UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 32 – Diciembre de 2012

Monográfico: Resolución de Problemas

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 3-4
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.
Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García Gonzalez
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 5-6
ISSN: 1815-0640

Editorial

Monográfico: Resolución de Problemas

George Polya habla de “describir un problema relacionado” como un elemento eficaz para elaborar un plan para obtener una solución.

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter.

Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

Un estudiante cuyos estudios incluyan cierto grado de matemáticas tiene también una particular oportunidad. Dicha oportunidad se pierde, claro está, si ve a las matemáticas como la materia de la que tiene que presentar un examen final y de la cual no volverá a ocuparse una vez pasado éste. La oportunidad puede perderse incluso si el estudiante tiene un talento natural por las matemáticas, ya que él, como cualquier otro, debe descubrir sus capacidades y aficiones; no puede saber si le gusta el pastel de frambuesas si nunca lo ha probado. Puede descubrir, sin embargo, que un problema de matemáticas puede ser tanto o más divertido que un crucigrama, o que un vigoroso trabajo intelectual puede ser un ejercicio tan agradable como un ágil juego de tenis. Habiendo gustado el placer de las matemáticas, ya no las olvidará fácilmente, presentándose entonces una buena oportunidad para que las matemáticas adquieran un sentido para él, ya sean como pasatiempo o como herramienta de su profesión, o su profesión misma o la ambición de su vida"

*Prefacio de la primera edición en inglés del libro: "Cómo plantear y resolver problemas"**(“How to solve it”)**.*

Estimados colegas y amigos*:*

Esta nueva edición de UNIÓN es un monográfico sobre Resolución de Problemas, por eso nuestra firma invitada es Uldarico Malaspina, quien nos deleita desde el primer volumen de UNION con la sección fija Rincón de los problemas. Le agradecemos su desinteresada e importante colaboración. También agradecemos y deseamos los mejores augurios a la Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz, a la Organización de Estados Iberoamericanos, a asesores, a evaluadores, a autores de cada edición y a nuestros lectores que nos siguen acompañando y fortaleciendo con su apoyo permanente.

Un Brindis por los momentos compartidos, con el deseo de que se cumplan sus deseos personales y profesionales.

Un abrazo fraternal.

Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.
Directoras

Editorial

Caros Colegas e Amigos*:*

Esta nova edição de UNIÃO é um monográfico sobre Resolução de Problemas, por isso nossa assinatura convidada é Uldarico Malaspina, quem nos deleita desde o primeiro volume de UNION com a secção fixa Rincão dos problemas. Agradecemos-lhe seu desinteresada e importante colaboração. Também agradecemos e desejamos os melhores augúrios à Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz, à Organização de Estados Iberoamericanos, a assessores, a evaluadores, a autores da cada edição e a nossos leitores que nos seguem acompanhando e fortalecendo com seu apoio permanente.

Um Brindis pelos momentos compartilhados, com o desejo de que se cumpram seus desejos pessoais e profissionais.

Un abrazo fraternal.

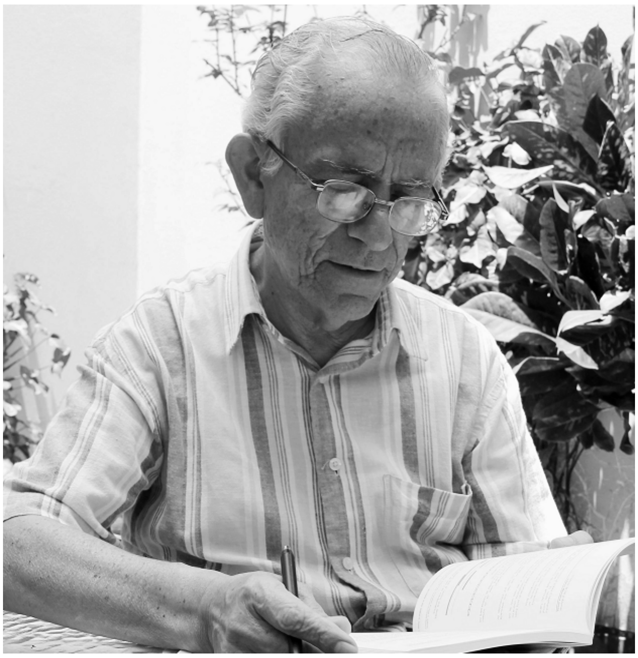
Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich
Directoras

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Diciembre de 2012, Número 32, página 7-8
ISSN: 1815-0640

Uldarico Malaspina Jurado

Breve Reseña



Nació en Caraz, distrito del Perú. Hizo sus estudios de pregrado en matemática pura en la Universidad Nacional de Trujillo y estudios de posgrado en matemática, economía y educación matemática en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), en la Universidad de Bonn (Alemania) y en la Universidad de Toulouse (Francia).

Es Magíster en Matemáticas y Doctor en Ciencias por la Pontificia Universidad Católica del Perú. Actualmente es Profesor Principal - Investigador en la Sección Matemáticas del Departamento de Ciencias de la PUCP.

Es Director del Institut de Recherche sour l'Enseignement des Mathématiques IREM con sede en la PUCP. Es Miembro de número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú, Presidente de la Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana, miembro del Comité Asesor de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, profesor y asesor de tesis en esta maestría.

Campos de investigación en educación matemática: resolución de problemas, optimización e intuición, formación de profesores; y, últimamente, la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje, y el estímulo y desarrollo en los profesores, de la competencia de crear problemas.

Expositor en foros internacionales sobre educación matemática de reconocido prestigio, como las *Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa* - RELME (en varios países latinoamericanos), *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* - PME 33 (Grecia, 2009) y PME 34 (Brasil, 2010) , *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* – VI CIBEM (Chile, 2009), *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* – XIII SEIEM (España, 2009), *International Congress of Mathematicians* - ICM 2010 (Hyderabad, India), *Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* - CERME 7 (Polonia, 2011), *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* – XIII CIAEM (Brasil, 2011), *International Congress on Mathematical Education – ICME 12* (Seúl, 2012) e integrante del equipo organizador del Topic Study Group on Solving Problems Research del *International Congress on*

Mathematical Education – ICME 11 (México, 2008), de seis *Coloquios Internacionales sobre Enseñanza de las Matemáticas*, realizados en Lima y del *VI Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria* – 2010 (como Presidente del Comité Organizador)

Autor o coautor de publicaciones en revistas especializadas de Educación Matemática, como *Educational Studies in Mathematics*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática* y en las actas de los eventos en los que fue expositor.

Autor del libro *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG -Editorial Académica Española. (ISBN: 978-3844336627), 2011, y del libro *Matemática para el Análisis Económico*. Perú: Fondo Editorial de la PUCP, 1994 (ISBN: 84-8390-967-7), editado también en versión electrónica, debido a su alta demanda, por la Biblioteca de la PUCP en el 2009.

Es Director Fundador de la revista PRO MATHEMATICA de la PUCP, ha sido miembro del Comité Científico de eventos internacionales sobre educación matemática y es miembro del Comité Asesor de UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas.

Ha presidido los Comités Organizadores de la 7ª, 14ª y 23ª Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur, realizados en el Perú.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2012, Número 32, páginas 9-27
ISSN: 1815-0640
firma invitada

Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica

Uldarico MalaspinaJurado

Resumen

En este artículo se exponen reflexiones sobre la importancia de la enseñanza de las matemáticas para el nuevo tipo de sociedad que vivimos. En ese contexto se proponen algunos compromisos a ser asumidos por profesores de matemáticas, matemáticos, investigadores en educación matemática e instituciones educativas. Se destaca la importancia de que los matemáticos puros se involucren en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en el nivel superior y brinda elementos históricos sobre los aportes de éstos a la educación matemática, considerando a Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom y De Guzmán. Luego de una exposición breve sobre la educación matemática como disciplina científica, se explicita algunos retos actuales para la enseñanza de las matemáticas y se brinda elementos para asumirlos, con propuestas para el curriculum de la educación básica, para la formación de profesores y para trabajar la resolución de problemas en las clases. El artículo concluye destacando la importancia de investigar sobre la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje y sobre la forma de estimular y desarrollar en los profesores la competencia de crear problemas de matemáticas.

Abstract

This article presents reflections about the importance of teaching mathematics for the new type of society we are currently living. Within this context, proposals are mentioned in order to be adopted by math teachers, mathematicians, researchers in mathematics education and educational institutions. It highlights the importance that pure mathematicians involve in teaching mathematics, especially in the superior level. Moreover, it is offered a historical dimension of the contributions that mathematicians have done to mathematics education, considering Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom and De Guzman. After a brief introduction on mathematics education as a scientific discipline; some of the current challenges for teaching mathematics are shown as well as a set of elements to face them with some proposals for the basic education curriculum, teacher training and working with problem solving in classes. The article concludes highlighting the importance of researching about the creation of problems that contribute learning mathematics and about encouraging teachers' competencies in math problems creation.

Resumo

Neste artigo expõem-se reflexões sobre a importância do ensino das matemáticas para o novo tipo de sociedade que vivemos. Nesse contexto propõem-se alguns compromissos a ser assumidos por professores de matemáticas, matemáticos, pesquisadores em educação matemática e instituições educativas Destaca-se a importância de que os matemáticos puros se envolvam no ensino das matemáticas, sobretudo no nível superior e brinda elementos históricos sobre os contribuas destes à educação matemática, considerando a Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom y De Guzmán. Depois de uma exposição breve sobre a educação matemática como disciplina científica, se explicita alguns reptos actuais para o ensino das matemáticas e se brinda elementos para os assumir, com propostas para o curriculum da educação básica, para a formação de professores e para trabalhar a resolução de problemas nas clases. O artigo conclui destacando a importância de pesquisar sobre a criação de problemas que favoreçam a aprendizagem e sobre a forma de estimular e desenvolver nos professores a concorrência de criar problemas de matemáticas.

Uldarico Malaspina Jurado

1. Contexto global

Es fundamental que reflexionemos sobre la importancia de las matemáticas – y en consecuencia de su aprendizaje y su enseñanza – más allá del contexto institucional más inmediato, sea éste un centro de educación infantil, primaria, secundaria o superior. Es importante tomar conciencia de que vivimos en una sociedad con características diferentes a la sociedad de hace unos 30 años; es la llamada "sociedad del conocimiento y la información", o la "era digital", o la época de la "tercera revolución industrial", como la llama Jeremy Rifkin, en la que somos testigos de los grandes avances de la electrónica, la informática, la energía nuclear, la Internet, la comunicación inalámbrica en general, la automatización en la producción, etc. Hay, pues, abundancia de información, gran capacidad de comunicación y avances tecnológicos acelerados. Ante la rapidez de los cambios que se van dando, cada vez se requieren nuevos conocimientos para atender las demandas de la sociedad y, como hace notar Castells (1997), una materia prima importante es la información, pues para manejar la información se elaboran productos que son formas de procesarla y aparatos para hacer más eficientes esos procesamientos. Existe una estrecha relación entre conocimiento e información, pero lo esencial es convertir la información en conocimiento y éste es un importante reto para los docentes, no solo porque nosotros mismos lo requerimos para ejercer creativamente nuestra profesión y nuestra ciudadanía, sino porque debemos incentivar a nuestros alumnos a construir nuevos conocimientos usando la información disponible. Es pertinente recordar lo que nos dice Mario Bunge (2003):

> La información en sí misma no vale nada, hay que descifrarla. Hay que transformar las señales y los mensajes auditivos, visuales, o como fueren, en ideas y procesos cerebrales, lo que supone entenderlos y evaluarlos. No basta poseer un cúmulo de información. Es preciso saber si las fuentes de información son puras o contaminadas, si la información como tal es fidedigna, nueva y original […] si es verdadera o falsa, si suscita nuevas investigaciones […] Mientras no se sepa todo esto, la información no es conocimiento.

Convertir información en conocimiento requiere saber seleccionarla, interpretarla e integrarla; y el conocimiento creado requiere ser comunicado, ampliado, recreado y gestionado. Ciertamente, el papel del docente es sumamente importante para comunicar y recrear ese conocimiento y el papel del investigador para ampliarlo. Esta perspectiva requiere que todos, especialmente los maestros, estemos en permanente actitud de aprender y enseñar, criticar constructivamente, identificar problemas, investigar y comunicar. Himanen (2001), tomando como ejemplo a Linus Torvalds, el creador del sistema operativo Linux, nos dice:

> El aprendizaje, en la sociedad del conocimiento, tiene que estar asociado con la pasión, con el interés por lo desconocido, por las preguntas más que por las respuestas, por el apoyo de otros que conocen, por la resolución de problemas de manera colaborativa.

El proyecto Tuning, dedicado a una reflexión profunda sobre la educación superior, que busca unificar criterios estructurales, organizativos y funcionales en la educación – en particular en la formación de maestros – fue desarrollado inicialmente en Europa y para Europa, con la participación de 135 universidades europeas, que trabajaron desde el 2001 y posteriormente se amplió considerando Latinoamérica. Como es de imaginarse, es natural que hayan contextualizado estas reflexiones; así, en el capítulo denominado Contextualización, del informe final afirman:

> El desarrollo económico y social, en el momento actual, se caracteriza por la incorporación de un nuevo factor productivo, basado en el conocimiento y en el manejo adecuado de la información. Es evidente la intensidad, diversidad y velocidad con las que día a día se crean nuevos conocimientos, lo cual implica que las sociedades deben prepararse y estructurarse para aplicar estos avances, de una manera eficaz e innovadora a sus procesos tecnológicos. (Beneitone, P., Esquetini, C., González, Marty, Siufi, & Wagenaar, 2007, p.23)
>
> Tomando en cuenta la constante y vertiginosa transformación actual del mercado de trabajo, hay que considerar como cierto la rapidez con la que los conocimientos se vuelven obsoletos. Es preciso, entonces, que los estudiantes incorporen en sus procesos de enseñanza-aprendizaje, competencias que les brinden esa capacidad de adaptación permanente al cambio, pero, al mismo tiempo, que los formen como ciudadanos comprometidos. (Ibíd., p. 24)

Con este marco y luego de encuestas realizadas a 876 académicos y 664 graduados de diversos países de Latinoamérica, en el informe se propone 27 competencias específicas a desarrollar, algunas de las cuales son:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis
- Capacidad de comunicación oral y escrita
- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica
- Habilidades en el uso de las TIC
- Capacidad de investigación
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente
- Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas
- Capacidad creativa
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas
- Capacidad para tomar decisiones
- Capacidad de trabajo en equipo

La lectura de esta lista nos lleva a reflexionar sobre la gran responsabilidad que tenemos con los futuros ciudadanos, técnicos y profesionales al enseñar matemáticas a los niños y jóvenes de hoy, pues el aprendizaje de las matemáticas, adecuadamente orientado, contribuirá fuertemente al logro de estas competencias, en todos los niveles educativos, considerando las características propias de cada nivel. Contribuiremos al logro de estas competencias si hacemos esfuerzos personales e institucionales para que en todos los niveles educativos se desarrollen clases de matemáticas que sean amigables; sean brindadas con entusiasmo, motivaciones adecuadas y mostrando conexiones con otros campos del conocimiento; se trabaje con problemas atractivos en forma individual y grupal; se respete las ideas de los alumnos; se estimule la curiosidad y la creatividad; se brinde tiempo para que los alumnos piensen, intuyan, descubran, reflexionen sobre sus errores, encuentren sus propias soluciones, creen sus propios problemas y demostraciones, disfruten de sus aprendizajes y se inicien en la investigación.

2. Compromisos personales e institucionales

Para este tipo de sociedad, es tan grande la importancia de la matemática – tanto en su aspecto formativo como instrumental – y tan grande también la importancia de una adecuada orientación del aprendizaje de las matemáticas, que es un imperativo para los profesores de matemática, para los matemáticos, para los investigadores en didáctica de las matemáticas y para las instituciones educativas, asumir seriamente algunos compromisos como los siguientes:

Los profesores de matemáticas:

- Profundizar sus conocimientos matemáticos y didácticos
- Poner en práctica reflexiva las recomendaciones didácticas que estimulen un aprendizaje participativo y por descubrimiento.

Los matemáticos:

- Investigar para ampliar las fronteras del conocimiento en este campo, así como en sus interrelaciones con otros campos.
- Reflexionar acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Si ejercen docencia, contribuir al aprendizaje por descubrimiento y a la creación de problemas que estimulen el aprendizaje.
- Fortalecer las relaciones institucionales de matemáticos y de educadores matemáticos.

Los investigadores en didáctica de las matemáticas:

- Ampliar la frontera del conocimiento en esta joven disciplina científica
- Fortalecer la relación entre investigación y docencia de modo que haga más estrecha la conexión teoría-práctica.

Las instituciones educativas:

- Poner especial atención a la adecuada formación matemática y didáctica de los docentes de matemáticas de todos los niveles educativos, considerando a los docentes en formación y en servicio y dando prioridad a la formación de los profesores de educación primaria.
- Crear condiciones favorables para la implementación de métodos de enseñanza de las matemáticas que contribuyan a la participación activa de los alumnos y a su aprendizaje por descubrimiento (planes de estudio, textos, laboratorios, aulas, uso de tecnologías actuales)
- Contribuir a fortalecer la relación entre investigación en didáctica de las matemáticas y el ejercicio de la docencia.

3. Matemáticos y enseñanza de las matemáticas. Algunos elementos históricos

El desarrollo de lo manifestado en la sección anterior puede ser muy amplio y con diversos puntos de vista. Por ahora, recordemos algunos aportes de matemáticos muy reconocidos, con el propósito de contribuir a tener una perspectiva histórica y a tomar conciencia de lo importante que es una estrecha interacción entre matemáticos puros y educadores matemáticos, sobre todo en el nivel superior, que es donde se forman a los técnicos y profesionales que ejercerán como tales en una sociedad aún más tecnificada que la actual y que en consecuencia requerirá mayores competencias relacionadas con la creatividad, la investigación y el autoaprendizaje. Paradójicamente, lo más frecuente en los centros educativos de nivel superior es la enseñanza de las matemáticas de modo meramente expositivo, con más énfasis en la presentación formal y en las "aplicaciones prácticas", que en la búsqueda de una comprensión profunda de conceptos, basada en la intuición y en el aprendizaje por descubrimiento de los alumnos. Distinguidos matemáticos, desde inicios del siglo pasado, advirtieron estos inconvenientes en la enseñanza de las matemáticas, que son particularmente preocupantes cuando se dan en los centros de formación de profesores.

Félix Klein **(1849 –1925)**

Ciertamente, este destacado matemático – al que recordamos al estudiar los grupos de Klein en el álgebra y la botella de Klein en la topología – marca un hito en la historia de la educación matemática por sus reflexiones y aportes, que siguen siendo referentes importantes en las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Klein fue el impulsor del razonamiento funcional (que el concepto de función impregne los planes de estudio de matemáticas) e hizo un legado valiosísimo con su libro en tres tomos, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Matemática elemental desde un punto de vista avanzado), publicado en 1908, 1909 y 1928. El volumen 1, sobre aritmética, álgebra y análisis; el volumen 2, sobre geometría; y el volumen 3, sobre la matemática de las precisiones y aproximaciones. Si bien es cierto que el rigor es parte fundamental de las matemáticas y no puede estar ausente en su enseñanza, es importante tener muy en cuenta lo que nos dice Klein al respecto, con el respaldo de sus valiosos aportes a la matemática llamada pura: "en cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración" (citado por Perero, 1994, p. 101). Es tarea de educadores y de investigadores en dicáctica de las matemáticas encontrar el adecuado equilibrio entre intuición y rigor, según los temas y los niveles educativos, recordando que el mismo Klein nos dice que "la enseñanza no puede depender solamente de la materia objeto del estudio, sino sobre todo del sujeto al que se enseña" (citado por Corral, 2010, p. 4). Una muestra del reconocimiento a sus valiosos aportes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fue el significativo hecho que en 1908, cuando en el IV Congreso Mundial de Matemáticos (IV International Congress of Mathematicians) se acordó crear el *Internationale Mathematische Unterichtskommission* (IMUK)[1], Klein fue elegido su presidente, a pesar de no estar presente en tal congreso. Más aún, en el

[1] Desde 1954 esta comisión se llama International Comission on Mathematical Instruction (ICMI)

2000 el ICMI acordó crear la *Medalla Felix Klein* para hacer un reconocimiento especial a quien haya obtenido logros sobresalientes en la investigación en educación matemática. El premio se otorga bienalmente, desde el 2003, en ceremonia especial, en los International Congress on Mathematical Education (ICME), que tienen lugar cada cuatro años.

David Hilbert **(1862 -1943)**

Este gran matemático, también alemán, desarrolló ideas muy valiosas no solo para la enseñanza de las matemáticas sino para el entendimiento de la ciencia en general. Son muy conocidos sus aportes a la geometría y al análisis funcional, con la publicación en 1899 de su libro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría) y con sus famosos espacios de Hilbert; sin embargo, son menos difundidas sus calificadas ideas – de gran importancia para la enseñanza de las matemáticas – en torno a la construcción de la ciencia y al rol de la axiomatización, considerando a ésta, en palabras de Leo Corry, de la Universidad de Tel Aviv, "como un medio para asegurar la solidez de las teorías existentes, y no como un medio para introducir de manera artificial, teorías basadas en el desarrollo formal de sistemas abstractos de postulados faltos de significado intuitivo" (Corry, 2002). Como respaldo a esta afirmación, Corry toma un párrafo del propio Hilbert, de un curso que dio en 1905, en Göttingen, en el que presentó sistemáticamente la forma en que debería aplicarse su enfoque axiomático a la geometría, la aritmética y la física:

> El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, en la cual hay que establecer primeramente unos cimientos firmes y solo entonces se procede a levantar y a ampliar las habitaciones. La ciencia prefiere hacerse lo antes posible de cómodos espacios por donde pasearse con holgura y es solamente después, cuando aparecen por aquí y por allá los signos de que los cimientos poco firmes no son capaces de sostener la expansión de las habitaciones, que ella se dispone a repuntarlos y fortificarlos. Esto no es un signo de debilidad, sino más bien la vía correcta y natural para su desarrollo. (Citado en Corry, 2004, p. 127)

George Polya (1887 – 1985)

En estas pinceladas históricas es imposible dejar de mencionar a este matemático húngaro que contribuyó notablemente en diversos campos de la matemática, como el análisis real y complejo, la combinatoria, la teoría de números, las probabilidades (Boas,1990) y que hizo un valiosísimo legado histórico a la educación matemática al publicar sus famosos libros vinculados con la resolución de problemas: *How to solve it* , en 1945; *Mathematics and plausible reasoning,* en 1954 (Vol I: *Induction and analogy in mathematics; Vol II: Patterns of plausible inference*); y *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving,* en 1962. En verdad, estos libros, que también están publicados en español, no solo brindan reflexiones profundas sobre la resolución de problemas, sumamente útiles para la tarea docente y de investigación, sino que deleitan al matemático y al educador con muy interesantes problemas. Polya pensó mucho en la tarea docente y con el propósito de ser muy concreto en algunas recomendaciones, en su *Mathematical discovery* consideró sus *Diez Mandamientos para el Profesor*, de los cuales, merecen especial atención los siguientes:

- Demuestre interés por su materia
- Domine su materia
- Deles no solo información sino el "saber hacer", actitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico.
- Permítales aprender conjeturando
- Permítales aprender demostrando
- No revele de pronto toda la solución – deje que los estudiantes hagan conjeturas antes que Ud. se la diga – déjeles descubrir por ellos mismos tanto como sea posible.

Hans Freudenthal (1905 – 1990)

Matemático alemán con importantes aportes en diversos campos de la matemática, como la topología, la teoría de grupos, la teoría de Lie y la geometría (Springer & Dalen, 2009) que alzó una significativa voz de alerta ante las propuestas, desde 1959, de orientar la enseñanza de las matemáticas, desde la educación básica, con énfasis en lo formal y en el marco de la "nueva matemática" estructuralista. Es famoso su artículo *¿Enseñanza de las Matemáticas Modernas o Enseñanza Moderna de las Matemáticas?* (Freudenthal, 1963) y sumamente interesante su crítica al libro de Algebra Lineal y Geometría Elemental de Dieudonné, publicado en el American Mathematical Monthly (Freudenthal, 1967). Fue fundador de una nueva orientación en la Educación Matemática: la enseñanza de la matemática realista, que ha ido ganando gran influencia internacional, en particular a partir de la aplicación en muchos países del Programme for International Student Assessment (PISA), que toma aspectos fundamentales de sus planteamientos. Fue fundador en 1968 de la primera revista internacional sobre investigación en Educación Matemática: *Educational Studies in Mathematics*, actualmente publicada por la prestigiosa editorial Springer y considerada en la base de datos del Institute for Scientific Information (ISI); también fue gestor del primer congreso mundial sobre educación matemática (International Congress on Mathematical Education – ICME) que se realizó en Lyon en 1969. En Holanda funciona el Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education que continúa el trabajo que inició este distinguido matemático y el ICMI ha creado la *Medalla Hans Freudenthal*, que – de manera similar a la Medalla Félix Klein – desde el 2003 se otorga bienalmente a los investigadores en Educación Matemática que destacan de manera especial por sus aportes en este campo del conocimiento.

Jean Dieudonné (1906 –1992)

Famoso matemático francés, integrante del grupo Bourbaki, con grandes contribuciones a la matemática en el álgebra abstracta, la topología y el análisis funcional. Por su reconocido prestigio como matemático y sus inquietudes por la enseñanza de las matemáticas, fue uno de los conferencistas más influyentes en el célebre Seminario de Royaumont en 1959, presidido por Marshal Stone, otro distinguido matemático norteamericano, que en esa época era presidente del ICMI. El seminario, que reunió a representantes de 18 países, se realizó a iniciativa de la

Organisation for European Economic Cooperation (OEEC)[2] con el propósito de compartir reflexiones sobre la matemática en el nivel escolar. No hay mucha información documentada sobre este seminario, pero ciertamente marcó un hito para la enseñanza de las matemáticas, al recomendar el énfasis en la "nueva matemática" estructurada y formal. En la página web del ICMI[3], se resume: "The most influential talk is that of Jean Dieudonné, whose proposals for the reform of the teaching of mathematics are explicitly inspired by the Bourbaki school". Sus propuestas suscitaron cambios en el mundo occidental en la enseñanza de las matemáticas y también críticas de otros matemáticos, entre los que destaca René Thom.

René Thom (1923 – 2002)

Otro famoso matemático francés, muy conocido por su Teoría de Catástrofes y sus aportes en la geometría diferencial, premiado en 1958 con la Medalla Fields (considerada el "Premio Nobel en Matemáticas"). Preocupado por la tendencia a enseñar "matemáticas modernas" en la década de los 60, con énfasis en lo formal y en la teoría de conjuntos, publicó en 1970, en *L'Age de la Science,* su famoso artículo *Las matemáticas modernas: ¿un error pedagógico y filosófico?* En él, entre otras valiosas reflexiones, nos dice:

> La axiomatización es un trabajo de especialistas, y su lugar no está ni en la enseñanza secundaria ni en la universidad, salvo en profesionales que quieran especializarse en el estudio de los fundamentos. El único nivel que tiene importancia es el de la validez intuitiva local del razonamiento.

En relación a ese artículo, es interesante leer el artículo de Dieudonné (1974) en el que se encuentra párrafos específicos para la enseñanza universitaria, como:

> Tengo la impresión de que (Thom) está pensando en la idea de un sistema axiomático que partiría de la teoría de conjuntos para ir "construyendo" sucesivamente los enteros, racionales y reales. Si es así, debo decir que estoy totalmente de acuerdo con él y con sus afirmaciones respecto a la importancia desmedida que se ha dado a esas "reconstrucciones" del continuo, que han podido tener su utilidad desde el punto de vista histórico.

Y para la enseñanza secundaria:

> Mi opinión es que no debe introducirse ningún sistema axiomático antes de los quince años. Esto no quiere decir que se deba evitar los intentos de deducción lógica, sino todo lo contrario, no hay que perder ninguna oportunidad de convencer a los alumnos del enorme poder de este proceso mental.
>
> Me pregunto si Thom puede realmente creer que el álgebra lineal en un espacio de dos dimensiones es algo "abstracto", lejos del alcance de un estudiante de quince años, cuando resulta que todas las nociones básicas pueden hacerse visibles en la pizarra y que todos los axiomas tienen un significado geométrico inmediato.

[2] Actualmente es la Organization for Economic Co-operation and Development (OECD)
[3] http://www.icmihistory.unito.it/timeline.php

Miguel de Guzmán (1936 – 2004)

Matemático español, que luego de obtener su doctorado en la Universidad de Chicago, con una tesis sobre análisis armónico, regresó a España y desde su cátedra en la Universidad Complutense de Madrid desempeñó un papel crucial para el desarrollo de la matemática y su enseñanza, en España y en los países de habla hispana, tanto por su calidad profesional como por su calidad humana. Escribió muchos libros y fue Presidente del ICMI en dos períodos consecutivos, de 1991 a 1998. A continuación reproducimos un párrafo dedicado a él en la página web del ICMI[4],

> According to Spanish mathematicians, Miguel de Guzmán was a key figure in Spanish mathematics of the twentieth century. Eugenio Hernández and Fernando Soria wrote in the ICMI Bulletin (no. 54, June 2004) that Miguel de Guzmán was a central figure in the development of harmonic analysis in Spain and (…) captivated the enthusiasm of several generations of mathematicians. He was an extraordinary teacher and communicator and his ideas in mathematical education have had a profound influence on the teaching of mathematics in Spain and in the world. His books, translated into several languages, have made accessible to a large audience that extraordinary activity of the human spirit known as Mathematics.

En la revista *Números*, Sierra (2004) recoge varios de las interesantes reflexiones y propuestas de Miguel de Guzmán en torno a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo:

> La educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas características de la escuela en la cual se entronca.
> Esto supone continuo apoyo en la intuición y en lo real.
> Los procesos del pensamiento matemático deben ser lo central de la educación matemática. (p. 90)
> La matemática es sobre todo saber hacer, es una ciencia en la que el método prima sobre el contenido. Hay que conceder una gran importancia al estudio de las cuestiones que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas. (p. 91)

La lista de matemáticos influyentes en la educación matemática puede ser muy larga y difícilmente ser exhaustiva, pues en cada país hubo y hay matemáticos que preocupados por la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina han hecho y hacen aportes significativos. En particular, en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas en el Perú, es imperativo mencionar a los matemáticos peruanos José Tola, César Carranza y César Camacho y al matemático brasileño Elon Lages Lima.

4. Educación Matemática.

Reflexiones como las anotadas en la sección anterior, profundizadas y discutidas en ámbitos universitarios, en institutos de investigación y en foros nacionales e internacionales y complementadas con los aportes tanto desde otros campos del conocimiento - la psicología, la filosofía y la sociología - como con experiencias

[4] http://www.icmihistory.unito.it/portrait/guzman.php

desarrolladas por profesores y matemáticos con gran vocación docente, fueron constituyendo lo que actualmente es ya una joven disciplina científica: la educación matemática[5], como lo sostienen – entre otros autores – Josep Gascón (1998), en su artículo *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*; y más recientemente, y de manera más amplia, Juan D. Godino (2010) en los seis capítulos muy bien documentados de su libro *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Ellos recogen y amplían los trabajos de Higginson (1980) – que sostiene que la matemática, la psicología, la sociología y la filosofía son las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática como disciplina científica – y de Steiner (1985), que sostiene que la didáctica de las matemáticas debe considerarse como una disciplina científica y como un sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. Así, la enseñanza de la matemática es mucho más que un arte, como se consideraba antiguamente y el aprendizaje no es solo un proceso psico-cognitivo. La didáctica de la matemática deja de ser meramente normativa y se desarrolla en el marco de la epistemología experimental.

En la constitución de esta disciplina científica merece mención especial el trabajo de Guy Brousseau, profesor francés que con gran vocación por la enseñanza de las matemáticas reflexionó mucho sobre sus experiencias de enseñanza de la matemática elemental y profundizó sus conocimientos de matemáticas hasta obtener su Doctorado de Estado. En 1968 propuso la creación de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) y en 1970 hizo pública su Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que marca un hito histórico en la didáctica de la matemática como disciplina científica.

Actualmente, hay muchos enfoques teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas entre los cuales están la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), desarrollada por Yves Chevallard; la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), desarrollada por Raymond Duval; el enfoque de Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE), desarrollado por Ed Duvinsky; el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan D. Godino, Vicenç Font, Carmen Batanero y otros investigadores; el enfoque socioepistemológico, desarrollado por Ricardo Cantoral, Rosa M. Farfán y otros colaboradores; y las numerosas investigaciones sobre resolución de problemas, que se iniciaron con el ya mencionado matemático húngaro George Polya. Actualmente hay valiosos aportes de otros distinguidos matemáticos contemporáneos, entre los que destaca de manera particular Alan Schoenfeld, de la Universidad de Berkeley, que en el presente año ha recibido el premio Medalla Félix Klein, otorgado por el ICMI.

5. Retos para la enseñanza de las matemáticas

A continuación puntualizamos algunos retos para la enseñanza de las matemáticas, pensando en todos los niveles educativos y especialmente en la educación básica, que pueden ser útiles al elaborar agendas de trabajo e investigación en la educación matemática

[5] En el mundo anglosajón y en Latinoamérica se usa esta expresión. En Alemania, Francia, Italia y España se usa “didáctica de la matemática”. Se pueden usar como sinónimas.

i) *Enseñar la matemática vinculándola con la realidad*

- Con situaciones de la vida diaria
- Con problemas que se dan en otros campos del conocimiento: Ingenierías, Física, Economía, Ciencias sociales, Arquitectura, Psicología, Biología, Arte, etc.
- Con la historia de la matemática y del país
- Con los problemas nacionales
- Con las necesidades que se presentan en una sociedad globalizada, con cambios tecnológicos cada vez más rápidos.

ii) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática con visión de futuro:*

- Desarrollar capacidades de autoaprendizaje
- Desarrollar capacidades de investigación
    - Identificar, resolver y crear problemas
    - Entender y crear demostraciones
    - Resolver y crear problemas usando las TIC.
- Desarrollar capacidades para construir modelos y manejar situaciones complejas
- Desarrollar capacidades para predecir, seleccionando información y usándola adecuadamente.

iii) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática educando en la verdad y la belleza.*

iv) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática que permitan la recreación inteligente.*

v) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática con métodos activos y teniendo en cuenta las nuevas formas de aprendizaje de los niños y jóvenes en el nuevo tipo de sociedad que vivimos.*

Todo esto conlleva retos tanto en la formación y capacitación de profesores de matemáticas como en la revisión de los planes de estudio y en el ejercicio docente propiamente dicho.

5.1 En relación al curriculum de la educación básica. Algunas propuestas:

a) Estimular el cálculo mental y la estimación.

b) Orientar el uso adecuado de calculadoras y software matemático (en particular de geometría dinámica).

c) Desarrollar actividades que hagan intuir y manejar la aritmética modular y otros temas de la matemática discreta. (Elementos de teoría de grafos y de teoría de juegos)

d) Desarrollar actividades que hagan comprender la proporcionalidad directa y su vinculación con las funciones lineales.

e) Presentar diversas situaciones que no correspondan a un “comportamiento lineal” y vincularlas con las funciones cuadráticas, las exponenciales, las logarítmicas o las trigonométricas.

f) Desarrollar actividades que orienten el uso adecuado de criterios estadísticos y probabilísticos para el análisis de la información y para la toma de decisiones.

g) Desarrollar actividades que permitan desarrollar la intuición para la optimización (“*intuición optimizadora*”)

h) Prestar más atención a la geometría, bi y tri dimensional. Presentar situaciones de la geometría en la esfera.

i) Presentar situaciones lúdicas que permitan crear problemas, construir modelos y hacer demostraciones a partir del descubrimiento de regularidades y la búsqueda de generalizaciones.

5.2 En relación a la formación académica del profesor de matemáticas

Es claro que será imposible avanzar hacia la formación adecuada del ciudadano de la sociedad de la “tercera revolución industrial” si no contamos con profesores adecuadamente formados. Este es un tema muy amplio, y acá solo hacemos algunas puntualizaciones a tener en cuenta.

Urge una revisión profunda de los planes de formación de los profesores de educación básica. Es particularmente importante – y constituyen un gran capítulo aparte – la formación matemática de los profesores de educación inicial y primaria, pues son ellos los que inician la educación de los futuros ciudadanos. Su pensamiento científico y su cultivo o rechazo a las matemáticas estarán fuertemente influenciados por sus experiencias en estos niveles educativos. No nos detendremos en este caso específico, pero mucho de lo que decimos a continuación, orientado principalmente a profesores de secundaria y superior, debe tenerse en cuenta también para los profesores de educación inicial y primaria.

a) *Formación matemática*

Un criterio básico es que el profesor debe tener conocimientos más amplios y profundos que los que va a enseñar, pero es importante destacar que esto es necesario pero no suficiente para estimular el aprendizaje y el cultivo de tales conocimientos. En ese sentido, es fundamental que el profesor de matemáticas tenga conocimientos avanzados de análisis, álgebra, geometría, estadística y probabilidades y que éstos sean adquiridos con métodos activos, con uso de recursos tecnológicos, tomando conciencia de los contextos históricos y reflexionando aspectos didácticos de investigaciones publicadas en revistas especializadas. La formación matemática de los profesores debe desarrollarse brindándoles experiencias de aprendizaje que les sirvan de referentes para su posterior desarrollo profesional como orientadores del aprendizaje de sus alumnos. No se trata solo de presentarles rigurosamente contenidos matemáticos, sino de estimular la comprensión intuitiva y formal de los mismos, partiendo de situaciones problemáticas a ser resueltas individualmente o en grupos, adecuadamente preparadas, de modo que estimulen su creatividad, su intuición, su competencia de crear problemas, el manejo formal de conceptos y el uso de recursos tecnológicos.

b) *Formación en didáctica de las matemáticas*

Una aclaración importante es que la formación en didáctica de las matemáticas no significa la adquisición de un conjunto de recetas para "enseñar bien" los contenidos matemáticos de un plan de estudios.

La formación de los futuros profesores y la formación permanente de los profesores en ejercicio, debe incluir la reflexión profunda de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a la luz de algunos de los enfoques teóricos ya mencionados, considerar las particularidades de los educandos y sus contextos socioculturales y brindar experiencias en la resolución de problemas, no como un conjunto de técnicas para adquirir rapidez en la obtención de resultados, sino teniendo en cuenta que resolver problemas es una forma de hacer matemática; es decir, analizar, relacionar lógicamente, verificar, conjeturar, demostrar o rechazar conjeturas, buscar diversas posibilidades, examinar casos particulares, pensar en generalizaciones, y desarrollar la intuición matemática y la creatividad. Un estudio profundo que toca estos temas, especialmente sobre el rol de la intuición en la resolución de problemas de optimización desde los primeros niveles de la educación básica, puede encontrarse en Malaspina & Font (2010) y Malaspina (2011a).

La resolución de problemas debe tratarse integradamente con la identificación y con la creación de problemas, pues su importancia es vital no solo en el campo de la didáctica de las matemáticas sino en la matemática misma. Así lo consideran destacados investigadores matemáticos, entre ellos Jean Dieudonné, que nos dice "La historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico" (Citado en Kleiner, 1986, p. 31). Existen numerosos ejemplos de problemas que han hecho historia en las matemáticas cuyo uso adecuado puede aportar mucho a su enseñanza y aprendizaje. Baste considerar los tres famosos problemas griegos – la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo – que se plantearon aproximadamente en el siglo V a.C. Es interesante revisar cómo durante muchos siglos, destacados matemáticos, entre los cuales están Newton y Gauss, trabajaron buscando una solución al problema de la duplicación del cubo y recién en el siglo XIX, Galois, con una teoría creada por él, demostró rigurosamente su imposibilidad.

Otro aspecto sustancial en la formación en didáctica de las matemáticas es el uso permanente que deben hacer las instituciones dedicadas a la formación y capacitación de profesores de la información sobre educación matemática en general en publicaciones especializadas y en las páginas web de foros nacionales e internacionales. A continuación damos una relación de algunas de ellas, particularmente importantes, que sugerimos sean consultadas tanto por instituciones educativas como por profesores en formación y en servicio.

- RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) http://www.clame.org.mx/relime.htm

- UNION (Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática) http://www.fisem.org/web/union/
- UNO (Revista de didáctica de las matemáticas) http://uno.grao.com/
- NÚMEROS (Revista de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas). http://www.sinewton.org/numeros/
- SUMA (Revista de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) *www.revistasuma.es*
- *Educational Studies in Mathematics*

  http://www.springer.com/education+%26+language/mathematics+education/journal/10649
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) http://www.seiem.es/.
- Psychology of Mathematics Education (PME), http://igpme.org/
- Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/
- International Comission on Mathematical Instruction http://www.mathunion.org/icmi/home/
- National Council of Teachers of Mathematics http://standards.nctm.org/

5.3 En relación a la resolución de problemas en las clases

La resolución de problemas, como ya lo hemos dicho, es esencial en el aprendizaje de las matemáticas y el reto es lograr que en las clases sean ocasiones para que los alumnos disfruten de la belleza de las matemáticas, desarrollen su intuición y pensamiento científicos y tengan experiencias de investigación. En ese sentido, puntualizamos algunas pautas para la resolución de problemas:

- Comprender el problema, identificar la dificultad.
- Conjeturar una solución o un camino para llegar a la solución.
- Organizar la información.
- Experimentar, buscar regularidades.
- Hacer tanteos inteligentes
- Establecer relaciones lógicas.
- Aplicar conocimientos matemáticos.
- Justificar las conclusiones intermedias y finales.
- Encontrar sentido a lo que se desarrolle y a lo que se encuentre, en el contexto del problema.
- Verificar la solución encontrada.
- Examinar otros caminos de solución.
- Modificar el problema para examinar otros casos (¿qué pasaría si ….?) Modificar datos, cambiar la dificultad, considerar casos particulares, pensar en generalizaciones, etc.

Intencionalmente no hemos usado letras ni números en estas pautas porque no son un conjunto de pasos ordenados, uno luego de otro, que deben seguirse para resolver un problema. Parece obvio que lo primero será comprender el problema; sin embargo, por ejemplo, muchas veces la comprensión completa puede obtenerse luego de algunas experimentaciones y del rechazo de algunas conjeturas. Es un reto para los profesores de matemáticas preparar cuidadosamente problemas adecuados para sus clases, considerando actividades individuales y actividades en grupo, partiendo de una situación inicial y proponiendo cuestiones de dificultad graduada en torno a tal situación. A continuación damos detalles de dos problemas usados en experiencias didácticas:

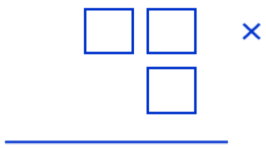
Problema 1:

> *Hallar el mayor producto que se puede obtener multiplicando un número de dos dígitos por otro de un dígito, si tales dígitos deben ser diferentes y pertenecientes al conjunto* {2; 7; 5}

Es un problema sencillo, que propuesto de manera más atractiva ha sido experimentado con niños de cuarto grado de primaria. Veamos una forma de proponerlo considerando una situación inicial y actividades individuales y grupales, que fue usada con alumnos de educación básica, con universitarios y con profesores (con ligeras variaciones, según los casos):

Situación:

> *María escribió en la pizarra los dígitos 2, 7 y 5. La profesora le pide a Pedro que escriba estos dígitos en las siguientes casillas, en cualquier orden, pero sin repeticiones, y que haga la multiplicación indicada.*



Actividades individuales

a) *¿Es posible que Pedro escriba los dígitos de modo que el producto que obtenga sea mayor que 140? En caso afirmativo mostrar y en caso negativo explicar.*

b) *¿Cuántos números pares podría obtener Pedro como resultado de las multiplicaciones, según las diversas maneras de ubicar los dígitos en las casillas?*

Actividades grupales

A. *Comparar y examinar los resultados obtenidos en las actividades individuales.*

B. *¿Cuál es el mayor número que se puede obtener como resultado de una de las multiplicaciones posibles?*

C. *¿Cómo estar seguros de la respuesta a la pregunta anterior?*

D. *Que uno de los integrantes del grupo dé tres dígitos diferentes cualesquiera, todos mayores que cero. Escribir tales dígitos en las casillas, de modo que se obtenga como producto el mayor número posible.*

E. *Encontrar y explicar una regla que permita hacer la actividad anterior sin necesidad de hacer multiplicaciones de tanteo.*

F. *Inventar un problema inspirado en la situación dada.*

Las actividades individuales han sido dadas para familiarizar a cada alumno con la situación dada; la actividad grupal A incentiva la comunicación, el intercambio de resultados individuales, el aprendizaje en grupo y la mayor comprensión de los problemas afrontados individualmente. La actividad grupal B es otra forma de enunciar el problema inicial. Las actividades C, D y E estimulan la búsqueda de una justificación, la experimentación y la generalización. La actividad F estimula la creación de problemas.

Un análisis más detenido de una experiencia didáctica con este problema, en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, puede encontrarse en el número 11 de UNIÓN (Malaspina, 2007). En el número 18 de UNIÓN (Malaspina, 2009a) se analiza una experiencia didáctica con alumnos de secundaria, considerando factores de dos dígitos.

Problema 2

> *Expresa el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

Así formulado, es un problema de programación lineal entera con 5 variables. Lo creamos con el propósito de mostrar que el usual método gráfico para resolver problemas de programación lineal no es aplicable y que es importante ir más allá de los algoritmos, sin reducirse a rutinas, y buscando el desarrollo de la intuición optimizadora. Convenientemente adaptado y en un contexto lúdico, fue resuelto por niños de segundo grado de primaria de Perú y de España. La experiencia didáctica fue expuesta en la 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 34) y está publicada en las actas (Lacasta, Malaspina y Wilhelmi, 2010). En el número 19 de UNIÓN (Malaspina, 2009b) se analizan aspectos didácticos y matemáticos en torno a este problema.

6. Creación de problemas

En los diversos enfoques teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se da – con justa razón – especial importancia a la resolución de problemas. Ciertamente, un objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes sepan resolver problemas; y no solo los que figuren en los textos o en las evaluaciones de matemáticas, sino los que se les presenten en la vida cotidiana durante su vida estudiantil y luego en su vida ciudadana y en el ejercicio técnico o profesional. Evidentemente, es muy importante conocer técnicas y seguir ciertas pautas para resolver problemas; sin embargo, en la vida cotidiana y en el ejercicio técnico o profesional, los problemas no aparecen ya redactados como en los textos. Es fundamental entonces – con mayor razón en el contexto global que describimos en el primer apartado – saber identificar el problema como consecuencia de seleccionar la información pertinente y de plantearse preguntas adecuadas. Esta es una capacidad que no es estimulada en la vida estudiantil porque, en el mejor de los casos, el énfasis en los cursos de matemáticas está en la resolución de problemas y no en la creación de problemas. Más aún, se pierden muchas ocasiones de fortalecer el aprendizaje de los alumnos trabajando con problemas contextualizados en su propio medio y con problemas que resulten de iniciativas o preguntas de los propios alumnos.

Surgen entonces como interrogantes naturales: ¿cómo crear, estimular y desarrollar en los profesores la competencia de crear problemas de matemáticas?, ¿qué aportes hay en los enfoques teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas acerca de la creación de problemas?, ¿qué investigaciones se han hecho sobre la creación de problemas en el campo de la educación matemática?, ¿qué pautas pueden orientar en la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas?

Es, pues, un reto para los investigadores en educación matemática desarrollar investigaciones para responder a estas interrogantes y complementar así las numerosas ya existentes sobre resolución de problemas. En los números 28, 29, 30 y 31 de UNIÓN, en *El Rincón de los Problemas*, (Malaspina, 2011b, 2012) se exponen algunas experiencias desarrolladas en el Perú al respecto.

Queda hecha la invitación a que investiguemos más sobre la creación de problemas de matemáticas que estimulen el aprendizaje de esta disciplina y concluimos con el siguiente párrafo de Einstein e Insfeld (1938):

> La formulación de un problema es a menudo más importante que su solución, que puede ser simplemente un asunto de habilidades matemáticas o experimentales. Formularse nuevas preguntas, nuevas posibilidades, considerar preguntas antiguas desde una perspectiva nueva, requiere imaginación creativa y marca un avance real en la ciencia. (p. 92)

Bibliografía

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (2007) *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final-Proyecto Tuning-América Latina*. Universidad de Deusto; Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=22&order=dmdate_published&ascdesc=DESC

Boas, R.P. (1990). *George Pólya. A Biographical Memoir*. Washington D.C.: National Academy of Sciences

Bunge, M. (2003) Entrevista de Martha Paz. Disponible en. http://mariobunge.com.ar/entrevistas/lo-importante-es-el-conocimiento-no-la-informacion

Castells, M. (1997). *La era de la información. Economía, sociedad y cultura. Vol. 1. La Sociedad Red.* Madrid: Alianza.

Corral, N, (2010). Félix Klein. La enseñanza de las matemáticas y el software libre. Recuperado de http://www.ciem.unican.es/encuentros/klein/sites/default/files/archivos/corral.pdf

Corry, L. (2002). David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometría, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *9 (1)* 27-44.

Corry, L. (2004). *David Hilbert and the Axiomatization of Physics. From 'Grundlagen der Geometrie' to 'Grundlagen der Physik'*. Dordrecht: Kluwer.

Dieudonné, J. (1974). Devons-nous enseigner les mathématiques modernes? . *Bulletin de l' Association de Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Publique. 292*, pp. 69 – 79.

Einstein, A. & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York: Simon and Schuster.

Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modern des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique 9.* pp. 28 – 44.

Freudenthal, H. (1967). Review of Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie Élémentaire. *American Mathematical Monthly 74/6,* pp. 744–748

Gascón, J. (1998) Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol. 18/1*, nº 52, pp. 7-33

Godino, J.D. (2010) *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Disponible en:
http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *Vol. 1*, n.2 pp. 3-7.

Himanen, P. (2001). *The Hacker Ethic.* New York: Random House.

Kleiner (1986): Famous problems in mathematics: An outline of a course. *For the learning of mathematics*, 6 (1)

Lacasta, E., Malaspina, U. & Wilhelmi, M. (2010*).* Optimization through measurement situations in Grade 2. *En Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte, Brasil. Vol 3, pp. 201- 208.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 11, pp. 197 – 204. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/11/Union_011_018.pdf

Malaspina, U. (2009a). Producto máximo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 18, pp. 129 – 134. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/18/Union_018_014.pdf

Malaspina, U. (2009b). ¿Programación lineal en primaria? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 19, pp. 157 – 161. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/19/Union_019_018.pdf

Malaspina, U. & Font, V.(2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 75, No.1, pp.107–130.

Malaspina, U. (2011a) *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG -Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2011b). Sobre creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 28*, Diciembre, pp. 159 – 164. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/28/archivo_16_volumen28.pdf

Malaspina, U. (2012a). Hacia la creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 29*, Marzo, pp. 155 – 160. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo13.pdf

Malaspina, U. (2012b). Resolviendo y creando problemas con profesores de educación básica. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 30*, Junio, pp. 151 – 158. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/30/Archivo_14_de_volumen_30.pdf

Malaspina, U. (2012c). Creando problemas para la educación primaria. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 31*, Setiembre, pp. 131 – 137. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/31/archivo_13_de_volumen_31.pdf

Perero, M. (1994) *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Polya, G. (1945) *How to solve it*. Princeton University Press.

Sierra, M. (2004). Pensamientos de Miguel de Guzmán acerca de la Educación Matemática. *Números, Vol 59*, pp. 89 – 93.

Springer, T. & Dalen, D. (Eds.) (2009) *Hans Freudenthal, Selecta*. Zürich: European Mathematical Society Publishing House

Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics,* Vol 5. n. 2, pp. 11-17.

Thom, R. (1970). Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique? *L'Age de la Science 3*, pp. 225 – 236.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 29-43
ISSN: 1815-0640

Incidencia de la invención y reconstrucción de problemas en la competencia matemática

José Antonio Fernández Bravo y Juan Jesús Barbarán Sánchez

Resumen

En este artículo se presenta una investigación realizada con alumnos de 4º de Educación Primaria en la que se analiza la relación entre la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas y, el desarrollo de las siguientes capacidades: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas. Las conclusiones muestran la necesidad de crear en el aula una atmósfera que impulse la invención, el descubrimiento, la búsqueda y la investigación, para que nuestro alumnado sea competente en Matemáticas. Sugerimos que se incluya en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria el uso de programas basados en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas.

Abstract

The paper presents an investigation made with students of 4th grade of Primary Education in which we analyze the relation between the invention and reconstruction of problematic situations and the development of the following abilities: thinking mathematically, posing and solving mathematical problems, reasoning mathematically, representing mathematical entities, and, communicating in, with, and about mathematics. The conclusions show the necessity of creating an atmosphere that encourages the invention, discovery, search and research in the classroom, so that our students are competent in Mathematics. We suggest including the use of programs based in the invention and reconstruction of problematic situations in the curriculum of Mathematics of Primary Education.

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma investigação realizada com alunos do 4º de Educação Primaria na que se analisa a relação entre a invenção e reconstrução de situações problemáticas e, o desenvolvimento das seguintes capacidades: pensar matematicamente, formular e resolver problemas matemáticos, argumentam matematicamente , representam entidades matemáticas, e se comunicar com e sobre a matemática. Os resultados mostram a necessidade de criar uma atmosfera de sala de aula que estimula a invenção, descoberta, busca e pesquisa, para que nossos alunos são competentes em Matemática. Sugerimos incluindo no currículo de Matemática de Ensino Fundamental, utilizando programas baseados na invenção e reconstrução de situações problemáticas.

1. Introducción

La resolución de problemas ha sido y sigue siendo una línea de investigación fructífera en la Didáctica de la Matemática (Santos-Trigo, 2007; Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007) como podemos comprobar en el último Congreso Internacional de

Educación Matemática (ICME-2008). El núcleo central de las matemáticas escolares debe estar formado por la resolución de problemas (NCTM, 1980). Sin embargo, no es raro que cualquiera de nuestros alumnos nos diga que "resolver un problema se le da mal". Muchas son las investigaciones que se han llevado a cabo sobre las dificultades que tienen alumnos de distintas edades para resolver problemas matemáticos (Juidías y Rodríguez, 2007; Lesh y Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1985; Selden, Selden y Mason, 1994; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000). Hiebert (2003) concluye que este problema de índole internacional se debe a las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos en matemáticas. En algunas ocasiones, el alumno no entiende el vocabulario específico del problema (Bernardo, 1999), o no reconoce la/s operación/es necesarias para resolverlo (English, 1998) o no sabe interpretar la respuesta en el contexto expuesto en el mismo (Verschaffel, De Corte y Vierstraete, 1999). Dreyfus (1991) considera que la mayoría de los alumnos aprenden una gran cantidad de procedimientos estandarizados en sus clases de matemáticas pero no a trabajar matemáticamente. El bajo rendimiento de nuestros alumnos de Educación Primaria en la resolución de problemas matemáticos continúa siendo una preocupación para las escuelas, instituciones e investigación (Tárraga, 2008).

Nuestro interés se centra en medir el grado de desarrollo de la competencia matemática de alumnos de 4º de Educación Primaria. Uno de los principales objetivos que se persiguen en la asignatura de Matemáticas es que nuestros alumnos sean matemáticamente competentes. El desarrollo de la competencia matemática debe iniciarse a edades tempranas (Cardoso y Cerecedo, 2008) ya que, de lo contrario, el alumno acarreará un desfase que le costará superar. Como afirma Goñi (2008), para desarrollar la competencia matemática de nuestros alumnos debemos mejorar su capacidad de resolver problemas. En vez de enseñar a nuestros alumnos a que resuelvan problemas de forma mecánica, deberíamos enseñarles a pensar matemáticamente para que sean los propios problemas los que creen en ellos la necesidad de analizar la extensión y limitaciones de los conceptos matemáticos que manejan. Consideramos interesante estudiar la relación que existe entre la forma en la que viene planteado un problema (completa o incompleta) y la capacidad del alumno para resolverlo.

Vigotsky (1973) reflejó lo positivo que es para los escolares inventar situaciones a partir de dibujos de objetos en una hoja de papel. Consideramos interesante conocer si la invención de situaciones problemáticas facilita en el alumno la capacidad de entender textos escritos y visuales sobre cuestiones de contenido matemático, y la de expresarse de forma escrita sobre temas matemáticos.

Para medir el grado de desarrollo de la competencia matemática de los alumnos de 4º de Educación Primaria hemos utilizado la prueba de diagnóstico propuesta por el Ministerio de Educación en el año 2010 para el citado nivel. En los últimos años se ha producido un notable aumento de los estudios realizados en torno a la competencia matemática (Fernández Bravo, Castillo y Barbarán, 2010; Murillo y Marcos, 2009; Roig y Llinares, 2006) a los que hay que añadir los llevados a cabo por instituciones educativas de ámbito internacional (OECD, 2010), y por el Ministerio de Educación junto con las comunidades autónomas (según establecen los artículos 21 y 29 de la Ley Orgánica de Educación), lo que demuestra el interés existente sobre este tema en la Educación Matemática.

Los resultados que obtienen nuestros alumnos en las pruebas de diagnóstico (que vienen establecidas en la Ley Orgánica 2/2002, de 3 de mayo, en sus artículos 21 y 29) en lo que se refiere a la competencia matemática parecen no ser satisfactorios en un elevado porcentaje. Para atender a la problemática existente sobre el desarrollo de la competencia matemática en alumnos que cursan enseñanza obligatoria, es necesario construir propuestas sobre metodologías didácticas alternativas que posibiliten una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

En la legislación educativa de numerosos países se ha incluido el enfoque por competencias en sus currículos vigentes (Dinamarca, Portugal, Paraguay, Perú, Canadá y España). Merece especial mención por su carácter pionero, la experiencia llevada a cabo en Dinamarca, liderada por Niss (1999) a través del proyecto KOM (*Kompetencer og matematikkloering* que se traduce como *Competencias y el aprendizaje de las matemáticas*) a partir del que se caracterizó el currículo de matemáticas en términos de competencias desde la escuela hasta la universidad.

Sin embargo, parece que siguiendo el programa tradicional[1] los resultados obtenidos no son los deseables. En este trabajo nos planteamos también conocer si la invención y reconstrucción de problemas contribuye al desarrollo de ciertas competencias matemáticas específicas introducidas por Niss (1999), cuya descripción de capacidades es la que se ha usado para asignar variables a cada una de las preguntas de la prueba de diagnóstico antes citada.

2. Marco teórico

"*Un problema se considera como tal para un sujeto cualquiera cuando este sujeto es consciente de lo que hay que hacer, sin saber, en principio, cómo hacerlo".* (Fernández Bravo, 2010, p. 27) En esta investigación se ha usado el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas de Fernández Bravo (Fernández Bravo, 2010) basado en una metodología constructivista que se sustenta en el paradigma ecológico de Doyle (Doyle, 1977, 1979, 1986a, 1986b, 1995; Doyle y Carter, 1984), la teoría de la asimilación de Ausubel (Ausubel, 1976) y en la teoría de la elaboración de Merrill y Reigeluth (Reigeluth y Darwazeh, 1982; Reigeluth, Merrill y Bunderson, 1978; Reigeluth, Merrill, Wilson y Spiller, 1978). El programa consta de un conjunto de 49 modelos, con situaciones problemáticas que permiten el protagonismo directo del alumno, al inventar y reconstruir el problema matemático. Presentamos a continuación los modelos utilizados en esta investigación:

<u>Situaciones sin número</u>. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.

<u>Informaciones de las que se puede deducir algo.</u> Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios,... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y

[1] Entendemos por programa tradicional en la resolución de problemas matemáticos, tanto la realización de estas actividades de forma rutinaria, cuyo objetivo es llegar a la solución esperada, como aquellas actividades que se presentan de forma completa (Enunciado-Pregunta) sin posibilidad de construcción, y cuya resolución depende de la imposición de lugar en la secuenciación de un tema; sin hablar de la verificación del problema que consiste en la aprobación, por el profesor, de la validez de la estrategia.

clasificarlas en: lógicas -aquellas que son verdaderas o falsas para todos- y no lógicas; así como, posibles -muy posibles, poco posibles- e imposibles.

Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo.

Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.

Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.

Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.

Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.

Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.

Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas.

Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta tiene una solución dada.

Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema.

Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente.

Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema.

Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto.

Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada.

Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.

Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema.

Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.

Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda.

Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención.

Inventar un problema con: un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución.

Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada.

Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones.

Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias,... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio,... para recoger la información necesaria. Es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor -adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno-, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve,...

Relación entre lógica y matemática. Proponer situaciones en las que se manifieste de forma relevante la necesidad de pasar por un pensamiento lógico para llegar a un pensamiento matemático.

Estos modelos se agrupan en seis clases de situaciones procedimentales que reciben, en el programa, el nombre de metamodelos. Un metamodelo se define como *"el conjunto de clases de modelos de situaciones problemáticas distintas, presentadas a la actividad del alumno y capaces de generar ideas válidas para la resolución de problemas matemáticos".* (Fernández Bravo, 2010, p. 59)

La competencia matemática ha sido definida por diferentes autores e instituciones (Niss, 2002; OCDE, 2006; Escamilla, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008). Niss afirma que la competencia matemática *"es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra matemáticos, en los que éstas juegan o podrían jugar un papel"* (Niss, 2002, p. 7). Destacamos en esta definición su no alusión a contenidos. Niss (1999) identificó ocho competencias que dividió en dos grupos:

- Las referidas a la habilidad de preguntar y contestar las preguntas en y con las matemáticas, que son: pensar matemáticamente, modelizar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, y, argumentar matemáticamente.

Tabla 1: Capacidades asociadas al segundo grupo de competencias matemáticas específicas (Adaptado de Niss (2002))

Competencias matemáticas específicas	Capacidades
Pensar matemáticamente	● Proponer cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces?) y conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a las cuestiones anteriores. ● Entender la extensión y las limitaciones de los conceptos matemáticos y saber utilizarlos. ● Ampliar la extensión de un concepto mediante la abstracción de sus propiedades, generalizando los resultados a un conjunto más amplio de objetos. ● Distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas ('si-entonces'), afirmaciones con cuantificadores, etc.).
Plantear y resolver problemas matemáticos	● Identificar, definir y plantear diferentes tipos de problemas matemáticos (teóricos, prácticos, de respuesta abierta, cerrados, etc.). ● Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos (teóricos, prácticos, de respuesta abierta, cerrados), planteados por otros o por uno mismo, a ser posible utilizando distintos procedimientos.
Modelizar matemáticamente	● Analizar los fundamentos y propiedades de modelos existentes. ● Traducir e interpretar los elementos del modelo en términos del mundo real. ● Diseñar modelos matemáticos: - Estructurar el campo o situación que va a modelarse. - Traducir la realidad a una estructura matemática (matematizar). - Validar el modelo. - Analizar y criticar el modelo. - Comunicar acerca del modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones). - Dirigir y controlar el proceso de modelización.
Argumentar matemáticamente	● Seguir y evaluar cadenas de argumentos. ● Conocer lo que es una demostración matemática y en qué difiere de otros tipos de razonamientos matemáticos. ● Descubrir las ideas básicas de una demostración. ● Diseñar argumentos matemáticos formales e informales y transformar los argumentos heurísticos en demostraciones válidas.

- Las que tienen que ver con la habilidad de utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas, y son: representar entidades matemáticas (objetos y situaciones), utilizar símbolos y formalismos matemáticos, comunicarse en, con y sobre las matemáticas, y, utilizar recursos y herramientas.

Tabla 2: Capacidades asociadas al segundo grupo de competencias matemáticas específicas (Adaptado de Niss (2002))

Competencias matemáticas específicas	Capacidades
Representar entidades matemáticas (objetos y situaciones)	● Entender, utilizar, decodificar e interpretar diferentes clases de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones. ● Utilizar y entender la relación entre diferentes representaciones de una misma entidad u objeto, incluido el conocimiento de sus restricciones y limitaciones. ● Escoger entre varias representaciones de acuerdo con la situación y el propósito.
Utilizar símbolos y formalismos matemáticos	● Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal de las matemáticas y entender su relación con el lenguaje natural. ● Entender la naturaleza y las reglas de los sistemas matemáticos (sintaxis y semántica). ● Traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico y formal. ● Trabajar con enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
Comunicarse en, con y sobre las matemáticas	● Entender textos escritos, visuales u orales de otros, en una variedad de registros lingüísticos, sobre temas de contenido matemático. ● Expresarse uno mismo de forma oral, visual o escrita sobre temas matemáticos, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica.
Utilizar recursos y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías)	● Conocer la existencia y propiedades de diversas herramientas y recursos para la actividad matemática, su alcance y sus limitaciones. ● Usar de modo reflexivo tales recursos y herramientas.

En nuestra investigación nos hemos centrado en estudiar las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente (PR), plantear y resolver problemas matemáticos (PRPM), argumentar matemáticamente (ARG), representar entidades matemáticas (REP) y comunicarse en, con y sobre las matemáticas (COM).

3. Objetivo

Nuestro estudio pretende analizar la incidencia que tiene la aplicación de un programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas (cuya metodología difiere a la del programa tradicional) con alumnos de 4º de Educación Primaria, y el desarrollo de su competencia matemática.

El objetivo de la investigación que se muestra en este artículo es verificar si los alumnos que trabajan con el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrollan las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas.

4. Metodología

La presente investigación pretende evaluar los efectos de un programa de intervención educativa sobre invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Este programa constituye la variable independiente. Este programa no se aplicó a la totalidad de los alumnos que formaron parte de la muestra sino únicamente a los que formaron parte de los grupos experimentales; el resto de los alumnos conformaron los grupos control.

En la presente investigación se ha seguido un diseño cuasi-experimental comparativo, sobre un total de seis grupos de alumnos de Educación Primaria (4 grupos control y 2 experimentales). La muestra estuvo formada por 155 alumnos de cuatro CEIP de titularidad pública de la Comunidad de Madrid de los cuales 103 alumnos formaban parte de los 4 grupos experimentales y 52 alumnos conformaban los 2 grupos control. La selección de los grupos experimentales se llevó a cabo al azar, al igual que la de los sujetos que formaron parte de los mismos.

El hecho de que los sujetos de cada curso pertenecieran a dos estados de control subraya la característica pretest-postest. El conocimiento de los efectos de la aplicación del programa se apoya en la preintervención-postintervención, más concretamente, se trata de un diseño: pretest-intervención-postest. Esto permite llevar a cabo una inferencia correcta de las relaciones entre las variables dependientes e independiente, cuando comparamos los resultados de los grupos experimentales y control. El equipo investigador lo formaron los profesores tutores de los grupos que tuvieron la condición de experimentales.

Se planteó la siguiente hipótesis de estudio: Si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 4º de Educación Primaria, entonces se desarrollan sus competencias matemáticas específicas siguientes: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas.

La variable independiente en esta investigación ha sido el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Las variables dependientes estudiadas fueron: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, representar entidades matemáticas, y, comunicarse en, con y sobre las matemáticas. Los valores de la variable dependiente vinieron dados por la puntuación obtenida por cada alumno en la prueba (que se obtuvo sumando las puntuaciones asignadas a cada ejercicio) que se describe más adelante.

Los ejercicios se puntuaron siguiendo el siguiente criterio:

0: Respuesta incorrecta o sin respuesta

1: Respuesta parcialmente correcta.

2: Respuesta correcta.

De esta forma, el rango de valores enteros de cada una de las variables dependientes estudiadas fue el siguiente:

Tabla 3. Recorrido de valores de las variables dependientes

Variable dependiente	Rango de valores enteros
PR	0-16
PRPM	0-24
ARG	0-6
REP	0-6
COM	0-14

Las variables intervinientes que podían, a priori, estar sistemáticamente relacionadas con la variable independiente, y que podían afectar de forma diferencial a los valores de las variables dependientes que se consideraron fueron las siguientes: metodología empleada, dificultad en el aprendizaje de la matemática, asistencia a clase y nivel socio-cultural de la familia

4.1. Prueba

Se decidió emplear una prueba que estuviese elaborada por expertos en la materia y que no se aplicara en la comunidad de Madrid donde se eligió la muestra para la investigación. La prueba utilizada para medir las variables dependientes fue la prueba de diagnóstico de la competencia matemática que utilizó el Ministerio de Educación en las pruebas de diagnóstico del año 2010 con alumnos de 4º de Educación Primaria en la Ciudad Autónoma de Ceuta. Consta de un total de 33 preguntas de las que 18 son de opción múltiple y el resto son abiertas o de respuesta construida semiabiertas. Las preguntas contenían situaciones problemáticas de tipo personal (relacionadas con el yo, la familia y el grupo de compañeros), educacionales (situaciones relacionadas con la vida escolar), públicas (situaciones de la comunidad local y la sociedad) y científicas (situaciones que se refieren a estructuras, símbolos y objetos matemáticos). Los bloques de contenido considerados en esta prueba son los que establece el currículo de enseñanzas mínimas para esta materia (MEC, 2006), díganse: números y operaciones, la medida: estimación y cálculo de magnitudes, geometría, tratamiento de la información, azar y probabilidad. Los alumnos dispusieron de 50 minutos para su realización. Para su aplicación se siguieron escrupulosamente todas las instrucciones dictadas por el Ministerio de Educación. A través de un meticuloso estudio preliminar llevado a cabo por todos los miembros del equipo investigador asesorados por expertos en la materia, se indicó cuál es la competencia matemática específica en el sentido de Niss (1999) que más se ha de usar en la resolución de cada pregunta (anexo I). En este proceso se utilizaron como criterio de selección las capacidades que aparecen en las tablas 1 y 2.

4.2. Procedimiento

La fase pretest tuvo lugar en el mes de septiembre de 2010 y en ella los alumnos de 4º de Educación Primaria cumplimentaron, en su aula habitual y de forma simultánea, la prueba para medir el grado de desarrollo de la competencia matemática antes descrita. La corrección de la prueba se llevó a cabo de forma consensuada entre todos los miembros del equipo investigador y ningún profesor participante corrigió las pruebas de sus alumnos. La fase de intervención se llevó a cabo durante un periodo de ocho meses dentro del curso escolar 2010/11 y en ella se aplicó el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas a los cuatro grupos experimentales. Los principales agentes fueron los alumnos de estos grupos y el equipo investigador. Este programa se desarrolló en sesiones semanales, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente. El horario fijado coincidió en todos los cursos. Las sesiones se estructuraron como "unidades de actuación cerradas". Cada unidad de actuación cerrada se compuso de cinco fases concretas con representación independiente, tanto por el contenido formal, como por el orden de aparición. Fueron las siguientes:

- Apertura: Se le planteó al alumno el desafío. Se le explicó con claridad, asegurándonos de que había comprendido perfectamente lo que había que hacer.

- Ejecución: Fase en la que se realizó la propuesta. La ejecución pudo realizarse: en gran grupo o grupo-clase, a partir de un diálogo en común; en parejas de alumnos; o, de forma individual.

- Contrastación: Fase en la que se contrastaron las ideas mediante el diálogo. Si la fase anterior se había realizado de forma individual, esta fase se llevó a cabo por parejas. Si la ejecución se llevó a cabo por parejas, esta fase se realizó por parejas de parejas. Si en la fase anterior había intervenido el grupo-clase, la fase en la que estamos ahora formó parte de la anterior.

- Exposición: Fase en la que intervino el grupo-clase con la libre participación de todos y cada uno de los alumnos que quisieron exponer sus ideas. Mediante el diálogo en gran grupo y las preguntas del profesor, se canalizaron las ideas y se recogieron las estrategias matemáticas que se habían reconocido como válidas.

- Finalización: Se escribieron y anotaron las conclusiones que se obtuvieron: conceptuales, procedimentales, etc.

El seguimiento del programa se concluyó con 22 sesiones a lo largo del curso escolar, una sesión por semana de dos horas de duración. El equipo investigador se había formado, previamente, mediante seminarios de grupo para la aplicación práctica del programa de intervención que tuvieron lugar durante el curso escolar 2009/10. Como material para el alumno, se elaboró un cuaderno de trabajo con 60 situaciones problemáticas, seleccionadas o adaptadas de Fernández Bravo (2010, p. 96-188). En cada sesión se realizaron dos problemas por término medio, con la finalidad de tener tiempo para generar un debate en el que fluyeran las ideas.

Con una periodicidad quincenal se llevaron a cabo reuniones en las que participaron los miembros del equipo investigador y en ellas se presentaron de forma abierta tanto los avances percibidos como las dificultades encontradas y se compartieron experiencias particulares de cada aula.

La fase postest se llevó a cabo durante el mes de junio de 2011 y en ella se les aplicó a los alumnos el mismo instrumento de evaluación que se les había aplicado en la fase pretest. La corrección de las pruebas siguió el mismo procedimiento descrito en la fase pretest.

5. Resultados del estudio

Para llevar a cabo el análisis estadístico de los datos recogidos se utilizó el programa Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), versión 15.0. Los análisis llevados a cabo para el tratamiento estadístico de los datos fueron los siguientes:

a) Análisis descriptivos y gráficos, a partir los cuales pudimos observar las puntuaciones medias de cada grupo (Experimental pretest “1”; Control pretest “2”; Experimentales postest “3”; Control postest “4”), su desviación típica, el error típico y el intervalo de confianza para la media, al 95%.

b) Tests no paramétricos que nos sirvieron para determinar hasta qué punto los datos muestrales se ajustan a una distribución teórica. Este estudio lo realizamos con todos los datos, tanto de la fase pretest como postest. Se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

c) Análisis paramétrico unifactorial de la varianza para el contraste de las hipótesis estadísticas. Con este análisis se comprobó si el cambio pretest-postest en cada una de las variables estudiadas difirió en cada una de las aulas, respecto a la utilización, o no, del programa de intervención (variable independiente). También estudiamos si los cambios habían sido significativos y si estos se habían debido a la utilización del programa, verificando su repercusión en los grupos experimentales. Se analizó el estadístico F y su significación (Sig F) para los 6 niveles de grupos. Si la F global del análisis de la varianza es significativa ($p<0.05$), sólo podemos concluir que, por lo menos, dos niveles de la variable producen distintos efectos en la variable dependiente. Para investigar en qué niveles se dan esas diferencias significativas, establecimos comparaciones múltiples, mediante la prueba T de Student. El contraste de hipótesis estadísticas lo basamos en un contraste de igualdad de medias de dos poblaciones normales de varianzas desconocidas que verifican que el número de sujetos del grupo experimental más el número de sujetos del grupo control es mayor que 30. El contraste se realizó con las medias de los grupos experimentales pretest y postest por un lado, y de los grupos control prestest y postest, por otro. El contraste fue bilateral considerando como hipótesis nula que las medias obtenidas por un grupo, antes y después, son iguales. La hipótesis alternativa fue la existencia de diferencias en las medias obtenidas. La existencia de diferencias significativas nos haría rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa. En la fase pretest, se estudió mediante un análisis de la varianza si existían diferencias estadísticamente significativas ($p<0.05$) en las variables evaluadas en la fase pretest, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

Con la finalidad de comparar los cambios producidos por la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en los grupos experimentales se realizó un análisis de varianza múltiple en relación con todas las variables evaluadas, investigando, también, la repercusión del citado programa en los valores de las variables intervinientes. Se estudió la existencia o no de diferencias significativas respecto a la ocupación de los padres, la situación familiar, la asistencia a clase, el nivel de estudios de los padres y la dificultad para las matemáticas, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

Tabla 4. Resultados del ANOVA realizado comparando los grupos experimental y control

VARIABLE	Razón F	Sig. de F
Pensar matemáticamente	12.6586	.04
Plantear y resolver problemas matemáticos	10.4532	.003
Argumentar matemáticamente	6.8466	.002
Representar entidades matemáticas	7.6318	.28
Comunicarse en, con y sobre las matemáticas	8.5642	.17

Como podemos observar en la tabla 4, la razón F indicó que los cambios pretest-postest en los grupos experimentales fueron:

- Estadísticamente significativos al 100% en las variables: plantear y resolver problemas matemáticos y argumentar matemáticamente.

- Estadísticamente significativos al 96% en la variable pensar matemáticamente.

Los cambios producidos en los grupos experimentales de la fase postest fueron significativos respecto a todos y cada uno de los otros grupos en las tres variables mencionadas. Esto evidencia que el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolló significativamente en los alumnos de 4º de Educación Primaria, y para la muestra utilizada, las siguientes competencias matemáticas específicas: plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, y, pensar matemáticamente. No podemos afirmar que el programa de invención sirva para desarrollar las competencias de "representar entidades matemáticas" y "comunicarse e, con y sobre las matemáticas", al no observarse diferencias estadísticamente significativas entre los grupos experimentales y control.

6. Consideraciones finales

La resolución de problemas matemáticos es una fuente inagotable de conocimiento matemático que, a nuestro juicio, debería trabajarse en el aula haciendo más protagonista al alumno de sus aciertos y sus errores. Las situaciones problemáticas abiertas fomentan en el alumno el desarrollo de su creatividad haciéndolo más competente en la sociedad actual. Con este estudio hemos comprobado empíricamente que un programa basado en la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla de forma efectiva las siguientes competencias matemáticas específicas: pensar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos y argumentar matemáticamente. Como futuros trabajos, sugerimos confirmar estadísticamente estos resultados tanto en otros centros de titularidad privada, concertada, de entorno no urbano, así como en otras etapas educativas. Consideramos que habría que apoyarse en otros programas de intervención o ampliar el que hemos usado con otras actividades, para lograr un desarrollo de las competencias matemáticas específicas: representar entidades matemáticas y comunicarse, en, con y sobre las matemáticas.

Aumentar el nivel competencial de nuestros alumnos es, en la actualidad, un objetivo importante de nuestro sistema educativo. Para conseguir ese fin, sugerimos que se incluya de forma efectiva en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria el uso de programas basados en la invención.

Bibliografía

Ausubel, D.P. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Barbarán, J. J. (2010). *Investigación evaluativa sobre la resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de educación secundaria obligatoria, mediante la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Estudio de caso*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, España.

Bernardo, A. (1999). Overcoming obstacles to understanding and solving word problems in mathematics. *Educational Psychology*, 19 (2), 149-163.

Cardoso, E. & Cerecedo, M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47 (5), 1-11.

Doyle, W. (1977). Learning the classroom environment: An ecological analysis. *Journal of Teacher Education*, 28 (6), 51-56.

Doyle, W. (1979). Classroom tasks and students' abilities. En P.L. Peterson, H.J. Walberg (Eds.) *Research on teaching. Concepts, findings and implications.* Berkeley: McCutchan.

Doyle, W. (1986a). Classroom organization and management. En M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. Nueva York: Macmillan.

Doyle, W. (1986b). Content representation in teachers' definitions of academic work. *Journal of Curriculum Studies*, 18 (4), 365-379.

Doyle, W. (1995). Los procesos del currículum en la enseñanza efectiva y responsable. *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 4 (6), 3-11.

Doyle, W. & Carter, K. (1984). Academic tasks in classrooms. *Curriculum Inquiry*, 14 (2), 129-149.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

English, L. (1998). Children´s problem solving within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (1), 83-106.

Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros*. Barcelona: Editorial Graó.

Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños.* Madrid: Grupo Mayéutica.

Goñi, J. (2008). *3^2-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter & National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Juidías, J. & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* BOE Nº. 293, del 8/12/2006.

Murillo, G. & Marcos, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27 (2), 241-256.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia: NCTM.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. Recuperado el 22 de febrero de 2012, de http:// http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf

OCDE (2006): *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.

OECD (2010). *PISA 2009 Results: Executive Summary*.

Reigeluth, C.M., Merrill, M.D. & Bunderson, C.V. (1978). The structure of subject matter contents and its instructional design implications. *Instructional Science*, 7, 107-126.

Reigeluth, C.M., Merrill, M.D., Wilson, B.G. & Spiller, R.T. (1978). The elaboration theory of instruction: a model for sequencing and synthesizing instruction. *Instructional Science*, 9, 195-219.

Reigeluth, C.M. & Darwazeh, A.N. (1982). The elaboration theory's procedure for designing instruction: A conceptual approach. *Journal of Instructional Development*, 5 (3), 22-32.

Rico, L. & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Roig, A. & Llinares, S. (2006). Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria. Caracterización y análisis. En J. V. Aymerich & S. Macario Vives (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp.283-291). Castellón de la Plana: Publicaciones de la Universidad Jaime I.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 523-536.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Selden, J., Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good students can't solve nonroutine problems. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 19-26). Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-emocionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de Psicología*, 26 (1), 143-148.

Törner, G., Schoenfeld, A. & Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 353.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making use of word problems*. Lisse, Holanda: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., De Corte, E. & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (3), 265-285.

Vigotsky, L. (1973). Psicología y pedagogía. Madrid: Akal.

José Antonio Fernández Bravo: Profesor universitario del Centro de Enseñanza Superior "Don Bosco", adscrito a la Universidad Complutense de Madrid. Director de la Cátedra "Conchita Sánchez" de Investigación para la Educación Matemática, en la Universidad Camilo José Cela. Consultor en matemáticas y primera infancia de *Cerebrum* Centro de Neurociencias, Educación y Desarrollo Humano (OEA) Lima (Perú). Autor de 82 obras dirigidas al aprendizaje de la Matemática.

ANTO1940@inicia.es ; http://fernandezbravo.ning.com

Juan Jesús Barbarán Sánchez. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Málaga y Doctor por la UNED. Actualmente es profesor de Matemáticas en el IES "Almina" de Ceuta y profesor asociado en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada. barbaran@ugr.es

ANEXO I

Prueba de diagnóstico de la competencia matemática elaborada por el Ministerio de Educación y planteada a alumnos de 4º de Educación Primaria de Ceuta y Melilla (2010)

	PR	PRPM	ARG	REP	COM
Pregunta 1		X			
Pregunta 2	X				
Pregunta 3	X				
Pregunta 4		X			
Pregunta 5				X	
Pregunta 6				X	
Pregunta 7				X	
Pregunta 8					X
Pregunta 9					X
Pregunta 10		X			
Pregunta 11		X			
Pregunta 12		X			
Pregunta 13					X
Pregunta 14		X			
Pregunta 15		X			
Pregunta 16		X			
Pregunta 17					X
Pregunta 18			X		
Pregunta 19	X				
Pregunta 20			X		
Pregunta 21					X
Pregunta 22					X
Pregunta 23					X
Pregunta 24			X		
Pregunta 25	X				
Pregunta 26	X				
Pregunta 27	X				
Pregunta 28	X				
Pregunta 29		X			
Pregunta 30	X				
Pregunta 31		X			
Pregunta 32		X			
Pregunta 33		X			

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 45-62
ISSN: 1815-0640

Resolución de problemas y ansiedad matemática: profundizando en su relación

Javier Monje Parrilla, Patricia Pérez Tyteca, Enrique Castro Martínez

Resumen

Tradicionalmente los estudios sobre resolución de problemas y los que se han centrado en los aspectos afectivos y emocionales no han estado conectados y han discurrido ignorándose mutuamente de manera explícita. Pero implícitamente esta desconexión no es total y hay indicios de un servicio mutuo y de aspectos que los interconectan. En este trabajo pretendemos dar cuenta de estos indicios centrándonos en uno de los factores afectivos más activos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: la ansiedad matemática

Abstract

Traditionally, studies and problem solving that have focused on affective and emotional aspects have not been connected and have proceeded ignoring each other explicitly. But implicitly this disconnect is not complete and there are signs and mutual service areas that interconnect them. In this work we try to account for this evidence by focusing on one of the most active affective factors in the process of teaching and learning of mathematics: math anxiety.

Resumo

Tradicionalmente, estudos e resolução de problemas que se concentraram em aspectos afetivos e emocionais não foram ligados e ter procedido ignorando o outro explicitamente. Mas implicitamente esta desconexão não está completa e há sinais e áreas de serviço mútuo que os interconectam. Neste trabalho tentamos explicar essa evidência, concentrando-se em um dos fatores mais ativos afetiva no processo de ensino e aprendizagem da matemática: a ansiedade matemática.

1. Introducción

La resolución de problemas constituye un eje transversal imprescindible en el aprendizaje matemático, por lo que las administraciones públicas de distintos países han puesto énfasis en su inclusión en el currículo de educación primaria y secundaria. Los problemas son una herramienta fundamental y el trabajo escolar con ellos capacita al estudiante a enfrentarse a situaciones relacionadas con las matemáticas que irá encontrando tanto en su vida cotidiana como en su carrera académica. En Castro (2008), se subraya al respecto que:

> Resolver problemas no es sólo una actividad científica, también constituye un tipo de tarea educativa que debe ocupar una posición destacada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los niños, adolescentes y estudiantes en general. Por ello, la resolución de problemas es un contenido

> escolar, que contribuye a la formación intelectual y científica de los estudiantes (p. 114).

Desde el campo de la Educación Matemática y durante un largo periodo de tiempo, el estudio de la resolución de problemas se ha abordado desde una perspectiva puramente cognitiva. De hecho, muchos teóricos cognitivos prefirieron simplemente ignorar el dominio afectivo. Silver (1985) indicó que este énfasis en la cognición dejaba al afecto como un tema que carecía de representación en la investigación en resolución de problemas. Para Mandler (1989), “el afecto es el aspecto menos investigado de la resolución humana de problemas siendo, sin embargo, probablemente el aspecto más a menudo mencionado como merecedor de más investigaciones” (p. 3). Este autor afirma además, que la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas está llena de indicaciones que transmiten el mensaje de que algún día, pronto -quizá mañana- tengamos que hacer algo respecto al afecto y la emoción, y añade: “estoy encantado de ver que el mañana ha llegado” (p. 3).

Aunque la resolución de problemas es una actividad claramente cognitiva, los procesos involucrados en ella son particularmente susceptibles de la influencia del dominio afectivo (McLeod, 1989a). Así, el estudio del afecto es fundamental si queremos tener una visión completa de los aspectos involucrados en el proceso de resolución de problemas.

Dentro del dominio afectivo, una de las componentes que tiene una influencia más negativa en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y concretamente en la resolución de problemas, es la ansiedad matemática. La aparición de ansiedad matemática en el resolutor interfiere en su memoria a corto plazo y puede llevar al estudiante a bloquearse ante un problema, impidiendo que se resuelva de manera efectiva.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, pretendemos en este trabajo incidir en la importancia de considerar la ansiedad matemática en el estudio de la resolución de problemas. Pero también hablaremos del rol central que tiene la resolución de problemas en el estudio de la ansiedad matemática, para así reflejar la influencia mutua que ambos factores mantienen entre sí.

2. Ansiedad y afecto

Fennema (1989), indica que en el estudio del afecto la necesidad de dar definiciones cuidadosas de las variables bajo estudio es vital y que espera que los nuevos investigadores del área sean claros sobre qué se está estudiando y qué se ha aprendido anteriormente en el área en cuestión. Siguiendo estas indicaciones procedemos a definir detalladamente el constructo objeto de nuestro trabajo así como el marco teórico en el que lo encuadramos.

La ansiedad matemática es un factor afectivo. En el campo específico de la educación matemática, existe cierta dicotomía en la perspectiva en la que se considera el afecto. Por un lado, existen autores que hacen una distinción entre el análisis cognitivo y el afectivo y, por otro, se encuentra la visión socio-constructivista de las relaciones afectivas. Actualmente, la perspectiva más extendida y que más interés despierta es esta última.

McLeod (1989b) sostiene que el dominio afectivo es “un extenso rango de estados de ánimo que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos las creencias, las actitudes y las emociones” (p. 245).

Hay autores que consideran los valores éticos y morales como una cuarta categoría, pero nosotros contemplamos la dimensión axiológica cercana pero diferenciada del dominio afectivo (Rico, 2005).

Las creencias matemáticas son una componente del conocimiento subjetivo del individuo, basado en su experiencia, sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Las creencias son componentes cognitivas del dominio afectivo, tienen poca intensidad pero gran estabilidad en el tiempo (Gil, Rico y Castro, 2003).

McLeod (1992) define cuatro categorías dentro de las creencias:

- Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas
- Creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas
- Creencias sobre la enseñanza de las matemáticas
- Creencias sobre el contexto social que rodea el aprendizaje de las matemáticas

Como actitud hacia las matemáticas entendemos la predisposición aprendida de los estudiantes a responder de manera positiva o negativa a las matemáticas, lo que determina su intención e influye en su comportamiento ante la materia. Las actitudes tienen mayor intensidad que las creencias y menor estabilidad, y tienen una componente cognitiva (ya que están influidas por las creencias) y una afectiva (ya que también influyen en ella las emociones).

Las emociones se pueden definir como respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, y surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para el individuo (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Las emociones son componentes afectivas, que poseen gran intensidad pero no estabilidad.

Estos descriptores básicos del dominio afectivo interaccionan, según la teoría de la discrepancia de Mandler, de modo que, basándose en sus creencias, el estudiante crea unas expectativas de lo que va a suceder al realizar una tarea matemática. En función de que esto ocurra o no, el individuo experimenta una reacción emocional positiva o negativa. Si se producen situaciones similares repetidamente las reacciones emocionales se “solidifican” en actitudes hacia las matemáticas que, a su vez, pueden modificar las creencias subyacentes del aprendiz.

Dentro del marco teórico descrito, en este trabajo vamos a centrarnos en uno de los principales factores afectivos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general, y en la resolución de problemas en particular: la ansiedad matemática.

Atendiendo a las características del dominio afectivo relatadas anteriormente, algunos investigadores en educación matemática, como indican Hart (1989) y Evans

(2000), consideran la ansiedad matemática como una actitud. Sin embargo, los psicólogos sociales la categorizan como una emoción más que como una actitud, siendo considerada una respuesta visceral. La visión de la ansiedad matemática como una actitud conlleva considerarla una respuesta afectiva más "fría" y de menor intensidad frente a la caracterización de la ansiedad matemática como una respuesta intensa ante experiencias matemáticas específicas.

Pensamos que en el estudio de la ansiedad matemática se deben tener en cuenta ambas caracterizaciones ya que las reacciones emocionales surgidas momentáneamente al desarrollar tareas matemáticas contribuyen a la creación de respuestas más estables en el tiempo. Así pues, consideramos interesante observar tanto las reacciones emocionales viscerales que sufren los alumnos al enfrentarse a actividades matemáticas, como los sentimientos interiorizados y estables que experimentan hacia la materia.

Teniendo esto en cuenta, en el presente trabajo mantenemos la caracterización previamente aportada (Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Castro, 2011) y entendemos la ansiedad matemática como un sistema de respuestas afectivas caracterizado por la ausencia de confort que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica, y que se manifiesta mediante una serie de "síntomas", como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental.

3. El estudio de la ansiedad matemática. Papel de la resolución de problemas

Un buen entorno para estudiar el afecto (y por tanto la ansiedad matemática) es la resolución de problemas, ya que los factores afectivos desempeñan un rol central en dicho proceso (Adams, 1989). Además, en la actualidad el trabajo con problemas constituye la manera natural de desempeñar el aprendizaje matemático.

La importancia que dentro del estudio de la ansiedad matemática tiene la resolución de problemas queda patente de diversos modos. Un ejemplo lo constituyen las definiciones de ansiedad matemática presentes en la literatura (en las que se menciona la resolución de problemas), algunos trabajos sobre ansiedad (en los que la resolución de problemas juega un importante papel) y los instrumentos utilizados para medirla (en la que se hace constante referencia al proceso de resolución de problemas). Abordaremos a continuación cada uno de estos puntos.

3.1. Ansiedad y resolución de problemas

Ya desde los primeros años de estudio de la ansiedad matemática queda reflejada la interacción existente entre este constructo y la resolución de problemas. Así, para Richardson y Suinn (1972) la ansiedad matemática es "el sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas" (p. 551).

Estos autores son los creadores de la escala MARS, la escala de ansiedad matemática con mayor difusión desde su creación hasta la actualidad. De ella se han realizado numerosas adaptaciones y ha sido utilizada por un gran número de investigadores. Inferimos, por tanto, que todos ellos entienden la ansiedad matemática como un sentimiento asociado a la resolución de problemas de manera estrecha.

Por su parte, Tobias y Weissbrod (1980) afirman que “la ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis, y desorganización mental que surge cuando a un sujeto se le exige resolver un problema matemático” (p. 65).

En definiciones más actuales también queda patente el papel que la resolución de problemas juega en el estudio de la ansiedad matemática. Un ejemplo de ello es la caracterización que de la ansiedad matemática hacen Harding y Terrel (2006), que la entienden como un “sentimiento de ansiedad, miedo, angustia, frustración e incertidumbre que surge cuando se requiere realizar operaciones matemáticas o usar las matemáticas para resolver problemas” (p. 2).

Vinculado al estudio de la ansiedad matemática, dentro de los trabajos con futuros maestros, existe una nueva corriente que indaga en la *ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas* (Peker, 2009; Peker y Halat, 2008, 2009). Peker y Halat (2008) la definen como “el sentimiento de tensión y ansiedad que aparece durante la enseñanza de conceptos matemáticos, teorías y fórmulas o durante la resolución de problemas” (p.2). Comprobamos cómo en este caso también se ha tomado la resolución de problemas como foco fundamental al definir este constructo.

3.2. Trabajos sobre ansiedad en los que la resolución de problemas está presente

Hay una serie de trabajos realizados sobre ansiedad matemática en los que la resolución de problemas juega un papel principal.

Como una primera aproximación al grueso de estas investigaciones, es interesante observar cómo en el trabajo de Marshall (1989) queda patente que muchas de las reacciones afectivas negativas expresadas por los alumnos se producen ante un problema, antes de proceder a intentar resolverlo. Esto muestra el grado de rechazo que produce en los alumnos a priori el trabajo con problemas. Sin embargo, cuando los alumnos sienten que han entendido un problema y han llegado a su solución expresan su confianza y entusiasmo al hablar de su resolución.

3.2.1. Factores implicados en la aparición de ansiedad matemática

Existen trabajos que se han centrado en indagar las causas de aparición de la ansiedad matemática. Comprobamos también en este caso el rol central que desempeña la resolución de problemas.

El estudio de Martin (1994) tiene por objetivo determinar componentes que discriminen de manera efectiva entre los sujetos muy ansiosos y los nada ansiosos. Su muestra está formada por 320 estudiantes universitarios y en sus resultados se hallan 19 componentes principales que discriminan de manera satisfactoria entre los grupos. Entre ellas se encuentra la aversión que los alumnos tienen por la resolución de problemas.

Gonske (2002) comprueba mediante un análisis de regresión que en su muestra (129 estudiantes de educación superior considerados no tradicionales por tener 25 o más años) el factor que más contribuye a la ansiedad matemática es la falta de confianza en la propia habilidad para resolver problemas difíciles.

En su trabajo con maestros en activo, Cohen y Green (2002) indagan en cuáles son los tópicos que les producen más ansiedad matemática a los docentes, siendo éstos el álgebra y la resolución de problemas.

Este es un dato cuanto menos preocupante, ya que los maestros son agentes activos fundamentales para una educación matemática satisfactoria desde edades tempranas, que debe contener como eje vertebrador la resolución de problemas. Además, a la vista de estos resultados, y teniendo en cuenta trabajos que demuestran la transmisión de la ansiedad de los docentes a los alumnos, corremos el peligro de que desde la educación primaria se desarrolle en los niños una aversión transmitida hacia la resolución de problemas que los acompañe en toda su carrera académica. Para evitar esta situación, es fundamental trabajar la ansiedad matemática desde la formación de profesores dotando a los factores afectivos de la importancia y consideración que se merecen.

De acuerdo con Flick (2008), el desempeño de los alumnos de educación primaria en matemáticas no va a mejorar mientras no mejore la preparación de sus maestros. Y para una preparación efectiva se ha de enfatizar por parte de las universidades y de los encargados de la formación del profesorado en los problemas de ansiedad matemática que sufre este colectivo. Hasta que éstos no se erradiquen no será posible una educación de calidad.

3.2.2. Estrategias de intervención para la reducción de la ansiedad matemática

También podemos encontrar numerosos trabajos que han desarrollado programas de intervención que tienen como objetivo reducir el nivel de ansiedad matemática experimentado por los estudiantes. Como podremos comprobar, el trabajo en resolución de problemas es esencial para ello.

En este camino, vemos que en el trabajo de Larson (1983), la autora da una serie de pautas que a ella le han funcionado en su curso de Métodos Matemáticos con futuros maestros y que tiene por objetivo mejorar la predisposición de los alumnos hacia la materia, reduciendo su ansiedad matemática. Larson recomienda, entre otras cosas, trabajar en grupos pequeños, ya que los alumnos de este modo se animan a participar, y compartir distintas aproximaciones a la resolución de cada problema, discutiéndolas en clase para que de este modo los alumnos comprueben la existencia de diferentes caminos para resolver un mismo problema.

Alsup (1995) explora la eficacia de la enseñanza centrada en problemas- una estrategia instruccional basada en el constructivismo- para mejorar por un lado el conocimiento conceptual de las fracciones, decimales y porcentajes, y por otro para reducir la ansiedad matemática y aumentar la confianza en uno mismo para enseñar. Para ello toma una muestra formada por 33 futuros maestros y concluye que la estrategia implementada cumple eficazmente el objetivo marcado.

Etches (1997) sondea la ansiedad matemática de un grupo de futuros maestros a través de un taller y afirma en sus conclusiones que para reducir la ansiedad es necesario una enseñanza más próxima a las situaciones cotidianas de la vida, que evite la ambigüedad en los enunciados de los problemas verbales y que mantenga el equilibrio entre trabajo individual y cooperativo.

Newstead (1998) trabaja con alumnos de entre 9 y 11 años, comparando el nivel de ansiedad que experimentan los que reciben una enseñanza tradicional (trabajo individual con lápiz y papel y demostración de la solución por parte del profesor) y aquellos que reciben una enseñanza alternativa que enfatiza la resolución de problemas en grupo y la discusión de las estrategias informales utilizadas por los estudiantes como base de su aprendizaje. Las conclusiones muestran que aquellos alumnos que han recibido la enseñanza centrada en resolución de problemas muestran niveles significativamente menores de ansiedad matemática.

Kovarik (1999) explora la eficacia de aplicar en su asignatura de cálculo una pedagogía basada en el fomento de los siguientes aspectos: el uso de las matemáticas para comprender las situaciones de la vida real; el uso del cálculo para formular, resolver y comunicar problemas; el uso de la tecnología como parte integrada del proceso de formulación, resolución y comunicación de los problemas; y el trabajo y aprendizaje cooperativos. En su estudio participan 69 estudiantes de educación superior (community college) y concluye que la práctica implementada reduce de manera significativa su ansiedad matemática.

Guerrero, Blanco y Vicente (2002) proponen un programa de intervención cuya finalidad es aprender a resolver problemas y desarrollar actividades que permitan al sujeto afrontar situaciones ansiógenas en matemáticas. Dicho programa enseña a entrenar los procesos cognitivos y adiestra al alumno a afrontar situaciones de ansiedad, a relajarse fisiológicamente y a manejar sus emociones. En la misma línea han trabajado Caballero, Guerrero, Blanco y Piedehierro (2009), que han aplicado un taller de resolución de problemas a un grupo de 56 futuros maestros, concluyendo que el bloqueo en la resolución del problema y no tanto el problema en sí es lo que provoca la ansiedad, y que después de la implementación del taller los alumnos son capaces de afrontar dicho bloqueo siendo persistentes en la búsqueda de diferentes métodos para la resolución del problema.

Cohen y Leung (2004) relatan las mejoras observadas en un grupo de 5 maestros- uno en formación y cuatro en activo- con patente ansiedad matemática tras la aplicación de un programa de intervención centrado en el desarrollo de su conocimiento conceptual, su pensamiento matemático y de las herramientas para la resolución de problemas a la vez que ayuda a los sujetos a reflexionar acerca de sus experiencias matemáticas y a tratar su ansiedad.

Furner y Berman (2004) realizan una recopilación de prácticas y técnicas presentes en la literatura y que tanto los docentes como los padres de los alumnos pueden poner en práctica para prevenir y en su caso reducir la ansiedad. Para ello, los autores reconocen la necesidad de que los profesores promulguen la discusión en clase y la resolución de problemas, ya que cuanto más animen al alumnado a examinar su procesos de pensamiento y a justificar el uso de herramientas matemáticas, más los beneficiarán.

Edelmuth (2006) ofrece una serie de técnicas dirigidas a los alumnos, a los padres y a los profesores, tanto para reducir como para prevenir la ansiedad matemática. Entre otras cosas, para los docentes aconseja crear un ambiente distendido en clase en el que los alumnos se sientan confiados y tratar cuestiones de una manera abierta, haciendo uso del humor y mostrando a los estudiantes que existen diferentes caminos para obtener la solución de un problema y que los errores dan la oportunidad de aprender. Por otra parte, aconseja a los padres educar a sus hijos en la cultura matemática propiciada al tratar con ellos, siempre que sea posible, problemas matemáticos presentes en la vida diaria (contar, comparar precios, razonar de manera lógica ante ciertas situaciones, etc.).

Goldin (2004) afirma en su trabajo que el único objetivo no debe ser reducir la ansiedad en los alumnos, sino dotarlos de herramientas que les permitan hacer frente a su propia ansiedad. Aún así, da algunas pautas útiles de cómo el docente puede contribuir a la reducción de la ansiedad de sus estudiantes. Comenta, por ejemplo que en ocasiones se puede reducir la ansiedad que en un principio experimenta un alumno al enfrentarse a un problema si éste se plantea sin la sentencia en la que se explicita el objetivo que se persigue (la pregunta en la que queda claro qué nos piden), sino que se deja abierto invitando al estudiante a explorar. De este modo el sujeto no siente que es incapaz de hacer lo que se espera de él. Goldin lo ilustra con el problema de los dos cubos, que dice así: *Estás de pie en la orilla de un río con dos cubos. Un cubo tiene exactamente 3 litros de agua, y el otro tiene exactamente 5 litros. Los cubos no están marcados para la medición de otra manera. ¿Cómo se pueden llevar exactamente 4 litros de agua lejos del río?.* En este problema, lo que aconseja el autor es sustituir la pregunta por *¿Qué puedes hacer con los cubos?*

3.3. La resolución de problemas en las escalas de ansiedad

Los instrumentos de medida utilizados mayoritariamente en el estudio de la ansiedad matemática son las escalas de ansiedad. Actualmente, siguiendo las recomendaciones de los expertos, cada vez es más frecuente encontrar trabajos en los que se complementa el uso de esta técnica cuantitativa con otras cualitativas como son las entrevistas o la observación.

Aunque existen varias escalas de ansiedad, las que más se han utilizado son la Mathematics Anxiety Rating Scale (Richardson y Suinn, 1972) y la Mathematics Anxiety Scale incluida en la Mathematics Attitude Scale (Fennema y Sherman, 1976). La primera es, sin duda, la que tiene un uso más extendido aunque la segunda tiene gran utilidad para aquellos trabajos en los que se analizan otras componentes afectivas, como son la confianza en uno mismo, la utilidad o la motivación y, por ello, también se ha utilizado en un gran número de investigaciones.

La resolución de problemas está presente en estas dos escalas de ansiedad matemática, utilizadas en la mayoría de los trabajos existentes hasta el momento.

MAS (Mathematics Anxiety Scale de Fennema y Sherman, 1976):

Mide tanto sentimientos producidos en los estudiantes que sufren ansiedad matemática como síntomas somáticos asociados a ella. Consta de 12 ítems tipo Likert que comprenden 5 posibles respuestas por cada uno. De ella se han realizado dos adaptaciones: la MAS (Mathematics Anxiety Scale) de Betz (1978) y la MAS-R (Mathematics Anxiety Scale Revised) de Bai, Wang, Pan y Frey (2009).

De los 12 ítems de la escala, 3 abordan la resolución de problemas de manera explícita (p.e. *Cuando hago problemas de matemáticas se me queda la mente en blanco y no soy capaz de pensar claramente*); en los demás en los que se pregunta por las matemáticas en general quedan también incluidos. Así pues, la cuarta parte de las sentencias sobre los sentimientos que producen las matemáticas en general se centra en resolución de problemas.

MARS (Mathematics Anxiety Rating Scale de Richardson y Suinn, 1972):

Mide la respuesta de ansiedad de los estudiantes cuando hacen matemáticas en su vida cotidiana y también en situaciones académicas. Consta de 98 ítems con 5 posibles respuestas cada una. De esta escala se han hecho numerosas adaptaciones a lo largo del tiempo, como son las siguientes: MARS-A (Mathematics Anxiety Rating Scale for Adolescents) de Suinn y Edwards (1982), MARS-E (Mathematics Anxiety Rating Scale for Elementary School Students) de Suinn, Taylor y Edwards (1988), MARS-R (Math Anxiety Rating Scale-Revised) de Plake y Parker (1982), Phobos Inventory de Ferguson (1986), MARS-30 de Suinn y Winston (2003), MARS-30 en español de Goldwaser (2008), RMARS (Revised Math Anxiety Rating Scale) de Baloglu (2002), AMAS (Abbreviated Math Anxiety Scale) de Hopko, Mahadevan, Bare, y Hunt (2003).

Hemos analizado la MARS-A por ser una escala con el mismo número de ítems que la original, creada por uno de los autores de la misma y adaptada al ambiente académico. Comprobamos que de los 98 ítems totales, 17 hacen referencia explícita a la resolución de problemas en su enunciado (p.e. *¿Cuánta ansiedad te produce hacer un problema verbal de álgebra?*) y 11 preguntan cuánta ansiedad genera resolver un problema concreto relacionado con la vida diaria (p. e. *¿Cuánta ansiedad te produce calcular cuánto dinero te pagarán por trabajar seis horas y media si te pagan 3.75$ por hora?*). Así pues, en total más del 28% de las sentencias que conforman la escala versan sobre resolución de problemas, algo más de la cuarta parte.

El hecho de que en las dos escalas de ansiedad matemática más utilizadas a nivel mundial, la resolución de problemas sea el foco de atención en más de una cuarta parte de los ítems, nos da una idea del lugar central que ocupan los problemas y el proceso de resolución de los mismos en el estudio de la ansiedad que provocan las matemáticas en los estudiantes.

4. El estudio de la resolución de problemas. Papel de la ansiedad matemática

Una vez abordado el papel que juega la resolución de problemas dentro del estudio de la ansiedad matemática, vamos a proceder a tratar el tema a la inversa, es decir, profundizaremos en el papel que juega la ansiedad matemática dentro del estudio de la resolución de problemas.

A la hora de abordar estudios basados en resolución de problemas se han de tener en cuenta numerosos factores. A lo largo de un gran número de años estos factores han sido fundamentalmente cognitivos. Veremos a continuación evidencias de la influencia de los factores afectivos (y por tanto la ansiedad matemática) en el proceso de resolución de problemas y de la necesidad de integrarlos en los trabajos de investigación. Además describiremos algunos trabajos sobre resolución de problemas en los que se ha tenido en cuenta la ansiedad matemática.

4.1. El afecto en resolución de problemas

McLeod (1989a) lo resume afirmando que “debido a que el desempeño en resolución de problemas está fuertemente influenciado por factores afectivos, las investigaciones en resolución de problemas deben tomar en cuenta los factores afectivos” (p. 27).

En ausencia de esfuerzos por indagar en el rol e importancia del afecto en la resolución de problemas, los intentos de los profesores de abordar de manera efectiva la enseñanza en este campo se guiará exclusivamente por corazonadas y buenas intenciones (Thompson y Thompson, 1989).

Así, como apunta Mandler (1989), “lo mejor que podemos hacer en el presente es entender cómo aprendizaje y afecto caminan juntos, cómo interaccionan y cómo su inevitable simbiosis puede ponerse a disposición de nuestros estudiantes y nuestra sociedad” (p. 17).

Son importantes las aportaciones que ha realizado Goldin en el estudio de la resolución de problemas, ya que dentro de su modelo de competencia para la resolución de problemas, interpreta los afectos como un sistema representacional paralelo al sistema de representación cognitivo. Este modelo ha sido desarrollado en trabajos posteriores (DeBellis y Goldin, 2006), e incide en la idea de que en el proceso de resolución de problemas intervienen diferentes respuestas afectivas, con diferente dirección e intensidad. Podemos observarlo muy claramente en el ejemplo que describe McLeod (1989a) y que narra las reacciones que suelen tener los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas no rutinarios. Este autor indica que si los alumnos trabajan en el problema durante un período largo de tiempo, las respuestas emocionales suelen hacerse más intensas. Algunos alumnos empezarán a trabajar en el problema con entusiasmo considerándolo como un juego o un puzzle, pero al pasar un rato las reacciones se tornan más negativas. Aquellos estudiantes que tienen un plan para resolver el problema puede atascarse intentando llevarlo a cabo, tensándose e intentando aplicar el mimo plan una y otra vez, lo que les lleva a incrementar su frustración con cada nuevo fracaso. Sin embargo, si los estudiantes obtienen la solución expresan sentimientos de satisfacción e incluso alegría. Si por el contrario no llegan a la solución pueden expresar su rabia e insistir en que necesitan ayuda para hacerlo.

Por todo esto, McLeod (1989a) afirma que “dada la intensidad de las respuestas emocionales al resolver problemas, es sorprendente que la investigación en resolución de problemas de matemáticas no se haya fijado más seriamente en los factores afectivos” (p. 20).

Una evidencia de la importante influencia del afecto en la resolución de problemas, es la necesidad por parte de la comunidad investigadora de definir una teoría subyacente que considere dicha influencia, y que sea compatible con la perspectiva de la ciencia cognitiva, ya que esta perspectiva es la que más comúnmente se adopta en los estudios sobre resolución de problemas. La teoría de la discrepancia de Mandler (descrita de manera general en epígrafes anteriores) es una respuesta a esta necesidad, ya que se adapta perfectamente a los procesos de resolución de problemas.

Los investigadores suelen definir un problema matemático como una tarea en la que la solución no es alcanzable de manera inmediata y no existe un algoritmo obvio que el estudiante pueda usar (McLeod, 1989a). De este modo, coincidiendo con la teoría de la discrepancia de Mandler, la reacción inicial del alumno al comprobar que la solución del problema no es evidente puede llevarle a un bloqueo. El plan inicial para resolver un problema no rutinario es a menudo inadecuado, de este modo los planes del ejecutor son interrumpidos. Así, como indican Gil, Blanco y Guerrero (2006), esta teoría explica la forma en que las creencias de los estudiantes y su integración con situaciones de resolución de problemas conducen a respuestas afectivas, y esto ocurre cuando experimentan discrepancia entre sus expectativas y sus experiencias.

De hecho, como afirman Thompson y Thompson (1989), la instrucción en resolución de problemas tiene un gran potencial para crear discrepancias y conflictos que suelen crear fuertes respuestas afectivas en los alumnos.

Pero los factores afectivos no intervienen en la resolución de problemas exclusivamente en lo relativo al estudiante. La interrelación entre cognición y afecto implica que los profesores de matemáticas deben considerar los efectos de los componentes afectivos en el aprendizaje matemático para planificar una instrucción efectiva (Adams, 1989). En su trabajo Lester, Garofalo y Kroll (1989) afirman a este respecto que:

> Cualquier buen profesor de matemáticas debería darse cuenta de inmediato de que el éxito o fracaso de sus alumnos en resolución de problemas depende en muchas ocasiones más de su auto-confianza, motivación, perseverancia y otros rasgos no cognitivos que del conocimiento matemático que posee (p. 75).

Así, cualquier docente seriamente comprometido con el desarrollo en sus alumnos de habilidades en resolución de problemas, tendrá que lidiar con el efecto que las nuevas experiencias pueden tener en el estado afectivo de dichos alumnos (Thompson y Thompson, 1989).

En esta línea, como conclusión de su trabajo, Cobb, Yackel y Wood (1989) recomiendan que el profesor renegocie el contexto social en el que los estudiantes van a intentar resolver problemas, creando una atmósfera en la que no tengan cabida sentimientos negativos como la frustración. Estos autores han comprobado, por ejemplo, que los alumnos demuestran estar excitados y confiesan sentirse bien cuando son capaces de resolver por ellos mismos un problema matemático que suponía un desafío. Por el contrario, aparecen actos emocionales negativos cuando se les priva de la oportunidad de pensar por ellos mismos (p. e. otro compañero les da la solución) pero no cuando luchan por resolver el problema. Así pues, el profesor debe contribuir a fomentar una dinámica que favorezca la aparición de reacciones emocionales positivas.

Con relación al ambiente de aula óptimo para trabajar la resolución de problemas, Grouws y Cramer (1989) identificaron pequeños grupos de profesores de matemáticas considerados como excelentes en su práctica docente en resolución de problemas con el fin de observarlos en sus clases. El clima del aula en el que desarrollaban su trabajo los docentes estudiados pasaba por ser agradable, ordenado, sin faltas de disciplina y los alumnos estaban al mismo nivel que el profesor, teniéndolos en cuenta a la hora de asignar tareas. Los autores apuntan que existen vínculos importantes entre la forma en que los profesores organizan y conducen las sesiones de resolución de problemas y las respuestas afectivas de sus estudiantes (que, como hemos visto influyen en su desempeño).

Es importante resaltar la existencia de trabajos que aportan una visión general de los trabajos realizados sobre resolución de problemas, en los que queda patente la importancia que el afecto tiene en ellos. Como ejemplo de este tipo de trabajos, cabe destacar el realizado por Castro (2008), donde se refleja la evolución de las ideas y tendencias en el estudio de la resolución de problemas en España y donde un apartado está dedicado a las investigaciones que se centran en los factores afectivos y en su influencia en el proceso de resolución de problemas. De modo similar, Gaulin (2001) realiza una revisión de la literatura con el fin de recoger las tendencias existentes en el estudio de la resolución de problemas y también en este caso queda de manifiesto la influencia del aspecto afectivo.

Otros ejemplos se recogen en la obra de McLeod y Adams (1989), donde encontramos una serie de estudios que indagan en las influencias del afecto en los procesos cognitivos asociados a la resolución de problemas.

4.2. La ansiedad matemática en la resolución de problemas

Hasta el momento hemos hablado de factores afectivos en general, dentro de los cuales se encuentra recogida la ansiedad matemática. Veamos ahora algunas aportaciones que nos arrojan información de cómo interactúa la ansiedad de manera individual en el proceso de resolución de problemas.

Es muy común por parte de los estudiantes creer que si uno no es capaz de saber o recordar un camino directo para resolver un problema, no hay nada que se pueda hacer para llegar a la solución. Como consecuencia de ello surgen sentimientos de indefensión que a menudo conducen a altos niveles de ansiedad (Thompson y Thompson, 1989).

Aquellos estudiantes temerosos en ciertos campos matemáticos pueden eventualmente desarrollar ansiedad crónica. Por el contrario, si un estudiante frecuentemente tiene experiencias positivas con la resolución de problemas no rutinarios, puede desarrollar actitudes de curiosidad y entusiasmo en torno a ellos (McLeod, 1989b).

Es indispensable, pues, que los docentes tengan en cuenta este hecho en su práctica diaria, ya que es fundamental que se trabaje desde ella para reducir en la medida de lo posible los efectos negativos que la ansiedad matemática puede causar en el desarrollo del aprendizaje matemático del alumno.

Desafortunadamente, aunque un profesor se sienta cómodo hablando de la ansiedad de sus alumnos en ciertos círculos, puede no ser capaz de tratarla en el tiempo de que dispone (Adams, 1989) o no sentirse preparado para abordarla desde el aula (Thompson y Thompson, 1989).

Por este motivo, son importantes los trabajos que se centran en indagar dinámicas que pueden reducir el estado de ansiedad de los estudiantes (véase epígrafe anterior) y todos los trabajos de investigación que proporcionen a los profesores una guía que les indique cómo usar las respuestas afectivas cada vez más intensas que se producen en la enseñanza basada en resolución de problemas para promover visiones positivas de las matemáticas en los estudiantes (McLeod, 1989b).

4.2.1. Trabajos sobre resolución de problemas que contemplan la ansiedad matemática

En algunos trabajos sobre resolución de problemas se aprecia el papel fundamental que tiene la ansiedad matemática en dicho proceso. Estos trabajos se centran en el rendimiento de los estudiantes al resolver problemas. El vínculo que une dicho rendimiento con la ansiedad matemática viene descrito por Tárraga (2008), cuando afirma que “la investigación reciente en educación matemática acepta como uno de los pilares teóricos del área la hipótesis de que los factores emocionales son un elemento explicativo clave para interpretar el éxito en la solución de problemas matemáticos” (p. 144).

Un primer ejemplo, lo constituye el trabajo de Karasel, Ayda y Tezer (2010) en el que comprueban, analizando a 134 estudiantes de educación primaria, que existe una leve pero significativa correlación negativa entre las herramientas en resolución de problemas y la ansiedad matemática.

Por su parte, Yeo (2005), concluye que en los 621 estudiantes de educación secundaria participantes en su muestra, existen diferencias en el rendimiento en resolución de problemas según los niveles de ansiedad matemática, hallándose diferencias significativas en el desempeño de los que menor nivel presentan (nivel 1) con el resto de compañeros (niveles 2, 3 y 4).

Igualmente, Tárraga (2008) prueba la existencia de correlación significativa entre ansiedad y rendimiento en resolución de problemas. En los datos de los 33 alumnos con los que trabaja, existe una correlación negativa entre ansiedad y rendimiento, es decir que aquellos estudiantes con mayor ansiedad matemática resuelven los problemas de manera menos satisfactoria.

Profundizando un poco más, en el trabajo de Moorman (2007) se comprueba que la ansiedad matemática no siempre impide la resolución satisfactoria de los problemas. La autora lleva a cabo un estudio de casos en el que profundiza en las estrategias y los procesos de pensamiento de dos alumnos con nivel bajo de ansiedad y dos con nivel alto, comprobando que algunos alumnos son capaces de enfrentarse a su ansiedad y resolver de manera satisfactoria un problema de matemáticas.

Puede que la explicación a este hecho se encuentre recogida en afirmaciones como las de Thompson y Thompson (1989), que afirman que la ausencia absoluta de ansiedad matemática debe considerarse como un estado afectivo deseable pero no indispensable, ya que incluso los resolutores expertos experimentan emociones. Según ellos, lo importante no es si surgen o no respuestas afectivas, sino cómo el sujeto las maneja y qué les lleva a perseverar en la lucha por la búsqueda de la solución a un problema.

En la misma línea, Nortes y Martínez (1996) postulan que una ansiedad moderada hacia las matemáticas puede contribuir a mejorar el rendimiento del alumno, pero un nivel alto de ansiedad inhibe ese rendimiento ya que aparece un factor que interrumpe los procesos implicados en las habilidades y destrezas necesarias para poner en funcionamiento la solución de problemas.

5. Consideraciones finales

Hemos comprobado cómo el estudio de la ansiedad matemática y el estudio de la resolución de problemas están vinculados y, como se recomienda desde la comunidad investigadora, es pertinente abordarlos de manera conjunta. Por tanto, es el momento apropiado para renovar nuestros esfuerzos con el fin de identificar las relaciones entre afecto y resolución de problemas tal como ya señalara Silver (1985).

De acuerdo con esto, y a la vista de lo expuesto en epígrafes anteriores, consideramos necesaria la realización de trabajos que profundicen en el comportamiento de la ansiedad matemática en los estudiantes, en función de las características del problema que abordan. Pensamos que este tipo de estudios pueden ser de gran utilidad, ya que su aplicación al aula puede ayudar a mejorar la práctica docente diaria al arrojar información sobre qué tipo de problemas minimizan la aparición de ansiedad matemática en los alumnos. Como indica McLeod (1989), es apropiada la realización de más trabajos relacionados con los aspectos afectivos y la resolución de problemas, especialmente si se centran en desarrollar afectos positivos que animen a los estudiantes a intentar realizar problemas.

Agradecimientos:

Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

Referencias

Adams, V. (1989). Affective issues in teaching problem solving: A teacher´s perspective. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 192-201). Nueva York: Springer-Verlag.

Alsup, J. K. (1995). *The effect of mathematics instruction based on constructivism on prospective teachers´ conceptual understanding, anxiety and confidence.* (Tesis doctoral). University of Wyoming, Laramie.

Bai, H., Wang, L., Pan, W y Frey, M. (2009). Measuring mathematics anxiety: psychometric analysis of a bidimensional affective scale. *Journal of Instructional Psychology, 36*(3), 185-193.

Baloglu, M. (2002). *Construct and concurrent validity and internal consistency, split-half, and parallel-model reliability of the revised Mathematics Anxiety Rating Scale.* (Tesis doctoral). Texas A & M University-Commerce, Texas.

Betz, N. E. (1978). Prevalence, distribution, and correlates of math anxiety in college students. Journal of Counseling Psychology, 25(5), 441-448.

Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L. J. y Piedehierro, A. (2009). Resolución de problemas de matemáticas y control emocional. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 151-160). Santander: SEIEM.

Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en Educación Matemática, XII*, 113-140.

Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1989). Young children´s emotional acts while engaged in mathematical problem solving. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 117-148). Nueva York: Springer-Verlag.

Cohen, R. y Green, K. (2002). Upper elementary teachers´mathematics related anxieties and their effects in their teaching. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 265-272). Norwich, England: PME.

Cohen, R. S. y Leung, P. (2004, octubre). *Math-Anxious Elementary Teachers' Change Process in a Graduate Course Aimed at Building Math Confidence*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Ontario, Canadá. Recuperado el 15 de octubre de 2010, de http://www.allacademic.com/meta/p117677_index.html

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131-174.

Edelmuth, J. E. (2006). *Acknowledging math anxiety: Techniques for teachers, parents, and students.* (Tesis de Maestría, Universidad de San Diego). Recuperado el 22 de octubre de 2010, de http://teachers.sduhsd.net/jastorino/Thesis.htm

Etches, S. (1997). *Investigating mathematics anxiety through the medium of a workshop.* (Tesis de maestría). Lakehead University.

Fennema, E. (1989). The study of affect and mathematics: A proposed generic model for research. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 205-219). Nueva York: Springer-Verlag.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6*(31). (Ms. No. 1225).

Ferguson, R.D. (1986). Abstraction anxiety: A factor of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 17,* 145-150.

Flick, D. (2008). Teacher math anxiety and lack of conceptual understanding. *Vector, Spring,* 19-24. Recuperado el 21 de octubre de 2010, de http://www.slideshare.net/sefl/p-19-teacher-math-anxiety

Furner, J. M. y Berman, B. T. (2004). Confidence in their ability to do mathematics: The need to eradicate math anxiety so our future students can successfully compete in a high-tech globally competitive world. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 18*(1), 1-33.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *SIGMA, 19*, 51-63.

Gil, F., Rico, L. y Castro, E. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de Secundaria Andaluz sobre Enseñanza-Aprendizaje y Evaluación de las Matemáticas. *Quadrante XII(1)*, 75- 101.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Goldin, G. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. ZDM, 36(2), 56-60.

Goldwaser, G. (2008). *Math anxiety and careers among bilingual latinos.* (Tesis doctoral). Colorado State University, Fort Collins.

Gonske, T. L. (2002). *Relationships among mathematics anxiety, beliefs about the nature of mathematics and the learning of mathematics, and students´ learning approaches in non-traditional.* (Tesis doctoral). University of Northern Colorado, Greeley.

Grouws, D. y Cramer, K. (1989). Teaching practices and student affect in problem-solving lessons of select junior-high mathematics teachers. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 149-161). Nueva York: Springer-Verlag.

Guerrero, E., Blanco, L. y Vicente, F. (2002). El tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. En J. N. García-Sánchez (Coord.). *Aplicaciones de Intervención Psicopedagógica.* (pp. 229-237). Madrid: Ediciones Pirámide.

Hart, L. (1989). Describing the affective domain: Saying what we mean. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 37-45). Nueva York: Springer-Verlag.

Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L., y Hunt, M. A. (2003). The Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS): Construction, validity, and reliability. Assessment*, 10,* 178–182.

Karasel, N., Ayda, O. y Tezer, M. (2010). The relationship between mathematics anxiety and mathematical problem solving skills among primary school students. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2,* 5804–5807.

Kovarik, T. (1999). *Comparing the effects of traditional and reformed instructional methods on math anxiety and learning at a community college.* (Tesis doctoral). State University of New Jersey, New Brunswick.

Larson, C. N. (1983). Techniques for developing positive attitudes in preservice teachers. *Arithmetic Teacher, 31*(2), 8-9.

Lester, F., Garofalo, J. y Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Dey influences on problem-solving behavior. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 75-88). Nueva York: Springer-Verlag.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 3-19). Nueva York: Springer-Verlag.

Marshall, S. P. (1989). Affect in schema knowledge: Source and impact. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 49-58). New York: Springer-Verlag.

Martin, C. L. (1994). *A discriminant study of memories, attitudes and beliefs that identify individuals who report feelings of math anxiety*. (Tesis doctoral). Adler School of Professional Psychology.

McLeod, D. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 134-141.

McLeod, D. (1989a). The role of affect in mathematical problem solving. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 20-36). Nueva York: Springer-Verlag.

McLeod, D. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 245-258). Nueva York: Springer-Verlag.

Moorman, C. (2007). *An investigation of how African American community college students with different levels of mathematics anxiety engage in problem solving tasks.* (Tesis doctoral). Florida State University.

Newstead, K. (1998). Aspects of Children's Mathematics Anxiety. *Educational Studies in Mathematics, 36* (1), 53-71.

Nortes, A. y Martínez, R. (1996). Ansiedad ante los exámenes de matemáticas. *Epsilon, 34,* 111-120.

Peker, M. (2009). Pre-service teachers' teaching anxiety about mathematics and their learning styles. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *5*(4), 335-345

Peker, M. y Halat, E. (2008, septiembre). *The pre-service teachers' mathematics teaching anxiety and gender*. Trabajo presentado en la European Conference on Educational Research. Recuperado el 20 de octubre de 2010, de http://www.eera-ecer.eu/fileadmin/user_upload/Publication_FULL_TEXTS/ECER2008_1325_PekerHalat.doc

Peker, M. y Halat, E. (2009). Teaching anxiety and the mathematical representations developed through webquest and spreadsheet activities. *Journal of Applied Sciences, 9*(7), 1301-1308.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 237-250.

Plake, B. S., y Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Educational and Psychological Measurement, 42*, 551-557.

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.

Rico, L. (2005). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Martínez (Ed.) *Matemáticas, Investigación y Educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán*, (pp. 158-180). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Silver, E. A. (1985). *Teaching and Leaming Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Suinn, R. M., y Edwards, R. (1982). The measurement of mathematics anxiety: The Mathematics Anxiety Rating Scale for adolescents-MARS-A. *Journal of Clinical Psychology, 38,* 576-580.

Suinn, R. M., Taylor, S., y Edwards, R. W. (1988). Suinn mathematics anxiety rating scale for elementary school students (MARS-E): Psychometric and normative data. *Educational and Psychological Measurement, 48*, 979-986.

Suinn, R. M., y Winston, E. H. (2003). The Mathematics Anxiety Rating Scale, a brief version: Psychometric data. *Psychological Reports, 92*, 167-173.

Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de Psicología, 26*(1), 143-148.

Thompson, A. y Thompson, P. (1989). Affect and problem solving in an elementary school mathematics classroom. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 162-176). Nueva York: Springer-Verlag.

Tobias, S. y Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review, 50*(1), 63-70.

Yeo, J. (2005). Anxiety and performance on mathematical problem solving of secondary two students in Singapore. *The Mathematics Educador, 8*(2), 71-83.

Javier Monje Parrilla: Profesor de Matemáticas y estudiante de posgrado en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. Su foco de investigación se centra en las respuestas de ansiedad relacionadas con la realización de tareas y problemas de matemáticas. **monjejavier@hotmail.es**

Patricia Pérez-Tyteca: Profesora del Departamento en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia, España. Su línea principal de investigación aborda el estudio de aspectos afectivos en el aprendizaje de las matemáticas y su relación con factores como el género o la elección de estudios superiores**.** **patricia.perez-tyteca@uv.es**

Enrique Castro Martínez: Profesor numerario del Departamento en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. Su línea de investigación contempla el papel las representaciones afectivas y cognitivas en la resolución de problemas de matemáticas. **ecastro@ugr.es**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 63-70
ISSN: 1815-0640

La resolución de problemas y la enseñanza de la matemática elemental

Aikaterini Konstantinidou, Pere López Cuesta

Resumen

La resolución de problemas no tendría por qué ser privativa de la Educación Secundaria y niveles superiores. Argumentamos en este artículo, la conveniencia de introducirla en Educación Primaria[1]. Los niños y niñas de estas edades utilizan espontáneamente estrategias de sentido común para resolver problemas de la vida cotidiana. Estas estrategias no tendrían que desaparecer en las clases de matemáticas, y podrían ser aprovechadas por el profesor para, perfeccionándolas, utilizarlas en la resolución de problemas.

Abstract

Problem solving should not be exclusive of secondary education and upper educational levels. In this paper, we argue the convenience of introducing problem solving in primary education. Children of these ages spontaneously use common sense strategies to solve problems of everyday life. These strategies should not disappear in math classes, and could be exploited by the teacher, refining them, to use them in problem solving.

Resumo

La resolución de problemas no tendría por qué ser privativa de la Educación Secundaria y niveles superiores. Argumentamos en este artículo, la conveniencia de introducirla en Educación Primaria. Los niños y niñas de estas edades utilizan espontáneamente estrategias de sentido común para resolver problemas de la vida cotidiana. Estas estrategias no tendrían que desaparecer en las clases de matemáticas, y podrían ser aprovechadas por el profesor para, perfeccionándolas, utilizarlas en la resolución de problemas.

Introducción

Cuando hablamos de “resolución de problemas”, a menudo instintivamente pensamos en matemáticas de Educación Secundaria o niveles superiores. En general se piensa que la resolución de problemas es una parte especialmente dificultosa del aprendizaje de las matemáticas, una materia que ya de por sí tiene fama de ardua, por lo que, en general, se tiende a obviar en los niveles más elementales. Pero partiendo de la premisa de que en las primeras etapas de la

[1] En el Estado Español la educación se organiza de la siguiente forma:
-Educación Infantil: Hasta los 5 años.
-Educación Primaria: Desde los seis hasta los once años.
-Educación Secundaria Obligatoria (ESO): Desde los 12 hasta los 15 años.
-Bachillerato, que no es obligatorio y consta de dos cursos.
-Para acceder a la Universidad, tras aprobar el Bachillerato, se realiza una prueba de acceso (Selectividad).

enseñanza, el sentido común tendría que ser la base del razonamiento matemático, vamos a intentar argumentar que esto se podría conseguir precisamente a través de la resolución de problemas.

Sentido común

La expresión "sentido común" se puede interpretar de varias formas:

– Por un lado se aplica a una afirmación que es evidente para todo el mundo, que no necesita ser argumentada o demostrada. Este sentido, es, por lo tanto, análogo al de algo que es intuitivamente cierto. No obstante entre algo que es "de sentido común" o algo que es "intuitivo" hay una diferencia: La primera expresión se aplica a afirmaciones con las que todo el mundo estará de acuerdo, mientras que en la segunda puede haber ciertas diferencias según las capacidades intuitivas individuales.

– El conocimiento de sentido común también se refiere frecuentemente al conocimiento práctico, concreto, a la capacidad de resolver problemas reales, de la vida cotidiana, oponiéndose por lo tanto, al conocimiento abstracto, formalizado, propio de las matemáticas[2].

– Otra forma de entender esta distinción entre sentido común y conocimiento científico es atendiendo a los tipos de razonamiento empleados en cada caso.

En la vida cotidiana frecuentemente realizamos razonamientos de tipo *plausible*[3]*,* es decir que llevan a conclusiones válidas en la mayoría de los casos, pero que algunas veces pueden dar lugar a conclusiones erróneas. Por ejemplo, esto sucede, a veces en razonamientos de tipo inductivo. Por el contrario el razonamiento empleado en matemáticas debe llevar siempre, sin excepciones, de premisas ciertas a conclusiones igualmente ciertas.

Enseñanza de la matemática y sentido común

En la enseñanza de la matemática se da una progresiva abstracción y formalización a lo largo de las diferentes etapas, una trayectoria, por tanto, que va del uso normal del razonamiento de sentido común en Educación Infantil y Primaria a formas de razonamiento cada vez más rigurosas y formales.

Es a partir de la Educación Secundaria que en la enseñanza de la matemática se debe ir, poco a poco, poniendo en duda ciertas certezas del sentido común, viendo como algunas veces, conclusiones "evidentes", "de sentido común", no son válidas. Se tendría entonces que empezar a enseñar a los alumnos, a tener una actitud vigilante respecto del sentido común, pero esto sólo a partir de la E. Secundaria.

El problema está en que esta actitud frecuentemente se hipertrofia hasta convertirse en una desconfianza radical respecto del sentido común que puede acabar impregnando la enseñanza de la matemática incluso en los niveles más elementales.

---

[2] *Common sense: practical good sense gained by experience of life, not by special study. (Sentido común: Buen sentido práctico, conseguido por experiencia en la vida, no por estudio especial)* (Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English). Citado en Keitel, C. Kilpatrick, J. (2005): *Mathematics Education and* Common *Sense.*

[3] Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Pag. 13

Hemos encontrado, a menudo, en nuestras clases, alumnos con problemas de este tipo. El razonamiento de sentido común es la forma natural, espontánea, de razonar, y la desconfianza hacia este tipo de razonamiento corre el peligro de convertirse en desconfianza hacia el propio razonamiento, en dudas respecto de las propias capacidades, y por lo tanto, incluso, en sentimientos negativos en la propia autoestima.

Creemos que esta dialéctica sentido común – rigor matemático, tendría que tenerse en cuenta a la hora de planificar las clases, por lo menos en los niveles no universitarios. Se tendría que aprender a dosificar y relativizar el rigor en cada nivel de la enseñanza, de forma que no produzca un menoscabo irremediable de la confianza normal de los estudiantes en su propio razonamiento. Creemos que el sentido común es imprescindible para dar sentido a los contenidos matemáticos elementales.

Sentido común y resolución de problemas

En nuestra opinión la resolución de problemas podría tener en este sentido una importancia capital:

El razonamiento que se emplea para resolver un problema de matemática elemental es esencialmente del mismo tipo que el que se emplea en la vida cotidiana para resolver dificultades, superar obstáculos, retos, vencer en un juego de mesa, resolver un rompecabezas... Los niños, desde que aprenden a hablar, al mismo tiempo que construyen significados, aprenden patrones de razonamiento sencillos que usan espontáneamente para resolver problemas en la vida cotidiana.

Se podría afirmar entonces que el razonamiento heurístico[4] empleado para resolver problemas de matemática elemental forma parte del razonamiento de sentido común.

Algunos de estos patrones son *razonar por prueba y error*, *descubrir y usar pautas o regularidades, razonar usando analogías, usar modelos sencillos de la situación (esquemas, dibujos...), analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema...*

Cuando a nuestros alumnos de la asignatura "Didáctica de la Matemática I" les pedimos que buscaran ejemplos de problemas de la vida cotidiana, no necesariamente de Matemáticas, y explicaran también cómo resolverlos, estos son algunos de los que aparecieron:

Problema: "Una persona acaba de llegar a un país extranjero y tiene que ir desde el aeropuerto a su hotel".
Solución: "Consultar un plano del transporte público" *(usar un modelo sencillo de la situación).*

Problema: "Un niño/a quiere las golosinas que están en un estante alto en la cocina pero no puede llegar a ellas".
Solución: "Agarrar una silla y subirse para poder llegar", *(analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema).*

[4] Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Pag. 173

Problema: “Un niño está en el supermercado con su madre y se pierde”.
Solución: “Buscarla, mirando en diferentes lugares hasta encontrarla” *(prueba y error).*

Problema: “¿Cómo colocar los muebles en una habitación?”
Solución: “Podemos hacer un croquis de cómo queremos que quede la habitación” *(usar un modelo sencillo de la situación).*

Problema: “Un niño ha perdido la tempera de color verde, pero le quedan muchos otros colores. ¿Qué hará para conseguir el color verde?”
Solución: “Puede ir probando, mezclando temperas de otros colores hasta conseguir el color deseado” *(prueba y error).*

Problema: “Necesito tomar un taxi”
Solución: “Para hallar uno me ayudará tener en cuenta que he observado que en esta ciudad los taxis son de color amarillo” *(descubrir y usar pautas o regularidades)*

Problema: “La María ha perdido su libreta de matemáticas”.
Solución: “Ir mirando en los lugares donde normalmente la utiliza” *(prueba y error).*

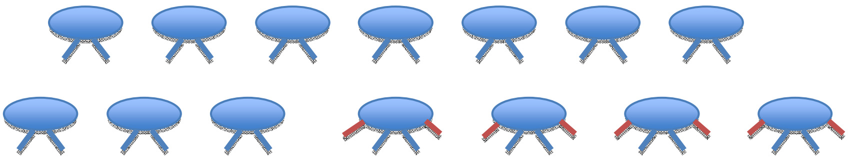
Problema: “Acabo de llegar a una ciudad desconocida y necesito llegar a una dirección”
Solución: “Recordar lo que hice cuando anteriormente me encontré en una situación parecida, para poder resolver este caso análogamente: Buscar alguna persona del país que conozca mi idioma para poder preguntarle” *(razonar usando analogías).*

Se tendría que intentar que estos patrones de razonamiento espontáneos, no se acaben perdiendo y rechazando al entrar en las clases de matemáticas de Educación Primaria. Que los niños no acaben “aprendiendo” que el razonamiento matemático es un tipo de razonamiento extremadamente sofisticado que no tiene nada que ver con el razonamiento que utilizamos en la vida cotidiana. Esta es una creencia muy extendida que hemos observado entre nuestros alumnos, y que forma parte de la creencia igualmente extendida de que las matemáticas son una materia “muy difícil” o sólo apta para talentos superiores.

Veamos ahora algunos ejemplos de problemas de matemática elemental que pueden resolverse usando estos mismos patrones de razonamiento de sentido común:

Problema: “20 bombones cuestan 25 €, ¿Cuánto cuestan 12 bombones?”
Solución: “Para saber cuánto cuestan 12 bombones necesito saber primero cuanto cuesta 1 bombón. Un bombón cuesta 25/20 = 1,25 €. Por tanto 12 bombones cuestan 12x1,25= 15 €” *(analizar qué elementos nos faltan para poder resolver el problema).*

Problema: “Mi abuelo dice que en su corral tiene gallinas y conejos. En total puede contar 7 cabezas y 22 patas. ¿Cuántos animales tiene de cada clase?”.
Solución: “Dibujo 7 animales con 2 patas cada uno. Cuento 14 patas. A continuación voy añadiendo pares de patas hasta llegar a 22”.



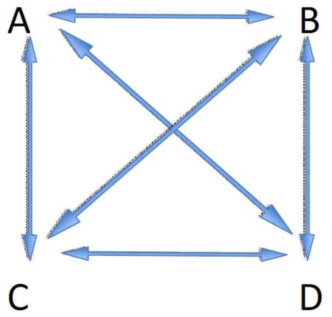
(Usar un modelo sencillo de la situación).

Problema: “Quiero comprar 20 pasteles. Tengo 55€ para gastar y hay pasteles de dos clases: De nata, que van a 2€, y de chocolate, a 3. ¿Cuántos puedo comprar de cada clase?”.
Solución: “Voy probando cantidades de pasteles de nata y chocolate, y compruebo en cada caso cuanto dinero me gastaría:
Si comprara 10 de cada clase me gastaría: 10x2=20 por un lado más 10x3=30 por otro, en total 50€. Si compro 8 de nata y 12 de chocolate me gastaría 8x2=16 más 12x3=36, en total 52€. Si compro 5 de nata y 15 de chocolate gastaría 5x2=10 mas 15x3=45, en total 55€, por tanto estas serían las cantidades que podría comprar de cada clase” *(prueba y error).*

Problema: “En mi barrio se ha convocado un torneo de ping-pong al que se han inscrito 59 jugadores. El torneo se disputará por el método de eliminatorias, es decir cada 2 jugadores juegan un partido, el ganador pasa a la eliminatoria siguiente, y el perdedor queda eliminado. Si en una eliminatoria hay un nº impar de jugadores, uno de ellos, por sorteo, pasa directamente a la eliminatoria siguiente. Queremos saber cuantos partidos se tendrán que jugar en total”
Solución: “Para simplificar el problema pruebo a ver que pasaría si hubiera menos jugadores:
Si hubiera sólo 2 jugadores, con un partido bastaría.
Si hubiera 3 jugarían dos de ellos, y el ganador con el 3º, por lo tanto 2 partidos.
Si hubiera 4 jugarían 2 parejas, y los ganadores volverían a jugar, en total 3 partidos.
Si hubiera 5 jugarían 2 parejas y el 5º pasaría a la eliminatoria siguiente. Tras estos 2 partidos quedarían 3 jugadores que ya hemos visto anteriormente que necesitan de 2 partidos para que haya un vencedor, en total 4 partidos.
Observamos una pauta: En cada caso el nº de partidos es igual al nº de jugadores menos uno. Comprobemos que para 6 jugadores se sigue cumpliendo esta regla:
Si hubiera 6 jugadores jugarían primero 3 parejas, quedarían entonces 3 jugadores que necesitarían de 2 partidos más, por lo tanto en total 5 partidos.
Si aplicamos esta regla al caso de 59 jugadores podemos concluir que se necesitará jugar 58 partidos” *(descubrir y usar pautas y regularidades).*

Problema: “Queremos saber cuantos partidos se tendrían que jugar si ese mismo torneo se disputara por el procedimiento de “liga”, es decir aquel en que cada jugador ha de jugar con todos los demás, y en cada partido gana dos puntos, uno o ninguno según que gane, empate o pierda, respectivamente, siendo el vencedor del torneo aquel que sume más puntos al final”.
Solución: “Simplifiquemos el problema y veamos que pasaría si en la competición jugaran sólo 4 jugadores A, B, C, D. Podemos razonar que cada jugador ha de jugar con los 3 restantes, por lo tanto 3x4=12 partidos. Pero si nos ayudamos de un dibujo nos damos cuenta que cada partido lo hemos contado 2 veces. Por ejemplo

el partido que juegan A y B es uno de los 3 partidos que ha de jugar A pero también uno de los 3 que ha de jugar B. Por lo tanto hemos de dividir por 2. 12/2 = 6 partidos.

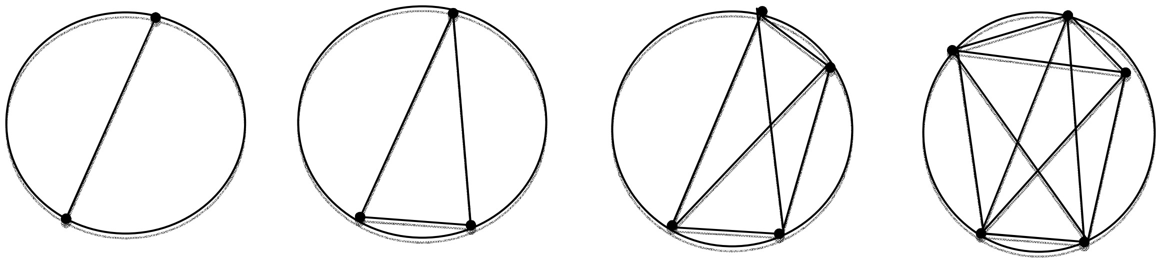


Hacemos un razonamiento análogo para el caso de 59 jugadores: Cada jugador tendría que jugar con todos los demás, por lo tanto cada jugador competirá en 58 partidos. Ahora hemos de multiplicar por el nº de jugadores y después dividir por 2 porque si no cada partido lo contaríamos 2 veces. Por lo tanto: 59x58=3422.
3422/2=1711 partidos" *(razonar usando analogías).*

Como hemos dicho anteriormente a partir de la Educación Secundaria se tendría que empezar a poner en cuestión algunas de las certezas del razonamiento de sentido común. Por ejemplo se puede introducir algún caso en que el patrón de razonamiento *descubrir y usar pautas y regularidades* (o como también se le llama *razonamiento inductivo*), falla, es decir lleva a conclusiones erróneas.

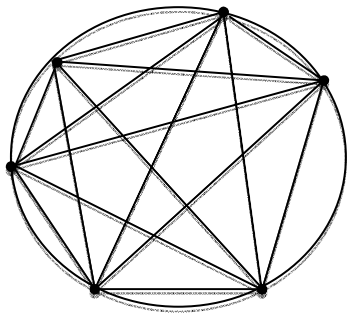
Por ejemplo:

Problema: "Sobre una circunferencia tenemos 43 puntos. Los unimos dos a dos mediante segmentos de recta de todas las formas posibles. Hallar cual es el nº máximo de partes en que queda dividido el círculo"[5].
Solución: "Para que el nº de partes en que queda dividido el círculo sea máximo basta darse cuenta de que los puntos de la circunferencia han de estar situados de manera que los segmentos que los unen no se corten más de 2 en un mismo punto interior del círculo.
Simplificamos el problema e intentamos hallar una pauta.
Si sólo tuviéramos 2 puntos, al unirlos, el círculo quedaría dividido en 2 partes, con 3 puntos quedaría dividido en 4 partes, con 4 puntos en 8 y con 5 puntos en 16 partes, como se muestra a continuación:



[5] Mason, J. Burton, L., Stacey, K. *Pensar matemáticamente.* Pág. 91

Observamos una pauta: El número máximo de partes es 2^{n-1} donde n es el número de puntos. Aplicando la pauta a nuestro caso tendríamos 2^{42} partes en que quedaría dividido el círculo. Pero si probamos que sucede para el caso de 6 puntos:



Comprobamos que no se verifica la pauta: El número máximo de partes en que queda dividido el círculo no es $2^5 = 32$ sino 31".

Esto nos llevará a poner en duda el resultado de los problemas resueltos anteriormente en que hemos aplicado este patrón de razonamiento y por lo tanto a revisar su resolución. Esta revisión pasará por intentar hallar un razonamiento que nos asegure que la pauta hallada es válida para cualquier caso, es decir una demostración de la validez general de la pauta.

Por ejemplo en el problema anterior del torneo disputado por el método de las eliminatorias, la demostración de la validez de la pauta hallada pasaría por darse cuenta de que en cada partido hay un jugador eliminado, y viceversa para cada jugador eliminado hay un partido donde ha sido vencido y por lo tanto eliminado, por lo tanto hay tantos partidos como jugadores eliminados, o sea tantos partidos como jugadores participantes en el torneo menos uno, y esto independientemente del nº de jugadores. Por lo tanto podemos concluir que la pauta hallada es válida.

Conclusiones

- En la Educación Primaria no solo es posible, sino conveniente introducir la Resolución de Problemas de Matemáticas.
- Se tendría que intentar que los alumnos percibieran los problemas de matemáticas como retos del mismo tipo que los que resuelven en su vida diaria: Ocupaciones cotidianas, juegos, adivinanzas, etc., no como un tipo de tarea que no tiene nada que ver con su vida normal fuera del aula de matemáticas.
- En consecuencia en su resolución se tendría que permitir y favorecer el uso del mismo tipo de estrategias de sentido común que usan los niños espontáneamente, aunque alguna de estas estrategias alguien la pueda considerar incorrecta desde un punto de vista estrictamente matemático.
- No sería sino al comenzar la Educación Secundaria que se puede empezar a perfeccionar algunas de estas estrategias, y a argumentar la necesidad de ir introduciendo mayor rigor en el razonamiento.

Bibliografía

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.España.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. *Revista SUMA*, 26,11-21.

Castelló, M. J., Codina, R., López, P. (2010) Cambiar las actitudes hacia las matemáticas resolviendo problemas. Una experiencia en Formación del Profesorado de Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*. Volumen 22. 65-76

De Guzmán, M. (1991): *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona.

Keitel, C. Kilpatrick, J. (2005): Mathematics Education and Common Sense. *En meaning in Mathematics Education*. Springer, Melbourne.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988): *Pensar matemáticamente*. Labor, Barcelona.

Perelman, C., Olbrechts-Tyteca, L. (1988): *Traité de l'argumentation*. Editions de l'Université de Bruxelles. Bruselas.

Polya, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos, Madrid.

Polya, G. (1985): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Schoenfeld, A. (1985*): Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando.

Stacey, K., Groves, S. (1999): *Resolver problemas: Estrategias*. Narcea, Madrid.

Aikaterini Konstantinidou. Grecia 1977. Licenciada en Física. Campus Mundet, Llevant, Pl. 1a. Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Argumentación y didáctica de las ciencias, Representaciones externas. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona**.** konstantinidou@ub.edu

Pere López Cuesta. Lleida 1945. Licenciado en Ciencias (Matemáticas). Líneas de trabajo: Resolución de problemas, Arte y Matemáticas, Enseñanza de la Geometría, Matemática de la vida cotidiana. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Facultad de Formación del Profesorado. Universidad de Barcelona**.** plopez@ub.edu

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 71-84
ISSN: 1815-0640

Análise e classificação de erros na resolução de uma prova de Olimpíada Matemática

Maria Madalena Dullius, Marli Teresinha Quartieri, Virginia Furlanetto

Resumo

O presente trabalho é resultado de uma investigação realizada pelo grupo de trabalho “Tecnologias no Ensino[1]”, que integra a equipe de pesquisa “Metodologias para o ensino de Ciências Exatas”, desenvolvida no Centro Universitário UNIVATES, em Lajeado/RS. A ação aqui explicitada refere-se à análise dos tipos de erros cometidos por estudantes do Ensino Médio do Vale do Taquari, na resolução das provas da 11ª Olimpíada Matemática da UNIVATES (OMU).

Abstract

This work is the result of an investigation conducted by the working group on "Technology in Education" which integrates the research team "Methodologies for the teaching of Sciences ", developed in the University Center UNIVATES in Lajeado/RS. The action here refers to the explicit analysis of the types of errors made by high school students of Vale do Taquari, in solving the test of the 11th Mathematics Olympiad of UNIVATES (OMU)..

Resumen

O presente trabalho é resultado de uma investigação realizada pelo grupo de trabalho “Tecnologias no Ensino[2]”, que integra a equipe de pesquisa “Metodologias para o ensino de Ciências Exatas”, desenvolvida no Centro Universitário UNIVATES, em Lajeado/RS. A ação aqui explicitada refere-se à análise dos tipos de erros cometidos por estudantes do Ensino Médio do Vale do Taquari, na resolução das provas da 11ª Olimpíada Matemática da UNIVATES (OMU).

1. Introdução

Estudos apontam que a metodologia dominante no contexto do ensino de Ciências Exatas (Matemática, Física e Química) é a aula expositiva, onde o professor explica oralmente o conteúdo e aos alunos, cabe resolver, geralmente mecanicamente, exercícios repetitivos, sem que percebam suas potencialidades e importância como ferramenta para a resolução de problemas práticos. Há uma enorme preocupação por parte deste grupo de pesquisa, em investigar diferentes metodologias de ensino, já que, os recursos hoje disponíveis permitem ir além da linearidade do ensino tradicional, oferecendo a possibilidade de proporcionar aos estudantes condições que favoreçam a aprendizagem significativa.

No Centro Universitário UNIVATES, algumas das pesquisas desenvolvidas na área do Ensino de Ciências Exatas direcionam-se a investigar obstáculos de

[1] Esta pesquisa contou com o apoio da FAPERGS pelo edital 003/2009 – Auxílio Recém-Doutor (ARD)
[2] Esta pesquisa contou com o apoio da FAPERGS pelo edital 003/2009 – Auxílio Recém-Doutor (ARD)

aprendizagem no ensino da Matemática e buscar estratégias para superá-los. Anualmente, a Instituição realiza a OMU, cuja origem tem relação muito próxima com essas pesquisas acerca do ensino de Ciências Exatas, especialmente na disciplina de Matemática. O principal objetivo da OMU é aproveitar o gosto natural dos jovens pelas competições e estimulá-los a um aprendizado menos burocrático, resolvendo problemas novos e desafiantes. Pretende ainda, incentivar os professores a aperfeiçoarem as metodologias utilizadas em sala de aula de forma a estimular os estudantes a serem mais autônomos e co-responsáveis pela sua própria formação. A prova é constituída por 10 questões e a interdisciplinaridade é uma de suas particularidades, já que se procura a contextualização das questões, trazendo problemas do cotidiano, abordando os conteúdos previstos no currículo mínimo de cada série, numa mescla de questões objetivas e discursivas. Os estudantes podem optar pela realização da prova em dupla ou individualmente e é permitido o uso de calculadoras. A análise dos resultados das Olimpíadas tem servido como um dos parâmetros para as ações de novas pesquisas.

Neste contexto, a ação aqui explicitada refere-se à investigação dos tipos de erros cometidos por estudantes de Ensino Médio (com idade aproximadamente entre 15 e 17 anos) na realização da 11ª OMU. As escolas participantes localizam-se no Vale do Taquari, região central do estado do Rio Grande do Sul. Por constituir-se em uma das ações do grupo do pesquisa “Metodologias para o Ensino de Ciências Exatas”, que visa a elaboração de materiais instrucionais para o Ensino de Matemática com o uso de tecnologias, esta investigação norteará a elaboração de materiais, propondo o uso do computador como ferramenta para abordar, de forma diferenciada, os conteúdos onde os estudantes apresentam erros recorrentes, no intuito de minimizá-los a longo prazo.

2. Aporte teórico

Atualmente, em educação, muito se tem discutido a respeito da importância e necessidade de avaliar e, cada vez mais faz-se necessário refletir sobre o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem. A partir dos instrumentos de avaliação utilizados nas práticas escolares, o erro pode ser encarado de diferentes formas, porém a mais comum delas é a visão de que representa aquilo que o estudante não é capaz de fazer. Por outro lado, estudos têm apontado o erro não mais como um simples determinante do sucesso ou fracasso dos estudantes, mas como objeto de investigação dos professores, que podem, a partir desses estudos, obter informações a respeito da aprendizagem desses estudantes e subsídios para o direcionamento das demais atividades, contemplando as dificuldades ainda existentes.

Para Souza (2002), o professor pode utilizar-se da análise dos erros cometidos pelos estudantes, para planejar suas intervenções futuras de forma a levá-los a perceber onde e porque erraram, bem como buscar a superação das limitações para assim, retomar o processo de construção do conhecimento. Hoffmann (1992) vai além, falando da omissão de muitos professores ao desconsiderarem o motivo pelo qual o estudante errou, impedindo assim, que o mesmo possa reestruturar seu saber, superando os desafios. A autora ainda cita o modelo pedagógico empirista onde os erros têm conotação de fracasso, sem nenhuma função pedagógica e devem simplesmente, ser coibidos. A autora alude que:

> no processo de ensino e aprendizagem, não basta apenas conhecer os erros e os acertos, a correção ou incorreção das respostas dos alunos, numa determinada prova de avaliação, mas sim, e principalmente, conhecer os processos que o levam a produzir estas respostas. Mais do que controlar, o professor deve interpretar, identificar problemas e levantar hipóteses explicativas que lhe permitam avaliar a complexidade e sofisticação do pensamento do aluno. Mais do que medir determinados comportamentos, importa compreender as razões do erro.

Nesse sentido, Rosso (apud Pasinotto, 2008) destaca que:

> A análise do erro permite-nos valorizar o processo mental subjacente às respostas dadas e não apenas a resposta como um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelo aluno nos leva a verificar que há algo de positivo nele mesmo quando erra (p.18).

Brousseau (1983, apud Cury, 2008), também em contraposição aos modelos empiristas e behavoristas, define o erro como “o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente, inadaptado”, chamando-os simplesmente de obstáculos.

Para Berti e Carvalho (s.d.), o erro do estudante pode ser visto como um “revelador dos processos de raciocínio e das superações necessárias para a construção do conhecimento lógico-matemático”. Já Cury (2008) trata o erro como um conhecimento que, por ter sido construido pelo estudante, precisa de intervenções no sentido de levá-lo a questionar seus resultados.

Já Esteban (2002) fala da avaliação como prática de investigação, onde o estudante passa a sentir-se livre para expor sua resposta, que será admitida como conhecimento parcial, ao invés de fracasso. Conclui que, desta forma, o erro deixa de representar a ausência de conhecimento válido, para ser visto como uma articulação dos conhecimentos que o sujeito já possui com os novos que vão sendo elaborados.

Diante do exposto, é possível inferir que o professor deve estar atento à origem do erro cometido pelo estudante, para poder intervir de forma a ajudá-lo a detectar e superar as dificuldades.

Berti e Carvalho citam Davis e Espósito (1990), que consideram três tipos de erros:

- Erros de procedimento: trata-se simplesmente da seleção inadequada de procedimentos, uma vez que o sujeito possui a estrutura cognitiva requerida pela tarefa; acontecem por falta de treinamento ou distração.
- Erros construtivos: ocorrem pela existência de lacunas que dificultam a assimilação dos dados disponíveis e sinalizam a formação de novas estruturas.
- Erros por limites na estrutura do pensamento: refere-se à impossibilidade de compreender o que é solicitado, por não possuir a estrutura necessária à solução da tarefa.

Souza (2002) categoriza os erros dos estudantes em gerais e locais. Na primeira categoria, inclui os erros recorrentes em grande parte dos conteúdos trabalhados e que envolvem erros de cálculo, troca de operações e regra de sinais e dizem respeito a compreensões equivocadas por parte do estudante. Na categoria dos erros locais, a autora menciona os erros cometidos a partir de hipóteses relacionadas a particularidades de cada tema. Essa categoria abrange, segundo a autora, as seguintes classificações:

- Erros por apropriação deficiente de conceitos: ligados à metodologia tradicional, onde não é permitido ao estudante explorar, abstrair e construir o conhecimento;
- Erros por falta de compreensão e domínio de procedimentos: dizem respeito à falta de capacidade por parte do estudante, em estabelecer relações ou perceber as implicações de cada ação, quando não lhe é oportunizado compreender determinados procedimentos antes de apresentar-lhe uma regra para a qual não abstraiu o significado;
- Erros por fragilidade nas organizações conceituais que impedem a integração de novos conhecimentos: ocasionados pela resistência dos estudantes em incorporar novos conhecimentos na estrutura cognitiva, devido à presença de obstáculos devidos à fragilidade dos conhecimentos anteriores.

Santomauro (2010) distingue: erros na interpretação do enunciado (onde o estudante consegue selecionar os dados, mas tem dificuldade em interpretar o que o problema pede), erros por desconhecimento do conteúdo (onde as informações numéricas são relacionadas através de um procedimento qualquer) e ainda, erros por falha em uma etapa do procedimento (onde os dados e operações são selecionados corretamente, porém ocorre algum descuido no processo).

Já Astolfi (1999), propõe uma categorização mais detalhada, ampliando os tipos e causas de erros que podem vir a ser cometidos pelos estudantes:

- Erros causados pela incompreensão do enunciado da atividade, que pode não ser tão “clara” como parece a quem escreveu;
- Erros devidos aos “costumes escolares”, onde o estudante tenta adaptar suas respostas ao que imagina que o professor espere que ele apresente;
- Erros que demonstram as concepções alternativas e conhecimentos não científicos dos estudantes;
- Erros relacionados com as operações intelectuais envolvidas que, apesar de parecerem “naturais” ao professor, podem não fazer parte dos conhecimentos do estudante;
- Erros no caminho utilizado pelo estudante, com o agravante de que o professor possa vir a não aceitar ou entender uma forma diferente daquela imaginada por ele;
- Erros devidos à sobrecarga cognitiva, quando a capacidade cognitiva necessária para a resolução da atividade é subestimada;
- Erros originados pela incompreensão de conceitos de outra disciplina;
- Erros causados pela complexidade do conteúdo.

(Adaptação feita do original em espanhol)

Cordeiro (2009), ao investigar erros cometidos por estudantes de Ensino Médio, na resolução de problemas de geometria, cita e utiliza a categorização proposta por Radatz:

- Erros devido a dificuldades na linguagem: são apresentados na utilização de conceitos, vocabulário e símbolos matemáticos, e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática;
- Erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldades em obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico;
- Erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiências na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos;
- Erros devido a associações incorretas ou a rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem os erros por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação;
- Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidos por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos. (Radatz, 1979, apud Cordeiro, 2009, pág. 49)

A partir das diferentes classificações apresentadas pelos autores para os erros cometidos pelos estudantes, adaptamos algumas para fazer a categorização dos erros recorrentes na resolução das provas da OMU, conforme apresentamos a seguir.

3. Metodologia

Iniciamos o trabalho em março de 2010, com a leitura de estudos realizados por autores que abordam tipos de erros apresentados por estudantes na resolução de problemas matemáticos (CURY, 2008; DAVIS E ESPÓSITO, 1990; ASTOLFI, 1999; CORDEIRO, 2009 ...). Partindo deste referencial, fizemos um levantamento dos tipos de erros citados e selecionamos alguns para nortear nosso trabalho, sendo eles:

- Erros construtivos, onde os alunos demonstram lacunas na construção do conhecimento;
- Erros na compreensão do enunciado, onde o estudante seleciona os dados, mas não entende o que, de fato, o problema pede que se faça com os mesmos;
- Erros por falha em uma etapa do procedimento, ocorridos quando os dados e operações são selecionados corretamente, mas ocorre um pequeno descuido em uma etapa do processo de resolução;
- Erros devido a associações incorretas, onde foram aplicadas quaisquer operações a quaisquer dados constantes ou não no enunciado;

- Erros por necessidade de formalização (utilização de fórmulas): essa categoria foi criada pelos autores deste trabalho, a partir da observação de certas resoluções, onde os estudantes demonstraram-se fortemente arraigados ao cálculo formal, demonstrando necessidade de uso do formalismo matemático, apresentando expressões com incógnitas para resolver a questão.

Utilizamos ainda, as categorias "só resposta", onde os estudantes não apresentaram o desenvolvimento da questão, a categoria "não respondeu" e ainda, a categoria "outros", onde não foi possível identificar o tipo de erro cometido.

Definidas as categorias, partimos para a análise de um total de 311 provas de estudantes do Ensino Médio de 26 municípios do Vale do Taquari, sendo 123 de 1ª série, 109 estudantes de 2ª série e 79 de 3ª série. Nesta etapa, foi organizada uma tabela para cada série do Ensino Médio, relacionando as questões que apresentavam respostas incorretas, com o tipo de erro cometido. Esta análise é de foco predominantemente qualitativo e revela quais os tipos de erros que os estudantes mais cometeram em cada conteúdo matemático envolvido nas questões.

4. Análise dos dados

Antes de prosseguir com a análise dos dados e categorização dos erros recorrentes, é importante salientar que o enquadramento dos erros cometidos pelos estudantes na prova da OMU, segundo a classificação apresentada, baseou-se em nossa experiência como professores-pesquisadores e na comparação com a categorização feita pelos autores estudados, sendo passíveis de outras formas de classificação por outro profissional.

Apresentamos na Figura 1, um panorama geral do total de erros em cada questão por série do Ensino Médio. Considerando o total de participantes de cada série, podemos perceber que, proporcionalmente, a maior quantidade de erros ocorreu nas provas realizadas pelos estudantes da 1ª série. Assinalamos, entretanto, que esses estudantes poderiam anular duas questões da prova, assim como, os da 2ª série, poderiam fazê-lo com uma questão, enquanto que os da 3ª série deveriam fazer todas. Tendo em vista que alguns dos estudantes não destacaram quais questões optaram por anular, todas as não resolvidas foram consideradas incorretas para a apresentação desses dados.

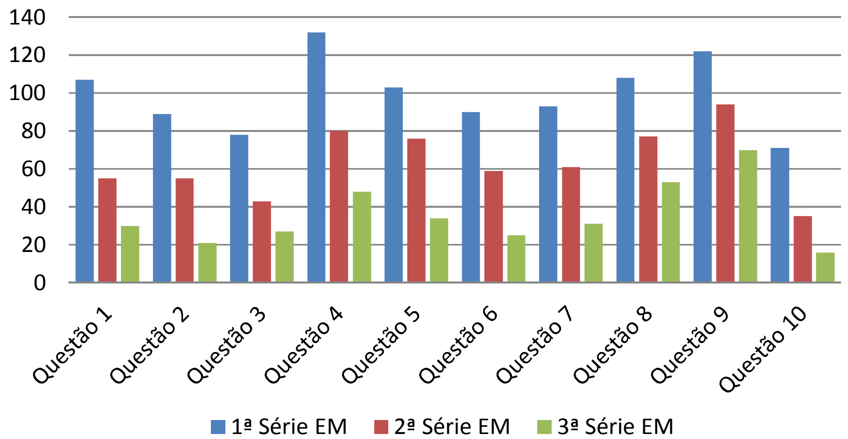


Figura 1: Gráfico referente ao total de erros em cada questão

A seguir, serão apresentadas algumas questões da prova (Haetinger et al, 2008), acompanhadas dos respectivos gráficos de tipos de erros cometidos pelos estudantes de cada série, bem como exemplos para justificar a categorização utilizada. A respectiva análise feita pelo grupo de pesquisa levou em consideração os erros recorrentes, buscando entender ou interpretar os motivos de sua ocorrência. Cabe ressaltar que, para efeito de comparações da quantidade de erros de cada categoria, não será considerada a categoria "não respondeu"

Questão 3 - Considerar os números $M=2^{700}$, $N=11^{200}$, $O=5^{300}$. *Assinalar a alternativa correta:*

a) $M<O<N$

b) $N<M<O$

c) $N<O<M$

d) $O<M<N$

e) $O<N<M$

A Figura 2 refere-se à categorização dos erros cometidos pelos estudantes ao resolver a Questão 3. Ressaltamos nesta questão, a baixa ocorrência de erros nas resoluções dos alunos da 3ª série, o que nos leva a inferir que possuem domínio de tal conteúdo. Observa-se também, a tendência apresentada pelos estudantes da 1ª série em apenas assinalar uma resposta, sem tentar resolvê-la, pela possibilidade apresentada nas questões objetivas.

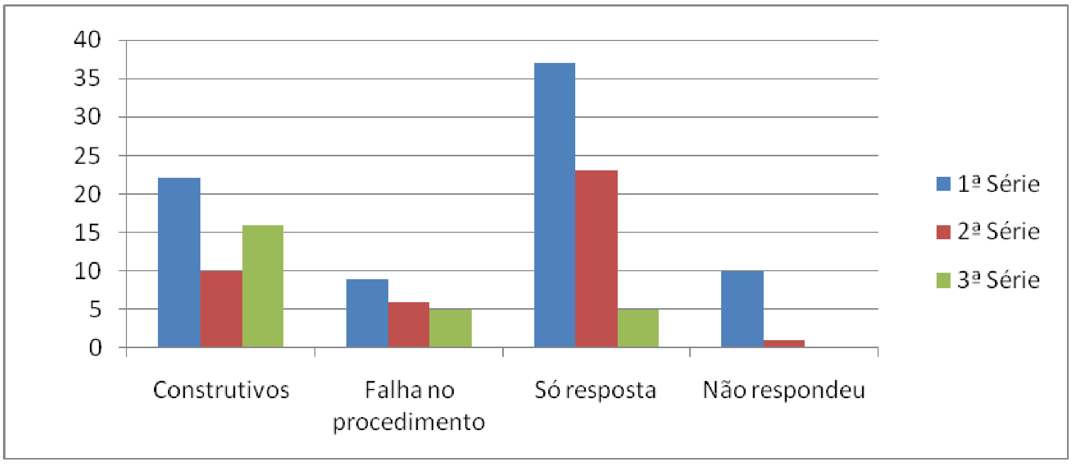


Figura 2: Gráfico referente à categorização dos erros recorrentes na Questão 3.

Destacamos nesta questão as resoluções onde os estudantes multiplicaram a base pelo expoente, constituindo-se, segundo Davis e Espósito, em um erro construtivo, já que sua estrutura cognitiva é insuficiente para a resolução do problema. Este tipo de erro indica, portanto, uma lacuna a ser trabalhada, para possibilitar a passagem para outra etapa do desenvolvimento. Apresentamos na Figura 3, um exemplo desta categorização, onde o estudante não escolheu uma forma de resolução eficaz, que o fizesse chegar ao resultado correto.

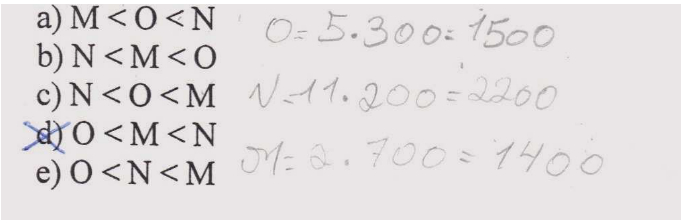
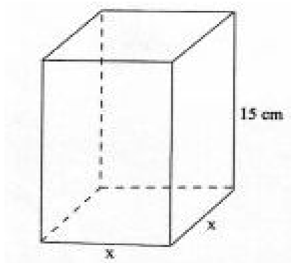


Figura 3: Exemplo de erro construtivo
Fonte: Haetinger et al, 2008

Questão 5. Um recipiente, na forma de um prisma retangular reto de base quadrada, cuja área lateral é igual ao sêxtuplo da área da base, contém um determinado medicamento que ocupa $^3/_4$ de sua capacidade total. Conforme prescrição médica, três doses diárias desse medicamento, de 50mL cada, deverão ser ministradas a um paciente durante seis dias. Nessas condições, é correto afirmar que, para ministrar a quantidade total prescrita, o medicamento contido no recipiente será:

a) Insuficiente, faltando 125 mL.
b) Insuficiente, faltando 100mL.
c) Suficiente, não faltando nem restando medicamento.
d) Suficiente, restando ainda 125mL.
e) Suficiente, restando ainda 225mL.



Na Figura 4, apresentamos a categorização das respostas apresentadas pelos alunos para a Questão 5.

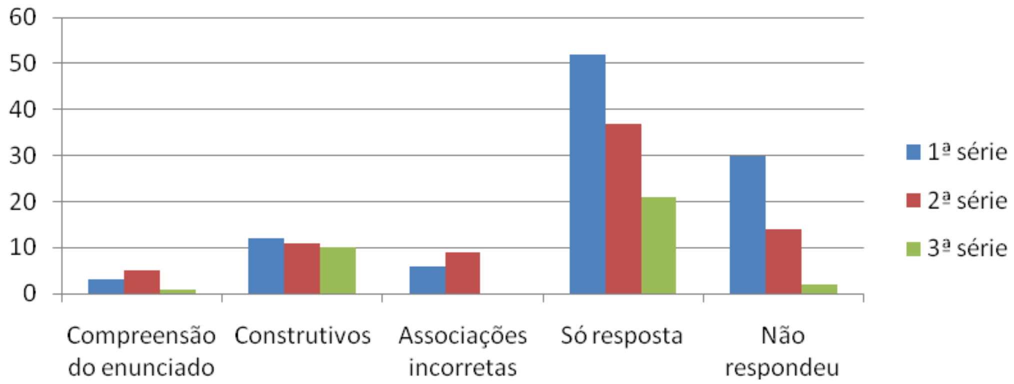


Figura 4: Gráfico referente à categorização dos erros recorrentes na Questão 5.

Destacamos nesta questão, que cerca de 66% dos alunos que responderam incorretamente, apenas assinalaram uma resposta, sem apresentar indícios de resolução. Este dado nos mostra mais uma vez que as questões de múltipla escolha não nos fornecem dados confiáveis no que se refere a avaliação do conhecimento atingido pelos estudantes. Provavelmente, os estudantes que apenas assinalaram uma resposta, não sabiam resolver a questão, ou ainda, preferiram “chutar” uma resposta a ter que interpretar e pensar sobre a resolução. Poderiam ter acertado a resposta, “mascarando” assim seu erro. Dessa forma, o professor não possui subsídios para a detecção das dificuldades existentes e, portanto, torna-se mais difícil auxiliar o estudante na construção do conhecimento.

Questão 6 – Os estudantes dos 3º anos diurno e noturno de uma escola se submeteram a uma prova de seleção, visando à participação numa olimpíada internacional. Dentre os que tiraram nota 9,5 ou 10,0, será escolhido um por sorteio.

Nota	Turno	
	Diurno	Noturno
9,5	6	7
10,0	5	8

Com base na tabela acima, qual a probabilidade de que o aluno sorteado tenha tirado nota 10,0 e seja do noturno?

Apresentamos na Figura 5, a categorização dos erros referentes à Questão 6. Observamos, a partir desta figura, maior ocorrência de erros por associações incorretas nesta questão. Classificamos assim, as resoluções onde os estudantes submeteram quaisquer dados constantes no enunciado, a quaisquer operações.

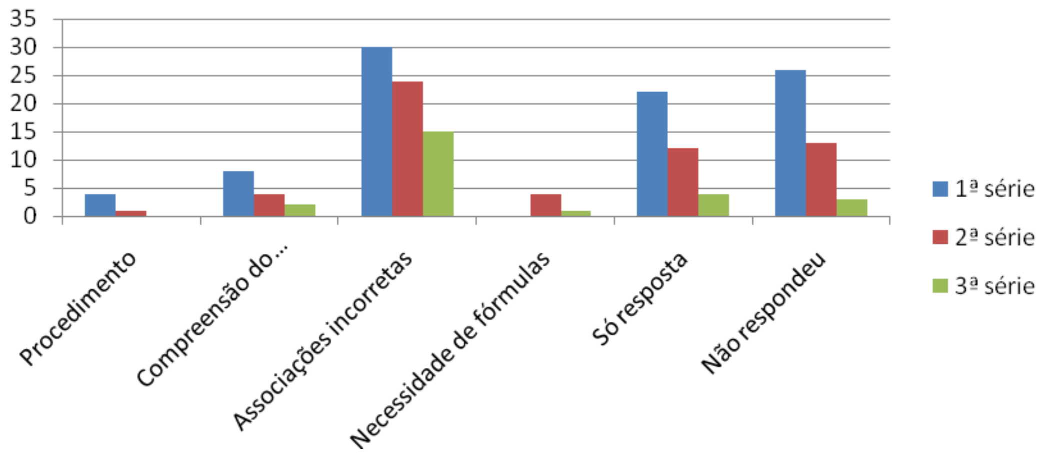


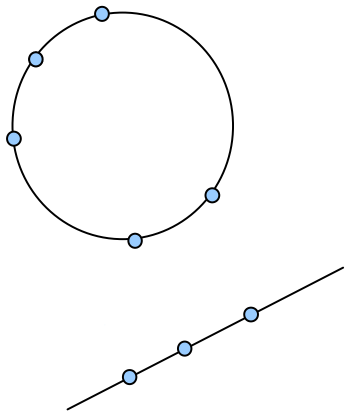
Figura 5: Gráfico referente a categorização dos erros recorrentes na Questão 6.

Na Figura 6, citamos um exemplo desse tipo de resolução, apresentada em cerca de 53% das resoluções incorretas, onde o estudante parece ter organizado uma multiplicação entre frações: a primeira delas, representando, do total de alunos, os que tiraram nota 10,0 e a outra, representando também do total, aqueles que são do noturno.

$$\frac{13}{26} \cdot \frac{15}{26} = \frac{195}{676} = 0{,}28\%$$

Figura 6: Exemplo de erro por associações incorretas
Fonte: Haetinger et al, 2008

Questão 9. A figura abaixo mostra 5 pontos pertencentes à circunferência e 3 pontos pertencentes à reta. Qual o número máximo de triângulos distintos que podem ser formados de modo que os vértices sejam três pontos dos 8 pontos dados.



No gráfico da Figura 7, apresentamos os tipos de erros cometidos na resolução da Questão 9.

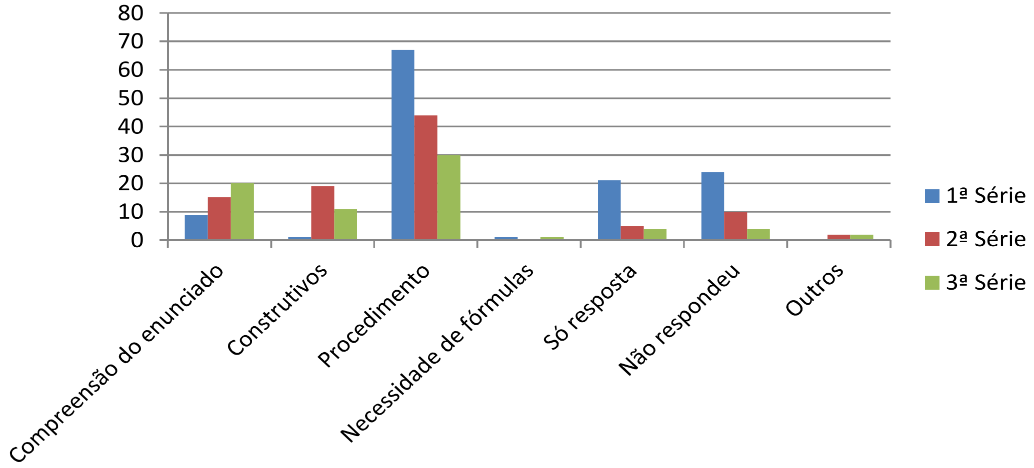


Figura. 7: Gráfico referente à categorização dos erros recorrentes na Questão 9.

Nesta questão, observa-se maior ocorrência de erros devido a *falhas no procedimento* (aproximadamente 56% dos que erraram a questão), que Davis e Espósito atribuem à falta de treino ou distração e que acontecem quando o estudante "possui a estrutura cognitiva requerida pela tarefa", ou seja, seleciona corretamente a forma de resolução e os dados, mas erra um cálculo, falha em uma etapa do procedimento. Evidenciamos esse tipo de erro através da Figura 8, onde a estratégia utilizada foi a de desenhar os possíveis triângulos, mas, provavelmente pelo fato de haver a possibilidade de formar vários deles, o estudante não explorou todas. A princípio, esta é uma estratégia válida para a resolução desse tipo de questão, porém neste caso, se mostra pouco eficaz, já que a maioria dos estudantes que cometeu esse tipo de erro utilizou-se da mesma estratégia.

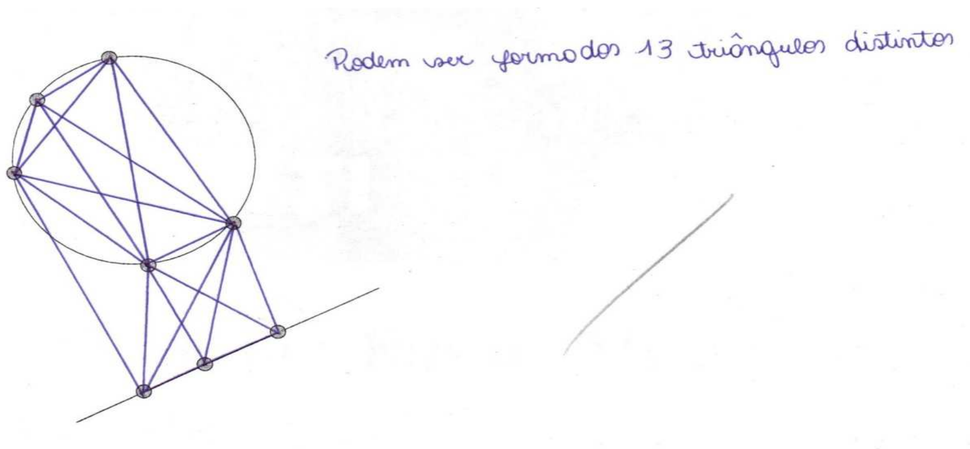
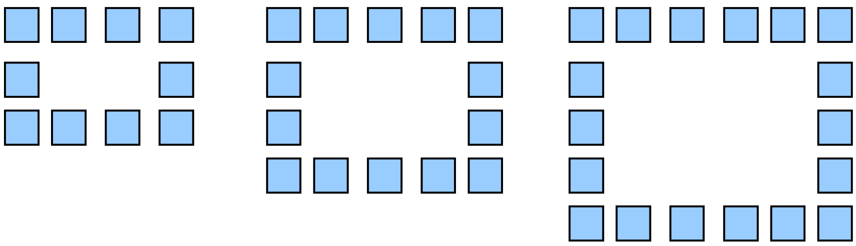


Figura. 8: Exemplo de erro de procedimento. Fonte: Haetinger et al, 2008

Questão 10. Usando ladrilhos quadrangulares, Ana decorou uma parede, conforme mostrado, parcialmente, na seqüência de peças abaixo:



1ª peça **2ª peça** **3ª peça**

Sabe-se que Ana seguiu o mesmo padrão estabelecido na figura acima no desenho das demais peças com as quais decorou a parede. Quantos ladrilhos quadrangulares foram necessários na última peça de decoração, sabendo-se que Ana utilizou, ao todo, 330 ladrilhos?

No gráfico da Figura 9, apresentamos os tipos de erros cometidos na resolução da Questão 10.

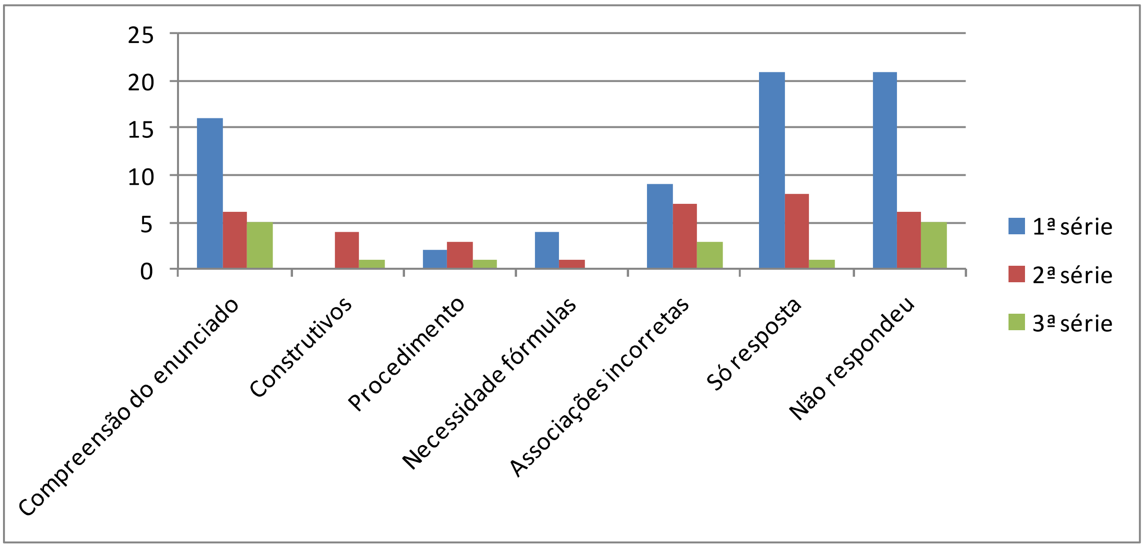


Figura 9: Gráfico referente a categorização dos erros recorrentes na Questão 10.

Nesta questão, observa-se grande ocorrência de erros devido à *compreensão do enunciado* (aproximadamente 30% dos alunos que erraram a questão), que, segundo Santomauro (2010), ocorre quando o estudante consegue selecionar os dados do problema, porém tem dificuldade "na hora de traduzir o que pede o problema para a linguagem própria da Matemática", ou seja, empregar corretamente os dados selecionados, na aplicação das operações. Na Figura 10, destacamos uma resolução classificada nessa categoria.

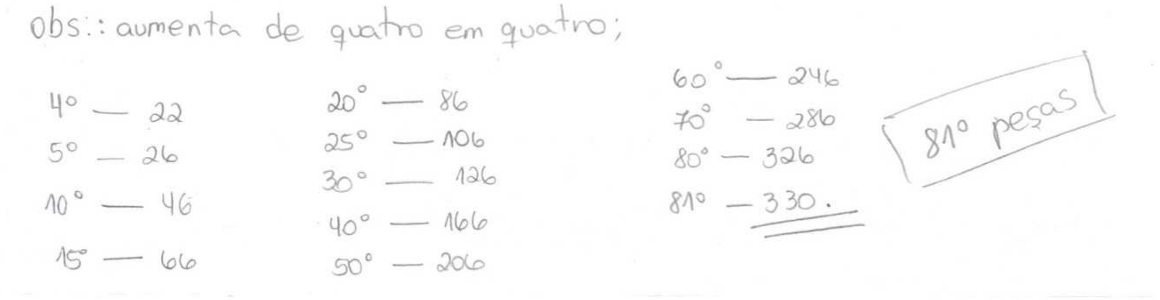


Figura 10: Exemplo de erro devido à compreensão do enunciado. Fonte: Haetinger et al, 2008

Nessa resolução, fica evidente que o estudante, ao invés de encontrar a quantidade de ladrilhos utilizados na última peça, sendo esta, aquela que, somada com as anteriores, resultasse em 330 ladrilhos, destacou a posição da peça composta pelos 330 ladrilhos.

5. Algumas considerações

Realizar este trabalho representou uma reflexão sobre o importante papel do professor, no processo de ensino e, mais ainda, na verificação dos obstáculos encontrados por cada estudante, no decorrer deste processo, impedindo-o de lograr a aprendizagem. É fundamental que o professor consiga detectar as limitações de cada estudante, para poder auxiliá-lo, já que os mesmos, nem sempre conseguem chegar a esta percepção. Mais ainda, podemos inferir que, detectar o erro é imprescindível para planejar ações que visem a sanar essas limitações, de forma a promover a construção do conhecimento.

A respeito dos erros de procedimento, destacamos sua maior incidência em casos particulares, como o da Questão 9. Podemos inferir que isso se deva à aparente facilidade em resolvê-la através de desenho e, por ser uma quantidade relativamente grande de triângulos a serem formados, os estudantes que tentaram resolvê-la dessa forma, acabaram não explorando todas as possibilidades.

No caso da Questão 6, onde a maioria dos erros ocorreu por associações incorretas, podemos inferir que parte desta falha seja devido a dificuldades de interpretação, que resultaram na aplicação de operações das mais variadas a estes dados mal interpretados, mesclados com outros que, muitas vezes, sequer constavam no enunciado do problema. Atribuímos ainda a baixa ocorrência de erros por necessidade de formalização, ao fato de que, nas orientações da prova é incentivado o uso de estratégias alternativas de resolução de problemas.

Nas questões analisadas observamos, porém de modo geral, grande incidência de erros devidos a compreensão do enunciado e por dificuldades com o conteúdo (erros construtivos) que aparecem na maioria das questões. Quanto às dificuldades de interpretação, podemos pensar que sejam fruto de metodologias que priorizam a mera resolução de cálculos, sem dar significado matemático para os mesmos.

Já o fato dos estudantes apresentarem grande ocorrência de erros por dificuldades com o conteúdo envolvido, pode remeter a possíveis falhas no processo de construção do conhecimento e, portanto é interessante rever atividades trabalhadas, aperfeiçoá-las, inovar na forma de trabalhar tais conteúdos em sala de aula. Para isso, podemos inferir que seria importante o comprometimento do professor com o processo de aprendizagem dos estudantes que estão sob sua responsabilidade.

Bibliografía

Astolfi, J.P. (1999): *El "error", un medio para enseñar.* 1ª ed. Díada, Sevilla.

Berti, N., Carvalho, M. *Erro e estratégias do aluno na Matemática: contribuições para o processo avaliativo*. Acesso em: 11/05/10. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/496-4.pdf>

Cordeiro. C. C. (2009) *Análise e classificação de erros de questões de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.* Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica - Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy". Disponível em: http://www.unigranrio.br/unidades_adm/pro_reitorias/propep/stricto_sensu/cursos/mestrado/ensino_ciencias/publicacoes_dissertacoes.html Acesso 21/07/2010.

Cury, H. (2008): *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Editora Autêntica, Belo Horizonte.

Davis, C., Espósito, Y. *Algumas considerações sobre a teoria psicogenética na Escola*. Disponível em <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_08_p127-132_c.pdf> Acesso em 25/05/10

Esteban, M. T. (2002). *A avaliação na pedagogia de projetos*. Disponível em http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2002/aas/aastxt5.htm Acesso 24/05/10.

Haetinger; C. et al. (2008). *Anais da XI Olimpíada Matemática da UNIVATES 10 de setembro de 2008.* UNIVATES, Lajeado.

Hoffmann, J. (1992): *Avaliação: mito e desafio. Uma perspectiva construtivista.* 4.ed. Porto Alegre.

Pasinotto, R. (2008). *O erro no processo de ensino-aprendizagem*. Monografia. Curso de Matemática, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI), Campus de Erechim. Disponível em http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/840.pdf Acesso em 24/05/10.

Santomauro, B. (2010): "Como corrigir os erros dos alunos com o objetivo de ajuda-los a avançar". *Nova Escola* 231, 84-85.

Souza, S. (2002). *Erros em Matemática: um estudo diagnóstico com alunos de 6ª série do Ensino Fundamental*. Dissertação – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Marília. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Sueli.pdf> Acesso em: 11/05/10.

_____. *O papel construtivo do erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.* <www.sbempaulista.org.br/.../Comunicacoes_Orais%5Cco0054.doc> Acesso em 26/05/10.

Maria Madalena Dullius. Professora do Centro Universitário UNIVATES Possui Licenciatura Plena em Matemática pela Fundação Alto Taquari de Ensino Superior (1993), Mestrado em Matemática Aplicada pela UFRGS (2001) e Doutorado em Ensino de Ciências pela Universidade de Burgos-Espanha (2009). Atualmente é professora do Centro Universitário UNIVATES, atuando nos cursos de graduação (Engenharias e Ciências Exatas) e no Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática Aplicada e Ensino de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Modelagem Matemática e uso de tecnologias no ensino da Matemática. **madalena@univates.br**

Marli Teresinha Quartieri. Professora do Centro Universitário UNIVATES Possui graduação em Ciências - Licenciatura de 1º Grau pela Faculdade de Educação Ciências e Letras do Alto Taquari (1987), graduação em Matemática - Licenciatura Plena pela Faculdade de Educação Ciências e Letras do Alto Taquari (1989), especialização em Educação Matemática pela Universidade de Santa Cruz do Sul (1998) e mestrado em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2004), doutoranda em Educação na Universidade Vale do Rio dos Sinos - RS. Atualmente é professora do Centro Universitário UNIVATES, na área de Matemática atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, ensino-aprendizagem, etnomatemática, ambientes informatizados e olimpíadas. **mtquartieri@univates.br**

Virginia Furlanetto. Mestranda em Ensino de Ciências Exatas no Centro Universitário UNIVATES. Possui graduação em Ciências Exatas pelo Centro Universitário UNIVATES (2010). Atualmente é mestranda em Ensino de Ciências Exatas pelo Centro Universitário UNIVATES, bolsista CAPES e atua principalmente nos seguintes temas: uso de tecnologias no ensino da Matemática e estudo das provas de avaliação do ensino da Matemática. **virf@univates.br**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 85-104
ISSN: 1815-0640

Estudio exploratorio sobre la incorporación de la Resolución de Problemas en las prácticas habituales de docentes de Matemática

Victoria Artigue; Clara Messano

Resumen

En el siguiente trabajo se aborda la incorporación de la enseñanza a través de la resolución de problemas por parte de los docentes de Matemática en el Uruguay. Es un estudio de carácter cualitativo cuyo alcance es exploratorio, con entrevistas a informantes especialistas Uruguayos, calificados en el área de la Didáctica de la Matemática, con una vasta experiencia docente. Se intentará reflexionar respecto a la pregunta: ¿Incorporan los profesores de Matemática de Uruguay, en sus prácticas habituales, la resolución de problemas?

Abstract

The following paper addresses the incorporation of teaching through problem solving by Mathematics teachers in Uruguay. It is a study of a qualitative nature whose scope is exploratory, with interviews with specialist Uruguayan informants, qualified in the field of teaching Mathematics, with an extensive teaching experience. The paper aims toreflect on the question: Do Mathematics teachers in Uruguay include problem solving in their practices?

Resumo

O documento a seguir aborda a incorporação do ensino por meio da resolução de problemas por parte dos professores de Matemática no Uruguai. É um estudo qualitativo cujo alcance é exploratório, com entrevistas com informantes especialistas uruguaios, qualificados no domínio da educação matemática, com vasta experiência docente. Se tentará reflexionar sobre a questão: incorporam os professores dematemática no Uruguai a resolução de problemas em suas práticas?

1. Introducción

El presente trabajo es de corte cualitativo pues se intenta describir, interpretar, analizar, comprender y reflexionar acerca de un aspecto de la situación actual de la enseñanza de la Matemática en Uruguay, por intermedio de entrevistas realizadas a actores altamente calificados de la educación matemática y que son referentes en dos institutos de formación docente, a saber, IPA (Instituto Profesores Artigas) y CERP (Centros Regionales de Profesores).

La situación a analizar es la incorporación de la resolución de problemas por parte de los docentes de Matemática de Uruguay en su labor diario. Para ello se entiende pertinente comenzar con un marco teórico detallando qué se entiende por algunos conceptos que se mencionarán a lo largo del texto. Luego se explicará la metodología de trabajo y, por el útlimo, el análisis de los datos obtenidos de las entrevistas.

2. Un Marco Teórico

2.1 ¿Qué es un problema matemático?

En cuanto a qué es un problema matemático, Miguel de Guzmán, plantea*:*

> *"Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra."*[1].

Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar, aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como también probar esas ideas mediante una reflexión crítica y argumentativa.

Los problemas, en la enseñanza de la Matemática, son utilizados para varios objetivos, entre ellos se pueden encontrar:

- Justificar la enseñanza de la Matemática, Los problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana, son incluidos en la enseñanza para mostrar el uso de la Matemática.
- Proveer motivación a ciertos temas. Los problemas son frecuentemente usados para introducir temas.
- Recrear. La matemática puede ser "divertida" y hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- Desarrollar nuevas habilidades, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes, nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con cualquier tema.
- Practicar. La mayoría de las tareas matemáticas caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

En estos cinco objetivos se puede observar que los problemas se utilizan como un medio para determinados fines, y la resolución de problemas deja de ser una meta en sí misma.

Hay otra perspectiva acerca de la resolución de problemas, y es considerarla como un arte. Debe considerársela cómo hacer Matemática. Pólya plantea que, si el aprendizaje de la Matemática está relacionado con el descubrimiento en Matemática, a los estudiantes se les debería brindar oportunidades de resolver problemas, en las cuales primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.

2.2 El aprendizaje basado en problemas

El aprendizaje basado en problemas, de ahora en más ABP, se define como un proceso de indagación que resuelve problemas, preguntas, dudas e incertidumbres sobre fenómenos complejos de la vida. Bajo este enfoque se invita al alumno a

[1] Miguel de Guzmán. *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Revista Iberoamericana de Educación. Nº 43. 2007. Pág 34.

identificar situaciones problemáticas, plantear preguntas, investigar y presentar informes para ayudar a formar una comunidad de investigación que trabaje en colaboración y que llegue a conclusiones razonables.

A continuación se citan algunas razones basadas en investigaciones, que fundamentan la importancia del ABP:

- El aprendizaje es mayor cuando las personas usan la información de manera significativa.
- El procesamiento de la información en los niveles superiores, tal como se da en la resolución de problemas, el pensamiento crítico, las estrategias de indagación y la reflexión sobre la practica llevan a una comprensión más profunda.
- El ABP es aprendizaje para la resolución de problemas de la vida real.
- En experimentos controlados, los estudiantes que utilizan el ABP en clase mostraron un incremento significativo.

Algunos elementos que deben estar incluidos en la enseñanza en el ABP son:

1. El docente como modelo: debe pensar en voz alta en las situaciones problemáticas.
2. Interrogación: las preguntas de los docentes y de los alumnos.
3. Calidad de las respuestas: cómo responden los docentes a las afirmaciones, preguntas y manifestaciones de los alumnos.
4. Interacción entre pares: crear un ambiente para que los alumnos respondan de manera positiva y se cuestionen entre sí.
5. Desarrollar las habilidades de investigación grupales: escuchando, concentrándose en el tema, construyendo sobre las ideas propias y de los otros, llegando al consenso, y otras por el estilo.

En cuanto al rol del docente cabe destacar que estos comparten con sus alumnos experiencias exitosas y otras que no lo han sido, haciéndoles saber que no son perfectos. Los docentes no tienen todas las respuestas, de esta manera se establece un clima de asociación, los docentes y los alumnos están juntos en lo mismo.

Los docentes deben actuar como modelos para sus alumnos, mostrándoles cómo enfrentar las situaciones problemáticas. Los docentes necesitan ser modelos de los tipos de conducta y las disposiciones (tales como curiosidad, persistencia, mentes abiertas) que quieren que sus alumnos aprendan.

2.3 La enseñanza de la Matemática. Dos visiones distintas.

Existen dos visiones distintas en cuanto a la enseñanza de la matemática. Una de ellas caracteriza la Matemática como una disciplina que obtiene resultados precisos y procedimientos infalibles, cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos, los teoremas, etc. Por lo que saber Matemática significa desarrollar procedimientos e identificar conceptos básicos. La enseñanza de la Matemática a través de esta visión se refiere entonces a la manipulación de símbolos. El problema es que este procedimiento es raramente comprendido, solamente por aquellos interesados.

La otra visión sostiene que saber Matemática es equivalente a hacer Matemática. "*Lo que caracteriza a la matemática es su hacer, sus procesos creativos y generativos*. *La idea de la enseñanza de la matemática que surge de esta concepción es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas.*"[2]

Desde esta perspectiva la enseñanza debería encararse como una comprensión conceptual y no como un desarrollo mecánico de habilidades. Debería promover a los alumnos a que explicaran problemas y de esta manera ir construyendo y desarrollando un punto de vista matemático. En este sentido, ellos se convertirán en aprendices independientes y usuarios de la Matemática.

2.4 Factores que intervienen en la resolución de problemas.

Según Schoenfeld, son cinco los factores intervinientes en el proceso, a saber: el conocimiento de base, las estrategias de resolución de problemas, los aspectos metacognitivos, los aspectos afectivos y el sistema de creencias, y por último la comunidad en práctica. Dichos factores se desarrollan brevemente a continuación.

En cuanto al conocimiento de base, es necesario que el docente conozca las herramientas matemáticas (conocimiento intuitivo del problema, definiciones, procedimientos algorítmicos, conocimiento acerca del lenguaje, competencias relevantes, etc.) que los alumnos tienen a disposición. Puede ocurrir que el conocimiento de base contenga información errónea, y allí debe estar presente el docente para remediarlas.

En cuanto a las estrategias de resolución de problemas, Polya plantea las siguiente cuatro:

1. Comprender el problema ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, etc.
2. Diseñar un plan. ¿Se conoce un problema relacionado?, ¿Se puede convertir en un problema más simple?
3. Ponerlo en práctica. Aplicar el plan, controlar cada paso, comprobar que son correctos.
4. Examinar la solución. ¿Podría haberse resuelto de otra manera?

Los componentes de la metacognición son el monitoreo y el control del progreso de la actividad mental de resolver problemas. Los aspectos metacognitivos se relacionan con la manera en que se seleccionan y despliegan los recursos matemáticos.

Hay una creencia habitual de que el saber matemático es equivalente a ser capaz de obtener la respuesta correcta de manera rápida. Esto es un presupuesto cultural, y modelado por la experiencia escolar, saber matemática parece ser aplicar la regla que enseñó el docente. Hay una gran discrepancia entre las creencias que profesan los docentes y la enseñanza que realizan en la práctica. En definitiva, las creencias intervienen en el comportamiento matemático. En los últimos años se ha considerado el aprendizaje de la Matemática como una actividad constructivista, en lugar de receptiva. Esta concepción sostiene que desarrollamos hábitos y

[2] *La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Mar del Plata. Argentina.

habilidades de interpretación y construcción de significados, en un contexto social, estructurado e interactuando con otras personas de manera intencional.

2.5 ¿Por qué es difícil llevar a cabo la enseñanza de la Matemática a través de problemas? La importancia de la mediación.

Distintos autores plantean que enseñar a partir de la resolución de problemas se vuelve una tarea difícil para los docentes debido a que, por un lado, ellos deben ser capaces de percibir las implicaciones de las diferentes respuestas que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer para que lo sean, por otro lado, *"el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase"*[3]. Los docentes en general carecen de información ante los beneficios de este paradigma de enseñanza.

Raúl Pérez de Los Santos hace hincapié en la necesidad de que el docente conozca este abordaje, lo comprenda y lo ponga en práctica, y de esta manera sus alumnos lo aprovecharan al máximo. El docente pasa a ser un mediador entre el estudiante y el problema, donde su función es ayudarlo a decodificarlo, interpretarlo y comunicarlo por medio del lenguaje matemático.

Por parte de los alumnos, el fracaso en la resolución de problemas puede deberse a un manejo deficiente o al desconocimiento del lenguaje, que es utilizado en el enunciado de los mismos. Ocurre comúnmente que los alumnos tienen dificultades al traducir enunciados de problemas al lenguaje matemático, lo que dificulta resolverlos. De ahí la importancia de la mediación por parte del docente, quien tiene que complementar los vacíos existentes en el alumno en el manejo de la teoría, como corregir errores operacionales y algorítmicos.

Miguel de Guzmán realiza un planteo más global y plantea las dificultades de la enseñanza de la Matemática en sí. Sostiene que la Matemática es una actividad vieja y polivalente y que a lo largo de los siglos ha sido empleada con objetivos profundamente diversos. Además, es una ciencia *"intensamente dinámica y cambiante de manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos y aún en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo."*[4]

La educación, al ser un sistema complejo, presenta una fuerte resistencia al cambio, esto se vuelve malo cuando no se conjuga con una capacidad de adaptación ante la mutabilidad de las circunstancias ambientales.

3. Propuesta metodológica

3.1 Pregunta inicial y objetivos de la investigación

Como ya se ha mencionado, la pregunta inicial es:

¿Incorporan los profesores de Matemática, en sus prácticas habituales, la resolución de problemas?

[3] . *El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Mar del Plata. Argentina. Pág. 9.

[4] Miguel de Guzmán. *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Revista Iberoamericana de Educación. Nº 43. 2007. Pág. 21.

3.2 Hipótesis de trabajo

En un estudio de carácter cualitativo y alcance exploratorio, no es estrictamente necesario la formulación de hipótesis, pues no se desarrollará un trabajo de campo, para contrastar estas posibles relaciones.

De todas maneras se explicitarán hipótesis de trabajo, que refieren a las percepciones de los entrevistados respecto de la incorporación del ABP por los docentes.

El abordaje por resolución de problemas en las prácticas docentes está relacionado con:

H1:	La formación inicial específicamente en ABP del docente.
H2:	La cultura de trabajo del docente de Matemática.
H3:	Las condiciones de trabajo.

3.3 Abordaje metodológico: tipo de investigación o estudio

Basándose en Cook y Reichardt se describen las características del método elegido para desarrollar este trabajo.

Entre los métodos cualitativos, figuran la etnografía (estudio descriptivo de las costumbres y tradiciones de los pueblos), los estudios de caso, las entrevistas en profundidad y la observación participante.

Los autores mencionados anteriormente, plantean que, el paradigma cualitativo postula una concepción global fenomenológica, historicista, inductiva, estructuralista, subjetiva, orientada al proceso y propia de la antropología social. La perspectiva que se adopta es "desde adentro" procurando estar cerca de los datos, se fundamenta en la realidad y está orientado al proceso. Los datos válidos son los que se toman de la realidad considerándose ricos y profundos. No es generalizable, estudia casos aislados, asume una realidad dinámica, la observación es naturalista y sin control. Se interesa por comprender la conducta humana desde el propio marco de referencia de quien actúa.

En cuanto a las estrategias para recoger información, el paradigma cualitativo adopta una manera flexible, un proceso interactivo continuo, marcado por el desarrollo de la investigación. En cuanto al análisis, el objetivo es realizar una búsqueda cualitativa de significados de la acción humana.

Según Cea D`Ancona, el paradigma cualitativo pone énfasis en el actor individual: descripción y comprensión interpretativa de la conducta humana, en el propio marco de referencia del individuo o grupo social que actúa.

3.4 Las técnicas: selección fundamentada de las técnicas e instrumentos

Se ha elegido la entrevista como instrumento de investigación. Se adopta la siguiente definición de entrevista:

> *“Básicamente, la técnica consiste en mantener una entrevista con un sujeto (más bien con varios, sucesivamente), inserto en un determinado contexto social (grupo, clase, comunidad, etc.) o involucrado en un fenómeno social concreto e ir desgranando, mediante una conversación*

> *enfocada científicamente, las claves que permitan el análisis e interpretación de aquel contexto o fenómeno social"*[5]

Esta técnica acerca a la problemática y ayuda a profundizar en ella, eligiendo entrevistados calificados y de gran conocimiento en la resolución de problemas. Esta técnica permite descubrir y analizar la realidad educativa, desde el enfoque que posee este trabajo, gracias al relato personalizado de un sujeto que narra su experiencia particular en un ámbito concreto de la vida social. Es una técnica muy valiosa ya que recoge todo tipo de información de la o las personas acerca del problema que se está estudiando.

Las entrevistas fueron estandarizadas y abiertas, es decir, se realizaron mediante el uso de un cuestionario de preguntas concretas donde el entrevistado puede responder abierta y libremente. Este tipo de entrevista permite comparar con facilidad la información obtenida, es más confiable frente a otros tipos y minimiza los errores de frases.

3.5 Universo estudiado

A continuación se presenta la formación y desempeño como docentes de los entrevistados elegidos:

I 1:	Egresado del Instituto de Profesores Artigas, con vasta experiencia como profesor de educación secundaria a nivel público y privado, actualmente responsable del Proyecto PISA en Uruguay.
I 2:	Profesor y Coordinador de Matemática en distintos colegios de Montevideo, fue presidente durante muchos años de la Compartida de Matemática en Uruguay.
I 3:	Profesor egresado del Instituto de Profesores Artigas, actualmente profesor de Análisis II y de didáctica en dicho Instituto, con vasta experiencia como profesor de educación secundaria a nivel público y privado.
I 4:	Egresado del Centro Regional de Profesores de Atlántida, y actual docente, dicta la signatura resolución de problemas. Docente de Didáctica de la Matemática en la Universidad Católica.
I 5:	Profesor egresado del Instituto de Profesores Artigas, realizó un postgrado en Didáctica de la Matemática. Profesor de Didáctica y con vasta experiencia como profesor de educación secundaria a nivel público y privado.
I 6:	fesor egresado del Instituto de Profesores Artigas, realizó un postgrado en Didáctica de la Matemática. Profesor de Didáctica y con vasta experiencia como profesor de educación secundaria a nivel público y privado. Actualmente coordinador del Profesorado de Matemática en la Universidad de Montevideo.

4. Análisis de la información o de los datos observados

En los siguientes subtemas se citan los siete puntos que se consideran más destacados dentro de la entrevista.

4.1 Posicionamiento frente al abordaje de la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas

[5] Palacios, José. Técnicas de investigación social para servicios socioculturales. Pág. 61

Se han encontrado en este punto posiciones antagónicas. Por un lado quienes opinan que la Matemática es la resolución de problemas, y que la única manera de educar en Matemática es a través de la resolución de problemas:

I 2:	*"Creo que la Matemática es la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas"*
I 4:	*"La resolución de problemas es el motor que impulsa el quehacer matemático. Resolver problemas es hacer Matemática"*

Por otro, están quienes opinan que es un abordaje al cual se puede recurrir en ocasiones, sin dejar de considerar sus beneficios:

I 1:	*"No considero que este paradigma sea la única manera de educar en Matemática"*
I 5:	*"Considero que durante los seis años de la Educación Media, deben utilizarse diferentes estrategias para la enseñanza de la Matemática. La resolución de problemas es una de ellas, y no olvidar que los problemas están presentes en otras modalidades"*
I 4:	*"Es una ilusión, no creo que exista curso de matemática alguno basado en resolución de problemas. Son una opción para algunos momentos en el desarrollo de algunos temas".*

4.2 Definición de problema

Todos los entrevistados coinciden, en líneas generales, en el concepto de problema matemático, destacamos las características generales que han nombrado:

1. Es una situación desconocida no trivial
2. Es necesaria la formulación de una estrategia
3. Establecer conjeturas y verificarlas
4. Pertinencia de la solución

También existe un acuerdo en cuanto a la diferencia entre problema y ejercicio. Siendo este último una mera aplicación de un resultado anterior, que implica cierto mecanismos que una vez adquiridos es sólo implementarlos.

4.3 El plan 96 y la resolución de problemas

Este paradigma llegó a Uruguay en los años 90, y se instauró en el plan 96. Se llevó adelante este proceso y los profesores que se capacitaron para trabajar en ello, no llegaron a plasmar en sus aulas todo lo que se podía lograr a través de la resolución de problemas.

Este plan se abandonó, sin embargo la resolución de problemas como paradigma está instaurado en los docentes, al menos en la intención.

En el año 1999 se realizó un curso para profesores del CES llamado de "sensibilización al plan 96". El plan 96 en ese entonces, en lo que al programa de matemática se refería, no tenia grandes cambios en los contenidos sino más bien en la metodología que promovía. Apuntaba quizás por primera vez de manera explícita, a trabajar con una metodología de resolución de problemas.

4.4 Formación docente

Nuevamente encontramos, al igual que en el punto 5.1, visiones antagónicas.

Hay quienes sostienen que en los centros de formación docente se prepara a los profesores para afrontar este abordaje de enseñanza matemática, pues forman parte de los programas de didáctica, y por otro lado hay quienes opinan que la educación en los centros de formación docente existen contradicciones entre la formación en las materias específicas, cuyo abordaje de la matemática es sumamente formal y tradicional, y las materias generales y las didácticas.

I 4:	*"Claro que sí. Forma parte de los programas de didáctica y me consta que en los cursos actuales tiene un destaque notorio".*
I 2:	*"No, claro que no! En la Universidad de Montevideo tenemos un seminario que pretende tener como objetivo consultar material, investigar cómo se hizo, buscar material sobre el tema, etc, que vean de qué se trata el asunto".*
I 1:	*"El plan como bloque en sí, me parece que no, que no está enfocado a eso, ahora creo que son los cursos de didáctica que tienen que mostrar eso, que tienen que formar al docente en la disciplina".*

Vale destacar que en el plan 2008, la asignatura Resolución de Problemas, no consta, se eliminó.

4.5 Ventajas y desventajas del abordaje de la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas.

En este punto, nuevamente existen coincidencias. Frente a las ventajas, se pude destacar, el desarrollo por parte de los alumnos de procesos metacognitivos que intervienen en la resolución de problemas. Y en cuanto a las desventajas, el tiempo de planificación no remunerado por parte del docente, la exigencia de moderar y guiar una clase en la que se plantee problemas para trabajar en forma de taller, por ejemplo y la falta de formación en los docentes.

4.6 Sobre el énfasis de la resolución de problemas en los programas de Ciclo Básico y Bachillerato Diversificado

La coincidencia que apreciamos apunta a la ausencia de reflexión y argumentación por parte de las autoridades que formulan los programas en cuanto a la presencia de la resolución de problemas en éstos.

No existen direcciones claras, siquiera la definición de qué es un problema. De esta manera, el énfasis cae en un vació de contenido; dejando librado el abordaje de este paradigma en manos de cada docente.

4.7 Opinión acerca de la pregunta inicial

Encontramos distintas posturas que nos parece interesante destacar, pues cada una presenta diferentes matices y las esquematizaremos en las siguientes frases:

Sería deseable decir que sí pero la respuesta es no.
Bajo una mirada estadística, la respuesta es negativa
No es un abordaje generalizado por todo el cuerpo docente, pues depende de la formación de cada docente.
Sí, lo han hecho desde siempre.

5. Consideraciones finales o conclusiones

Se cree haber seleccionado con buen criterio a los informantes clave y entrevistados, pues han aportado distintas visiones sobre la temática que planteamos, así como también demuestran coincidencias relevantes.

Un enfoque exclusivo del ABP genera ciertas dificultades y ventajas. En cuanto a las dificultades se encuentra el tiempo de planificación no remunerado, una exigencia elevada en cuanto a la actitud del docente como receptor y guía en la actividad del aula (contraponiéndose esta posición a una enseñanza tradicional en donde el docente es proveedor del conocimiento y el alumno receptor), el desconocimiento de la enseñanza bajo este abordaje. En cuanto a las ventajas, el ABP activa y desarrolla procesos cognitivos, sitúa a los alumnos en una posición de incertidumbre, los hace protagonistas y hacedores de la problemática.

Con respecto a la respuesta inicial, no es posible formular una afirmación contundente, ya que es un trabajo de carácter exploratorio. Para que los docentes en ejercicio incorporen en sus prácticas la resolución de problemas, cabe la pregunta: ¿Cuáles deberían ser las vías que deberían adoptar los centros de formación docente, para formar profesionales que puedan trabajar en esta línea con solvencia?

Si puede inferir que el abordaje por resolución de problemas en las prácticas docentes está relacionado con la formación inicial específicamente en ABP del docente, la cultura de trabajo del docente de Matemática, y las condiciones de trabajo.

No se encuentran efectivas exclusivamente la enseñanza basada en la resolución de problemas o la enseñanza tradicional, ni excluyentes, por esto, conveniente utilizar ambas. De esta manera no se pierden los beneficios que aportan, pues la enseñanza tradicional en la que el docente demuestra resultados y aplica los mismos, no deja de ser un insumo primordial para que el alumno después pueda afrontar situaciones problemáticas.

Sería deseable que el cuerpo docente tomara conciencia sobre estos distintos paradigmas, pues enriquecería a la educación de los estudiantes, promoviendo estudiantes críticos y reflexivos.

Bibliografía

Araújo, U. y Sastre, G. (2008). E*l aprendizaje basado en problemas. Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad*. Barcelona. Gedisa.

Barrell, J. (2007). *El aprendizaje basado en problemas. Un enfoque investigativo*. Buenos Aires. Manantial.

Goetz, J. y Le Compte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid. Morata.

Guzmán, M. (2008). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid. Pirámide.

Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. Revista Iberoamericana de Educación. Nº 43.

Maccoby y Maccoby(s/f), *La entrevista: una herramienta de la ciencia social*. Universidad de la República. Facultad de Ciencias Sociales.

Palacios, José. (1998). *Técnicas de Investigación Social para servicios socioculturales.*

Pérez, R. Modelo quinario para la resolución de problemas matemáticos. Universidad Simón Rodríguez. Venezuela.

Quivy, R. y Van Campenhoudt, L.(1992), *Manual de investigación en ciencias sociales*. Madrid. Paraninfo.

Vilanova, S. y Rocerau, M. y Valdez, g.y Olives, M. y Vecino, S. Medina, P. y Astiz, M. y Alvarez, E. *La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje.* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Mar del Plata.

CEA, Ma. A. *Metodología cuantitativa: estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid. Proyecto Editorial Síntesis Sociológica.

Victoria Artigue Carro. Nació en Montevideo Uruguay. Profesora de Matemática egresada de la Universidad de Montevideo. Futura estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad ORT de Uruguay. Desde el 2006 trabaja en diferentes liceos privados y públicos de Montevideo.

Clara Messano. Nació en Montevideo Uruguay. Profesora de Matemática egresada de la Universidad de Montevideo com vasta experiencia en liceos públicos y privados de Montevideo. Futura estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad ORT de Uruguay.

ANEXOS

LA ENTREVISTA

Pregunta Inicial: *¿Incorporan los profesores de Matemática, en sus prácticas habituales, la resolución de problemas?*

1. *¿Qué significa para Ud. la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*?
2. *¿Qué es un problema matemático para Ud.*?
3. *¿En qué se diferencia para usted un problema de un ejercicio*?
4. *¿Cuál es la fundamentación, a su juicio, que ha llevado a enfatizar en la resolución de problemas en los programas oficiales de Ciclo Básico? ¿y en bachillerato*?
5. *¿Cuáles serían los beneficios de la enseñanza de la Matemática a través de resolución de problemas*?
6. *¿Existe algún inconveniente que dificulte el empleo de esta metodología de trabajo en el aula*?
7. *¿Qué habilidades activa el alumno en la resolución de un problema*?
8. *¿Piensa que los docentes, según su percepción, utilizan este abordaje? ¿por qué*?
9. *¿Qué opina Ud. de este abordaje en cuanto a la motivación de los estudiantes*?
10. *¿El plan actual de formación docente prepara a los futuros docentes para impartir en sus clases la resolución de problemas*?

11. *¿Qué opinión le merece que por un lado los programas de Ciclo Básico recomienden la resolución de problemas y por otro que no haya formación explícita en los centros de formación docente*?

12. *¿Desea agregar algo más*?

ENTREVISTAS A INFORMANTES CLAVE

Entrevistado*: I 1*. Realizada viernes 05 de noviembre 2010

1. *¿Qué significa para Ud. la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*?

"La resolución de problemas es una de las competencias básicas que hay que desarrollar en los alumnos del punto de vista cognitivo, por otro lado, es un paradigma de educación matemática que permite generar un trayecto de educación matemática y de educación en general. Este paradigma llegó a nuestro país en los años 90, y se instauró en el plan 96. Ricardo Vilaró llevó adelante este proceso y en ese momento los profesores que estaban entrenados, capacitados para trabajar en ello, no llegaron a plasmar en sus aulas todo lo que se podía lograr a través de la resolución de problemas.

El modelo anterior era que el profesor muestra un tema, luego ejercita y luego pone ejercicios más complejos en los que hay un contexto que el alumno tiene que deducir e idear su propia estrategia.

El paradigma de resolución de problemas parte del problema, deberá buscar las cosas que le sirven para poder resolverlo y eventualmente si alguna no la sabe el profesor interviene. En la estructura se usó eso, los profesores planteaban situaciones a resolver y los alumnos usaban lo que tenían y los profesores brindaban lo que le faltaba para seguir adelante. Lo que se entendió mal es la institucionalización posterior en el aula. Se preguntaba a los alumnos, ¿y qué estás trabajando en matemática?. Y ellos contestaban: "el problema de la cancha o el del gallinero". Al fin y al cabo estaban dando perímetro o área sin saberlo. Estaban modelizando y trabajando con contextos auténticos sin tener claro los contenidos matemáticos abordados. Este problema no se subsanó, el plan 96 se abandonó. La idea del trabajo a través de la resolución de problemas está instaurada en los docente, si les preguntas si trabajan con problemas ellos contestan que si. Igual hay profesores que siguen trabajando clásicamente.

En resumen, no considero que este paradigma sea la única manera de educar en matemática. Muchos, y me incluyo, fuimos educados en matemática a través de un método clásico de trabajo. Estamos hablando ahora de generaciones muy distintas, los jóvenes de ahora, son dinámicos, cambian con el tiempo que van a actuar en un mundo globalizado, son digitales, son del sonido, de la imagen, nosotros no éramos así. Hay que presentarles las cosas de manera diferente para que aprendan, si no hay interés no aprenden. Antes el interés era aprender por aprender, me siento en clase y lo que me dicen lo aprendo, ahora no es así. La resolución de problemas tiene cada vez más vigencia porque los ayuda a que el interés del alumno sea lo primero que uno despierta, a través de una situación auténtica en la que el alumno tiene interés de meterse. Me parece muy válido, por toda la estructura teórica que tiene, trabajar por intermedio de resolución de problemas porque el tema del constructivismo y cognitivismo apoyan a esta teoría."

2. *¿Qué es un problema matemático para Ud*.?

"La descripción más general que puedo dar de lo que es un problema matemático sería, una situación de contexto auténtico, en la cual haya datos, variables, y algo que responder, para lo cual será necesario utilizar una estrategia que utilice conceptos y algoritmos para diseñar patrones matemáticos, para lograr la solución deseada y analizar la pertinencia de la misma en el contexto. A grandes rasgos, la estructura cambia si estamos trabajando en un primer año o en un sexto año de ingeniería, aunque la descripción general es la misma. Contexto auténtico es una situación en la cual la persona pueda ver reflejada su propia vida o situaciones del mundo científico o del mundo global, que si bien no son familiares para él, sabe de que se trata. No tiene por qué ser cotidiano para ser auténtico."

3. *¿En qué se diferencia para usted un problema de un ejercicio*?

"En un ejercicio alcanza con algo más modesto, desde el punto de vista del planteo, y de la exigencia cognitiva en términos de complejidad. Tal vez, un ejemplo puede ser muy difícil pues el mecanismo de solución puede ser complicada o larga o en pasos que tiene que ir teniendo en cuenta los pasos anteriores. Es más metódico, y en general está asociado a un trabajo de aula y el profesor espera que el alumno aplique eso que estuvo trabajando en clase. Un problema no tiene por qué estar asociado al aula, se puede encontrar en una revista, en Internet."

4. *¿Cuál es la fundamentación, a su juicio, que ha llevado a enfatizar en la resolución de problemas en los programas oficiales de Ciclo Básico? ¿y en bachillerato*?

(Destaca que a partir del plan 96 ha quedado instaurado y que nadie puede negar la validez del paradigma). "La enseñanza a través de la resolución de problemas logra que el estudiante analice, deduzca, infiera, generalice, genere conjeturas, argumente, justifique con solvencia, genera juicios válidos, genere cadenas lógicas deductivas válidas, que son cosas que si no las planteas en un ambiente de resolución de problemas son mucho más difíciles de lograr. Cuando trabajamos con la geometría clásica, se tienen muchas oportunidades de hacerlo en ese contexto de una manera rica y no es que no lo hiciéramos antes, pero eran unos pocos lo que llegaban a ese nivel, pero con la resolución de problemas hasta los más chicos pueden desarrollar esos procesos cognitivos que atienden a procesos mentales de alto nivel. Como la habilidad matemática la entendemos como un continuo en donde cada uno desarrolle su potencial, la resolución de problemas nos da esta posibilidad.

En bachillerato no está explícito el énfasis, los programas están planteados desde los contenidos y entonces el profesor tiene libertad en eso. En mi conocimiento los profesores trabajan de una manera clásica de una forma más interactiva pero exponiendo el tema. No conozco muchos docentes que trabajan en bachillerato con resolución de problemas. Sí conozco muchos docentes que trabajan presentando en algún momento problemas, como oferta para aplicar lo que se aprendió."

5. *¿Cuáles serían los beneficios de la enseñanza de la Matemática a través de resolución de problemas*?

Contestada anteriormente.

6. *¿Existe algún inconveniente que dificulte el empleo de esta metodología de trabajo en el aula*?

"Que yo conozca no, cada vez menos y más ahora con la computadora que está a disposición en los centros de educación. No me parecía un impedimento cuando yo empecé a dar clases, ahora mucho menos. "

7. *¿Qué habilidades activa el alumno en la resolución de un problema*?

(Cita a Polya y reitera conceptos ya comentados sobre las habilidades que activa la resolución de problemas.)

8. *¿Piensa que los docentes, según su percepción, utilizan este abordaje? ¿por qué*?

"Alguno sí, hay mucha heterogeneidad. Las recomendaciones a los docentes no son claras, no hay una supervisión férrea que los oriente en ese sentido. Es imposible pretender hablar con todos los profesores, se necesita aprovechar las horas de coordinación y potenciar el trabajo colaborativo (banco de ideas) para que la cosa funcione como por contagio.

Los que no usan problema es porque no saben, no tiene información, yo creo que una vez que son informado del tema, te muestran las ventajas, no te podes negar. Hay otro problema, los profesores trabajan muchas horas y cambiar de paradigma te implica tal vez un año de planificación."

(Recalca el uso de la coordinación para la complementación de este paradigma y así avanzar en el campo de la resolución de problema con todos los beneficios que promueve.)

"En el plan 96 los primeros 11 centros trabajaron guiadamente, en el 99 cuando hicimos el censo de Ciclo Básico, no había resultados acerca de los desempeños de los estudiantes, claro que nosotros (PISA) desde una evaluación externa no podíamos mirar el grado de desarrollo cognitivo de los alumnos, en esa época usabamos teoría clásica de los test, no teníamos la T.R.I que mide los desempeños en términos de nivel de competencia, mirábamos producto bruto, la foto final, creo que si lo hiciéramos con una mirada más profunda en el 99 podríamos haber detectado algo, pero no.

En el año 2003 aplicamos la prueba PISA también hicimos el estudio de la matemática, y comparamos con chiquilines que venían del plan 86 y 96 vimos similitudes, quiere decir que no fue del todo eficaz al momento de mirar los logros y la foto final. No hay un plan de formación en servicio."

9. *¿Qué opina Ud. de este abordaje en cuanto a la motivación de los estudiantes*?

Contestada anteriormente.

10. *¿El plan actual de formación docente prepara a los futuros docentes para impartir en sus clases la resolución de problemas*?

Contestada anteriormente.

11. *¿Qué opinión le merece que por un lado los programas de Ciclo Básico recomienden la resolución de problemas y por otro que no haya formación explícita en los centros de formación docente*?

"El plan como bloque en sí, me parece que no, que no está enfocado a eso, ahora creo que son los cursos de didáctica que tienen que mostrar eso, que tienen que formar al docente en la disciplina, las materias generales tienen que formar a los docentes en educación, tienen que saber que su fin es educar en matemática, formar ciudadanos responsables, consumidores inteligentes, que es lo mismo que tiene que lograr el profesor de historia también, para ser capaces de sobrevivir en este mundo, tener una vida feliz y productiva en este mundo. Es la didáctica la que tiene que mostrarle la mejor manera de lograr los objetivos en matemática.

Retomando la formación didáctica, no se debe plantear que la resolución de problemas es la única manera que existe para enseñar en matemática, tiene que ser bien amplio, los estilos de enseñanza son tan distintos como personas, sea como sea que presentes el trabajo se tiene que activar procesos cognitivos en los alumnos, tienen que ser cada día mas hábiles, competentes para enfrentar su vida como profesionales o para enfrentar la vida del trabajo, hay que prepararlos para todo, quitando el sentido propedéutico."

Pregunta extra: *¿Qué características daría a la evaluación en este paradigma*?

Apuntaría primero a los resultados, viendo que hizo y cómo lo resolvió. El resultado me da una pista y me permite inferir acerca de lo que hizo. Claro que antes lo resolví por todos los caminos que se me ocurrieron y seguro que el trabajo con el error que está presente, el problema está para hacer saltar y detectar esos errores persistentes, conceptos que vienen de ideas previas. Cuando miro la resolución infiero lo que me parece que hizo, si le pedí al alumno que además mostrara su trabajo después se podrá clasificar los distintos procedimientos. La evaluación concreta sería poder decir este alumno fue capaz de inferir, conjeturar con o que sabe. "

12. *¿Desea agregar algo más*?

"Me alegra mucho que estén trabajando en esto con ganas de educar en matemática, que lo necesitamos y no lo estamos logrando."

Entrevistado*: I 2*. Realizada lunes 01 de noviembre 2010

1. *¿Qué significa para Ud. la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*?

"Creo que la Matemática es la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas.

Cuando te encuentras con algún papá o alumno que te dice "a mi me iba bien en matemática en la escuela y después en e liceo me dejó de ir bien, y ahora en bachillerato me va muy mal", entonces yo le pregunto ¿hiciste matemática en la escuela? ¿en qué te iba bien? Cuando a ti la maestra te ponía una situación problemática… "a ahí no me salía nada!, pero tenía una facilidad para dividir entre dos cifras!". Entonces no hiciste matemática!. El problema es que se confunde qué significa hacer matemática. Yo en este momento considero que lo que puede hacer una máquina por uno, no es hacer matemática. Hay que separar qué es técnica y qué es aplicación de la técnica. " (Nos comenta una situación respecto de un escrito que había aplicado recientemente en un sexto de economía, en la que planteó varios ejercicios donde pedía cuestiones específicas que requerían técnica y aplicación de fórmulas, en las que casi la totalidad de los alumnos trabajó muy bien, mientras que un ejercicio bien elemental que no requería de operatoria, si de un razonamiento muy básico, sólo cuatro alumnos lo realizaron bien)."

2. *¿Qué es un problema matemático para Ud*.?

"No es lo mismo un problema para una persona que para otra, pero me quedo con la definición de Polya, un problema es una situación que se presenta, que uno no sabe para dónde agarrar, donde se tiene que crear una estrategia, que no siempre ocurre de primera, verificarla, destruirla, volver para atrás, crear otra, etc.

Uno deja de tener un problema cuando éste está encasillado, cuando uno se enfrenta a una situación que ya resolvió, ahí se deja de tener un problema; y eso es la vida. Cuando uno está en un ámbito profesional tiene que resolver problemas después que se tiene un patrón elegido trata de seguirlo, si le dio resultado, si ya dio resultado y funciona… entonces no es un problema matemático, quizás sea otra cosa."

3. *¿En qué se diferencia para usted un problema de un ejercicio*?

"Lo más marcado, citando a Polya, problema es lo opuesto a ejercicio. El ejercicio es cuando uno no necesita una estrategia, porque ésta ya se tiene, es cuando uno pone piloto automático, eso es un ejercicio. Una persona hoy puede considerar un problema, y dentro de cinco años, eso ya no es más un problema, porque ya sabe todo lo que va a pasar."

4. *¿Cuál es la fundamentación, a su juicio, que ha llevado a enfatizar en la resolución de problemas en los programas oficiales de Ciclo Básico? ¿y en bachillerato*?

"No sé cuál ha sido, me imagino que simplemente han mirado el mundo. Ningún programa en ningún momento te dice: esto es un problema. No queda ningún país que no ponga en sus currículas la resolución de problemas. Uruguay tiene una organización centralizada, y no hay un texto que produzca la misma entidad." (Pone ejemplo del tema Estadística, que está en todos los años de 1º a 6º, y que las inspecciones recomiendan un libro de Miguel de Guzmán que acá no los venden, que hay que fotocopiarlos y eso es ilegal)."

5. *¿Cuáles serían los beneficios de la enseñanza de la Matemática a través de resolución de problemas*?

Contestada anteriormente.

6. ¿*Existe algún inconveniente que dificulte el empleo de esta metodología de trabajo en el aula*?

Contestada anteriormente.

7. ¿*Qué habilidades activa el alumno en la resolución de un problema*?

"Más allá de las obvias, tomar decisiones." (Ejemplifica situación: sería esperable encontrarse con un alumno dentro de 20 años, que recuerde haberse quedado con el planteo de estrategias, contrastarlas, y no de meras aplicaciones de fórmulas)

8. ¿*Piensa que los docentes, según su percepción, utilizan este abordaje? ¿por qué*?

"Me parece que muchos dicen que sí, el tema es qué estamos definiendo como problema."

9. ¿*Qué opina Ud. de este abordaje en cuanto a la motivación de los estudiantes*?

"La respuesta esperada es sí, pero no lo sé, hay mucha diferencia entre un niño de 12 años y un adolescente de 16 que eligió 5º científico y otro que está en facultad de ingeniería, es difícil que en una clase de 30 todos se motiven, lo hacen dos o tres, al resto en general no les interesa nada, o bien tienen otros intereses, quizás en ese sentido sea mejor el sistema sajón , en donde los alumnos se agrupan por intereses.

Al alumno que no le interesa nada, no lo motivas con nada, al interesado lo motivas con problemas. No todos pueden ir al mismo ritmo, no es realista eso.

10. ¿*El plan actual de formación docente prepara a los futuros docentes para impartir en sus clases la resolución de problemas*?

"No, claro que no! En los lugares que conozco, está totalmente disociada la gente de las materias generales, la de las didácticas especiales, y las de materias específicas que piensan y actúan de diferente forma, cada uno hace una cosa distinta, sería bueno que el profesor que da una materia específica la dé de la misma forma en que los profesores de didáctica te dicen que tenés que dar la clase tu. Yo no creo que tenga que haber una materia llamada Resolución de Problemas, con un examen que debe realizarse en tres horas, porque es totalmente incoherente con la formación recibida, en donde no hay preparación para afrontar esa situación, sin consultar material, sin consultar a colegas! En la Universidad de Montevideo tenemos un seminario que pretende tener como objetivo consultar material, investigar cómo se hizo, buscar material sobre el tema, etc, que vean de qué se trata el asunto.".

11. ¿*Qué opinión le merece que por un lado los programas de Ciclo Básico recomienden la resolución de problemas y por otro que no haya formación explícita en los centros de formación docente*?

Contestada anteriormente.

12. ¿*Desea agregar algo más*?

"Un problema no es una tontería. En la vida cuando uno tiene un problema, buscamos a la gente que nos quiere, consultamos, no se trata de que una persona sepa resolver problemas, en un tiempo dado, sino de darse cuenta que es lindo planteárselos, aunque no salgan."

OTRAS ENTREVISTAS

Entrevistado: I 3. Realizada el 14 de noviembre 2010

1. ¿*Qué significa para Ud. la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*?

"Ha sido (y sigue siendo) habitual que las personas se sientan atraídas por los problemas. En la historia de la matemática tenemos muchos ejemplos, algunos de ellos continúan abiertos y siendo objeto de estudio. El cálculo integral se inicia al tratar de resolver un problema con áreas encerradas por curvas, la probabilidad con uno de conteo simple, etc. Pese a los aportes que han hecho los problemas a la matemática, no me atrevería siquiera a imaginar que la enseñanza de la matemática pueda arribarse a través de la resolución de problemas. Entiendo que éstos pueden seguir aportando en motivación en muchos temas, pero en otros no es viable.

Remitiéndome a la pregunta. Es una ilusión, no creo que exista curso de matemática alguno basado en resolución de problemas. Son una opción para *algunos* momentos en el desarrollo de *algunos* temas.”.“

2. *¿Qué es un problema matemático para Ud.*?

“Es un desafío intelectual con planteos reales y cotidianos en el cual no tenemos por qué tener indicios de cómo se debería resolver. Para quien es planteado debe promover la búsqueda de elementos desconocidos con un objetivo sensato y entendible, aunque no sea simple de encontrar sin esmero de su parte.”

3. *¿En qué se diferencia para usted un problema de un ejercicio*?

“Como ya he descrito las características de lo que entiendo debe tener un problema, digo que, en contraposición a ello, un ejercicio no tiene por qué tener aspectos reales ni cotidianos y podría ser evidente lo que hay que hacer para resolverlo"

4. *¿Cuál es la fundamentación, a su juicio, que ha llevado a enfatizar en la resolución de problemas en los programas oficiales de Ciclo Básico? ¿y en bachillerato*?

“Probablemente sea por una moda de turno. No creo que haya mediado una reflexión seria desde un punto de vista didáctico para hacerlo y, si bien nombran la resolución de problemas, muchas de las sugerencias dadas son inconsistentes en lo que refiere a problemas ya que sugiere ejercicios. Creo que lo que persiguen es vaciar de contenidos a todos los cursos en el entendido que eso provocará mayor índice de aprobados. Los programas también incluyeron matemática moderna en otros momentos, ahora le sacan el estudio de las funciones polinómicas a algunos programas, desmantelan la geometría sintética, eliminan es estudio axiomático de $\mathbb{R}$ y lo suplantan por la axiomática de Peano. Tal vez en algún momento los programas estén bien pensados. Pero, para dejarme de rodeos respondo la pregunta: no comparto la apreciación que se hace a formularla. No se enfatiza en resolución de problemas.”

5. *¿Cuáles serían los beneficios de la enseñanza de la Matemática a través de resolución de problemas*?

“Responderé otra: ¿cuáles serían los beneficios de que, en ocasiones, se enseñara matemática a través de la resolución de problemas?

Ante el planteo de un buen problema, el estudiante es quien ocupa el papel protagónico. Él construye el conocimiento, elabora estrategias, descarta las que no lo conducen a la obtención de logros, mejora otras ya utilizadas, etc. Asimismo, se obliga a organizar sus ideas al momento de tener que explicar a otros sobre cómo y por qué hizo lo que hizo.”

6. *¿Existe algún inconveniente que dificulte el empleo de esta metodología de trabajo en el aula*?

“El inconveniente principal es creer que estamos ante la panacea de la enseñanza de la matemática. No todos los temas ni en todas las etapas será posible utilizar exitosamente a los problemas. Fuera de eso no tiene, en mi opinión, ninguna contraindicación.”

7. *¿Qué habilidades activa el alumno en la resolución de un problema*?

“Además de las mencionadas en la resp.5, permite que el estudiante sepa de su estado de incorporación de conocimiento. Éste se organiza, clasifica, descarta, perfecciona, discrimina, en otras palabras: forma su sentido crítico.”

8. *¿Piensa que los docentes, según su percepción, utilizan este abordaje? ¿por qué*?

"Si bien hay de todo, creo que con una mirada estadística la respuesta es lamentablemente negativa. Algunos intentan hacerlo, pero disfrazan ejercicios y los hacen pasar por problemas, o los proponen en momentos inoportunos (como, por ejemplo, en el momento de una evaluación).

Pero la mayoría no arriesga, no tiene tiempo o no tiene ganas. La falta de formación tampoco contribuye favorablemente a esto."

9. ¿*Qué opina Ud. de este abordaje en cuanto a la motivación de los estudiantes*?

"Creo que mi opinión está dentro de las respuestas anteriores. Pero en resumen digo que es superlativa.

10. ¿*El plan actual de formación docente prepara a los futuros docentes para impartir en sus clases la resolución de problemas*?

"Claro que sí. Forma parte de los programas de didáctica y me consta que en los cursos actuales tiene un destaque notorio"

11. ¿*Desea agregar algo más*?

"Sí. Me parece que las preguntas no fueron elaboradas ingenuamente y parten de la premisa de que parecería ser posible la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. Me hizo recordar a la postura de Charnay que afirma que *Sólo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver*."

Entrevistado*:* I 4. Realizada el 18 de noviembre 2010

"La resolución de problemas es el motor que impulsa el quehacer matemático. "resolver problemas es hacer matemática". Ha impulsado su desarrollo a lo largo de la historia, ha motivado su creación. Dentro de esta concepción la matemática es dinámica, va evolucionando y se va nutriendo de viejos y nuevos hallazgos. El docente cumple un rol bastante específico y es el de transponer; recortar, presentar y motivar el acercamiento del estudiante al conocimiento científico. El docente lo ha hecho a lo largo de la historia desde los inicios mismos de la matemática como disciplina científica, basta remitirnos a las escuelas griegas de la antigüedad. Pero como es obvio lo ha hecho de distintas maneras. Desde ese entonces cuando el conocimiento era para algunos eruditos, o elegidos. Pasando por épocas donde prevalecieron la mecanización y repetición de fórmulas y algoritmos que pocas veces tenían sentido para el alumno, hasta nuestros días donde hablamos continuamente de resolución de problemas pero pocos lo entienden como metodología de enseñanza y o aprendizaje, y donde la masificación de la educación nos obliga a pensar en una matemática para todos, donde no hayan excluidos.

Hace algunos años, en 1999 para ser precisos participe de un curso que se ofrecía a profesores de CES llamado de "sensibilización al plan 96", la reforma en ese entonces, en lo que al programa de matemática se refería, no tenia grandes cambios en los contenidos sino más bien en la metodología que promovía. Apuntaba quizás por primera vez de manera explícita, a trabajar con una metodología de resolución de problemas. Cuando los conferencistas o talleristas comenzaba a hablar los ecos se hacían llegar inmediatamente. Prácticamente los docentes se sentían ofendidos diciendo que ellos toda la vida habían trabajados en esta metodología y creo que muchos de ellos aún no lo han entendido.

Los docentes siempre hemos trabajado en nuestras clases con problemas, Obvio, la matemática no existe sin ellos, pero por lo general venían luego de un desarrollo extenso y pulido de teoría que lo sustentaba, o también podía aparecer como un ejemplo que aclaraba dicha teoría, o más aún, es fácil verlos en algunos textos como broche de oro, de un desarrollo impecable de un tema, a modo de evaluación.

Eso si, luego de 754 ejercicios casi iguales, si el problema te sale, seguro hiciste las 7 paginas de problemas anteriores y le garantizaba al profesor (no se como) que aprendiste la lección.

Tu pregunta es ¿Incorporan los profesores de matemática, en sus prácticas habituales, la resolución de problemas? Si, lo han hecho desde siempre. Pero cómo los incorporan?, qué rol cumplen los problemas dentro de su planificación?, son verdaderos problemas o por el diseño mismo se transforman en ejercicios a la hora de resolverlos?

Creo que son pocos los profesores que APLICAN la metodología de resolución de problemas en sus clases y CREEN en ella como un aliado, que vale la pena el esfuerzo (porque implica un tiempo muy grande y no remunerado de planificación).

La metodología de resolución de problemas entiende a un problema como una cuestión a ser resuelta, en la cual no se ve a simple vista una estrategia para resolverla, donde hay que ensayar varias estrategias o caminos, donde hay que tomar decisiones, donde entran en juego emociones de las cuales aparezcan obstáculos o bloqueos. Donde necesariamente debemos recorrer una y otra vez los caminos buscando su validación.

Entendido esto como problema, en dicha metodología se los promueve al comienzo de un tema como disparador o motivador, en donde la herramienta aparezca naturalmente como necesaria, buscando así que esta tenga sentido para el alumno. También los problemas son usados en el desarrollo de un tema con igual finalidad y al terminar el tema como nexo del próximo o sea más que proponerlos con un fin evaluador de cuanto sabe el alumno del tema, que le muestre, cuanto le falta por aprender. Me explico; al proponer un nuevo problema en donde todo lo aprendido no funciona uno tiene la necesidad de seguir aprendiendo. Y verdaderamente le mostramos al alumno que la matemática es dinámica y con una continua evolución, que se creo y se sigue creando así, que un problema no resuelto no es un fracaso sino una puerta abierta a la investigación, y quien sabe, a la creación de una nueva herramienta.

Yo creo en esta metodología, pero tiene ventajas y desventajas…..se lo dejo para que las piensen."

Entrevistado*:* I 5. Realizada el 14 de noviembre 2010

1. *¿Qué significa para Ud. la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas*?

"La enseñanza de la matemática a través de problemas es una forma de hacer que el alumno, motivado por un problema pueda elaborar una estrategia de resolución en la cual esté involucrado un nuevo conocimiento."

2. *¿Qué es un problema matemático para Ud.*?

"Es un problema que para su resolución necesita herramientas de la matemática. "

3. *¿En qué se diferencia para usted un problema de un ejercicio*?

"Un ejercicio es la aplicación de un contenido matemático aprendido, un problema es un planteo abierto, cuya resolución no es evidente ni hay un camino predeterminado a seguir para su resolución."

4. *¿Cuál es la fundamentación, a su juicio, que ha llevado a enfatizar en la resolución de problemas en los programas oficiales de Ciclo Básico? ¿y en bachillerato*?

"Creo que la fundamentación está basada en varios argumentos: motivar a los alumnos, adecuarse a los estudiantes postmodernos para lograr que aprendan, el aprendizaje por descubrimiento, elementos que surgen de las nuevas teorías de aprendizaje."

."

5. *¿Cuáles serían los beneficios de la enseñanza de la Matemática a través de resolución de problemas*?

"Desarrollar la capacidad de pensar al enfrentarse a una situación problemática nueva, creando un espíritu investigador en los alumnos."

6. *¿Existe algún inconveniente que dificulte el empleo de esta metodología de trabajo en el aula*?

"Que los contenidos a partir de los problemas no se jerarquicen y no pasen a ser conocimientos significativos para los alumnos, en cuyo caso cada vez que deban ser aplicarlos, sea necesario "descubrirlos" otra vez."

7. *¿Qué habilidades activa el alumno en la resolución de un problema*?

Respondida en la pregunta 5.

8. *¿Piensa que los docentes, según su percepción, utilizan este abordaje? ¿por qué*?

"Creo que no es un abordaje generalizado a todo el cuerpo docente, que depende de la formación de cada profesor."

9. *¿Qué opina Ud. de este abordaje en cuanto a la motivación de los estudiantes*?

"Que es una buena forma de motivar a los jóvenes, y que bien planificada por el docente rinde buenos resultados."

10. *¿El plan actual de formación docente prepara a los futuros docentes para impartir en sus clases la resolución de problemas*?

"El plan actual contiene este tema y pienso que a lo largo de su formación los futuros docentes adquieren los elementos necesarios para trabajar en sus clases con la resolución de problemas."

11. *¿Desea agregar algo más*?

"Considero que durante los seis años de la educación media, deben utilizarse diferentes estrategias para la enseñanza de la matemática. La resolución de problemas es una de ellas, y no olvidar que los problemas están presentes en otras modalidades."

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 105-122
ISSN: 1815-0640

Algunas consideraciones teóricas polémicas sobre los problemas matemáticos

Manuel Capote Castillo

Resumen

En este trabajo se analizan los puntos de vista del autor en cuanto al concepto de problema matemático y su estructura, así como en qué consiste una situación problemática. También se establece qué tipo de configuración psicológica es la solución de un problema y qué se entiende por resolver un problema.

Abstract

In this paper the author's points of view are analyzed about the mathematic problem concept and its structure, as well as what a problematic situation is. Likewise it establishes the kind of psychological configuration the solution of one problem is and what solving problem is.

Resumo

Neste trabalho o ponto de vista do autor é analisado sobre o conceito de problema matemático e a sua estrutura, assim como em que consiste uma situação problemática. Igualmente estabelece que tipo de configuração psicológica é a solução dum problema, e o que entende-se por a resolução dum problema.

1. Introducción

Hoy en día es aceptado de forma casi unánime, que el trabajo con los problemas, en particular el proceso de solución, es una de las principales tareas de la enseñanza de la Matemática. Sin embargo, esta concepción no siempre fue históricamente admitida. No fue hasta el año 1945 que aparece un importante libro sobre la resolución de problemas: "How to solve it?" escrito por George Polya, el destacado matemático húngaro. En esta obra, por primera vez, se ilustra un camino didáctico hacia la enseñanza de la resolución de problemas, que este autor había estado gestando un cuarto de siglo antes. En ella Polya redescubre, desarrolla la **heurística** y hace referencia a un grupo de estrategias que deben constituir una herramienta fundamental en la enseñanza de la resolución de problemas.

A pesar de la relevancia del texto mencionado y del vacío que el mismo llenó, sus ideas no comenzaron a tener una influencia generalizada hasta la década de los 80 del siglo XX. En parte, esto se debió como señalan Schoenfeld (1985) y Campistrous (1999) porque estas estrategias no son fáciles de enseñar y requieren para ello de una preparación especializada en el campo de la Matemática que la mayor parte de los maestros no poseen.

¿Qué necesidad histórica y social provocó la inclusión de la solución de problemas en el lugar que merecía en los currículos de la educación matemática en diferentes países del orbe?

Precisamente, como consecuencia de la Revolución Científica Técnica (RCT) surgida a mediados del siglo XX, se produjo y continuará ocurriendo en el mundo, una acumulación acelerada de la información y la introducción en ascenso de la computación. Lo anterior ha provocado que la función de la escuela haya tenido que cambiar a una fase cualitativamente superior: **enseñar a aprender,** y que en estos momentos se ha transformado en: **aprender a aprender**, para que el futuro ciudadano pueda enfrentar los retos que la contemporaneidad le depara. A partir de lo planteado hasta aquí, se puede inferir que existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo básico de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan Matemática a partir de la resolución de problemas.

¿Cómo se ha interpretado este propósito a lo largo de los años? Según Stanic y Kilpatrick (1989), la solución de problemas ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años. Este término ha compartido diferentes puntos de vista de: qué es la educación, qué es la instrucción, qué es la Matemática y por qué se debe enseñar Matemática en general y la solución de problemas en particular.

Primer significado: resolver problemas como contexto.

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

- *Como una justificación para enseñar matemática*: son incluidos en la enseñanza algunos problemas relacionados con la vida cotidiana para mostrar el valor de la matemática.
- Como medio p*ara proveer especial motivación a ciertos temas*: los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con la intención implícita o explícita de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
- *Como actividad recreativa*: justifican que la Matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- *Como medio para desarrollar nuevas habilidades*: se cree que, cuidadosamente secuenciados y estructurados, los problemas pueden contribuir a la formación y desarrollo de nuevas habilidades en los aprendices.
- *Como práctica*: Se enseña determinado procedimiento o técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas donde sea preciso aplicarlo de manera reiterada. Se ha comprobado que la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, la resolución de problemas no es vista como una meta u objeto de enseñanza en sí misma, sino como una vía para el logro de otros objetivos: resolver las tareas que han sido propuestas.

Segundo significado: resolver problemas como habilidad.

La mayoría de los desarrollos curriculares que ha habido bajo el término resolución de problemas a partir de la década de los 80 son de este tipo. La resolución de problemas en este caso es vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el currículo, que en cierta medida se aprende por imitación. Primero, se le plantean a los escolares **problemas rutinarios** (habilidad que a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas) y después serán capaces de resolver **problemas no rutinarios** como una habilidad de nivel superior.

Es importante señalar, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen en esta segunda interpretación son precisamente las mismas que las señaladas en el significado anterior.

Tercer significado: resolver problemas es un arte: "hacer matemática".

Consiste en considerar que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la Matemática realmente consiste en problemas y sus soluciones.

Aunque la posición oficial de las autoridades educaciones de la mayoría de los países se aproximan mucho a este último significado, todavía en los salones de clases no se materializa en toda sus potencialidades.

A partir de la década de los 80 del siglo XX se han publicado en el mundo muchos libros y artículos relacionados con la solución de problemas; sin embargo, aún se aprecia en ellos la no existencia de consenso en aspectos tales como qué es un problema, cuál es su estructura, qué se diferencia un problema de una situación problemática. Por otra parte, tampoco hay acuerdo en cuanto a lo que se comprendería por el proceso de solución de un problema y mucho menos si este es una: actividad de estudio, habilidad, capacidad o competencia.

Precisamente, el propósito de este artículo es presentar y analizar las posiciones teóricas del autor sobre estas cuestiones polémicas que han existido durante años en la didáctica de la solución de problemas. Es por ello, no se incluyen experiencias de trabajo con estudiantes.

2. Desarrollo

2.1 Concepto de problema. Su estructura. Situación problemática

La palabra **problema** procede del griego y significa: tarea, ejercicio o pregunta teórica o práctica que exige solución. Sin embargo, este vocablo tiene en la actualidad múltiples acepciones, en dependencia de la esfera del conocimiento en que se trate y de la posición teórica e ideológica que se asuma.

Según Majmutov (1983) *"Toda actividad del hombre se relaciona directamente con la solución consecutiva de problemas*" (p. 67). Así es como regularmente se emplea la palabra "problema" para designar **cuestiones no resueltas.**

Desde el punto de vista científico conviene precisar las distintas connotaciones del referido concepto:

- como <u>categoría de la lógica dialéctica</u> consiste en que éste refleja la existencia de una **contradicción dialéctica** en el **objeto** a conocer. "*El problema determina la actividad investigativa de búsqueda del hombre, encaminada al descubrimiento de un conocimiento nuevo o a la aplicación de uno conocido a una situación nueva. El problema es una forma subjetiva de expresar la necesidad de desarrollar el conocimiento científico*" (Majmutov, 1983, p. 58)

- como <u>categoría psicológica</u> refleja las **contradicciones** dentro del **proceso del conocimiento** del **objeto** por el **sujeto**. De acuerdo con Rubinstein (1966) es la causa primaria del pensamiento*: "El proceso del pensar arranca de una situación problémica"* (p. 109). Establece una diferencia entre la situación problémica y el propio problema; la primera es la que presenta elementos desconocidos, poco claros o explícitos, mientras que en el segundo el sujeto tiene conciencia de lo buscado. Por su parte el psicólogo cubano A. Labarrere (1987) plantea que en todo problema interviene "*la actividad psíquica del sujeto*" (p. 6). Más adelante agrega que: *"todo genuino problema se experimenta o percibe por el sujeto que lo resuelve como carencia de medios para llegar a un fin (...) hace surgir en aquel que lo resuelve determinadas necesidades y motivos que lo impulsan a acometer la solución* (...) *un problema es intransferible"* (p. 6-7). En otro texto más cercano en el tiempo señala: *"...es determinada situación en la cual existen, nexos, relaciones, cualidades de entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona. Un problema es toda situación en la cual hay algo oculto para el **sujeto**, que éste se esfuerza por hallar"* (Labarrere, 1996, p. 6).
- como <u>concepto matemático</u>, diferentes autores han dado sus criterios. Por ejemplo:

George Polya (1976), uno de los matemáticos que han sido fundadores de la didáctica de la resolución de problemas, al respecto señala: *"un problema significa buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"* (p. 11).

Lev Fridman (1995) indica que un problema: "*consiste en alguna exigencia, requerimiento o pregunta para la cual se necesita encontrar la respuesta, apoyándose en y tomando en cuenta las condiciones señaladas en el problema"* (p. 13)

F. Lester (1985) define problema como *"una situación en donde a un individuo o grupo se le exige realizar una tarea para la cual no existe un algoritmo fácil y accesible que determine completamente el método de solución"* (p. 287) Al mismo tiempo asume que debe existir el "deseo" por parte del individuo o el grupo de realizar la tarea.

Esta definición es consistente con otras dadas por: Brownell (1942); Duncker (1945); Hendereson y Pringy (1953); Kinsella (1970); Bourre, Ekstrand y Dominowski (1971); Newell y Simon (1972); Resnick y Glaser (1976), entre otros.

Para A. H. Shöenfeld (1993) problemas son *"aquellas cosas que son verdaderamente problémicas para las personas que trabajan en ellas, se asume que estas personas no tienen a mano un procedimiento de rutina para la solución"* (p. 121).

En Cuba también han existido un grupo de pedagogos, matemáticos e investigadores que le han dedicado tiempo al estudio de los problemas matemáticos. A continuación se citarán a algunos de ellos, que por su relevancia han tenido mayor divulgación:

El pedagogo pinareño J. Elpidio Pérez Somozza (1930) empleó parte de su labor docente a escribir sobre la metodología de la Matemática en la escuela primaria. En su obra más significativa en este sentido expresó: *"cualquier dificultad* *que se le presente al niño, capaz de provocar en él un esfuerzo de su inteligencia con el fin de darle solución, es un problema"* (p. 28). A continuación puntualiza: *"Cuando esas dificultades se refieren a hechos cuantitativos que están dentro del círculo de la experiencia, los intereses por medio de números, tendremos un problema aritmético escolar*" (p. 28).

Los destacados pedagogos, matemáticos e historiadores: Luis J. Davidson y Raimundo Reguera (1987), han señalado que: *"un problema representa una verdadera situación nueva"* (p. 1).

En la bibliografía de A. F. Labarrere (1988) destinada a esta temática se puede encontrar la siguiente definición: *"Un problema es toda situación en la cual, dada determinadas condiciones (más o menos precisa), se plantea determinada exigencia (a veces más de una). Esta exigencia no puede ser cumplida o realizada directamente con la aplicación inmediata de procedimientos y conocimientos asimilados, sino que se requiere la combinación, la transformación de estos en el curso de la actividad que se denomina solución*. *Todo verdadero problema se caracteriza porque exige que aquel que lo resuelve, el alumno en nuestro caso, comprometa de una forma intensa su actividad cognoscitiva..."* (p. 1-2)

En los últimos años, los matemáticos e investigadores Luis A. Campistrous y Celia Rizo (1996) han dirigido el grupo "Aprende a resolver problemas aritméticos" del Proyecto TEDI (Técnicas de Estimulación del Desarrollo Intelectual) auspiciado por el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba (ICCP). Estos pedagogos han planteado que: *"Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación"* (p. IX-X).

M. J. Llivina (1999) propuso una definición que tiene como concepto superior el de ejercicio matemático. Así indica: "*Un ejercicio es un problema si y solo si la vía de solución es desconocida por la persona"* (p. 48)

Las anteriores conceptualizaciones no se contradicen, sino más bien se complementan.

A partir de la sistematización de las definiciones anteriores y tomando como base fundamental la ofrecida por Campistrous-Rizo e incluyendo una cuarta condición, se asume aquí la siguiente conceptualización:

Un **problema,** como concepto **didáctico - matemático** se caracteriza por las siguientes condiciones:

1. Ser un planteamiento donde aparece una **exigencia** que obliga a partir de una **situación inicial** buscar una vía de solución para obtener una **situación final.**
2. La **vía** para pasar de la **situación inicial** a la **situación final** es desconocida para el **resolutor.**
3. La persona debe **querer** hacer la transformación.
4. Ajuste a la **realidad** de los elementos estructurales y/o **relaciones lógicas** entre los mismos.

La primera condición la cumple todo ejercicio matemático, mientras que la segunda nos indica que no existe un **algoritmo** predeterminado que permita darle solución. Desde el punto de vista didáctico se aprecia el carácter individualizado de su tratamiento: lo que para un alumno es un problema para otro no lo es. La tercera condición refleja el aspecto **afectivo-motivacional** de esta tarea. Por otra parte, la cuarta nos señala que el problema debe ajustarse a la realidad que describe; por ejemplo, si en el texto se hace referencia al peso de diversas personas las cifras que allí aparecen deben concordar con esta situación concreta. Esta última condición es muy importante para preparar a los estudiantes de manera que ellos sean capaces de formular problemas.

La posición que se ha asumido aquí de considerar que todo problema es un ejercicio que cumple determinadas condiciones adicionales, no es compartida por algunos autores; por ejemplo, Kantowski (1981) señala:

"Un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que en un problema el resolutor no tiene un procedimiento o un algoritmo con el cual ciertamente conduciría a la solución" (p. 113)

La justificación para haber aceptado este punto de vista de considerar un ejercicio matemático como un concepto superior al de problema, consiste en que la frontera entre ambos conceptos es movediza; es decir, que es relativa la ubicación de una determinada situación en uno u otro concepto.

Por ejemplo, la siguiente tarea: "**El dividendo es 6.428 y el divisor es 2. ¿Cuál es el cociente?"** En la mayoría de los casos se acostumbra denominar esta situación como un **ejercicio** (con texto matemático); sin embargo, la primera vez que se le propone a los escolares ellos no conocen un procedimiento o algoritmo para hallar este cociente y por tanto, constituye en esta oportunidad un verdadero problema, si ellos sienten la necesidad de efectuar el cálculo correspondiente.

Por otra parte, en muchos libros de texto la siguiente situación es considerada un **problema oral**: "**Teresa tiene 13 años y su hermana el doble; al adicionar las edades de ambas se tiene la edad de su tío. ¿Cuántos años tiene su tío?"**

Ahora bien, si después de proponer este tipo de **problema**, se indican situaciones similares a esta de forma reiterada, entonces este deja de ser un problema pues se convierte en una rutina, o sea en un ejercicio.

De lo anterior se infiere que para determinar si un ejercicio es un problema hay que contextualizar el momento en que este se propone, tener en cuenta el propio contenido matemático que se involucra, el tipo de alumno que debe resolverlo, entre otros factores. Retornando a la definición establecida, la primera condición se pudiera representar así:

Figura 1

En este gráfico se aprecia como la **exigencia** obliga a partir de una **situación inicial** (cierta información que se brinda) buscar una **vía de solución** (desconocida por el resolutor: quien resuelve el problema) para poder llegar a la **situación final** (la respuesta). Pero para que este proceso sea efectivo, es importante que el individuo (en nuestro caso el escolar) desee resolverlo.

Es bueno aclarar que se está asumiendo aquí el concepto de problema en su acepción más amplia. Es por ello que se van a considerar como **elementos estructurales** los que aparecen en la caracterización: **exigencia, situación inicial (SI)** y **situación final (SF).**

En todo problema siempre hay una **exigencia** (al igual que en todo ejercicio matemático), que viene dada por una pregunta o una orden que es la que debe ser contestada por el resolutor del problema.

Todo problema posee **situaciones iniciales** (SI) que son las informaciones o los datos parciales o totales que se ofrecen para que el problema pueda ser resuelto. Hay que tener en cuenta que algunas veces se brindan datos adicionales, que no son necesarios para resolverlo y en otros, no se ofrece toda la información requerida.

Por otra parte, la **situación final** (SF) es la respuesta o la solución del ejercicio que puede o no ser conocida por el resolutor. En muchos casos debe ser encontrada aplicando una adecuada vía de solución, en otros se conoce la misma y la función del resolutor es descubrir dicha vía que debe conducir a encontrar esta solución.

Ejemplo 1*:*

El papá de Joaquín debe hacer una instalación eléctrica en su casa, para lo cual necesita aproximadamente 2 m. de cable. Él dispone de pedazos de cables: tres de 75 cm. cada uno, uno con 1 m. 9 cm. y otro con 55 cm. ¿Cuáles de ellos debe empatar para desperdiciar la menor cantidad posible de material?

En este caso la **situación inicial** está conformada por todos los datos o informaciones que se ofrecen y que deben ser tenidas en cuenta para resolver el problema: necesita **2 m de cable** aproximadamente; dispone de pedazos: **tres de 75 cm. cada uno, uno con 1 m. 9 cm. y uno con 55 cm.**

La **exigencia** viene dada por la pregunta que hay que contestar: **¿Cuáles de ellos debe empatar para desperdiciar la menor cantidad posible de material?**

En cuanto a la **situación final** no aparece explícitamente, o sea es la respuesta que el resolutor debe encontrar para contestar el interrogante formulado.

Ejemplo 2*:*

Fundamentar que: En todo paralelogramo se cumple que sus ángulos opuestos son iguales.

La **situación inicial** consiste en la información que se ofrece y con la cual se debe trabajar: **cualquier paralelogramo.**

La **exigencia** viene dada por la orden que se da: **Fundamentar.**

La **situación final** aquí si se ofrece explícitamente: **ángulos opuestos iguales**.

En esta oportunidad la misión del resolutor consiste en buscar las propiedades, relaciones y conceptos que le permita realizar la fundamentación solicitada.

Resulta de interés el estudio que hace Borasi, R. (1986) sobre los elementos estructurales de un problema:

(a) **La formulación del problema:** la definición explícita de la tarea que debe ser ejecutada.

(b) **El contexto del problema:** la situación en la cual el problema está enmarcado.

(c) **El conjunto de solución(es)** que pudieran ser consideradas aceptables para el problema dado.

(d) **Los métodos** que pudieran ser empleados para alcanzar la solución.

Estas cuestiones más bien son elementos que se deben tener en cuenta al resolver un problema por la trascendencia que tienen en este proceso, pero no son los elementos estructurales internos de un propio problema.

Las anteriores posiciones teóricas tienen un enfoque eminentemente didáctico; sin embargo, existen situaciones de la vida real y de la propia Matemática, que no se ajustan a la caracterización dada sobre el concepto de problema que se ha asumido aquí.

Si se tiene presente que la principal misión de la escuela, como institución que debe cumplir un encargo social, es preparar al sujeto para la vida, entonces, además de los problemas con las características que se han terminado de exponer, se deben proponer a los escolares situaciones que se acerquen mucho más a la práctica social y también a los métodos de la propia Matemática, como ciencia.

A estas tareas escolares se les pudieran denominar **situaciones problemáticas,** que se caracterizarían por:

Ser un planteamiento donde aparece una **exigencia** que obliga a partir de una **situación inicial** buscar una vía de solución para obtener una **situación final**, pero tanto la exigencia como la situación inicial son incompletas, imprecisas o ambiguas, mientras que la situación final, en general, es aproximada o no única.

Como consecuencia de este comportamiento, el resolutor para resolverla debe proceder a:

(a) Explorar el contexto para adquirir información adicional que le permitiría reformular el planteamiento inicial para resolverlo.

(b) Aplicar diversos métodos y estrategias para obtener la solución que, por supuesto, dependerá de la reformulación realizada.

(c) En algunos casos, es conveniente confrontar la solución obtenida con el planteamiento original para comprobar la pertinencia de esta.

Durante este proceso, el resolutor debería ser capaz de convertir la situación problemática en un problema. Esto lo lograría al efectuar el primer paso, o sea, al explorar el contexto, adquirir la información necesaria y reformular el planteamiento original.

Como se ha señalado, estas situaciones pueden ser tomadas de la vida real o de la ciencia Matemática. Cada una de ellas tiene sus peculiaridades que la distinguen una de la otra.

Un ejemplo de la primera situación pudiera ser el que sigue: "*La familia Fernández quiere colocar losas en el piso de la sala de su casa. Para ello necesitan estimar la cantidad de losas que deben adquirir*"

Al explorar el contexto el resolutor buscaría la información adicional requerida para poder formular el problema asociado correspondiente; en esta oportunidad deberá determinar, en primer lugar, el tipo de losa que esta familia desea colocar, los precios que estas tienen y las posibilidades económicas para comprarlas; en segundo lugar, valorar la posibilidad real de determinar el área de la superficie de la sala y en tercer lugar puntualizar si lo que quieren saber es solo la cantidad de losas o también el importe de la compra.

Si se logra recopilar esta información entonces estará en condiciones favorables para la formulación de un problema, que pudiera ser similar al siguiente: "*La familia Fernández quiere colocar losas en el piso de la sala de su casa que tiene una superficie que mide 12 m*^{2}*. Cada losa tiene forma cuadrada con 150 cm*^{2} *de área. ¿Cuántas losas como estas ellos necesitan para cubrir el suelo de esta habitación? ¿Cuánto dinero tendrán que invertir en esta comprar si se sabe que cada losa cuesta $ 5.65?*"

Ahora resulta relativamente fácil resolver este problema, ya que si el escolar domina los procesos o algoritmos de: conversión de unidades de superficie, la división y la multiplicación entre expresiones decimales, no tendría dificultades para resolverlo.

Desde el punto de vista didáctico, resulta oportuno que este tipo de situaciones sean tomadas, la mayoría de las veces, del propio entorno de los escolares y que estos participen de forma protagónica en la búsqueda de toda la información requerida en el propio escenario de la situación problemática. Esto contribuiría notablemente a que ellos aprecien el vínculo entre los conocimientos escolares que se imparten en la escuela y su verdadera aplicación en la práctica cotidiana. También durante todo este proceso los escolares profundizarán en la propia búsqueda de métodos, estrategias y recursos para obtener las soluciones, así como la propia evaluación de las seleccionadas, de manera que se ajusten a cada planteamiento. Este modo de proceder, además incentivaría la motivación por el aprendizaje de la Matemática y de los propios contenidos de esta disciplina que pudieran estar involucrados en cada una de las situaciones que se les propongan. Tampoco se puede ignorar el estrecho nexo que existe entre la solución y la formulación de problemas.

Sea, ahora la situación problemática tomada de la ciencia Matemática: "*Se sabe que el <u>producto</u> de dos números naturales consecutivos es siempre divisible por dos. ¿Se mantendrá esta misma propiedad si en el teorema anterior se sustituye el <u>producto</u> por una <u>suma</u>?*"

Aquí el resolutor tendría que explorar el contexto y buscar la información complementaria para poder hacer alguna conjetura y después probarla o refutarla. En esta ocasión se preguntaría ¿será la suma de dos números naturales consecutivos siempre divisible por dos? Para afirmar o negar tal pregunta, deberá ensayar con algunos casos particulares, por ejemplo: 2 + 3 = 5 (NO); 3 + 4 = 7 (NO), 4 + 5 = 9 (NO); … A partir de este proceso inductivo el escolar descubría que todas las sumas son números impares, luego ya puede decir que la afirmación es negativa, ya que NO siempre es divisible por dos. Le quedaría la duda si nunca se cumple la propiedad conjeturada. Ahora seguiría un proceso deductivo al trabajar con variables. Se tendría que (n) + (n + 1) = 2n + 1 que siempre es un número impar.

De esta forma ha demostrado el siguiente teorema que se puede considerar como un problema. "*La suma de dos números naturales consecutivos es siempre un número impar*", o su equivalente: "*La suma de dos números naturales consecutivos nunca es divisible por dos*".

Es indiscutible que el planteo de tales situaciones contribuye a: desarrollar el pensamiento de los escolares, acercarlo a los propios métodos y procedimientos de la Matemática como ciencia, en particular con los métodos inductivos y deductivos, colocar al escolar en el rol de un “investigador” al tener que hacer conjeturas, hipótesis, suposiciones, así como a confirmar o refutar determinada proposición. Todo ello redundará además, a perfeccionar el dominio del propio lenguaje de la Matemática, sus conceptos, definiciones, teoremas, propiedades, etc. Si este tipo de ejercicios es manejado con cautela e inteligencia por el propio docente, deberá motivar a los propios estudiantes no tan solo por el estudio de esta disciplina, si no también por los propios métodos matemáticos para la obtención de los conocimientos en esta ciencia.

2.2 La resolución de problemas: ¿actividad de estudio, habilidad, capacidad o competencia?

El concepto **actividad** como **categoría psicológica**, según González V. et al (1995) son aquellos procesos mediante los cuales el individuo respondiendo a sus **necesidades** se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud ante ella. La premisa básica de la actividad es la **necesidad**, que refleja el estado de carencia del individuo activando al sujeto a su satisfacción; esta condición interna del sujeto, cuando se encuentra con el objeto que es potencialmente capaz de satisfacerla, se convierte en algo capaz de orientar y regular la actividad en cuestión; de esta manera ha encontrado su **motivo**, que es el reflejo psíquico del objeto que satisface la necesidad.

Ahora bien, toda actividad se realiza mediante **acciones** que son procesos subordinados a **objetivos** o **fines conscientes** y, en **operaciones** que son formas mediante las cuales la acción transcurre en dependencia de las **condiciones** en que se debe alcanzar el objetivo.

En particular, la **actividad de estudio** debe ser la actividad rectora en la edad escolar temprana. Según Davídov, V. (1988) los **conocimientos teóricos** constituyen simultáneamente su **contenido** y su **necesidad.** Mediante el planteamiento de diversas tareas el escolar encuentra los verdaderos motivos.

Por otra parte, se acepta que una **habilidad** es una forma de asimilación de la actividad de la personalidad donde el sujeto demuestra que domina determinado **sistema de acciones** (psíquicas o prácticas) que le permite una regulación **racional** de la actividad con la ayuda de conocimientos y hábitos que posee. Mientras que el **hábito** es otra forma de asimilación de la actividad, pero donde el sujeto debe dominar un **sistema de operaciones automatizadas** para la realización de diversas acciones.

Los hábitos y las habilidades constituyen formas diferentes en que se expresa la asimilación de la actividad en el plano ejecutor.

Otro concepto psicológico muy relacionado con el de habilidades y hábitos, y también polémico en cuanto a su conceptualización, es el de **capacidades** que en forma breve se pudiera considerar como las formaciones psicológicas de la personalidad que son condiciones para realizar con éxito determinados tipos de actividad.

Las **capacidades** revelan la **dinámica** (rapidez, facilidad, profundidad, precisión, originalidad, constancia y calidad) con que se adquieren, asimilan y aplican un conjunto de conocimientos, habilidades y hábitos. Se pudiera decir que las capacidades nos indican **cómo** un individuo realiza cierta actividad.

Hoy en día se está empleado el término de **competencias**, como un escalón superior al de capacidades. Para los autores que defienden este término, lo diferencian de las capacidades, en que plantean que un sujeto tiene **capacidades** cuando posee **potencialidades** para el desempeño exitoso de cierta tarea, mientras que es **competente** cuando ha desarrollado determinadas capacidades, pero las desempeña de **manera eficiente**, movilizando todos sus recursos para ello.

Es decir, que las capacidades y las competencias expresan de forma diferente la dialéctica entre lo potencial y lo real: la **capacidad** es **potencialidad** que puede llegar o no a convertirse en realidad, o sea a materializarse, mientras que la **competencia** es **realidad actualizada**, y se manifiesta en un comportamiento concreto, mediante la acción.

Luego, desde el punto de vista didáctico se debe trabajar para que **resolver** problemas sea una verdadera **actividad de estudio** por el fuerte **componente motivacional** que lleva implícito este concepto psicológico. Sin embargo, en el **plano ejecutor**, la **resolución**, por la propia complejidad y diversidad de las acciones que se deben instrumentar, se puede considerar en un **estadio inicial** como **habilidad;** posteriormente mediante un **proceso integrador** se convertirían en **capacidad** y, finalmente se debe aspirar a que se transforme en una **competencia** mediante un **trabajo sistemático e intencional** por parte de los docentes.

Retomando el concepto de competencia y por ser la máxima aspiración a la que debemos alcanzar en el plano pedagógico, desde el punto de vista operativo resulta funcional asumir la siguiente definición:

Las **competencias** son **configuraciones psicológicas** predominantemente cognitivas, conformadas funcionalmente por tres dimensiones: una **procesal**, otra **operacional o instrumental** y otra **motivacional**, que garantizan el **éxito y la eficiencia** en el **desempeño** de una determinada **actividad.**

De acuerdo con Castellanos, D. y Córdova, M. D. (1995) y Córdova, M. D. (1997) estas dimensiones se descomponen en las siguiente sub-dimensiones e indicadores:

A. Dimensión procesal: comprende los procesos psíquicos que intervienen en la actuación del sujeto; sensopercepción, memoria, imaginación y pensamiento. Se descompone en dos sub-dimensiones:

A.1 Calidad procesal: expresa la caracterización cualitativa de las acciones intelectuales y de los procesos sobre cuya base estos transcurren. Los indicadores (Córdova, M. D. 1997) que permiten medir esta vienen dados por:

♦ **Independencia**: Es la posibilidad de cada sujeto de seguir una línea propia de pensamiento y modos de procesamientos autónomos. Está relacionada con los diferentes niveles de ayuda y con el tipo de orientación que cada sujeto necesita para ejecutar las acciones que le garantizan el éxito de la actividad.

♦ **Originalidad**: Se manifiesta por la cantidad de ideas y opiniones inusuales, no comunes, que el sujeto puede ofrecer y generar ante un hecho, situación o fenómeno.

♦ **Fluidez**: Se expresa en el número de ideas o producciones que el sujeto pueda generar o utilizar en un contexto determinado.

♦ **Flexibilidad**: Se refiere a la variedad de recursos que el sujeto es capaz de emplear en las situaciones que enfrente, en su posibilidad de generar diferentes modos de contemplar un fenómeno; en la posibilidad de modificar el rumbo de la actividad intelectual cuando la situación lo requiera.

♦ **Elaboración**: Se evidencia en la posibilidad para producir gran cantidad de riqueza de detalles en el análisis de una idea o de una situación dada, de llevar esta hasta las últimas consecuencias. De esta forma logra desarrollar la actividad, clarificarla, perfeccionarla, descubriendo en ese proceso deficiencias que sirven de base para re-elaboraciones.

♦ **Logicidad**: Se manifiesta en la posibilidad de seguir un orden lógico, sin saltos arbitrarios, en la dinámica del procesamiento de determinada información.

♦ **Profundidad**: Se refiere a las posibilidades de penetrar en la esencia de los hechos, los fenómenos y las situaciones, buscando generalizaciones, leyes y regularidades; se tiende a buscar lo relevante haciendo abstracción de lo no significativo.

♦ **Productividad:** Se comprende como el equilibrio relativo entre la velocidad del procesamiento de la información para ejecutar la actividad, la relativa independencia con que se realiza y la calidad del resultado obtenido, o sea, es la optimización de recursos para la ejecución de la actividad prevista.

A.2 Metacognición: Cualquier tipo de manifestación de los conocimientos del sujeto acerca de sus propios conocimientos relativos a determinada actividad; así como el control de su ejecución, a través del autoconocimiento, autocontrol, autoevaluación y la autovaloración. Se utilizan como indicadores los que siguen:

♦ **Metaconocimiento:** Consiste en el conocimiento y la conciencia que el sujeto tiene de sus propios conocimientos para poder ejecutar de manera exitosa una determinada actividad. Esto incluye el autoconocimiento de las potencialidades y debilidades en el dominio de estrategias, técnicas, etc. para ejecutar las acciones u operaciones. En los estilos propios de trabajo, sus preferencias y sus posibilidades intelectuales. El grado de conciencia de pre-requisitos, condiciones, exigencias y obstáculos involucrados acerca de la tarea que realiza.

♦ **Control ejecutivo**: Está dado por el dominio y uso efectivo de la planificación, supervisión, corrección, comprobación, evaluación y los procesos que caracterizan el control y autorregulación de la actividad que se realiza el sujeto.

B. Dimensión operacional o instrumental: Concierne al desarrollo y las particularidades de las bases de conocimientos y del sistema de acciones generales y particulares con que los sujetos deben funcionar y que deben desarrollar. Se incluyen dos sub-dimensiones:

B.1 Bases de conocimientos: Es la manifestación de los conocimientos del sujeto con relación al entorno en el cual realiza su actuación. Se puede medir mediante los siguientes indicadores:

♦ **Volumen:** Entendido como la riqueza de conocimientos sobre una o más áreas, fundamentalmente el nivel de conocimientos generales que posee el sujeto.

♦ **Especialización**: Considerado como el nivel de profundidad y solidez de la información que se posea en un área determinada, dado por las características cuantitativas y por la posibilidad de penetrar en nexos multilaterales que captan las leyes y núcleos esenciales de un campo del saber o en una esfera de la actividad.

♦ **Organización**: Comprendida como el nivel de estructuración y sistematización de los conocimientos, para poder relacionar nuevos sistemas de informaciones con los viejos, y el consecuente poder de los mismos para ser utilizados en realizar transferencias y generar nuevas hipótesis e información a partir de la existente.

B.2. Sistema de acciones intelectuales: Está vinculada con cualquier manifestación de las ejecuciones del sujeto en los marcos de su actuación mediante acciones, operaciones, habilidades, hábitos, entre otros. Los indicadores en este caso dependerán de la actividad intelectual que se debe realizar.

C. Dimensión motivacional: Se engloban en ella las particularidades de los procesos motivacionales que *estimulan, sostienen y dan una dirección* a la actividad que llevan a cabo los sujetos y que condicionaran su expresión como auto-perfeccionamiento y auto-educación. Comprende las siguientes sub-dimensiones:

C.1 Motivaciones predominantemente intrínsecas: se sustenta en la implicación e interés personal por el propio contenido de la actividad que realiza el sujeto, y en la satisfacción y los sentimientos de realización personal que experimenta al instrumentarla.

C.2 Sistema de autovaloraciones y expectativas positivas: Un aprendiz competente y eficaz tiene una autoestima positiva sobre la actividad que realiza y esto conlleva a la existencia de expectativas positivas de confianza y seguridad en la obtención de logros y éxitos en este proceso, y por tanto, cuando se presenten obstáculos sabrá esforzarse y perseverar para vencerlos.

2.3 La solución de problemas aritméticos como importante competencia

Aunque no existe consenso entre los didactas de la Matemática en distinguir entre resolver y solucionar un problema; en general, se considera que la **resolución** de un problema consiste en hallar la solución del mismo, o sea, determinar la respuesta correcta; mientras que la **solución** de un problema es el conjunto de operaciones o transformaciones que se han de efectuar para hallar la respuesta del mismo.

Para algunos autores como Fridman, L.M. (1995) y Labarrere, A. (1987) la **esencia** en la **solución** de un problema verbal, desde el punto de vista matemático, consiste en la **construcción** de su **modelo matemático**.

Se entiende como **modelo matemático,** para este tipo de problemas, la construcción de un sustituto de este tipo de ejercicio, donde se reproducen determinadas condiciones o relaciones matemáticas esenciales del problema que permiten realizar en él ciertas transformaciones, como si fueran hechas en el problema original.

La construcción del modelo matemático actúa como el **tránsito** del lenguaje cotidiano o común (texto original del problema), a un lenguaje estrictamente matemático (modelo del problema).

Por tanto, **construir el modelo matemático** coincide con lo que usualmente denominamos **determinar la vía de solución** del problema.

Ahora bien, construir el modelo matemático, desde mi punto de vista, es la parte fundamental en la solución del problema matemático, pero después de realizado éste, es preciso ejecutar lo planteado, es decir, efectuar los cálculos, las operaciones, las diferentes transformaciones, entre otras, que permiten tener acceso a la respuesta. Además, se debe encontrar la respuesta **correcta.**

Es por ello, se debe aspirar tanto a **encontrar la vía de solución** como de **hallar la respuesta correcta.** Por tanto, se aceptará en este artículo los términos **solución** y **resolución** de problemas como sinónimos.

Por otra parte, la **modelación gráfica** puede o no utilizarse en la construcción del modelo matemático; ello dependería de las características, tanto del problema como del resolutor. En caso de emplearse puede ser el único modelo a realizar o puede complementar a otro tipo de modelación abstracta.

A continuación se ejemplificarán con los siguientes problemas lo que se ha terminado de afirmar:

Ejemplo: "*Se distribuyen 475 pollos diariamente durante 5 días. Si se deben distribuir 2700 pollos*. *¿Cuántos pollos faltan por distribuir*?" (tomado del libro de texto de Matemática 3er. Grado, p. 135)

En este problema se describe en el lenguaje común un hecho: la distribución de pollos.

Lo **conocido** en el mismo es: la cantidad de pollos que se distribuyen diariamente: 475; la cantidad de días en que son distribuidos los pollos: 5 y la cantidad total de pollos que se deben distribuir: 2 700.

Lo **desconocido** y que se debe hallar es: la cantidad de pollos que faltan por distribuir.

Pudiera ocurrir que un alumno necesite, para comprender mejor el problema, utilizar la **modelación gráfica**, en particular la **lineal.** En este caso dibujaría lo siguiente:

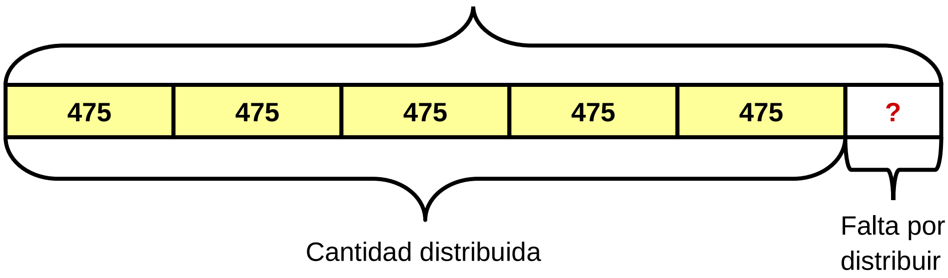


Figura 2

Con el apoyo de este modelo y con la aplicación de los significados prácticos de la multiplicación y la sustracción se deben efectuar las operaciones.

$$2\ 700 - (475 \times 5) = ?$$

Precisamente esta expresión es el **modelo matemático** del problema que permite hallar la solución correcta.

Se puede apreciar que el modelo gráfico es un complemento de apoyo para obtener el modelo matemático que permite resolver el problema.

En este caso se ha usado un **modelo aritmético** para resolverlo.

Ejemplo: "*Un cuaderno es cuatro veces tan caro como un lápiz. Este es 75 ¢ más barato que el cuaderno. ¿Cuánto cuesta cada uno*?"

<u>Primera vía</u>: Es posible que a algunos alumnos les resulte difícil comprender este texto, entonces pudieran utilizar la **construcción de un modelo gráfico** para lograrlo:

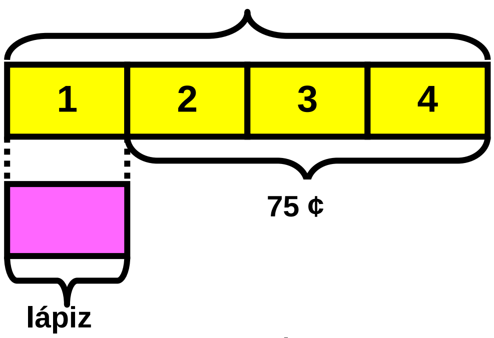


Figura 3

Este modelo lineal con rectángulos permite a los escolares plantearse el **modelo aritmético** para resolver el problema:

(75 : 3) x 4 = a (precio del cuaderno) **a – 75 = b** (precio del lápiz)

Segunda vía: Si el alumno domina la solución de ecuaciones lineales de primer grado pudiera plantearse el siguiente modelo:

Sea x: precio del lápiz

4x: precio del cuaderno

Luego **4x – x = 75**

Tercera vía: Si se utiliza la **modelación tabular** con el apoyo del **tanteo inteligente** se construiría la siguiente tabla:

Tabla 1

PRECIO		DIFERENCIA
LÁPIZ	**CUADERNO**	
10 ¢	40 ¢	30 ¢
20 ¢	50 ¢	60 ¢
25 ¢	100 ¢	75 ¢

El **tanteo inteligente** se manifiesta en que sean capaces de descubrir que cada vez que **aumenta 10 ¢ el lápiz, la diferencia aumenta en 30** ¢: luego si el **aumento es de 5 ¢ la diferencia aumentará en 15 ¢.**

En esta oportunidad el empleo de la **modelación gráfica** sirvió, tanto para comprender el problema como para descubrir la vía de solución y simultáneamente de resolverlo.

De lo anterior se infiere que la **construcción** del **modelo matemático** está en correspondencia con determinado **análisis del problema.** Por supuesto, este análisis depende de preparación matemática del resolutor así como del tipo de actividad cognoscitiva que despliegue.

Diversos autores señalan que la **principal dificultad** en la elaboración de los modelos matemáticos de los problemas, radica en que muchas veces al alumno le resulta difícil representarse las relaciones implicadas o contenidas en el texto y expresarlas con el grado de abstracción que involucra dicho modelo.

Precisamente es por ello, que en este acto es donde el escolar debe desplegar una mayor actividad cognoscitiva. Esto tiene particular importancia en el plano didáctico pues en este componente, es donde se debe prestar una especial atención en la labor del maestro.

Conclusiones

En los conceptos de **problema** y **situación problemática** asumidos prevalece el **componente didáctico**, por la importancia que este tiene en el proceso de enseñanza aprendizaje de la solución de problemas. Esto se manifiesta con mayor énfasis en la cuarta condición establecida en la caracterización de un problema: que se ajusten a la **realidad** los elementos estructurales y/o **relaciones lógicas** entre estos. Sirve de fundamental condición previa para la formulación de problemas.

Los docentes deben aspirar a que sus estudiantes siempre sientan necesidad de resolver los problemas que ellos le proponen, por lo que este proceso se convertiría en una **actividad de estudio** para los resolutores; mediante la aplicación de determinadas acciones desarrollarían la **habilidad** correspondiente, que poco a poco adquirirían la **capacidad** pertinente y finalmente por la realización de un trabajo sistemático e intencional serían alumnos **competentes** en la solución de problemas.

Una de las metas a alcanzar por los estudiantes al enfrentarse a un problema matemático sería determinar la respuesta correcta (**resolución del problema**) pero para ello, primeramente deberían ejecutar un conjunto de transformaciones (**solución del problema**). La esencia de este proceso y resultado es construir el **modelo matemático** que permitiría **determinar la vía de solución** para luego realizarla, hasta encontrar su solución.

Bibliografía

Blum y Ness (1991). *What are Mathematical Problems?* [en línea] Recuperado el 25 de abril de 2009, de http://www2.hmc.edu/www_common/hmnj/hoosain.pdf

Borasi, R. (1986). *On the nature of problems.* Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.

Campistrous, L. (1999). *Didáctica y resolución de problemas.* Pedagogía`99, C. Habana.

Campistrous, L. y C. Rizo (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Capote, M. (2003). *Una estructuración didáctica para la etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos con texto en el primer ciclo de la escuela primaria.* Tesis doctoral, Pinar del Río, Cuba.

Capote, M. (2005). *La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria.* Editorial Pueblo y Educación. C. Habana.

Castellanos, D y M. D. Córdova (1995). *Hacia una comprensión de la inteligencia*. En Selección de lecturas: La inteligencia un acercamiento a su comprensión y estimulación, Ediciones Varona, CESOFTE, La Habana.

Charnay, R. (1988). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidos.

Córdova, M. D. (1997). *La estimulación intelectual en situaciones de aprendizaje.* Tesis doctoral, ISP “Enrique J. Varona”, C. Habana.

Davidov, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.* Editorial Progreso, Moscú.

Davidson, L.J. [Et Al] (1987). *Problemas de Matemática Elemental 1.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Fridman, L. M. (1995). *Metodología para resolver problemas de Matemáticas.* Grupo Editorial Ibero América S.A. México.

González, F. (1998). *Metacognición y Tareas Intelectualmente Exigentes: El caso de la Resolución de Problemas Matemáticos*. Zetetiké, *6 (*9), 59 – 87

González, V. [Et Al] (1995). *Psicología para educadores.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Kantowski, M. G. (1981). Problem Solving En Fennema E. (Ed.) Mathematics Education Research: Implications for 80´s, Reston, Va, 111-126.

Krulik, S., Rudnik, K.; (1980). *Problem solving in school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Virginia: Year Book, Reston.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. (1988). *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. (1996). *Pensamiento: Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos.* Editorial Pueblo y Educación, C. Habana.

Lester, F. (1985). *Research on Mathematical Problem Solving*, Indiana University Press, EEUU.

Llivina, M. (1999). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos.* Tesis doctoral, Instituto Superior Pedagógico: "Enrique José Varona", C. Habana, Cuba.

Majmutov, M. I. (1983). *La enseñanza problémica.* Editorial Pueblo y Educación, La Habana.

Pérez, Somozza, J. E. (1930). *Metodología de la Aritmética Elemental.* Cultural S.A., La Habana.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear o resolver problemas.* Editorial Trillas, México.

Rubinstein, S. L. (1966). *El proceso del pensamiento.* Editorial Universitaria, La Habana.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Schoenfeld, A (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1993). *Resolución de problemas. Elementos para una propuesta en el aprendizaje de la Matemática.* Cuadernos de Investigación, No. 25, México, D.F.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). *Historicall perspectives on problem solving in the mathematics curriculum*. En R. Charles & Silver (Eds.). The teaching and assessing of mathematical problem solving*,* 1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Manuel Capote Castillo. Pinar del Río 1945, doctor en Ciencias Pedagógicas y Profesor Titular de Matemática y su Didáctica. Departamento de Primaria, Facultad Educación Infantil, Universidad de Ciencias Pedagógicas, Pinar del Río, Cuba. Líneas de investigación: Estudio de los problemas matemáticos y Didáctica de la Matemática para la Educación Primaria. **mcapote@ucp.pr.rimed.cu**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 123-134
ISSN: 1815-0640

Introducción al uso de métodos numéricos a través de la resolución de problemas

Nora Ferreyra, María Eva Ascheri, Rubén Adrián Pizarro

Resumen

Con el objetivo de introducir a los estudiantes en el estudio de métodos que contribuyan a la búsqueda e interpretación de solución de problemas, se proponen, situaciones cuya resolución pone de manifiesto la necesidad de resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones mediante la utilización de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo. Se presenta una experiencia áulica realizada con estudiantes de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).

Abstract

In order to introduce students to the study of methods that contribute to the search for and interpretation of troubleshooting are proposed, situations whose resolution highlights the need to solve equations or systems of equations using numerical methods and the computer as a tool for calculation. We present a courtly experience with students on career Professorship in Mathematics at the National University of La Pampa (Argentina).

Resumo

A fim de apresentar aos alunos o estudo de métodos que contribuem para a busca de solução de problemas e interpretação de são propostos, situações cuja resolução destaca a necessidade de resolver equações ou sistemas de equações usando métodos numéricos e o computador como uma ferramenta para o cálculo. Nós apresentamos uma experiência cortês com os alunos sobre Professorship carreira em Matemática na Universidade Nacional de La Pampa (Argentina)

1. Introducción

La evolución de la ciencia y en particular de la Matemática, ha estado históricamente vinculada a la Resolución de Problemas, el planteo de preguntas y la búsqueda de respuestas han estimulado la investigación y el desarrollo de nuevos conocimientos (Boyer, 1968; Babini, 1967).

En el ámbito de la Educación Matemática, se reconoce la importancia de la Resolución de Problemas como estrategia en la construcción del sentido de un conocimiento matemático y como herramienta para desarrollar procesos de interacción, de argumentación, de modelización y de toma de decisiones (Charnay, 1988; González, 2007; de Guzmán Ozamiz, 1997).

Los actuales diseños curriculares para el nivel secundario también rescatan la importancia de trabajar con una metodología de resolución de problemas y modelización con el fin de garantizar una preparación adecuada para continuar en el ciclo orientado, al respecto, el diseño de la Provincia de La Pampa manifiesta:

Cuando se les propone a los alumnos la resolución de un conjunto secuenciado de problemas, realizan una interpretación a partir de su lectura, identifican cuáles son las incógnitas, cuáles los datos que necesitan para averiguarlas y determinan la forma más favorable para modelizar la situación.

Para esto se requiere un tipo de trabajo matemático en el aula, donde el docente presente el o los problemas; los alumnos los resuelvan, intercambien y den razones sobre la validez de sus estrategias. Además, propondrá una organización de la clase que permita mostrar la diversidad de las producciones, así como los errores y aciertos, tratando de internalizar que la Matemática es una ciencia cuyos resultados se obtienen como consecuencia necesaria de ciertas relaciones que, aplicadas a diferentes contextos, permitirán crear "el modelo matemático", descontextualizado, para que pueda ser transferido y reinterpretado en otros contextos.

Un trabajo basado fundamentalmente en la Resolución de Problemas, requiere de profesionales preparados para desarrollar ese tipo de metodología, capaces no sólo de proponer y resolver un conjunto de problemas, sino también de interpretar y explotar la variedad de posibles resultados obtenidos y fomentar la transferencia de los modelos matemáticos desarrollados en clase a otros contextos.

De acuerdo con estas ideas, se considera que la resolución de problemas debiera atravesar toda la formación inicial de los futuros profesionales y, atendiendo a estos requerimientos, en la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), en el Plan de Estudios de la carrera Profesorado en Matemática, se incluye la asignatura Taller I que toma la resolución de problemas como objeto de enseñanza, la cual se dicta durante en el segundo año de la carrera.

La intención del taller de resolución de problemas es fomentar el estudio de situaciones particulares, la elaboración de conjeturas y generalizaciones y la búsqueda y producción de modelos matemáticos adecuados a determinadas situaciones.

La mayoría de las situaciones planteadas en el transcurso de las asignaturas iniciales de las carreras se caracterizan por tener, generalmente, una única solución a la cual se arriba a través de la resolución de alguna ecuación por métodos directos y usando la calculadora.

La actividad de búsqueda de soluciones a partir de buenas aproximaciones está ausente en los primeros años de formación de los estudiantes y las actividades realizadas parecen indicar que siempre es posible obtener soluciones exactas con métodos algebraicos.

Al momento de iniciar el cursado de la asignatura Cálculo Numérico, prevista en el tercer año de la carrera, los estudiantes no se han enfrentado con problemas en los que se plantee una necesidad genuina de disponer de ese conocimiento. Por ello, consideramos fundamental plantear situaciones que muestren claramente que en numerosos problemas es muy ventajoso poder resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones mediante la utilización de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo.

2. Desarrollo

Relato de una experiencia

Con el objetivo de introducir a los estudiantes en el estudio de métodos numéricos que contribuyan a la búsqueda e interpretación de solución de problemas, se proponen, en el desarrollo de la asignatura Taller I, situaciones cuya resolución ponga de manifiesto la necesidad de resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones mediante la utilización de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo.

El siguiente problema se presentó a 12 estudiantes que se hallaban cursando el segundo año de la carrera Profesorado en Matemática en la UNLPam.

Problema 1

Ana utilizará una cadena de siete eslabones de oro para pagar su estadía en un hotel, como se muestra en la Figura 1. Para ello deberá desmontarla y entregar por cada día de alojamiento un eslabón. Puesto que planea recuperarla cuando reciba dinero en efectivo, piensa en cortar la menor cantidad de eslabones. ¿Cuántos cortes deberá hacer el joyero?

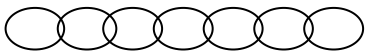


Figura 1: Cadena de siete eslabones de oro

Solución

Este problema admite variadas soluciones, si dejamos de lado la condición de minimizar la cantidad de cortes, puesto que haciendo 7 cortes se obtienen los 7 eslabones sueltos necesarios para efectuar el pago de los 7 días de estadía. Sin embargo, cortando el segundo, cuarto y sexto eslabón, también obtenemos 7 trozos sueltos, es decir que con tres cortes se soluciona el problema, como se muestra en la Figura 2.

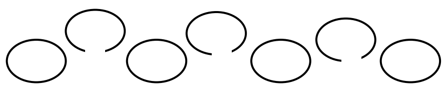


Figura 2: Cadena de oro con tres cortes

En este caso, si bien se obtiene una solución, no estamos considerando la posibilidad de realizar trueques con los trozos de cadena, puesto que simplemente se entrega un eslabón cada día.

¿Cómo sería realizando trueques? Si el primer día entrego un eslabón, para pagar el segundo podría entregar dos eslabones y obtener, como vuelto, el pago del primer día. Con lo cual, ya no necesito otro eslabón suelto sino un par de eslabones.

Para pagar el tercer día podré volver a entregar el eslabón recibido el día anterior.

Para pagar el cuarto día, puesto que el hotelero tiene tres eslabones en su poder, podremos entregar una cadena de cuatro y obtener tres eslabones como vuelto.

La resolución para el pago de los próximos tres días surge inmediatamente. Es decir que con un eslabón suelto, una cadena de dos y otra de cuatro se puede pagar toda la semana de estadía en el hotel (ver Figura 3).

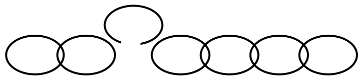


Figura 3: Cadenas de dos y cuatro eslabones, con un eslabón suelto

Sin embargo, todavía no hemos dicho cuántos cortes corresponden ni dónde realizarlos. Es obvio que las cadenas mencionadas pueden obtenerse con un único corte en el tercer eslabón.

¿Puede este problema generalizarse? Es más, ¿Podríamos hallar un modelo de este problema que nos permita determinar cuántos cortes hacer para utilizar las cadenas como medio de pago durante cualquier número de días de estadía en el hotel?

La situación fue planteada a los estudiantes con la intención de motivar el estudio sobre un problema concreto, que no se produce en el marco de aplicación de un contenido en particular.

A continuación, se muestra parte del trabajo y los comentarios de los estudiantes en la resolución de la cuestión.

- *Si fueran 8 días y eslabones,¿cómo hacemos el corte?*
- *Van a ser potencias de 2, porque con 1, 2, 4, 8, …. podemos ir formando todos los números.*
- *O sea que para 16 necesitamos tres cortes!*

Luego de intentar varias veces, observaron que es más fácil determinar la cantidad de días a partir de la cantidad de cortes y no a la inversa.

Si se realizan 2 cortes, ya no será necesario dejar un trozo de 2 eslabones unidos puesto que el segundo día se puede abonar con el segundo eslabón cortado. Es decir que el trozo más pequeño que se deje entero será de tres eslabones. Razonando como en el caso visto, tenemos la situación que se muestra en la siguiente figura:

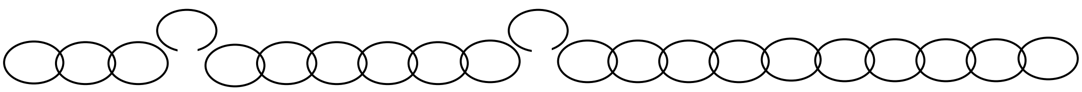


Figura 4: Cadena con dos cortes

Con 2 cortes, se podrán pagar uno a uno hasta 23 días con 23 eslabones.

Si se tienen 3 cortes, habrá cuatro trozos de cadena. Ya se tiene el pago para los días 1, 2 y 3, se necesitará ahora una cadena de 4 eslabones para el cuarto día (obteniendo como vuelto los ya entregados), la siguiente cadena necesaria es la de

8 eslabones, luego la de 16 y finalmente la de 32 eslabones. Con lo cual se pueden abonar 63 días de alojamiento con 63 eslabones (ver Tabla 1).

Tabla 1: Resultados obtenidos a partir del número de cortes realizados

Nro. de cortes	Nro. de trozos de cadena	Extensión de los trozos de cadena	Largo total de cadena entera
3	4	4, 8, 16, 32	63
4	5	5, 10, 20, 40, 80	159

El problema planteado conduce de manera natural a la generalización, puesto que la producción de nuevos problemas vinculados surge espontáneamente en el trabajo áulico y se manifiesta en dos cuestiones complementarias:

1) ¿De cuántos eslabones será la cadena para poder utilizarla como medio de pago día a día, efectuando *n* cortes?

2) ¿Cuántos cortes deben realizarse para abonar día a día una estadía de *d* días?

La primera de las preguntas puede responderse sin inconvenientes, puesto que la función que vincula el número de cortes con el número de eslabones (o días) surge de generalizar la aritmética utilizada en la resolución del problema inicial esto es

$$d = f(n) = n + \sum_{i=0}^{n} 2^i (n+1) \qquad (1)$$

y trabajando esta expresión, obtenemos

$$d = f(n) = (n+1)\cdot 2^{n+1} - 1 \qquad (2)$$

Resulta evidente que a partir del número de cortes se puede obtener la longitud de la cadena (número de días de alojamiento); sin embargo, la segunda cuestión no parece tan sencilla.

La pregunta podría re formularse de la siguiente manera:

$$\text{Si } d = (n+1)\cdot 2^{n+1} - 1 \qquad (3)$$

¿es posible determinar una expresión para *n* en función de *d*?

Ante la imposibilidad de resolver una ecuación de esta naturaleza, se hace evidente la necesidad de contar con otros métodos de resolución y se pone de manifiesto la utilidad de estudiarlos. Esto es, si bien los estudiantes han llegado a plantear el modelo matemático de la situación para poder responder a la primera pregunta, se encuentran sin herramientas de cálculo para hallar una expresión para *n* en función de *d*. Este es un problema típico que suele utilizarse para introducir a los estudiantes en el estudio de métodos numéricos con el uso de la computadora. Sin embargo, puesto que aún no disponen de tales métodos, los estudiantes aproximan intuitivamente las soluciones y manifiestan su interés por conocer una mejor resolución.

Luego de Taller I, en el tercer año del plan de estudios, los estudiantes inician la cursada de Cálculo Numérico. Una observación que creemos debe referirse es que los estudiantes, en la primera clase, mencionaron el “problema de la cadena” y se mostraron satisfechos porque finalmente podrían estudiar el método para resolverlo. Si bien este tipo de apreciaciones no responden a una encuesta sistematizada, dado que fue la expresión de un gran número de estudiantes, consideramos que la mayoría rescató el problema planteado en el Taller I y éste funcionó como motivador del aprendizaje en Calculo Numérico.

Durante el desarrollo de esta asignatura, se les habla sobre la existencia de problemas que no se pueden resolver analíticamente, o bien obtener su solución analítica no es una tarea simple de realizar, contando con el ejemplo y antecedente de los problemas ya planteados cuya resolución quedó pendiente.

La necesidad y ventajas del estudio de los métodos numéricos son evidentes. Permiten resolver problemas científicos y tecnológicos, pero dado que requieren operaciones aritméticas tan tediosas y repetitivas, resultan totalmente prácticos sólo cuando se cuenta con una computadora que realice tantas operaciones por separado. En este sentido, se han desarrollado paquetes muy completos de software comerciales, entre ellos, MatLab, Mathematica, Maple, DERIVE. Éstos son aceptables para resolver una serie de situaciones del mundo real y constituyen un excelente ambiente de aprendizaje. Por ello es que los métodos numéricos y las computadoras constituyen una combinación perfecta.

En distintos momentos, a lo largo del estudio de distintos contenidos de Cálculo Numérico (Ascheri y Pizarro, 2008), se explica a los estudiantes cómo pueden obtener una solución analítica para este problema en particular, utilizando, por ejemplo, el paquete MatLab, y a partir de ella, lograr los resultados numéricos deseados.

Solución analítica (con MatLab)

```
>> solve('(x+1)*2^(x+1)-1 =d')
ans = (-log(2)+lambertw(log(2)*(1+d)))/log(2)
siendo LAMBERTW Lambert's W function
W = LAMBERTW(X) is the solution to w*exp(w) = x.
Por ejemplo, numéricamente, se obtiene:
>> d=63;
>> numeric((-log(2)+lambertw(log(2)*(1+d)))/log(2))
ans = 3
>> d=159;
>> numeric((-log(2)+lambertw(log(2)*(1+d)))/log(2))
ans = 4
>> d=23;
>> numeric((-log(2)+lambertw(log(2)*(1+d)))/log(2))
ans = 2
>> d=7;
>> numeric((-log(2)+lambertw(log(2)*(1+d)))/log(2))
ans = 1
```

Si sólo resulta de interés la respuesta numérica, se puede utilizar el software educativo desarrollado por el grupo de investigación de Cálculo Numérico[1]. Por

[1] Disponible en: http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/numerico/

ejemplo, se ingresa la función (x+1)*2^(x+1)-1-63 para que sea analizada su gráfica en el intervalo [2, 4] (ver Figura 5), y luego se aplica el método de la regula falsi para obtener la solución (ver Figura 6). Se continuaría de manera análoga, dando los distintos valores de *d* para obtener *x* (que representa el número de cortes *n*). En este caso, se aplica este método iterativo, pero se podría usar cualquiera de los métodos que están incluidos en este software para resolver numéricamente ecuaciones no lineales.

Figura 5: Captura de pantallas donde se muestran los datos iniciales y la gráfica correspondientes

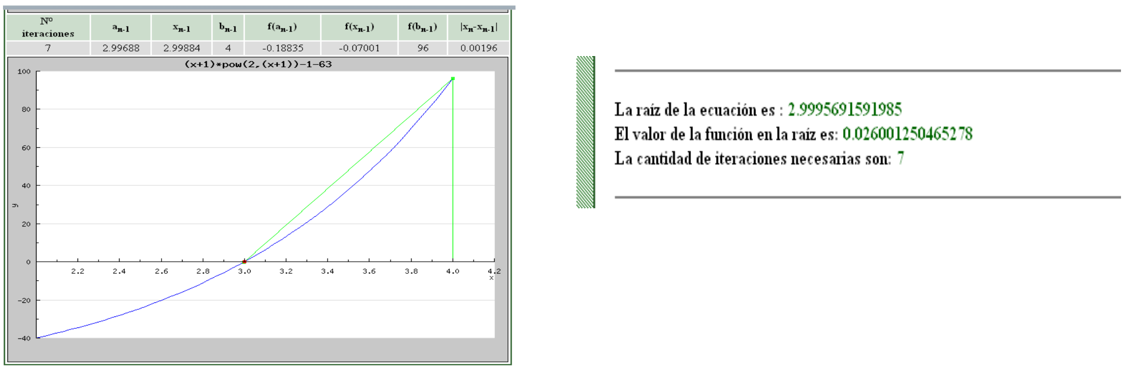


Figura 6: Captura de pantallas donde se muestran la solución gráfica y numérica

Para completar el trabajo conjunto propuesto entre las dos cátedras, cuando los estudiantes ya contaban con suficientes herramientas de Cálculo Numérico, se sugirió tomar alguno de los problemas resueltos en el Taller I, cuyo trabajo justificase la aplicación de los nuevos conocimientos adquiridos.

En el siguiente problema los estudiantes reconocieron similitudes en la metodología de análisis y resolución y, pese a contar con herramientas algebraicas para resolver el sistema, algunos propusieron realizar el estudio del modelo desde el cálculo numérico para obtener directamente, con la computadora, soluciones enteras.

Problema 2

Cinco amigas descubrieron que pesándose de a dos e intercambiándose de a una por vez, podían conocer el peso de todos gastando una sola moneda, encontraron que de a pares pesaban 129, 125, 124, 123, 122, 121, 120, 118, 116 y 114 kg. ¿Cuál es el peso de cada una por separado?

Solución

Si ordenamos los pesos $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$, podemos plantear las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 129\\
x_1 + x_3 &= 125\\
x_3 + x_5 &= 116\\
x_4 + x_5 &= 114
\end{aligned}
$$

Necesitamos otra ecuación para intentar resolver las cinco incógnitas, pero no podemos asignar al azar los demás valores a $x_1 + x_4$, $x_1 + x_5$, $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$, $x_2 + x_5$ y $x_3 + x_4$ porque no se cual corresponde a cada uno.

Una opción es pensar que si sumamos todos los pesajes obtenidos es igual a 4 veces el peso de todos, por lo cual $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ = (129+125+...+114)/4 = 303

Luego, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones de ecuaciones lineales

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 129\\
x_1 + x_3 = 125\\
x_3 + x_5 = 116\\
x_4 + x_5 = 114\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 303
\end{cases}
$$

A dicho sistema, podemos asociar la siguiente matriz

$$
\begin{cases}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 129\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 125\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 116\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 114\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 303
\end{cases}
$$

De esta forma, los estudiantes hallaron el modelo matemático adecuado a la situación planteada. Puesto que ya conocían las posibilidades de usar métodos numéricos conjuntamente con la computadora, aprovecharon esta alternativa en su resolución. Elaboraron un programa para resolver sistemas de ecuaciones lineales, que, además de resolver numéricamente este problema, les permitió retomar o verificar la resolución de muchos de los problemas ya tratados en Taller I.

>>> gauss
==== Método de eliminación de Gauss ========
Ingresar la dimensión de la matriz asociada al sistema a resolver: **5**
Ingresar el elemento A (1,1) ---> **1**
Ingresar el elemento A (1,2) ---> **1**
Ingresar el elemento A (1,3) ---> **0**
Ingresar el elemento A (1,4) ---> **0**
Ingresar el elemento A (1,5) ---> **0**
Ingresar el elemento A (1,6) ---> **129**

Ingresar el elemento A (2,1) ---> **1**
Ingresar el elemento A (2,2) ---> **0**
Ingresar el elemento A (2,3) ---> **1**
Ingresar el elemento A (2,4) ---> **0**
Ingresar el elemento A (2,5) ---> **0**
Ingresar el elemento A (2,6) ---> **125**
Ingresar el elemento A (3,1) ---> **0**
Ingresar el elemento A (3,2) ---> **0**
Ingresar el elemento A (3,3) ---> **1**
Ingresar el elemento A (3,4) ---> **0**
Ingresar el elemento A (3,5) ---> **1**
Ingresar el elemento A (3,6) ---> **116**
Ingresar el elemento A (4,1) ---> **0**
Ingresar el elemento A (4,2) ---> **0**
Ingresar el elemento A (4,3) ---> **0**
Ingresar el elemento A (4,4) ---> **1**
Ingresar el elemento A (4,5) ---> **1**
Ingresar el elemento A (4,6) ---> **114**
Ingresar el elemento A (5,1) ---> **1**
Ingresar el elemento A (5,2) ---> **1**
Ingresar el elemento A (5,3) ---> **1**
Ingresar el elemento A (5,4) ---> **1**
Ingresar el elemento A (5,5) ---> **1**
Ingresar el elemento A (5,6) ---> **303**
La matriz ampliada (A | B) es:
A =
1 1 0 0 0 129
1 0 1 0 0 125
0 0 1 0 1 116
0 0 0 1 1 114
1 1 1 1 1 303
La matriz triangular superior es:
A =
1 1 0 0 0 129
0 -1 1 0 0 -4
0 0 1 0 1 116
0 0 0 1 1 114
0 0 0 0 -1 -56
La solución x1 es: 65.000000
La solución x2 es: 64.000000
La solución x3 es: 60.000000
La solución x4 es: 58.000000
La solución x5 es: 56.000000
>>>

Con lo cual obtenemos los pesos de los cinco amigos: 65, 64, 60, 58 y 56.

Programa realizado por los estudiantes de Cálculo Numérico que implementa el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones.

```
disp('   ');
disp('==== Método de eliminación de Gauss ==========\n');
 % Ingresar la dimensión de la matriz asociada al sistema a resolver
n=input('Ingresar la dimensión de la matriz asociada al sistema a resolver: ');
% Ingresar los valores de la matriz ampliada (A|B)
for i=1:n
   for j=1:n+1
        fprintf('Ingresar el elemento A (%d,%d) ---> ',i,j');
        A(i,j)=input('');
   end
end
% Muestra la matriz ampliada (A|B)
disp('   ');
disp('La matriz ampliada (A|B) es:  ');A
% Triangula la matriz ampliada
for i=1:n-1
   for k=i+1:n
        m=A(k,i)/A(i,i);
        for j=1:n+1
           A(k,j)=A(k,j)- m * A(i,j);
        end
   end
end
% Calcula la solución del sistema
for k=n:-1:1
   if k==n
        s(k)=A(k,k+1)/A(k,k);
   else
       suma=0;
       for j=n:-1:k+1
           suma=suma+A(k,j)* s(j);
       end
       s(k)=(A(k,n+1)-suma)/A(k,k);
   end
end
% Muestra la matriz triangular superior
disp('   ');
disp('La matriz triangular superior es:  ');A
% Muestra la solución
for i=1:n
     fprintf('La solución x%d es: %f\n',i,s(i));
end
disp('   ');
```

Conclusiones

La resolución de problemas a través de un software hace que el alumno lleve a cabo un proceso investigativo que incluye la reflexión y el análisis a partir del problema.

En nuestra opinión, la combinación de elementos de Cálculo Numérico con los tradicionales utilizados en Taller I, es una buena alternativa para introducir a los estudiantes en el estudio de los métodos numéricos con el uso de la computadora. El hecho de disponer de los contenidos temáticos desarrollados en Taller I a través de las presentaciones usuales en combinación con el uso de métodos numéricos y la computadora como herramienta de cálculo, provocó en los estudiantes una mayor motivación y, por lo tanto, se logró una mayor participación y mejor asimilación de los contenidos curriculares involucrados. Además, se mostraron muy comprometidos al momento de encontrar el modelo matemático que les resolviera el problema planteado para analizar si podían resolverlo con los métodos tradicionales o aplicar los métodos numéricos.

Sin embargo, debemos tener en claro que si bien esta introducción al uso de métodos numéricos a través de la resolución de problemas es un elemento importante para generar cambios en los procesos de enseñanza y aprendizaje, no constituye la solución de todos los problemas educativos. La mejora de estos procesos no depende de la utilización de métodos numéricos y la computadora, sino de su adecuada integración curricular, es decir, del entorno educativo diseñado por el profesor de Taller I conjuntamente con los de Cálculo Numérico.

Bibliografía

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. *Libro de texto para estudiantes universitarios: Cálculo Numérico*. 1a ed., EdUNLPam, La Pampa, Impreso en Argentina, 2008.

Babini, J. *Historia de las ideas modernas en matemática*. Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, Washington D. C., 1967.

Boyer, C. *Historia de la Matemática*. John Wiley and Sons, New York, 1968.

Charnay, R. Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra y Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Paidós, Buenos Aires, 51-63, 1988.

de Guzmán Ozamiz, M. *Aventuras Matemáticas*. Ediciones Pirámide, Madrid, 1997.

Gardner, M. ¡*Ahá*!. Labor S. A., Barcelona, 1981.

González, F. Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas. En Abrate, R. & Pochulu, M. (Comps.), *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Universidad Nacional de Villa María, 235-262, 2007. Disponible en: http://www.gratisweb.com/unvm/Introduccion.pdf .

Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa. Diseño Curricular para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria, 2009. Recuperado en abril de 2011 de http://www.lapampa.edu.ar/MaterialesCurriculares/Documentos/CicloBasicoOrientado/MCE_MC2009_Matematica_123vPreliminar.pdf.

Pozo Municio, J. *La solución de problemas*. Santillana, Madrid, 1994.

Puig, L. *Elementos de Resolución de Problemas*. COMARES, Granada, 1996.

Nora Ferreyra. Nació en Ing. Luiggi (La Pampa), es Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Matemática. Desde 1987, ha dictado clases en instituciones de nivel secundario y terciario, actualmente se desempeña como docente de la Universidad Nacional de La Pampa. Ha participado en diversos proyectos educativos en colaboración con el Ministerio de Cultura y Educación de La Pampa y la Universidad de La Pampa. Ha presentado y publicado artículos en revistas, jornadas y congresos.
noraf@exactas.unlpam.edu.ar

María Eva Ascheri. Prof. en Matemática y Física, Lic. en Matemática, MSc. en Matemática Aplicada, Prof. Asociado Reg. en Cálculo Numérico, Prof. Tit. en Cál.II/Mat.II. Tutor de alumos, dirección de aux. doc. y alum., de inv. formados y en formación, codirección tesis postgrado. Cat. Inv. (Ed.Mat.): 2, Publicación: 2 libros y artículos en Revistas y Reuniones Científicas (RC), Directora de diversos Proyectos de Investigación en Ed. Mat., TIC y Mat. Apl., Dir. Evaluador de artículos en RC y en revistas internacionales mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

Rubén Adrián Pizarro. Profesor en Matemática y Computación, de la UNLPam. Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación de la UNLP. Actualmente es Prof. Adjunto Exclusivo de Práctica Educativa III del Prof. en Computación y a cargo de los Trabajos Prácticos de Cálculo Numérico del Prof. en Matemática. Docente de Matemática en el Nivel Medio. Investigador Categoría III en el programa de incentivos. Ha publicado diferentes trabajos sobre inclusión de tecnología en educación y enseñanza de la matemática. ruben@exactas.unlpam.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 135-146
ISSN: 1815-0640

Dinamización Matemática

Estrategias para resolver problemas con fracciones de fracciones

Fernando Mejía Rodríguez

Resumen

Si la resolución de problemas juega un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y las fracciones cuestan trabajo comprender; entonces, los profesores debieran ser los primeros en saber cómo resolver problemas que tengan que ver con el uso de fracciones. Este artículo muestra las diversas estrategias empleadas por algunos profesores mexicanos de educación básica, cuando resolvieron un problema de fracciones de fracciones.

Abstract

If problem solving plays an important role in mathematics' teaching and learning, and fractions are hard to understand; so, teachers should be the first to know how to solve problems related to the use of fractions. This paper shows a variety of strategies used by some basic-education mexican teachers, when they solved one fractions of fractions problems.

Resumo

Se a resolução de problemas desempenha um papel importante de ensino e aprendizagem da matemática, frações e difícil de entende; então, os professores devem ser os primeiros a saber como resolver os problemas que têm a ver com o uso de frações. Esta pesquisa mostra as várias estratégias empregadas por alguns professores mexicanos de educação básica, quando resolveu um problema de frações de frações.

1. Introducción

En este mundo globalizado, una consecuencia es la rendición de cuentas que ha permeado en distintos ámbitos de la sociedad, y la educación no podía pasar desapercibida. Existe un programa para evaluar los sistemas educativos, llamado PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes). El grado de desempeño de PISA en matemáticas está clasificado en seis niveles de complejidad, el más alto es el seis y el menor el uno. Los resultados del porcentaje de alumnos en cada nivel de desempeño en matemáticas de PISA 2009 (*Tabla 1*), los publicó la OCDE (2010, 221) y México no salió bien librado, porque la mayoría de los alumnos de 15 años de edad estaban ubicados en los niveles inferiores; al igual que en las evaluaciones de los años anteriores.

Tabla 1. PISA 2009 Matemáticas

Inferior al 1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
21.9	28.9	28.3	15.6	4.7	0.7	0.0

En México existe ENLACE (Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares), que se realiza cada año. Los resultados de ENLACE 2010 (*Tabla 2*) que los publica la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2010, 5) en cuanto al porcentaje de alumnos de secundaria en matemáticas, y se ratifica que los alumnos siguen en los niveles más bajos.

Tabla 2. ENLACE 2010 Matemáticas

Insuficiente	Elemental	Bueno	Excelente
52.6	34.7	10.5	2.2

Se retoman estas dos evaluaciones porque se aplican al final de la escuela secundaria en México, una vez que se concluye la educación obligatoria y que ya se cubrió la educación básica, nivel en que trabajan los profesores que formaron parte en este estudio. La educación básica en este país inicia con el jardín de niños donde asisten alumnos de entre 4 y 5 años de edad, posteriormente acuden a la escuela primaria con duración de seis años de los 6 a los 12 años de edad, para finalmente cursar la escuela secundaria que dura tres años de entre 13 y 15 años de edad.

Las dos evaluaciones evidencian la realidad del sistema educativo mexicano, y estos resultados muestran que algo está pasando y no se está haciendo del todo bien, por tanto es de interés de políticas educativas, de investigadores, de profesores, de padres de familia, y toda la sociedad, estudiar estos resultados y mejorarlos.

La intención del presente artículo no es evaluar al profesor, descalificarlo o juzgarlo; más bien es rescatar el trabajo que hacen los profesores de educación básica, mostrar las estrategias que emplean cuando resuelven un problema de fracciones, que como consideran Behr et al (1993); de León y Fuenlabrada (1996); Newstead y Murray (1998); y Charalambous y Pitta-Pantazi (2005); enseñarlas y aprenderlas ha sido tradicionalmente problemático.

2. Investigaciones relacionadas

Dienes (1972) puntualiza que el conocimiento de las fracciones no es adquirido de manera espontánea como los números naturales. A lo que Streefland (1986) llama distractores-N, que es cuando se usan reglas aritméticas de números naturales y se está trabajando con fracciones. El reto que representan las fracciones en educación matemática es alto, de acuerdo a Hilton (1983) y Usiskin (1979). Existen diversas investigaciones relacionadas a las fracciones en la educación matemática, como la de Kerslake (1986) quien señala el papel que juegan las fracciones en el desarrollo del pensamiento de los niños, la de López y Elosua (2002) quienes analizan los componentes cognitivos implicados en la suma y resta de fracciones, la de Pearn y Stephens (2004) quienes corroboran la inexactitud para localizar una fracción en la recta numérica, la de Brizuela (2005) que identifica las dificultades que tienen los niños para conceptualizar los números fraccionarios, la de Yanik, Helding y Baek (2006) que colocan a un grupo de alumnos dos problemas para ubicar fracciones en la recta numérica y finalmente la de Fandiño (2007) que narra la historia de las fracciones y hace un recuento de las investigaciones hechas desde 1960 al 2007.

Entonces, el presente artículo describe las estrategias de solución que emplean los profesores de educación básica para resolver problemas que involucren el uso de fracciones dentro de otras fracciones.

Kantowski (1980, 195) menciona que un problema es una situación para la cual el individuo que la confronta, no tiene algoritmo que le garantizará una solución. El conocimiento relevante de la persona debe juntarse en una nueva manera para resolver el problema. La tendencia internacional de enseñar la matemática en la escuela compatible con Singapur, es resolviendo problemas; por eso es necesario establecer la diferencia que existe entre aprender a resolver problemas y aprender a través de la resolución de problemas. Davis (1992, 237) describe al proceso de aprendizaje a través de la resolución de problemas como sigue:

> En lugar de iniciar con ideas "matemáticas" y entonces "aplicarlas", debemos empezar con problemas o tareas, y como un resultado del trabajo en estos problemas los niños se quedarán con un residuo de "matemáticas" – argumentamos que las matemáticas es lo que sobra después de que se ha trabajo con problemas –. Rechazamos la noción de matemáticas "aplicadas", por el motivo de que inicie con las matemáticas y entonces busque de qué manera puede usarlas.

De la misma manera, Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1998, 169) afirman:

> El aprendizaje ocurre cuando los estudiantes intentan resolver problemas para los cuales no tienen métodos de rutina. Los problemas entonces vienen antes de la enseñanza de un método de solución. El maestro no debe interferir con los estudiantes mientras están tratando de resolver el problema, los estudiantes son guiados a comparar sus resultados con los demás; discutir el problema, etc.

Existen algunos problemas donde se puede utilizar según Kaput y Sims-Knight (1983) traducciones algebraicas de diversos sistemas (tablas, enunciados, funciones, figuras geométricas, etc.), pero una de las dificultades para resolver el problema no es puramente matemático; sino que está conectado íntimamente con la lingüística natural, aprendida desde la niñez; a lo que MacGregor y Stacey (1993) nombran como interferencia del lenguaje natural.

Polya (1945) enuncia las cuatro etapas para resolver problemas matemáticos: comprender el problema; diseñar un plan; aplicarlo; y revisar la solución. Por otra parte, Dienes (1972, 8) dice

> […] Una fracción puede ser, o bien la descripción de un estado de cosas, o bien una orden, es decir, el resultado de la orden de ejecución de una operación. Dos tercios, puede significar que describimos las dos terceras partes de una cosa cualquiera y con ello indicamos un estado de cosas. Por otra parte podemos decir: "tómense dos tercios de la cosa, sea cual fuere ésta" y con ello indicamos una orden.

Kieren (1980) presenta una categorización de la expresión a/b como cociente, operador, razón y medida; agrega parte-todo dentro de las cuatro anteriores. Freudenthal (1983) define a la fracción como fracturador, porque corta o divide algo en determinado número de partes iguales y relacionar las partes y el todo con una fracción. Piaget, Inhelder y Szeminska (1981, 302) señalan que:

> La noción de una fracción depende de dos relaciones fundamentales: la relación de la parte al todo (que es intensiva y lógica), y la relación de parte a parte, donde los tamaños de todas las otras partes de un todo sencillo son comparadas con la parte inicial

Además agregan que las características de una fracción son las siguientes: hay un todo divisible, el cual está compuesto de elementos separables; una relación la cual es extensiva o métrica, esto implica un número determinado de partes; la subdivisión es exhaustiva, no hay residuo; relación fija entre el número de partes en la que el todo continuo está siendo dividido y el número de intersecciones; el concepto de una fracción aritmética implica subdivisión cuantitativa, donde todas las partes son iguales; las partes en que se divide el todo, pueden ser consideradas como un todo y entonces subdividirse posteriormente; y si el área del todo se divide en fracciones, la suma de todas las áreas de las fracciones equivale al área del todo original.

De los dos últimos puntos, Freudenthal (1983) considera a las longitudes y áreas como los medios naturales para visualizar magnitudes en la enseñanza de fracciones. Figueras, Filloy y Valdemoros (1987) muestra una investigación de lo difícil que puede ser para los alumnos comprender el uso de estos dos puntos, pero para que el alumno le dé sentido al uso de fracciones de fracciones necesita razonar con tres diferentes niveles de unidades (unidades de unidades de unidades) y tener la habilidad de dividir recursivamente las unidades (Olive, 1999). Lo que se pretende en este estudio, lo logra Olive y Vomvoridi (2006) cuando muestran cómo un alumno llamado Tim llega a la conclusión de manera gráfica de que la mitad de un tercio es un sexto.

3. Estrategias para resolver problemas

Por estrategias cognitivas básicamente se entiende un conjunto de operaciones mentales manipulables; es decir, "secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, almacenamiento o utilización de la información" (Pozo, 1990, 201); o como "las actividades u operaciones mentales seleccionadas por un sujeto para facilitar la adquisición del conocimiento" (Beltrán, 1998, 205).

Los problemas, son recursos didácticos que generan incertidumbre en los alumnos, Morin (1999, 46) puntualiza que la educación del futuro debe poner atención en las incertidumbres relacionadas con el conocimiento: "En efecto, hay dos vías para enfrentar la incertidumbre de la acción. La primera es la plena conciencia de la apuesta que conlleva la decisión; la segunda el recurso a la estrategia" (Morin, 1999, 49); "Toda crisis es un incremento de las incertidumbres […], hay que inventar estrategias para salir de la crisis" (Morin, 2003, 117); y "[…] la estrategia se impone siempre que sobreviene lo inesperado o lo incierto, es decir, desde que aparece un problema importante" (Morin, 2003, 118).

Una vez consciente de la incertidumbre, hay que asumir el riesgo; de no poder resolverlo adecuadamente; de cometer un error. En fin, Giddens (2000, 35) dice: "Riesgo no es igual a amenaza o peligro. El riesgo se refiere a peligros que se analizan activamente en relación a posibilidades futuras"; "La aceptación del riesgo, con todo, es también condición de excitación y aventura" (Giddens, 2000, 36); y "[…] una raíz de la palabra *riesgo* en el original portugués significa *atreverse"* (Giddens, 2000, 48).

Pero este término de estrategia, también es trabajado desde la complejidad por Morin (1999, 50)

> La estrategia debe prevalecer sobre el programa. El programa establece una secuencia de acciones que deben ser ejecutadas sin variación en un entorno estable; pero desde que haya modificación de las condiciones exteriores el

> programa se bloquea. En cambio, la estrategia elabora un escenario de acción examinando las certezas y las incertidumbres de la situación, las probabilidades, las improbabilidades. El escenario puede y debe ser modificado según las informaciones recogidas, los azares, contratiempos u oportunidades encontradas en el curso del camino. Podemos, dentro de nuestras estrategias, utilizar secuencias cortas programadas, pero para todo aquello que se efectúe en un entorno inestable e incierto, se impone la estrategia; ésta debe privilegiar tanto la prudencia como la audacia y si es posible las dos a la vez. La estrategia puede y debe efectuar compromisos con frecuencia. ¿Hasta dónde? No hay respuesta general para esta pregunta, es más, hay un riesgo que puede ser el de la intransigencia que conduce a la derrota o el de la transigencia que conduce a la abdicación. Es en la estrategia que siempre se plantea, de manera singular en función del contexto y en virtud de su propio desarrollo, el problema de la dialógica entre fines y medios.

Una referencia obligada a consultar es la de los estándares de la NCTM (2000, 54):

> De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Polya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problemas más sencillo.
>
> Cuando los alumnos llegan a los niveles medios, deberían ser diestros en reconocer cuándo es apropiado usar diversas estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usarlas. En la escuela secundaria, deberían tener acceso a una gama amplia de estrategias, saber decidir cuál usar y ser capaces de adaptar e inventar otras.
>
> Las primeras experiencias de los niños con las matemáticas tienen lugar a través de la resolución de problemas. A medida que experimentan con una más amplia variedad de problemas, necesitan diferentes estrategias. Tienen que llegar a ser conscientes de estas estrategias a medida que se presenta la necesidad de emplearlas.
>
> […] ninguna estrategia se aprende de una vez para siempre; las estrategias se aprenden con el paso del tiempo, se aplican en contextos particulares, y llegan a ser más refinadas, elaboradas y flexibles según se van utilizando en problemas de complejidad creciente.

Fan y Z*h*u (2007) enlistan 17 estrategias para resolver problemas:

1. Actúalo
2. Cambia tu punto de vista
3. Dibuja un diagrama
4. Adivina y revisa
5. Razonamiento lógico
6. Busca un patrón
7. Elabora suposiciones
8. Elabora una lista
9. Elabora una tabla
10. Replantea el problema
11. Simplifica el problema

12. Resuelve parte del problema
13. Piensa en un problema relacionado
14. Usa un modelo
15. Usa una ecuación
16. Usa concepto antes-después
17. Trabaja de reversa

Esta última es la lista más completa que he encontrado hasta el momento, aunque existen muchas más, caben en este listado. Dichas estrategias no son excluyentes, ni tampoco se pueden aplicar todas al mismo problema. Existen algunos problemas que se pueden resolver por unas estrategias, por otras no; pero por esas que no se ocuparon, se pueden resolver otros problemas diferentes. También está el caso que se puedan emplear dos estrategia al mismo tiempo, o incluso tres o más estrategias simultáneas.

En este artículo se muestra el uso de las diferentes estrategias en acción, se tomó un problema de fracciones de fracciones y se observan diferentes caminos para poder resolver el mismo problema. Cuando no es posible seguir unos pasos establecidos para resolver problemas generales, surgen las estrategias que de manera personal se van construyendo.

4. Metodología

El estudio desarrollado es de tipo descriptivo. El objetivo no es evidenciar a ningún profesor, ni a ninguna escuela. Por tanto se mantendrá en anonimato el nombre de los profesores y de la institución escolar. Sólo se puede decir que las estrategias recabadas se juntaron en un diplomado impartido a profesores de educación básica en el norte del Estado de México, con un grupo de 28 profesores: 5 de jardín de niños, 14 de primaria y 9 de secundaria.

El material a analizar sólo es el de tipo individual, que contestaron de forma escrita cada uno de los profesores durante una hora. Se recogió el material para que no alteraran su respuesta, posteriormente se trabajó en grupos pequeños de tres profesores, y al final en plenaria se revisaron las diferentes vías de solución.

El problema analizado fue del tipo Canguro; que son exámenes internacionales con origen en España para desarrollar la creatividad e ingenio de los estudiantes. Para este caso, se obtuvo del Examen eliminatorio estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas de 2008, que es de nivel Cadete; es decir, para jóvenes que estudian en México desde tercer grado de Secundaria, hasta segundo año de Bachillerato. Personalmente, he trabajado este problema con alumnos de secundaria y con profesores de educación básica; es interesante, porque es un reto para quienes los resuelven por primera vez y además se puede llegar a la solución de distintas formas.

Se eligió el reactivo 12 del examen hecho por la UNAM (2008), que es el siguiente:

> La figura muestra el esquema de un río que se va dividiendo. Empieza en el punto A; luego se divide en dos ramas, la primera se lleva 2/3 del agua y la otra el resto. Después la primera rama se divide en tres, una de ellas toma 1/8 del

agua de esa rama, otra toma 5/8 y la otra rama, que lleva el sobrante, se une con la segunda rama original. ¿Qué proporción del río llega al punto B?

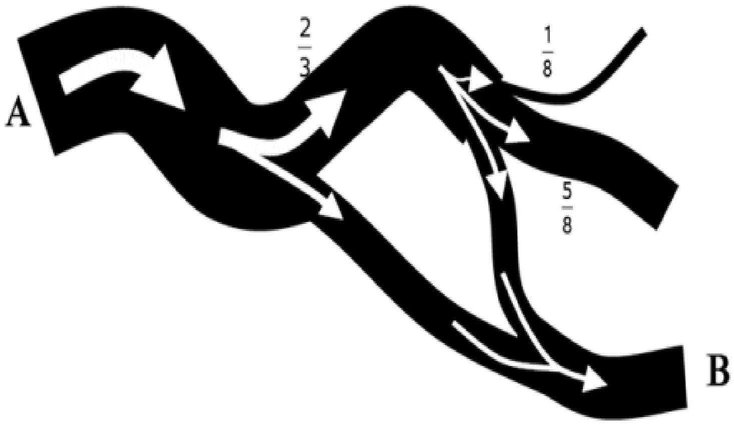


Figura 1

5. Análisis

Ahora damos paso a la descripción de las estrategias de solución, que emplearon los profesores de educación básica a la hora de resolver el problema antes citado, retomadas de la lista de Fan y Zhu (2007).

1. Estrategia actúalo.

$$\frac{2}{8}+\frac{1}{3}=\frac{6+8}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

Esta manera impulsiva de resolver el problema es incorrecta, porque no alcanzan a ver que los 2/8 en realidad no son de A, sino de los 2/3 de A. La mayoría de los profesores (86%) contestó de la forma anterior, posteriormente al hacerlos reflexionar, surgieron mucho más estrategias correctas, como las que se muestran a continuación.

2. Estrategias: cambia tu punto de vista, razonamiento lógico, replantea al problema y piensa en un problema relacionado.

Ahora al analizar que los 2/8 no son del punto A, cada alumno piensa en cómo tratar de resolverlo ahora en forma distinta a la planteada originalmente. Se tiene que hacer ahora un razonamiento lógico, pero para que éste tenga fruto, primero se deberá replantear el problema, ya sea resolviendo una parte del problema, pensando en un problema muy parecido resuelto con anterioridad, o ingeniándoselas para llegar a la respuesta correcta.

2.1. Estrategia adivina y revisa

Si por A pasan 30 litros, 20 litros se van por la rama de arriba, y 10 litros por la rama de abajo; posteriormente en la rama de arriba que llevaba 20 litros se reparten en tres ramas, cada rama lleva… No se puede dividir entre ocho, entonces otro número al inicio por A.

Se prueba ahora que por A pasan 24 litros, en la rama de arriba se quedan 16 litros y por la rama de abajo sólo 8 litros, de la rama de arriba, la primer rama llevará 2 litros, la segunda 10 litros y la última 4 litros. Por lo tanto se suman estos últimos 4 litros con la primer rama de abajo que lleva 8 litros, para dar un total de 12 litros, de un total de 24 litros iniciales que pasaron por A, entonces la respuesta es de la mitad de la cantidad que pasa por A, llega a B.

2.2. Estrategia dibuja un diagrama

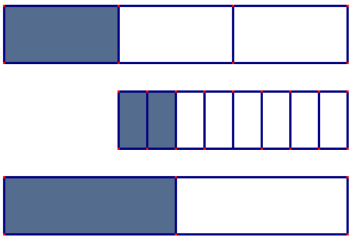


Fig. 2. Estrategia dibuja un diagrama

Como se puede observar (*Fig. 1*), primero se parte el entero en tres partes iguales y se sombrea la región que pasa directo a la rama B que es un tercio (rectángulo de arriba); después las dos terceras partes sobrantes se dividen en ocho partes iguales, sólo dos de ellas se sombrean porque son las que llegarán a la rama B (rectángulo del medio); ahora se unen las dos áreas (sombreadas en el rectángulo de arriba y en el rectángulo del medio), quedando la mitad del rectángulo original (rectángulo de abajo).

2.3. Estrategia resuelve parte del problema

$$\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

Por la tercera rama, donde fluye 2/8 de las dos terceras partes de A, en realidad está circulando 1/6 de A. Ahora sólo resta sumar 1/6 con 1/3.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2.4. Estrategia trabaja de reversa

Si ahora empezamos por B, pensando que salen 6 litros, se puede obtener de sumar 5+1, 4+2, 2+4, 1+5, 3+3. Después de probar los posibles resultados, nos damos cuenta que 4 y 2; es decir, 4 litros resultan de la rama de abajo que en realidad es 1/3 de A, de la rama de 2/8 salen 2 litros, por lo tanto entran a A 4+8 que son 12 litros. De ahí que si salen 6 litros y entraron 12 litros, la proporción que sale por B con respecto a A es de la mitad.

2.5. Estrategia elabora suposiciones

La tercera parte de A pasa directo a B. Luego de A, sus dos terceras partes se dividen en ocho y se toman 2, entonces en realidad cada tercera parte se divide en cuartos, pero A se tendría que dividir en 12 partes iguales, tomar 2 y quedar 2/12 o lo que es lo mismo 1/6 de A.

Así sólo hay que sumar 1/3 y 1/6, si convertimos los tercios a sextos, nos quedan 2, y sumamos el otro sexto, resultan tres sextos y simplificando da la mitad.

2.6. Estrategia usa una ecuación

$$B=\left(\frac{2}{3}A\right)\left(\frac{2}{8}\right)+\frac{A}{3} \qquad B=\frac{A}{6}+\frac{A}{3} \qquad B=\frac{A}{2}$$

Se iguala B con una expresión en función de A, se simplifica el segundo miembro de la ecuación y se tiene que B es igual a la mitad de A. Estrictamente hablando lo de arriba no es una ecuación porque no está igualado a cero, pero es una expresión algebraica que puede caer en esta estrategia, así como el uso de ecuaciones lineales, de ecuaciones cuadráticas, de sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas, entre otras.

Para terminar esta sección, se colocarán un diagrama (*Fig. 2*) que muestre todas las estrategias empleadas para resolver el anterior problema de fracciones de fracciones, por algunos profesores mexicanos de educación básica.

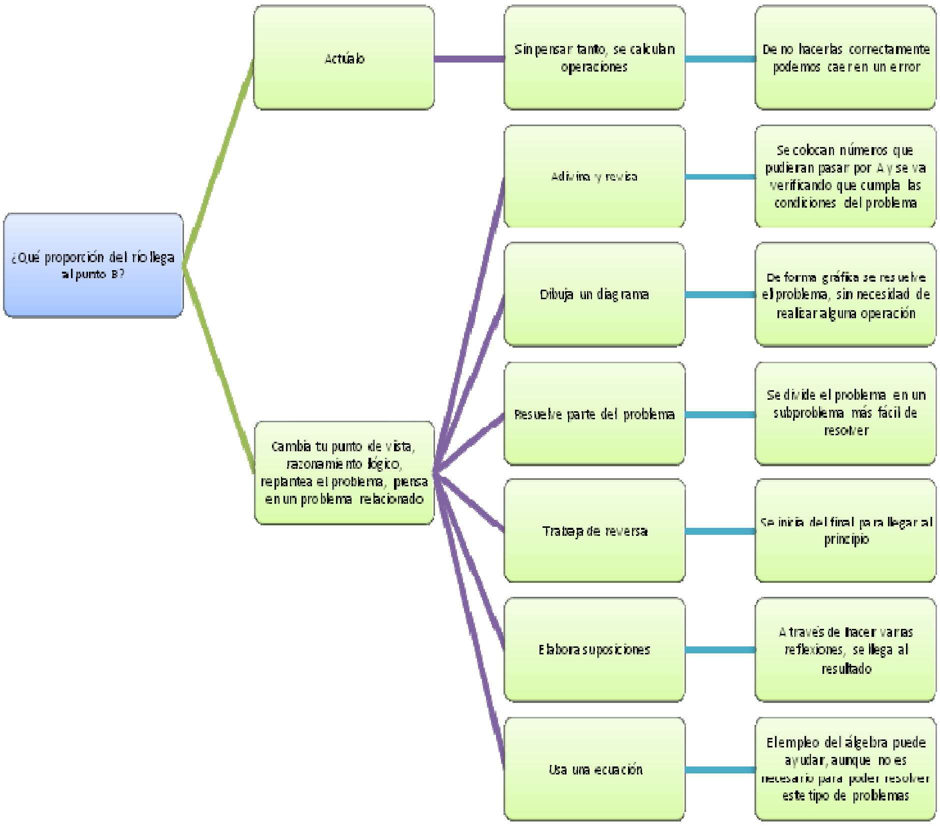


Figura 2. Estrategias para resolver un problema de fracciones de fracciones

Conclusiones

- Se mostró que un problema puede ser resuelto por diferentes caminos, que cada uno de ellos implica una o varias estrategias.
- Las estrategias no son excluyentes entre sí.
- Las 17 estrategias no son una lista terminada, que pueden existir más y que no es necesario aprenderse los nombres, sino manejarlas.
- Sería importante tener una formación docente en matemáticas, enfocada en la resolución de problemas y en las estrategias para resolverlos.
- No existe la receta de cómo enseñara a resolver problemas, tampoco la receta de cuáles estrategias emplear para resolver un problema.
- No existe una estrategia mejor o peor, depende del problema y de cada persona.

- Cada persona va desarrollando sus propias estrategias, y de hacerlo conscientemente se podría aumentar el desempeño en tareas matemáticas y ajenas a las matemáticas también.
- Las 17 estrategias pueden servir para analizar la resolución de problemas matemáticos.
- Las "estrategias", en general –no las 17 abordadas en el artículo- podrían ayudar a resolver no sólo problemas matemáticos, sino de la vida cotidiana donde ya no intervienen, aparentemente las matemáticas.
- Finalmente, creo que para ser un buen profesor de matemáticas es necesario tener distintos tipos de conocimientos, como lo marca Shulman (1987) que se requieren de siete: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento del currículum; conocimiento del contenido pedagógico; conocimiento de los estudiantes y sus características; conocimiento de los contextos educativos; y conocimiento de las finalidades educativas, propósitos y valores. Pero definitivamente, el principal es el conocimiento del contenido; de nada sirve saber sobre didáctica o los contenidos del currículum, que son necesarios, sí; pero el que no se puede evitar es el dominio del contenido matemático escolar. Hay que leer, hay que investigar, pero sobre todo como profesor de matemáticas, hay que resolver problemas; así podremos "dejar" que los alumnos construyan sus objetos matemáticos, una vez que se tiene cierto dominio del contenido matemático y se conoce además una variedad de estrategias para resolver problemas.

Bibliografía

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T.A. Romberg, (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ: Lawrence Erlbaum.

Beltrán, J. (1998). *Estrategias de aprendizaje*. En V. Santiuste, y J. Beltrán (Comp.) *Dificultades de aprendizaje* (pp. 201-240). Madrid: Síntesis

Brizuela, B. (2005) Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics*. DOI: 10.1007/s10649-005-9003-3

Charalambous, Ch. y Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisitins a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. En Chick, H. y Vincent, J. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp. 233-240. Melbourne: PME.

Davis, R. (1992). Understanding "understanding". En: *Journal of Mathematical Behavior, 11,* 225−241.

De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 1(2), 268-282.

Dienes, Z. (1972). Fracciones. Barcelona: Teide.

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*. 66, 61-75.

Fandiño, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*. 7, 81-115. Consultada el 10 de febrero de 2011 en <http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue7/05Pinilla.pdf>

Figueras, O.; Filloy, E.; y Valdemoros, M. (1987). Distorsiones que obstruyen la construcción del concepto de fracción. *Memorias de la primera reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*. México: Cinvestav, pp. 159-164.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Cinvestav

Giddens, A. (2000). *Un mundo desbocado. Los efectos de la globalización en nuestras vidas*. España: Taurus.

Hilton, P. (1983). Do we still need to teach fractions? En Zweny, M.; Green, T.; Kilpatrick, J.; Pollak, H.; y Suydam, M. (Eds.). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhauser, pp. 37-41.

Kantowski, M. (1980). Some thoughts on Teaching for Problem Solving. En Krulik, S. y Reys, R. (Eds.). *Problem solving in school mathematics.* Reston: National Council of Teachirs of Mathematics, pp. 195-203.

Kaput, J. y J., Sims-Knight, (1983). Errors in Translations to algebraic equations: roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics. 5*(3 y 4), 63-78.

Kerslake, D. (1986). *Fractions. Childrens' error and strategies*. Reino Unido: NFER-Nelson.

Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En Kieran, T. (Ed.) *Recent Research on Number Learning.* Columbus: ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

Lim, K. (2008). *Students' mental acts of anticipating: Foreseeing and predicting while solving problems involving algebraic inequalities and equations.* Alemania: VDM Verlag.

López, A. y Elosua, P. (2002). Formulación y validación de un modelo logístico lineal para la tarea de adición y sustracción de fracciones y números mixtos. *Psicothema*. 14(4), 802-809.

MacGregor, M. y K. Stacey, (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education.* EUA: NCTM, 24(3), 217-232

Morin, E. (1999). *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.* Francia: UNESCO.

Morin, E. (2003). *Introducción al pensamiento complejo*. España: Gedisa.

Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1998). Learning through problem solving. En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.) *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch: Sudáfrica. MacGregor, M. y K. Stacey, (1993). "Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations", en: *Journal for Research in Mathematics Education.* EUA: NCTM, *24*(3), 217-232

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* E.U.A.: NCTM.

Newstead, K. y Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. En Olivier, A. Newstead, K. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 3. Stellenbosch, Sudáfrica, pp. 295-302.

OCDE (2010). *PISA 2009 results: what students know and can do. Students performance in reading, mathematics and science (Volume I).* doi: 10.1787/9789264091450-en

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic. A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(4), 279-314.

Olive, J. y Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes. The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior. 25*, 18-45.

Pearn, C., y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. En Putt, I.; Faragher, R; y McLean, M. (Eds.). *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australia)*, pp. 430-437.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1981). *The child´s conception of Geometry.* New York, Londrés: Norton & Company

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Pozo, I. (1990) Estrategias de aprendizaje. En C. Coll, A. Marchesi y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación. Psicología de la Educación* (pp. 199-224). Madrid: Alianza.

SEP (2010). Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares. Educación Básica. *Boletín informativo.* México: SEP. Disponible en internet en: <http://enlace.sep.gob.mx/ba/docs/boletin_enlaceba2010.pdf>

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for psychology. Fractions as a paradigm. *European Journal of Psychology of Education. 1*(2), 67-83.

UNAM (2006). *Canguro Matemático Mexicano 2006. Nivel Olímpico.* México: UNAM. Consultado el 7 de febrero de 2011 en: < http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/olimpico06.pdf>

UNAM (2008). *Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2008*. México: UNAM. Consultado el 7 de febrero de 2011 en: < http://ichi.fismat.umich.mx/omm/recursos/canguro/previos/olimpico08.pdf>

Usiskin, Z. (1979). The future of fractions. *Arithmetic Teacher*. *27*(5), 18-20.

Yanik, H.; Helding, B. y Baek, J. (2006). Students' difficulties in understanding fractions as measures. En Alatorre, S.; Cortina, J.; Sáiz, M.; y Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional. pp. 323-325.

Fernando Mejía Rodríguez. Profesor de matemáticas (México). Maestro en Ciencias de la Educación (Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México). Actualmente estudiante de tiempo completo del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación. Este artículo se deriva del proyecto de investigación “Estrategias de profesores de matemáticas en secundaria para resolver problemas” para optar por el grado de Doctor en el ISCEEM.. fdo2004@yahoo.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 147- 156
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

TIC: Algunas ideas sobre la función cuadrática y calculadora

Agustín Carrillo de Albornoz

Introducción

En un mundo 2.0 en el que en muchos países las escuelas están repletas de computadores, pizarras electrónicas y sobre todo con acceso a Internet, nos podemos preguntar si queda sitio para las calculadoras y sobre todo, si aún podemos considerarlas de utilidad. Sin olvidar características como tamaño y disponibilidad en cuanto a que no requiere instalación o materiales previos para su uso, podemos añadir otras ventajas que hacen que consideremos como recurso didáctico a la calculadora.

Las distintas versiones o tipos de calculadoras permitirán en cada momento establecer cuál es aquella que más interesa utilizar y en cualquier caso, a partir de cualquier modelo siempre será posible realizar tareas o actividades diseñadas para modelos inferiores.

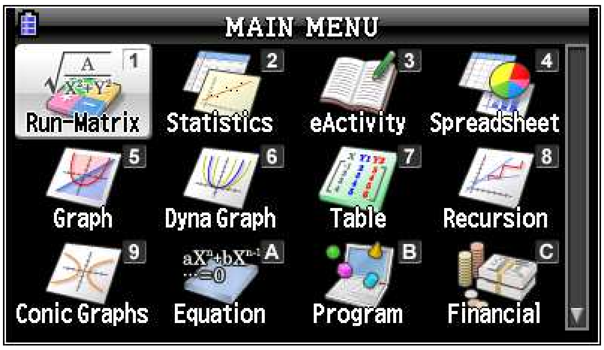
Desde la calculadora básica hasta la que ofrece opciones de cálculo simbólico, pasando por las tan generalizadas científicas y por las gráficas, todas tienen su sitio en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sobre todo, sus posibilidades, deben llevarnos a considerarlas como recursos TIC. El mundo de las calculadoras no es estático, las distintas empresas siguen presentando nuevos modelos para ampliar la oferta y sobre todo las funciones y tareas que ofrecen al usuario.

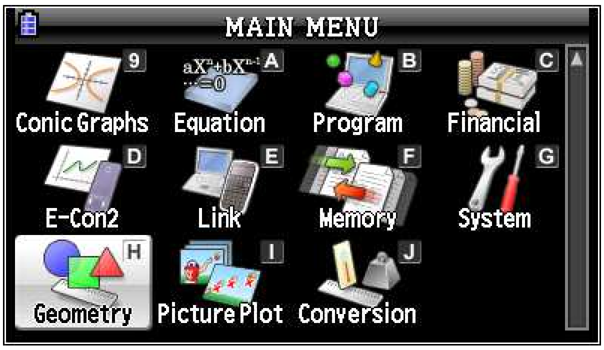
Con el objetivo de no olvidarnos de las calculadoras, he preparado el siguiente trabajo, para el que he aprovechado uno de los últimos modelos de calculadora disponible en el mercado, para desarrollar algunos contenidos y actividades relacionados con la función cuadrática.

Diversas opciones para exponer la función cuadrática

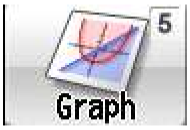
Con ayuda de la nueva fx-CG20 de CASIO abordaremos el estudio de la función cuadrática con distintos recursos, aprovechado la posibilidad que añade a las opciones ya conocidas de otras calculadoras gráficas, el poder incorporar imágenes sobre las que realizar distintas operaciones planteamos algunas ideas para el estudio de la función cuadrática que fácilmente se podrán ampliar a otras funciones o en concreto al estudio de las cónicas.

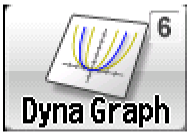
Observando las opciones que ofrece el menú principal de esta calculadora:

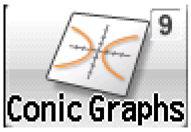


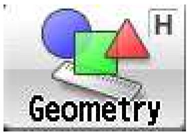


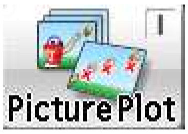
Podemos afrontar el estudio de la función cuadrática desde las siguientes aplicaciones:

- **Gráficos** 

- **Gráficos dinámicos** 

- **Cónicas** 

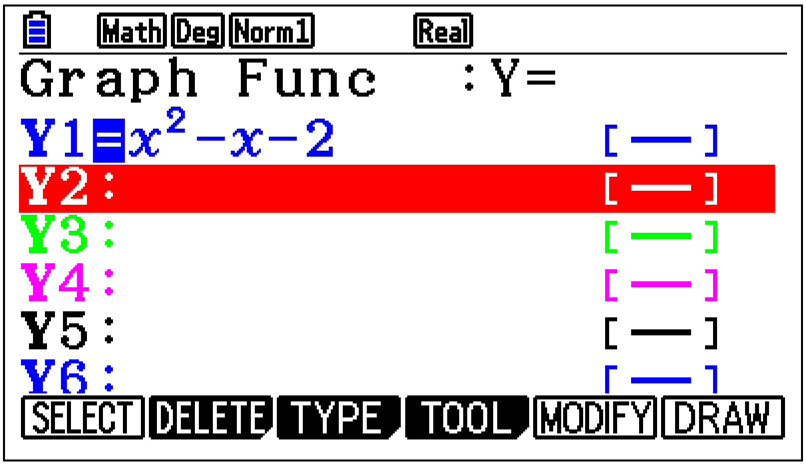
- **Geometría** 

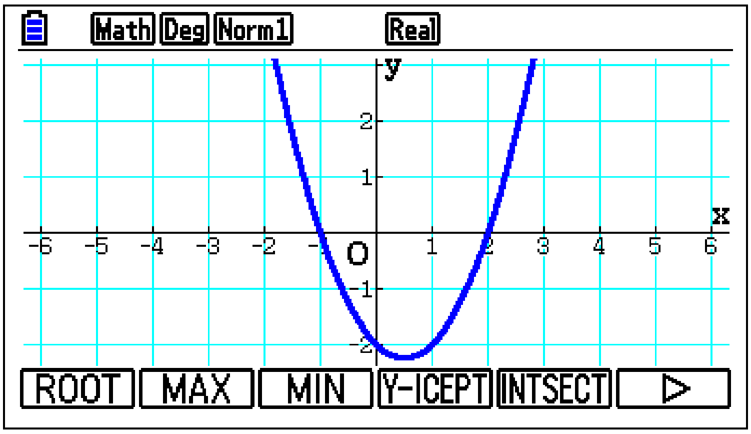
- **Imágenes** 

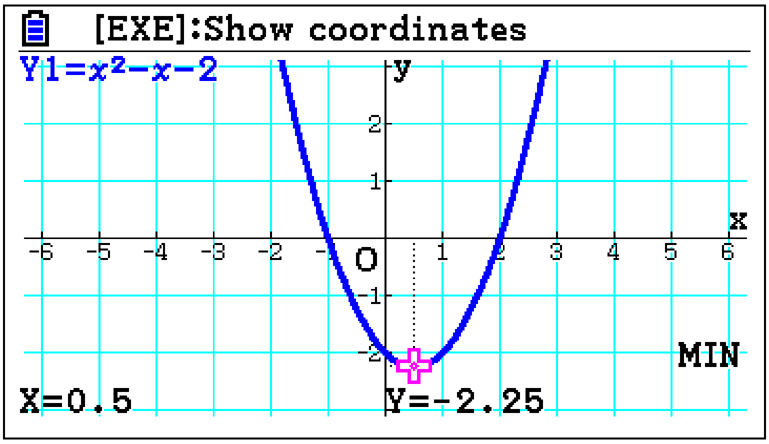
E incluso desde la aplicación **Estadística** para ajustar un conjunto de puntos mediante una función cuadrática de manera similar a como haremos sobre una imagen.

Comenzamos describiendo algunas tareas que podremos realizar desde cada una de las aplicaciones anteriores.

A partir de la aplicación **Gráficos** bastará con introducir la expresión de la función que se desea representar, para una vez obtenida la gráfica proceder al estudio de la función determinando puntos de corte o los extremos a partir de las opciones que ofrece la calculadora.



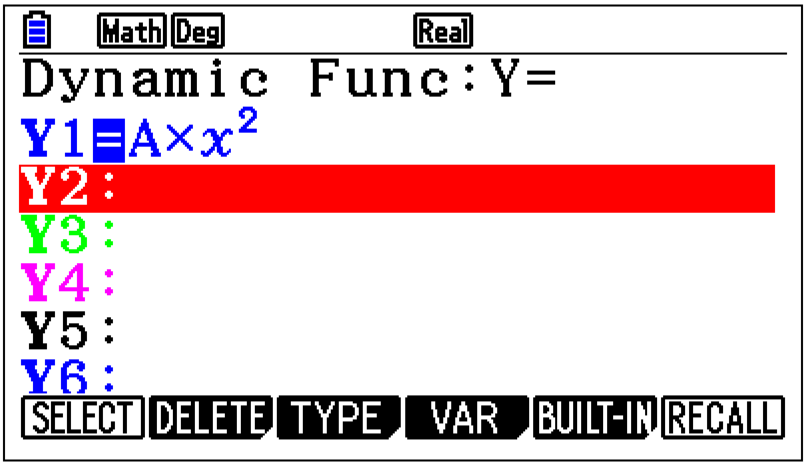


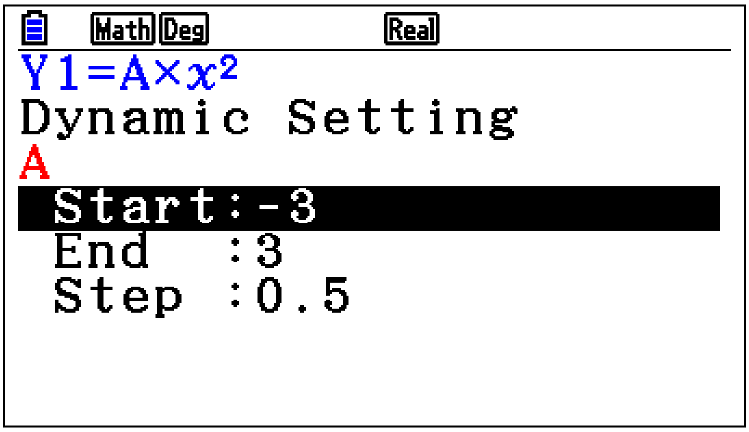


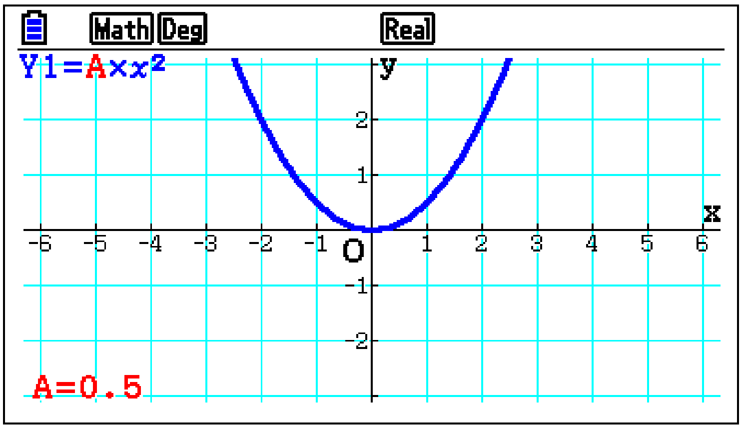
Gráficos dinámicos

Un proceso similar podemos realizar a través de la aplicación **Gráficos dinámicos**, aunque con la ventaja que ofrece poder incluir parámetros en la expresión de la función, de manera que fácilmente se podrá observar la variación que sufre la función al cambiar el valor del parámetro.

Por ejemplo, al introducir la expresión $y = a\ x^2$, se puede asignar valores al parámetro a para describir los cambios de la función.

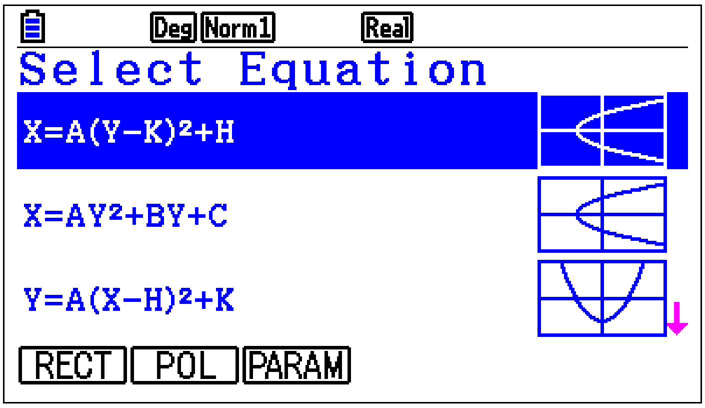


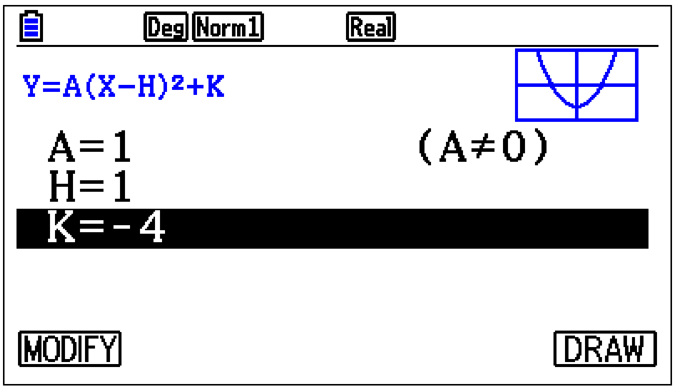


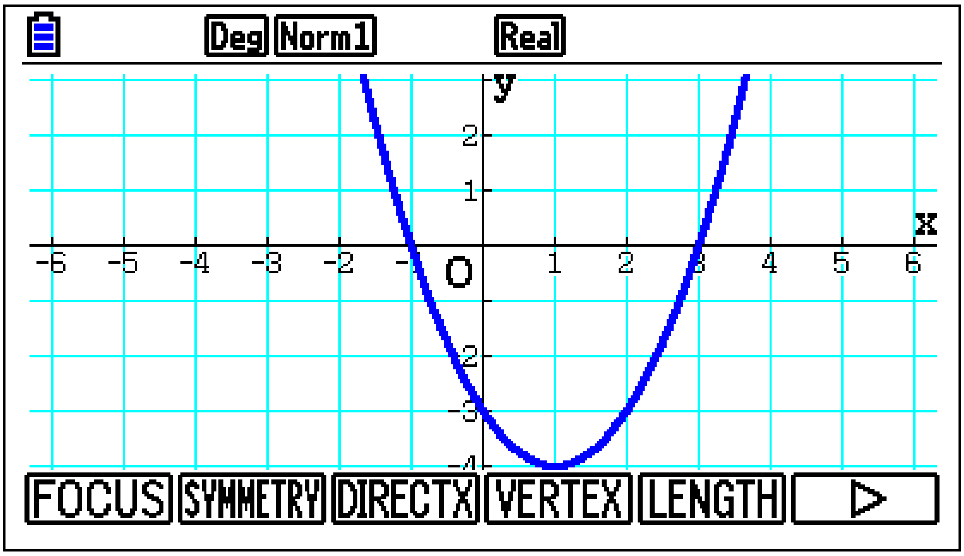


Cónicas

En la aplicación específica para **cónicas** encontraremos las opciones necesarias para representar distintas funciones cuadráticas así como para determinar sus elementos.







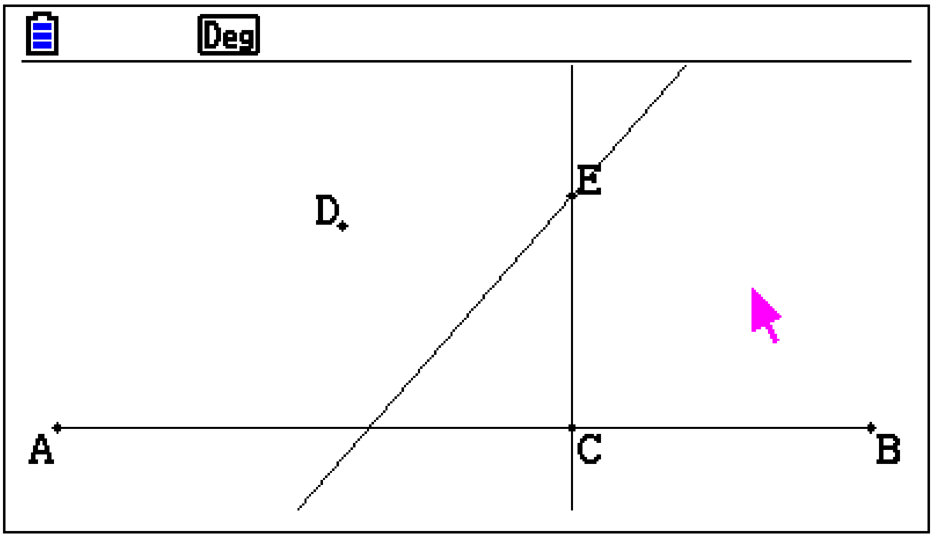
A partir de las expresiones $y = a\ (x-h)^2 + k$ que ofrece esta aplicación se puede trabajar en el aula con actividades sobre la variación que sufrirá una función al aplicar una traslación, intentando averiguar qué valores serán necesarios para desplazar la parábola a una posición concreta o para centrarla en el eje Y.

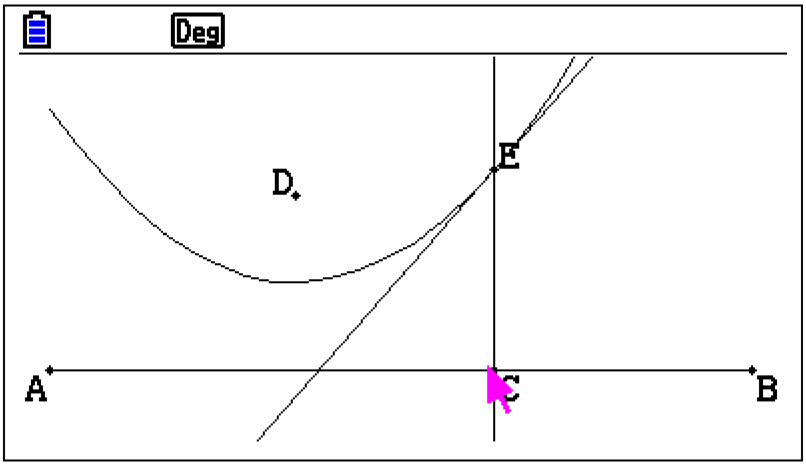
Como podemos observar en la línea inferior aparecen las distintas opciones para determinar los elementos de la cónica representada.

Geometría

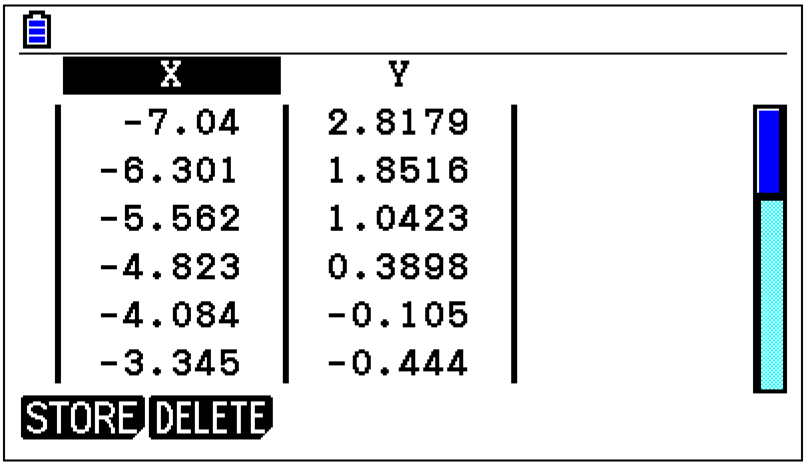
No es necesario recordar que la parábola es un lugar geométrico, por lo que será posible recurrir a las opciones de animación que ofrece la aplicación **Geometría** para obtener su representación.

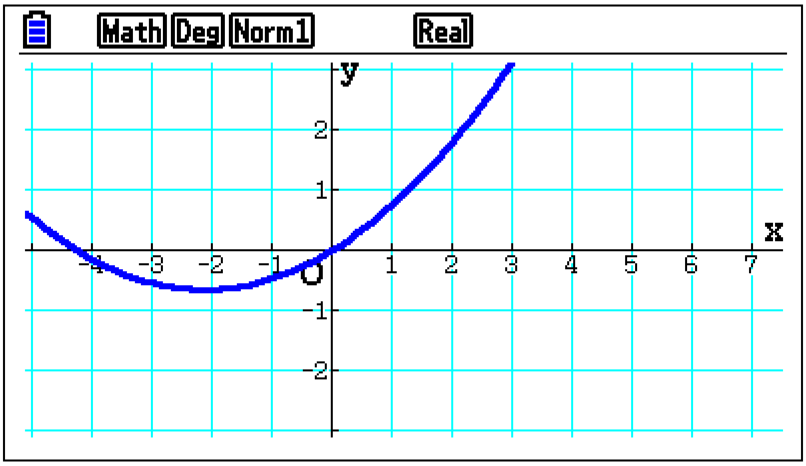
Por ejemplo, a partir de una recta r, un punto en la recta C y un punto D no perteneciente a r se puede obtener una parábola como el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por D y son tangentes a la recta en el punto C.





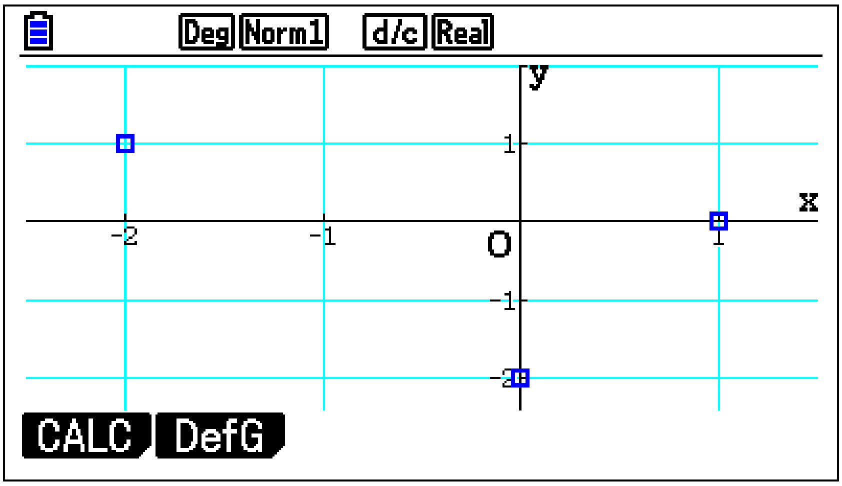
Es posible obtener una tabla de valores para posteriormente ajustar la curva de manera que sea posible determinar su ecuación.

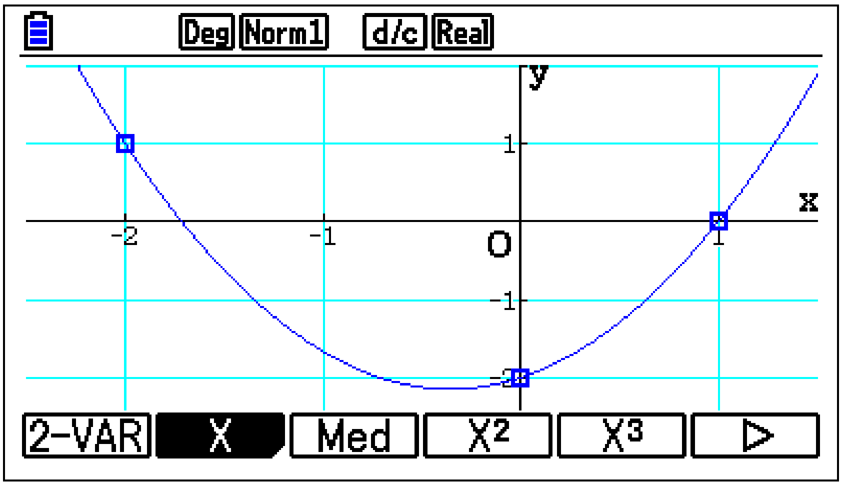




Estadística

Un proceso similar se puede realizar desde la aplicación **estadística** en la que a partir de un conjunto de puntos, utilizando las opciones para obtener una curva de regresión cuadrática se podrá determinar la parábola que pasa por los puntos dados.

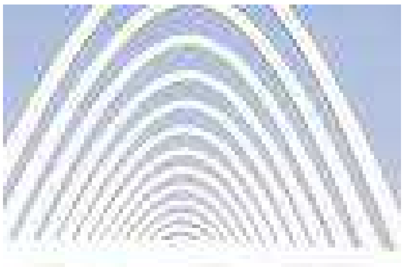




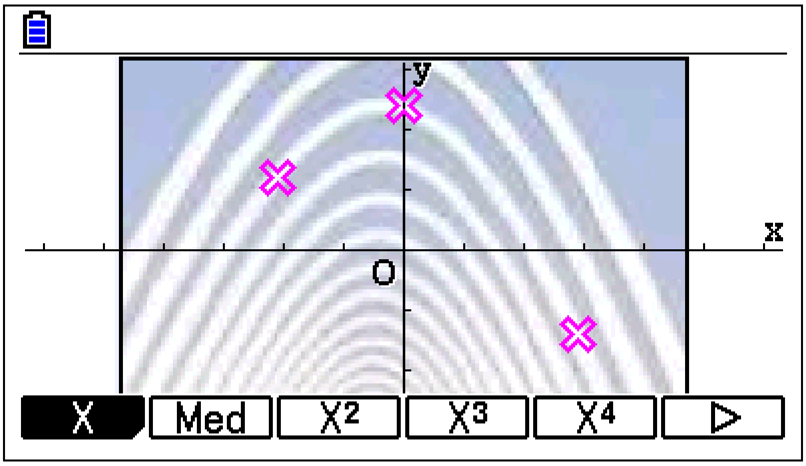
Lo cual facilitará la realización de actividades sencillas en las que se plantee averiguar la ecuación a partir de tres puntos, comprobando posteriormente los resultados con ayuda de la calculadora.

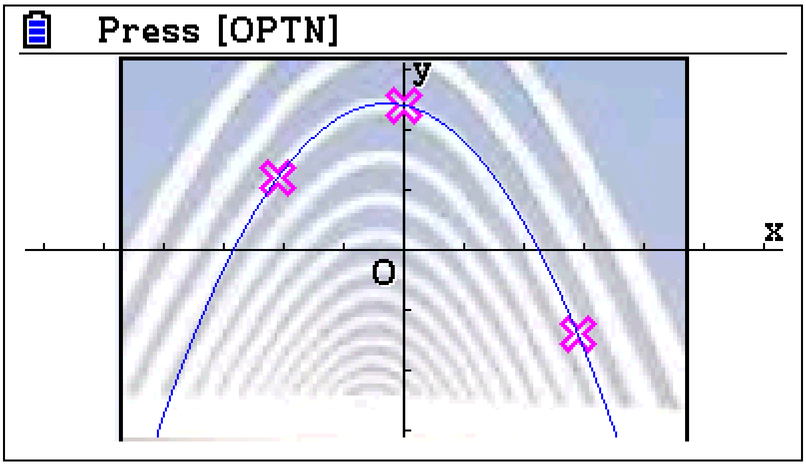
Y para finalizar, nos quedan las nuevas opciones que ofrece la calculadora fx-CG20, en la que a partir de una imagen obtenida de una situación real se podrán incluir nuevos elementos para trabajar sobre ella.

Por ejemplo, a partir de la imagen siguiente obtenida de un peaje de una autopista podremos ajustar una curva a los arcos habituales en estos espacios.

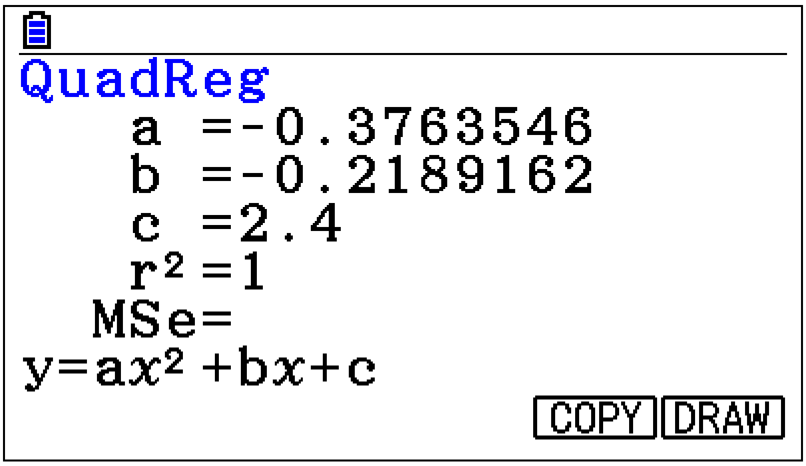


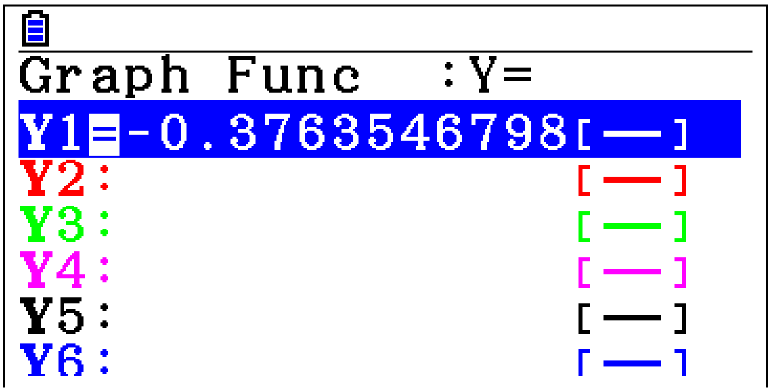
Nos quedará una imagen similar a la siguiente:

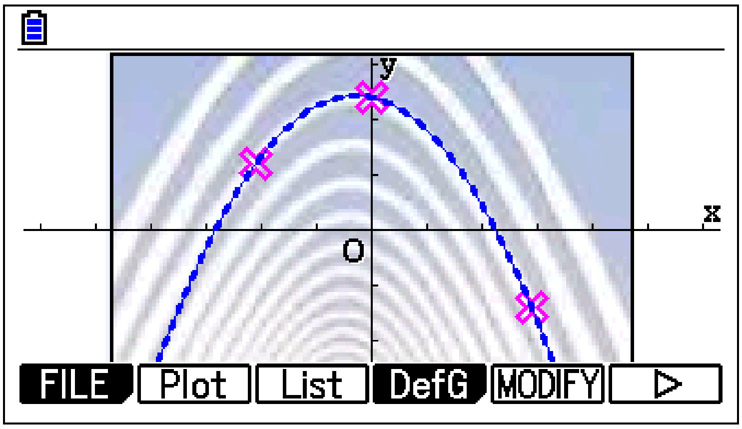


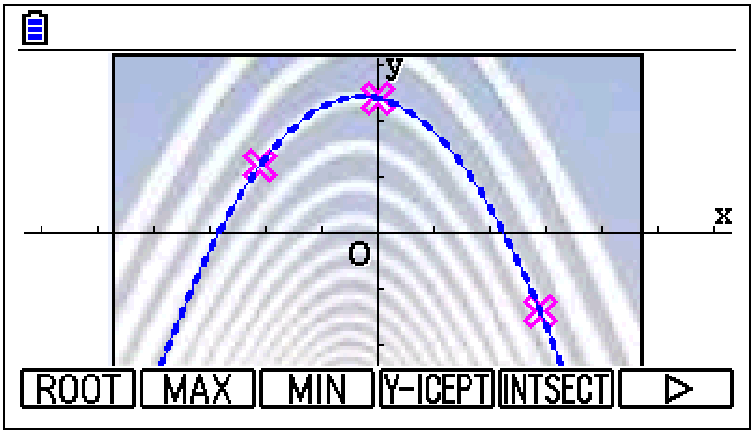


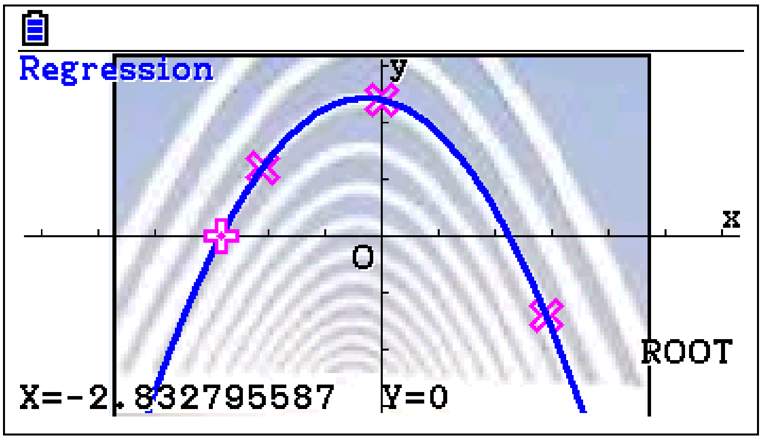
Una vez obtenida la parábola es posible situar tres puntos sobre ella de manera que podamos obtener su expresión utilizando las opciones para calcular regresiones, llevando el resultado a la aplicación **Gráficos** para obtener los elementos de la función.




Graph Func :Y=
Y1=-0.3763546798[—]
Y2:
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:


y
x
O
FILE
Plot
List
DefG
MODIFY


y
x
O
ROOT
MAX
MIN
Y-ICEPT
INTSECT


Regression
y
x
O
ROOT
X=-2.832795587
Y=0

Conclusión

La variedad de opciones descritas en estas actividades y la imaginación del profesorado ampliarán las posibilidades didácticas que ofrecen las calculadoras, lo que facilitará en cada caso su incorporación al aula, a pesar de las reticencias que aún persisten en el profesorado y contra las que debemos seguir luchando para cambiar la opinión.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 157-164
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Estudio discreto del movimiento Browniano: Memorias de una hormiga caminante

Gamaliel Salomón Cerda Morales

Resumen

Descubrir nuevas sucesiones matemáticas no parece un trabajo sencillo, y menos aún, orientar su enseñanza y aprendizaje en la educación formal. Este documento muestra como la técnica de ensayo y error, permite generar recurrencias lineales novedosas, entre ellas, una nueva secuencia generalizada de Fibonacci, visualizada a través de la resolución de un problema clásico de paseos al azar.

Abstract

Discover new mathematical sequences seems not an easy job, let alone direct their teaching and learning in formal education. This paper shows how the technique of trial and error, permit generate novel linear recurrences, including a new generalized Fibonacci sequence, viewed through solving a classic problem of random walks.

Resumo

Descobrir novo seqüência matemática não parece uma tarefa fácil, muito menos seu ensino e aprendizagem na educação formal. Este artigo mostra como a técnica de tentativa e erro, gera novas recorrências lineares, incluindo uma nova seqüência de Fibonacci generalizada, visto através da resolução de um problema clássico de passeios aleatórios.

1. Introducción

En 1827 el biólogo inglés, Robert Brown, notó algo que lo dejó perplejo, los granos de polen que estaban en una suspensión acuosa bajo el lente de su microscopio bailaban en todas direcciones, siguiendo caminos zigzagueantes. Probó, para ver, con otros granos de polen, que habían estado almacenando durante un siglo, y constató que bailaban de la misma forma.

El primero que logró adelantar una buena explicación del baile de los granos de polen, que pasó a llamarse desde entonces movimiento Browniano, fue Desaulx en 1877, quien dijo: "Este fenómeno es simplemente un resultado de la agitación térmica de las moléculas de agua". Efectivamente, cada partícula en suspensión en una solución acuosa, que no está tan quieta como parece, es bombardeada aleatoriamente, sin cesar, desde todos lados por las moléculas de agua. Si la partícula es suficientemente pequeña, estos impactos la propulsarán en una dirección, y en seguida en otra, en forma errática e imprevisible. Estos pequeños y aleatorios saltos generan entonces el movimiento browniano.

La primera teoría matemática del movimiento browniano fue propuesta por Albert Einstein en 1905. Por este trabajo, recibió el premio Nobel de Física. Hoy en día, las aplicaciones de los modelos matemáticos del movimiento browniano son ubicuas, por ejemplo, en el tratamiento de imágenes médicas, robótica, economía, construcciones fractales, simulaciones gráficas, ecología, propagación de aerosoles, etc. Matemáticamente, podemos mirar el movimiento browniano como un paseo al azar en que la partícula paseante da en cualquier instante un salto de dirección y magnitud arbitraria.

En este documento, estudiaremos por ensayo y error, un análogo discreto de este tipo de movimientos, en que nuestra partícula da saltos de la misma magnitud a sitios prescritos de su espacio ambiente. En particular, consideraremos el caso de un espacio con sólo cuatro sitios, y veremos que incluso este fenómeno matemático permite modelar sistemas interesantes de la vida cotidiana.

2. Diferentes visiones de un problema probabilístico

Es común en la enseñanza de las matemáticas, introducir el análisis y cálculo de probabilidades con la consigna de paseos al azar, es decir, interesándose en el devenir de un ser u objeto que se pasea al azar por algún espacio o estructura.

Un ejemplo imaginable de paseo al azar es el siguiente, que proponemos como un módulo de trabajo dirigido al estudiante de enseñanza secundaria (15-16 años):

> *Una hormiga se pasea alegremente por los vértices de un tetraedro regular (ver figura 1), caminando cada vez desde un vértice a cualquiera de los otros tres, con igual probabilidad.*

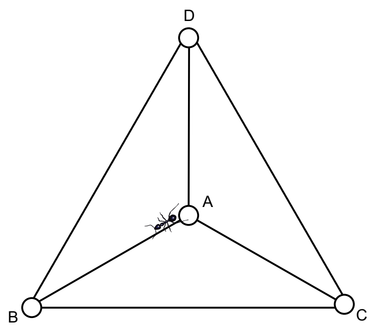


Figura 1. Grafo planar del tetraedro regular.

> ***Interrogante:***
> *Si la hormiga reside inicialmente en el vértice A del tetraedro, ¿Dónde estará después de su primera caminata, segunda caminata, tercera caminata,..., n-ésima caminata?*
> *¿A qué vértice(s) conviene apostar con el tiempo?*

Podemos resolver la problemática desde un punto de vista determinista, imaginemos que en lugar de la hormiga caminante y aleatoria, nos encontramos con la siguiente situación, en la que no vemos azar, sino que un futuro totalmente determinado. Una partícula, de masa 1, se encuentra en el vértice A del tetraedro (figura 1), y de pronto, se fisiona en tres partes iguales, que van a parar, cada una, a uno de los otros tres vértices. En seguida, cada tercio de partícula sufre el mismo destino, dividiéndose en tres partes, que van a aterrizar a los otros tres lugares, y así sucesivamente. Este proceso de fisión continúa indefinidamente. ¿Cuál es la repartición de masa que se va produciendo en los vértices del tetraedro, instante tras instante. ¿Qué ocurre a la larga con la fisión de masa?

¿Ves alguna similitud entre los dos problemas? Podrías haber pensado que como la hormiga no sabe a cuál de los otros tres vértices caminar, se divide en tres, de modo que cada tercio de hormiga va a cada uno de los vértices restantes. Notar que las fracciones de hormiga, o de partícula, que van quedando en los distintos vértices te dan exactamente las probabilidades de presencia de la hormiga en dichos vértices. ¿Estarás de acuerdo entonces que el hecho de visualizar un tercio de hormiga en un vértice equivale a observar muchas veces la pulga, después de una caminata, aproximadamente un tercio de las veces en ese vértice?

3. Una solución por ensayo y error

3.1. Conjeturas a priori en el camino de la hormiga

Si etiquetamos los vértices del tetraedro como indica la figura 1, y sabemos que inicialmente la hormiga reside en el vértice A, podemos indicar a simple vista la probabilidad de encontrarnos con la hormiga en los vértices del tetraedro, analizando sus primeras caminatas. Notar que la probabilidad de encontrarnos con la hormiga en los vértices B, C y D es la misma. Lo anterior, se describe en la tabla 1, donde IP(X) denota la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice X, y X recorre los vértices A, B, C y D del tetraedro.

Tabla 1. Probabilidades en las primeras caminatas de la hormiga

Caminata	IP(A)	IP(B)	IP(C)	IP(D)
0	1/1	0/1	0/1	0/1
1	0/3	1/3	1/3	1/3
2	3/9	2/9	2/9	2/9
3	6/27	7/27	7/27	7/27
4	21/81	20/81	20/81	20/81
5	60/243	61/243	61/243	61/243

Numéricamente, la probabilidad de encontrar a la hormiga en los vértices del tetraedro tienden a equipararse, acercándose cada vez más al valor 0,25 ¿Cómo podemos comprobar matemáticamente esta aseveración?

Algo aquí podemos advertir, la suma total de las cuatro probabilidades es 1, esto se podría llamar “ley de conservación de la hormiga”. Un ejemplo concreto, la probabilidad de estar en el vértice B:

Tabla 2. Probabilidades de estar en el vértice B.

Caminata	0	1	2	3	4	5
IP(B)	0	1/3	2/9	7/27	20/81	61/243

Según tabla 2, el denominador es una potencia n-ésima de 3, y el numerador, un término de la secuencia (0, 1, 2, 7, 20, 61,…). Verifiquemos que los términos de la secuencia anterior, forman exactamente una sucesión recursiva.

Si lo anterior es cierto, al cabo de su n-ésima caminata, podemos comprobar con exactitud la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice B, y los términos de la secuencia en función del estado anterior. Entonces,

$$\left.\begin{array}{r} 1=3\cdot 0+1 \\ 2=3\cdot 1-1 \\ 7=3\cdot 2+1 \\ 20=3\cdot 7-1 \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = 3b_{n-1} + (-1)^{n+1}, n \geq 1 \tag{1}$$

donde b_n denota el término *n*-ésimo. Miremos algebraicamente lo anterior:

$$b_1 = 1 = 3^{1-1}$$
$$b_2 = 3b_1 - 1 = 3 - 1 = 3^{2-1} - [3^{2-2}]$$
$$b_3 = 3(3b_1 - 1) + 1 = 3^2 b_1 - 3 + 1 = (3^{3-1} + 3^{3-3}) - [3^{3-2}]$$
$$b_4 = 3(3^2 b_1 - 3 + 1) - 1 = 3^3 b_1 - 3^2 + 3 - 1 = (3^{4-1} + 3^{4-3}) - [3^{4-2} + 3^{4-4}]$$
$$b_5 = 3(3^3 b_1 - 3^2 + 3 - 1) + 1 = 3^4 b_1 - 3^3 + 3^2 - 3 + 1 = (3^{5-1} + 3^{5-3} + 3^{5-5}) - [3^{5-2} + 3^{5-4}]$$
....

La secuencia b_n depende de la paridad de *n*. Si *n* es par, el término *n*-ésimo es descrito por:

$$b_n = \left(\sum_{k=1,3,\ldots,n-1} 3^{n-k} \right) - \left[\sum_{k=2,4,\ldots,n} 3^{n-k} \right]. \tag{2}$$

A partir de este resultado inicial, calcular la probabilidad de que la hormiga se ubique en el vértice B, sigue siendo una fórmula matemáticamente aceptable desde un punto de vista exploratorio. Primero, dividamos el término *n*-ésimo de b_n por 3^n:

$$\frac{b_n}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 2\left[\sum_{k=2,4,\ldots,n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right].$$

Al primer sumando, restamos los números de exponente par agrupados dos veces. Considerando en el segundo sumando, el cambio de variable $k = 2t$. Por la simple factorización del exponente, obtenemos:

$$\mathrm{IP}(B) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 2\left[\sum_{t=1}^{n/2} \left(\frac{1}{9}\right)^t \right] = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right). \tag{3}$$

El caso impar es análogo, y se resuelve de la misma manera. En ambos, la probabilidad de estar en los vértices B, C y D está dada por $\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

De esto, la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A, está dado por:

$$\mathrm{IP}(A) = 1 - 3\mathrm{IP}(B) = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right). \tag{4}$$

Sobre la problemática del juicio final, existe una relación poco estudiada en la escolaridad, reflejo del concepto de límite sobre la sucesión obtenida, y cuyo valor representa una respuesta consistente a la memoria de nuestra hormiga. Esto es, deducir que la probabilidad de estar en el vértice B, C o D, tiene valor 1/4, cuando *n* tiende a infinito. Aparentemente, desde un punto de vista práctico, la respuesta es poco sugerente, sin embargo, en el ámbito determinista, no tiene discusión, pues la distribución de una partícula de masa 1, con el tiempo tiende a equiparse en los vértices del grafo planar del tetraedro regular.

3.2. Una representación algebraica

Es de común conocimiento en educación, que el estudio de series de Taylor, permite visualizar el comportamiento gráfico de una función determinada, dado su tipo diferenciable en un punto del dominio. En nuestro caso, recurrir al estudio de una serie o suma infinita, permite establecer una relación entre el concepto recursivo de una secuencia y su aproximación funcional. Primero, descubramos un patrón en la sucesión b_n que aparece en la tabla 2, y es el denominador de IP(B).

Sea a_n el numerador de IP(A) y dado que $a_n = 2b_{n-1}$, para todo $n \geq 1$ (viendo tabla 1). Podemos utilizar la relación:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 2b_{n-1} + 3b_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}, \qquad (5)$$

para definir una función polinomial f(x) de grado infinito, que corresponde a la suma de los términos $b_n x^n$, con *n* no negativo. Bajo esta condición, y por simple desarrollo algebraico, la función f es:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = x + \sum_{n\geq 2} b_n x^n = x + \left[2\sum_{n\geq 2} b_{n-1}x^n + 3\sum_{n\geq 2} b_{n-2}x^n\right]. \qquad (6)$$

Despejando en función de x, obtenemos:

$$f(x) = x + 2xf(x) + 3x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-2x-3x^2}. \qquad (7)$$

Esta función tiene asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1/3$. Una descomposición parcial f(x) está dada por:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(1-3x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{1-3x},$$

donde a y b son números reales.

Es fácil notar que $a = -1/4$ y $b = 1/4$. Finalmente, todo se reduce a estudiar las funciones de descomposición en f(x), las que son series de potencias, centradas en cero; y deducidas de forma general sobre la suma de x^n, con $n \geq 1$. Es así, como obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-(3x)}\right] = \frac{1}{4}\left[-\sum_{n\geq 0}(-x)^n + \sum_{n\geq 0}(3x)^n\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{n\geq 0}[3^n - (-1)^n]x^n\right],$$

y la sucesión que regula el comportamiento analítico de f(x) es precisamente

$$b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}, \forall n \geq 0. \qquad (8)$$

Nuevamente, la aproximación por Taylor permite desarrollar una regla general que es múltiplo de 1/4, y que al ser dividida por la potencia *n*-ésima de 3, representa un factor neutro en el producto de probabilidad estudiada.

3.3. Un ejemplo análogo sobre el cuadrado

Un ejemplo concreto es observable si nuestra hormiga se mueve a través de los vértices de un cuadrado. En este caso, la hormiga camina a alguno de los dos vértices contiguos con igual probabilidad, el proceso se reitera con cada caminata, al igual que en el tetraedro, pero esta vez solamente con dos opciones. La pregunta es, ¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga esté en uno de los cuatro vértices, luego de *n* caminatas?

Tabla 3. Primeras 6 caminatas en el cuadrado

n	IP(1)	IP(2)	IP(3)	IP(4)
0	1	0	0	0
1	0	1/2 = 0,5	0	1/2 = 0,5
2	2/4 = 0,5	0	2/4 = 0,5	0
3	0	4/8 = 0,5	0	4/8 = 0,5
4	8/16 = 0,5	0	8/16 = 0,5	0
5	0	16/32 = 0,5	0	16/32 = 0,5

Las conclusiones son inmediatas, la probabilidad de que la hormiga esté en un vértice del cuadrado es 0,5 ó 0. Para un número de recorrido par, la probabilidad de estar en los vértices 1 y 3, es de 0,5; mientras que en los otros, es cero. Y si el número de recorrido es impar, la probabilidad de estar en los vértices 2 y 4, es 0,5.

4. Un paso por el álgebra de matrices

Una deducción entorno al uso de sistemas lineales, aproxima nuestro problema de la hormiga caminante. Si representamos los estados en el tiempo (*n+1*) de la hormiga para los vértices A, B, C y D, respecto al numerador:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

donde $3^n j_n$ denota la probabilidad de estar en el vértice j, y $j \in \{A, B, C, D\}$

En este caso, el vector de estado es (A_n, B_n, C_n, D_n), y su matriz de transición P es simétrica, de ceros en su diagonal y 1/3 en los demás lugares. Para analizar el comportamiento del sistema, utilicemos el vector inicial $(1,0,0,0)$ (tabla 1). De esto, la matriz de transición, define una transformación lineal invertible y diagonalizable.

Su polinomio característico $x^4 - (2/3)x^2 - (8/27)x - 1/27$ tiene valores propios $\lambda_1 = -1/3$ y $\lambda_2 = 1$, y los subespacios propios asociados son

$$W_1 =< (-1,1,0,0); (-1,0,1,0); (-1,0,0,1) > \text{ y } W_2 =< (1,1,1,1) >,$$

respectivamente.

Precisamente, son estos vectores los que determinan la matriz conjugada G a P, tal que $G^{-1}PG = D$, donde D es la matriz diagonal [-1/3, -1/3,-1/3, 1]. Un simple cálculo aritmético, nos permite determinar la potencia *n*-ésima de la matriz de transición, que define el comportamiento que deseamos predecir.

De esta manera, una argumentación sobre el desarrollo de las potencias de P, equivale a considerar:

$$P^n = GD^nG^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1/3)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo valor, según el estado inicial, respeta la primera columna del producto anterior, y es precisamente un análisis análogo a lo realizado hasta ahora. Por lo tanto,

$$(A_n, B_n, C_n, D_n) = \frac{1}{4}\left(1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \tag{10}$$

5. Conclusión

Un vector propio de la matriz de transición, es precisamente $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, lo que permite analizar el comportamiento estable sobre la igualdad que negamos a creer en primera instancia. Por ejemplo, sobre una situación real, cuatro personas que tienen un vaso con un litro de jugo, y deciden repartir equitativamente a sus vecinos cercanos en igual porción, tienden a equipar la entrega, aunque la fisión no resulte tan exacta (al igual que el concepto de infinitud), ¿Podría ser comprobado matemáticamente este comportamiento? ¿Cuál es su veracidad?

Una pregunta interesante, sería generalizar para un polígono de *n* lados, e incluso sugerir una representación piramidal modificada. Es decir, podemos tratar de cambiar los caminos de la hormiga, y suponer que algunos de ellos están prohibidos (como muestra la figura 2).

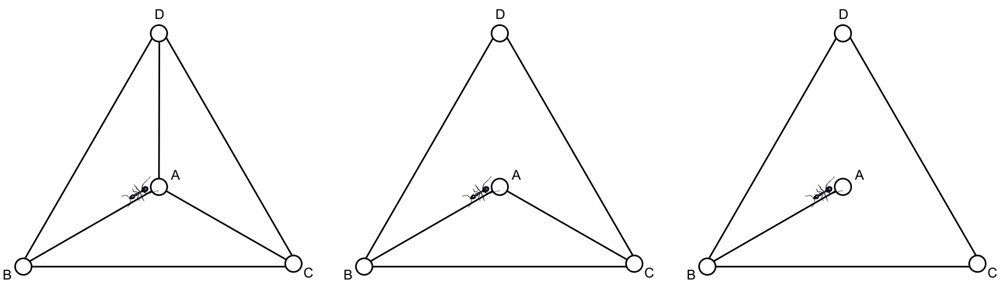


Figura 2. Tipos de caminos en el tetraedro regular.

¿Cuántas soluciones hay en cada caso?, ¿Cuál es la probabilidad de estar en el vértice A, si solamente se camina a B?, o ¿Cuántas sucesiones se pueden generar en los tipos anteriores?

Estas interrogantes son sugeridas aquí, como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo, como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico, sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos.

Bibliografía

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina, Paidos Educador.

Caro, P., Cognigni, R. (2012). Ideas para Enseñar: Modelización de problemas estadísticos mediante grafos, *UNIÓN*, Revista Iberoamericana de educación matemática, 31, pp.153-160.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

González, P., Soto-Andrade, J. (2002). *Matemática Activa*, Tercero año medio, Ministerio de educación, Chile. Editorial Mare nostrum, Santiago.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *19*, pp. 34-46.

Gamaliel Salomón Cerda Morales: Magíster en Matemáticas y Licenciado en Educación de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Actualmente, estudiante doctoral en ciencias con mención en matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile, becado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT. Profesor asistente jornada completa en el instituto de matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Correo electrónico: **gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 165-180
ISSN: 1815-0640
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica

Imagens da Etnomatemática em periódicos brasileiros

Wanderleya Nara Gonçalves Costa

Resumo

São aqui apresentados resultados das análises de artigos sobre Etnomatemática publicados no Brasil nos últimos vinte e cinco anos. Tais análises foram orientadas por questões que enfatizaram: o tema, o objetivo, os aspectos teóricos e a afiliação dos autores, de modo não a reproduzir reflexos, mas sim a apontar imagens a serem transformadas. Neste sentido, indica-nos que a Etnomatemática é uma área na qual existe vitalidade e polissemia, mas que carece da constituição de rede de pesquisadores e do fortalecimento de grupos de pesquisa.

Abstract

Here are presented the results of analyzes of published articles on Ethnomathematics in Brazil in the last twenty-five years. These analyzes were guided by questions that emphasized: the subject, the purpose, the theoretical aspects and the affiliation of the authors, in order not to reproduce reflections, but to point out what should be changed. In this sense, tells us that the Ethnomathematics is an area where there is vitality and polysemy, but it lacks the constitution of network researchers and strengthening research groups.

Resumen

A continuación se presentan los resultados de los análisis de los artículos publicados sobre Etnomatemáticas en Brasil en los últimos veinticinco años. Estos análisis fueron guiados por las preguntas que puso de relieve: el sujeto, el propósito, los aspectos teóricos y la afiliación de los autores, con el fin de no para reproducir los reflejos, sino señalar la necesidad de cambiar. En este sentido indican que en la zona hay la vitalidad y la polisemia, pero carece de la provisión de una red de investigadores y fortalecimiento de grupos de investigación.

Introdução

A proposta de conhecer as principais características da produção bibliográfica etnomatemática no Brasil levou-me a empreender uma análise histórica de periódicos científicos nacionais que visam à divulgação de pesquisas em Educação Matemática. Esta análise se deu a partir da questão: “*como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos brasileiros de Educação Matemática?*”.

É verdade que estudos sobre a produção Etnomatemática brasileira já ocorreram tendo como foco teses e dissertações (Conrado, 2005) e anais de eventos científicos da área (Fantinato, 2012). Entretanto, como pontuado em Costa (2012a), considerei o fato de que a publicação científica em periódicos também possui um papel destacado no processo de compartilhamento, de debates, de validação e de transferência da informação técnico-científica. Assumi, portanto, o pressuposto de que artigos publicados em determinados periódicos também podem tornar-se referência para outros estudos, apontando a evolução de um campo de saber, legitimando referenciais teóricos e metodológicos e perpetuando a memória científica e, por isto, tais produções poderiam servir como indicadores privilegiados da evolução desta área de estudos.

Em especial, tanto o Bolema (Boletim de Educação Matemática) – que vem sendo publicado ininterruptamente nos últimos vinte e cinco anos pela Universidade Estadual de São Paulo em seu Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (UNESP/RC) – quanto a *Zetetiké* – uma publicação do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da UNICAMP, que em 2012 completou dezenove anos – tornaram-se referências amplas, diversificadas e representativas da produção acadêmica brasileira em Educação Matemática. Em vista disto, estas publicações foram as primeiras a serem analisadas e são os resultados deste estudo que discuto neste artigo.

Metaforicamente, a análise dos periódicos tem assumido o caráter de um “olhar no espelho”, olhar que busca captar o objeto, submetendo-o a um exame para melhor compreendê-lo. Compreendo que, de certo modo, olhar-se no espelho é buscar reconhecer-se, perceber a própria identidade. Contudo, há que se considerar que a identidade, ou a especificidade do sujeito, é produto das relações do seu corpo e da sua consciência com o mundo. Neste contexto, observa-se que, em grande parte:

> hoje o corpo se apresenta como a grande âncora da subjetividade: é na superfície corporal onde cada um exibe as suas verdades. Essa ênfase nas aparências corporais emerge como uma característica marcante da nossa época, e são imensas as implicações desse deslocamento do foco. (...) As verdades já não se escondem dentro de cada um: elas estão à flor da pele, são visíveis – ou, pelo menos, se esforçam por atingir o cobiçado campo da visibilidade. (Sibília, 2006, p. 110)

Certamente, o corpo é considerado essencial na composição das subjetividades na medida em que, criando e exprimindo imagens e formas, ele revela o eu, expressando diferenciações donde emergem as identidades. Por isto, corporificando a Etnomatemática, tenho proposto este olhar para o espelho (Costa (2012a e 2012b). Mas, ao ‘dar um corpo para a Etnomatemática’, lembro Foucault (1997) e seu alerta para o fato de que os corpos por meio dos quais as identidades se mostram são corpos dóceis, disciplinados, enunciadores de verdades.

Observamos, então, que os corpos são modelados de acordo com valores e signos que são internalizados e atuam na própria constituição dos sujeitos. Assim, marcas como as tatuagens, que durante séculos foram expressão de marginalidade, hoje são uma ‘normalidade estética’. Por outro lado, marcas como estrias, sardas, cicatrizes passaram a ser consideradas indesejáveis e vêm sendo inexoravelmente extirpadas (Costa, 2012b). Contudo, no meu olhar, analiso artigos de etnomatemática publicados nos periódicos BOLEMA e *Zetetiké* buscando detectar as marcas – possíveis cicatrizes, estrias, sardas, ou, de outro modo, o tema, o objetivo, os procedimentos de pesquisa, a modalidade do texto, os aspectos teóricos e a afiliação dos autores – não para extirpá-las, pois a sagração da juventude artificialmente prolongada não cabe à Etnomatemática corporificada. As marcas deverão servir para incitar à reflexão contribuindo para conhecermos melhor este campo de estudos para, a partir daí, talvez, traçar novas perspectivas de trabalho.

No primeiro olhar para o espelho, isto é, nas análises do Bolema, foram consideradas inicialmente todas as edições publicadas, desde a primeira, em 1985 (Bolema número 1), até a edição de dezembro de 2010 (Bolema número 37), que, juntas, disponibilizaram duzentos e setenta e sete artigos. Deste conjunto, foram excluídas as edições especiais e as temáticas e, em vista disto, permaneceram duzentos e dezessete (217) artigos. Num segundo olhar para o espelho, isto é, na análise do periódico *Zetetiké*, observei que até o final de 2011 foram editados trinta e seis números, em dezenove volumes. Juntos, os trabalhos publicados neste periódico totalizaram duzentos e dezenove artigos, além de resenhas, crônicas, listagem e resumo de teses e dissertações. Dessas edições, duas foram temáticas, com vinte e nove artigos, que foram excluídos, restando, portanto, cento e noventa (190) artigos a passarem por uma análise exploratória. Assim, o *corpus* inicial constituído pelos trabalhos publicados nesses dois periódicos totalizou quatrocentos e sete artigos.

A partir daí, o procedimento de recolha dos dados consistiu inicialmente na leitura dos títulos dos artigos, assim como do nome dos seus autores, dos resumos e das palavras-chave de cada um dos artigos. Esta primeira ação revelou que, no total, o Bolema, em suas edições regulares, até a data considerada neste estudo, publicou vinte e cinco (25) trabalhos relacionados à Etnomatemática. Por sua vez, a *Zetetiké* publicou nove (9) artigos da área. Em seguida, os trabalhos foram listados por periódico, em ordem cronológica de publicação. Os artigos do Bolema receberam o índice Bn (com n de 1 a 25) e os da Zetetiké, Zn (com n de 1 a 9) e foram dispostos em duas tabelas (veja Anexo 1 e Anexo 2). Depois de concluído este primeiro olhar e arranjo, em duas diferentes etapas correspondentes a cada um dos periódicos, os artigos foram lidos na íntegra para dar resposta às seguintes perguntas orientadoras: Qual a afiliação institucional dos autores? Que tema foi abordado, investigado ou problematizado? Qual era o objetivo do trabalho? Quais foram os procedimentos de pesquisa adotados? Qual é modalidade do texto? Que aspectos teóricos foram privilegiados? Quais foram os autores referidos?

Em alguns casos, as respostas às questões orientadoras não foram explicitamente anunciadas no artigo, então optei por colocar respostas presumidas a partir da leitura do texto ou consultar fontes complementares, tais como o currículo dos autores ou mesmo alguns de seus outros trabalhos.

Na composição deste texto, optei por apresentar, no item seguinte, as análises referentes ao Bolema. Logo após serão apresentadas as que dizem respeito à *Zetetike* – acompanhando, deste modo, as sistematizações contidas em Costa (2012a) e Costa (2012b), respectivamente.

Um primeiro olhar para o espelho: a Etnomatemática no Bolema

Guimarães Rosa (1908-1967), um dos maiores escritores brasileiros de todos os tempos, nos provocou ao falar sobre a alma do espelho. Ao fazê-lo, o escritor nos apontou a capacidade do espelho de tornar visível o que nos é invisível e contrapôs-se à dualidade entre corpo e alma, concepção que nos acompanha há séculos.

De fato, como lembrado em Costa (2012b), René Descartes (1596–1650), que ofereceu a base para toda a atividade científica do qual somos herdeiros, acreditava que a alma, totalmente distinta do corpo e prisioneira deste, seria a única causa do pensar. Por meio da dualidade entre sujeito e objeto, Decartes fez renascer a divisão outrora estabelecida pela filosofia socrático-platônica entre o corpo e alma, supervalorizando a alma em detrimento do corpo. Décadas mais tarde, John Locke (1632–1704) apregoaria que o cerne da identidade de cada ser humano estava na sua mente ou na sua consciência. Assim, nos séculos XVII e XVIII, paralelamente à mecanização do mundo, aos avanços do racionalismo e do capitalismo industrial, nasceu a visão do corpo/máquina habitado por uma entidade misteriosa que poderia ser chamada de alma, de mente ou de consciência. Hoje, com a percepção de que o corpo tem muito a dizer sobre a nossa identidade, voltamos a integrar o corpo e a alma.

Desde o primeiro olhar para o Bolema, esta tem sido a busca, revelar o corpo e a alma da Etnomatemática. Verifiquei, então, que nos primeiros três números deste periódico, foram publicados oito artigos, nenhum deles vinculado à Etnomatemática. Nos dois números seguintes – 4 e 5 –, que totalizaram oito artigos, três eram sobre Etnomatemática. Antes de publicar o volume de número 6, em 1989, o Bolema editou o seu primeiro número especial, inteiramente dedicado à Etnomatemática e contendo três artigos (outros dois números especiais seriam publicados neste primeiro decênio). O Bolema de número 7 também continha um artigo da área. Então, de um total de cinquenta e dois artigos publicados nas edições regulares do Bolema de 1985 a 1995 □ números 1 a 11 □, quatro foram de Etnomatemática, aproximadamente 7,6%.

Um dos trabalhos publicados nos primeiros dez anos do Bolema (B2) deve-se a um ex-estudante da UNESP/RC que, na época, estava vinculado à PUC/RJ (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro). Dois autores estavam vinculados à UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), mas eram orientadores do Programa de Pós-Graduação da UNESP/RC (B1 e B4). Além destes, um autor estrangeiro foi responsável por um dos trabalhos (B3). Os autores de B1 e B2 dispuseram-se a discutir e ampliar o conceito de Etnomatemática, lançando algumas ideias sobre seu impacto na sala de aula. Em B3, o autor dedica-se a analisar elementos decorativos presentes em vários contextos culturais e históricos — desde Moçambique ao Brasil, passando pelo Egito Antigo — para discutir uma série de demonstrações para o chamado teorema de Pitágoras. No artigo que foi classificado como B4, o autor recorre a Thomas Kuhn para argumentar que, de acordo com as ideias deste pensador expressas em “A Estrutura das Revoluções Científicas”, a Etnomatemática poderia ser classificada como um movimento e até mesmo uma filosofia.

Verifica-se, pois, que neste momento histórico, a Etnomatemática mostrava-se como uma proposta em constituição e que os pesquisadores consideravam necessário, sobretudo, discutir acerca da sua conceituação e evolução. Os três textos dedicados a este tema eram ensaios que se amparavam, principalmente, nas próprias teorizações sobre a Etnomatemática, na Psicologia Cognitiva e na Antropologia. O quarto artigo era resultado de uma pesquisa qualitativa. R. Ascher e M. Ascher, U. D’Ambrosio, E.S. Ferreira e D. Carraher, T. Carraher e Schliemann foram os autores mais citados neste período. Deste modo, as primeiras marcas no corpo da Etnomatemática são comparáveis às suas digitais, pois tais artigos ainda hoje constituem referências importantes para compreendermos as características desta área — mesmo que parte destes autores tenha, posteriormente, reformulado algumas de suas ideias.

Após a publicação no número 7 do Bolema, um outro artigo da área só se faria presente na revista de número 16 (B5). Por sua vez, o Bolema 17 trouxe quatro artigos acerca da Etnomatemática (B6 a B9), enquanto os números 19 e 20 apresentaram um artigo cada um — B10 e B11, respectivamente. Os volumes 23 a 26 continham, em conjunto, seis artigos sobre o tema (B12 a B17). Assim, dos noventa artigos presentes nos volumes regulares do Bolema entre os anos de 1996 e 2006 (números 12 a 26), foram publicados treze artigos sobre Etnomatemática. Em vista disto, mais de 14% dos artigos publicados no segundo decênio do Bolema foram desta área.

Oito destes treze artigos foram escritos por pesquisadores vinculados a instituições estrangeiras sendo que dois deles foram escritos originalmente em português e dois foram mantidos no idioma original do autor. Observa-se que, de um modo ou de outro, dos treze trabalhos publicados neste período, seis estavam relacionados ao próprio programa de Pós-Graduação da UNESP/RC — que foi o primeiro na América Latina dedicado à Educação Matemática. Entretanto, a predominância observada pode estar relacionada não só à antiguidade do Programa, mas também à própria evolução do periódico — que somente ao longo do tempo foi deixando de ser circunscrito ao programa que lhe deu origem. Apenas outras três instituições brasileiras também mantinham vínculo com os autores dos artigos publicados pelo Bolema neste período.

Quanto aos temas foco dos trabalhos, quatro artigos escritos nesta época tiveram como principal proposta discutir a conceituação, a evolução e/ou as bases teóricas da Etnomatemática (B7, B8, B11 e B14). Investigar as raízes culturais das ideias matemáticas que ocorrem em contextos, práticas e grupos sociais específicos foi uma preocupação detectada em dois trabalhos (B6 e B9). Num dos artigos, as autoras discutiram o papel das pesquisas etnomatemáticas frente ao multiculturalismo e os preconceitos culturais e étnico-raciais (B15). Outro trabalho expressava a preocupação em relação ao currículo e à formação de professores (B12), enquanto o autor de outro texto ocupou-se em fazer análises comparativas de ideias matemáticas presentes em diferentes culturas (B10). Foi possível observar ainda que um dos trabalhos deste período foi desenvolvido para denunciar relações simbólicas de poder que permeiam os processos de validação, de legitimação e de difusão do saber denominado como matemática (B5).

Dando vazão à multiplicidade de temas que caracterizou as publicações etnomatemáticas deste momento, um dos trabalhos teve como meta relatar o processo de constituição de um acervo de trabalhos internacionais sobre Etnomatemática e apresentar informações sobre o uso do referido banco de dados (B13), enquanto outro apresentou algumas abordagens para o programa em Etnomatemática delineando uma proposta pedagógica (B16). O último dos trabalhos publicados pelo Bolema no seu segundo decênio teve como objetivo apresentar a história dos estudos em etnomatemática na Colômbia (B17).

Cabe pontuar ainda que, nestes treze trabalhos publicados pelo Bolema entre os anos de 1996 e 2006, os autores mais referidos, com citação em pelo menos dois trabalhos, foram: U. D'Ambrosio, M. Ascher, E.S Ferreira, De Certau, T. Carraher, G.B.Saxe, P. Gerdes, M. Borba, B.S Santos, G. Knijnik, B. Barton, A. Bishop, e T.T. Silva. Observei também que os pesquisadores dialogaram com referenciais teóricos advindos de diferentes áreas, sendo que, além dos estudos internos à própria área, destacaram-se os de origem na Psicologia, Sociologia e Antropologia. Quanto à modalidade de texto, os ensaios cederam lugar, em grande parte, a descrições de trabalhos de campo. Deste modo, o Bolema mostra novas marcas no corpo da Etnomatemática, dando-lhe, ao final destes vinte anos, características que avançam e tornam este corpo mais sólido e definido.

Observada a forma como a Etnomatemática esteve presente no Bolema entre os anos de 1985 a 2005, analisemos o período mais recente, dando continuidade, portanto, à descrição desta imagem no espelho.

Do número 27 (2006) até o número 37 (2010), foram publicados oito artigos sobre Etnomatemática, de um total de cento e vinte. Entretanto, há que se considerar que três edições deste período eram temáticas. Excluindo os artigos referentes às edições temáticas, obtém-se um total de setenta e sete trabalhos, dos quais oito são de Etnomatemática. Isto significa que, neste período, as publicações relacionadas a esta área superaram os 10%.

Das oito publicações etnomatemáticas que ocorreram nos cinco últimos anos (Bolema 27 a 37), um artigo foi publicado em espanhol, por pesquisador colombiano (B18). Um artigo originalmente escrito em inglês, uma coautoria de pesquisadores brasileiros e dinamarqueses, foi traduzido para o português por professor e estudantes vinculados à Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro (B21). Os seis artigos restantes foram escritos em português por pesquisadores brasileiros.

Dentre os artigos escritos apenas por brasileiros, dois trabalhos estão relacionados à UFRN (Universidade Federal do Rio Grande do Norte) por terem sido publicados por professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (B23 e B25). Uma pesquisa ao diretório de grupos de pesquisa do CNPq revelou que o autor de um dos trabalhos e a segunda autora do outro são membros do grupo de pesquisa *Matemática e Cultura*, desta instituição.

Vinculados à USP (Universidade de São Paulo), tendo como autores docente ou estudantes da instituição, foram encontrados dois artigos (B20 e B22)– cujos autores se identificaram como membros do *Grupo de Estudos e Pesquisas em Etnomatemática* – o GEPEm/USP. Contudo, tais artigos também estavam vinculados a outras instituições — UFMT (Universidade Federal de Mato Grosso), UFG (Universidade Federal de Goiás) e Escola Indígena Tengatui Marangatu/MS —, visto que, tendo a USP como local de estudos, os autores ou co-autores dos artigos trabalhavam nessas instituições.

Foi detectado ainda um trabalho (B24) de pesquisadoras vinculadas à UNISINOS (Universidade do Vale do Rio dos Sinos) e ao *Grupo Interinstitucional de Pesquisa em Educação Matemática e Sociedade* (como informa o diretório de grupos de pesquisa do CNPq). A segunda autora deste trabalho estava, à época, vinculada também a duas a instituições particulares.

Outro trabalho, B19, está vinculado à USF (Universidade de São Francisco – SP) e à UNEMAT (Universidade Estadual de Mato Grosso), uma das co-autoras deste trabalho também é integrante do GEPEm/USP .

Deste modo, nestes trabalhos, estão representadas dez instituições, seis estados da federação, quatro regiões do País e três grupos de pesquisa, situados nas regiões Nordeste, Sudeste e Sul. Note-se que os pesquisadores da Região Centro-Oeste declararam-se vinculados a um grupo de pesquisa da Região Sudeste.

Portanto, não foram encontrados, entre os artigos publicados nas edições regulares do Bolema ao longo dos seus vinte e cinco anos, autores que, de alguma forma — seja como local de trabalho ou de estudo — estivessem relacionados à região Norte do Brasil. Entretanto, quando observadas as referências dos artigos publicados nos últimos cinco anos, observa-se que existem, também nesta região, importantes trabalhos em Etnomatemática. As referências a autores da região Norte, estão, na maioria das ocasiões, atreladas a anais de eventos científicos. Este fato leva a inferir que talvez inexista, por parte dos pesquisadores do norte do País, uma política de publicação dos resultados de suas pesquisas em periódicos da área e eles têm preferido outras formas de comunicação científica.

Agrupando os artigos segundo as convergências temáticas, podemos perceber que dois artigos (B22 e B23) tratam de formação de professores, outros três abordam a ação pedagógica, a sala de aula e o currículo (B19 e B25). As ideias matemáticas presentes em prática sociais de diferentes grupos, em contextos específicos foi tema do artigo B18. Um artigo (B20) problematizou caminhos e perspectivas da Etnomatemática enquanto programa de pesquisa. A análise de significados relacionados à Etnomatemática foi tematizada por outros dois trabalhos (B21 e B24).

Foi observado que, na condução dos trabalhos, os autores fizeram uso de diversas modalidades textuais: seis deles são textos dissertativos, um ensaio, um relato de experiência e um diálogo argumentativo. Quanto às contribuições teóricas, deparei-me com: a) reflexões sobre as concepções d'ambrosianas de Etnomatemática; a utilização conjunta de Estudos do Imaginário, da História e da Filosofia – notadamente a partir de Durand, Spengler e Foucault; o diálogo com as teorias do segundo Wittenstein e de Foucaut; a utilização da Etnomatemática em confluência com as teorias curriculares críticas – referenciadas em T.T. Silva e B.S.Santos; discussões sobre os impactos das teorizações de Paulo Freire sobre a escuta e o diálogo; reflexões sobre os conceitos de *background, foreground* e dos significados na Etnomatemática. Observa-se, pois, que neste momento o periódico revela que os referenciais teóricos utilizados pelos autores da área foram sensivelmente ampliados.

Quanto aos autores tomados como referência pelo maior número de trabalhos, destaca-se D'Ambrosio — que foi citado em sete dos oito artigos publicados pelo Bolema neste período. O segundo autor mais citado foi Kniknik, mencionada em cinco artigos. Apesar de ambos serem autores brasileiros, não foi detectada uma tendência endógena nas referências, pois, por exemplo, A. Bishop. B.Barton, B.S. Santos, P. Gerdes, M. Foucault e O. Skovsmose foram citados em pelo menos dois trabalhos e vários outros autores de outros países também foram tomados como interlocutores em diferentes artigos.

Foi observado ainda que tem sido uma constante a referência não só a artigos publicados em periódicos, mas também a livros publicados por autores estrangeiros e brasileiros. No caso das teses e dissertações, a maioria dos trabalhos citados foi desenvolvida no próprio País.

Após apresentar as análises referentes ao Bolema, cabe lembrar que um mesmo corpo pode ser observado por diferentes ângulos, revelando um sem número de reflexos que, religados, re-interpretados apresentam outras características suas, dando-nos a perceber outros de seus detalhes. Que dizer então, quando não apenas o ângulo é modificado, mas quando tomamos outro espelho? Briússov (1903, citada por Godoy, 2010) nos diz: "notei que cada espelho tem seu mundo particular, próprio. Ponha dois espelhos num mesmo lugar, um depois do outro, e surgirão dois universos distintos. E em distintos espelhos à minha frente, surgiam espectros distintos..."

Por esta capacidade que os espelhos possuem, de nos mostrar reflexos diversos, contribuindo para melhor nos conhecermos de modo a constituirmos uma imagem de nós mesmos e uma memória sobre ela, é importante observar como a Etnomatemática tem-se revelado também em outros periódicos, como no caso da *Zetetiké*.

Um segundo olhar para o espelho: a Etnomatemática na *Zetetiké*

Os artigos deste periódico foram divididos em dois grupos, de acordo com a data de sua publicação: o grupo 'a' foi composto por artigos publicados entre 1993 e 2003; enquanto que o grupo 'b' foi constituído por artigos publicados entre 2004 e 2011. A partir deste arranjo, ficaram 95 artigos em cada grupo.

Como afirma Costa (2012b), a *Zetetiké* publicou cinco volumes, com o total de trinta e um artigos, antes que apresentasse algum trabalho em Etnomatemática. Entretanto, no volume 4, número 6, de jul/dez de 1996, foram publicados três trabalhos da área (Z1, Z2, Z3). Nesta edição, observa-se o surgimento de estrias. Elas – que são lesões decorrentes do rompimento de fibras elásticas que sustentam a camada intermediária da pele – surgem quando a pele se distende muito e/ou em um curto período de tempo.

De fato, a publicação simultânea de três artigos da área "distendeu a pele", imprimindo a primeira marca das publicações etnomatemáticas na *Zetetiké*. O tema comum foi a etnomatemática e/ou a educação – escolar ou tradicional – indígena. Nos dois primeiros artigos, que eram ensaios, os autores se dedicaram a discutir o próprio o Programa Etnomatemática assim como a adequação de sua proposta para o contexto indígena (Z1 e Z2). O terceiro artigo (Z3), que apresentou parte dos resultados de uma pesquisa qualitativa realizada no Parque Indígena do Xingu durante um curso de formação de professores indígenas, ressaltou aspectos matemáticos de peneiras produzidas pelo povo *Kaiabi*. Todos estes trabalhos estavam relacionados a pesquisadores que, à época, eram vinculados ao Programa de Pós-graduação da FE/UNICAMP, embora um dos co-autores fosse professor do programa da UNESP de Rio Claro. Todos estes trabalhos buscaram suas referências teóricas na própria área e entre os autores mais citados observa-se que D'Ambrosio esteve presente em todos, enquanto Gerdes, Sebastiani Ferreira e Borba, em dois deles.

Nas publicações que se seguiram, até 2003, isto é, até o final do primeiro decênio deste periódico, foi ainda apresentado o artigo Z4. Ele foi originalmente apresentado em um congresso, publicado em um periódico e também em um livro sobre etnomatemática. Para a *Zetetiké*, este trabalho foi traduzido pela então professora da FE/UNICAMP Maria do Carmo Domite. Trata-se de um ensaio no qual o autor, a partir de suas experiências como professor para uma população árabe palestina numa região próxima ao Rio Jordão, discorre sobre como a cultura influencia o modo como as pessoas compreendem os conceitos. Um dos principais objetivos do artigo é argumentar que o ensino de matemática é uma atividade política. Para consubstanciar seus argumentos o autor ressalta o conflito que ocorre entre as autoridades (institucionais) e o ensino da matemática, quando este acontece de forma a desenvolver o pensamento crítico, a auto-expressão e o entendimento cultural e social.

Deste modo, observamos que, nos primeiros dez anos da *Zetetiké*, foram publicados quatro artigos vinculados à Etnomatemática, aproximadamente 4,21% do total.

Quatro outros volumes foram editados sem que apresentassem artigos sobre etnomatemática. Entretanto, os volumes 12 e 13 (números 22 e 23, de 2004 e 2005, respectivamente) continham, cada um, um trabalho da área (Z5 e Z6). Observa-se que, nos dois casos, os autores se ocuparam em discutir a relação do Programa Etnomatemática com o ensino de matemática em escolas regulares.

O ensaio catalogado como Z5 procurou contrapor-se à ideia de que a Etnomatemática seria um método de ensino, enfatizando o seu caráter filosófico. A autora argumenta que a Etnomatemática se preocupa, prioritariamente, com o debate acerca da produção, da validação e da legitimação do conhecimento matemático relacionado a diferentes práticas sociais e ainda que, na sua perspectiva pedagógica, metodologicamente, ela se apóia na modelagem matemática e no ensino via projetos, dentre outros. Enfatiza que a perspectiva pedagógica assumida pela Etnomatemática é marcada pelo resgate da capacidade de reflexão e de reação frente à fragmentação do conhecimento.

Na mesma linha de pensamento, os autores do ensaio Z6 procuram apontar algumas possibilidades para a ação pedagógica pautada pelos pressupostos filosófico-teóricos da Etnomatemática. Suas principais referências são internadas à área, complementadas com outras afeitas à Psicologia. Por sua vez, Z5 recorre, sobretudo, a obras das áreas de Sociologia e Filosofia.

O volume seguinte da *Zetetiké* – 14, número 26, de jul/dez de 2006 - nos trouxe dois artigos sobre etnomatemática, Z7 e Z8. O primeiro destes trabalhos apóia-se prioritariamente em escritos sobre o Imaginário e sobre a História da Matemática e em resultados de uma pesquisa etnomatemática realizada em área indígena A'uwe Xavante (etnia que habita no Brasil Central – estado de Mato Grosso) para propor uma mudança na forma como são concebidas as relações entre ciências e mitos e ciências e culturas de resistência. Ao desenvolver seus argumentos, a autora faz uma análise comparativa entre os variados significados assumidos por ideias matemáticas presentes em diferentes cosmologias. Em Z8, observa-se a preocupação em apontar possibilidades para a Etnomatemática em sala de aula. De fato, os registros de procedimentos utilizados no cálculo de volume da madeira em serrarias do Rio Grande do Sul possibilitaram aos autores sugerir que a análise e comparação de procedimentos, a uniformização de modelos matemáticos e a análise do erro relativo podem contribuir para o ensino de matemática em escolas rurais da região. Em seguida, sugerem que estudos de processos semelhantes, em outros contextos, poderiam apontar possibilidades pedagógicas para diferentes níveis de ensino e regiões. Suas principais referências foram 'internas' à Educação Matemática.

A partir do exposto, observa-se que, do seu décimo ao décimo quinto ano, entre os cinqüenta e seis (56) artigos publicados, quatro (4) eram relacionados à Etnomatemática. O último artigo analisado foi publicado na *Zetetiké* Vol.17, n. 32, de 2009. Em Z9, os autores analisaram práticas discursivas relacionadas ao ensino de matemática em áreas indígenas com a intenção de enunciar seus efeitos de verdade e de poder. Fazendo uma aproximação teórica à obra de Foucault, alertam que o ensino de matemática em escolas indígenas, mesmo que orientado pela perspectiva etnomatemática, tem engendrado alterações substanciais nas concepções indígenas de tempo e espaço, efeitos estes que se revelam contrários às propostas da Etnomatemática.

Nos números que se seguiram, até o final de 2011, não foram publicados outros trabalhos da área, embora, de certo modo, tenha sido detectada, na *Zetetike*, mais uma tênue marca no corpo da Etnomatemática.

Ocorre que, na mesma edição acima citada - *Zetetiké* Vol.17, n. 32, p.61-80, de 2009 – fui publicado o artigo Z?, que chamou atenção não pela presença, mas sim pela ausência do termo 'Etnomatemática', seja no resumo, nas palavras chave ou mesmo ao longo de todo o texto. No primeiro parágrafo deste trabalho é possível ler que ele apresenta resultados parciais da pesquisa narrada em Giongo (2008), que discute os processos de disciplinamento e os movimentos de resistência gestados numa instituição escolar enfocando seu currículo, em especial no que se refere à educação matemática. De fato, a referida pesquisa foi relatada na íntegra em Giongo (2008) que, em seu resumo, afirmou que os aportes teóricos da pesquisa foram "as teorizações do campo da Etnomatemática em seus entrecruzamentos com as teorizações pós-estruturalistas". Além disso, entre as palavras-chave do trabalho, consta o termo Etnomatemática. Estes aspectos, aliados às trajetórias acadêmicas das autoras, inequivocamente relacionadas à Etnomatemática, levam a inferir que este artigo seja uma publicação da área.

Entretanto, cabe lembrar que a questão que orientou a pesquisa que resultou neste artigo foi: "como a Etnomatemática tem-se apresentado nos trabalhos publicados em periódicos nacionais de Educação Matemática?". Neste caso, apesar de sua presença, a Etnomatemática não se mostrou de forma clara e evidente e, tendo em vista a questão de pesquisa, os eixos de análise e as características deste artigo, optei por não incluí-lo entre os trabalhos analisados (daí o fato de não lhe ter atribuído um número, mas tê-lo classificado como Z?). Contudo, uma imagem espelhada é importante não só pelo que mostra, mas também pelo que não revela, pois luz e sombra são complementares, visto que, como comenta Byington (1988), uma se faz da outra. Assim, Z? também nos aponta um resultado importante, permitindo-me afirmar que, por vezes, as marcas no corpo da Etnomatemática se mostram de forma velada, "com cores suavizadas", como sardas que se tornaram claras (este tipo de mancha, possui a tendência de escurecer durante o verão e clarear gradativamente, quando se evita exposição ao sol).

De todo modo, deste olhar para o espelho-*Zetetiké*, destaco, notadamente a partir das últimas publicações, a aproximação dos autores da área aos referenciais teóricos pós-estruturalistas, de modo a se instrumentalizar para análises mais contundentes acerca do papel das práticas matemáticas na constituição do sujeito como agente e objeto de poder.

O mesmo corpo, o mesmo espelho, o mesmo ângulo, outros reflexos

Eco (1989, p. 19) nos alerta que espelho pode ser considerado uma prótese, pois alcança trajetórias e ângulos que os olhos, nossos órgãos óticos, não seriam capazes de atingir. Essa prótese inverte, mas não distorce as imagens, refletindo, de maneira mecânica, as imagens que são apresentadas a ele. Entretanto, a impressão que as pessoas estabelecem diante do espelho sofre diversas interferências psicológicas e sociais. De modo semelhante, a leitura de um texto não reflete exatamente os mesmos sentidos para cada um dos leitores. Em vista disto, e do próprio ângulo escolhido pelos autores para mostrar seus trabalhos em Etnomatemática, as análises empreendidas por Varizo et al (2006) para os artigos publicados na revistas BOLEMA, no período de 1999 a 2004, no que se refere à Etnomatemática, revelou resultados bastante diversos daqueles aqui apontados, como avalio em Costa (2012b).

Os autores explicam que seu trabalho consistiu em um mapeamento elaborado a partir do uso de onze categorias, a saber: Aspectos Filosóficos, Aspectos Psicológicos, Aspectos Históricos, Propostas de Ensino, Formação de Professores, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Tecnologia Educacional, Linguagem Matemática, Avaliação e 'Miscelânea'. É verdade que qualquer categorização pode ser problemática, por exemplo, há que se supor que a categoria "Propostas de Ensino", fatalmente, seja amparada por pressupostos que advém de alguma das outras categorias. Entretanto, no momento, cabe enfatizar como ocorreu a classificação dos trabalhos na categoria Etnomatemática. Neste sentido, os autores firmam que:

> Da categoria **Etnomatemática** fazem parte artigos que se enquadram na definição de D'Ambrósio (2001, p.9): "Etnomatemática é a matemática praticada por grupos culturais, tais como comunidades urbanas e rurais, grupo de trabalhadores, classes profissionais, sociedades indígenas, e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns aos grupos". (Varizo et al, 2006, p. 8)

A partir dessa consideração, Varizo e os demais autores deste trabalho detectaram que no BOLEMA, entre 1999 a 2004, foram publicados apenas dois (02) trabalhos de Etnomatemática. Contrariamente, nas análises efetuadas nesta pesquisa, no mesmo período, no BOLEMA, foram detectados sete (07) artigos – B5 a B11.

Sob o meu ponto de vista, resultados tão diversos indicam que, por vezes, a Etnomatemática tem sido extirpada de algumas das suas marcas de vivência, sobretudo quando é compreendida somente como a matemática praticada por grupos culturais específicos, tais como grupo de trabalhadores, classes profissionais, sociedades indígenas, comunidades urbanas e rurais, dentre outras. Conclui-se que ainda existem dificuldades para que o 'corpo da etnomatemática' seja reconhecido de forma integrada à sua alma, o que anuncia a complexidade e os desafios que se colocam para aqueles que se dedicam a pesquisas na área.

Ainda assim, cabe dizer que considerei como sendo exato o número de trabalhos detectados por Varizo et al na *Zetetiké* entre 1999 e 2004.

A Etnomatemática, os espelhos e a realidade

Na pesquisa que tenho realizado a partir da análise de periódicos brasileiros que se dedicam à Educação Matemática, a proposta tem sido perceber e descrever as produções bibliográficas da Etnomatemática como um acontecimento histórico. Até o momento foram analisados o Bolema e a *Zetetike* e, ao fazê-lo, utilizei a metáfora do 'olhar no espelho'. Assim, o Bolema, enquanto espelho no qual foram observadas três diferentes imagens □ relacionadas à divisão temporal: 1985 a 1995, 1996 a 2006 e 2007 a 2011 □ e a *Zetetiké* – cujas imagens captaram os reflexos da etnomatemática em dois momentos - 1993 a 2003 e 2004 a 2011, revelaram como o corpo da Etnomatemática vem se (re)definindo:

a) Os pesquisadores da área têm voltado sua atenção para temas diversos □ variando a ênfase em torno questões sobre: i) a conceituação e a evolução da Etnomatemática, ii) os processos de validação e divulgação de saberes, iii) a formação de professores, o currículo e a ação pedagógica, iv) os conhecimentos etnomatemáticos gerados nas/das diferentes práticas sociais, v) a análise de práticas discursivas e não discursivas tendo como foco as relações de poder, dentre outros □ e, em face disto, muitas informações empíricas foram disponibilizadas e referenciais teóricos consideráveis foram desenvolvidos;
b) Se, inicialmente, os ensaios ocorriam em maior número, ao longo do tempo, os pesquisadores passaram a utilizar-se de diferentes gêneros textuais, tais como textos dissertativos, relatos de experiência e diálogos argumentativos;
c) Nos primeiros anos das publicações analisadas, os pesquisadores estavam relacionados quase que exclusivamente a duas instituições e a grupos de pesquisa com sede na região sudeste do País. Observa-se que, ao longo do tempo, tem-se ampliado o número de instituições brasileiras que abrigam pesquisadores da área, assim como de regiões do País que congregam grupos de pesquisadores em Etnomatemática. Entretanto, os trabalhos ainda apontam uma pequena representatividade das regiões Centro-oeste e Norte.
d) Ao longo dos vinte e cinco anos do Bolema, Ubiratan D'Ambrosio tem sido uma referência inestimável para os pesquisadores na área, notadamente por meio de seus livros. Mas os pesquisadores etnomatemáticos brasileiros também usam, em grande proporção, periódicos, teses e dissertações como fontes de referência para a construção do quadro teórico-metodológico de suas análises e investigações científicas. Muitas dessas publicações são nacionais, mas, ainda assim, o quadro não revela tendências endógenas, visto que não há relevante desproporcionalidade no número de autores nacionais ou internacionais referenciados;
e) Ainda no que se refere aos aspectos teóricos, é possível destacar que, talvez pela própria natureza da Etnomatemática – área multifacetada, atravessada por dimensões culturais, históricas, sociais, linguísticas e outras –, a maioria dos artigos, além de trazer contribuições teóricas 'internas' para circunstanciar e sustentar o trabalho, fazem incursões em outros campos. Contudo, não foi detectada uma tendência de uso de publicações advindas da Etnofísica, Etno-astronomia, Etnomúsica, dentre outras;
f) Publicações de análises de produções da Etnomatemática realizadas por pesquisadores de outras áreas indiciam que as propostas da Etnomatemática podem não estar sendo compreendidas em todas as suas dimensões, sendo

limitada a investigações acerca da matemática praticada por grupos culturais específicos;

g) Apesar de ser grande o número de artigos publicados no Bolema e na *Zetetiké*, ele não tem acompanhado, ou espelhado, a produtividade da área em termos de dissertações, teses e outros trabalhos de pesquisa.

A partir dos resultados acima apontados, voltando-me para a metáfora do olhar no espelho e utilizando as palavras de Godoy (2010), trago a provocação: "Por que reter na memória a imagem recém-vivida, recém-percebida no espelho? Para que trazê-la e mantê-la na memória?"

E é também utilizando as palavras deste autor que respondo: "para trabalhar essa imagem dentro de si – espelho vivo –, digerindo, elaborando o que o espelho só foi capaz de mostrar e quiçá agravar" (Godoy, 2010).

Enquanto pesquisadora em Etnomatemática, compreendo que as imagens no espelho, isto é, as análises aqui efetuadas, nos mostram algo do que temos sido, auxiliando-nos a compor nossa auto-imagem. Mas pretendi, por meio desse registro, deste reflexo-memória, analisar nossa auto-imagem sem nos levar a uma identificação restritiva, mas sim convidar outros pesquisadores a criar novas possibilidades, não se deixando aprisionar pelas imagens refletidas.

Em vista disto, destaco que as possibilidades abertas por um devir histórico são muitas, mas somente uma se realizará e isto não ocorrerá como um caminho natural, mas sim como desdobramento dos acontecimentos que configuram esse campo de possibilidades. Tentando contribuir neste sentido, exponho também algumas sugestões que, ancoradas na ideia de que os periódicos científicos representam um papel importante para a (re)afirmação social, a consolidação de uma área e a elevação do seu nível de produção técnico-científica, refletindo-a como um espelho, apontam para: a) o fortalecimento (ou mesmo a criação) de grupos e redes de pesquisa notadamente nas regiões Norte e Centro-oeste do País; b) a necessidade de aprimorar a participação no cenário dos periódicos nacionais, consolidando uma política de publicação dos trabalhos em etnomatemática.

Finalmente, quero reafirmar que a continuidade deste trabalho representa um espelhamento sucessivo de imagens, uma composição que se dá por meio de reflexos e refrações que não somente representa a captura de uma história, mas que pode/deve gerar reflexões e mudanças que levem à constituição de novos rumos na história da Etnomatemática brasileira.

Referências

Byington, C. *Estrutura da Personalidade:* persona e sombra. São Paulo: Ática, 1988.

Conrado, A. L. *A pesquisa brasileira em Etnomatemática: desenvolvimento, perspectivas, desafios*. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

Costa, W. N. G. Um espelho para a Etnomatemática: os artigos da área em periódicos nacionais de Educação Matemática. *Revista Educação Matemática em Foco*. V.1 N1 (p.65-81) jan/jun 2012a.

Costa, W.N.G. Estrias, sardas e cores: a marca da maturidade da produção bibliográfica etnomatemática em periódicos nacionais. 2012. (Palestra proferida no CBEm4, Belém, novembro de 2012b).

Eco, Umberto. *Sobre os espelhos e outros ensaios*. Trad. Beatriz Borges. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

Fantinato, M.C.C. Balanço da produção acadêmica dos congressos brasileiros de Etnomatemática. 2012. (Palestra proferida no CBEm4, Belém, novembro de 2012).

Foucault, M. *Vigiar e punir*: história da violência nas prisões. Petrópolis: Vozes, 1997.

Giongo, Ieda Maria. *Disciplinamento e resistência dos corpos e dos saberes*: um estudo sobre a educação matemática da Escola Estadual Técnica Agrícola Guaporé. 2008. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo, 2008.

Godoy, Luciano Marcondes. Espelhos, reflexos, reflexões (Parte I). *J. psicanal.*, São Paulo, v. 43, n. 79, dez. 2010 . Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-58352010000200006&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 05 dez. 2012.

Rosa, João Guimarães. O Espelho. In: ROSA, João Guimarães. *João Guimarães Rosa: Ficção Completa*. Rio de Janeiro: Nova Aguilar, 1994.p.437-442. (Primeiras Estórias)

Sibilia, P. A desmaterialização do corpo: da alma (analógica) à informação (digital). *Comunicação, Mídia e Consumo*, São Paulo, v. 3, n.6, p. 105-119, 2006.

VARIZO, Z. C. M. ; GUIMARAES, D. J. ; GOMES, A. R. ; PROFIRIO, Alexandre Guilarducci ; MAGALHÃES, Ana Paula Almeida Saraiva ; ROCHA, L. P. ; MACHADO, Vânia Lúcia . As tendências da pesquisa em Educação matemática nos periódicos Zetetiké e BOLEMA no período de 1999-2004. In: *III Seminário Internacional de Educação Matemática*, 2006, Águas de Lindóia. III Seminário Internacional de Educação Matemática. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006. v. único.

Wanderleya Nara Gonçalves Costa. Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (1988), mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1997) e doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo (2007). É professor adjunto da Universidade Federal de Mato Grosso e tutora do Grupo PET Matemática da UFMT. Desenvolve pesquisa sobre os temas: formação de professores, etnomatematica, ensino de matemática e diferentes mídias, história da matemática. **wannara@ufmt.br**

ANEXO 1: Artigos publicados no Bolema

Trabalho	Bolema/Número /páginas	Título do artigo	Autor(es)
B 1	4, 1988, p.13-16.	Etnomatemática se ensina?	D'AMBROSIO, U.
B 2	5, 1988, p. 9-35	O homem também conhece o mundo de um ponto de vista matemático.	BORBA, M. C.
B 3	5, 1988, 47-56	De quantas maneiras é que se pode demonstrar o Teorema de Pitágoras	GERDES, P
B 4	7, 1991, p. 30-35	Por uma teoria da Etnomatemática	FERREIRA, E. S.
B 5	16, 2001, p. 12-28	Educação Matemática, Exclusão Social e Política do Conhecimento	KNIJNIK, G.

B 6	17, 2002, p. 1-17	Etnomatemática de uma Classe Profissional: Cirurgiões Cardiovasculares	SCHOCKEY,T. L.
B 7	17, 2002, p. 20-39	Educação Matemática e Contemporaneidade: Enfrentando Discursos Pós-modernos	CLARETO, S.M.
B 8	17, 2002, p. 52-58.	Água e Óleo: Modelagem e Etnomatemática?	SCANDIUSSI, P.P.
B 9	17, 2002, p.71-82	O Desenvolvimento de um registro matemático Maori	BARTON, B.
B 10	19, 2003, p. 73-89	Matemática em Algumas Culturas da América do Sul: Uma Contribuição à Etnomatemática	D'AMORE, B.
B 11	20, 2003, p. 1-16	Vinho e Queijo: Etnomatemática e Modelagem	ROSA M. e OREY D. C.
B 12	23, 2005. p. 59-78	Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí em el Valle Del Mezquital	PEDRAZA, E.B
B 13	23, 2005. p.97-112	Biblioteca Digital de Etnomatemática: acesso mundial a fontes em etnomatemática	LANE, N. D.
B 14	24, 2005, p.95-109	Armadilha da Mesmice em Educação Matemática	D'AMBROSIO, U
B 15	25. 2006, p. 45-69.	Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceitos: que homem é tomado como medida de todos os outros?	COSTA, W. N. G. e DOMINGUES, K. C. M.
B 16	26, 2006, p. 19-48	Abordagens Atuais do Programa Etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica	ROSA, M. e OREY, D. C.
B 17	26, 2006, p. 49-75	La Etnomatemática en Colombia: un programa en construcción	ALVAREZ, H. B.
B 18	30. 2008, p.163-180	Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas:Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia	ARAÚJO, A. A.
B 19	32, 2009, p.1-28.	Práticas Sociais de Localização e Mapeamento: uma discussão curricular sobre o conceito de escala	LIMA, M. J. e MONTEIRO, A
B 20	32, 2009, p.211-227	Do Labor aos Mitos: uma nova linha no mapa das pesquisas em Etnomatemática	COSTA, W. N. G.
B 21	34, 2009, p. 237-262.	"Antes de dividir temos que somar": 'entre-vistando' foregrounds de estudantes indígenas	SKOVSMOSE, O. et al
B 22	34, 2009, p. 263-282	A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções	RODRIGUES, M., FERREIRA, R. e DOMITE, M. C. S.
B 23	36, 2010, p. 571 a 595	O Estudo da Realidade como Eixo da Formação Matemática dos Professores de Comunidades Rurais	MENDES, I. A.
B 24	37, 2010, p. 863-886	Entrelaçamentos e Dispersões de Enunciados no Discurso da Educação Matemática Escolar: um Estudo sobrea Importância de Trazer a "Realidade" do Aluno para as Aulas de Matemática	KNIJNIK, G. e DUARTE C. G.
B 25	37, 2010, p.1063-1080	Pedagogia Etnomatemática: do "par de cinco" às concepções do sistema de numeração decimal	BANDEIRA, F. A. e MOREY, B.

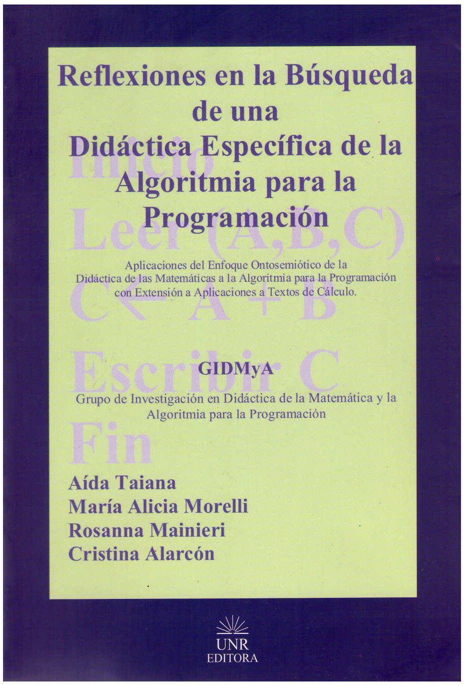
ANEXO 2: Artigos publicados na Zetetike

Trabalho	Volume/Número/páginas	*Título do artigo*	*Autor/a (autores)*
Z 1	*Vol. 4, n. 6, 1996, p.87-95*	O porquê da etnomatemática na educação indígena	COSTA, W. N. G. e BORBA, M. C.
Z 2	*Vol. 4, n. 6, 1996, p.97-106*	A pesquisa em etnomatemática e a educação indígena	BELLO, S. E. L.
Z 3	*Vol. 4, n. 6, 1996, p.107-122*	Apás kayabi e simetria	SCANDIUZZI, P. P.
Z 4	*Vol.6, n. 9, 1998. p.9-30*	Matemática, cultura e poder	FASHEH, M.
Z 5	*Vol. 12, n.22, 2004, p.9-32*	Algumas reflexões sobre a perspectiva educacional da Etnomatemática	MONTEIRO, A.
Z 6	*Vol. 13, n. 23, 2005, 121-136*	Tendências atuais da etnomatemática como um programa: rumo à ação pedagógica	ROSA, M. e OREY, D. C.
Z 7	*Vol. 14, n. 26, p.7-28, 2006*	De criação divina a instituição humana: as relações entre matemática e mitos	COSTA, W. N. G.
Z 8	*Vol. 14, n. 26, p.55-70, 2006*	Da cubagem de madeira às possibilidades de discussão em sala de aula	GRANDO, N. I. e MORETTI, M. T.
Z 9	*Vol.17, n. 32, 2009, p.81-100*	Uma análise de práticas discursivas e não discursivas sobre o ensino de matemática em contextos indígenas	COSTA, W. N. G. DOMINGUES, K. C. e ANDRADE, S
Z?	Vol.17, n. 32,2009, p.61-80	Educação matemática e currículo escolar: um estudo das matemáticas da escola estadual técnica agrícola Guaporé	KNIJNIK, G. e GIONGO, I.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, página 181-185
ISSN: 1815-0640

Libros



Reflexiones en la Búsqueda de una Didáctica Específica de la Algoritmia para la Programación.

Aplicaciones del Enfoque Ontosemiótico de la Didáctica de las Matemáticas a la Algoritmia para la Programación con Extensión a Aplicaciones a Textos de Cálculo.

Autoras: Aída Taiana, María Alicia Morelli, Rosanna Mainieri y Cristina Alarcón

Compiladora: Aída Taiana

ISBN: 978-950-673-898-3

Edición; Noviembre de 2011

UNR Editora

El libro cuenta con nueve capítulos y un anexo, además de las secciones relativas al prólogo, antecedentes de las coautoras y bibliografía.

En el Capítulo 1: **El Enfoque Ontosemiótico** (pp.23-40) Aída Taiana realiza un recorrido por esta línea teórica en Didáctica de la Matemática liderada por Juan Díaz Godino. Reconoce la evolución de la misma y conceptualiza a la Didáctica de la Matemática como campo de investigación, particularizando en nociones clave como situaciones-problema, sistemas de prácticas, obstáculos, significado institucional y personal de un objeto matemático, funciones semióticas, configuraciones y trayectorias didácticas, idoneidad didáctica. Hace explícita una vinculación del enfoque teórico en cuestión con el diseño de una Didáctica de la Algoritmia para la Programación, interpelando con cuestiones tales como:

a) ¿Cuál es la naturaleza de los objetos intervinientes en la Algoritmia para la Programación? (…)

b) ¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socio-culturales en el desarrollo de las ideas para la creación de Algoritmos para la Programación? (…)

c) ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos algorítmicos? (…)

d) Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos algorítmicos sus relaciones con otros objetos, las situaciones problemáticas en las

cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas? (…)
e) ¿Cuál es el vínculo entre los objetos que podríamos llamar objetos externos, es decir los que visualizamos a través de sus representaciones en los algoritmos que escribimos en el papel y sus respectivas representaciones internas? (…)
f) ¿Agotan las definiciones formales, el significado de estos objetos internos que acabamos de crear como conceptos? (pp.37-39).

En el Capítulo 2: **Tabla de definiciones de dato y variable extraídas de distintos textos de Programación** (pp.41-46) Aída Taiana analiza en detalle las definiciones en cuestión que realizan siete libros por ella citados: Dale y Weems (1993), Giusti (2001), Joyanes Aguilar (1996), Jensen y Wirth (1993), Brookshear (1995), Braunstein y Gioia (1995) y Tucker, Cupper, Bradley y Garnick (1994). Al respecto evidencia una diversidad considerable que puede conllevar dificultades en el aprendizaje de tales conceptos.

En el Capítulo 3: **Análisis de los significados de los vocablos algoritmo, dato y variable en Informática** (pp.47-60) Aída Taiana caracteriza a la noción de algoritmo como un concepto primitivo en Matemática que cobra una nueva dimensión con la aparición de las computadoras. A los términos dato y variable les reconoce un uso tanto en la Matemática como en la vida cotidiana. Dentro del algoritmo, cuando se refieren a una misma medida del mundo físico, se los nota con un mismo nombre. Recalca que el dato individualiza la representación de una información con que opera el procesador y que la variable identifica un espacio en memoria donde va a almacenarse el valor identificado con tal nombre. A su vez, distingue entre datos que son constantes y datos que varían. Aplica el análisis semiótico del Triángulo Epistemológico (logos, praxis y lenguaje) a algunos de los textos de Programación mencionados anteriormente para analizar la presencia en ellos de los conceptos de dato y variable. Se propone esclarecer el conflicto que emerge a partir de la confusión usual entre estas nociones, que considera pilares necesarios para construir algoritmos en Programación.

En el Capítulo 4: **Encuesta realizada a alumnos sobre Datos y Expresiones. Conflictos Semióticos. Configuración Epistémica del dato simple** (pp.61-68) María Alicia Morelli y Aída Taiana aplican una encuesta a 60 alumnos de Ingeniería que acaban de aprobar el examen final de la materia Informática. A partir de las definiciones de expresiones y dato, y de un algoritmo para calcular un promedio de tres notas, les solicitan que reconozcan los datos y las expresiones en dicho algoritmo. Encuentran resultados muy dispares que las motivan a definir una Configuración Epistémica más rica para el concepto dato simple, tanto en general como particularizado a datos numéricos, lógicos y carácter. Emplean para ello los elementos teóricos de Godino: problematización, algoritmización, argumentación, propiedades, definición y comunicación. A la construcción de tal Configuración Epistémica la consideran una primera herramienta para la modelización de una Didáctica Específica de la Algoritmia para la Programación.

En el Capítulo 5: **Estructuras de Repetición. Conceptos Emergentes** (pp.69-87), en el intento de minimizar los conflictos de numerosos problemas con los que suelen tropezar los alumnos, Aída Taiana aborda el concepto de estructuras de control y, en particular, las estructuras de repetición Repetir, Mientras y Para. Realiza un análisis ontosemiótico de las mismas en uno de los textos de Programación mencionados en el Capítulo 2 en el que identifica cada unidad semiótica global y sus respectivas subunidades, el elemento del triángulo epistemológico y las entidades emergentes primarias -de acuerdo con Godino y colaboradores- y mixtas -que la autora agrega-. También incorpora una modelización de los elementos intervinientes en tales estructuras y realiza un refinamiento del análisis en una de las unidades. Aquí también logra obtener elementos que permiten comenzar a esbozar un modelo de una Didáctica Específica de la Algoritmia para la Programación: las entidades encontradas en el análisis realizado que contribuyen a la fundamentación de los recursos teóricos necesarios, aspecto que considera primordial para desarrollar una buena lógica de pensamiento en los alumnos.

En el Capítulo 6: **Análisis de los procesos cognitivos en la generación de algoritmos. Experiencia con alumnos de 1er año de Ingeniería sobre Suma de Arreglos** (pp.89-123) Rosanna Mainieri y Aída Taiana exploran la comprensión por parte de los alumnos para llegar a la construcción de su propio conocimiento e indagan sobre los criterios que ayudan a determinar en qué medida un proceso de estudio o instrucción reúne ciertas características que permitan calificarlo como idóneo. Realizan una experiencia en la asignatura de primer año Algoritmos y Estructuras de Datos de Ingeniería en Sistemas con el objeto Arreglos de una dimensión, que es un dato estructurado o compuesto (no simple). Proponen almacenar 30 notas de una comisión para luego procesarlas. Primeramente elaboran una Configuración Epistémica del concepto. Luego detallan el significado institucional implementado y la trayectoria epistémica del proceso instruccional implementado. Analizan protocolos de resolución y diálogos con los alumnos que les permiten caracterizar los sus significados personales y, en particular, comparan los que presentan conflictos semióticos.

Movilizadas por determinar procesos de enseñanza y aprendizaje para el tema índices carácter, dentro de arreglos, que sean acordes con los niveles de razonamiento y perfil de los estudiantes sin ir en desmedro de las exigencias y características de las instituciones donde se desarrolla, Cristina Alarcón y Aída Taiana analizan una clase expositiva con una propuesta de situación problema en el Capítulo 7: **Configuración Epistémica del Concepto Arreglos: Índices Carácter** (pp.125-134). Identifican las configuraciones epistémicas y componentes de la trayectoria epistémica de la clase del profesor así como las configuraciones cognitivas y protocolos de la trayectoria cognitiva de los alumnos.

En el Capítulo 8: **Evaluación** (pp.135-153) Aída Taiana y María Alicia Morelli, por un lado, reconocen que los conocimientos informáticos se producen cuando se logran generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios y complejos, y por otro lado, subrayan la importancia de la evaluación de la propia actividad como docentes. Presentan algunas preguntas que hacen a la buena evaluación del profesor y del alumno:

¿A qué nos referimos los docentes cuando hablamos de evaluación?
¿Qué nos interesa evaluar? ¿Por qué? (…)
¿Cómo evaluamos? (…)
¿Qué evaluamos en realidad? (…)
¿Estamos evaluando aquello que nos interesa evaluar? (…)
¿Los resultados de las evaluaciones de los protocolos de los alumnos se acercan a los resultados pretendidos? (…) (p.137).

En cuanto a la evaluación del alumno, identifican su configuración cognitiva para determinados objetos informáticos y proponen pautas de evaluación cualitativas para evaluarla. En la evaluación del profesor engloban tanto sus conocimientos vinculados con el tema como sus conocimientos didácticos. Referencian trabajos de Godino (2009), Hill, Ball y Shilling (2008) y Schoenfeld y Kilpatric (2008) para especificar tales conocimientos, en el marco de la Algoritmia para la Programación.

En el Capítulo 9: **Resultado de Encuestas a Profesores para su Evaluación como Profesionales de la Docencia en Informática** (pp.155-172) María Alicia Morelli y Aída Taiana se preguntan si algunas definiciones en textos de Programación son generadoras de conflictos semióticos potenciales. Acuden a las definiciones de expresiones y dato extraídas de un texto, coincidente con las empleadas en la encuesta a alumnos (Capítulo 4). Trabajan con 10 docentes a quienes les plantean el problema: *Ingresa por teclado las notas de tres parciales de un alumno. Calcula y muestra el promedio de dichas notas* (p.158). Presentan un posible algoritmo solución y les solicitan a los docentes que reconozcan en el mismo los datos y las expresiones. Además les plantean una vinculación entre datos de entrada y datos de salida, del mismo texto, para que decidan sobre la veracidad de la misma. Posteriormente presentan otros dos algoritmos solución del problema inicialmente planteado para que los docentes reconozcan en ellos datos de entrada, datos intermedios, datos de salida y resultados. Para ambas actividades realizan un análisis minucioso de las respuestas de los docentes y concluyen que las mismas permiten comprobar la variedad de conflictos epistémicos que generan las definiciones presentes en el texto empleado.

En el Anexo: **Talleres de Formación de Profesores. Trascendencia de las Trayectorias Epistémicas en Textos de Cálculo** (pp.173-202) Aída Taiana y María Alicia Morelli reconocen que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática están condicionados por gran diversidad de facetas y factores que complejizan su proceso instruccional. En el entramado de tal complejidad conciben al constructo Trayectoria Epistémica en el análisis de textos matemáticos como una herramienta potente para la formación inicial y permanente de profesores en Matemática. Se basan en pautas de análisis y valoración de la Idoneidad Didáctica, propuestas por Godino y colaboradores, en donde desglosan lo epistémico, cognitivo, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. Eligen el tema introducción a la definición de función para el desarrollo del taller y los participantes, distribuidos en grupos, trabajan con tres libros de texto (uno por grupo). Realizan un análisis ontosemiótico en detalle, tanto los participantes al taller como las autoras acerca de las producciones de los participantes. Realizan otra aplicación del enfoque ontosemiótico con el tema integral definida. Comparan dos textos de Cálculo de épocas muy dispares: Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1957) y Stewart (2002). Si bien ambos libros siguen una trayectoria semejante, se diferencian en los tres elementos del triángulo epistemológico: logos, praxis y lenguaje.

Es así que la obra de referencia honra su título, al aportar con reflexiones concretas a la búsqueda de una Didáctica Específica de la Algoritmia para la Programación.

Natalia Sgreccia.

Natalia Sgreccia es Profesora Adjunta en el área Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario y Becaria doctoral y posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Tiene los títulos de Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Magíster en Didácticas Específicas y Doctora en Ciencias de la Educación.

UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 187-196
ISSN: 1815-0640

Información

Actividades de la
FUNDACIÓN CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

A modo de recuerdo

La Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* parte de la tragedia (la muerte, en accidente de tráfico con 27 y 25 años, de los dos únicos hijos de Salvador Pérez y Aurora Estévez, profesores canarios con amplia trayectoria) y llega a la esperanza de un mundo mejor por medio de los necesarios caminos de la educación y la cultura. Fue aprobada el 24 de Febrero de 2006 con el nº 225 y es una "entidad sin fines de lucro" con el CIF-38837589.

Sus ingresos provienen de las aportaciones voluntarias de los socios y que puede ser utilizada como desgravación en el IRPF (Impuesto de la Renta de las Personas Físicas) en la declaración de Hacienda. Las frases de que "Con poco se puede hacer mucho", "Contigo sumar es multiplicar" y "Tu ayuda llega" son el mejor resumen de una actividad entusiasta y laboriosa: ni recibe ninguna ayuda, ni subvención oficial, ni tiene empleados, ni local social. Todo el trabajo los realizan las gentes de su Patronato de forma altruista. Si desea ser socio y colaborar con cualquier cantidad use la web, correos electrónicos o teléfonos. Su aportación será de gran ayuda,

Ayudas al estudio en Canarias

Sin duda ha sido el asunto principal de la Fundación en 2012. Ayudar, en la medida de sus posibilidades, a los alumnos/as de las Islas Canarias, viendo la crisis económica, los índices de paro y los menores recursos dedicados a la enseñanza pública. Por ello, para el curso 2012-2013, el número de ayudas ha llegado a un total de 72, repartidas en 5 islas y con un presupuesto de 19 400 euros.

El reparto se hizo en proporción a las solicitudes presentadas y que fueron 397. A la isla de Tenerife le correspondieron 45, La Palma con 12, Gran Canaria con 11, Lanzarote con 3 y El Hierro con 1. La cantidad de dinero se ha multiplicado por 3 (de 6000 a 19 400) y el número de ayudas concedidas se ha multiplicado por 5 (de 15 a 72). El total, por niveles, fue el siguiente: Bachillerato (1º y 2º) con 49; Ciclo medio, 13; Ciclo superior, 2; Universidad, 6 y casos especiales, 2. Total, 72 ayudas cuando el curso pasado fueron 15 y pasó de los 6000 euros a los 19 400. La mayoría de las solicitudes reunían las condiciones de la convocatoria: dificultades económicas y buena trayectoria académica y la comisión encargada de la selección informó al Patronato de la Fundación de la gran cantidad de situaciones de extrema necesidad que no pudieron ser atendidas. Hay que resaltar que la Fundación no recibe ayuda de nadie: ni subvenciones ni ayudas oficiales, Vive solo de las aportaciones voluntarias de los socios.

Portada del tríptico informativo. Diciembre de 2013

Nuevo proyecto en Perú para 2013

Por medio de *Asinky Perú* (Sonríe Perú), institución sin fines de lucro receptora de las donaciones para la mejora de la calidad de vida de personas en extrema pobreza, y con cuya presidenta, Flor de María Basauri Rojas, nos hemos entrevistado personalmente, estamos en el momento final de un ilusionado proyecto en el lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32 682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, la capital de Perú.

Incacocha. Perú

Se trata de la construcción de un Pabellón Escolar con un aula para 30 alumnos de la sección de inicial, un comedor nuevo, escaleras, tres baños nuevos pues hasta ahora eran “unos pequeños cubículos de un metro sin intimidad” y la remodelación de la cocina, pues la actual era “tétrica, negra e insalubre”. El presupuesto, totalmente aportado por la Fundación, ha sido de 7500 euros. En el mes de diciembre de 2012 se está en los momentos finales de la construcción que será pronto inaugurada. Igualmente, en Perú, en las comunidades de Marcapuyán y Antijirca, en el mes de abril de 2012, se envió material escolar para 150 alumnos/as y por la cantidad de 1100 euros.

Ayudas al estudio en Paraguay

Es una novedosa experiencia que está abriendo caminos para las comunidades indígenas de Paraguay ya que por primera vez se ha concedido ayudas al estudio para estas gentes con el “Programa de Ayuda al Estudio Fundación Canaria *Carlos Salvador y Beatriz* para la Comunidad Educativa de la parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escuela Indígena Nº 5934”, en Lambaré, muy cerca de Asunción.

"Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011"

Poder Ejecutivo

Ministerio de Educación y Cultura

Resolución N° 37134

POR LA CUAL SE APRUEBA EL MANUAL DE PROCEDIMIENTOS DE SELECCIÓN, SEGUIMIENTO, MONITOREO Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA DE AYUDA AL ESTUDIO "FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRÍZ", PARA LA COMUNIDAD EDUCATIVA INDÍGENA DE CERRO POTY, ESCUELA BÁSICA N° 5.934 DE LOS PUEBLOS AVA GUARANÍ Y MBYA GUARANÍ.

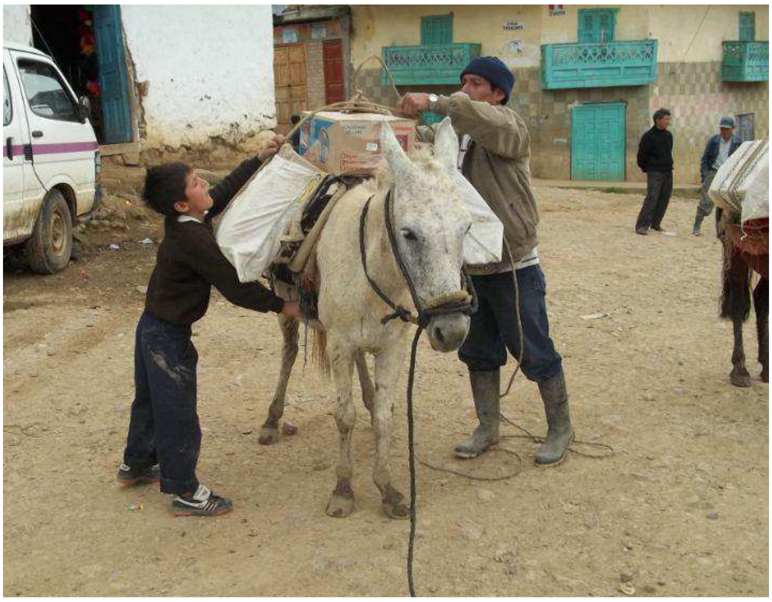
Asunción, 28 de setiembre de 2011

Resolución

La capital de Paraguay y el lugar donde se construyeron las primeras escuelas de la Fundación en septiembre de 2010. Debido a lo novedoso del programa, el Ministerio de Educación y Cultura de Paraguay tuvo que legislar un protocolo de actuación, Resolución Nº 37 134, firmado por el ministro el 28 de septiembre de 2011. Se ha destinado la cantidad de 7 245 euros distreibuida en 9 becas a alumnos y alumnas, entre los 13 y los 19 años de edad, por un periodo de tres años. Intervienen en este proyecto, además de la Fundación, la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministerio de Educación y Cultura y la Secretaría Nacional de la Niñez y la Adolescencia de Paraguay. En el mes de marzo de 2012 una alumna tuvo un hijo y la Fundación colaboró en su mantenimiento con ropas y alimentos.

Material escolar a 2800 metros de altura

En marzo de 2012 se ha enviado material escolar a 90 alumnos/as, de 1º a 6º grado, y en la cantidad de 1283 euros a la Institución Educativa Nº 10 469 de la comunidad de Conchud, distrito de Tacabamba, provincia de Chota, en la región de Cajamarca, en la zona andina del Norte de Perú, a 2486 metros de altitud. La entrega se ha hecho por medio de dos profesores peruanos con un decidido gesto de solidaridad y cooperación.



Material escolar para Conchud

Por carreteras intransitables, caminos de herradura y pistas llenas de barro llegaron al lugar después de muchas horas de un recorrido agotador solo paliado por la entrega de un paquete individual a cada escolar y con frases que resumen la satisfacción de lo recibido. Nos dicen; “Es la primera vez que se acuerdan de nosotros en una comunidad lejana. Así valoramos aun más lo recibido”. Destacar la gran colaboración de los padres que pusieron sus caballerías a disposición para el traslado de 28 cajas y un paquete grande de material escolar nuevo. Las entregas de material escolar han llegado ya en más de 60 ocasiones con gran colaboración de los docentes y padres de cuatro países de América como Perú, Paraguay, Bolivia y Argentina.

Jornadas Médicas en Conchud (Perú)

Resaltar como novedoso en su programa la cita de una Jornadas Médicas en Perú, en la comunidad de Conchud, distrito de Tacabamba, provincia de Chota, en la región de Cajamarca, en la zona andina al Norte de Perú, a 2486 metros de altitud y a través de la colaboración altruista y solidaria del médico José Carlos Ventura Zorrilla y otros siete profesionales médicos, enfermeros y técnicos voluntarios.

El éxito de las Jornadas fue total, atendiendo a 127 pacientes. Además a cada uno de ellos se le entregó la medicina prescrita incluyendo un paquete de dos jabones, peine grande y dos champús. El presupuesto fue cercano a los 600 euros. Con la Fundación colaboró la Asociación de Antiguos Alumnos y Amigos de la Universidad de La Laguna que donó 250 euros conforme al acuerdo de su Asamblea General del 17 de febrero de 2012, de ofrecer "el 0,7%" de su previsión de ingresos por cuotas de sus asociados a actividades solidarias en el exterior.

El Dr. Ventura Zorrilla atiende a una niña

Fue un gran esfuerzo, pues para llegar a Conchud tardaron más de 16 horas en autobús, camioneta y caballos en algunos caminos de herradura.

Equipo de voluntarios de la Jornada Médica en Conchud

Hay mucha más información de la Fundación en la página web:
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
¡¡Aquí les esperamos!!

Actividades da la
FUNDAÇÃO CANARIA *CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ*

A modo de lembrança

A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz parte da tragédia (a morte, em acidente de tráfico com 27 e 25 anos, dos dois únicos filhos de Salvador Pérez e Aurora Estévez, professores canarios com ampla trajectória) e chega à esperança de um mundo melhor por médio dos necessários caminhos da educação e a cultura. Foi aproba o 24 de Fevereiro de 2006 com o nº 225 e é uma “entidade sem fins de lucro” com o CIF-38837589.

Seus rendimentos provem das contribuições voluntárias dos sócios e que pode ser utilizada como desgravación no IRPF (Imposto da Renda das Pessoas Físicas) na declaração de Fazenda. As frases de que “Com pouco pode-se fazer muito”, “Contigo somar é multiplicar” e “Tua ajuda chega” são o melhor resumem de uma actividade entusiasta e laboriosa: nem recebe nenhuma ajuda, nem subvención oficial, nem tem empregados, nem local social. Todo o trabalho os realizam as gentes de sua Patronato de forma altruísta. Se deseja ser sócio e colaborar com qualquer quantidade, use o site, correios electrónicos ou telefones. Sua contribuição será de grande ajuda,

Ajudas ao estudo em Canárias

Sem dúvida foi o assunto principal da Fundação em 2012. Ajudar, na medida de suas possibilidades, aos alunos/as das Ilhas Canárias, vendo a crise económica, os índices de desemprego e os menores recursos dedicados ao ensino público. Por isso, para o curso 2012-2013, o número de ajudas chegou a um total de 72, repartidas em 5 ilhas e com um orçamento de 19 400 euros.

A partilha fez-se em proporção às solicitações apresentadas e que foram 397. À ilha de Tenerife corresponderam-lhe 45, A Palma com 12, Grande Canaria com 11, Lanzarote com 3 e O Ferro com 1. A quantidade de dinheiro multiplicou-se por 3 (de 6000 a 19 400) e o número de ajudas concedidas multiplicou-se por 5 (de 15 a 72). O total, por níveis, foi o seguinte: Bachillerato (1º e 2º) com 49; Ciclo médio, 13; Ciclo superior, 2; Universidade, 6 e casos especiais, 2. Total, 72 ayudas cuando el curso pasado fueron 15 y pasó de los 6000 euros a los 19 400. Total, 72 ajudas quando o curso passado foram 15 e passou dos 6000 euros aos 19 400. A maioria das solicitações reuniam as condições da convocação: dificuldades económicas e boa trajectória académica e a comissão encarregada da selecção informou ao Patronato da Fundação da grande quantidade de situações de extremo necessidade que não puderam ser atendidas. Há que ressaltar que a Fundação não recebe ajuda de ninguém: nem subvenciones nem ajudas oficiais, Vive só das contribuições voluntárias dos sócios.

Portada do tríptico informativo. Dezembro de 2013

Novo projecto em Peru para 2013

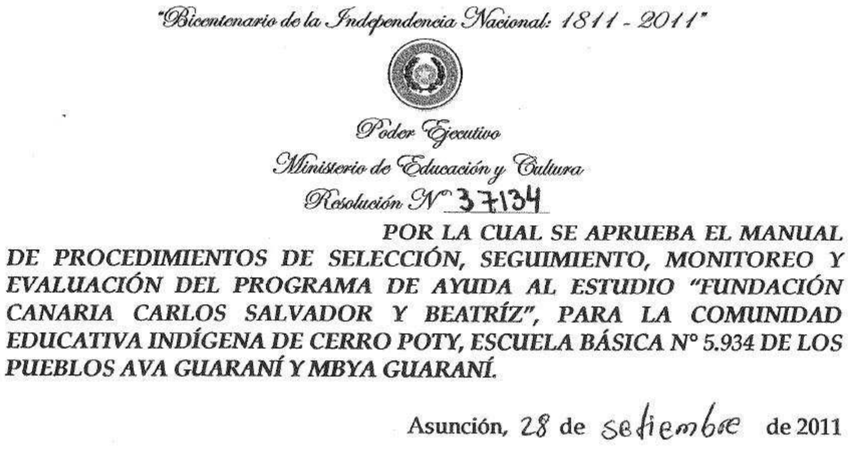
Por médio de Asinky Peru (Sorrri Peru), instituição sem fins de lucro receptora das doações para a melhora da qualidade de vida de pessoas em extrema pobreza, e com cuja presidenta, Flor de María Basauri Vermelhas, nos entrevistámos pessoalmente, estamos no momento final de um ilusionado projecto no lugar de Incacocha, Centro Educativo Nº 32 682, Distrito de Churabamba, Departamento de Huánuco, a 16 horas de Lima, a capital de Peru.

Incacocha. Perú

Trata-se da construção de um Pavilhão Escolar com um aula para 30 alunos da secção de inicial, um comedor novo, escadas, três baños novos pois até agora eram “uns pequenos cubículos de um metro sem intimidai” e a remodelación da cocina, pois a actual era “tétrica, negra e insalubre”. O orçamento, totalmente contribuído pela Fundação, foi de 7500 euros. No mês de dezembro de 2012 está-se nos momentos finais da construção que será cedo inaugurada. Igualmente, em Peru, nas comunidades de Marcapuyán e Antijirca, no mês de abril de 2012, enviou-se material escolar para 150 alunos/as e pela quantidade da 1100 euros.

Ajudas ao estudo em Paraguay

É uma inovadora experiência que está a abrir caminhos para as comunidades indígenas de Paraguai já que pela primeira vez se concedeu ajudas ao estudo para estas gentes com o “Programa de Ajuda ao Estudo Fundação Canaria *Carlos Salvador e Beatriz* para a Comunidade Educativa da parcialidad Avá guaraní de Cerro Poty, Escola Indígena Nº 5934”, em Lambaré, bem perto de Assunção.



“Bicentenario de la Independencia Nacional: 1811 - 2011”

Poder Ejecutivo

Ministerio de Educación y Cultura

Resolución Nº 37134

POR LA CUAL SE APRUEBA EL MANUAL DE PROCEDIMIENTOS DE SELECCIÓN, SEGUIMIENTO, MONITOREO Y EVALUACIÓN DEL PROGRAMA DE AYUDA AL ESTUDIO “FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRÍZ”, PARA LA COMUNIDAD EDUCATIVA INDÍGENA DE CERRO POTY, ESCUELA BÁSICA Nº 5.934 DE LOS PUEBLOS AVA GUARANÍ Y MBYA GUARANÍ.

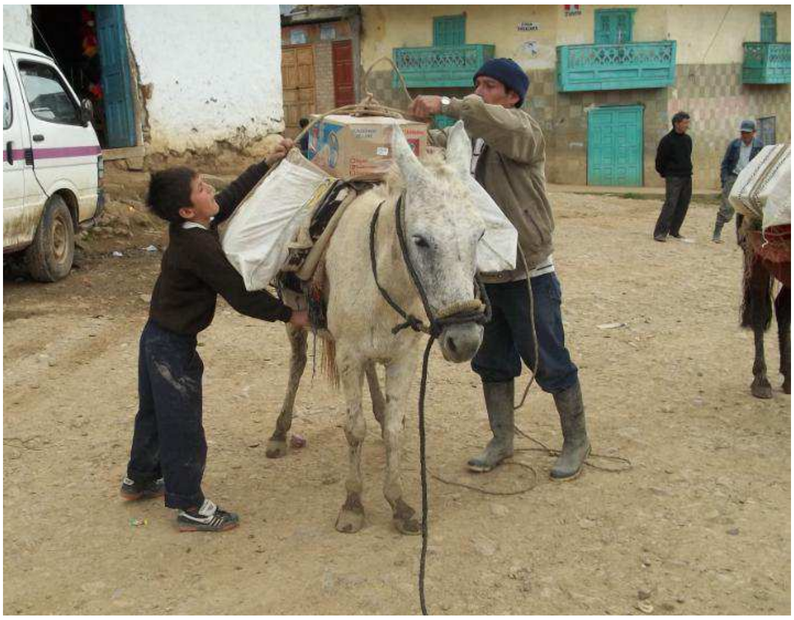
Asunción, 28 de setiembre de 2011

Resolução

A capital de Paraguai e o lugar onde se construíram as primeiras escolas da Fundação em setembro de 2010. Devido ao inovador do programa, o Ministério de Educação e Cultura de Paraguai teve que legislar um protocolo de actuação, Resolução Nº 37 134, assinado pelo ministro o 28 de setembro de 2011. Destinou-se a quantidade de 7 245 euros distribuída em 9 bolsas a alunos e alunas, entre os 13 e os 19 anos de idade, por um período de três anos. Intervêm neste projecto, além da Fundação, a Organização de Estados Iberoamericanos (OEI), Ministério de Educação e Cultura e a Secretaria Nacional da Niñez e a Adolescencia de Paraguai. No mês de março de 2012 uma aluna teve um filho e a Fundação colaborou em sua manutenção com roupas e alimentos.

Material escolar a 2800 metros de altura

Em março de 2012 enviou-se material escolar a 90 alunos/as, de 1º a 6º grau, e na quantidade de 1283 euros à Instituição Educativa Nº 10 469 da comunidade de Conchud, distrito de Tacabamba, província de Chota, na região de Cajamarca, na zona andina do Norte de Peru, a 2486 metros de altitude. A entrega fez-se por médio de dois professores peruanos com um decidido gesto de solidariedade e cooperação.



Material escolar para Conchud

Por estradas intransitables, caminhos de herradura e pistas cheias de varro chegaram ao lugar após muitas horas de um percurso esgotador sozinho paliado pela entrega de um pacote individual à cada escolar e com frases que resumem a satisfação do recebido. Dizem-nos; "É a primeira vez que se lembram de nós numa comunidade longínqua. Assim valorizamos ainda mais o recebido". Destacar a grande colaboração dos pais que puseram seus caballerías a disposição para o translado de 28 caixas e um pacote grande de material escolar novo. As entregas de material escolar chegaram já em mais de 60 ocasiões com grande colaboração dos docentes e pais de quatro países de América como Peru, Paraguai, Bolívia e Argentina.

Jornadas Médicas em Conchud (Peru)

Ressaltar como inovador em seu programa a cita de uma Jornadas Médicas em Peru, na comunidade de Conchud, distrito de Tacabamba, província de Chota, na região de Cajamarca, na zona andina ao Norte de Peru, a 2486 metros de altitude e através da colaboração altruísta e solidaria do médico José Carlos Ventura Zorrilla e outros sete profissionais médicos, enfermeiros e técnicos voluntários.

O sucesso das Jornadas foi total, atendendo a 127 pacientes. Ademais à cada um deles se lhe entregou a medicina prescrita incluindo um pacote de dois jabones, peine grande e dois champús. O orçamento foi próximo aos 600 euros. Com a Fundação colaborou a Associação de Antigos Alunos e Amigos da Universidade da Laguna que doou 250 euros conforme ao acordo de sua Assembleia Geral do 17 de fevereiro de 2012, de oferecer "o 0,7%" de sua previsão de rendimentos por quotas de seus sócios a actividades solidarias no exterior.

O Dr. Ventura Zorrilla atende a uma menina

Foi um grande esforço, pois para chegar a Conchud demoraram mais de 16 horas em ónibus, camioneta e cavalos em alguns caminhos de herradura.

Equipa de voluntários da Jornada Médica em Conchud

Há muita mais informação da Fundação na página site:
www.carlossalvadorybeatrizfundacion.com
¡¡ Aqui esperamos-lhes!!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 197-198
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2013

III Taller Internacional la Matemática, la Informática y la Física en el siglo XXI (FIMAT XXI)

Lugar: Ciudad de Holguín. Cuba.
Convoca: Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la luz y Caballero
Fecha: 27 al29 de marzo de 2013.
Información: **http://www.ucp.ho.rimed.cu/fitmatxxi/**

4º congreso internacional sobre la Teoría antropológica de lo didáctico CITAD-4

Lugar: Toulouse, Francia.
Convoca: Grupo de investigación en Teoría antropológica de lo didáctico
Fecha: 21 al 26 de abril de 2013.
Información: **http://www.atd-tad.org/**

XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.
Organiza: Sociedad Balear de Matemática (SBM)
Lugar: Palma, España.
Fecha: 2 al 5 de julio de 2013.
Información: **http://xvi.jaem.es/**

27° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 27)
Lugar: Buenos Aires. Argentina
Convoca: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Fecha: 15 al 19 deJulio de 2013
Información: **www.clame.org.mx**

Del 16 al 20 de septiembre en Montevideo. Uruguay

www.cibem7.semur.edu.uy

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ECME—14

Convocan: Asociación Colombiana de Matemática Educativa (ASOCOLME) y Universidad de Atlántico, Barranquilla..
Lugar: Ciudad de Barranquilla, Colombia.
Fecha: 9 al 11 de octubre de 2013.
Información: **www.asocolme.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, página 199-200
ISSN: 1815-0640

Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@gmail.com**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

Para libro:
Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

Para artículo de revista:

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Para artículo de revista electrónica o información en Internet:

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a revistaunion@gmail.com