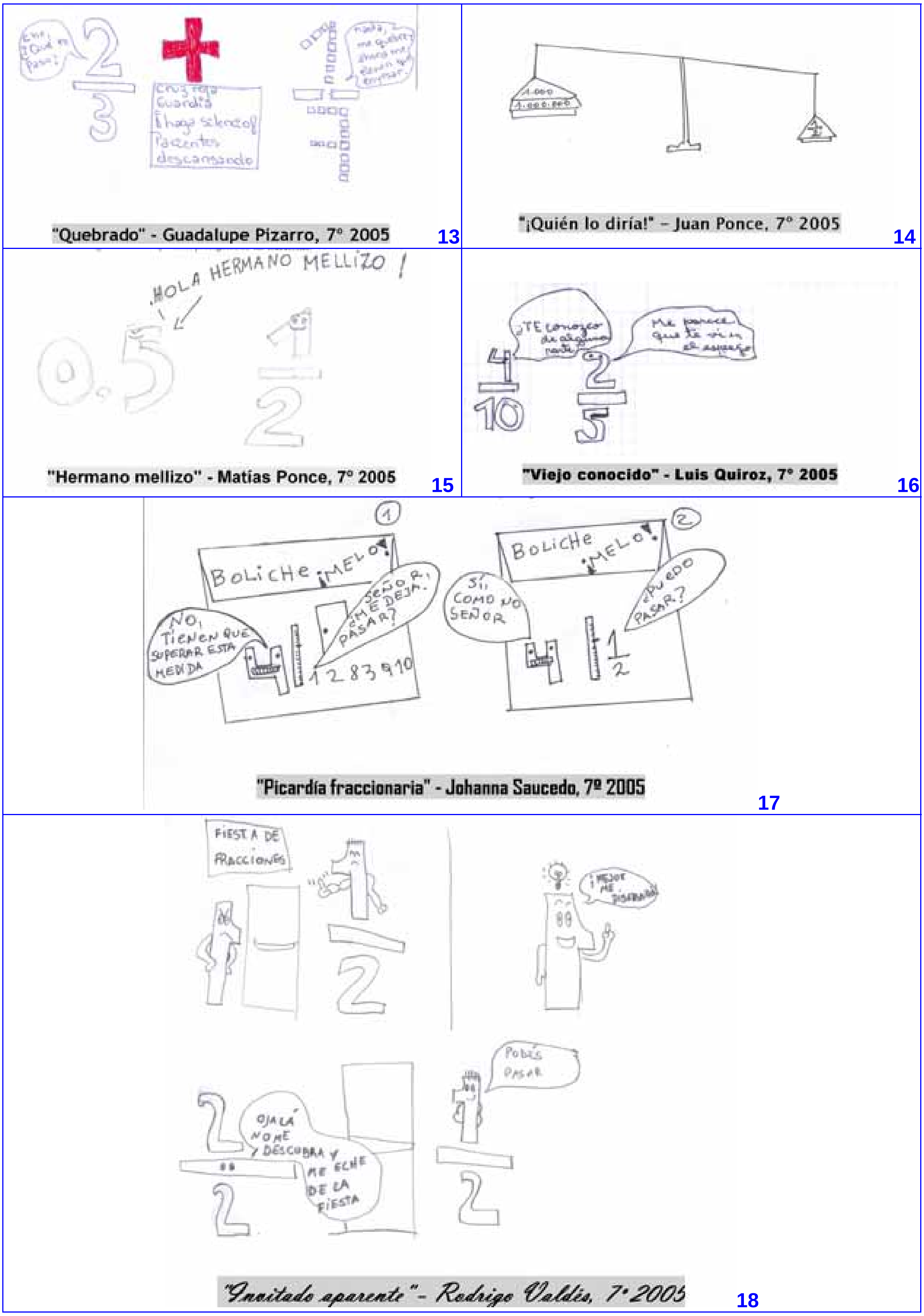


Figura 4: Matechistes 7 a 12



"Quebrado" - Guadalupe Pizarro, 7° 2005 **13**

"¡Quién lo diría!" – Juan Ponce, 7° 2005 **14**

"Hermano mellizo" - Matías Ponce, 7° 2005 **15**

"Viejo conocido" - Luis Quiroz, 7° 2005 **16**

"Picardía fraccionaria" - Johanna Saucedo, 7º 2005 **17**

"Invitado aparente" - Rodrigo Valdés, 7° 2005 **18**

Figura 5: Matechistes 13 a 18

3. Aprendizaje de las fracciones en los chistes

La actividad realizada llegó al final con la elaboración de los chistes por los alumnos, y el compartirlos con sus compañeros. En este artículo queremos ir más allá y mostrar que esta tarea tiene repercusiones interesantes para el profesor, además de ofrecer unos trabajos interesantes creados por los niños. En este apartado mostraremos que a partir de estos chistes podemos extraer algunas conclusiones sobre qué han aprendido los niños sobre fracciones, qué reflejan las viñetas sobre estos aprendizajes, qué decisiones podemos tomar al respecto para continuar la enseñanza, etc.

El humor es una cualidad que encierra muchas interpretaciones y sentidos. En algunos casos se destaca que el sentido del humor es una cualidad que sólo se da en el hombre, con lo que se hace alusión a la cualidad intelectual del humor. Sin ánimo de hacer un estudio exhaustivo del significado del humor, queremos destacar que diversos autores han llamado la atención sobre su papel psicológico, social y didáctico. Aquí nos basamos en estas dimensiones para utilizarlo tanto como recurso didáctico que produce aprendizaje, como para analizar qué han aprendido los niños.

Las teorías sobre el sentido del humor se clasifican en tres categorías (Martin 2000): la que se identifica como *Superioridad/Denigración* supone que la respuesta de humor surge de los defectos, errores y fallos propios o ajenos; la centrada en la *Incongruencia* considera que el humor se produce por la asociación inesperada de dos situaciones que no aparecen habitualmente unidas, pero que pueden asociarse en algún sentido; por último la tercera línea de teorías enfatiza el aspecto de alivio en situaciones emocionales concretas.

En la situación planteada, en la que la creación de chistes se ha hecho de manera voluntaria y dando tiempo para que los chistes se planifiquen y diseñen, no nos interesa preocuparnos por los aspectos humorísticos ligados a la situación emocional, mientras que suponemos que el humor que han hecho los alumnos se base en detectar o recrear errores ajenos, o en la utilización de situaciones inesperadas. Así cabe esperar que los niños busquen errores o fallos en las fracciones, en los conceptos matemáticos a los que aludan, o bien en las personas que los usan o interpretan. Dada la situación de los alumnos no podemos esperar que se atrevan a enunciar fallos relativos a conceptos, pero si pueden sentir que los términos que se emplean tienen un significado distinto respecto a su uso cotidiano, por ejemplo. Igualmente pueden realzar fallos en sujetos que utilizan estos conceptos, bien en situaciones prácticas en que se usan realmente, o en situaciones escolares, similares a las que ellos están viviendo. Estos fallos pueden sugerirle situaciones humorísticas.

Igualmente cabe pensar que los alumnos hagan humor a partir de incongruencias. Schopenhauer (1968) destaca que la risa proviene de la incongruencia repentinamente percibida entre un concepto y el objeto real que por él es pensado. Por tanto para provocar risa tendrán que buscar dos situaciones en que el objeto que se va a ridiculizar tenga dos sentidos diferentes, y presentarlas con habilidad. Se espera que los alumnos hagan un planteamiento basado en la situación que ha sido la familiar en el ambiente escolar en que se ha desenvuelto la clase y luego acudan al otro sentido para mostrar una salida inesperada, una interpretación posible que no era la que se derivaba del planteamiento. Así la situación humorística propuesta por los niños derivará de una intuición de los conceptos aprendidos, lo que puede colaborar a reforzarlos y fijarlos.

Estas consideraciones sobre el humor han llevado a diversos autores a destacar su interés didáctico. Fernández Solís (2002) propone que se integre el humor en la práctica educativa, favoreciendo con ello que los aprendices adopten una actitud más vital, con lo que ponen en juego una variedad de aspectos cognitivos que se aproximan a la forma natural de aprender. Con ello el humor como recurso didáctico está indicado especialmente cuando queremos que el aprendizaje llegue a las actitudes (Guitart-Coria y Flores, 2003; Guitart-Coria, 2007). La implicación actitudinal y cognitiva les llevará a buscar situaciones en las que se manifiesten incongruencias, generando así aspectos evocadores que mejoran la memorización del aprendizaje, además de crear un mayor conjunto de relaciones (Flores, 1999).

En la mayoría de las propuestas didácticas se aboga por emplear el humor para facilitar la comunicación (Flores, 1997). En este artículo vamos más allá, al haber dejado el humor en manos de los alumnos. ¿Qué han reflejado con ello? Para responder a esta cuestión vamos a analizar las viñetas producidas por los alumnos utilizando una serie de dimensiones que nos permiten observar qué elementos aparecen y con qué función. Ello reflejará lo que les ha llamado más la atención de las fracciones, qué conflictos han aparecido, qué elementos plásticos les sugieren, etc. En este trabajo vamos a centrarnos en dos de estas dimensiones: el ***concepto*** matemático relativo a las fracciones y racionales que aparece en las viñetas, y el ***significado*** de estos conceptos que se ponen de manifiesto en estos chistes.

Tras haber trabajado todos los contenidos matemáticos que se han comentado antes, es interesante examinar qué aspecto de este tema han elegido para realizar sus chistes. Para ello estudiamos tres subdimensiones. La primera es el **contenido matemático del tema que han utilizado en sus chistes**. Recordamos que lo tratado en clase ha sido: Concepto de fracción, Representación de la fracción (gráfica, clásica simbólica, número mixto, decimales), Comparación de fracciones, equivalencia, Operaciones con fracciones y Resolución de situaciones problemáticas. Según lo que aparezca en los chistes tendremos una idea de lo que más le ha llamado la atención a los niños o qué parte les parece más “graciosa”.

Para hacer humor hay que crear juegos de ideas o de palabras. Una de las formas de hacer chistes es utilizar algún símil que permita aludir a diversos significados del concepto utilizado y a partir de él asociar cualidades del símil con las del concepto elegido. El símil elegido nos da idea de lo que realza el niño cuando afronta el aprendizaje de fracciones. Por ello vamos a estudiar la **metáfora** que emplean en sus chistes para dar lugar a las situaciones humorísticas. El humor se vale de analogías y metáforas con las que realza algún aspecto del concepto tratado (Freud, 1905). Las analogías y metáforas son conceptos más familiares que evocan a otro concepto, elegidas por enfatizar algún aspecto del concepto metaforizado. (Flores, 1999, López Real 1989, 1990, Lakoff y Johnsom, 1986). Analizando la metáfora empleada podremos comprender qué aspectos del contenido ha querido enfatizar el niño en sus chistes.

Para dar realce a la metáfora hay que situar el chiste en un contexto concreto. Este contexto o situación refleja el universo en el que el niño percibe las fracciones (los fenómenos a los que se aplica), aunque también puede expresar contextos en que las fracciones se pueden mirar con humor. Describiendo pues la **situación** en que se presenta el chiste comprenderemos mejor qué significan las fracciones para los niños. Desde una concepción cultural de la matemática, se considera que los conceptos matemáticos corresponden a abstracciones que parten de situaciones en las que se utilizan para resolver problemas. Las situaciones en las que se ubican los chistes nos ayudan a comprender en qué grado el niño ha captado esta cualidad cultural de las Matemáticas. Así los alumnos que las ubiquen en situaciones cotidianas o científicas en que se emplean, estarán mostrando que han comprendido su papel de herramientas de resolución de problemas.

Una vez delimitado el concepto que se ha elegido para realizar el chiste, a través del contenido escolar seleccionado (contenido), concretado por el aspecto evocador que utilizan para referirse a dicho contenido (metáfora), y la situación en que se presenta (situación), completamos el análisis del concepto de fracción que aparece en los chistes estudiando qué ***significado*** se le atribuye, es decir qué sentido le ha dado cada niño a este concepto.

Para ello vamos a analizar tres aspectos. El primero se refiere al ***papel*** que desempeña y el ***uso*** que se hace de las fracciones, llamando a esta dimensión ***fenomenología*** de las fracciones (Rico, 1997). Con ello queremos profundizar en qué significado de la fracción es el que se enfatiza en los chistes.

Los conceptos matemáticos, como las fracciones, son conceptos abstractos, por lo que tenemos que recurrir a representaciones de ellos para poder utilizarlas. Los chistes nos muestran cuáles de estas **representaciones** son más familiares a los niños o cuáles les resultan más socorridas para realizar humor.

Aunque las fracciones se utilizan con profusión en la escuela, su empleo no es tan amplio en la vida cotidiana, reduciendo su presencia a algunas fracciones familiares con las cuales nos desenvolvemos (Grupo EGB de la APMA, 1983). Para completar el estudio del significado examinamos el **tipo** de fracción, es decir, si los niños emplean fracciones familiares para hacer humor o bien recurren a otras fracciones.

Resumimos las dimensiones y subdimensiones estudiadas, así como algunos de los valores esperados, en la tabla 1:

Concepto	Significado
Contenido matemático Concepto y definición de fracción Nombre, forma de representarla Elementos que la forman Equivalencia y orden Operaciones con fracciones Problemas relacionados	Uso de las fracciones Símbolos Relación entre una parte y un todo Operador sobre una cantidad Medida de una porción Razón entre dos cantidades
Metáfora o analogía (Campo abierto)	Forma de representación Simbólica clásica Simbólica porcentaje o decimal Verbal (palabra) Icónica de longitud Icónica de superficie Icónica discreta
Situación o contexto Antropomórfica Objeto matemático práctico	Tipo de fracción Familiar (1/2, 1/3, ¾, etc.) No familiar

Tabla 1: Dimensiones utilizadas para estudiar el aprendizaje de los alumnos sobre las fracciones, según los chistes presentados

Hemos indicado las categorías que pueden presentarse en función de los tipos de dimensiones consideradas. Las metáforas o analogías pueden ser diversas, por lo que no establecemos categorías a priori. Igualmente las situaciones o contextos pueden variar, pero nos atrevemos a suponer dos grandes ámbitos, aquel en el que las fracciones adquieren vida y se convierten en personajes (antropomórfico), y aquel en que las fracciones son objetos matemáticos útiles para resolver situaciones cotidianas. Con ello estamos reconociendo que para los alumnos los objetos matemáticos pueden representar entidades abstractas, simbólicas, o bien han percibido, y lo manifiestan, que los conceptos matemáticos son herramientas para resolver situaciones cotidianas. La utilización de contextos en los que las fracciones sean un medio para resolver problemas mostrará que los alumnos han sido sensibles a su papel de herramientas matemática.

Siguiendo con esta distinción analizamos el uso que los alumnos hacen de las fracciones. Los usos de las fracciones pueden ir desde su empleo como objeto matemático formal, haciendo alusión al símbolo o a su nombre, o bien buscar una relación con situaciones en las que se emplea. En este segundo caso se han establecido unas categorías que podemos identificar con los nombres que aparecen en el cuadro (Kieran, 1980, Llinares y Sánchez, 1997), en el que usamos las categorías y su descripción que hacen Llinares y Sánchez (1997) de las interpretaciones de las fracciones. Según estos autores se presenta la fracción en forma de *relación parte-todo*, cuando un todo se divide en partes congruentes, y la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el total de las partes. En la interpretación de la *fracción como cociente* se asocia la fracción a la operación de dividir dos números naturales, por tanto se identifica la unidad como el número natural del divisor. Las fracciones son vistas como *operadores* cuando se enfatiza su papel de transformaciones, algo que actúa sobre una situación y la modifica. Por último la fracción se interpreta como *razón* cuando actúa como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud.

También la forma de representar las fracciones es diversa, desde la que resulta de escribir la expresión clásica formada por dos números colocados en columna, separados por una línea horizontal (u oblicua), a la que recurre a métodos icónicos. En las representaciones simbólicas tenemos que incluir la representación verbal en sus diversas acepciones (términos particulares: *medios, tercios, etc.* generales como los terminados en *avos*, u otras expresiones: dos de tres, dos terceras partes, etc.). Pero también la representación como números decimales o en forma de porcentajes. Para analizar las representaciones icónicas recurrimos de nuevo a Llinares y Sánchez (1997), quienes distinguen entre representaciones empleando magnitudes continuas (como el área o la longitud), de representaciones discretas, en el que el todo es una cantidad de unidades no divisibles (como cantidades de canicas, de bolas, etc.).

Estos elementos técnicos nos dan algunas ideas de cómo los niños juguetean con las fracciones y las hacen suyas, cuando se disponen a hacer humor sobre ellas. Pero ¿en qué consiste el humor de estos chistes? ¿De qué instrumentos se valen para hacer humor? ¿Qué técnicas gráficas emplean en sus viñetas? Estos aspectos abren nuevos elementos de análisis que hemos comenzado a estudiar, pero que no van a ser tratados en este artículo.

Una vez establecidas estas dimensiones pasamos a examinar cada viñeta, analizando estas seis variables. Con cada viñeta elaboramos un cuadro, en el que recogimos las dimensiones y las apreciaciones que podíamos hacer en cada una. Contando las categorías similares obtenidas en estos cuadros llegamos a los resultados que aparecen en la tabla 2.

Concepto			Significado		
Contenido	Concepto y definición de fracción Nombre, forma de representarla Equivalencia y orden Operaciones con fracciones	**2** **10** **7** **2**	Uso	Símbolos Parte /todo Medida	**15** **2** **2**
Metáfora	Ligadas al nombre (quebrado) Plásticas Relacionadas con medidas Matemáticas	**7** **5** **3** **3**	Repres.	Simbólica clásica Simbólica decimal Simbólica entero Verbal (palabra)	**15** **2** **2** **2**
Situación	Antropomórficas Antropomórfico en intimidad Antropomórfico doméstico Antropomórfico matemático Situación escolar Fenomenológica (compra, peso)	**13** **7** **4** **1** **4** **2**	Tipo	Familiar No familiar No se sabe	**13** **5** **3**

Tabla 2: Frecuencias de las distintas categorías de análisis de los chistes

Examinando los cuadros de cada chiste y la tabla 2 resumen de lo observado, podemos extraer unas conclusiones sobre el aprendizaje que los niños han realizado de las fracciones.

Los chistes presentados por los niños se refieren a los siguientes contenidos:

- ***Nombre*** de las fracciones y racionales, especialmente aluden al término números ***quebrados***, entendidos como quebradizos, heridos o partidos. Este contenido nos hace ver que los alumnos perciben una diferencia entre la idea de quebrar que se emplea en el lenguaje cotidiano de la idea de partir que requiere la fracción. Para obtener una fracción tenemos que hacer una partición igualitaria y exhaustiva (Hetu y Desjardins, 1978), en el que la unidad se divide en partes iguales respecto a algún criterio. Parece que la idea de fracción como trozo "partido" choca con el nombre "quebrado", ya que el sentido de quebrar se aplica a una ruptura de un objeto frágil, producida por lugares inesperados (Moliner, 1997), y es difícil que al quebrar un objeto se produzcan fracciones del mismo.

- ***Equivalencia*** de fracciones, concebida como semejanza entre fracciones o entre elementos de fracción aunque en ellos aparezcan números distintos. Para expresar esta idea de semejanza se utilizan analogías plásticas, como el "parecerse" directamente o como se parecen un objeto y su imagen en el espejo, el ser hermanos mellizos o amigos o conocidos, o la igualdad matemática de expresiones distintas. También se alude a la comparación de fracciones por ordenación, empelando para ello la analogía de la balanza, para indicar que una fracción más grande que otra pesará más.

- Las fracciones representan mayoritariamente sujetos con vida propia, gracias a lo cual aparecen como personajes de estas historietas en 13 de los chistes. Estos personajes se mueven en ambientes cotidianos, reforzando la idea antropomórfica que supone su aparición. Esta aparición antropomórfica se acompaña de un realce de la fracción entendida como un símbolo, con entidad propia. Esta idea se refuerza al situar cuatro de los chistes en situación escolar, y sólo presentando tres en los que la fracción tiene utilidad práctica, para señalar porción de o expresando peso.

Los significados de las fracciones presentadas son limitados, correspondiendo a:

- El ***uso*** que se hace de la fracción es simbólico, apareciendo sólo dos chistes en las que se alude a un significado de porción y otros dos a medida.

- La ***notación*** que se utiliza para representar fracciones con más frecuencia es la expresión simbólica fraccionaria tradicional, compuesta por dos números entre los que hay una "rayita", completando dos de ellos con la notación decimal. Las fracciones elegidas para ello son fracciones familiares en su mayor parte, empleándose las no familiares para establecer equivalencias o para dar lugar a situaciones chocantes. El término "medio" les sugiere posibilidad de utilizar su polisemia en dos de los chistes.

En resumen, los niños proponen chistes de tipo antropomórfico, en el que los personajes son fracciones familiares expresadas en forma clásica, destacando que los términos empleados para denotarlas (quebrados, equivalencia, notación, etc.), son los que se prestan a los juegos de palabras o a las metáforas. Estas escenas se presentan en contextos cotidianos de los personajes-fracciones, o en contexto escolar.

4. Conclusiones

La primera conclusión que extraemos es que las viñetas de los alumnos son ricas en cuanto a utilización de recursos humorísticos y matemáticos, si bien se han centrado en algunos aspectos, que parece que son los que más le sugieren la idea de humor: la equivalencia (se presta a doble sentido el ser equivalente pero no ser iguales, con lo que refuerzan la diferencia entre igualdad de fracciones y equivalencia de las mismas) y el nombre y sus notaciones (quebrado, número quebrado, quebrar como romper fortuitamente y como partir, confusión entre quebrar y partir).

Los alumnos demuestran que manejan el lenguaje matemático, se han fijado en elementos que configuran las fracciones y los emplean en sus producciones, lo que les augura una mayor retención de estos términos y símbolos (“medio”, notación fraccionaria, decimal, equivalencia, etc.).

Surgen algunas cuestiones que nos permiten avanzar problemas ligados a las dificultades de comprensión de las fracciones. Así observamos que los niños manifiestan discrepancias que pueden estar ligadas a lo que se entiende por fracción. Las fracciones presentan la particularidad de requerir dos grupos de cifras, colocados a ambos lados de la raya. En los chistes observamos algunas consideraciones que nos han hecho plantearnos la duda sobre si los niños interpretan la fracción como un número o como una pareja de números. La utilización de la fracción como personaje parece indicarnos que consideran a toda la fracción como entidad, tal como se aprecia en 1, 2, 10, 12, 15, 16 y 18. En estas viñetas la fracción habla en singular o tiene sólo unos ojos, situados en el numerador o en la raya de fracción. Sin embargo en otros chistes parece que las fracciones están formadas por números, tal como ocurre especialmente en 9, en la que los numeradores hablan en plural, pese a tener sólo ojos ellos, o en 5, en la que todas las cifras tienen ojos y boca. En la misma línea se abre el debate sobre qué entienden los niños por número y cómo lo diferencian de cifra. Los “números quebrados”, son enteros que se quiebran en las historietas 2 y 11, y que se parte en 8. En 13 se quiebra toda la expresión. A partir de esta observación sugerida por la propuesta que presentamos en este artículo se nos abren nuevos interrogantes que deberemos indagar con nuestros alumnos sobre estas cuestiones: naturaleza de los números, formas de representación, relación entre concepto y representaciones, etc.

Tal como vemos, la mayoría de los chistes recogen a las fracciones como personajes humanizados, dando un sentido antropomórfico, como ocurre en los dibujos animados infantiles. Ello puede interpretarse indicando que los alumnos consideran que las fracciones son objetos con entidad propia, ajenas a su mundo, o que no pueden prestarse a alegorías humorísticas cuando figuran en su contexto de uso. Esta sensación se refuerza al ver que el contexto escolar aparece con cierta regularidad en sus historietas.

Todas estas consideraciones junto con la sensación que se ha vivido en el aula nos hacen sentir que la actividad de pedir a los niños que inventen chistes ha resultado una experiencia muy satisfactoria. De ella han surgido situaciones humorísticas interesantes gracias a la buena acogida de los alumnos, quienes se han mostrado muy dispuestos a realizarla. Gracias a ello la primera firmante ha editado un libro con algunas de las ideas de los chicos, (Dri, 2007, figura 6).

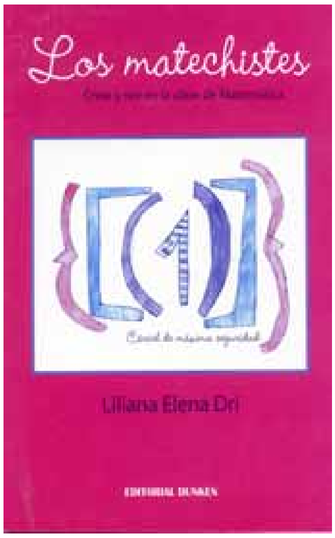


Fig. 6: Matechistes

En el caso de los matechistes de fracciones se aprecia que los alumnos se han sumergido en la tarea y la mayoría de ellos la han realizado con interés y buen resultado. Los niños muestran buen humor al plantear chistes y lo realizan con ciertas dotes de creatividad, además de prestarse a utilizar en sus manifestaciones humorísticas elementos matemáticos. Es de destacar que no aparecen en sus historietas chistes conocidos, o que se puedan identificar con los que se encuentran en otras publicaciones o en cuentos conocidos. Pese a ello podemos decir que algunos niños han llegado incluso a hacer humor en el sentido más ortodoxo del término, como las viñetas 6 y 7, que pueden considerarse representantes del humor centrado en la incongruencia.

En resumen queremos destacar que los niños han asumido el reto y lo han plasmado desde su propia idiosincrasia de niños. Estos aspectos nos hacen concluir que la actividad ha sido pertinente y muy productiva, lo que nos reafirma en su valor educativo, a la vez que animamos sugerir a otros profesores que utilicen el humor en su clase y propongan a sus alumnos que generen sus propios matechistes.

Bibliografía

- Britton, J.R. y Bello, I. (1992). Matemáticas contemporáneas. Harla, México.
- Chris Browne, Hagar el Terrible. http://seattlepi.nwsource.com/fun/hagar.asp
- Dri, L. (2007). Matechistes.Dunken, Buenos Aires.
- Fernández Solís, J. (2002). “Pedagogía del Humor”. Em: A. Rodríguez Idígoras (ed.), El Valor Terapéutico del Humor, Desclee de Brouwer, Bilbao.
- Flores, P. (1998). “La utilización del humor para facilitar la comunicación entre educadores matemáticos”. Educación Matemática, Vol. 9, nº 3, 35-62.
- Flores, P. (1999). “Empleo de metáforas en la formación de profesores de matemáticas”. Educación Matemática, 11 (1), 84-101.

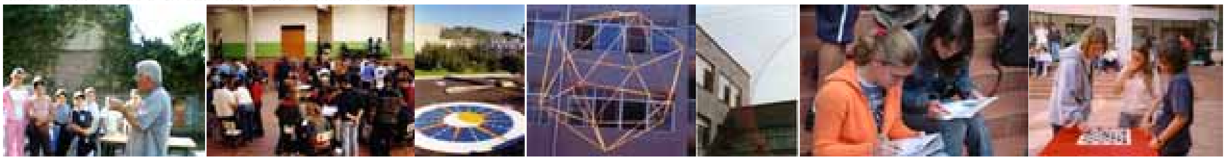
- Flores, P. (2003). Humor gráfico en el aula de matemáticas. Arial, Granada.
- Freud, S. (1994). El chiste y su relación con el inconsciente. Alianza, Madrid. (Original 1905)
- Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, (1999). Prediseño curricular para la Educación General Básica. Marco General. El sentido formativo de las Matemáticas. Secretaría de Educación. Dirección de Curricula, Buenos Aires.
- Grupo EGB de la APMA (1983). "Estudio metodológico del número fraccionario en 6º nivel de EGB". Épsilon 3, pp. 3-24.
- Guitart-Coria, M.B. (2007). Permitido reír... Estamos en clase. El humor como recurso metodológico en el aula de Estadística. Proyecto de Tesis doctoral.Universidad de Mendoza, Argentina.
- Guitart-Coria, M.B. y Flores, P. (2003). "Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar". Suma 42, 81-89.
- Hetu, J.C. y Desjardins, M. (1978). L'activité mathematique dans l'enseignement des fractions. Presses de l'Université de Québec, Québec.
- Kieren, T. E. (1980). Recent research on number learning. ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio.
- Lakoff, G. y Johnson, M. (1986). Metáforas de la vida cotidiana. Cátedra, Madrid.
- López-Real, F. (1989). "Metaphors and related concepts in mathematics: Part 1". Mathematics Teaching, 127, 50-52.
- López-Real, F. (1990). "Metaphor and related concepts in mathematics: Part 2". Mathematics Teaching, 130, 34-36.
- Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1991). Fracciones. Síntesis, Madrid.
- Martin, R. (2000). "Humor and Laughter". En A. E. Kazdin (ed.), Encyclopedia of Psychology, Volume 4. Oxford University Press, New York.
- Moliner, M. (1997). Diccionario del uso del español. Gredos, Madrid.
- Rico, L. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Horsori, Barcelona.
- Schopenhauer, A. (1968). "Teoría de la risa". En El mundo como voluntad y representación (pp. 95-102). Aguilar, Madrid. (Original de 1818)
- Sesa, C., Barallovres, G., Iztcovich, H. y Sadosky, P. (2001). "Algunos elementos para la enseñanza de las matemáticas". En Cols, E., Feney, S. (Coord.) Actualización Curricular 7º Grado. Documento de Trabajo. Gobierno de la ciudad autónoma de Buenos Aires, Secretaría de Educación. Dirección de Curricula, Buenos Aires.

Liliana Elena Dri, Maestra, licenciada en Psicología. Profesora de educación General Básica en la Ciudad de Buenos Aires, República Argentina.
Email: lilianadri@fibertel.com.ar

Pablo Flores, Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación, Doctor en Matemáticas, profesor de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.
Email: pflores@ugr.es
Web: www.ugr.es/local/pflores

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 215-219
ISSN: 1815-0640



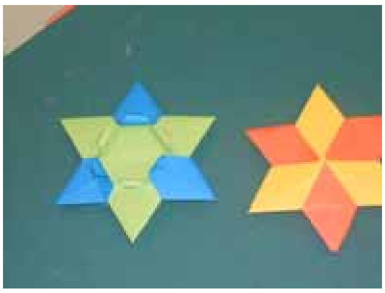
Dinamización matemática

IES Viera y Clavijo
Tenerife. (España)

Un árbol de Navidad

María Isabel Borges Pérez

En la mayoría de los centros escolares cuando llegan los últimos días de Noviembre se plantea realizar algún tipo de actividad relacionada con las Navidades. En el IES Viera y Clavijo de La Laguna, durante el año escolar 2007/2008, el departamento de dibujo propuso diseñar un árbol de Navidad a partir de círculos de cartulina. No quisimos dejar pasar esta oportunidad y nos sumamos al carro. Desde el departamento de matemáticas decidimos adornar dicho árbol con estrellas realizadas con la técnica de la papiroflexia.

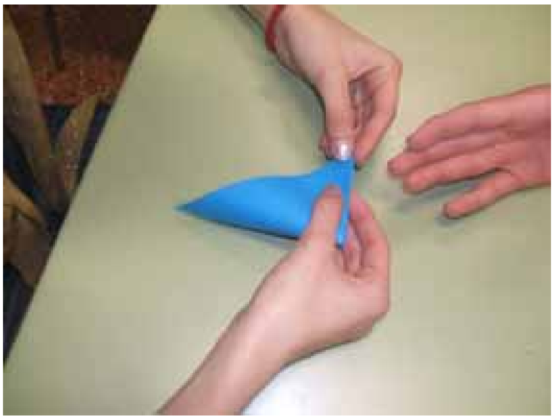
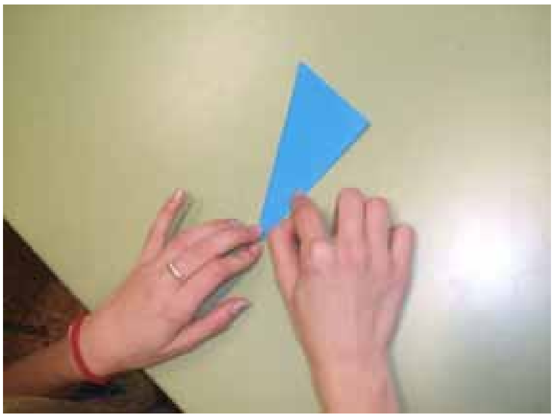
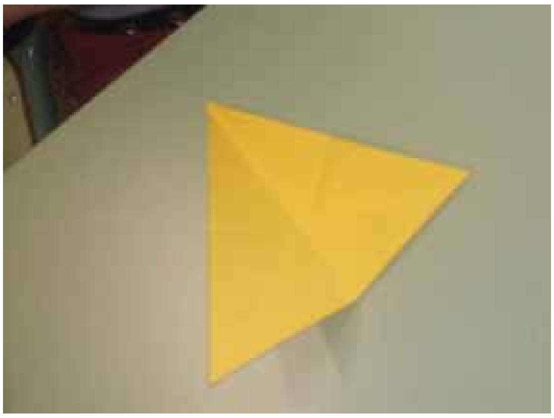
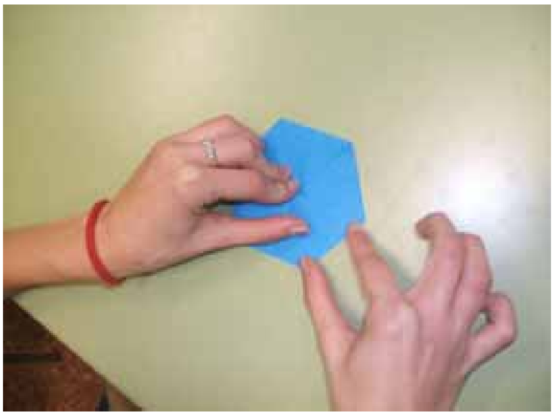
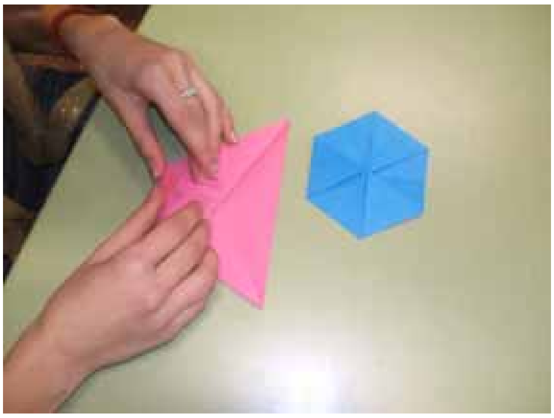
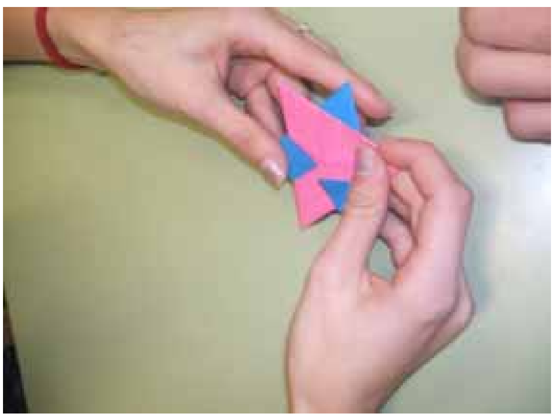


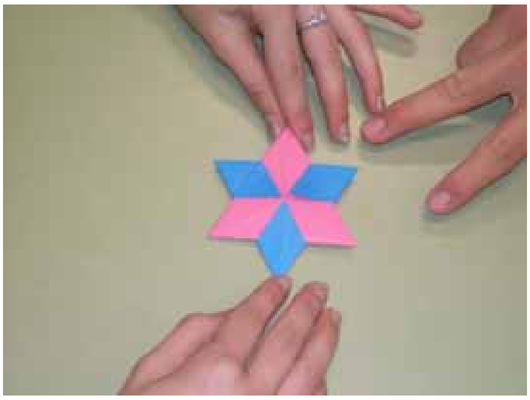
Los alumnos no tenían experiencia en papiroflexia así que se eligió una estrella muy fácil de realizar. Como se observa en las fotos, permitía combinar dos colores, lo que le daba una mayor vistosidad, y además tenía dos caras diferenciadas.

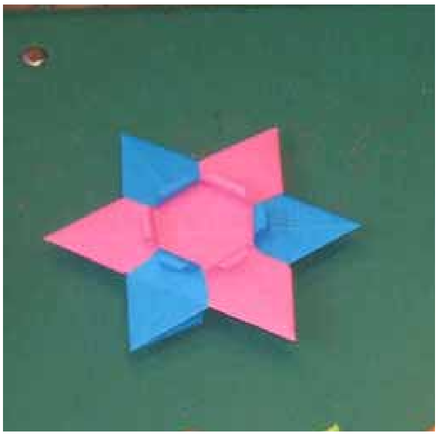
A partir de un cuadrado se construía el mayor triángulo equilátero posible (lado igual al lado del cuadrado) y se recortaba. La estrella se construía sobre dicho triángulo equilátero. A partir de él se buscaban las tres alturas doblando “por la mitad” dicho triángulo. El resultado final era una estrella de seis puntas que surgía al unir dos módulos triangulares. Se utilizaron cuadrados de diferentes tamaños y también colores que los alumnos combinaban según sus gustos. Las estrellas realizadas no sólo sirvieron para adornar el árbol de papel sino que también fueron colocadas en diversos lugares del centro y adornaron los árboles de navidad que los alumnos tenían en sus casas. A continuación mostramos los pasos para elaborar dicho módulo.

En el taller realizado con los alumnos y alumnas no hubo ningún problema en el desarrollo de la figura salvo el momento en el que se tenía que trazar la tercera altura. Perdían la orientación del triángulo, pero se resolvió sugiriéndoles que giraran el triangulo siempre en el mismo sentido.

Las fotos que mostramos, realizadas por el compañero Óscar Suárez durante la realización del taller, muestran con claridad el proceso y el resultado final.





La experiencia con los alumnos fue tan positiva que al año siguiente, y teniendo en cuenta que teníamos el ámbito científico de cuarto de diversificación, organizamos un grupo reducido de voluntarios de dicho cuarto para elaborar unas bolas de Navidad con un poco más de dificultad que las estrellas mostradas en las fotos anteriores. Estas bolas parten de una base que en papiroflexia se llama base bomba y a partir de ésta se realiza el módulo. Se debe fijar previamente el número de módulos con los que se forma esta bola. Nosotros elegimos el pentágono por lo que el comienzo de la figura necesita cinco módulos, pero para formar la bola completa hacen falta treinta módulos, lo que nos hace pensar que el número total de módulos necesario debe ser un múltiplo del número elegido como comienzo. En este caso se trataba del cinco.

La decoración de las bolas una vez terminadas fue en purpurina para conseguir un aire más navideño.

No fue fácil que los alumnos consiguieran enganchar todos los módulos pero con un "poquito" de ayuda consiguieron terminar con éxito la bola.

El resultado fue tan bonito que suscitó, en alumnos que no estaban en el grupo de trabajo, el deseo de de aprender a hacer dichas bolas. La prueba de la belleza del trabajo realizado puede verse en las fotos de Óscar, que exponemos a continuación.

Debemos animarnos a realizar este tipo de actividades con los alumnos, vale la pena y fomenta la paciencia, el gusto por el proceso, la creatividad y la psicomotricidad fina además de trabajar de forma informal muchos conceptos de geometría que están implícitos en el plegado del papel.

Y después de esta muestra no queda más que desear

Feliz Navidad y Próspero Año Nuevo
a toda la comunidad iberoamericana, unida por Unión.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 221-238
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Problemas matemáticos con historia

Antonio Rosales Góngora

Resumen

Mucha gente, no matemática, parece pensar que lo esencial en matemáticas fue descubierto hace mucho tiempo y que fue entregado a los primeros matemáticos griegos por semidivinidades como Pitágoras, en forma de teoremas misteriosos que hemos aprendido a usar pero sin comprenderlos verdaderamente. Nada más lejos de la realidad, los matemáticos profesionales no aceptan resultados sin pruebas rigurosas y por otra parte, son conscientes de que aún hay mucho camino por recorrer, de que sólo se ha explorado una parte y que ésta crece sin cesar

Abstract

Much people, nonmathematical, seem to think that the essential in mathematics was discovered long ago and that was given to the first Greek mathematicians by semidivinities like Pitágoras, about form of mysterious theorems that we have learned to use but without including/understanding them truely. Nothing else far from the reality, the professional mathematicians do not accept results without rigorous tests and on the other hand, are conscious that still there is much way to cross, that has only explored a part and that this grows incessa.

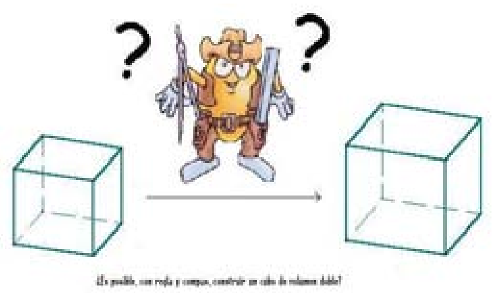
Algunos problemas célebres

Los griegos encontraron algunos de estos problemas coriáceos. En geometría, por ejemplo, trataron de obtener las construcciones perfectas, sin aproximaciones, de algunas figuras con los instrumentos que conocían: el compás y la regla no graduada. Tuvieron éxito en algunos casos difíciles como la construcción de pentágonos regulares pero fracasaron en los tres problemas clásicos.

La conjetura griega por excelencia, en geometría, es el quinto postulado de Euclides sobre la existencia y unicidad de paralelas, existen otras geometrías, las no euclídeas, donde es falso.

Duplicación del cubo

El problema "délico" se remonta al siglo VI a.c. El oráculo de Delos había ordenado a los habitantes de esta ciudad, doblar el volumen de uno de sus altares. En nuestro lenguaje actual, equivale a multiplicar por $\sqrt[3]{2}$ la longitud del lado del altar. Puesto que los geómetras griegos no utilizaban más que la regla y el compás y accedían a los números por un equivalente geométrico, no consiguieron resolver el problema. Hasta el siglo XIX, numerosos matemáticos han tratado de resolver el problema, a menudo infructuosamente. A veces construyendo curvas auxiliares, las duplicatrices, como la cisoide de Diocles o la conchoide de Nicomedes



Hasta que en 1837 Wantzel, a partir de los trabajos de Abel, demuestra que “todo número construible con regla y compás es solución de un polinomios con coeficientes enteros de grado una potencia de dos (1,2,4,8,16,…)”. $\sqrt[3]{2}$ es solución de x^3-2=0, que es un polinomio con coeficientes enteros, pero cuyo grado no es una potencia de dos. Es por este motivo que un problema délico es, incluso en la actualidad, sinónimo de irresoluble.

Cuadratura del círculo

El problema de la cuadratura del círculo, de la cubatura de la esfera y de la rectificación de la circunferencia son equivalentes. ¿Es posible, con regla y compás, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado? ¿es posible, con regla y compás, construir un cubo de igual volumen que el de una esfera dada? ¿Es posible, con regla y compás, trazar un segmento de longitud igual al perímetro de una circunferencia dada? Las tres preguntas exigen construir un segmento de longitud pi a partir de un segmento de longitud 1, con la única ayuda de la regla y compás. Si esto fuera posible, significaría según el teorema de Wantzel, que pi es un número construible y por tanto, raíz de un cierto polinomio. Resulta que en 1882 un matemático alemán de las universidades de Koenigsberg y Munich, Lindemann (1852-1939), demuestra que pi no es raíz de polinomio alguno, se dice que pi es un número trascendente. Esta trascendencia aporta una respuesta definitiva al más celebre problema de las matemáticas, la cuadratura del circulo es imposible, algo que coloquialmente se había aceptado antes de demostrarlo, como demuestran los escritos de Anaxágoras en el siglo V a.c., e incluso la Academia de Ciencias, en 1775, decidió no aceptar más escritos con las supuestas soluciones al problema. Es importante observar que este problema de origen puramente geométrico, sólo pudo resolverse con herramientas algebraicas, Wantel, y analíticas, Lindemann.

Trisección del ángulo

Los griegos eran capaces de trazar, con regla y compás, la bisectriz de un segmento pero trataron, en vano, de dividir en el caso general, un ángulo en tres partes iguales. Para resolver la trisección del ángulo, los matemáticos tuvieron que recurrir a curvas auxiliares, trisectrices, como la espiral de Arquímedes, la cúbica de L’Hôpital, la concoide de Nicomedes, el caracol de Pascal, la cúbica de

Tschirhausen… Es el teorema de Wantzel quien de nuevo permite resolver el problema en 1837. Aunque para algunos valores la trisección del ángulo es posible, es imposible en el caso general.

Apilamiento de esferas

Sir Walter Raleigh (1554-1618), aventurero y escritor inglés que participó en la campaña contra la armada invencible, propuso a su amigo, el matemático ingles Thomas Harriot, un problema, a ver si podía resolverlo: si conocía algún método sencillo capaz de resolver *cuántas balas de cañón se pueden apilar en la cubierta de un barco utilizando el menor espacio posible*. O, matemáticamente, ¿cuál es el empaquetamiento más denso posible para un conjunto de esferas? Harriot no supo contestar a esto y le pasó el problema a Johannes Kepler. Basándose en la intuición, y la observación, Kepler contestó a Raleigh en 1611 que el mejor modo de apilar bolas de cañón tenía que ser el método con el que los fruteros apilaban la fruta en forma piramidal (una esfera encima de tres), el llamado empaquetamiento cúbico centrado en las caras. La cuestión era si se podía demostrar matemáticamente. Según la conjetura de Kepler, la densidad de un empaquetamiento de un conjunto de esferas nunca excede de un número máximo. La densidad de este apilamiento es $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Gauss demostró que este empaquetamiento era el más eficaz de entre los de estructura reticular pero, este resultado, no excluía la posibilidad de empaquetamientos no reticulares.

La dificultad del problema estriba en el inmenso número de posibilidades que deben ser eliminadas. A mediados del siglo XX, los matemáticos ya sabían como reducir el problema a un análisis finito. Un importante avance tuvo lugar en 1953 cuando el matemático húngaro Laszlo Fejes Tóth redujo el problema a un enorme cálculo en el que intervenían muchísimos casos específicos; al mismo tiempo sugirió un procedimiento para resolverlo por ordenador

En 1991, Wu Yi Hsiang de la universidad de California dio una demostración, calificada de poco rigurosa por expertos como Conway En 1998, 387 años después, Hales distribuyó una prueba asistida por ordenador a la conjetura de Kepler, con unas 300 páginas de extensión y unas 40.000 líneas de código hecho a medida para la demostración. Tras un año de verificación del código, la prueba se dio por valida con un uno por ciento de incertidumbre y publicada en 2005 en Annals of Mathematics con un 99 % de verificación.

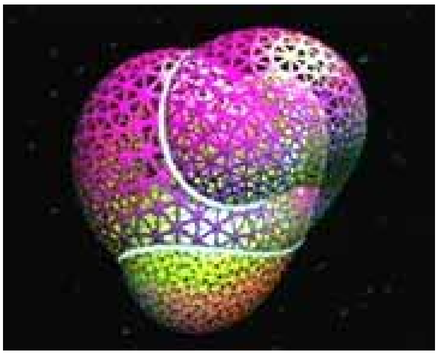
Las trece esferas

¿Se puede encontrar una bola B con otras trece bolas del mismo tamaño de manera que todas toquen a B?

David Gregory, astrónomo en Oxford y amigo de Isaac Newton, anotó en su diario, en 1694, que Newton y él habían estado discutiendo sobre la cuestión. Habían empezado estudiando cómo están distribuidas por el firmamento las estrellas de distintas magnitudes, y de ahí habían pasado a preguntarse si una esfera de radio unitario podría o no estar en contacto con otras 13 iguales a ella. Gregory opinaba que sí; Newton disentía. Como escribe Coxeter, «tuvieron que transcurrir 180 años hasta que R. Hoppe lograra demostrar que Newton tenía razón». Desde entonces han sido publicadas otras demostraciones más sencillas, la más reciente, en 1956, la del matemático británico John Leech.

Newton demostró que era posible con doce bolas y en 1952 Van der Waerden y Schütte demostraron la imposibilidad con trece bolas.

La deformación de una esfera



"¿Es posible deformar una esfera de manera que su cara interior se vuelva su cara exterior y su cara exterior la interior? "

En la deformación no esta autorizada ni los desgarrones ni los cortes aunque si es posible la interpenetración. En estas condiciones, Stephen Smale demostró en 1958 que si era posible .En efecto, en 1957, el joven matemático, Stephen Smale, posterior Medalla Fields, la más alta distinción matemática, presentó a su maestro Raoul Bott un resultado sobre las deformaciones de la esfera. En un primer examen, Raoul Bott rehusó admitir el teorema que Smale había demostrado.

La prueba dada por Smale era no constructiva, es decir había demostrado que la solución existía pero no la construía

Imaginemos una esfera cuyo interior este pintado de rojo y el exterior de azul, es necesario invertir esos dos colores .Bott planteaba el famoso "Muéstreme como es posible".

La solución pasa por deformar la esfera inicial por una serie de transformaciones para formar dos hojas, una superficie de Boy, llamada así en honor del alumno de Hilbert Werner Boy que las inventó en 1901 en otro contexto.

El problema de Waring(1770)

"Sea n un entero natural ¿cuántos cuadrados, cubos,…, potencias k-esimas necesitamos añadir para obtener n?"

Edward Waring (1734-1798) conjeturó, en 1770, que para todo número, dos cuadrados o cuatro cubos o diecinueve potencias cuartas o un número finito g(k) de potencias k-ésimas era suficiente. Lo cual es verdad, la fórmula de Vinogradov da

$$g(k) = 2^k - 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^k .$$

Las etapas más importantes en la resolución de este problema han sido:

En 1780 el teorema de Lagrange o de los cuatro cuadrados, también conocido como conjetura de Bachet, que establece el caso g(2)=4,por ejemplo, $31=5^2+2^2+1^2+1^2$ o $310=17^2+4^2+2^2+1^1$, en general $n=a^2+b^2+c^2+d^2$ siendo n,a,b,c,d naturales no nulos.

Wieferich en 1909 estable el caso g(3)=9.

En 1909 Hilbert establece que g(k) existe para todo k pero no siempre se sabe calcular.

En 1930 Vinogradov encuentra y demuestra la formula para k>5.

En 1964 Chen establece g(5)=37 y en 1985 g(4)=19 es establecido por Balasubramanian, Deshouillers et Dress con ayuda del ordenador, con lo cual el problema esta resuelto. Las investigaciones han proseguido buscando valores mas pequeños de g(k) incluso eventualmente negativos.

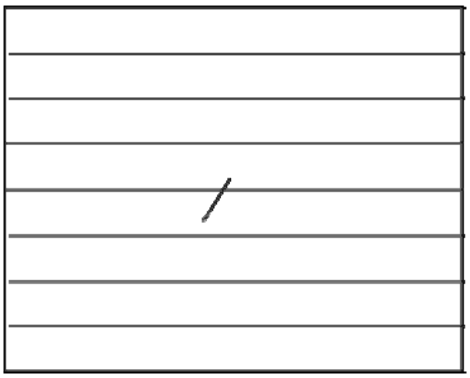
Algoritmo de Siracusa

También llamado algoritmo de Hase o problema de Collatz o problema de Ulam o problema 3n+1. El problema fue inventado en 1930 por Lotear Collatz cuando era estudiante en Hamburgo. Tomemos un entero n, si es par tomemos n/2 y si es impar, 3n+1 y volvemos a empezar con este nuevo número. Parece que al cabo de un cierto número de iteraciones se vuelve siempre a uno. Hase, colega de Collatz, lo difundió desde la Universidad de Siracusa, USA. En 1960 fue relanzado por Kakutani. Thwaites ofreció en 1996 una recompensa de 1000 libras a quien lo resolviera. A pesar de la gran simplicidad del enunciado que ha atraído a numerosos investigadores, los intentos han sido en vano. Hasta ahora solo se ha probado para números naturales $n \leq 32^{53}$

Problema de Alhazen (1010)

El problema fue planteado inicialmente por Tolomeo y conocido hoy con el nombre del matemático árabe Abú Alí Al-Hasan Ibn Al-Haytam, llamado por los latinos Alhazem, famoso por sus escritos en óptica y astronomía. Conocido como problema del billar circular: *"en que dirección hay que lanzar una bola colocada en un punto A en un billar circular para que vuelva al punto A después de dos reflexiones sucesivas"*. Este problema luego se convertirá en la determinación de la curva *anaclástica.* El problema original fue tratado por matemáticos como Huygens, Barrows y Ricatti de forma analítica. El problema conduce a una ecuación de cuarto grado resuelta como intersección de secciones cónicas.

Aguja de Bufón (1750)



El celebre naturalista francés Georges Louis Leclerc (1707-1788), conde de Buffón, planteó y resolvió el siguiente problema: *"Sobre una hoja de carta con líneas escritas, separadas por un espacio d, ¿cuál es la probabilidad para que una aguja de longitud l menor o igual que d, tirada al azar sobre la hoja, corte a una de las líneas?"*. La respuesta es

$$\frac{2\,l}{\pi\,d}$$

Problema de Dido

En la Eneida de Virgilio encontramos:

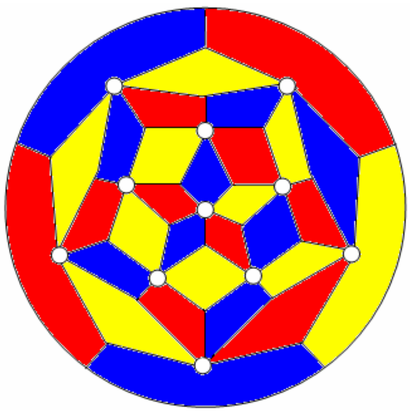
"En el siglo IX antes de Cristo, huyendo la princesa fenicia Dido de su hermano Pigmalión, rey de Tiro, que había asesinado a su marido, llega a las tierras del Norte de África (Túnez) donde alcanza un acuerdo con sus habitantes. Al querer la princesa Dido comprar tierra para establecerse con su pueblo, el rey de aquellas gentes solamente le consiente comprar la parcela de tierra que pueda ser cubierta por la piel de un toro. Dido cortó la piel en finas tiras formando una larga cuerda (de unos 1000 ó 2000 metros) y la dispuso de manera que cubriese la mayor parte de terreno posible…

Resolvió así el problema, también llamado isoperimétrico, de encontrar entre todas las curvas cerradas aquella que delimite la superficie más grande, anticipando un resultado de J. Bernouilli, la circunferencia.

Problema de los n cuerpos

Desde que Newton estableció las reglas de la mecánica astronómica, se ha tratado de saber "como evolucionara un sistema de n cuerpos del que no se conoce más que su posición inicial". Newton fue el primero en formularlo de una manera precisa: "Dadas en un instante las posiciones y las velocidades de tres o más partículas que se mueven bajo la acción de sus atracciones gravitatorias mutuas, siendo conocidas las masas de las partículas, calcular sus posiciones y velocidades para otro instante". Mientras que el caso de 2 (n=2) cuerpos tiene solución, el caso n>3 no puede resolverse. Expresar mediante ecuaciones los movimientos del Sol, la Luna y la Tierra se resistió a los matemáticos hasta que en 1913 Sundmann descubrió un método muy grosero por medio de una serie convergente. Solo con ordenador se puede aplicar este método en mecánica newtoniana.

Problema de los cuatro colores



¿Cuál es el número mínimo de colores necesarios para colorear un mapa de manera que dos regiones adyacentes cualesquiera tengan colores diferentes? Este número se llama número cromático de la superficie. Sabiendo que, si c es la característica de Euler-Poincare de la superficie, se tiene que c=n-m+f para un poliedro de n de vértices, m aristas y f caras; y que c=2-2p-q-r para una esfera con p asas, q gorros cruzados y agujereada r veces. Heawood había conjeturado que ese número (el de colores mínimo) era igual a la parte entera de $\frac{7+\sqrt{49-2c}}{2}$. La conjetura falla para la botella de Klein que puede ser coloreada con seis y siete colores como da la fórmula. En 1968 Ringel y Young demostraron que la conjetura de Heawood era cierta para el resto de superficies excepto el plano y la esfera. Justamente para esas dos superficies había sido planteado el problema por Cayley en 1879 a la Sociedad Matemática de Londres y casi un siglo después, 1976, Appel y Haken mostraron, tras 1200 horas de cálculos con ordenador, que cuatro colores eran suficientes

Medida universal

Podemos partir un segmento en n partes tales que 1) ninguna de las partes tenga una longitud nula 2) la longitud de la unión de dos partes es la suma de las longitudes de cada una de ellas 3) dos partes idénticas (simétricas) tienen la misma longitud.

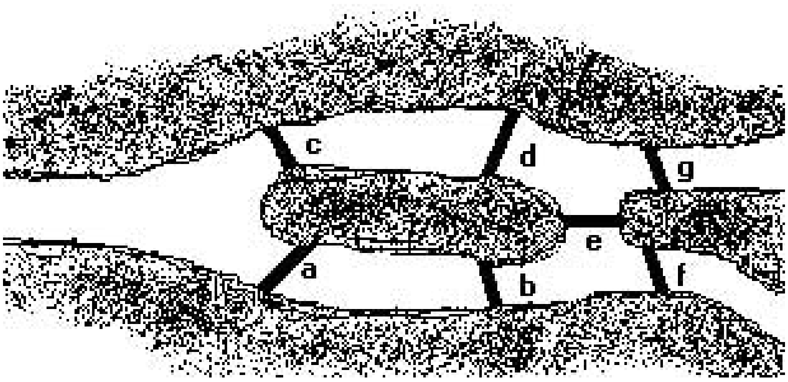
De la misma forma, se puede encontrar para el plano una manera de medir, m, por ejemplo la idea intuitiva de área, tal que para toda parte finita A del plano se cumpla: 1) $m(A) \neq 0$ 2) $m(B \cup C) = m(B) + m(C)$ para dos partes de A disjuntas 3) $m(A) = m(B)$ si B se puede deducir de A por una traslación o una rotación.

Haussdorff planteó la siguiente cuestión:" ¿Se puede encontrar siempre una medida como esta en un espacio n dimensional?"

La respuesta es si para n=1 y n=2 y no para n>2. Este sorprendente resultado da origen a numerosas paradojas entre la que destaca la de Banach-Tarski.

Los siete puentes de Koenigsberg

La ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado, se encuentra a orillas del Mar Báltico, en territorio Ruso y a unos 50 kilómetros de la frontera con Polonia. En el pasado perteneció a Prusia. Uno de sus habitantes más ilustres fue el filósofo Immanuel Kant.



En Königsberg se juntan dos ríos, formando una isla en su confluencia. Siete puentes unían (ya no, pues la ciudad fue parcialmente destruida durante la Segunda Guerra Mundial. En el siglo XVIII se hizo popular como adivinanza o pasatiempo averiguar si era posible cruzar los siete puentes de la ciudad pasando sólo una vez por cada uno de ellos. La respuesta es no y fue dada en 1736, por el matemático suizo, radicado en San Petersburgo, Leonhard Euler en su artículo "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis", en el que resolvía el problema en el caso general. Este trabajo es considerado como el nacimiento de la Teoría de Gráfos, utilizada hoy en día en una multiplicidad de aplicaciones, y también uno de las primeras apariciones de una «nueva geometría» en la que importan sólo las propiedades estructurales de un objeto y no sus medidas. A esto se refieren las palabras «geometriam situs» en el título de Euler, palabras que hoy se traduce como topología.

Los 23 problemas de Hilbert

En un resumen rápido de la carrera de Hilbert podríamos citar su interés y conocimiento de una gran variedad de disciplinas y una fuerte conexión con las tradiciones matemáticas del siglo XIX. A diferencia de otros matemáticos como Peano o Hausdorff, Hilbert era moderadamente modernista, su mayor habilidad consistió en profundizar y desarrollar las tradiciones existentes. Los problemas de 1900 encajan dentro de esta descripción

Al recibir la invitación a dirigirse al congreso matemático en París, Hilbert era ya uno de los matemáticos más destacados de Alemania, y ampliamente reconocido fuera de su país. Tres años antes, Henri Poincaré (1854-1912), el único matemático contemporáneo cuyos campos de interés y conocimiento se comparaban en amplitud y variedad con los de Hilbert, había escrito la charla central que fue leída en su nombre en el congreso de Zurich. La charla trató de las relaciones entre el análisis puro y la física matemática, y Hilbert pensó inicialmente que la mejor manera de afrontar debidamente el importante honor que se le hizo al invitarlo sería referirse a las ideas de Poincaré y presentar una visión alternativa. Su amigo Minkowski, sin embargo, lo disuadió de tal plan, y a cambio le sugirió una dirección totalmente distinta:

Lo más atractivo, escribía Minkowski desde Zurich, sería que intentes dar un vistazo al futuro, a enumerar los problemas a los cuales deberían dedicarse los matemáticos en adelante. Así podrías crear las circunstancias para que se siga hablando de tu charla en las décadas venideras. Eso sí, debes tener en cuenta que la profecía tiene sus dificultades.

El 8 de Agosto de 1900 en el II Congreso Internacional de Matemáticas de París, Hilbert presentó su famosa conferencia acerca de los 23 problemas abiertos en Matemáticas. De ellos, 8 eran de naturaleza meramente de investigación. De los restantes 15, 12 han sido ya resueltos. Hilbert comenzó su discurso con las siguientes palabras:

"*¿Quien de nosotros no quisiera levantar el velo tras el cual yace escondido el futuro, y asomarse, aunque fuera por un instante, a los avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo ulterior en los siglos futuros? ¿Cuáles serán las metas particulares que tratarán de alcanzar los líderes del pensamiento matemático de las generaciones futuras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán los siglos por venir en el ancho y rico campo del pensamiento matemático*?"

Los 23 problemas planteados por Hilbert fueron:

1) ¿Puede probarse las hipótesis del continuo? Esta hipótesis establece que no existe ningún conjunto de cardinalidad mayor del conjunto numerable (números racionales) y estrictamente menor que la del continuo (números reales). La respuesta depende de la versión particular elegida para la teoría de conjuntos. En 1939, Gödell demostró que la negación de la hipótesis del continuo no se puede obtener de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermello-Fraenkel. En 1963 Paul Cohen demostró que no se puede obtener como consecuencia de Zermello-Fraenkel, por tanto la H.C. es independiente de ZF. En definitiva a la pregunta ¿están bien ordenados los números reales?, Cohen contesta que si, si se admite el axioma de elección. Estos trabajos le valieron a Cohen la medalla Field.

2) ¿Puede probarse la consistencia de la aritmética?

No, según estableció Gödell en 1931, todo sistema formal capaz de formular su consistencia, puede también probar su inconsistencia: 2º teorema de incompletitud de Gödell.

Un resultado positivo lo dio Goentzen probando la consistencia de la aritmética por inducción transfinita

3) ¿Es aplicable el método euclideo de descomposición de poliedros a todos los volúmenes? Lo que se plantea es encontrar dos tetraedros, con bases y alturas iguales, que no puedan descomponerse en tetraedros congruentes ni puedan combinarse con otros poliedros congruentes para formar dos poliedros que puedan dividirse en tetraedros congruentes. La respuesta es NO. Este fue el primer problema de la lista resuelto en 1902 por un alumno de Hilbert, Max Dehen e, independientemente, por W.F. Kagon en 1903.

Un resultado positivo lo da la paradoja de Banach-Tarski: dos poliedros cualesquiera, incluso de volúmenes diferentes, pueden transformarse uno en otro por descomposición en un número finito de partes y desplazando esas partes (las partes no son medibles Lebesque).

4) ¿Cuáles son las geometrías en las cuales el camino más corto entre dos puntos es un segmento de recta? En el fondo lo que se investiga es el concepto de distancia y, en general, se considera resuelto por George Hamel (1877-1954)

5) ¿Existen grupos de Lie continuos? Lie estableció un sistema de axiomas para la geometría y demuestra que este sistema es suficiente con la ayuda del concepto de grupo continuo y asumiendo que las funciones que definen su grupo son diferenciables. Lo que se plantea es si la diferenciablidad es inevitable o se puede suprimir.

En 1930 John Von Newman resuelve el problema afirmativamente para los grupos bicompactos, en 1952 Andrws Glean para los grupos localmente compactos y para el caso abeliano. En 1953 Montgomery y Zipin cierran la respuesta afirmativamente. Combinando sus resultados con los de Yamabe tenemos: ”todo grupo local euclídeo es un grupo de Lie”

6) ¿Puede axiomatizarse la Física? La matematización de los problemas físicos se volvió rápidamente obsoleta por la evolución divergente de ambas disciplinas (basta observar la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad), aunque la investigación de "aquellas ciencias físicas en las que las matemáticas juega un papel importante" tuvo un importante avance con los axiomas de probabilidad de Kolmogorov en 1933.

7) Los números del tipo α^{β} con α,β algebraicos, β irracional y $\alpha \neq 0$ ¿son irracionales? ¿son trascendentes? Esto supone la irracionalidad o trascendencia de $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi} \ldots$. El problema fue resuelto por Gelfand en 1934 y generalizado por Schneider (1934) y Baker en 1966.

8) Riemann conjeturó que los ceros no triviales de la función zeta ς se encuentran en línea recta, sobre el eje crítico $\sigma = \frac{1}{2}$ Aún sin resolver aunque Hardy y Weil obtuvieron resultados parciales. Probablemente lo que interesaba a Hilbert fuese ***la distribución de los números primos.*** El problema para variedades algebraicas fue demostrado en 1973 por Pierre Deligne con la ayuda de la cohomología l-ádica introdicida con los tabajos de Artin y Grothendieck.

9) Demostrar la ley más general de reciprocidad en cualquier cuerpo algebraico.

En 1923 E. Artin conjeturó una ley de reciprocidad general y la demostró en algunos casos particulares. En 1927 resolvió el caso general inspirándose en los trabajos de Takagi. Ese mismo año, Artin también resolvió el problema número 17 de Hilbert convirtiéndose en el primero en resolver dos problemas de Hilbert en su totalidad.

10) ¿Existe un algoritmo general para la resolución de ecuaciones diofánticas?

En 1970 Yuri Matiyasevich estableció la respuesta negativa basándose en los trabajos de Julio Robinson y Martin Davis. La respuesta es que no todas las ecuaciones diofánticas son solubles algorítmicamente.

11) Clasificar las formas cuadráticas sobre cuerpos numéricos algebraicos.

Parece ser que Hilbert deseaba extender el trabajo de Minkowski sobre formas cuadráticas con coeficientes racionales a cualquier cuerpo algebraico. Lo logró Helmut Hasse en 1923.

12) ¿Se puede extender el teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraica? O equivalentemente, ¿Se pueden construir funciones holomórficas de varias variables que tengan propiedades análogas a las funciones exponenciales y a las funciones elipticas modulares?.

El problemas esta parcialmente resuelto por los trabajos de Takagi y Hasse, y los más recientes de Halzapfel (1995)

13) Mostrar la ***imposibilidad de la resolución de ecuaciones de séptimo grado por descomposición de funciones continuas de dos variables***. Más generalmente, se trata de estudiar funciones continuas de tres variables que no puedan expresarse por composición a partir de funciones continuas de dos variables. En 1954, Kolmogorov y Arnold demostraron que esta clase estaba vacía: existen n(2n+1) funciones continuas universales $\phi_{ij}([0,1]\rightarrow[0,1])$ tal que para toda función continua $f:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ existen 2n+1 funciones continuas $g_j[0,1]\rightarrow[0,1]t.q.\,f(x_1,x_2,..)=\sum_{j=1}^{2n+1}g_j\sum_{i=1}^{n}\phi_{ij}(x_i)$

En contrapartida, la cuestión de la resolubilidad de ecuaciones de séptimo grado por funciones analíticas de dos variables aún está abierta.

14) Estudio de la ***existencia de un sistema finito de generadores de un álgebra de funciones racionales sobre un cuerpo abstracto***

Si se considera un cuerpo k y un subcuerpo K de E=(X_1,X_2,..,X_n) y hacemos R=k[X_1,..,X_n] entonces el anillo $R\bigcup k$ ¿es una k-álgebra de tipo finito?

La respuesta es negativa como mostró Zariski dando una interpretación geométrica: existe una variedad proyectiva X de cuerpo de funciones K y un divisor efectivo D sobre X tal que $k\bigcup R$ sea el conjunto de funciones de k que no tienen polos sobre R. M. Nagata en 1959 resolvió negativamente el problema.

15) Establecer el fundamento de la geometría algebraica, ***¿se puede fundamentar, en sentido formal, la geometría enumerativa de Schubert?*** La respuesta afirmativa la dio Bell en 1945.

16) Problema de la topología de curvas y superficies algebraicas.

El problema comporta dos partes: la primera concierne al número de ramas reales de una curva algebraica. La segunda plantea la cuestión de la existencia de un número maximal de ciclos límite para una ecuación diferencial lineal definida por polinomios homogéneos de grado n (aún abierta)

El problema esta parcialmente resuelto con los trabajos de Gudkov y Utkin de 1978 y los de Ilyashenko y Yokovenko en 1995.

La conjetura de Shimura-Taniyama, propuesta en 1995, postula simplemente esta ligazón, afirma que toda curva elíptica es una forma modular enmascarada. Los trabajos de Wiles para obtener el Último Teorema de Fermat la demostraron parcialmente y, posteriormente, Taylor y otros la demostraron totalmente.

17) Determinar las funciones racionales con coeficientes reales que no toman más que valores positivos y son suma de cuadrados de funciones racionales, ¿una función racional positiva sobre R^n puede escribirse como suma de cuadrados de funciones racionales? La respuesta afirmativa fue dada por Artin en 1927.

Artin da una demostración existencial: dada una forma definida, demuestra que existe alguna suma de cuadrados de funciones racionales que la expresa pero no dice como construir esa suma. En 1957 George Kreisel dio un método utilizando el análisis no estandar de Robinson, del método dijo Artin: "prefiero una prueba clara de existencia a una construcción con $2^{2^{100}}$ pasos".

18) Construir el espacio con poliedros congruentes. El problema consta de tres partes: a) Determinar si es finito el número de grupos cristalográficos en los espacios euclídeos de grandes dimensiones, fue resuelto por Bieberbach en 1910. b) ¿se puede llenar el espacio con regiones fundamentales idénticas que no estén asociadas a un grupo cristalográfico?, fue resuelto afirmativamente por K.Reinhart en 1928 presentando un ejemplo en tres dimensiones c) Determinar la manera más eficiente de rellenar el espacio con varios sólidos regulares, la respuesta la dio Thomas Hale en el año 2000.

19) Las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones ¿son necesariamente analíticas? Existen distintas variaciones del problema dependiendo del número de ecuaciones o de variables involucradas. La solución fue iniciada por Berstein en 1904, le siguen Liechtenstein (1912), Hopf (1929), Leray-Schauder (1934), Petrovsky (1939), Caccioppoli (1934 y más tarde 1950-51), Morrey (1958), De Giorgi y Nash (1958).

20) ¿Tiene solución cualquier problema regular del cálculo de variaciones?, la solución parcial fue iniciada por Berstein

21) Partiendo de los trabajos de Riemann, Hilbert plantea ***"demostrar que siempre existe un sistema de ecuaciones diferenciales de la clase de Fuchs, con un conjunto de puntos singulares y grupo monodrómico preestablecido."***

En 1908 el esloveno Josip Pleelj dio una respuesta alternativa a la dada por el propio Hilbert que le valió el reconocimiento general. En 1989 el ruso Andrei Bolibruch encontró un contraejemplo, por tanto la respuesta dada por Pleelj no solo era incompleta, era falsa.

22) Uniformización de Relaciones Analíticas mediante funciones automórficas.

Fue resuelto por Poincare en 1907 utilizando un espacio de cubrimiento universal, toda relación analítica entre dos puntos de la esfera de Riemann resulta de la eliminación de la variable compleja entre dos funciones meromorfas definidas bien sobre el plano complejo, bien sobre el semiplano o bien sobre la esfera de Riemann. El problema también fue resuelto por Paul Koebe en el mismo año.

23) Extender el desarrollo de los métodos del cálculo de variaciones ***¿existe un procedimiento automático que resuelva todos los problemas matemáticos uno tras otro?*** Se ha trabajado en ello y dadas respuestas parciales como la maquina de Turing o la teoría de decisiones.

Problemas del milenio

En una conferencia publica en París el 24 de Mayo del año 2000 el Clay Mathematics Institute de Boston (USA) anunció siete premios de un millón de dólares cada uno a quienes resolviesen, a satisfacción de la comunidad matemática internacional, siete celebres problemas matemáticos que permanecían sin solución en esas fechas y, que a juicio de un selecto comité de profesionales, estaban entre los mas difíciles e importantes de la matemática en ese momento. En el comité figuraban Arthur Jaffe (Harvard), presidente que fue de la American Mathematical Society, y presidente-fundador del Clay M. Institute, y los medalla Fields, Michael Atiyah (Cambridge), Edward Witten (Princeton) y Alain Connes (París). Entre los proponentes de problemas concretos figuraban, además, los conocidos matemáticos Enrico Bompieri, John Milnor y Andrew Wiles. Los siete problemas son:

a) P versus NP

Es un problema acerca de la eficiencia de los ordenadores al resolver problemas. Fue planteado de manera independiente en 1971 por Stephen Cook y Leonid Levin, se considera que es el problema central de la computación teórica. Existen problemas P que son aquellos resolubles de manera determinista mediante algoritmos polinómicos y en un tiempo polinomial como, por ejemplo, resolver ecuaciones; sin embargo existen otros problemas NP que pueden resolverse de manera indeterminista conjeturando una solución, es más fácil y rápido comprobar una solución que generar una nueva. Está claro que todo problema resoluble en tiempo polinomial (P) admite también una comprobación rápida (NP) pero y recíprocamente, ¿existen problemas NP que no son P?

b) La conjetura de Hodge

Fue formulada en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Cambridge (USA) en 1950 por William Vallance Douglas Hodge (1903-1975). El tema de la conjetura es la geometría compleja, prediciendo una estrecha relación entre Geometría, Álgebra, Topología y Análisis. El problema de Hodge consiste en identificar qué elementos de la homología de una variedad proyectiva compleja y lisa se pueden representar algebraicamente.

Dicho de otra forma, el problema de Hodge pretende identificar qué formas topológicas son homólogas a una combinación lineal con coeficientes racionales de subvariedades algebraicas.

La conjetura de Hodge afirma que para ciertos espacios particulares llamados Variedades Proyectivas Algebraicas, todo ciclo de Hodge es una combinación lineal racional de ciclos algebraicos.

Atiyah y Hirzebruch mostraron en 1962 que la conjetura es falsa si se usan coeficientes enteros en vez de coeficientes racionales..

c) La Conjetura de Poincaré

Jules Henri Poincaré (1854-1912), padre de la Topología, dedicó parte de su trabajo a clasificar algunas de las superficies que existen en el universo, así como que objetos permanecen constantes por mucho que se deformen. En su conjetura trata de establecer que, en un mundo de 4 dimensiones, una esfera no tiene ningún agujero. A esta conclusión llegó a través del siguiente experimento: si se pone una goma elástica alrededor de una esfera (mundo de tres dimensiones) podemos encogerla, sin romperla y sin que deje de estar en contacto con la superficie, hasta que forme un punto. Es la llamada conectividad simple. La conjetura, planteada en 1904, se demostró primero para dimensiones superiores, asi en 1961 Zeeman la demostró para la 5-esfera, y Smale para las n-esferas con n mayor o igual que 7, para n=6 fue probada por Stallings en 1962 y para la 4-esfera por Freedman en 1982.La conjetura original resistido un siglo de esfuerzos, hasta los trabajos del ruso Grigori Perelman en 2002 y 2003 que le valieron la medalla Field, rechazada por este, en el Congreso Internacional de Madrid. Los chinos Xi-Ping Zhi y Huai- Dong Cao realizaron el esfuerzo de entender y escribir por primera vez los detalles de la prueba de Perelman.

d) La Hipótesis de Riemann

Los primos han resistido el asedio de los matemáticos de todos los tiempos y siguen sin desvelar sus secretos más profundos. Desde Euclides se sabe que los números primos son infinitos, desde entonces hay una caza de ellos. Gauss estableció, aproximadamente, el número de primos que hay entre 1 y N mediante la ley $\frac{N}{\log N} \cong n^o \; primos$. Sobre 1730 Euler construyó la piedra Roseta de los números primos: la función zeta $\xi(s)$, la construyó de dos maneras, como suma de números naturales: $\sum \frac{1}{n^s}$ o como producto de primos: $\prod \frac{p^s}{p^s - 1}$. Riemann conjeturó que los ceros no triviales de $\xi(s)$ están sobre una misma recta. La HR fue propuesta en 1859 y desde entonces nadie ha podido demostrarla, ni se sabe cuánto tiempo puede llevar el hacerlo. La hipótesis puede ser verdadera o falsa, si es verdad en los primos reina la armonía, en caso contrario, el caos.

El 13 de Julio de 1885 Hermite y Stieltjes,en una nota en Comptes Rendus, anuncian la demostración de la hipótesis de Riemann que resultó falsa.

En 1896 Hadamard y La Vallée Poussin demuestran, independientemente, la conjetura de Legendre bajo la forma definitiva del teorema de los números primos: $(\pi(x)\log x)/x$ se acerca indefinidamente a 1 cuando *x* crece (el teorema de los números primos). Quizás sea el mejor resultado obtenido hasta ahora.

e) El problema de Yang-Mills

El problema de la masa en las teorías de Yang_Mills es, de los siete, el más directamente vinculado a la Física contemporánea y el más desconocido para la comunidad matemática.

Sin entrar en los detalles técnicos del problema, hay una manera sencilla e intuitiva de comprender el problema en términos puramente físicos.

Desde finales de los años sesenta existe una teoría fundamental que explica a la perfección la teoría de las interacciones fuertes responsables de la estabilidad del núcleo atómico.

Esta teoría recibe la denominación de *Cromodinámica Cuántica* y su elemento esencial consiste en la descripción de la propagación relativista de dicha interacción fuerte a través de una partícula transmisora virtual conocida como gluón. El gluón juega en el mundo nuclear un papel análogo al del fotón en el mundo de las interacciones electromagnéticas. Ambas se propagan a la velocidad de la luz, sin embargo existen dos diferencias esenciales entre las mismas. El fotón posee una realidad experimental que nuestro ojos detectan en cada instante, sin embargo del gluón sólo observamos sus efectos secundarios. La otra gran diferencia estriba en que el fotón es una partícula sin masa lo que permite que se propague más lejos lo que da un alcance infinito a la interacción electromagnética y un gran tamaño, en términos de distancias fundamentales, al átomo y las moléculas. La interacción fuerte generada por los gluones sin embargo es de corto alcance y no va más allá del núcleo atómico. Esto sugiere que el gluón o sus partículas derivadas responsables de la interacción fuerte poseen en realidad una masa no nula. El explicar este fenómeno en términos de la cromodinámica cuántica, es decir a partir de primeros principios es el objeto del problema Clay.

Las leyes de física cuántica son al mundo de las partículas elementales lo que las leyes de la mecánica clásica de Newton son al mundo macroscópico. Hace casi medio siglo, Yang y Mills descubrieron que la física cuántica revela una relación importante entre la física de partículas elementales y las matemáticas de objetos geométricos. Las predicciones basadas en la ecuación de Yang-Mills han sido verificadas en experimentos con altas energías realizados en varios laboratorios alrededor del mundo: Brookhaven, Stanford, CERN (European Organization for Nuclear Research) y Tskuba. Sin embargo, no se conocen soluciones para tales ecuaciones que describan partículas con masa y que sean matemáticamente rigurosas al mismo tiempo. En particular, la hipótesis de "abertura de masa", la cual es tomada como cierta por los la mayoría de los físicos y usada en la explicación de la invisibilidad de los"quarks", nunca ha recibido una justificación matemática satisfactoria. Para obtener progreso en este problema se requerirá la introducción de nuevas ideas fundamentales en la física y la matemática.

f) Las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, surgieron del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes.

El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente.

A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos; el problema es que si uno estudia el movimiento de un fluido con estas ecuaciones, es incapaz de prever si ese movimiento se va a mantener siempre o se va a complicar. Los matemáticos creen que una explicación para la predicción de estos fenómenos pasa por la comprensión de las soluciones de estas ecuaciones. El reto es realizar algún progreso substancial hacia la teoría matemática que permita comprender los secretos escondidos dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes. En definitiva se trata de encontrar una teoría matemática que fundamente estas ecuaciones que estudian las turbulencias en líquidos y gases.

g) La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Ya sabemos que no existen métodos generales para resolver las ecuaciones diofánticas tal y como estableció en 1970 Matiyasevich al establecer la irresolubilidad del décimo problema de Hilbert sin embargo, la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer afirma que en el caso de las soluciones de las ecuaciones diofánticas generales, cuando éstas son los puntos de una variedad abeliana, el conjunto de los puntos que son soluciones racionales de las mismas depende de la función zeta, z(n), asociada, de modo que si z (1) = 0, hay infinitas soluciones, y si z(1) $\neq$ 0, el número de soluciones es finito.

Bibliografía

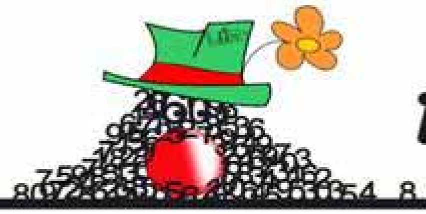
- Boyer,C.B. (1986): *Historía de la matemática*, A.U./94,Madrid
- N. Bourbaki(1976): "*Elementos de historia de las matemáticas*". Alianza Universidad
- Collete,J.L. (1985): *Historia de las matemáticas*, siglo XXI, Madrid
- Hilbert, D. (1902): *Mathematical Problems.* Bull. AMS vol 8, 437-479.
- Kline ,M (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (II),AU/724, Madrid
- Jeremy J. Gray. (2003): El reto de Hilbert: *Los 23 problemas que desafiaron a la matemática*. Crítica, Barcelona
- S. Smale. (1998) *Mathematical problems for the next century*. Math. Intelligenzer. 20, 7-15. (una traducción de este artículo puede encontrarse en la Gaceta de la RSME, vol3, nº3, 413-434)
- D.J. Struik. (1986). *"A source book in mathematics, 1200-1800"*. Princeton University Press
- Taton, R. (1988): *Historia general de la ciencia*,(VIII),Orbis, Barcelona

http://www.claymath.org/annual meeting/2000 Millennium Event/Video/
www.unizar.es/acz/05Publicaciones/Monografias
http://www.bibmath.net/dico/

Antonio Rosales Góngora, licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, ejerce la docencia en el IES Bahía de Almería. Ha publicado artículos relacionados con la Historia de las Matemáticas en la revista Epsilon y en el Boletín matemático de la UAL. anrogo58@yahoo.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 239-245
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santonja

Aún más matemáticas falaces

La primera norma que debe seguir el encargado de una sección en un periódico es: "nunca traicionaré a mis lectores". Nosotros queremos seguir esa norma a rajatabla y amparándonos en el dicho de que quien avisa no es traidor, este trimestre continuamos con las falacias matemáticas.

Hemos trabajado los errores matemáticos en demostraciones numéricas o utilizando ecuaciones simples, vamos en esta ocasión a ver otro tipo de demostración utilizando funciones algo más complicadas, aunque veremos que muchas de ellas son demostraciones muy simples.

Vamos a comenzar con un bloque utilizando desigualdades.

Demostración de que 0>3

Elegimos un número cualquiera mayor que 3	$x > 3$
Multiplicamos ambos términos por 3	$3x > 9$
En ambos miembros restamos x^2	$3x - x^2 > 9 - x^2$
Descomponemos en producto	$x\cdot(3 - x) > (3 + x)\cdot(3 - x)$
Dividimos ambos miembros por $3 - x$	$x > 3 + x$
Como último paso simplificamos el valor común x y llegamos a:	**$0 > 3$**

Demostración de que 1 < 0

Esta demostración la encontré en una página, uno de cuyos autores es gran amigo y que aconsejo porque tiene una gran variedad de contenidos relacionados con las matemáticas www.matesymas.es. A pesar de su simplicidad creo que resulta curiosa.

Tomamos un número cualquiera que sea negativo	$x < 0$
Dividimos la desigualdad por x	$\frac{x}{x} < \frac{0}{x}$
De donde, operando en cada término, llegamos a:	**1 < 0**

Otra demostración de que 1 < 0

A la fuerza nos van a convencer de que uno es más pequeño que cero porque veamos la siguiente demostración utilizando logaritmos, que ya son palabras mayores, aunque en el fondo es la misma demostración anterior.

Tomemos un número menor que la unidad	$x < 1$
Tomamos logaritmo neperiano en ambos miembros	$\text{Ln } x < \ln 1$
Dado que el ln 1 vale 0	$\text{Ln } x < 0$
Basta dividir por el ln x y llegamos de nuevo a:	**1 < 0**

Siempre que sea posible, me gusta meter alguna aportación personal al tema que estemos tratando. Así que vamos a ver una variación que yo utilizo en clase para llamar la atención a los alumnos sobre las operaciones que se realizan con desigualdades, y cómo hay que tener un cuidado especial, que normalmente ellos no tienen, al realizar las inecuaciones.

En primer lugar les pregunto que si cualquier número verifica la siguiente desigualdad

$$\mathbf{x + 1 > x}$$

tras obtener una respuesta positiva les hago el siguiente razonamiento.

Elevamos ambos miembros al cuadrado	$(x+1)^2 > x^2$
Desarrollamos el cuadrado	$x^2 + 2\cdot x + 1 > x^2$
Simplificamos el valor común	$2\cdot x + 1 > 0$
Si ahora resolvemos la inecuación	$x > -\frac{1}{2}$

Por lo tanto, con la demostración anterior resulta que la desigualdad inicial de x+1>x sólo se cumple para los números mayores que $-\frac{1}{2}$. Mis alumnos, generalmente, tienen dificultad para localizar rápidamente dónde está el paso erróneo y tardan su tiempo en ver dónde han cometido el error.

En una de las demostraciones anteriores hemos utilizado el logaritmo neperiano, vamos a ver un par más de demostraciones donde también lo utilizamos. Aunque, por supuesto, las demostraciones serían exactamente iguales si utilizáramos un logaritmo de cualquier base.

Demostración de que 2 < 1

Partimos de una desigualdad con fracciones	$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
Escribimos el primer término como una potencia	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$
Tomamos a continuación logaritmos en ambos miembros	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Utilizando las propiedades del logaritmo de una potencia	$2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
Y dividiendo ahora por el ln(1/2) llegamos por fin a:	**2 < 1**

Demostración de que 1 = –1

Por supuesto, los logaritmos no pueden liarla solo en las desigualdades, también en las igualdades pueden conseguir resultados asombrosos como el siguiente.

Partimos de una igualdad	$(-1)^2 = 1$
Tomamos logaritmo y aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia	$2 \cdot \ln(-1) = \ln 1$
Como el logaritmo de 1 siempre vale cero	$2 \ln(-1) = 0$
Dividimos entre 2	$\ln(-1) = 0$
Aplicando lo mismo que en segundo paso	$\ln(-1) = \ln 1$
Y quitando los logaritmos de la igualdad:	**–1 = 1**

José Muñoz Santonja

Vamos a continuación a ver un par de falacias utilizando el concepto de series y sucesiones.

Demostración de que 0 = 1

Esta primera seguramente será conocida por todos nuestros lectores, pues es de las que se utilizan siempre para llamar la atención sobre la suma de series infinitas.

Partimos de que 0 se puede expresar como suma de infinitos ceros	$0 = 0 + 0 + 0 + \ldots.$
Los ceros se pueden escribir como suma de dos valores opuestos	$0 = (1–1) + (1–1) + (1–1) + \ldots.$
Aplicando la propiedad asociativa	$0 = 1 + (–1+1) + (–1+1) + (–1+1) + \ldots$
Y anulando de nuevo la suma de elementos opuestos	$0 = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots..$
De donde obtenemos lo previsto	**0 = 1**

Esta demostración se puede generalizar a cualquier número distinto del 1, pero también podemos seguir aplicándola y ver que todos los números son iguales, ya que si en el penúltimo apartado volvemos a hacer los pasos vistos:

$$0 = 1 + (1–1) + (1–1) + \ldots$$

$$0 = 1 + 1 + (–1+1) + (–1+1) + \ldots$$

$$0 = 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Y por tanto llegamos entonces a que 0 = 2 y de ahí hasta el infinito.

Demostración de que 2 = 1

En este caso vamos a incluir una nueva herramienta, la derivada. Tomamos un valor x que sea distinto de cero, para poder dividir después por él.

Partimos de una igualdad en la que se fundamenta el producto en una suma repetida.	$x^2 = x + x + x + \ldots\ldots. + x$ (x veces)
Derivamos respecto de x en ambos miembros.	$2\cdot x = 1 + 1 + 1 + \ldots.. + 1$ (x veces)
Por tanto obtenemos la igualdad	$2\cdot x = x$
Dividiendo por x encontramos la falacia.	**2 = 1**

A continuación, vamos a ver dos demostraciones muy parecidas de que 1 y –1 son la misma cosa utilizando la unidad imaginaria.

Nueva demostración de que 1 = –1

Partimos de una igualdad	$-1 = -1$
Convertimos cada término en una fracción	$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$
Tomamos la raíz cuadrada en ambos miembros	$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$
Descomponemos en fracción	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$
Utilizamos el valor de la unidad imaginaria.	$\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$
Quitamos los denominadores multiplicando en cruz	$1^2 = i^2$
Dado que $i^2 = -1$ llegamos a la igualdad buscada	$1 = -1$

Venga otra demostración de que 1= –1

Veamos como el proceso anterior se puede complicar un poco más. Ya sabemos que si metemos más operaciones en una demostración, conseguimos que aumente exponencialmente el número de personas que se pierden en ella, con lo que aún es más difícil localizar el paso donde se han aplicado incorrectamente las reglas matemáticas.

Para no repetir innecesariamente los pasos de la demostración anterior, vamos a saltar directamente al paso número 5, pues los anteriores serían exactamente iguales.

Partimos de la igual del paso 5º anterior	$\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$
Dividimos por 2	$\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$
Sumamos a ambos miembros $\frac{3}{2i}$	$\frac{1}{2i} + \frac{3}{2i} = \frac{i}{2} + \frac{3}{2i}$
Multiplicamos ambos miembros por la unidad i	$i \cdot \left(\frac{1}{2i} + \frac{3}{2i}\right) = i \cdot \left(\frac{i}{2} + \frac{3}{2i}\right)$

Efectuamos los productos	$\frac{i}{2i}+\frac{3i}{2i}=\frac{i^2}{2}+\frac{3i}{2i}$
Ahora simplificamos todo lo que se pueda	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}$
Y por último efectuamos la operación de cada miembro	**2 = 1**

Obsérvese que en la demostración anterior podríamos haber dado un giro distinto si hubiésemos operado en el paso 3, pues habríamos obtenido $\frac{4}{2i}=\frac{i^2+3}{2i}$ por lo que al acabar con la igualdad $\frac{4}{2i}=\frac{2}{2i}$ el paso siguiente hubiese sido demostrar que 4 = 2.

Última demostración de que 1 = –1

Vamos a acabar con las demostraciones de que el signo es irrelevante cuando se trabaja con el 1. Esto es algo que nuestros alumnos conocen íntimamente, por eso no tienen ningún reparo en quitar el signo se pueda o no. Voy a repetir una demostración muy simple, pero que tal como decían en el blog donde la encontré (lamento haber perdido la dirección), para "vacilar" a los de letras ya sirve.

Vamos a encadenar todas las operaciones en una sola igualdad:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=i^2=-1$$

Vamos ahora con la última falacia matemática, en este caso utilizando trigonometría.

Demostración de que 0 = 4

Partimos de la igualdad fundamental de la trigonometría	$sen^2x + cos^2x = 1$
Despejamos el término del coseno	$cos^2 x = 1 - sen^2 x$
Tomamos la raíz cuadrada	$\cos x=\sqrt{1-sen^2x}$
Sumamos la unidad a ambos miembros	$1+\cos x=1+\sqrt{1-sen^2x}$
Elevamos al cuadrado	$(1+\cos x)^2=\left(1+\sqrt{1-sen^2x}\right)^2$
Tomamos a continuación el valor de 180º para x	$(1-1)^2=\left(1+\sqrt{1-0}\right)^2$
De donde llegamos a lo esperado	**0 = 4**

José Muñoz Santonja

Con esta última demostración vamos a hacer algo que hasta el momento no habíamos hecho, incluir la explicación, y vamos a explicar el porqué.

La mayoría de las demostraciones que hemos incluido en estas dos entregas aparecen en muchos lugares de Internet, uno de ellos es un artículo que se puede descargar en pdf desde la dirección

http://www-fa.upc.es/websfa/fluids/TJM/pdf/Paradojas_acertijos_y_demostraciones_invalidas.pdf

El artículo, escrito por el profesor Roberto Muñoz Sánchez, lleva por título, tal como se ve en la dirección de Internet, *Paradojas, acertijos y demostraciones inválidas*. Es muy interesante porque hace una recopilación de las paradojas y demostraciones más usuales, y en concreto de estas últimas añade una solución explicando dónde está el fallo. Pero en esta última demostración dice no tener claro donde se encuentra el error, por eso lo explicaremos aquí.

La falacia se encuentra en el paso 3º cuando hallamos la raíz cuadrada. Ya sabemos que al extraer una raíz de índice par obtenemos dos posibles soluciones una positiva y otra negativa. Por regla general se toma sólo la positiva, pero hay que tener cuidado en casos extremos como éste, porque no pueden surgir errores. En nuestro caso en concreto, ya sabemos que el coseno para 180º vale –1 por lo que al extraer la raíz cuadrada deberíamos haber tomado la parte negativa y de esa manera el desarrollo no hubiese terminado en una falsedad.

Con esto terminamos con las demostraciones falaces, no sé si alguno de los lectores tendrá alguna otra que conozca y que no se encuentre en esta relación, si quiere compartirla con todos nosotros, agradeceríamos que nos la enviara a la dirección josemunozsantonja@yahoo.es. Un afectuoso saludo y hasta la próxima.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 247-250
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Se escriben los números naturales del 1 al 9 inclusive y luego se pintan usando los colores rojo, azul y verde. Cada número se pinta con un solo color, de tal modo que cada número pintado de rojo es igual a la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde.

¿Cuál es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo?

Tal como está propuesto, éste es un problema no rutinario de optimización, cuya solución completa requiere una demostración de que la cantidad que se dé como respuesta sea efectivamente la máxima; sin embargo, pensando en usar este problema poniendo más énfasis en el aprendizaje que en la evaluación, resulta muy interesante explotar las posibilidades didácticas y matemáticas que ofrece, al describir la situación y proponer diversas actividades individuales y grupales de dificultad graduada, que orienten hacia su solución completa. Por su carácter lúdico y por requerir básicamente saber sumar los nueve primeros números naturales y reconocer colores, podría proponerse aún en los primeros grados de primaria, con las adecuaciones del caso.

A continuación hacemos una propuesta de actividades, a partir de la cual se puede hacer modificaciones según el nivel educativo en el que se desee aplicar:

Situación:

Se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y luego se pintan según las siguientes reglas:

1. Sólo se pueden usar los colores rojo, azul y verde.
2. Cada número se pinta con un solo color.
3. Cada número pintado de rojo es igual a la suma de un número pintado de azul más un número pintado de verde.

---

[1] Problema creado por el ex olímpico peruano Israel Díaz y propuesto en el Perú, a los alumnos de primero y segundo años de secundaria, en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas del 2008.

Actividades individuales

a) Juan pintó los números de la siguiente manera:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pedro dice que Juan no ha respetado todas las reglas.

Examina si Pedro tiene razón. En caso que la tenga, ¿Cuál de las reglas no respetó Juan? ¿Por qué? ¿Se puede cambiar el color de uno de los números y tener así todos los números pintados respetando las reglas? ¿Cuál? ¿Hay sólo una posibilidad?

b) Carlitos empezó a pintar los números y se le ocurrió pintar el 2 de azul, el 6 de verde y el 9 de rojo. Muestra que es posible mantener estos colores del 2, 6 y 9 y terminar de pintar los nueve números respetando las reglas.

c) Examina si es posible pintar los nueve números respetando las reglas y que al final el 4, el 5 y el 9 sean rojos.

d) Examina si es posible pintar los nueve números de modo que al final se tenga cinco números pintados de rojo.

Actividades grupales

A. Comparar y examinar las respuestas dadas en las actividades individuales.

B. Dar una respuesta del grupo a cada una de las actividades individuales.

C. María afirma que cualquier par de números puede pintarse del mismo color. Examinar si esta afirmación es verdadera.

D. Examinar si es posible pintar los nueve números, de modo que al final se tenga más de tres números pintados de rojo

E. Demostrar que cuatro es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo.

F. Crear un problema a partir de una situación similar a la dada y resolverlo.

La idea es proponer actividades que faciliten la comprensión de las reglas, sobre todo la tercera. Quien oriente el trabajo de los participantes debe tener clara la condición necesaria que se establece en esta regla; concretamente, si un número se pinta de rojo, necesariamente debe haber uno pintado de verde y otro pintado de azul, cuya suma sea aquel pintado de rojo.

Formalmente, si denotamos M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} y aR, bA y cV significan que los números a, b y c están pintados de rojo, azul y verde respectivamente, la tercera regla establece que:

$$aR \Rightarrow \exists p \in M \wedge \exists q \in M,\, p \neq q, \textit{tales que} \quad pA \wedge qV \wedge p+q=a$$

Sin embargo, si – por ejemplo – el 2 está pintado de azul y el 4 de verde, no necesariamente el 6 debe estar pintado de rojo.

Comprender bien esta regla, lleva a afirmar que – en la primera actividad individual – Pedro tiene razón, pues el 7 está pintado de rojo y no hay dos números, uno pintado de azul y otro de verde, cuya suma sea 7. La situación se corrige si el 2 se cambia al color azul. Otra posibilidad es cambiar a verde el color del número 1, pero esto compromete el color del 4. El lector queda invitado a corregir la situación cambiando el color de otro número.

La tercera actividad grupal permite trabajar la idea de contraejemplo, que es tan importante en la matemática y que lamentablemente su presencia no es significativa en los textos ni en las clases. Para desarrollar esta actividad, basta examinar si ese color común puede ser el rojo, ya que es el que conlleva una condición necesaria. Se puede concluir que la afirmación de María es falsa mostrando como contraejemplo que existe un par de números que no pueden ser del mismo color: el 3 y el 4 no pueden ser ambos rojos, pues 4 sólo puede expresarse como suma de 1 y 3 (como suma de 2 y 2 es imposible, pues 2 sólo puede ser pintado de un color); en consecuencia, si 4 es rojo, el 3 tiene que ser azul o verde. ¿Existen otros contraejemplos para demostrar la falsedad de la afirmación de María? Ciertamente con el mostrado es suficiente, pero dejamos la inquietud para el lector.

Para concluir, damos una demostración de que 4 es la mayor cantidad de números que se puede pintar de rojo. Hemos optado por una demostración que no necesariamente es la más sencilla, pero permite usar criterios generales, válidos también para problemas más complicados.

En la demostración hacemos uso del siguiente criterio:

> Si se encuentra una cota superior *k* del conjunto de valores posibles que se examina en el problema de optimización y se exhibe un caso que corresponde a esa cota (es decir, se muestra que es posible alcanzar ese valor *k*), entonces el máximo es *k*.

Veamos:

Luego de unos cálculos, encontramos casos como los siguientes

Verde	Azul	Rojo
1	3	4
2	6	5
	9	7
		8

Verde	Azul	Rojo
4	1	5
6	2	7
	3	8
		9

Como no encontramos casos en los que haya más de cuatro números pintados de rojo, conjeturamos que 4 es la mayor cantidad de números que se pueden pintar de rojo, respetando las reglas.

Pasemos de la conjetura a la demostración:

1. Sean *r, a* y *v* las cantidades de números pintados de rojo, azul y verde, respectivamente.
2. Es claro que *r, a* y *v* son números enteros no negativos y que
   $r + a + v = 9$
3. Supongamos que sea posible que $r \geq 5$
4. En consecuencia $a + v \leq 4$
5. Sumando un número azul con los *v* números verdes, obtenemos *v* sumas; y como son *a* números azules, en total obtenemos *av* sumas (considerando inclusive las repeticiones que se pudieran presentar).
6. Como cada rojo tiene que ser la suma de un azul y un verde, debe ocurrir que $r \leq av$
7. Sin embargo, como $a + v \leq 4$ y todas las posibilidades aritméticas resultan de:

   $a = 0$ y $v \in \{0,1,2,3,4\}$

   $a = 1$ y $v \in \{0,1,2,3,\}$

   $a = 2$ y $v \in \{0,1,2\}$

   $a = 3$ y $v \in \{0,1\}$

   $a = 4$ y $v = 0$,

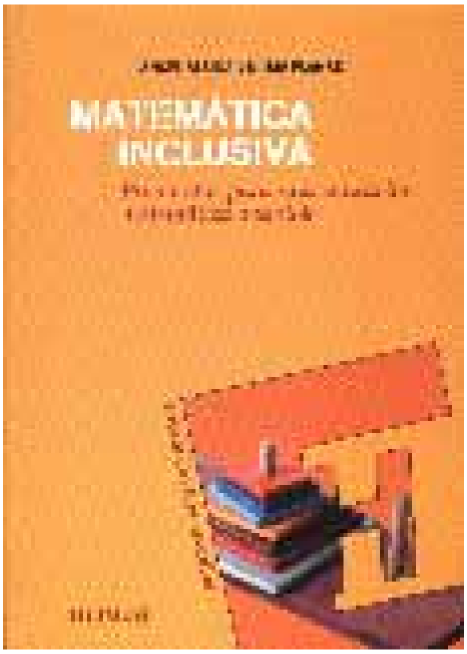
   es claro que en todos los casos $av \leq 4$

8. En consecuencia, por lo obtenido en los pasos 6 y 7 y por la transitividad de la relación de orden, $r \leq 4$
9. Esto es una contradicción, pues al inicio supusimos que $r \geq 5$
10. Por consiguiente, la cantidad de números que se pueden pintar de rojo es a lo más 4. Así, hemos encontrado que 4 es una cota superior del conjunto de valores posibles y hemos mostrado hasta dos casos en los que efectivamente hay cuatro números pintados de rojo. Con esto queda demostrado que 4 es la máxima cantidad de números que se puede pintar de rojo.

El lector queda invitado a pensar en demostraciones más sencillas. Una posibilidad es comenzar observando que – obviamente – no pueden ser 9 rojos ni 8 rojos, y analizando que tampoco pueden ser 7 rojos, pues con sólo dos números, uno azul y otro verde, es imposible obtener las 7 sumas diferentes que se requerirían. Se puede continuar, haciendo análisis y descarte similar al considerar 6 rojos y 5 rojos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 251-253
ISSN: 1815-0640



Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible

Autor: Àngel Alsina y Núria Planas

Edita: **Editorial Narcea, Madrid**

Año: 2008

176 páginas

ISBN: 978-84-277-1591-2

En su colección 'Estudios de Hoy', la Editorial Narcea acaba de publicar el libro *Matemática Inclusiva*, escrito en coautoría por Àngel Alsina y Núria Planas, profesores de las Universidades de Girona y Autònoma de Barcelona respectivamente. Se trata de un libro interesante por diversos motivos, pero fundamentalmente porque es capaz de integrar reflexiones teóricas de gran complejidad con buenos ejemplos de aula. A lo largo de sus páginas, se argumenta que una Educación Matemática inclusiva –basada en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad– tiene que destacar los contextos donde se piensan las prácticas, los grupos de conocimientos implicados y la especificidad de las personas en la reformulación de contenidos matemáticos. Desde estos supuestos se plantea una visión de la Educación Matemática abierta e integradora, exigente con el conocimiento matemático y atractiva y útil para las personas. A mi entender, este libro complementa, actualiza y amplía varios aspectos de otro libro publicado en la misma colección hace una década, *Matemática Emocional*.

Matemática Inclusiva tiene multitud de valores añadidos, entre ellos, la referencia constante a las necesidades del alumnado y del profesorado de matemáticas, pensadas en el contexto dado por la época actual. Los cuatro primeros capítulos –El pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad– dan voz a grupos de profesores con los que se ha colaborado en la planificación, el diseño, la implementación y, sobre todo, la validación de las actividades matemáticas que se ofrecen; la voz de los alumnos está especialmente presente en las fases de planificación y de diseño, cuando se da prioridad a sus intereses en la organización de la práctica matemática escolar. Todas estas voces expertas se articulan en un discurso común con voces de profesionales e investigadores en el área de Didáctica de la Matemática o en áreas afines: voces clásicas como las de Josep Estalella y Pedro Puig Adam; históricas como las de Lev Vygostki y John Dewey; institucionales como las de la OCDE y el NCTM norteamericano; fundamentales como las de Hans Freudhental y Paulo Freire; y actuales como las de Mögen Niss y Ole Skovsmose, entre otras.

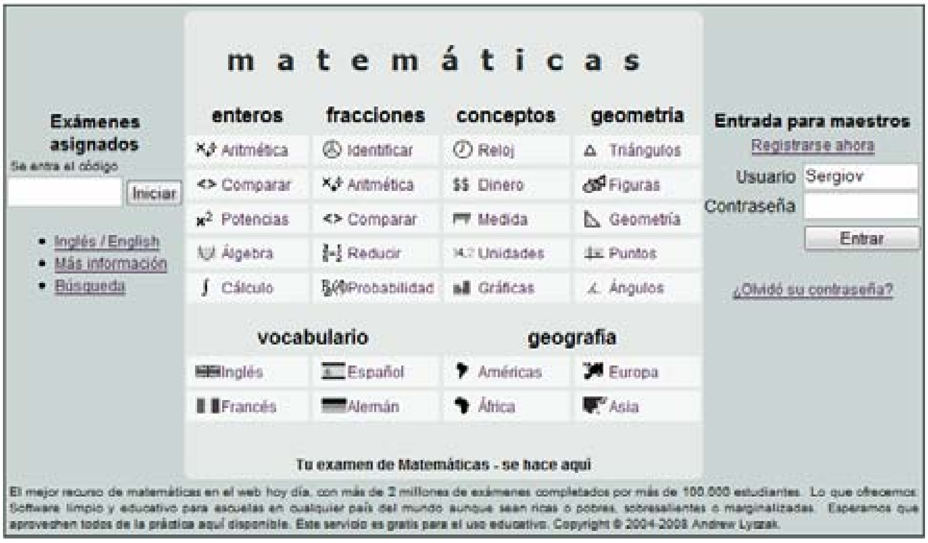
Es especialmente reconfortante que los autores no eludan el debate sobre la calidad. Cuando se ha hablado de calidad en Educación Matemática se han sugerido ideas muy distintas, incluso opuestas. Muchas veces la calidad ha significado una cantidad relevante de buenos resultados escolares; otras veces con esta noción nos hemos referido a la eficiencia de unos ciertos programas curriculares con unos grupos de alumnos. En Matemática Inclusiva, se examina la calidad desde otro punto de vista, mucho más cualitativo: una Educación Matemática de calidad es aquella que resulta accesible y comprensible para todo el mundo sin que ello lleve a prescindir del aprendizaje de conocimientos matemáticos básicos ni redunde en una simplificación del discurso de enseñanza de las matemáticas. Más tarde, se nos explica que la diversidad de ritmos de aprendizaje y de intereses del alumnado obliga a diversificar los modelos de enseñanza de las matemáticas y los tipos de actividades para que tenga sentido pensar en la condición de accesibilidad “para todo el mundo” y “todo el mundo” pueda llegar a tener una visión global de la Matemática, de su peso específico en nuestra sociedad y de su papel en el desarrollo de una educación crítica.

En el último capítulo del libro, *Hacia un enfoque integrado*, podemos leer el siguiente texto: “La mayoría de tareas matemáticas se centran en los conocimientos sobre las matemáticas y no en los conocimientos sobre el mundo. Una de las consecuencias de este enfoque es que se piensa sin contextualizar–ya sea manipulando, jugando y/o atendiendo a la diversidad–, llegándose a penalizar en algunas ocasiones a quien piensa contextualizando. Sin embargo, no hay confrontación entre unos y otros conocimientos, aunque a menudo se plantee de este modo en el entorno escolar. Para trabajar bien las matemáticas han de trabajarse bien conocimientos de los mundos físico y social; muchos de ellos ayudan a anticipar el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático y, después, contribuyen a validarlos (...). Cuando alguien piensa matemáticamente, debería apelar a multitud de conocimientos construidos a lo largo de su experiencia. Cualquier respuesta o resolución en matemáticas debería surgir de integrar procesos de inferencia basados en conocimientos de ámbitos distintos". En los capítulos anteriores se han sentado las bases de estas afirmaciones, algunas de ellas ciertamente controvertidas.

Vicenç Font
Universitat de Barcelona
España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 255-260
ISSN: 1815-0640



ThatQuiz para profes

Autor de la Aplicación: *Andrew Lyczak*

Dirección*:* http://www.thatquiz.org/es/

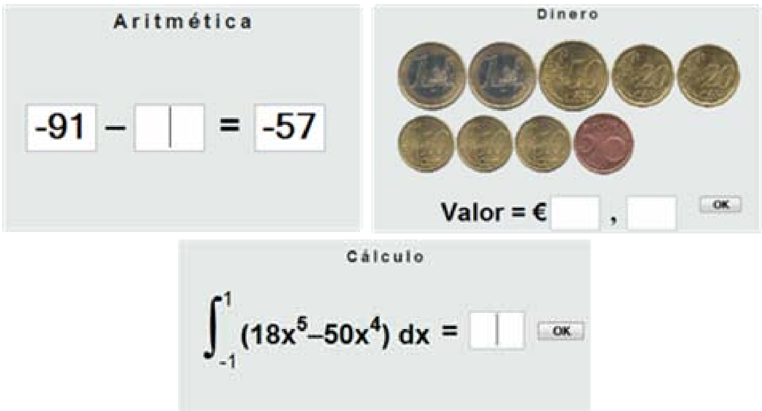
Introducción

Me niego a comenzar esta reseña de la misma forma que lo he hecho en los últimos años. Estamos en el siglo XXI y el cambio ya se ha producido, no hay marcha atrás. ¿Quién va a negar que el presente de la Educación deba tener un componente tecnológico?

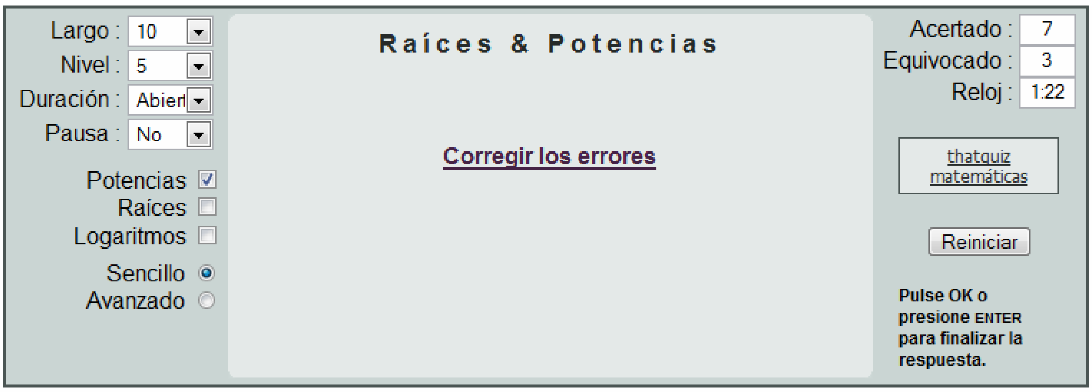
En este caso hemos elegido una Web que sigue un patrón de lo más "clásico": ejercitación pura y dura de los contenidos vistos en el aula. Pero la potencia de la tecnología nos permite entrar en otra dimensión rompiendo las barreras espacio-temporales del aula. El alumnado puede trabajar desde cualquier lugar donde haya un ordenador conectado a Internet, desde Cochabamba (Bolivia) a Garachico (España), incluso se podría montar un grupo de clase interoceánico con nuestros estudiantes a los dos lados del charco. El profesor, por otro lado, recibe puntualmente estadísticas del proceso y los resultados, ya corregidos, con todo tipo de detalle y de forma gratuita.

El plan "A"

Para sacar partido a esta Web lo primero que se nos ocurre es acceder con nuestros estudiantes a las distintas secciones para ejercitar algún tema visto en clase. En este plan "A" nos olvidamos de registros y simplemente entramos a practicar.



Los ejercicios son altamente configurables y en la zona izquierda de la pantalla se eligen las opciones: cantidad de preguntas (Largo), nivel de dificultad, duración y más elecciones que dependerán del tema seleccionado. En la imagen el estudiante ha terminado una prueba de Potencias y se le muestra una pantalla con información muy útil. Por ejemplo, en la parte inferior, nos dice que hemos tenido 3 fallos, se expone donde hemos fallado y la opción de corregir los errores probando de nuevo. También se observa que el alumno ha tardado 1 minuto y 22 segundos en realizarla, obteniendo una nota de un 70%.

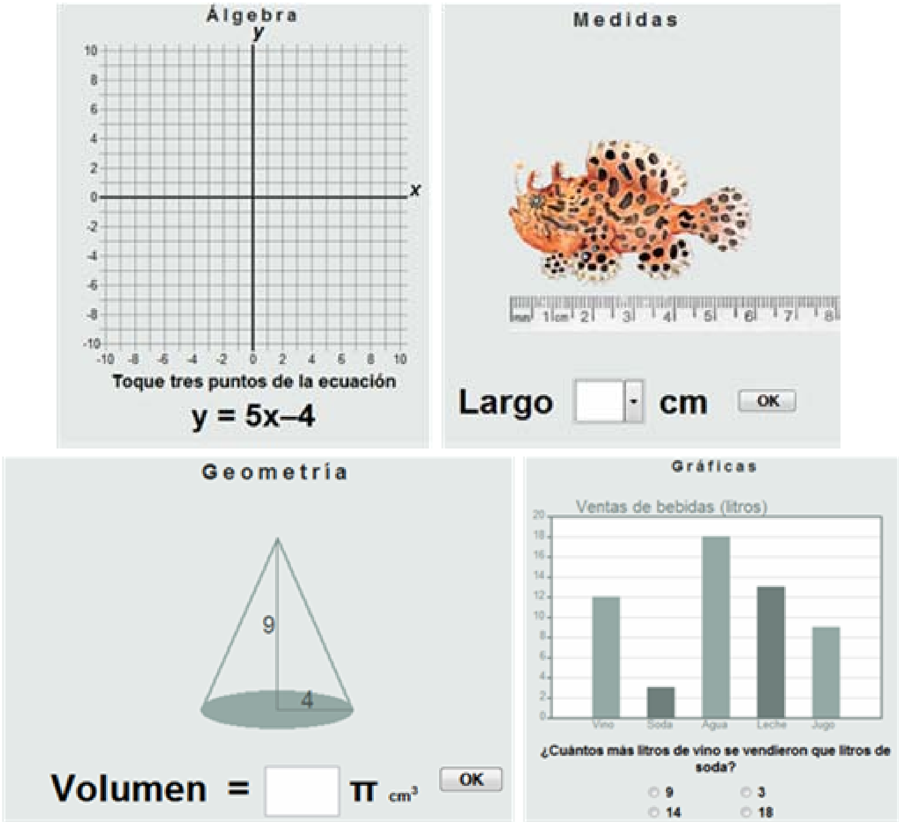


Nota	70%
Cumplido	10
Sin cumplir	0
Acertado	7
Equivocado	3
Tiempo	1:22
Segundos (Media aritmética)	8.2

Respuestas Equivocadas

4^4=256 (16)
5^4=625 (125)
7^3=343 (256)

La aplicación nos permite trabajar Matemáticas a distintos niveles barajando los ejercicios aleatoriamente. A alumnos distintos se les plantean cuestiones distintas que, además, se refrescarán cada vez que se entre. A continuación se muestran más ejemplos de los contenidos de la Web:

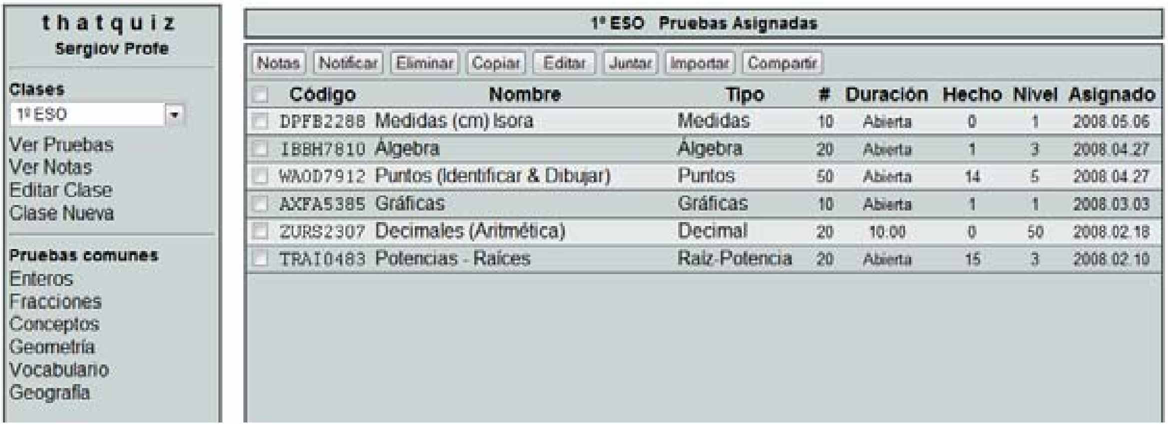


El plan "B"

Ahora comienza, según nuestro parecer, lo realmente interesante de ThatQuiz. Pulsando el botón "Registrarse ahora" y rellenando un sencillo formulario nos habremos inscrito como **profesores** en el sistema, abriéndose así una nueva gama de posibilidades.

Esta Web ofrece un servicio de pruebas electrónicas gratis para profesores. Cuando nuestros estudiantes hacen una prueba con ThatQuiz se les revelan las notas de inmediato y podemos ver todos los resultados y estadísticas de forma instantánea. Desde la zona del profesor conseguiremos administrar los grupos que tengas, configurar las pruebas o exámenes, ver el detalle de las notas y estadísticas de los grupos y de los alumnos. Estas y otras posibilidades se describen en el siguiente enlace:

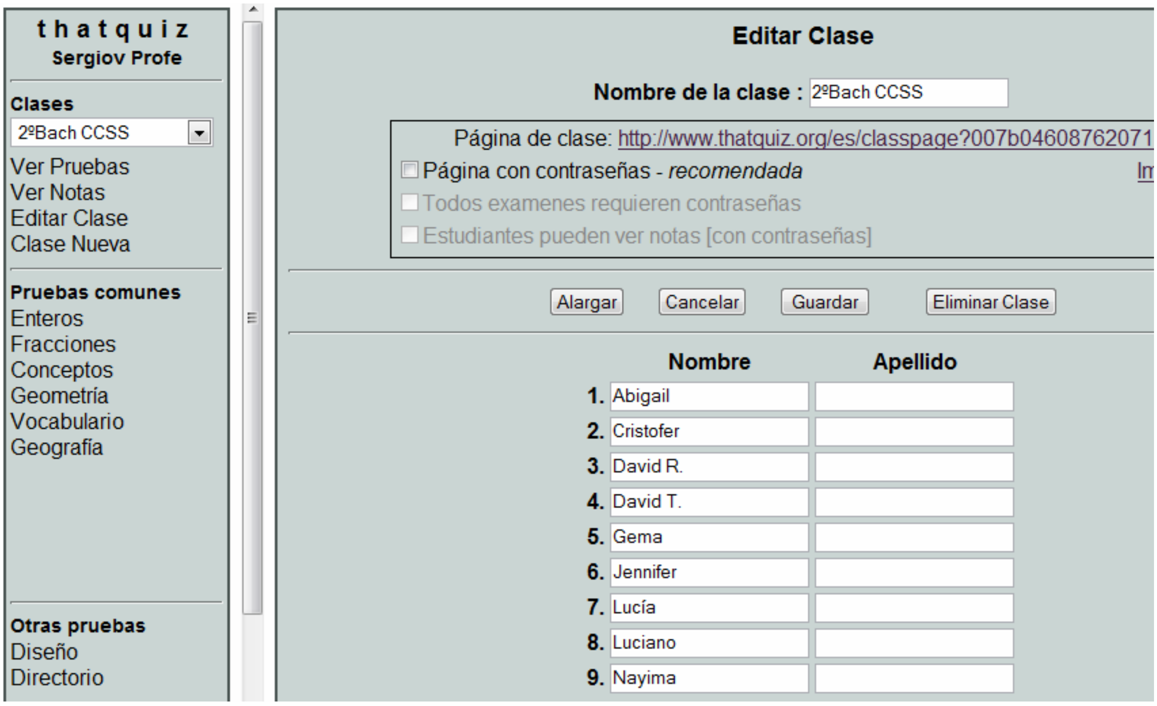
http://www.thatquiz.org/es/instructions.html



En la imagen se muestra la zona del profesor donde hay un grupo de 1ºESO con todas las pruebas que se le ha asignado:

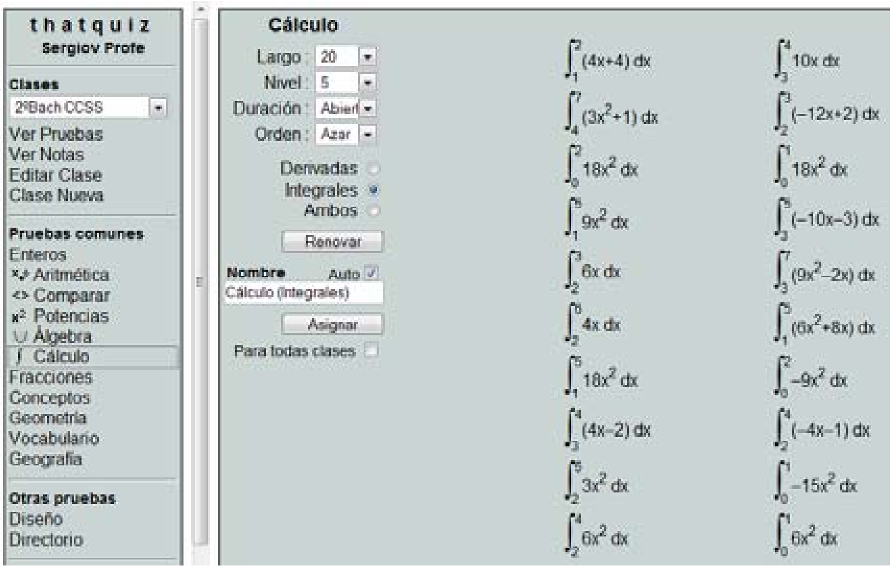
A continuación explicamos someramente como sería el proceso que debe seguir un profesor para **introducir una clase** en el sistema después de haberse registrado:

1. En primer lugar creamos nuestro grupo de clase pulsando “Clase Nueva”.
2. Se introduce el nombre del grupo y el nombre de los estudiantes.
3. Una vez se haya terminado se pulsa el botón guardar.
4. A partir de ahora si queremos cambiar cualquier cosa debemos ir a “Editar clase” donde podremos:
    - Introducir contraseñas, si lo creemos necesario.
    - Decidir si queremos que los estudiantes vean las notas.
    - Ver el enlace de la clase con todas sus pruebas asignadas.



Ahora explicaremos brevemente el proceso para **asignar una prueba a una clase**:

1. Primero se debe seleccionar el grupo de clase y después se crea la prueba. Para ello elegimos en "Pruebas comunes" el tema que nos interese.
2. A continuación de forma sencilla configuramos una prueba a nuestra medida y antes de salir le asignamos dicha prueba al grupo pulsando el botón "Asignar"
3. En ese momento la prueba ya está asignada y el alumnado podrá acceder a ella de muchas formas:
    - Yendo al enlace de la clase y seleccionando su nombre.
    - Utilizando la clave (Ej.: "TRAI0483") que devuelve la aplicación y que los alumnos debe introducir en la zona izquierda de la página principal para realizar el examen.
    - También, al editar la prueba, aparece un enlace que podemos facilitar a los estudiantes para que puedan practicar antes de hacer el examen definitivo.



Para terminar

A estas alturas de la reseña sólo hemos podido explorar una parte de la web pero le proponemos al lector que visite el siguiente enlace:

http://www.thatquiz.org/es/teacher.html

En este encontraremos una herramienta que nos permite personalizar las preguntas al máximo y un "Directorio de pruebas públicas" con exámenes elaborados por profesores de todo el Planeta. Estos compañeros comentan en la web:

"Estoy usando vuestro programa con mis alumnos de primaria, es fenomenal, en estos momentos creo que es el mejor, felicidades. "
Jordi Arbones - Catalunya, España

"Los felicito por la elaboración de semejante página. Gracias a ustedes ya tengo donde estudiar en internet."
Juan Carlos Reales Pertuz - Barranquilla, Colombia

"Al ser un programa abierto (posibilidad de elección de pruebas por parte del profesor, de seleccionar temas y preguntas...) posee la capacidad de adaptarse a los diversos tipos de alumnos especialmente a aquellos que presentan déficits atencionales, socioculturales y/o de aprendizaje."
Francisco Moreno Carmona - Madrid, España

"La practica escrita con libreta y los numerosos ejercicios de ThatQuiz han hecho que mis alumnos en general, sobre todo aquellos que les cuesta más, hayan tenido un buen rendimiento."
Xavier Medina Irigoyen - Barcelona, España

"Le felicito por la creación y el diseño de esta página. He visto el mejoramiento en el aprendizaje de las matemáticas y el entusiasmo del estudiantado al utilizar el programa. Gracias a este programa he podido trabajar de forma individualizada con los estudiantes en el laboratorio de matemáticas."
Mario Soto - San Sebastián, Puerto Rico

Ficha educativo-técnica

Nombre	ThatQuiz
Autor	Andrew Lyczak
Dirección WEB	http://www.thatquiz.org/es/
Contenido	**Matemáticas**, geografía y vocabulario
Nivel	Primaria, Secundaria, Bachillerato (7 a 17 años)
Sistema	ThatQuiz aprovecha de HTML dinámico para administrar las pruebas. Se recomienda Internet Explorer 6 para ordenadores con Windows o Firefox para Macintosh y Linux.
Licencia	"*Lo que ofrecemos: Software limpio y educativo para escuelas en cualquier país del mundo aunque sean ricas o pobres, sobresalientes o marginalizadas. Esperamos que aprovechen todos de la práctica aquí disponible. Este servicio es gratis para el uso educativo. Copyright © 2004-2008 Andrew Lyczak.*"

Reseña:
Sergio Darias Beautel
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 261-263
ISSN: 1815-0640

CREAMat

Autora de la Aplicación: *Equip del Creamat (centre de recursos per ensenyar i aprendre matemàtiques)*

Dirección*:* **http://phobos.xtec.cat/creamat/**

¿Qué es el CREAMat?

Para entender los contenidos que podemos encontrar dentro de la Web del CREAMat hemos de conocer primero de qué organismo estamos hablando y qué objetivos se plantea.

Las siglas CREAMat corresponden, traducidas del catalán, a Centro de Recursos para Enseñar y Aprender MATemáticas, una unidad del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya dedicada al apoyo de la investigación e innovación educativa en matemáticas y que trabaja en colaboración con otros servicios similares dedicados a otras áreas, como las ciencias experimentales, las ciencias sociales, la tecnología o las lenguas. Pero el nombre construido por estas siglas, CREAMat, trasciende la oficialidad del título, para intentar mostrar el espíritu de lo que desde este servicio se pretende:

- Crear un centro de referencia a donde el profesorado pueda acudir para encontrar ideas, sugerencias y respuestas a sus inquietudes.
- Crear un punto de encuentro donde compartir experiencias educativas novedosas, tan aplicables al aula como sea posible.
- Crear impulsos que conduzcan hacia la mejora de la práctica educativa en matemáticas.

Desde esta perspectiva el concepto de recurso, tal como se entiende desde CREAMat deja de referirse sólo a objetos para referirse también a ideas.

En el trabajo diario del CREAMat se contempla la coordinación de trabajos de investigación educativa realizados por profesorado, la búsqueda de prácticas de especial interés, la exploración de las inquietudes diarias del profesorado que está en las aulas y la indagación o elaboración de respuestas a estas inquietudes, la organización de talleres, seminarios y conferencias…

De todo lo expuesto hasta ahora se deduce el peso específico que adquiere la creación de un espacio Web desde donde difundir este conjunto de propuestas y que se constituya en ese punto de encuentro citado anteriormente, como mínimo de forma virtual.

Para ayudar a los personajes a superar las diferentes cuestiones planteadas el niño deberá realizar sencillas operaciones matemáticas pero que exigen prestar mucha atención a los datos, las ayudas y las pistas que se ofrecen en el enunciado.

Descripción de la Web

La Web del CREAMat está en proceso de crecimiento y aunque su estructura actual no es todavía la definitiva, sí que lo es su concepción global.

Una de las primeras cosas que vemos al entrar en la Web es el espacio de noticias. En él se recogen tanto las novedades que genera la propia actividad del CREAMat como la información sobre todos aquellos acontecimientos o convocatorias provenientes del sistema escolar o del entorno social que pueden tener una relación directa con la educación matemática.

Gran parte del peso actual de la Web recae sobre el apartado de recursos y, en el futuro, este peso ha de aumentar todavía más con la incorporación de nuevos contenidos. Cabe destacar algunos de sus subapartados:

- *Conferencias*: la mayoría de conferencias organizadas por el CREAMat son retransmitidas en directo por internet y grabadas para posibilitar su visualización posterior desde la Web. En este subaparatado, y hasta la fecha, podemos encontrar las realizadas por Màrius Serra, Carlos Gallego, Rafael Pérez, Carme Burgués, Abraham Arcavi y Fernando Blasco.

- *Àlia*: encontramos los enlaces para el visionado de los diferentes episodios de una serie de vídeos matemáticos realizados para Televisió de Catalunya. Acompañan a estos enlaces, material de soporte didáctico de cada uno de los capítulos, tanto en lo que se refiere a propuesta de actividades como a las competencias relacionadas. CREAMat, además, colaboró directamente en fase final de la confección de guiones y posproducción de la serie.
- *Familias*: además de encontrar noticias sobre actividades de educación matemática para realizar "en familia" se incorporan ideas sobre cómo se pueden trabajar las matemáticas desde el entorno familiar.
- *Soporte curricular*: es un área pensada especialmente para atender las dudas e inquietudes del profesorado. En tiempos en que lo cambios curriculares son rápidos y frecuentes se ha de intentar ofrecer orientaciones directas y respuesta ágil para evitar la sensación de desorientación que estos cambios nos puedan producir. Aquí encontramos estructurados en forma de tabla de los currículos de primaria y secundaria en Catalunya, así como una tabla de indicadores para ayudar a graduar la riqueza competencial de una determinada actividad matemática o modelos de algunas de estas actividades.

Es importante hacer referencia a los enlaces que se encuentran en la Web del CREAMat relacionados con dos proyectos con los que el centro mantiene una estrecha colaboración: la organización de las XIV JAEM y la creación de un Museo de Matemàtiques de Catalunya (mmaca).

Futuro de la Web del CREAMat

La Web del CREAMat está en crecimiento. Entre otras iniciativas, en un futuro relativamente próximo se piensan difundir, mediante entrevistas grabadas y enlaces a internet, investigaciones y materiales elaborados por profesorado durante licencias de estudios. También se quieren incorporar pequeños vídeos de actividades de aula que presenten un interés especial.

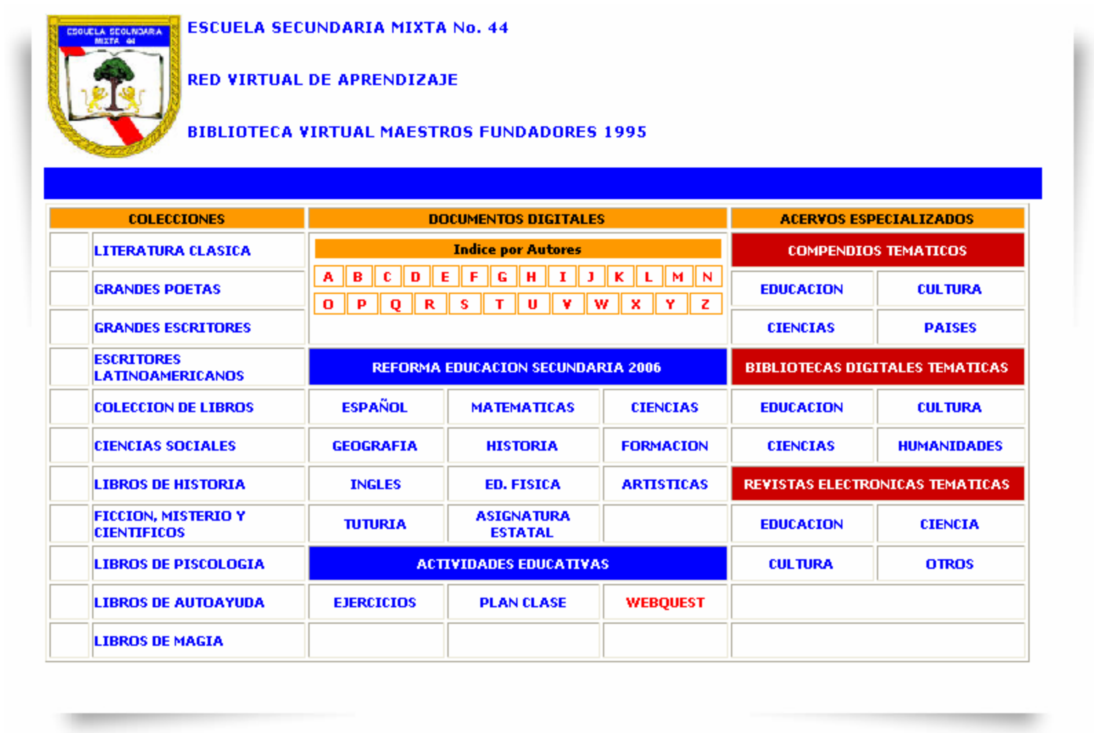
Un proyecto de mayor ambición y de alcance más largo es el de realizar un recubrimiento completo del currículum a través de recursos de todo tipo, entendiendo estos recursos en el sentido amplio apuntado en la introducción del artículo: materiales manipulables, herramientas multimedia, contextos, aspectos históricos, modelos de problemas y actividades… El objetivo es empezar a concretar este recubrimiento durante este curso simultáneamente a la creación de una plataforma de consulta telemática para su gestión.

Reseña:
Antón Aubanell
Cataluña, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 265-271
ISSN: 1815-0640

M@tem@tic@s en l@ red



Recursos Didácticos de Educación Matemática Secundaria en México. Biblioteca Virtual Maestros Fundadores 1995

Autor de la Página: *Escuela Secundaria Mixta No. 44*

Dirección: *http://www.secundariamixta44.calidadpp.com/red/biblioteca/*

Introducción

La Biblioteca Virtual Maestros Fundadores 1995 de la Escuela Secundaria Mixta No. 44 (http://www.secundariamixta44.calidadpp.com/m), perteneciente al sistema estatal de la Secretaria de Educación Jalisco en México, contiene una serie de materiales interesantes para el trabajo de docentes de educación secundaria obligatoria actualizados a la ultima Reforma Educativa del año 2006. Este portal es uno de los más completos del nivel.

Los servicios que ofrece el portal se dividen en tres grandes ramas que se describen a continuación: Colecciones, Documentos electrónicos y Acervos especializados.

Colecciones:

- Literatura Clásica
- Grandes Poetas
- Grandes Escritores
- Escritores Latinoamericanos
- Ciencias Sociales
- Libros de Historia
- Libros de Ficción, Misterio y Científicos
- Libros de Psicología
- Libros de Autoayuda y
- Libros de Magia

Documentos Electrónicos que incluyen**:**

- Un índice por autores en orden alfabético,
- Una colección muy interesante organizados por materias del Plan de Estudios de Educación Secundaria conforme la reforma 2006
- Actividades Educativas que incluye Ejercicios para los alumnos en línea, Planes de Clase como orientaciones didácticas a los docentes y WebQuest como estrategias de aprendizaje.

Acervos especializados, en los que encontramos:

- Compendios Temáticos de Educación, Cultura, Ciencias y por Países
- Bibliotecas Digitales de Educación, Cultura, Ciencias y Humanidades
- Revistas Electrónicas de Educación, Cultura, Ciencias y otros temas

En lo particular me referiré en esta referencia, a los interesantes materiales de educación matemática de secundaria, orientada a docentes de dicho nivel.

Para ello, organizaré éste análisis en cuatro grandes rubros:

1. Materiales de la reforma de la educación secundaria en México del año 2006
2. Ejercicios en línea de educación matemática
3. Planes de clase dirigidas a docentes de educación secundaria
4. WebQuest como estrategias didácticas de educación matemática
5. Acervos especializados de educación

1. Materiales reforma de la Educación Secundaria en México del año 2006

México realizo una importante reforma a la Educación Secundaria Obligatoria en Mayo del 2006, comenzando la implementación de un nuevo Plan y Programas de Estudio en el ciclo escolar 2006-2007. Entre los materiales que contiene son sustento para la planeación didáctica como lo son:

- Programa de Estudios
- Orientaciones Didácticas con intencionalidad didáctica y planes por clase
- Recursos Didáctico como Libro para el Maestro, Fichero de Actividades y un Boletín mensual
- Para saber mas, con link de la Biblioteca para la Actualización del Maestro
- Experiencias, con links sobre informes del avance en la aplicación del Plan de Estudios y los Planes de Clase en diversos planteles en México.

En este bloque, encontramos interesantes actividades en diversidad de aplicaciones, tales como los ficheros de actividades, que tienen una práctica sencilla y de interés para los educandos, pues a través de preguntas orientadoras, facilitan el aprendizaje y manipulación de materiales.

La orientación didáctica de este material es la construcción de conocimientos en forma socializada lo que permite el desarrollo de habilidades motoras y sensoriales en forma colectiva, permitiendo una experiencia agradable al momento de manipular las matemáticas.

2. Ejercicios en línea de educación matemática

En este bloque encontramos una selección de diversos ejercicios extra-clase que sirven de apoyo al docente en temas de mayor complicación, muchos de estos ejercicios son en formato java o html.

Entre la tematica se encuentran ejercicio aritmeticos, algebraicos y geometricos que soportan estas acciones.

Entre los ejercicios recomendables encontramos los rompecabezas matematicos, numeros romanos y acertijos.

3. Planes de clase dirigidas a docentes de Educación Secundaria

PLAN CLASE CONFORME AL PLAN DE ESTUDIOS 2006

MATERIA	Anual	Primer Grado	Segundo Grado	Tercer Grado
ESPAÑOL				
MATEMATICAS		1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8	1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 1.10	1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7
		2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6
		3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7 3.8 3.9	3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7 3.8	3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7
		4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7	4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6	4.1 4.2 4.3 4.4 4.5
		5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6	5.1 5.2 5.3 5.4	5.1 5.2 5.3 5.4 5.5

Los planes de clase son uno de los mas interesantes materiales encontrados en este portal, ya que permiten llevar de la mano cualquier cátedra de matemáticas de educación secundaria abarcando todos los temas que conforman el plan, a través de consignas de trabajo muy sencillas que se pueden desarrollar fácilmente en una hora clase de cualquier institución del nivel.

También sirve como repaso para niveles de bachilleres.

Plan de clase (1/5)

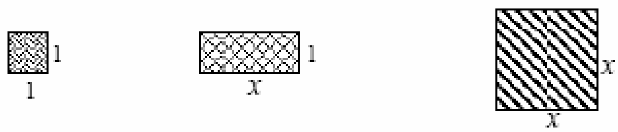
Curso: Matemáticas 3 **Apartado:** 1.1 **Eje temático:** SNyPA

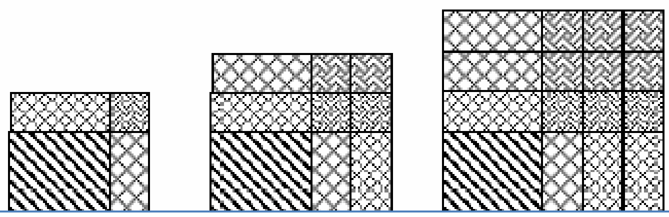
Conocimientos y habilidades: Efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas tales como: $(x + a)^2$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - a)$. Factorizar expresiones algebraicas tales como: $x^2 + 2ax + a^2$; $ax^2 + bx$; $x^2 + bx + c$; $x^2 - a^2$.

Intenciones didácticas: Que los alumnos obtengan la regla para calcular el cuadrado de la suma de dos números.

Consigna. Con las siguientes figuras (Fig. A, Fig. B y Fig. C) se pueden formar cuadrados cada vez más grandes, ver por ejemplo el cuadrado 1, el cuadrado 2 y el cuadrado 3. Con base en esta información completen la tabla que aparece enseguida. Trabajen en equipos.

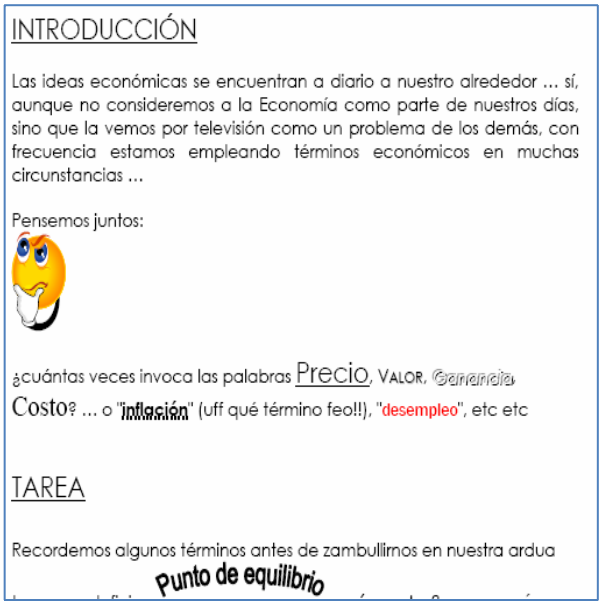
Fig. A Fig. B Fig. C





4. Webquest como estrategias didácticas de educación matemática

En este bloque encontramos un buen número de WebQuest provenientes de diversos países de orientación del área de matemáticas que permiten una mejor vinculación del uso del Internet con el alumnado. El acceso a este bloque y sus actividades es abierto, por lo que simplemente se selecciona la WebQuest a trabajar y se conoce todo el desarrollo de las mismas.



El uso de estas estrategias didácticas son las de mayor efectividad en educación secundaria, debido a que permiten el uso combinado de la tecnología al alcance dentro y fuera del aula.

5. Acervos especializados de educación

Este bloque contiene un importante acervo de bibliotecas digitales especializadas en temas educativos, de ciencias y humanidades, sin duda, una de las más completas en el Internet.

Por su parte, encontramos un importante vínculo de revistas de carácter científico y de análisis educativo, lo que nos lleva de la mano para conocer cualquier tema de actualidad que se oriente al área de docencia matemática.

Mi recomendación sobre este portal es los planes de clase que sirven de guía para los docentes en su labor diaria, ya que están muy bien diseñadas para el trabajo con alumnos con una adecuada planeación y en concordancia con el Plan de Estudios de Matemáticas de Educación Secundaria de los tres grados de dicho nivel.

Sin duda, estas orientaciones y materiales hablan del trabajo realizado por los docentes en México y la dedicación en dicha área por las Academias de Maestros. Aunque la Biblioteca Virtual esta en crecimiento, ya ofrece muy interesantes materiales en su conjunto.

Reseña:
Julio César Antolín Larios
Presidente de la Fundación Iberoamericana para la Excelencia Educativa AC
Guadalajara, México
antolinjc@yahoo.com.mx
http://fundacion.calidadpp.com/AntolinJulio.htm

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 273-288
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Arte y artefactos en la educación matemática
Un recorrido por 3 sitios Web

Patricio Guillermo Cocconi

Resumen

El número y calidad de recursos disponibles en Internet como ayudas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se va incrementando progresivamente. Para los niveles de educación primaria y secundaria destacan tres sitios web: NLVM, National Library of Virtual Manipulatives, Utah State University (http://matti.usu.edu/nlvm/nav/); NCTM, Illuminations (http://illuminations.nctm.org/); y MEC, Proyecto Descartes (http://descartes.cnice.mecd.es/); en los que se incluye, para su libre uso, una colección de programas interactivos, planes de lecciones y ejemplos para los distintos bloques de contenido matemático.
En el presente trabajo analizaremos descriptiva y comparativamente los proyectos citados, intentando identificar algunas variables sobre las que se puede actuar para mejorar el diseño y la utilización de los simuladores. Seguidamente, abordaremos algunas explicaciones posibles sobre por qué varios trabajos de investigación recientemente publicados constatan una fuerte tensión entre las altas expectativas depositadas en las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y la baja integración de estas tecnologías en las clases.

Abstract

The amount and quality of the resources available on the Internet used to help the teaching and learning of Mathematics, have been increasing progressively. At Primary and Secondary education levels three web sites stand out: NLVM, National Library of Virtual Manipulatives, Utah State University (http://matti.usu.edu/nlvm/nav/); NCTM, Illuminations (http://illuminations.nctm.org/); and MEC, Descartes Project (http://descartes.cnice.mecd.es/). These sites include a collection of interactive programmes, lesson plans and examples to be used freely in the different areas including Maths contents.
In the present report we will analyse, in a descriptive and comparative way, the projects mentioned, trying to identify some variables on which to act to improve simulators design and use. Then, we will also work on some possible explanations about why many research works which have been published recently show a strong tension between the high expectations on TCI (Information and Communication Technologies) to favour the teaching and learning of Mathematics and the low integration of these technologies within the classes.

1. Introducción

La presencia de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los contextos educativos, da cuenta de una significativa cantidad de recursos tecnológicos (ya sea en la modalidad de applets[1] u otros tipos de programas interactivos) que, usados en forma adecuada, se convierten en una herramienta potente y con interesantes funcionalidades para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Un mathplet (nombre que reciben las miniaplicaciones cuando se utilizan para la educación matemática) es un pequeño programa generalmente escrito en un lenguaje informático llamado Java (aunque también pueden ser componentes de animaciones Flash, Windows Media Player, JavaScript, Tec, etc. que se ejecutan dentro de otros programas como FireFox, IE y Opera) que se puede insertar en una página web para 'darle vida'. Los mismos se presentan a los ojos del usuario como escenas interactivas a modo de pizarras electrónicas que permiten modificar parámetros y observar el efecto que se produce en la pantalla. Su característica principal es estar dotados de una interfaz de gran versatilidad y operabilidad y ser independientes de cualquier plataforma (lo que los hace muy adecuados para ser utilizados en Internet).

El uso de estas herramientas no es complicado y en comparación con otros programas, no requiere dedicar demasiado tiempo para la explicación de su funcionamiento. Es por ello que, desde el primer contacto y con algunas aclaraciones del docente, el alumno será capaz de manipularlos correctamente.

Estos recursos didácticos virtuales han sido creados con la intención de favorecer metodologías activas y participativas, que permitan al alumno trabajar la matemática de forma experimental, esto es, interactuar con los objetos matemáticos, construirlos, producirlos, investigar propiedades y relaciones, hacer conjeturas, realizar simulaciones, extraer conclusiones, etc.

De esta manera, con tales herramientas, el profesor dispone de un medio para presentar de forma atractiva y dinámica distintos conceptos y procedimientos, así como, para fomentar la actividad y reflexión matemática.

2. Sitios Web

Actualmente, es muy numerosa la cantidad de sitios web dedicados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a través de la utilización de medios informáticos.

[1] En origen el término 'applet' es un diminutivo de *application* a través de la reducción a '*appl*' y la unión del sufijo '*et*'. Esta terminación de diminutivos (similar a nuestras formas en 'ito') lo tomó el inglés del francés: por ejemplo, de *pochette*, "bolsita", salió en inglés *pocket*, "bolsillo". Por tanto, el significado sería "micro-programa o miniaplicación", y estos son precisamente algunos de los nombres que se han propuesto para el applet en castellano.

Gran cantidad de instituciones de prestigio (Ministerio de Educación y Ciencia de España, Utah State University -EEUU-, National Council of Teachers of Mathematics -EEUU-, George Mason University -EEUU-, Carnegie Mellon University -EEUU-, Universidad Nacional Autónoma de México, Drexel University -EEUU-, Trinity College Dublín -Irlanda-, University of St. Andrews -Escocia-, University of Tennessee at Chattanooga -EEUU-, Universität Bayreuth -Alemania-, University of Cambridge -Inglaterra-, Viena University -Austria-, etc.) han reconocido en los mathplets una excelente oportunidad para promover el enriquecimiento del campo perceptual y de las operaciones mentales involucradas en los procesos de descubrimiento, construcción, estructuración y análisis de contenidos matemáticos.

En el presente artículo, analizaremos descriptiva y comparativamente tres proyectos extraídos de la red, dedicados a impulsar el desarrollo y difusión de recursos didácticos virtuales: NLVM, National Library of Virtual Manipulatives, Utah State University (http://matti.usu.edu/nlvm/nav/); National Council of Teachers of Mathematics, Illuminations (http://illuminations.nctm.org/); y Ministerio de Educación y Ciencia de España, Proyecto Descartes (http://descartes.cnice.mecd.es/).

El análisis de las propuestas se hará en función de tres ejes: la **claridad comunicativa**, los **aportes originales en el diseño hipermedial** (siguiendo algunos principios expuestos por San Martín, 2003) y las **potencialidades pedagógicas** de cada una (tomando como principal insumo los aportes de Franzolin y otros, 2006).

2.1. Universidad de Utah. Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/

Este sitio es producto de un proyecto financiado por la National Science Foundation (Fundación Nacional de Ciencia), que comenzó en 1999 con el objetivo de desarrollar una biblioteca de manipuladores virtuales interactivos para contribuir a la enseñanza de la matemática (con énfasis en los grados Kinder-12).

El portal está bien organizado y otorga como principal característica la posibilidad de explorar el sitio en dos idiomas: inglés y español.

La información está expuesta de manera sencilla y sintética y la navegación se torna simple y lineal.

Una vez dentro de la biblioteca, se nos presenta un cuadro de doble entrada en el que se cruzan 5 bloques de contenidos (‘Números y operaciones’, ‘Álgebra’, ‘Geometría’, ‘Medidas’ y ‘Análisis de datos y probabilidad’) con 4 conjuntos de grados (Pre-Kinder a 2, 3 a 5, 6 a 8 y 9 a 12). Clickeando en cada cruce es posible acceder a una serie de recursos didácticos virtuales especialmente diseñados para trabajar contenidos del bloque elegido, en los grados correspondientes a la subdivisión seleccionada.

Cada recurso, y quizás aquí radica la novedad más significativa del sitio, viene acompañado de una serie de sugerencias muy útiles para el usuario. Así, se propone un listado de actividades, que en general están muy bien secuenciadas y responden a los enfoques didácticos más aceptados por estos días; y se brindan algunas recomendaciones para el docente, en las que se detallan objetivos de la actividad, sugerencias metodológicas y criterios de evaluación (entre otras cosas).

También, cada manipulador está acompañado de una serie de instrucciones de uso, escritas en forma clara y sencilla; y de los estándares de la Asociación de Docentes de Matemática de EEUU (NCTM), considerados al momento de diseñar la herramienta (esto último sólo se puede leer en inglés).

La biblioteca es extendida y refinada constantemente a través de otros proyectos, tales como **eNLVM**, que es un proyecto que busca desarrollar unidades interactivas para la enseñanza de la matemática (también de la Universidad de Utah).

La velocidad de transferencia de los datos es alta a pesar que tenemos que esperar unos segundos hasta que se ejecuten los mathplets. Y el recorte temático del sitio es apropiado, aunque se podría desarrollar y dejar planteada la posibilidad de poder realizar enlaces hacia otras rutas. O sea, se propone, a modo de sugerencia, superar la estructura cerrada del sitio para generar otra red hipertextual más abierta.

El sitio en sí es innovador, sobre todo porque no es frecuente que una Universidad se comprometa con un proyecto que se ocupe de cuestiones vinculadas a la didáctica de la matemática. Sin embargo, el aspecto visual, especialmente la arquitectura de la interfaz de los mathplets no logra el mismo nivel de elaboración conceptual para integrarse eficazmente al sentido innovador de la propuesta.

NLVM. Universidad de Utah **NCTM. Proyecto Illuminations**

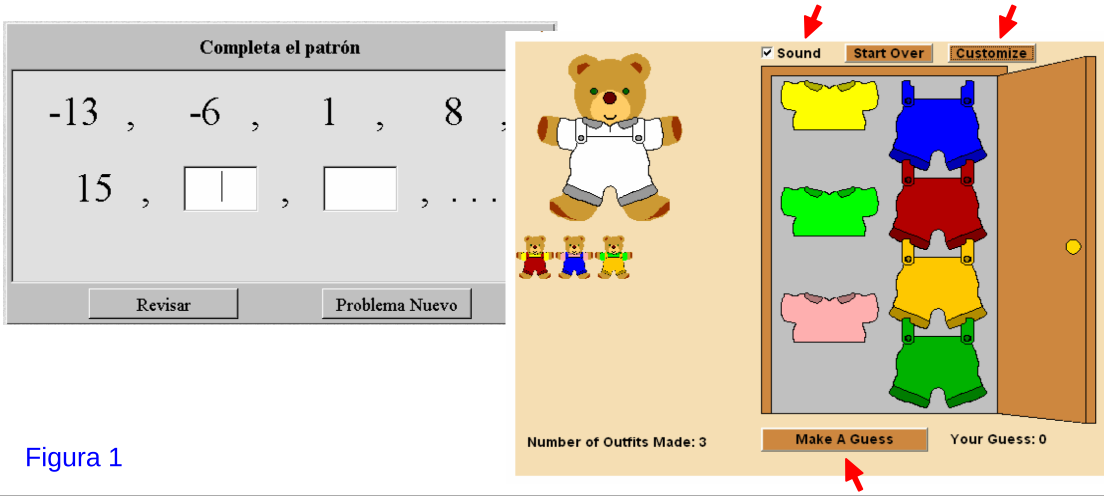


Figura 1

Además, en algunas actividades, el error no es considerado como parte del proceso de aprendizaje. Así, por ejemplo, en la actividad titulada ‘Hagamos un trato’ en la que se explora el problema de ‘Monty Hall’, al preguntársele al usuario (alumno) acerca de cuál es la mejor estrategia para ganar en el juego, el mathplet no nos permite pensar nuevamente la respuesta en caso de que ésta sea incorrecta, sino que por el contrario, la reacción inmediata de la miniaplicación es ofrecernos un cartel en el que se menciona lo que deberíamos haber contestado y porqué. De esta manera, el mathplet no admite que el alumno reflexione sobre sus propios errores y reelabore la respuesta.

En otras actividades, cuando nos equivocamos, el simulador simplemente señala que se ha cometido un error, sin proponer segundas preguntas o ayudas que acompañen el pensamiento del usuario (ver por ejemplo, ‘Juego de la vida’ y ‘Rompecabezas de números’).

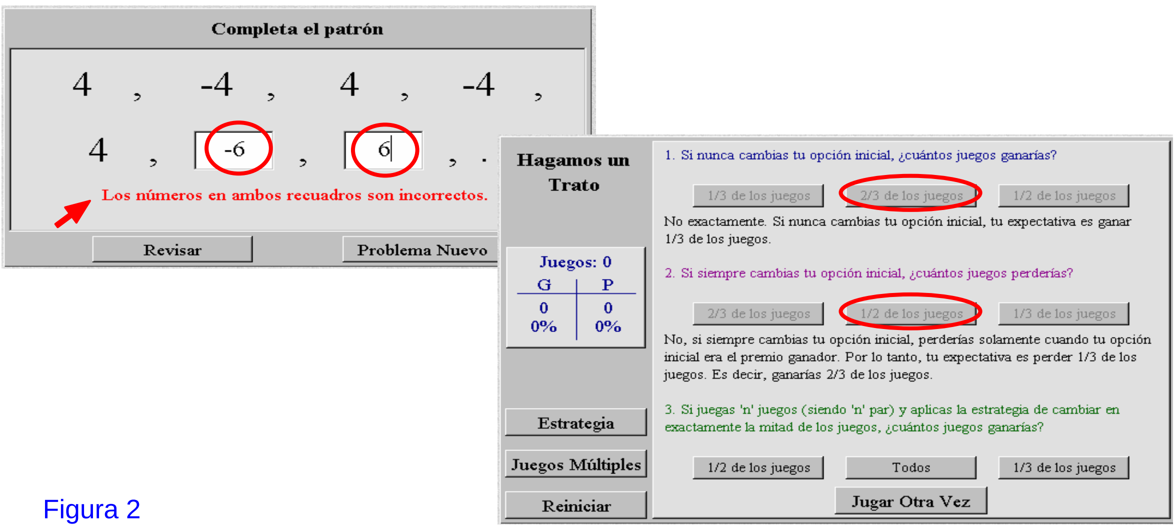


Figura 2

2.2. Ministerio de Educación y Ciencia de España. Proyecto Descartes

http://descartes.cnice.mecd.es/

El proyecto Descartes ha surgido por iniciativa del Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación, del Ministerio de Educación de España, en 1998.

Desde entonces se han desarrollado sucesivas versiones, Descartes 2D (2001) y Descartes 3D (2003), que han ido mejorando la edición e incorporando nuevas opciones y herramientas que amplían sus posibilidades (geometría tridimensional, macros, editor de fórmulas, nuevos sistemas de autoevaluación del alumno, etc.).

Descartes es un **nippe** "**n**úcleo **i**nteractivo **p**ara **p**rogramas **e**ducativos", o sea, un programa realizado en Java que permite crear applets. De esta manera, lo que caracteriza a Descartes es que es un software configurable, es decir, que los usuarios (profesores) pueden "programarlo" para que aparezcan diferentes escenas interactivas.

El objetivo de este proyecto es dotar a los profesores de materiales didácticos suficientes, para que puedan utilizarlos con sus alumnos para enseñar y aprender matemática, con la mayor facilidad posible, bien usando directamente los materiales didácticos desarrollados por otros, bien adaptando los materiales ya existentes a sus necesidades o bien desarrollando materiales originales.

De este modo, se puede decir que Descartes es un proyecto abierto, pues admite las aportaciones de todos los profesores interesados en participar. Más aún, el sitio ofrece un curso que busca capacitar a los docentes para desarrollar aplicaciones que luego podrán insertar en la página.

El concepto de navegación que subyace en este sitio es el de una red abierta. Se ofrecen enlaces a otras páginas que tratan también el aprendizaje de la matemática a través de escenas interactivas, y direcciones de e-mail e invitaciones (con links) para realizar sugerencias o recabar mayor información sobre el tema.

La cantidad de materiales didácticos que se proporcionan en el sitio es muy amplia y variada. Los mismos se agrupan en cuatro categorías: Unidades didácticas, Miscelánea, Aplicaciones y Experiencias.

Clickenado en la categoría **'Unidades didácticas'** se tiene acceso a una gran cantidad de propuestas desarrolladas en el CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa), las cuales están clasificadas por ciclos de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria) y modalidades del Bachillerato. Se aprecia que las unidades presentadas responden a enfoques muy variados. Así, existen propuestas que parecen haber sido pensadas para impartir una clase magistral y otras que ponen el acento en el trabajo del alumno, promoviendo el establecimiento de hipótesis y conjeturas, la exploración y el trabajo colaborativo.

Esta variedad pone de manifiesto las posibilidades y potencia de los recursos didácticos virtuales, pero al mismo tiempo nos recuerda que el valor de los mismos no es intrínseco y, por tanto, para que desempeñen un papel en el aprendizaje es necesario formular tareas que inciten la reflexión y el trabajo matemático.

En la categoría **'Miscelánea'** se recogen escenas aisladas que tratan aspectos muy variados del currículo de matemática y que pueden servir para que los profesores las utilicen directamente para ilustrar conceptos y técnicas básicas, o para que construyan con ellas actividades y propuestas de trabajo en el aula. Al decir de los responsables del proyecto, esta sección pretende ser una **caja de herramientas matemáticas** que cada profesor puede utilizar como apoyo y refuerzo al trabajo diario. El profesor podrá disponer de escenas para crear sus propias lecciones, elaborando actividades para que el alumno investigue, deduzca y llegue a conclusiones por sí mismo.

En la zona denominada **'Aplicaciones'**, los docentes que han desarrollado algún applet pueden 'colgar' sus trabajos. Si bien la disparidad en la calidad de las propuestas es muy evidente, existen en esta sección algunos trabajos muy completos, con excelentes presentaciones y que han considerado aspectos pedagógicos de gran importancia como admitir múltiples caminos en la resolución de los problemas e integrar la matemática a otras disciplinas (especialmente, es muy interesante una actividad en la que se vincula la matemática y el arte). Las aplicaciones están ordenadas por tema y se detalla el nivel educativo para el cual ha sido pensada cada una.

Finalmente, en la categoría **'Experiencias'** se recogen los ensayos llevados a cabo por los profesores en el aula. Se incluyen resultados de las experiencias realizadas por los profesores del equipo de trabajo de Descartes y las que han realizado los profesores que han seguido los últimos cursos de formación que el proyecto ofrece. Esta sección contiene también materiales de formación con orientaciones para que todos los docentes realicen sus propias experiencias en el aula.

Además de lo mencionado, el sitio ofrece un buscador (que permite localizar las aplicaciones relacionadas a un tema dado), un sistema de ayuda (con instrucciones muy precisas), un mapa (que presenta en una página los accesos a todos los contenidos del sitio), y un foro (destinado al encuentro de todas las personas que trabajan con Descartes y quieren intercambiar experiencias, ideas, preguntas, etc.).

Por último, cabe señalar que la gran ventaja que nos otorga el sitio es permitirnos descargar las unidades didácticas, las aplicaciones y la miscelánea en nuestra computadora, de forma que las podemos utilizar sin necesidad de estar conectados a la red. Los materiales didácticos los podemos descargar tanto si somos usuarios de Windows como de Linux.

2.3. Asociación de Docentes de Matemática de EEUU (NCTM). Proyecto Illuminations

http://illuminations.nctm.org/

El proyecto Illuminations es propiedad exclusiva de la Asociación de Docentes de Matemática de EEUU (NCTM). Su objetivo es proveer estándares y una base de recursos que impulsen la enseñanza y el aprendizaje de la matemática de todos los estudiantes.

Si hablamos de materiales didácticos virtuales para la educación matemática, este sitio es sumamente interesante ya que sus aportes son significativos para el desarrollo de contenidos con una perspectiva actual e innovadora.

Illuminations nos propone una navegación abierta e intuitiva, que invita a descubrir y abrir nuevos caminos para el pensamiento. Además, la coherencia iconográfica de todas las páginas del sitio es destacable en cuanto se logra una lectura integradora entre los objetos visuales y verbales.

El portal logra una síntesis armoniosa y equilibrada de texto, colores, e iconografía, invitándonos a navegar fundamentalmente a través de cuatro espacios: Actividades, Lecciones, Estándares y Web links.

Figura 3

Explorando las **Actividades** que se proponen en este proyecto, encontraremos 90 opciones distintas. La página nos ofrece la posibilidad de visualizar las 90 actividades o de seleccionar únicamente las actividades que han sido diseñadas para trabajar en un grupo de cursos en particular (los cursos están agrupados del siguiente modo: Pre-Kinder a 2, 3 a 5, 6 a 8 y 9 a 12). Se dispone también de un buscador que permite seleccionar las actividades a partir de palabras claves o frases.

Cada una de las actividades ha sido pensada para trabajar con un mathplet y viene acompañada de una serie de 'instrucciones' (en donde se explica cómo operar la miniaplicación) y de una sección titulada ‘exploración’ en donde se sugieren algunas ideas para trabajar con los alumnos. Además, con cada actividad se ofrecen links a lecciones y a estándares de la NCTM que complementan muy bien lo propuesto en la misma.

En general, las actividades están inscriptas en las lógicas del modelo apropiativo o aproximativo (Charnay, 1988), permitiendo desarrollar diversas habilidades cognitivas como la creación, reflexión, análisis, memorización y formulación de hipótesis.

Dentro de las 90 actividades se ofrecen 7 ‘highlighted activities’, que son propuestas que se destacan por la creatividad y el gran cuidado estético de las salidas gráficas de los programas.

En la categoría **Lecciones** se tiene acceso a 524 planes de lecciones. Las mismas se pueden buscar por grupos de cursos, por bloques de contenidos, por palabras claves y por actividad online asociada.

Con cada lección se detallan los objetivos de aprendizaje, materiales necesarios, plan de clase, orientaciones para el docente, preguntas para los alumnos, actividades de extensión, estándares y expectativas asociados de la NCTM, criterios de evaluación, reflexiones del maestro y referencias. Además se propone una gran variedad de links a páginas que trabajan temas similares a los que se abordan en la lección.

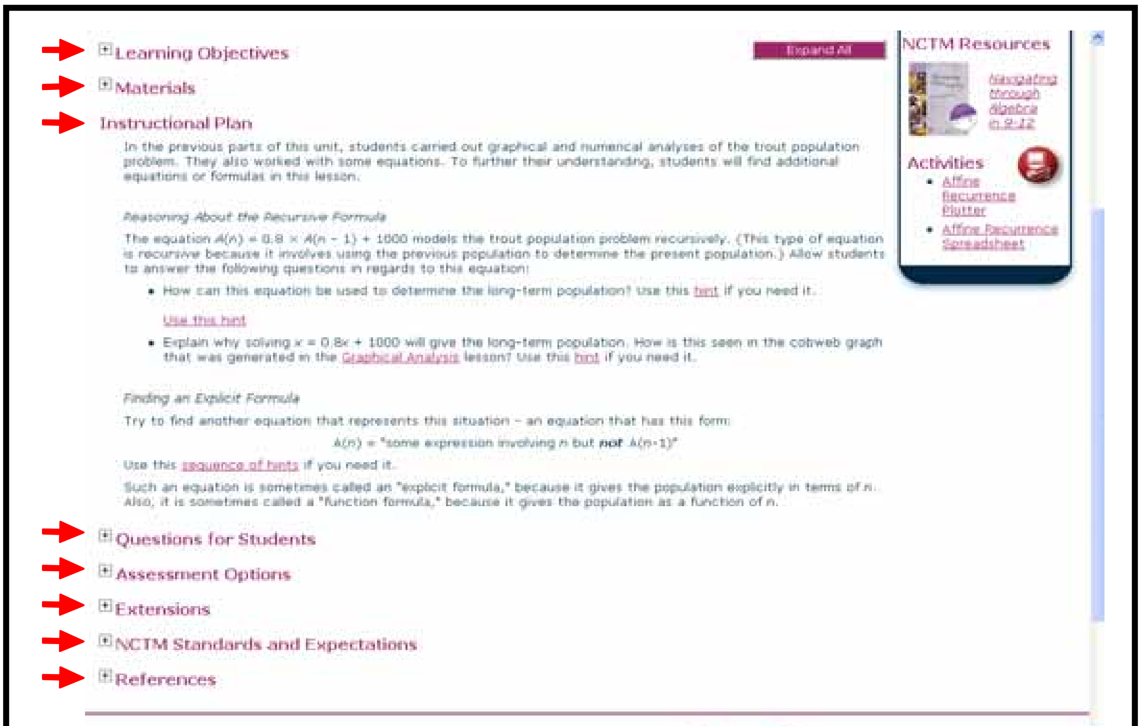


Figura 4

Salvo algunas excepciones, se ha observado que las lecciones propuestas en este sitio están muy bien resueltas, y en general, se evidencia que en ellas subyace la idea de que la utilización de los medios informáticos debe permitir reducir esfuerzos y tiempos dedicados a tareas rutinarias para centrar la atención en aspectos que sean más pedagógicos e interesantes. Al mismo tiempo, se ha advertido también que las lecciones se adecuan a la franja etária indicada por los productores, y que bajo el título ‘actividades de extensión’ se presentan desafíos con crecientes niveles de dificultad (destinados a propiciar avances en el aprendizaje).

En la zona denominada **Estándares** se recogen los estándares y principios para la educación matemática de la NCTM. Los estándares vienen discriminados por bloques de contenidos y niveles educativos (grupos de cursos), y en ellos se detallan expectativas de logro, objetivos, contenidos, sugerencias metodológicas, pautas de evaluación, etc.

El principal valor de esta categoría está en los ejemplos electrónicos (E-Examples) que permiten abordar una gran diversidad de contenidos y complementan muy bien las actividades y lecciones propuestas en el sitio, y en los videos en que se recogen reflexiones y experiencias de clase que resultan muy enriquecedoras y de un gran valor formativo.

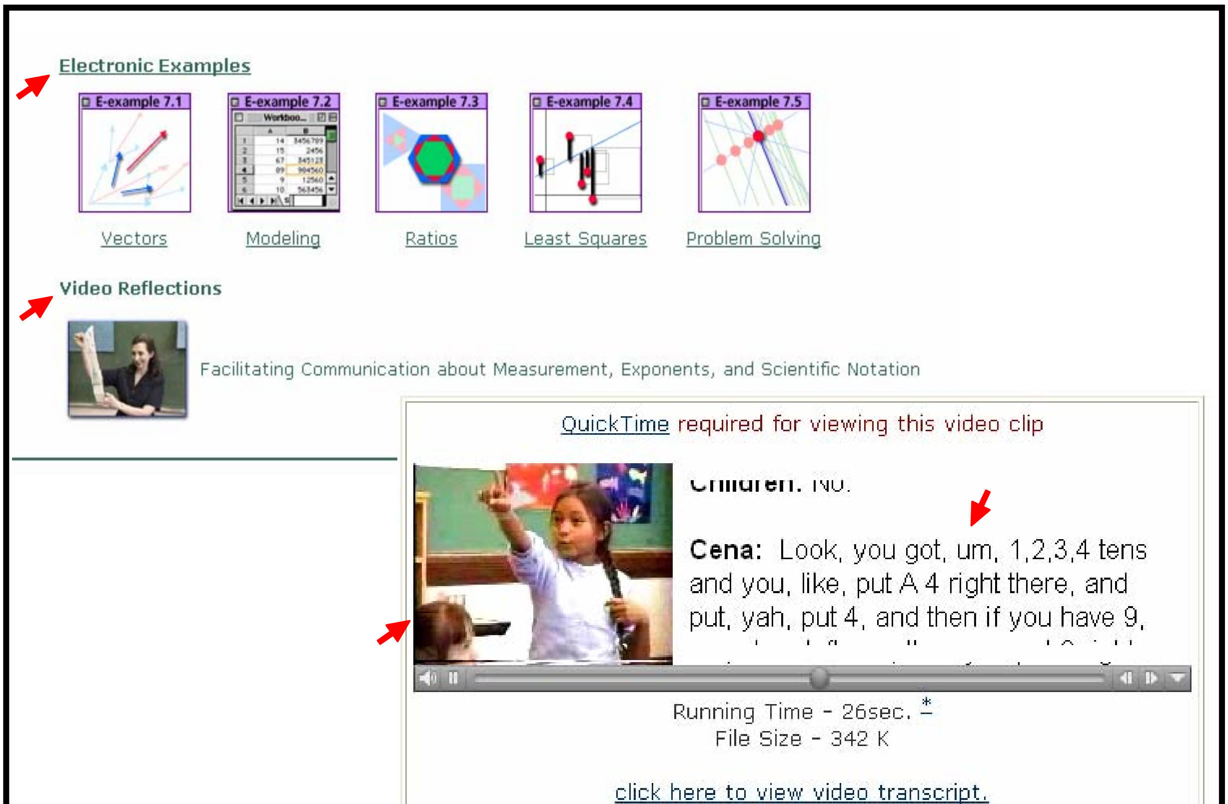


Figura 5

Finalmente, en la categoría **Web links** el sitio nos ofrece una abundante cantidad de enlaces (726 en total) hacia otras páginas que tratan temas similares. Cada link viene acompañado de un pequeño comentario, en el que se detalla lo que se puede trabajar con el recurso y se señala para que tipo de contenidos y para que cursos han sido diseñadas las actividades que allí se ofrecen.

Resulta interesante tomarse un tiempo para explorar la gran cantidad de enlaces que se proponen en este sitio, pues los mismos ponen en evidencia la enorme proliferación de recursos tecnológicos destinados a facilitar la educación matemática y la gran diversidad de criterios de desarrollo y utilización de estos recursos (con su consecuente diversidad de propuestas).

3. Rasgos comunes

El estudio de los 3 sitios descriptos ha permitido observar algunas características compartidas sobre las cuales es necesario reflexionar.

Una primera consideración apunta a los convenios de expresión específicos de un gran número de simuladores. En cada uno de los sitios se encontraron applets con elementos notacionales atípicos. Se trata de disposiciones y convenios específicos de cada proyecto que dejan de utilizarse en cuanto se pasa a manipular un simulador perteneciente a otra propuesta (significados locales que entran en conflicto con otros significados institucionales de referencia).

Si una de las finalidades de los sitios analizados es compartir los recursos creados con todos aquellos que tengan acceso a la red, resulta necesario que, al momento de diseñar los applets, se respeten los criterios y las convenciones admitidas por la comunidad matemática internacional.

Otro rasgo distintivo de los tres sitios estudiados es la excesiva compartimentación del saber. Quizás muchas veces debido a escasas posibilidades tecnológicas, los micro-programas han sido diseñados para explorar situaciones muy específicas, no disponiendo de la flexibilidad y variantes que el aprendizaje del contenido en cuestión demanda.

Hasta que no contemos con simuladores más blandos y dúctiles (lo cual implica, modificar el perfil creativo y diseñar interfaces completamente intuitivas que inciten a la interactividad de los usuarios -reconociendo la necesidad de crear una estética propia y original hipermedial adecuada a las pantallas de las computadoras personales-), la salida, para mí, es complementar cada programa con otras miniaplicaciones, además de utilizar la tecnología tradicional de “lápiz y papel”.

Si bien los diseñadores de estos recursos anexan sugerencias y recomendaciones para su uso, se puede formular como hipótesis que los alumnos, especialmente de primaria, necesitarán explicaciones complementarias para su manejo e interpretación, ya que incorporan diversos convenios sintácticos, referenciales y operacionales.

Muy probablemente, para que los alumnos alcancen un alto grado de autonomía en la realización de las tareas, el profesor deberá comunicar adecuadamente los significados sintácticos y operatorios del dispositivo, observando que los alumnos tengan un cierto dominio previo de los conceptos matemáticos asociados al simulador (que en muchos casos se suponen conocidos).

Otra característica que se ha presentado en simuladores de los tres sitios, es que algunos de los dispositivos sólo permiten trabajar dentro de un rango de valores, acotando posibilidades de uso y de extracción de conclusiones (por parte de los usuarios), e influyendo significativamente en la optimización de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que se diseñarán centrándose en la manipulación de estos recursos.

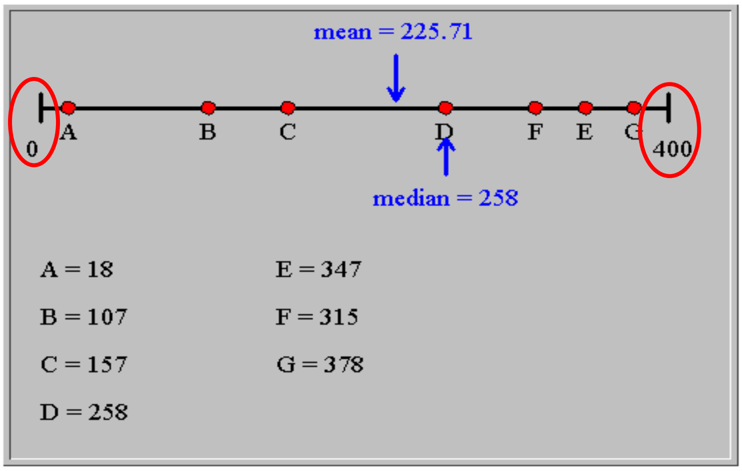


Figura 6

Por otra parte, un aspecto que también se repite en varios dispositivos es la baja resolución grafica de la interfaz, lo cual interfiere en la apreciación visual de algunos datos que resultan relevantes para comprender el fenómeno que se está estudiando. Por ejemplo, en un applet en el que se propone analizar a qué valor tiende la probabilidad experimental de que salga cara en un número alto de tiradas de una moneda (a través de una barra que crece o disminuye conforme se simulan las tiradas, y que se contrasta con una línea horizontal que representa la probabilidad teórica del suceso), se encontró que, debido a la arquitectura de la salida gráfica, el programa muestra una cierta estabilidad y convergencia de la probabilidad experimental hacia la teórica, incluso en un número pequeño de simulaciones (por ejemplo, 30 ensayos). Es decir, la resolución gráfica de la pantalla interfiere en la apreciación visual de la magnitud de la desviación entre la probabilidad experimental y la teórica (lo cual puede reforzar en algunos usuarios la creencia en la supuesta ‘ley de los pequeños números’).

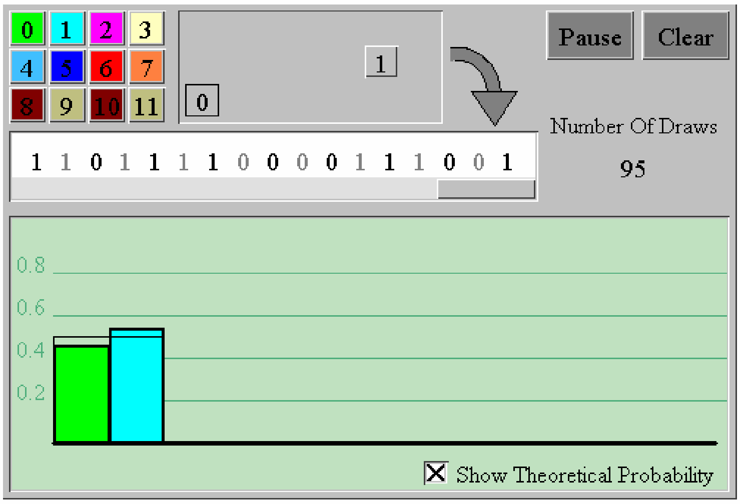


Figura 7

Finalmente, una última cualidad compartida por los tres sitios (y por todos los sitios de los que tengo noticias), es que ninguno de ellos menciona un marco teórico que sustente el diseño, la utilización y evaluación de los micro-programas, constituyendo esto un área de vacancia en las investigaciones destinadas a la didáctica de la matemática.

Nos dice Godino (2006), *“el análisis de los applets desde una teoría permite tomar conciencia de las posibilidades y limitaciones de los recursos interactivos, así como aporta información útil para su diseño o mejora”*.

4. Consideraciones finales

Al comenzar este trabajo señalamos que los mathplets ayudan a crear contextos ricos que promueven el diálogo entre profesores y alumnos a propósito de unas tareas específicas. Sin embargo, la disponibilidad de estos recursos no asegura que los docentes puedan modificar sus prácticas de enseñanza, logrando que los alumnos aprendan más y mejor.

Las TIC son inertes en sí mismas. Los recursos informáticos tienen unas potencialidades que deben ser hechas realidad por el profesor, pero esto no es inmediato ni transparente.

Algunas investigaciones[2] que se han dado a conocer en los últimos años, han constatado una fuerte tensión entre las altas expectativas depositadas en las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y la baja integración que se ha logrado hacer de ellas en las clases. Nos dice Masalski (2005), *"encontrar modos efectivos de usar la tecnología para la enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemática todavía puede ser una tarea desalentadora"*.

Al momento de explicar este fenómeno, dos ideas circulan con fuerza. La primera señala que el uso de las nuevas tecnologías de la información puede favorecer la aparición de lo que algunos autores han acordado en llamar "presión curricular": la pretensión de abarcar demasiados conocimientos sin tener en cuenta su complejidad y los recursos escasos de que se dispone, principalmente en cuanto al tiempo asignado. Desde esta perspectiva, se menciona que muchos docentes piensan que las tecnologías son algo 'mágico' que les permitirá abordar una gran cantidad de conceptos en poco tiempo.

Una segunda tesis (complementaria de la primera) señala como principal explicación la "pasividad docente". Desde esta postura se advierte que en algunas ocasiones el docente puede sentir que el simulador lo reemplaza, no actuando ante los conflictos cognitivos que se presentan a fin de hacer progresar el aprendizaje. El profesor adopta una 'actitud constructivista', esperando que los estudiantes por sí mismos construyan los conocimientos pretendidos.

Al respecto, afirma Godino (2003) *"la exploración de conceptos matemáticos, apoyada en el uso de programas interactivos, no está exenta de puntos muertos, de bloqueos que requieren el concurso del docente"*.

Si bien estas dos explicaciones ayudan a comprender la baja integración de las TIC en la educación matemática, resultan limitadas si lo que se quiere es abordar el fenómeno en toda su complejidad.

Hoy, profesores, formadores de profesores e investigadores en didáctica de la matemática se ven obligados a desarrollar acciones de educación inclusivas de estas tecnologías; y para ello, resulta imprescindible elaborar criterios de uso, así como herramientas de análisis de las consecuencias instruccionales y cognitivas del empleo de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Godino, 2005).

Se necesita un desarrollo teórico, técnico e ideológico que sustente el estudio de las principales características de los recursos didácticos virtuales y de los

[2] Dos investigaciones en las que se deja muy claro esto son las siguientes:
Lagrange, J. B. Artigue, M. Laborde, C. y Trouche, L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a muldimensional framework to tackle their integration. Proceedings of the 25 PME Conference. Freudenthal Institute, Utrecht.
Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. Educational Studies in Mathematics.

entornos de aprendizaje que permiten implementar. Es necesario aportar información a los profesores sobre las variables didácticas, tecnológicas, gramaticales y de diseño disponibles en cada recurso, los valores críticos de dichas variables, y las consecuencias cognitivas de distintos patrones de interacción entre el docente, los alumnos y el medio instruccional.

La visión restringida que estudia la incorporación de los recursos tecnológicos al campo educativo únicamente desde la dimensión pedagógico-didáctica, conduce a resultados oclusivos y a concepciones fragmentarias e insuficientes para dar cuenta a nivel teórico de la integración sistémica del marco ontológico, epistemológico y metodológico que esta realidad demanda.

Comprender la problemática multidimensional implicada en la integración de las TIC en las clases de matemática, requiere una mirada global, capaz de integrar conocimientos tecnológicos, comunicacionales, organizacionales, semióticos y de diseño a los pedagógicos y didácticos.

Bibliografía

- Charnay, R. (1988). “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”. En Parra, C. y Saiz, I. (compiladoras). Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Editorial Paidos, Buenos Aires.
- Franzolin, F. Pereira Dos Santos, A. Pereira Dos Santos, I. Fejes, M. (2006). “Algunas consideraciones sobre los aspectos pedagógicos de los softwares para la enseñanza de las ciencias”. Artículo publicado en Journal of Science Education, v. 7, n. 1.
- Godino, J. y otros. (2005). “Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas”. IX Simposio de la SEIEM, Córdoba España. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/programa2007.htm
- Godino, J. y otros. (2003). “Análisis didáctico de recursos interactivos para la enseñanza de la estadística en la escuela”. IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet. Berlín, Alemania. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/programa2007.htm
- Godino, J. y otros. (2006). “Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números”. Versión ampliada y revisada de la Ponencia Invitada al 7th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 7). Brazil. Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/doctorado/programa2007.htm
- Lagrange, J. B. Artigue, M. Laborde, C. y Trouche, L. (2001). “A meta study on IC Technology in education. Towards a muldimensional framework to tackle their integration”. Proceedings of the 25 PME Conference. Freudenthal Institute, Utrecht.

- Masalski, W. J. Preface. En, W. J. Masalski y P. C. Elliot (Eds.). (2005. “Technology-supported mathematics learning environments”. Sixty-Seventh Yearbook. (p. ix). Reston, VA: NCTM.
- Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). “A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning”. Educational Studies in Mathematics.
- San Martín, P. (2003). Hipertexto: Seis propuestas para este milenio. Editorial La Crujía, Buenos Aires.

Nota: Todas las páginas citadas han sido consultadas en Abril de 2008

Patricio Guillermo Cocconi, nacido en Wheelwright el 5 de abril de 1979, es Profesor en Matemática, Física y Cosmografía y Licenciado en Ciencias de la Educación. Profesor titular de Matemática en escuelas de nivel medio y de Didáctica de la Matemática en Institutos de Formación Docente. Capacitador docente en el área Matemática de la Dirección de Capacitación de la Provincia de Buenos Aires. Ha publicado en Diario CONTRACRISIS, Wheelwright: “Pascal, Fermat y el final del juego” (marzo/2006); “¿Cómo se propaga un chisme?” (Mayo de 2006); “La paradoja del concursante” (junio/2006); “¿Cuál es la probabilidad de tener un hijo ahijado del Presidente?” (Agosto/2006); “¿Existe el hombre lobo?” (Septiembre de 2006); “El teorema por receta”, (Noviembre/2006) y “La matemática en la belleza y la belleza de la matemática” (abril/2007).
Desde su incorporación en Febrero de 2006 como “adscripto ad honnorem” al Proyecto de Vinculación Tecnológica "Obra Abierta en IMAGE CAMPUS", a cargo de la Investigadora de CONICET Dra. Patricia San Martín, se encuentra investigando cuál es el papel que cumplen los recursos tecnológicos de software en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática (especialmente enfocado en la transición escuela media-nivel superior). A la fecha, ha realizado un relevamiento de cuáles son las principales experiencias a nivel mundial en este sentido, con el objeto de establecer el tema de su futura Tesis doctoral.
pgcocconi@s11.coopenet.com.ar – pgcocconi@hotmail.com

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 289 - 292
ISSN: 1815-0640

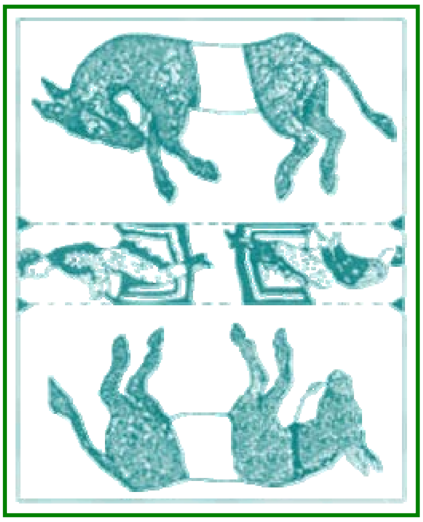
Por Santiago López Arca

SAMUEL LOYD

Sam Loyd nació en Filadelfia el 30 de enero de 1841 en el seno de una familia acomodada, siendo el menor de ocho hermanos. Su padre era agente de la propiedad y, por motivos de trabajo, la familia se fue a vivir a Nueva York cuando Sam contaba tres años.

Loyd asistió a una escuela pública hasta los 17 años. A los 10 años aprendió a jugar al ajedrez y se convirtió en un gran entendido en el juego, sin embargo, no llegó a ser nunca un importante jugador de competición. Su mérito estriba en que se convirtió en un verdadero especialista en la creación de juegos, problemas y desafíos directamente relacionados con el ajedrez.

Publicó su primer problema sobre ajedrez a la edad de 14 años y desde ese momento adquirió tal fama que sus juegos y rompecabezas se editaron durante más de cincuenta años en las revistas y periódicos más prestigiosos, lo que le proporcionó importantes beneficios económicos y le llevó a alcanzar los primeros puestos en multitud de concursos.



A los 17 años inventó uno de sus puzzles más famosos, el *Trick Mules Puzzle*, que consiste en separar en tres trozos (por las marcas que se indican) el modelo que adjuntamos, para recomponerlo a continuación de modo que los dos jinetes queden montados sobre sus cabalgaduras.

Hacia 1780 dejo de centrarse en el ajedrez y comenzó su interés por los retos de tipo matemático. Uno de los juegos inventados por él, que aún se sigue editando, causó un verdadero furor en su tiempo. Nos referimos al rompecabezas denominado *"14-15"*. Está formado por un bastidor cuadrado de orden 4x4 en el que están engarzadas 15 fichas desordenadas y numeradas del 1 al 15. El objetivo del juego consiste en ordenar las fichas aprovechando para moverlas el lugar que queda libre en el bastidor.

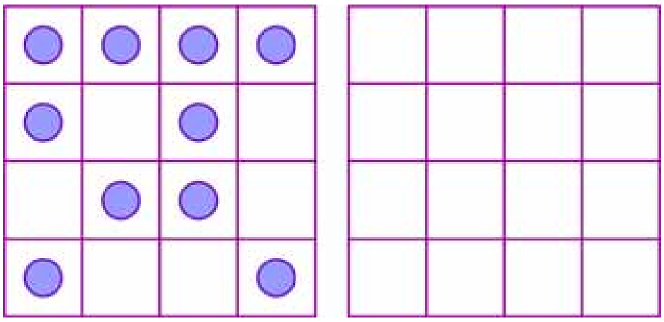
Sam Loyd falleció el 10 de abril de 1911. Su hijo, llamado *Sam Loyd Jr.*, siguió publicando puzzles después de su muerte, siendo la mayoría recopilaciones de trabajos de su padre.

Leticia L. L.

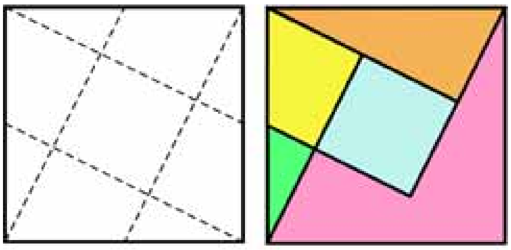
Santiago López Arca

Te invitamos a que resuelvas el siguiente desafío propuesto por Sam Loyd:

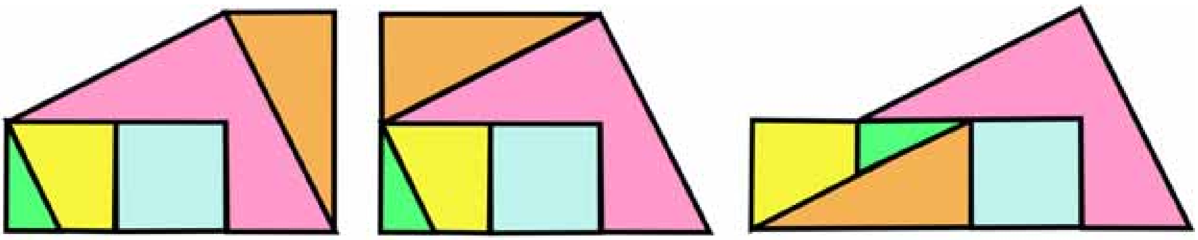
Traza diez líneas rectas de “tipo par” sobre las fichas que se colocaron en esta cuadrícula (una “línea par” será aquella que pase sobre un número par de fichas). Las líneas que se tracen pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.
Reordena las fichas en la cuadrícula vacía de modo que obtengas el mayor número posible de líneas pares.



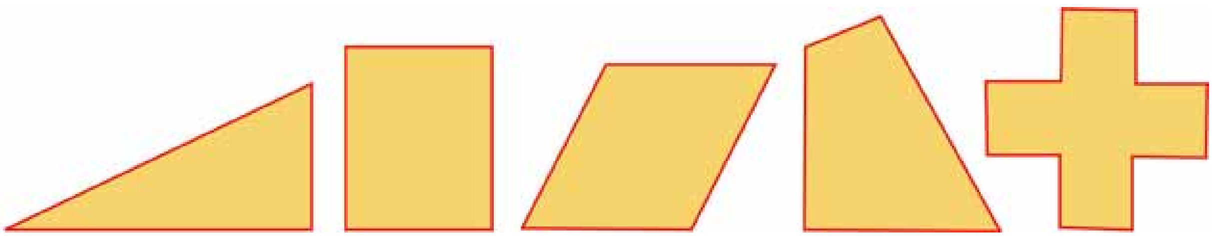
EL TANGRAM DE LOYD



El ***Tangran de Loyd***, inspirado seguramente en el tangram chino es, de igual modo que aquel, un rompecabezas geométrico que se obtiene a partir de un cuadrado. Las líneas guía para su construcción se trazan uniendo los vértices con los puntos medios de los lados para formar las piezas que lo constituyen, tal como se muestra en los gráficos.
Por lo tanto, el *tangram de Loyd* se compone con estas cinco piezas: dos *triángulos rectángulos* (uno grande y otro más pequeño), un *cuadrado*, un *trapecio rectángulo*, y un *pentágono cóncavo*.
Con el *tangram de Loyd* se pueden construir muchas figuras; por ejemplo, estas tres:



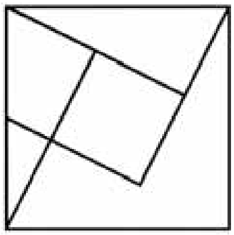
Te proponemos que inventes tú otras o trates de construir las siguientes:

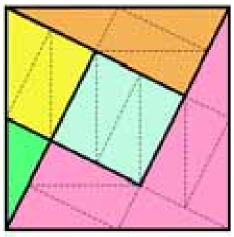


Santiago López Arca

PERÍMETROS Y ÁREAS EN EL TANGRAM DE LOYD

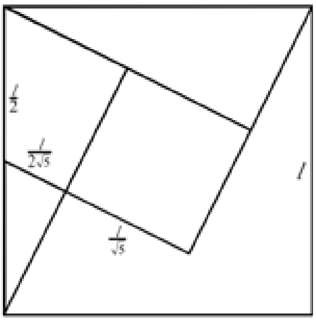
Tratemos de calcular el perímetro y el área de cada una de las piezas que forman el *tangram de Loyd*. Abordaremos estas cuestiones a partir de un cuadrado de lado *l*.





Después de observar con atención las cinco piezas que constituyen el tangram, me doy cuenta de que todas pueden descomponerse utilizando como patrón el *triángulo pequeño*, como se indica en la figura. Tenemos, pues, el cuadrado de partida dividido en 20 triángulos iguales. Por lo tanto, como el área del cuadrado inicial es l^2, obtenemos que las áreas de las diferentes piezas son:

Área triángulo pequeño	*Área trapecio*	*Área triángulo grande*	*Área cuadrado*	*Área pentágono cóncavo*
l²/20	***3·l²/20***	***4·l²/20 = l²/5***	***4·l²/20 = l²/5***	***8·l²/20 =2·l²/5***



Ahora que se ha determinado la medida de la superficie de cada pieza, busquemos el modo de determinar las medidas de sus lados. Después de comprobar algunas conjeturas sobre relaciones entre segmentos dentro del tangram, llego a la conclusión de que el cuadrado central es la llave para determinar las medidas que estoy buscando. Por lo tanto, sin olvidar la división en triángulos que se había realizado inicialmente, calculamos la medida del lado del cuadrado central:

$A_{Cadrado} = \frac{l^2}{5}$ luego su lado, *L*, medirá $L = \frac{l}{\sqrt{5}}$

Por consiguiente, utilizando la partición realizada con el triángulo pequeño, calculamos los perímetros de las diferentes piezas:

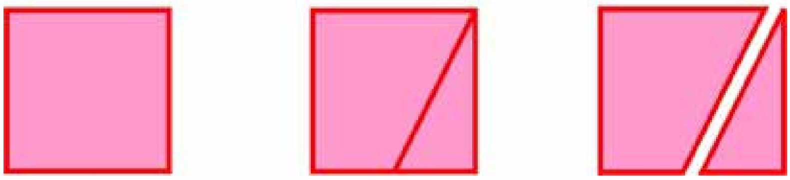
Perímetro triángulo pequeño	*Perímetro trapecio*	*Perímetro triángulo grande*	*Perímetro cuadrado central*	*Perímetro pentágono convexo*
$\frac{3 \cdot l}{2\sqrt{5}} + \frac{l}{2}$	$\frac{5 \cdot l}{2\sqrt{5}} + \frac{l}{2}$	$\frac{3 \cdot l}{\sqrt{5}} + l$	$\frac{4 \cdot l}{\sqrt{5}}$	$\frac{4 \cdot l}{\sqrt{5}} + 2l$

Iago F. F.

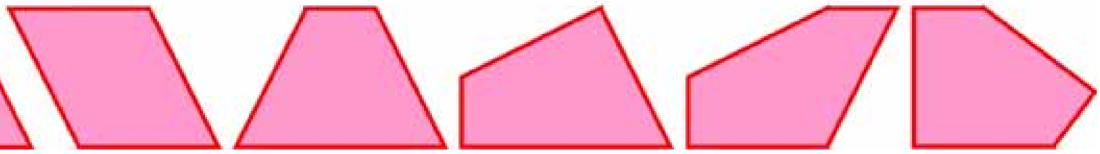
Santiago López Arca

Más sencillo que el tangram de Loyd

Mostramos a continuación un sencillo puzzle construido a partir de un cuadrado. Damos un corte recto desde un vértice al punto medio de un lado para obtener dos piezas, tal como se observa en este diseño:



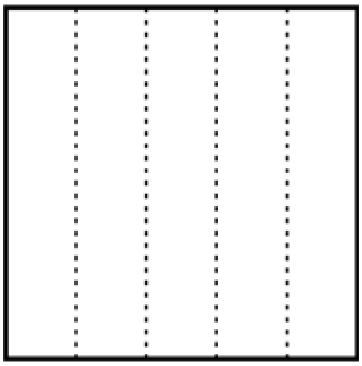
En primer lugar, te proponemos que con esas dos piezas construyas las siguientes figuras:



Además, calcula el perímetro de cada una de ellas en función de la medida, *l*, del lado del cuadrado de partida.

Repartir el cuadrado

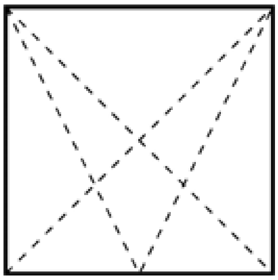
A continuación se muestra un cuadrado de lado *l* dividido en cinco rectángulos iguales:



El desafío que te proponemos es el siguiente: *descompón el cuadrado en cinco rectángulos de **igual área** que tengan todos sus lados menores que el lado del cuadrado de partida (no se exige que esos cinco rectángulos tengan todos las mismas dimensiones).*

Punta de flecha

Tomamos un cuadrado de lado *l* para marcar sobre él las siguientes líneas guía:



¿Cuál es el área de la zona coloreada?

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 293-312
ISSN: 1815-0640

Información

El papel de las sociedades profesionales en la educación matemática. Conclusiones del Grupo de Debate 28 en el ICME 11

Corinne Hahn[1], Will Morony[2] y Tomás Recio[3]

Antecedentes

El Grupo de Debate número 28[4] del pasado ICME 11 tenía como tema: *El papel de las sociedades profesionales en la educación matemática: nivel local, regional y global.*

El equipo organizador del mismo estuvo formado por Corinne Hahn (Francia) y Will Morony (Australia), como coordinadores, así como por Tomás Recio (España), Diana Jaramillo (Colombia) y Lindi Tshabalala (Sudáfrica). El grupo, que se mantuvo activo desde su formación en el primer semestre de 2007, presentó una amplia declaración de objetivos para el Grupo de Debate 28:

> Las sociedades de matemáticos, los profesores de matemáticas y los investigadores en educación matemática de todo el mundo comparten el objetivo de impulsar y mejorar la investigación y la práctica de la educación matemática. ¿Cómo ven los diferentes grupos sus respectivas funciones? ¿Cómo llevan a cabo su trabajo? ¿Cuál es su papel específico en relación con la reforma educativa? ¿Hasta qué punto colaboran los diferentes grupos (matemáticos, profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática)? ¿Se debería reforzar las relaciones entre las sociedades? ¿Interpretan las sociedades un nuevo papel en el contexto de la actual tendencia global de evaluación del rendimiento a través de los informes PISA, TIMSS, etc.? ¿Sería conveniente establecer una federación mundial de sociedades de profesores de matemáticas para ayudar a responder tanto a ésta como a otras tendencias y asuntos globales?

Durante el otoño de 2007, el equipo del Grupo de Debate 28 llevó a cabo una encuesta[5] con el fin de recopilar información de las sociedades de matemáticas de todo el mundo. Los apartados de la encuesta incluían preguntas sobre objetivos, áreas de interés, nivel matemático, órganos de gobierno y administración, número

---

[1] ESCP-EAP
[2] Australian Association of Mathematics Teachers
[3] Universidad de Cantabria
[4] http://dg.icme11.org/tsg/show/29
[5] http://dg.icme11.org/tsg/show/29#inner-26

de miembros, actividades, influencia política y relaciones regionales e internacionales.

La encuesta se escribió originalmente en inglés, aunque existía la posibilidad de leerla y responderla en español, debido a la expectativa de una gran participación en este congreso ICME por parte de profesores de matemáticas iberoamericanos.

En total respondieron 53 sociedades, de las cuales, 24 lo hicieron en español y 29 en inglés.

Durante la celebración del ICME11, los asistentes al grupo de debate se reunieron en tres ocasiones. Fue un grupo de pequeño tamaño, pero con personas de procedencia variada. En cada sesión se presentaron algunas ponencias de corta duración, aunque la mayoría del tiempo se dedicó al debate de las distintas cuestiones planteadas.

La encuesta

Ésta es la versión en español de la encuesta:

Asociaciones Matemáticas en el Mundo	
Una encuesta, como parte de la tarea del Grupo de Debate 28 del ICME 11, para recoger información sobre las sociedades matemáticas en el mundo.	
Información Básica	
1	* Nombre de la Organización. Por favor, introduzca su respuesta:
2	* ¿En qué país se ubica su Asociación?
3	Si su Sociedad es de ámbito regional o provincial, indique cuál es este.
Datos de contacto con su Sociedad.	
4	* Contacto - email
5	* Contacto - correo postal
6	Contacto- telefónico (incluya código internacional)
7	Contacto- página Web
Sobre su Sociedad.	
8	* ¿Cuáles son los fines/misión/propósito de su sociedad?
9	* ¿Cuál es el área de las matemática de interés primordial para su Sociedad?
	Matemáticas en general
	Estadística
	Geometría
	Algebra
	Otras, por favor, especificar:

10	* ¿Cuáles son los niveles educativos de interés primordial para su Sociedad? (elija sólo los principales)
	Enseñanza Primaria
	Enseñanza Secundaria
	Universidad-Matemáticas
	Universidad-Educación Matemática (esto es, formación del profesorado de matemáticas para la enseñanza primaria o secundaria)
	Otras, por favor, especificar:
11	¿Cuáles son los mecanismos de gobierno y administración de su Sociedad? (por ejemplo: consejo, junta de gobierno; personal retribuido para tareas administrativas o de gestión, etc.)
12	* ¿Cuántos miembros tiene, aproximadamente, su Asociación?
13	* Por favor, describa brevemente algún rasgo común de los miembros de su Asociación.
Principales actividades	
14	* Indique, por favor, los mecanismos que usa su Sociedad para comunicarse con sus miembros (señale todas las respuestas que sean adecuadas).
	Boletines (remitidos por correo postal o electrónico)
	Revistas
	Encuentros profesionales, congresos
	Listas de distribución de correos electrónicos
	Otras, por favor, especificar:
15	* ¿Qué revistas publica su Sociedad? Por favor, aporte algunos detalles tales como: nombre, lectores potenciales, periodicidad, mecanismos de distribución (correo postal, electrónico), etc.
16	Por favor, describa las actividades de formación y desarrollo profesional que su Sociedad proporciona a sus miembros (propósito, frecuencia, participación media, etc.)
17	Por favor, describa las actividades que su Asociación realiza para estudiantes:
18	Muchas Asociaciones tratan de influir en la política educativa, en relación con las matemáticas, de su país/región/provincia. Por favor, describa brevemente si su Sociedad desarrolla este papel, cuál es su enfoque, y que grado de éxito tiene.
Otra información	
19	Por favor, señale las relaciones que su Sociedad mantiene con otras sociedades matemáticas DE SU MISMO PAÍS (por ejemplo, una Sociedad de investigadores en educación matemática puede tener relaciones con sociedades de profesores de matemáticas o con sociedades de matemáticos, etc.).
20	Por favor, proporcione información sobre las relaciones de su Sociedad a nivel INTERNACIONAL.
21	Por favor, proporcione cualquier otra información que ayude a describir su Asociación y su contribución a la educación matemática
22	* Por favor, proporcione su nombre y correo electrónico, por si se precisa contactar con usted para clarificar la información remitida. **ESTA INFORMACIÓN NO SERÁ USADA PARA NINGÚN OTRO PROPÓSITO**
Remita la encuesta.	
Cuando usted envíe esta encuesta, haciendo click en 'Submit Survey', no podrá volver sobre las cuestiones de la encuesta. Por favor, cerciórese de que ha contestado a todas las cuestiones con la mayor precisión posible antes de remitir la encuesta.	

Respuestas en español

Las siguientes[6] sociedades respondieron en español

Sociedad Matemática de Nicaragua
Asociación Matemática Venezolana
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Asociación Colombiana de Matemática Educativa
Sociedad Chilena de Educación Matemática
Sociedad Argentina de Educación Matemática
Societat Balear de Matemàtiques*
Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática***
Sociedad Boliviana de Educación Matemática
Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática*
Sociedad Cubana de Matemática y Computación
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya*
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas*
Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria*
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas**
Comité de Educación Matemática del Paraguay
Sociedad Peruana de Educación Matemática
Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas*
Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana*
Sociedad Melillense de Educación Matemática*
Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia*
Sociedad de Educación Matemática Uruguaya
Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (México)

[6] En el orden proporcionado por la base de datos.

Algunas observaciones sobre las sociedades incluidas en esta lista:

1. Diez de las sociedades citadas, aquellas marcadas con un *, están situadas en España, cada una en un área de influencia regional específica (Cataluña, Murcia, La Rioja, Canarias, etc.).

2. Además, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (destacada en la lista mediante **) no es una sociedad diferente, sino una amplia red de coordinación entre las diferentes sociedades de profesores regionales en España.

3. Asimismo, la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (destacada en la lista mediante ***) es una federación de sociedades iberoamericanas.

4. Otras sociedades o instituciones procedentes de España o del ámbito iberoamericano (en el sentido cultural de este concepto) han preferido responder a la encuesta en inglés.

   Entre ellas se encuentran: la Real Sociedad Matemática Española y la Associació de professors i mestres de matemàtiques (ambas en España), la Sociedade Portuguesa de Matemática y la Associação de Professores de Matemática (ambas en Portugal), la Sociedade Brasileira de Educaçao Matemática (en Brasil), y el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM[7]).

En resumen, los encuestados representan a:

- Dos "federaciones": una a nivel nacional (España) y otra a nivel iberoamericano.
- Doce países: Nicaragua, Venezuela, Colombia, Chile, Argentina, España, Bolivia, Cuba, Paraguay, Perú, Uruguay y México.

Como se ha dicho anteriormente, España está representada, en las respuestas en español, a través de diez sociedades y una federación. Venezuela también aparece en dos ocasiones.

[7] http://www.furb.br/ciaem

Respuestas en inglés

Las siguientes sociedades respondieron a la encuesta en inglés:

International Commission for study and improvement of mathematics education (CIEAEM; Internacional)
Inter American Committee of Mathematics Education (IACME; Internacional)
Math in School is Art for Social Change (Internacional)
Irish Mathematical Society (Irlanda)
British Society for Research into Learning Mathematics (BSRLM; Reino Unido)
Swedish Association of Mathematics Teachers (SMaL; Suecia)
The Mathematical Association (Reino Unido)
ApaMMs - Associacion de professors i Mestres de Matematiques (Cataluña, España)
National Council of Teachers of Mathematics (Estados Unidos)
Sociedade Portuguesa de Matemática (Portugal)
Canadian Mathematics Education Study Group (Canadá)
Math-teachers organization (Dinamarca)
Associação de Professores de Matemática (APM; Portugal)
Forum for Research in Mathematics Education (Dinamarca)
Institute of Mathematics and Its Applications (Reino Unido). La delegación irlandesa también respondió.
Greek Association of Researchers in Mathematics Education (Grecia)
SESAMATH (Francia)
Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (GRIM; Sicilia, Italia)
Real Sociedad Matemática Española (RSME; España)
The Royal Statistical Society (Reino Unido); El Royal Statistical Society Centre for Statistical Education (RSSCSE) también respondió.
APMEP: Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (sociedad de profesores de matemáticas de la enseñanza pública; Francia)
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM; Alemania)
Australian Association of Mathematics Teachers Inc. (AAMT; Australia)
Auckland Mathematical Association (Nueva Zelanda)
Saskatchewan Mathematics Teachers' Society (SMTS; Canadá)
The Quebec Association of Mathematics Teachers (Canadá)
British Columbia Association of Mathematics Teachers (miembro del NCTM; Canadá)

Relación de encuestados

En la tabla situada a continuación, se clasifica a los encuestados según el idioma de respuesta de cada sociedad, las características de sus miembros (esto es, a través de la descripción de la tipología de los miembros que proporciona cada sociedad en la encuesta) y su objetivo principal. Véase la sección posterior, en la que se amplía la información sobre estas categorías.

	Internacional (los miembros y los objetivos traspasan las fronteras nacionales)	Nacional (en general, limitado a un país)	Regional (establecido en una sola región o país)
Matemáticas	0 ing + 0 esp	6 ing[8] + 3 esp	0 ing + 0 esp
Investigación en educación matemática	2 ing[9] + 0 esp	4 ing + 0 esp	1 ing + 0 esp
enseñanza de las matemáticas/ profesores	1 ing + 1 esp	9 ing + 10 esp	6 ing[10] + 10 esp

Conclusiones de la encuesta

Información básica y datos de contacto

En la mayoría de los casos fue el presidente o secretario de la sociedad quien proporcionó la información, que incluye la dirección de correo electrónico y el número de teléfono. La mayoría de las sociedades encuestadas tienen una página Web propia. De hecho, sólo han sido nueve las sociedades que no han proporcionado su URL.

Fines, Misión, Propósito

Aquí las respuestas se dividen y se podría decir que siguen dos caminos diferentes. Por una parte, están las sociedades cuyo objetivo es apoyar las matemáticas en general (investigación, difusión, educación, etc.) y, por otra parte, están las sociedades que consideran la educación matemática (en su sentido más amplio, de modo que sus miembros no son, en general, investigadores en educación matemática sino docentes no universitarios) como su campo de interés específico. Generalmente, este tipo de organizaciones aparece en países en los que ya existe otra sociedad que se centra, con especial interés, en la investigación matemática.

[8] Incluyendo la RSME (España) y la SPM (Portugal).
[9] Incluyendo el CIAEM.
[10] Incluyendo la ApaMMs (Cataluña, España).

Este tipo de sociedades es característico de la mayoría de las sociedades regionales españolas, que se dedican –en el sentido que se ha señalado arriba-- a la educación matemática, del mismo modo que se asume que la Real Sociedad Matemática Española se ocupa de los temas relacionados con la investigación matemática. Lo mismo ocurre, por ejemplo, en la Sociedad Peruana, en el Comité de Educación Matemática del Paraguay, en la Asociación Nacional de Profesores[11] de Matemáticas (México), etc., que se centran en la educación matemática. Por otra parte, por ejemplo, tenemos organizaciones tales como la Sociedad Cubana, la Asociación Matemática Venezolana y la Sociedad Matemática de Nicaragua, cuyos objetivos están relacionados con las matemáticas en general.

Esta dualidad de fines es un tema importante. En muchos países se da una coexistencia (no siempre sencilla) de sociedades con un interés general (constituidas en su mayoría por matemáticos relacionados con la investigación y la enseñanza universitaria, pero que, sin embargo, amplían su influencia a temas relacionados con las matemáticas escolares) y sociedades con un propósito educativo específico (relacionado con las matemáticas escolares y los cursos de formación de profesorado). La encuesta muestra que se ha extendido su coexistencia pero no proporciona los medios para analizarla con más profundidad.

Como observación adicional, cabe destacar que no hay ninguna respuesta en español proveniente de sociedades que se centran de un modo exclusivo en la investigación en educación matemática.

Entre los encuestados que respondieron en inglés se pueden distinguir tres amplias categorías de finalidades (véase la tabla anterior). Para la mayoría, la utilización del término “profesor” en el nombre de la sociedad señala una mayor atención en la enseñanza de las matemáticas y sus profesores; de un modo similar, aquellas sociedades que se centran en la investigación en educación matemática normalmente contienen el término investigación/investigador en el nombre. Cuando no aparece ninguno de estos términos, ya sea de forma explícita o implícita, la sociedad tiende a concentrarse en las matemáticas como disciplina (o en la estadística). No obstante, también hay excepciones. La Mathematical Association (Reino Unido) y algunos grupos regionales, como la Auckland Mathematical Society (y otras sociedades australianas más) se centran de forma muy clara en la enseñanza de las matemáticas y sus profesores[12].

[11] Nota: en español, *profesor* no significa exactamente lo mismo que *professor* en inglés, y esta diferencia puede llegar a ser una fuente de malentendidos al interpretar las respuestas de la Encuesta. En español, se refiere tanto al docente de nivel elemental como al docente universitario, mientras que en inglés designa únicamente al catedrático o docente universitario.

[12] Como hecho histórico, cabría comentar que algunos de los grupos que se formaron en los estados (provincias) de Australia fueron, al principio, miembros directos de la Mathematical Association de Reino Unido, como vestigio de la situación de antigua colonia. Ésta es probablemente la causa de éste tipo de nombre.

Por supuesto, estas clasificaciones no son exclusivas, debido al interés y al importante compromiso con distintas categorías por parte de muchas sociedades. Por ejemplo, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) menciona el apoyo a los profesores como su objetivo principal. Como parte de este logro, el NCTM publica el Journal for Research in Mathematics Education, que se encuentra entre las revistas de investigación en educación matemática más respetadas. La Royal Statistical Society se dedica fundamentalmente al área de la estadística y, sin embargo, tiene una iniciativa importante en la enseñanza de la estadística a través de su Centre for Statistical Education.

Área matemática y educativa de interés primordial

Las sociedades apuntan alto. Las declaraciones de "Fines, Misión, Propósito" a menudo incluyen otras declaraciones sobre su voluntad de "servicio" al profesorado y sobre cómo mostrar a la sociedad los beneficios que proporcionan las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje, así como sobre la investigación y sobre la comunidad matemática en su totalidad. A continuación, se incluye una serie de citas textuales seleccionadas entre las respuestas:

Apoyo a la investigación en educación matemática:

- mejora de la colaboración entre profesores e investigadores;
- implementación de teorías propias de otros campos;
- compartir los resultados de la investigación en educación matemática;
- promoción de la investigación y el trabajo de desarrollo;
- nexos académicos y científicos y actividades entre los profesores de matemáticas;
- refuerzo de la actividad investigadora en educación matemática;
- estudio de las teorías y prácticas vinculadas con la educación matemática;
- estímulo del intercambio de ideas y experiencias;
- coordinación de los esfuerzos de los investigadores encaminados a impulsar la investigación en educación matemática.

Apoyo al trabajo de los profesores:

- divulgación de los resultados obtenidos por medio de la investigación, el trabajo de desarrollo y el trabajo experimental;
- promoción de la formación del profesorado, los cursos de formación permanente y los estudios de posgrado;
- mejora de la metodología utilizada por los profesores de matemáticas;
- visión, liderazgo y desarrollo profesional para ayudar a los profesores;

- apoyo a las personas involucradas en temas fundamentales de Educación Matemática;
- desarrollo, implementación y evaluación del currículo;
- facilitar que los profesores se reúnan para debatir sobre técnicas educativas;
- promoción de cursos para el profesorado de matemáticas;
- ayuda para que los profesores de matemáticas puedan mantenerse al corriente de las tendencias actuales y los últimos avances;
- debate e implementación de prácticas pedagógicas innovadoras;
- colaboración entre los profesores de matemáticas en cuanto a recursos y herramientas profesionales;
- promoción del desarrollo profesional en todos los aspectos de la educación matemática.

La comunidad, estudiantes y matemáticos:

- fomento y promoción del conocimiento matemático por toda la comunidad;
- mejora de las aptitudes matemáticas de los estudiantes;
- presencia pública de la educación matemática;
- garantía de un aprendizaje de las matemáticas equitativo de la mejor calidad para todos los estudiantes;
- desarrollo del pensamiento matemático como herramienta para comprender el mundo propio;
- participación de los estudiantes en las matemáticas;
- fomento del interés por el estudio efectivo de las matemáticas;
- participación a todos los niveles en el desarrollo del currículo y aportación de las recomendaciones adecuadas;
- influencia en las decisiones políticas sobre educación;
- mejora de la enseñanza de la estadística en todas las edades: en el colegio, la universidad y el trabajo;
- representación y promoción de los intereses de la educación matemática.

Apoyo a las matemáticas:

- impulso y apoyo a la comprensión, la enseñanza, la investigación y las aplicaciones de las matemáticas;

- impulso y generalización del conocimiento sobre las matemáticas y sus aplicaciones;
- impulso de la investigación matemática.

Aunque las diversas sociedades utilizan diferentes términos para describir sus aspiraciones y su trabajo, parece que sus intenciones se agrupan de forma general en estas categorías que hemos descrito arriba.

Hubo dos sociedades que mencionaron un aspecto específico de las matemáticas en el que se centraban principalmente. Una de ellas pertenecía al área de la estadística. Podría decirse que se trata de un dominio de conocimiento tan amplio que es lógico que sea el centro de atención para una sociedad. La otra era un pequeño grupo que opera de forma virtual (por medio de Facebook) y se centra en el área de las Matemáticas Básicas. Puede que Internet funcione como un vehículo para el desarrollo de grupos con intereses especiales como éste, ya que queda claro por parte del resto de respuestas que no existe ninguna asociación formal (al menos entre las que han respondido a la encuesta) que se dedique a otros aspectos específicos de las Matemáticas (programas de Geometría Dinámica, Resolución de Problemas, Álgebra e Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática, etc.). Es probable que dichos grupos de interés estén formados o bien fuera de las sociedades de matemáticas (los usuarios de los grupos Cabri y GeoGebra, por ejemplo, se formaron a través de las empresas de software) o bien sin una personalidad específica dentro de estas sociedades. El análisis de esta situación en más profundidad podría resultar interesante, en especial en el contexto de las oportunidades de cooperación que proporciona Internet.

Gobierno y administración. Número de miembros. Descripción de los miembros

No hay nada extraordinario en la organización de las distintas sociedades (asamblea de miembros, consejo, a veces juntas regionales, etc.). Quizá resulte interesante observar que algunas sociedades han afirmado que los diferentes cargos directivos trabajan "ad honorem", es decir, sin recibir compensación alguna por su trabajo. Suponemos que se trata de una situación generalizada, aún cuando no se haya enunciado de manera específica en las respuestas a la encuesta.

Con relación a los encuestados que han contestado en español, existe una gran variación respecto del número de miembros, que oscila desde unas pocas decenas (por ejemplo, la Sociedad Peruana, el Comité de Educación Matemática de Paraguay y algunas sociedades regionales españolas) a los 27000 miembros que ha afirmado tener la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM).

Se puede realizar una valoración aproximada sobre el motivo de la existencia de un número tan grande al considerar que la Sociedade Brasileira de Educaçao Matemática (miembro de FISEM) proclama tener 15000 miembros y la Federación

Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (también miembro de FISEM) cuenta con 5500 miembros. Como, además, la Associação de Professores de Matemática (miembro de FISEM) tiene alrededor de 4000 miembros, resulta que son mucho menos de 2500 los miembros que, en total, corresponden a las otras sociedades federadas en Argentina, Chile, Bolivia, Colombia, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela. A excepción de Uruguay (con aproximadamente 500 miembros pertenecientes a la Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, una cantidad importante para un país tan pequeño) y las dos sociedades venezolanas (con unos 1000 miembros en total), el resto de sociedades no llega a alcanzar los 200 miembros.

Otras cantidades grandes son las de la Real Sociedad Matemática Española, que afirma poseer 1700 miembros (no incluidos en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas mexicana, con 2500 miembros, y la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, con más de 750 miembros. Ninguna de ellas es miembro de FISEM.

Se pueden extraer dos conclusiones sobre la cantidad de miembros de las sociedades:

- la existencia de grandes diferencias entre países; por ejemplo, considérense los casos de Uruguay/Paraguay o México/Brasil, teniendo en cuenta que el segundo país de cada pareja dobla aproximadamente en número de habitantes al primero; o el caso de Venezuela/Perú, ambos con un número de habitantes similar pero con una gran diferencia entre el número de miembros afiliados a las sociedades nacionales de matemáticas.
- la necesidad de llevar a cabo acciones específicas para promocionar la fusión de sociedades de matemáticas en algunos países (quizá por medio de federaciones regionales temporales), de modo que se consiga sociedades más pequeñas que causen un impacto real en la sociedad.

Tanto si respondieron en inglés o en español, todas las sociedades comunicaron que el gobierno de la organización estaba en manos de voluntarios. Había diversos nombres para este grupo, entre otros: consejo, comité, junta de administración y ejecutivo. Todos los grupos regionales de profesores de matemáticas indicaron que eran miembros de un organismo nacional, en el mismo modo en que los grupos regionales de profesores de España son miembros de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Las sociedades con el número de miembros más reducido son aquellas que se centran en la investigación en educación matemática, oscilando entre menos de 100, la más pequeña, y unos 300, la más grande. A continuación, como promedio, se situaban los grupos regionales de profesores de matemáticas, que alcanzaban hasta los 1000 miembros. Ninguna de las sociedades incluidas en los dos grupos menores declaró tener personal retribuido.

Las sociedades que se centran en las matemáticas y en la investigación matemática situadas en países relativamente poblados (España, Reino Unido, etc.) cuentan con miles de miembros. El más pequeño dentro de esta categoría provenía de un país relativamente pequeño (Irlanda), algo que no sorprende, y tenía 300 miembros. Algunas de estas sociedades declararon tener personal retribuido[13].

Todas las organizaciones nacionales de profesores de matemáticas que respondieron en inglés tienen miles de miembros. Además, la mayoría de ellas declararon tener empleados remunerados. La organización que destaca por encima de todas las demás es la NCTM, con más de 100000 miembros y 100 empleados; estas cifras la convierten en una organización mucho más influyente que cualquiera de los otros grupos.

Principales actividades: publicaciones, reuniones, influencia política, actividades destinadas a los estudiantes

Resulta evidente que, a la vista de las diferencias tan grandes que se producen en el tamaño de las sociedades, su nivel de actividad también difiere. Las sociedades grandes normalmente publican una o más revistas o boletines; algunas sociedades pequeñas no comentaron si contaban con medios de comunicación con sus asociados. Sin embargo, resulta sorprendente que en la Sociedad Mexicana, que parece tener 2500 miembros, no consta ninguna publicación propia.

Todos los encuestados que respondieron en inglés señalaron que utilizan boletines (ya sean impresos o electrónicos) y/o una lista de distribución de correo electrónico como medio de comunicación. La mayoría de sociedades publica revistas profesionales, que varían de entre una publicación anual a diez números anuales, aunque, en realidad, la mayoría las distribuye varias veces al año. Algunas de las revistas se pueden consultar en formato electrónico (visitando la página Web).

Por otra parte, casi todas las sociedades confirman que una de las actividades más comunes consiste en organizar cursos y seminarios, conferencias y congresos de relevancia para sus miembros y acordes con sus intereses. Este tipo de actividades proporciona la oportunidad de organizar encuentros, lo que desempeña un papel fundamental para el contacto profesional. Organizan conferencias y cursos formales, pero también reuniones con intenciones mucho menos formales, como “compartir” estrategias de enseñanza o conclusiones de la investigación.

Las sociedades han informado de grandes diferencias en su nivel de influencia en la política relacionada con las matemáticas escolares. Algunas sociedades

[13] Es posible que algunos de los encuestados no tuvieran claro que esta pregunta solicitaba este tipo de información.

grandes, como la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, revelan tener poca influencia en la política educativa, mientras que la sociedad brasileña afirma que:

> "Desde el comienzo, SBEM ha jugado un papel importante en la política educativa pública relacionada con la educación matemática."

Por otra parte, las pequeñas sociedades de un tamaño similar (la Asociación Matemática Venezolana y la Asociación Venezolana de Educación Matemática) discrepan en la valoración que realizan sobre su propio impacto: una declara no tener ningún tipo de éxito en este tema, mientras la otra participa en la Comisión Ministerial para las Matemáticas. No obstante, la asociación colombiana, con menos de 100 miembros, participa en el establecimiento de la política relacionada con la educación matemática. Una vez más, la asociación chilena (con 160 miembros) declara que algunos de sus miembros tienen influencia a este nivel mientras que la sociedad uruguaya, bastante grande en comparación con la población del país, no tiene tal influencia. Ni la sociedad cubana (bastante grande) ni la peruana (bastante pequeña) respondieron a esta cuestión en la encuesta. La sociedad boliviana confiesa no tener ninguna influencia, sin embargo, sus cursos de formación del profesorado son reconocidos oficialmente.

La mayoría de las sociedades explicaron los medios que utilizan para influir en la política educativa. Entre aquellas que declararon el menor grado de influencia se encontraban las organizaciones dedicadas a la investigación en educación matemática y los grupos regionales de profesores de matemáticas. Mientras algunas sociedades tienden a dar respuestas sólo cuando se les pregunta, para otras, la influencia en la política representa una prioridad: *"nos hemos mantenido cada vez más activos en la promoción de la educación matemática"; "NCTM se ha centrado en la reivindicación (de la educación matemática) como una de las cinco iniciativas estratégicas"*. Un encuestado podría haber captado con la siguiente frase la esencia de la experiencia de las sociedades profesionales a la hora de valorar esta influencia:

> "Aunque no diría que hayamos disfrutado de un éxito total y rotundo, se podría decir que las cosas estarían mucho peor si no fuera por nuestras gestiones y nuestra influencia."

Consideramos que una de las funciones más importantes de las sociedades de matemáticas, además de ser un mecanismo para la puesta en común de las situaciones de aprendizaje y experiencias didácticas y ayudar al desarrollo profesional de los profesores en todos los aspectos (capacitación, actualización, tratamiento de los problemas laborales más comunes), es la de actuar como interlocutor con las autoridades pertinentes relacionadas con la política para la educación matemática. La encuesta muestra cómo muchas sociedades no logran esta segunda meta, sea cual sea su tamaño o el nivel económico de su país. La reflexión sobre los diferentes métodos para ayudar a las sociedades a conseguir este objetivo podría convertirse en un tema de debate para ICMI y para los siguientes ICME's. Podria ser a través de entidades tales como ICMI, CIAEM y otras de rango internacional como se podría lograr una mejora en el impacto de las sociedades matemáticas. De hecho, la mayoría de las sociedades declara que mantienen contacto de una manera formal con otras sociedades y algunas pertenecen a federaciones tales como FISEM o UMALCA[14], sin embargo, estos contactos no parecen tener ningún impacto real en su influencia regional o nacional.

Por último, muchas sociedades notificaron la organización de actividades destinadas a los estudiantes, la mayoría relacionadas con la preparación para la Olimpiada Matemática. En la encuesta no se formuló ninguna pregunta sobre el número de estudiantes que son miembros de las sociedades.

Ponencias y debates durante el Congreso

El Grupo de Debate 28 solicitó propuestas de presentación en la página Web del ICME11, para realizar algunas cortas ponencias en las sesiones de grupo durante el ICME11.

Detrás (de izquierda a derecha): Corinne Hahn (Francia), Will Morony (Australia), Lindiwe Tshabalala (Sudáfrica), Benoit Montessinos (Francia). Delante: Gilles Aldon (Francia).

[14] http://umalca.usach.cl/

Se aceptaron cinco presentaciones, que se agruparon en los tres tópicos seleccionados para el funcionamiento del Grupo de Debate 28. En la primera sesión, Gilles Aldon (Francia) y Lindiwe Tshabalala (Sudáfrica)[15] tenían que hablar de las sociedades de ámbito local; la segunda sesión se centró en las sociedades de ámbito regional, con presentaciones breves de Eduardo Mancera (Mexico) y Louise Poirier (Canada); la sesión final se concentró en las sociedades a escala mundial y se programó que durante esta sesión expusiera Jim Rubillo (EEUU)[16].

Después del Congreso, el Grupo de Debate 28 está preparando un documento con recomendaciones para el Comité Ejecutivo ICMI, aunque de momento sólo hay un borrador. A continuación se han resumido algunas de estas conclusiones.

Conclusiones fundamentales del Grupo de Debate 28: la naturaleza de las sociedades

- Es importante que las sociedades sean independientes respecto del gobierno y otras instituciones oficiales, ya que permite a la asociación ser la auténtica voz de la profesión.
- Aunque se basan en gran parte en el esfuerzo voluntario, las sociedades necesitan dinero para funcionar, y éste proviene de una gran variedad de fuentes según los diversos países. Entre estas fuentes se encuentran las cuotas de socios y las ventas de material propio; algunas organizaciones externas a las sociedades (empresas y gobiernos) pueden ayudarlas a través del patrocinio y al contratar proyectos (para promover la investigación y el currículum o el desarrollo profesional). Este último tipo de fuentes de recursos puede derivar potencialmente en problemas, al comprometer la independencia de la asociación.
- Los Institutos Nacionales, como el National Centre for Excellence in Teaching Mathematics (NCETM, Reino Unido), que están subvencionados por el gobierno, pueden tener un impacto negativo en las sociedades profesionales; se podría perder la independencia de la voz profesional. Hace falta un equilibrio entre las partes. Estos centros nacionales deberían apoyar y alentar a las sociedades.
- Las sociedades son muy importantes a la hora de superar el "aislamiento" de los profesores. El trabajo diario en las escuelas se centra en temas cotidianos mientras que las sociedades tienen la capacidad de combatir el aislamiento profesional de los profesores al proporcionarles información y ayudarles a sentirse y estar conectados profesionalmente con otros profesores. El aislamiento es un problema, especialmente en países de

[15] La llegada de Lindi a Méxcico se retraso; el Profesor Momokgethi Setati pudo explicar de forma breve la situación y los procesos de Sudáfrica y, cuando Lindi consiguió llegar a las últimas sesiones, pudo dar más detalles sobre esta información.

[16] Debido a una serie de imprevistos durante el viaje, Jim tuvo que retirarse del ICME11 a última hora.

gran extensión geográfica, como Canadá y Australia, aunque no se trata sólo de una cuestión geográfica: trabajar en una escuela sin compañeros de ideas afines o con la misma orientación profesional también puede resultar sumamente desolador para un profesor de matemáticas.

- Las sociedades necesitan estrategias para que sus miembros continúen interesados, implicados y activos "para siempre". Existen dos problemas. El primero es el "síndrome de burn-out" o "síndrome del quemado" que provoca que personas muy activas anteriormente se involucren menos en el trabajo de las sociedades como resultado de su dedicación a otros intereses personales o profesionales. El segundo es una "orientación consumista" de los miembros que, en este caso, juzgan a la sociedad por lo que les aporta, en vez de preguntarse cómo podrían contribuir en el trabajo que se está llevando a cabo.

Conclusiones fundamentales del Grupo de Debate 28: las funciones (actuales y potenciales) de las sociedades de profesores

- Las asociaciones pueden ser estructuras (organismos formales) que construyen puentes entre los diferentes grupos de personas que trabajan en la educación matemática. Dicha unión puede mejorar la comunicación entre "investigadores", "matemáticos" y "profesores" (las respuestas a la Encuesta permiten observar que esta distancia existe en muchos países y de muchas formas distintas). Se trata de una función muy importante y una manera en que las sociedades pueden contribuir a la mejora de la situación en el ámbito de la educación matemática, tanto en las relaciones dentro del país como en las relaciones internacionales.
- Los fondos asignados a la investigación a menudo se destinan a un trabajo "científico" que puede no ser útil para responder a las cuestiones y dilemas que plantean los profesores. Por consiguiente, una de las funciones de las sociedades de profesores de matemáticas podría ser plantear, solicitar y presionar para conseguir programas de financiación para la investigación y medidas que permitan una investigación de calidad en temas relevantes para los profesores. Esta inclinación actual por lo "científico" que se está produciendo en muchos países también queda reflejada en las normas que rigen la forma de trabajar de los profesores de universidad. Se favorece más la publicación de conclusiones en investigación que el trabajo de los profesores dentro de su área que, a su vez, se cataloga como un "servicio" y se considera muy por debajo de la investigación.
- Las asociaciones de profesores de matemáticas pueden:

  a) Jugar un papel en la promoción de prácticas de investigación cooperativas

  b) Identificar problemas, así como la posibilidad de ampliar proyectos

- Las sociedades de profesores necesitan planificar un programa de actividades dentro del calendario anual de eventos (normalmente, un congreso anual). Los profesores necesitan un apoyo continuo (tanto a nivel individual como en grupos, según el nivel escolar) para implementar sus descubrimientos y animarse a plantear nuevos enfoques. Internet puede y debería utilizarse para proporcionar dicho soporte. Este tipo de apoyo continuo y el compromiso por parte de las sociedades estimula a los profesores a ser ellos mismos quienes entren en escena para investigar su propia práctica y trabajar con investigadores para explorar y resolver cuestiones.
- Se puede utilizar las revistas y páginas Web de las sociedades para informar y promover debates profesionales, tanto en el ámbito escolar como en niveles superiores. La comunicación, junto con los debates profesionales, puede ayudar a los profesores a identificar y plantear problemas relacionados con la investigación; es entonces cuando están capacitados para trabajar con investigadores para tratar estos problemas.

Conclusiones fundamentales del Grupo de Debate 28: colaboración internacional entre las sociedades de profesores

Es un hecho reconocido que existen algunas relaciones internacionales e intercambios entre las sociedades de profesores de matemáticas. Por ejemplo, las sociedades latinoamericanas cuentan con un historial de cooperación que refleja una estructura regional establecida a través de los grupos de matemáticas y el idioma común. Los ICMEs previos han favorecido los encuentros entre los representantes de las distintas sociedades de profesores y también se producen contactos *ad hoc* en una gran cantidad de foros. Además, se han desarrollado algunos acuerdos bilaterales. Sin embargo, la colaboración entre las sociedades de profesores ni se ha promocionado ni coordinado a escala internacional.

Muchos factores sugieren que un nivel de conexión y colaboración mayor entre las sociedades profesionales de matemáticas beneficiará tanto al trabajo de dichas sociedades como a la salud de la educación matemática de un modo global:

1. Las conclusiones de la Encuesta del Grupo de Debate 28 y las discusiones posteriores revelan que sociedades procedentes de diversos países comparten muchos retos similares.

Las asociaciones de los distintos países tienen estrategias diferentes para lograr esos retos comunes. La acción de compartir estas estrategias proporcionará ideas, enfoques y ejemplos que se podrían adoptar o adaptar en otros países.

2. El crecimiento de la globalización dentro del campo de la educación matemática. Prueba de este hecho sería el aumento del número de proyectos internacionales, entre ellos, algunos muy famosos, como PISA, TIMSS y el

estudio Mathematics Teachers' Knowledge, y muchos otros, como los organizados por la Unión Europea y otras instituciones.

Una buena práctica (en especial, a la luz del punto 3) requiere la presencia de la voz de los investigadores en educación matemática en todas las fases y en todos los niveles de este tipo de proyectos. La aceptación y el interés por las conclusiones requieren que todas esas "voces" representen a y estén conectadas con los sectores profesionales relevantes (por ejemplo, a través de asociaciones). Este objetivo necesita una estructura y conexiones a nivel internacional entre las asociaciones profesionales.

3. La prueba, gracias al Plenario 2 y al Survey Team 3 del ICME11, de que existe un alejamiento sustancial entre los investigadores/las conclusiones de la investigación y los comités/los profesionales/la "realidad" de las clases.

Para acortar la distancia entre las bases del conocimiento se necesita una comunicación abierta y efectiva entre estos grupos (investigadores, administración y profesores). No obstante, la comunicación debe producirse de forma bidireccional. Los proyectos (tal y como se menciona en el punto 2) van y vienen; sin embargo, las sociedades están presentes a largo plazo y, por lo tanto, sirven de vehículo, en este caso esencial, para promover y mantener la comunicación necesaria. Se considera esta "desconexión" como un fenómeno internacional, ya que ningún país puede tener "todas las respuestas". Por consiguiente, las estructuras y vínculos a nivel internacional entre las asociaciones profesionales serán beneficiosas.

4. Una de las consecuencias de la globalización es el aumento de la conciencia de los contrastes entre los recursos de que disponen los diferentes países en materia de educación. Muchos miembros de las sociedades profesionales de los países desarrollados están dispuestos a cooperar con el trabajo profesional de los compañeros procedentes de países en vías de desarrollo.

El compañerismo entre los profesionales de la educación tiene como resultado este deseo de ayudar a los demás. Los planes actuales producen respuestas *ad hoc* en el mejor de los casos, y otras, poco prácticas, en el peor. Una vez más, las estructuras y conexiones a nivel internacional entre las asociaciones profesionales proporcionarán un mecanismo viable.

Uno de los colaboradores del Grupo de Debate 28 realizó la siguiente sugerencia:

> Ha llegado el momento de mirar adelante para crear nuevas oportunidades para aprender de los profesores de matemáticas de todo el mundo. Las sociedades profesionales pueden liderar esta iniciativa. Internet es un vehículo excelente para que cada asociación pueda proporcionar recursos e información a los educadores matemáticos, a los matemáticos y a los profesores de matemáticas. Cada sociedad podría ofrecer un portal (una página Web internacional) con acceso a

> documentos, herramientas para el aprendizaje interactivo de las matemáticas, reseñas de las noticias nacionales, información y una selección de los artículos publicados. El NCTM ya tiene materiales en su Web en francés y español, además de los contenidos en inglés. Muchos estadounidenses estarían muy interesados en disponer de un acceso práctico a materiales similares de otros países. Lo único que se necesita es una simple dirección de Internet que sirva de enlace para acceder a las "páginas internacionales" de otras sociedades. Aunque en estos momentos los ciudadanos de todo el mundo pueden acceder a nuestra página Web (www.nctm.org), la mayoría de la información que incluye proviene de forma exclusiva de los Estados Unidos. Nuestra organización podría atender mejor a la comunidad mundial si se creara un recurso Web más centrado en los intereses internacionales y que proporcione una vía para las preguntas o aportaciones que se quieran realizar. Si cada una de las sociedades crea una página como la mencionada y la da a conocer a sus miembros, entonces el dialogo internacional se aceleraría y el flujo de ideas mejoraría. Además, los profesores de los países en vías de desarrollo también tendrían acceso a este portal.

Con un poco de coordinación, este concepto podría crecer rápidamente y significaría una contribución considerable al trabajo de los profesores de matemáticas, los educadores y otros en una gran variedad de países. Las sociedades nacionales podrían identificar una persona de contacto que hablara inglés para que se encargara de promocionar los enlaces personales de forma apropiada.

Apéndice: referencia para los lectores iberoamericanos

Además del portal de FISEM (www.fisem.org), la Real Sociedad Matemática Española mantiene la página Web "Red de Organizaciones Latinoamericanas de Matemáticas" en http://www.colmatelat.ehu.es/. Este portal incluye, en especial, un enlace al "Libro Blanco" del Encuentro de Sociedades Latinoamericanas de Matemáticas (ESLM): "Análisis y Perspectivas de la Colaboración Latinoamericana", que se puede descargar de forma gratuita en:

http://www.colmatelat.ehu.es/LibroBlanco.html.

La referencia formal del libro en formato papel es: *Análisis y Perspectivas de la Colaboración Latinoamericana en Matemáticas*. Luis A. Cordero et al. Editores. Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2004. ISBN: 84-933610-2-X

Este libro es uno de los frutos de una gran reunión de sociedades matemáticas latinoamericanas que tuvo lugar en septiembre de 2003 en Santiago de Compostela, España. Las páginas XII y XIII del Libro Blanco contienen una lista de las sociedades que participaron en la reunión (unas 25 sociedades) además de información sobre sus URL's. Además, el libro incluye una descripción de los objetivos, la situación y otros datos de cada una de las sociedades que participaron en dicho encuentro.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 313-315
ISSN: 1815-0640

Información

ICME 11
Reseñas de las sesiones Iberoamericanas
(Ibero American Forum)

Por *Eduardo Mancera Martínez,* Universidad Veracruzana, México

El Comité del Programa del ICME 11 acordó dedicar un espacio a sesiones en español, para propiciar la asistencia de países de habla hispana y portuguesa; se conformó un Comité para este propósito y se organizaron varias mesas redondas en donde se presentaron diversos enfoques a problemáticas que afectan el área iberoamericana.

Mesa: **"Asociaciones de educación matemática en Iberoamérica"**

El fin de esta mesa fue analizar el papel que realizan algunas organizaciones de profesionales de la educación matemática en diferentes contextos iberoamericanos y analizar los procesos de comunicación y colaboración internos y con otras agrupaciones de profesores de matemáticas y educadores matemáticos.

Los participantes presentaron y analizaron, entre otros puntos, el papel de las organizaciones de profesores de matemáticas y de educadores matemáticos en la difusión de enfoques, metodologías, materiales educativos, revistas, textos, libros y otros elementos para la enseñanza de la matemática, además de las características de las organizaciones, sus procedimientos internos, las problemáticas de financiamiento.

También se reflexionó sobre el papel de las organizaciones y las relaciones entre ellas, como las establecidas por la FISEM (Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática), para realizar trabajos conjuntos o abrir caminos institucionales de comunicación.

La mesa fue organizada por miembros de la Asociación Nacional de profesores de Matemáticas y moderada por Guillermina Carmona (México) y Gustavo Martínez (México), participaron en ella: Blanca Maria Peralta Guacheta (Colombia), Claudia Lissete Oliveira Groenwald (Brasil), Martha Villavicencio (Perú), Edison de Faria (Costa Rica), Gustavo Eduardo Bermúdez (Uruguay), Mayra Castillo (Guatemala), Sarah González (República Dominicana) y Martha Iglesias (Venezuela).

Mesa: **“Investigación en matemática educativa”**

En este espacio se presentaron los avances y reconocimiento de la investigación en Educación Matemática en diversos países, las problemáticas que se presentan y algunos elementos para enfocar conceptualmente algunos aspectos. Se reconoció en este espacio que en la actualidad hay diversas formas de interpretar y analizar la actividad de quienes se dedican a la investigación en Educación Matemática; esto ha configurado diversos grupos de trabajo y perspectivas para hacer y difundir la investigación en este campo, pero se coincidió en que la mayor parte de los trabajos de investigación se circunscriben a tesis de posgrado y quienes las realizan, por lo general, ya no continúan en la actividad de investigación.

También se reconoció la inclusión de nuevos temas y discusiones emergentes para formalizar o estructurar la disciplina. Los participantes expusieron algunas corrientes relevantes en el desarrollo de la investigación en la educación matemática en Iberoamérica, los avances que han logrado y problemas por estudiar, además se identificaron grupos de trabajo en la región, los enfoques que promueven, la estructura que tienen las organizaciones de investigadores en educación matemática en sus países, ya sea en las universidades o como organizaciones de profesionales, el papel que juegan los investigadores y sus organizaciones en las decisiones educativas en los países de donde provienen, los investigadores o metodologías que más han influido en el desarrollo de la investigación en su entrono, el papel de diversos medios o los apoyos financieros, entre otros temas.

La mesa fue organizada y moderada por Eduardo Mancera (México) y participaron en ella: Gelsa Knijnik (Brasil), Etda Rodríguez (Uruguay), Inés Ma. Gómez Chacón (España), Grecia Gálves (Chile), Nelly Amatista León Gómez (Venezuela) y Paola Valero (Dinamarca – Colombia).

Mesa: **“Formación de maestros”**

En ella se expusieron diversos enfoques y planteamientos sobre la formación y formadores de maestros de Iberoamérica.

Las presentaciones se dedicaron a aportar perspectivas diferentes de lo que está ocurriendo con la Educación Matemática en la formación inicial y permanente de maestros en algunos países de Iberoamérica, también se plantearon diversos problemas comunes y algunas formas de superarlas.

La mesa fue organizada y moderada por Teresa Navarro (México) y participaron en ella Yolanda Campos (México), Froylán Caballero (México), Darío Fiorentini (Brasil), Angel Ruiz (Costa Rica), Pedro Gómez (Colombia), Ángel Gutiérrez (España), João Pedro Mendes da Ponte (Portugal), Teresa Navarro de Mendicuti (México) y Claude Gaulin (Canadá).

Mesa: **“Desarrollo de la matemática a nivel superior e investigación”**

Se planteó la problemática relacionada con la educación matemática, el papel que juega la disciplina, no solamente por ser el objeto de enseñanza, sino porque el desarrollo de esta rama del conocimiento influye de manera importante desde el desarrollo curricular hasta el trabajo en las aulas, ya sea de formación de maestros o en las que se trabaja directamente con los niños o jóvenes. Esta influencia se ha referido en ocasiones solamente al contenido disciplinario, pero en la actualidad se presta mucha atención a competencias o habilidades matemáticas, entre ellas la resolución de problemas, el uso de tecnologías para favorecer el desarrollo de dichas competencias o habilidades o para profundizar en el conocimiento matemático, entre muchos temas.

Los participantes en este panel presentaran los aspectos que consideran más relevantes en la influencia de la matemática en la educación (contenidos, competencias, habilidades etc.), los avances en la matemática y su influjo potencial en la educación matemática, el papel de los matemáticos en el campo de la educación matemática, las semejanzas o contrastes entre la actividad docente en matemáticas y la investigación en matemáticas, entre otros temas.

Organizó esta mesa Eduardo Mancera (México) y la moderó Efrén Marmolejo (México), participaron en ella: Fidel De Oteiza Morra (Chile), Carlos Eduardo Vasco Uribe (Colombia)

Mesa: **“Formación matemática para el ciudadano”**

En este espacio se consideraron diversos estudios de la educación matemática que dan cuenta sobre la inexistencia de matemáticas escolares universales y hacen evidente la necesidad de orientar el currículo matemático con base en el contexto de cada país. También se abordaron problemáticas relacionadas con el contenido matemático que se presenta como uniforme y acabado, pero que en las aulas se transforma de acuerdo con diversos aspectos sociales y culturales.

Organizó esta mesa Rosa María Farfán (México) y moderó Gisela Montiel (México), participaron en ella: Cecilia Crespo (Argentina), Ricardo Cantoral (México), Celia Rizo (Cuba), Terezinha Nuñez (Brasil – UK), y Juan Díaz Godino (España).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, páginas 317-318
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2009

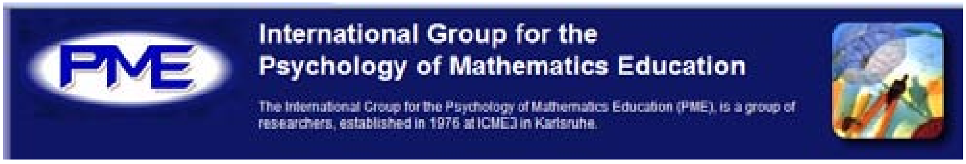
VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
Puerto Montt Universidad de Los Lagos de Chile
Fecha: 4 al 9 de Enero de 2009.
http://cibem6.ulagos.cl/

6ª Conference of European Research in Mathematical Education (CERME 6)
Lyon. Francia
Fecha: 28 de Enero al 1 de Febrero de 2009.
http://cerme6.univ-lyon1.fr/

10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 4 al 7 de Mayo de 2009
www.edumat.org.ar

23 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23)
Santo Domingo (República Dominicana)
Fecha: 13 al 17 julio de 2009

10ª International Conference Models in Developing Mathematics Education
Dresden, Alemania
"The Mathematics Education into the 21st Century Project" y University of Applied Sciences, Dresden
Fecha: 11 al 17 de Septiembre de 2009



PME33
Fecha**: 19 al 24 de Julio de 2009**
Thessaloniki - Greece
http://igpme.org/default.asp

AÑO 2010

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Ljubljan, Eslovenia
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
http://icots8.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2008, Número 16, página 319
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres “Arial”. Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo “Symbol”** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los “pie de foto” se escribirán dentro de un “cuadro de texto” de Word (con o sin bordes) que estará “agrupado” con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). “La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria”. *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). “Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma”. *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). “Research on mathematical proof”. En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). “Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria”. En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org