UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
NÚMERO 38 – JUNIO DE 2014

# ÍNDICE

CRÉDITOS Pág. 3
EDITORIAL Pág. 5

FIRMA INVITADA: SIXTO ROMERO SÁNCHEZ

BREVE RESEÑA Pág. 7

AGUJEROS NEGROS NUMÉRICOS Y OTRAS JOYITAS MATEMÁTICAS COMO HERRAMIENTAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (RDP´S) Pág. 9

ARTÍCULOS

PROPUESTA DIDÁCTICA CON ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS
JESÚS CERDA QUINTERO, MARÍA FERNÁNDEZ HAWRYLAK, JESÚS MENESES VILLAGRÁ Pág. 33

CONHECIMENTOS REVELADOS NAS NARRATIVAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE O USO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM
CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR, RENATA ERCÍLIA MENDES NIFOCI Pág. 51

ERRORES, ACTITUD Y DESEMPEÑO MATEMÁTICO DEL INGRESANTE UNIVERSITARIO
GRACIELA M. DODERA, GUSTAVO BENDER, ESTER A. BURRONI, MARÍA DEL PILAR LÁZARO Pág. 69

EN BÚSQUEDA DE UN PERFIL ACADÉMICO-PROFESIONAL DEL PERSONAL DOCENTE DE MATEMÁTICAS
YURI MORALES, JENNIFER FONSECA, MARCELA GARCÍA Pág. 85

PROCEDIMIENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS PARA APRENDER *LÍMITE.* SU EVALUACIÓN
P. VILLALONGA, S. GONZÁLEZ, M. MARCILLA, S. MERCAU Y L. HOLGADO Pág. 103

SECCIONES FIJAS

DINAMIZACIÓN MATEMÁTICA: DEDUCCIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PRODUCTOS NOTABLES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL COMO RECURSO DIDÁCTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA
JULIO CESAR BARRETO GARCÍA Pág. 115

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS: PAPIROFLEXIA Y ELEMENTOS PARA CONSTRUIR INDICADORES SOBRE CREACIÓN DE PROBLEMAS
ULDARICO MALASPINA JURADO Pág. 135

TIC: GEOGEBRATUBE: EL SIGUIENTE NIVEL DE LA EXPERIENCIA GEOGEBRA
FABIÁN VITABAR Pág. 143

IDEAS: EL CONCEPTO DE LÍMITE DE CAUCHY, EL CINE, LA TV Y LA MECÁNICA NEWTONIANA
OSCAR A. GONZÁLEZ CHONG, MARISTER LOPETEGUI CANEL, SANDRA MADAN VALDÉS Pág. 149

HISTORIA SOCIAL DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN IBEROAMÉRICA: CINCUENTA AÑOS DE REFORMAS EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EN LOS NIVELES BÁSICO Y MEDIO DE EDUCACIÓN
ALFONSO SEGUNDO GÓMEZ MULETT Pág. 155

LIBROS: ELEMENTAL, WATSON.
RESEÑA: RAQUEL COGNIGNI Pág. 177

EDUCACIÓN EN LA RED: SITIOS-EDUCATIVOS.WIKISPACES.COM
RESEÑA: VALERIA CERDA Pág. 179

INFORMACIÓN

FUNDACIÓN CANARIA CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ: TRES NOTICIAS Pág. 181
CONVOCATORIA A LA DIRECCIÓN DE UNIÓN Pág. 187
CONVOCATORIAS Y EVENTOS Pág. 189
INSTRUCCIONES PARA PUBLICAR EN UNION Pág. 193

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 3-4

**Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática** es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM).** Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

## Evaluadores

Pilar Acosta Sosa
María Mercedes Aravena Díaz
Lorenzo J Blanco Nieto
Alicia Bruno
Natael Cabral
María Luz Callejo de la Vega
Matías Camacho Machín
Agustín Carrillo de Albornoz
Silvia Caronia
Eva Cid Castro
Carlos Correia de Sá
Cecilia Rita Crespo Crespo
Miguel Chaquiam
María Mercedes Colombo
Patricia Detzel
Dolores de la Coba
José Ángel Dorta Díaz
Rafael Escolano Vizcarra
Isabel Escudero Pérez
María Candelaria Espinel Febles
Alicia Fort
Carmen Galván Fernández
María Carmen García González
María Mercedes García Blanco
José María Gavilán Izquierdo
Margarita González Hernández
María Soledad González
Nelson Hein
Josefa Hernández Domínguez
Rosa Martinez
José Manuel Matos
José Muñoz Santonja
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Luiz Otavio.
Manuel Pazos Crespo
María Carmen Peñalva Martínez
Inés del Carmen Plasencia
María Encarnación Reyes Iglesias
Natahali Martín Rodríguez
María Elena Ruiz
Victoria Sánchez García
Leonor Santos
Maria de Lurdes Serrazina
Martín M. Socas Robayna
María Dolores Suescun Batista
Ana Tadea Aragón
Mónica Ester Villarreal
Antonino Viviano Di Stefano

## Diseño y maquetación

**Diseño web**: Daniel García Asensio

**Logotipo de Unión**: Eudaldo Lorenzo

## Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 5-6

# Editorial

*"La perfección de la belleza matemática
es tal que lo que es más bello y regular
resulta ser lo más útil y excelente"*

***D´Arcy Thompson.***

Estimados colegas y amigos:

Nos encontramos nuevamente con ustedes por medio de un nuevo número de la Revista UNION. Deseamos que los objetivos de esta publicación se cumplan, los mismos son: dar a conocer las experiencias y reflexiones teóricas de investigadores y profesores de matemática de todos los niveles educativos, promover la investigación en educación matemática y abrir el espacio para que los innovadores e investigadores en esta temática comuniquen sus experiencias, sus propuestas y reflexiones acerca de los diversos temas que la componen, fortalecer el intercambio de información sobre las actividades de todas las sociedades miembros de la FISEM.

En este volumen de UNION contamos como firma invitada con el Profesor Sixto Romero Sánchez, a quién le agradecemos su colaboración con el interesante artículo "*Agujeros negros numéricos y otras joyitas matemáticas como herramientas para la resolución de problemas (RdP´s*)".

Entre los restantes artículos podemos encontrar numerosas propuestas, de los más diversos temas y para los distintos niveles educativos, pero todos pensados para desarrollar actividades en el aula. También contamos, como siempre, con los artículos y reseñas correspondientes a las siete secciones fijas con las que cuenta la revista desde hace ya varios volúmenes.

No nos podemos despedir hasta el próximo volumen, sin antes agradecer enormemente a todos los docentes que nos acompañan y son quienes hacen posible esta nueva edición.

Un abrazo fraternal.

**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.**
**Directoras**

# Editorial

*"A perfección da beleza matemática*
*é tal que o que é mais belo e regular*
*resulta ser o mais útil e excelente".*
***D´Arcy Thompson.***

Estimados colegas e amigos*:*

Encontramos-nos novamente com vocês por médio de um novo número da Revista UNION. Desejamos que os objectivos desta publicação se cumpram, os mesmos são: dar a conhecer as experiências e reflexões teóricas de pesquisadores e professores de matemática de todos os níveis educativos, promover a investigação em educação matemática e abrir o espaço para que os inovadores e pesquisadores nesta temática comuniquem suas experiências, suas propostas e reflexões a respeito dos diversos temas que a compõem, fortalecer o intercâmbio de informação sobre as actividades de todas as sociedades membros da FISEM.

Neste volume de UNION contamos como assina convidada com o Professor Sixto Romero Sánchez, a quem lhe agradecemos sua colaboração com o interessante artigo "Buracos negros numéricos e outras joyitas matemáticas como ferramentas para a resolução de problemas *(RdP´s*)".

Entre os restantes artigos podemos encontrar numerosas propostas, dos mais diversos temas e para os diferentes níveis educativos, mas todos pensados para desenvolver actividades no sala. Também contamos, como sempre, com os artigos e reseñas correspondentes às sete secções fixas com as que conta a revista desde faz já vários volumes.

Não nos podemos despedir até o próximo volume, sem dantes agradecer enormemente a todos os docentes que nos acompanham e são quem fazem possível esta nova edição.

Um abraço fraternal.

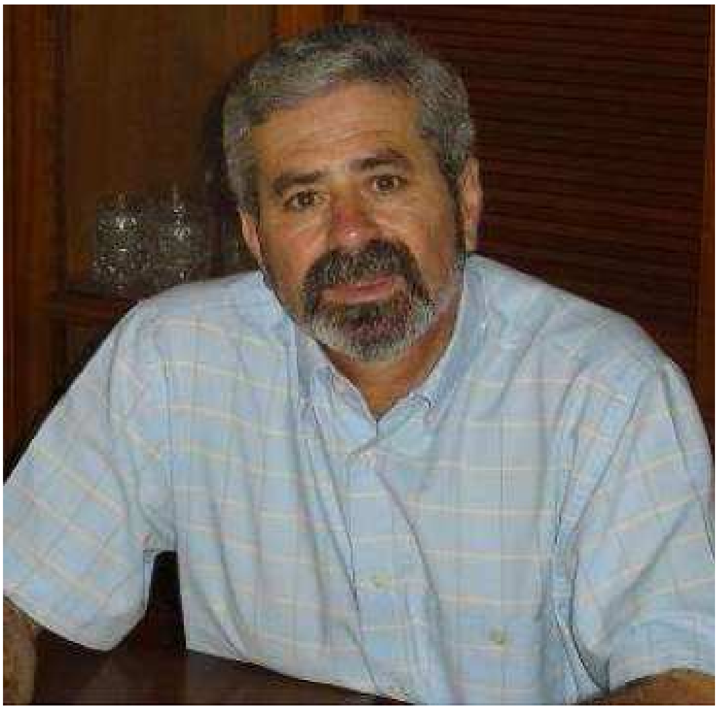
**Norma S. Cotic – Teresa C. Braicovich.**
**Directoras**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
página 7-8

# Firma Invitada: Sixto Romero Sánchez

## Breve Reseña



Nació en Huelva el 4 de Marzo de 1953. Es Licenciado y Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Con respecto a su actividad docente, desde el año 1975 hasta la actualidad, es Profesor en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Huelva (España), Profesor Titular y en la actualidad Catedrático de Escuela Universitaria en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva. También entre los años 1981 y1987 fue Profesor Agregado de Bachillerato de Matemáticas.

Actividad Investigadora: Responsable del Grupo de Investigación Modelización Matemática, Redes y Multimedia-Plan Andaluz de Investigación (FQM-350) con temática central de investigación en Tratamiento Digital de Imágenes (TDI) y Modelización Matemática en el tratamiento de imágenes geofísicas.

Actividad investigadora en relación con Didáctica de las Matemáticas: Ha sido director de la Revista SUMA sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Responsable de Universidad en el Consejo de Redacción de la Revista EPSILON. Ha participado de numerosos proyectos de Innovación Docente en el marco Universitario español en el contexto del EEES. Editor in Chief de la revista MSEL. Trabajó en Modelización matemática y en popularización de las Matemáticas. Fue integrante del Ciomité Scientifique et Internacional, REVUE DE L´INTERDISCIPLINARITÉ DIDACTIQUE.

Autor de numerosos Libros: III Jornadas Andaluzas sobre didáctica de las Matemáticas (Un encuentro con Iberoamérica). “La Matemática y la Radio”, “Análisis Matemático I”, “Jornadas sobre Teledetección y Geofísica Aplicadas a la Arqueología”, “Matemáticas en Escuelas Técnicas”, “Cálculo II”, “Matemáticas en Europa: diversas perspectivas”, “Cálculo en varias variables: Teoría y problemas”, “Ecuaciones Diferenciales con MAPLE y MATLAB”, “Cálculo en varias variables: Teoría y problemas con MAPLE y MATEMÁTICA” y “A challenge for mathematics education: To reconcile commonalities and differences. Un défi pour l’éducation mathématique:Réconcilier le commun et le diverse”.

Se pueden desatacar, entre otros, los siguientes méritos:

- Miembro del Centro Andaluz de Prospectiva dependiente de la Junta de Andalucía.
- Vicerrector de los Centros Universitarios de Huelva dependiendo de la Universidad de Sevilla.
- Vicerrector de Planificación e Infraestructura de la Universidad de Huelva.
- Vicerrector de Estudiantes y Extensión Universitaria DE LA universidad de Huelva.
- Presidente Provincial en Huelva de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
- Vicepresidente Primero Regional de la SAEM-Thales.
- Presidente Regional de la SAEM Thales.
- Presidente de la Academia Iberoamericana de La Rábida.
- Presidente y Miembro de Comités de Programas y Comités Organizadores de varios congresos Nacionales e Internacionales.
- Elegido en Polonia en 1991 miembro de la Commission International pour l´Enseignement et l´ Àmelioration des Mathématiques (CIEAEM).
- Jefe de Estudios de la Escuela Politécnica Superior de la Rábida.
- Coordinador General del Instituto de Ciencias de la Educación (ICE).
- Miembro del Consejo Editorial del Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Habitual Colaborador de páginas de Educación de Diarios escritos y digitales.
- Profesor Estalmat.
- Presidente de la Asociación ALCEO (Asociación de Lesión Cerebral Onubense)
- Vicepresidente de la Federación de Minusválidos Físicos de Huelva.
- Coordinador y participantes en varios proyectos nacionales e internacionales de Investigación.
- Autor y coautor de publicaciones nacionales e internacionales en torno al tema de investigación TRATAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES y Didáctica de las Matemáticas.
- Organizador de congresos nacionales e internacionales.
- Miembro del comité local y regional del año internacional de las matemáticas.
- Estancias en centros extranjeros de Europa e Iberoamérica (cortas y largas).
- Director de cursos de verano de la Universidad Internacional de Andalucía en su sede Iberoamericana de La Rábida

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 9-31

www.fisem.org/web/union

## Firma Invitada:

# Agujeros negros numéricos y otras joyitas matemáticas como herramientas para la resolución de problemas (RdP´s)

**Sixto Romero Sánchez**

"*Una mirada matemática de las cosas es siempre posible y que, como en una novela o una canción, pueda aparecer la emoción, el misterio y la belleza*"


| | |
|---|---|
| **Resumen** | Se puede pensar que es redundante mencionar la Resolución de Problemas (RdP´s) cuando se habla de hacer matemáticas. El proceso de creación matemática es un proceso basado en la resolución de problemas. Puede ser que este término sea muy fuerte pero sea creación o descubrimiento, la RdP´s es el proceso natural asociado. *¿Quién duda que la Matemática ha avanzado a través de la historia a partir del planteamiento y abordaje de problemas?* En este trabajo a partir de lo que denomino Joyitas Matemáticas podemos conseguir que el/la estudiante mejore sus actitudes y concepciones utilizando la RdP´s como vehículo del aprendizaje matemático |
| **Abstract** | You may think it is redundantly to mention Problem Solving when talking about doing mathematics. The process of mathematical creation is a process based on problem solving. It may be that this term is very strong but is creation or discovery, Problem Solving is the associated natural process. Who doubts that mathematics has advanced through history from the approach and addressing problems? In this work, from what I call "Joyitas Matemáticas" we can get him / the student to improve their attitudes and conceptions as using Problem Solving vehicle's mathematical learning |
| **Resumo** | Você pode pensar que é redundante falar de Resolução de Problemas (RdP´s) quando se fala em fazer matemática. O processo de criação matemática é um processo baseado na resolução de problemas. Pode ser que este termo é muito forte, mas é a criação ou descoberta, da RdP´s é o processo natural associado. Quem duvida que a matemática tem avançado ao longo da história da abordagem e resolução de problemas? Neste trabalho, a partir do que eu chamo de "Joyitas Matemáticas "que pode levá-lo / a aluno a melhorar suas atitudes e concepções como a utilização de aprendizagem matemática do veículo de RdP´s. |


## 1. La Resolucion de Problemas (RdP´s) como vehículo del aprendizaje matematico

### 1.1 . Introducción

Se puede pensar que es redundante mencionar la Resolución de Problemas (RdP´s) cuando se habla de hacer matemáticas. El proceso de creación matemática es un proceso basado en la resolución de problemas. Puede ser que este término fuese muy fuerte pero sea creación o descubrimiento, la RdP´s es el proceso natural asociado. ***¿Quién duda que la Matemática ha avanzado a través de la historia a partir del planteamiento y abordaje de problemas?*** Estos dos procesos que podemos resumir como resolución de problemas, han impulsado su enorme crecimiento y, lo que es más importante, caracterizan la labor del matemático como tal. Este puede ser un motivo más que suficiente para que la RdP´s esté presente en la enseñanza. Y no debe estar de forma anecdótica, sino como caracterizadora del proceso de formación matemática de los alumnos. Habrá ejercicios, en particular, y otras estrategias metodológicas, pero, en general, deberán provenir del planteamiento y enfrentamiento a problemas: será su resolución lo que motive la dedicación a otras tareas, incluyendo en éstas la presentación de conceptos. Ahora bien, para llevar esto a cabo, el profesor necesita ser consciente de lo que conlleva hacer RdP´s en el aula; en particular, ha de tener claro para qué lo hace (que puede conseguir, cuál es su finalidad) y en algunos elementos propios del proceso (fases y hallazgos) que puedes ayudar a los alumnos a progresar como resolutores.

### 1.2. Finalidad

La respuesta a la cuestión de la finalidad de la RdP´s es aludir a las recomendaciones de los diseños curriculares. Es una respuesta administrativa que todo matemático debe tener en cuenta y ponerlo en práctica desde la óptica de la Educación Matemática. Desde el punto de vista de las actitudes y concepciones el papel de la RdP´s como vehículo del aprendizaje matemático, entre otras, hay que destacar que:

en niveles sucesivos. En este proceso los alumnos crean su conocimiento matemático, pero además, en ocasiones, llegan a obtener resultados que no suelen aparecer en los manuales.

a) *Proporciona una visión integral e integrada de la Matemática.*

Los núcleos temáticos no son compartimentos estancos.

b) *Facilita la introducción significativa de nuevos conceptos.*

c) No debe emplearse la RdP´s exclusivamente a la hora de aplicar los conocimientos *Desarrolla una actitud abierta.*

No se puede pretender desarrollar una actitud abierta si las tareas matemáticas propuestas por el profesor se caracterizan por tener una única forma de abordarse, una única solución y una única manera de entender el enunciado.

d) *Establece diferentes etapas de dinamización en la evolución del conocimiento.*

Algunos problemas ponen de manifiesto que diferentes procedimientos pueden conducir a solucionar la misma situación, incluso pudiendo plantearse el mismo problema previamente adquiridos, sino como vehículo introductorio.

e) *Pone de relieve los procesos inductivos y deductivos de forma rigurosa.*

Los alumnos deben ser capaces de llevar a cabo procesos inductivos y deductivos según convengan. Importante, y por qué no riguroso, es que los alumnos entiendan qué significan rigor y cómo puede aplicarse.

f) *Muestra la utilidad de la Matemática en la vida.*

g) *"Desea" que el alumno no establezca el centro educativo como un mundo paralelo al real*.

h) *Desarrolla estrategias para cualquier ciudadano*

Las estrategias de descubrimiento empleadas en los problemas matemáticos son extensibles a los problemas de la vida real, por lo que los alumnos se convierten en individuos más competentes y capaces de enfrenarse a situaciones nuevas.

Los apartados anteriores conforman lo que serían las características deseables para la reflexión en cualquier alumno aunque existen más.

Por último, una característica que debe estar presente en toda persona:

i) *Favorece la capacidad reflexiva del alumno*

No sólo es importante que los alumnos se enfrenten a problemas, sino que sean capaces de discutir sus propios procesos de resolución.

### 1.3. Fases en la RdP´s

Sobre las diferentes fases de la RdP´s mucho se ha escrito; no obstante de manera general se entiende que cualquier resolutor puede viajar por momentos en los que trata de comprender el enunciado, otros en los que intenta elaborar un plan, que a continuación ejecuta, y por otros momentos en los que revisa lo que ha hecho o trata de extender o generalizar el problema. Es de todos conocido el modelo descriptivo de Polya cuando en 1945 establece las necesidades para aprender a resolver problemas. El principal fin del citado autor es el de ayudar a que el alumno adquiera la mayor experiencia en la tarea de la RdP´s, por lo que el enseñante debe ser el guía que en todo momento dejará asumir al alumno la parte de responsabilidad que le corresponde. Polya considerado el padre de la Heurística matemática, estableció las cuatro fases en la RdP´s:

a) ***Comprensión***: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

b) ***Planificación***: ¿Se ha hallado un problema semejante? ¿Existe alguno relacionado con éste?¿Se puede enunciar de otra forma? ¿Se han utilizado todos los recursos?

c) ***Ejecución***: ¿Hay corrección en los pasos iniciados?

d) ***Verificación***: examinar la solución obtenida y verificar el razonamiento y resultado cuando sea posible

Son muchas las etiquetas que se han colocado a las fases, hoy día existe cierto consenso en que, bajo una denominación u otra, son las anteriormente citadas. En cuanto a los hallazgos o heurísticos, Schoenfeld (1980) considera que "…*un hallazgo* es una *insinuación o sugerencia general o estrategia, independiente de cualquier tópico particular o materia de estudio, que ayuda al resolutor a aproximarse y comprender un problema y ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo…"* Con esta definición Carrillo (2001) propone la siguiente lista de heurísticos, clasificados en función de las diferentes fases por las que transita un resolutor cuando se enfrenta a un problema.

#### 1.3.1. Hallazgos para la fase de comprensión

- Imaginar mentalmente la situación. Releer el enunciado. Seleccionar el material adecuado. Disponer de un modelo manipulativo. Utilizar algún tipo de esquema gráfico (dibujar un diagrama**).**

- Ejemplificar
- Expresar en otros términos
- Formular con otras palabras la situación descrita en el enunciado.
- Introducir notación adecuada.

### 1.3.2. Hallazgos para la fase de planificación y exploración

- Simplificar
- Estimar
- Buscar regularidades con intención de generalizar
- Tantear aleatoria o sistemáticamente
- Considerar problemas equivalentes
- Buscar contraejemplos
- Asumir la solución.
- Planificar de forma jerárquica la solución
- Descomponer el problema
- Explorar problemas similares
- Conjeturar.

### 1.3.3. Hallazgos para la fase de ejecución

- Registrar todos los cálculos
- Resaltar los logros intermedios
- Actuar con orden y precisión
- Explicar el estado de la ejecución

### 1.3.4. Hallazgos para la fase de verificación

- Analizar la consistencia de la solución
- Expresar de otra forma la solución
- Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera.
- Analizar la consistencia del proceso.
  Describir esquemáticamente el trabajo. Analizar la corrección de cada paso. Evaluar la conveniencia de cada estrategia.
- Generalizar.

A modo de resumen: para resolver bien los problemas se debe poseer un conocimiento profundo de la materia, dominar una serie de estrategias y ser capaz de regular el proceso de resolución en cuanto a la aplicación de sus conocimientos y estrategias.

Se insiste mucho en que los estudiantes ***hagan***, lo que es muy importante, pero no debe olvidarse la necesidad y la conveniencia de que también reflexionen sobre lo que **hacen**. Si pretendemos mejorar la capacidad de nuestros alumnos ante la resolución de problemas, hemos de propiciar las ocasiones en las que reflexione sobre su proceder.

### 1.4. Dominios inexplorados

La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares, y concebida por diferentes estatus: enseñantes, pedagogos, autores de manuales escolares e investigadores en didáctica de las matemáticas. Se dirige a un público variado y puede ser entendida de varias formas.

Con este trabajo quiero poner de manifiesto como en la vida diaria podemos encontrar bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado.

Se propone como actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situación problemática. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. Los referentes que expondremos servirán para la motivación para el alumno y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Hay muchos dominios matemáticos casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras. Por ejemplo, estaría bien explorar y trabajar en:

- Teoría de Grafos y Optimización
- Teoría del Caos
- Topología
- Tratamiento de la Información
- Teoría de códigos y criptografía
- Modelos matemáticos
- Fractales, etc.

Muchos de estos dominios pueden ser planificados de manera que puedan transformarse en potentes generadores de importantes competencias, no sólo matemáticas, sino de carácter transversal.

En este sentido me permito hacer referencia al Proyecto Klein. La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos y la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI) es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Félix Klein (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un congreso internacional de educación matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996. En España, por ejemplo, la representación ante ICMI se estructura a través de una subcomisión del CEMAT, siguiendo el modelo IMU/ICMI.

Hace 102 años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, el

Profesor, Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito. Se pueden mencionar las múltiples traducciones (la más antigua en castellano que conocemos, la emprendida por el precursor del CSIC en 1927, que se encuentra en vías de digitalización en este momento) y ediciones de la misma –dos recientes: en castellano, la de la editorial Nivola, en el año 2006, o la de la popular editorial Dover, en 2004, en inglés. Pero, sobre todo, constituye una de esas raras ocasiones en las que un investigador de primera fila escribe una obra específicamente dirigida a facilitar a los profesores de secundaria una visión estimulante y viva sobre el contenido del currículo.

Félix Klein trataba de remedar, en su obra, la falta de conexión –«…*desde principios del siglo XIX…*»– entre la enseñanza de las matemáticas no universitarias y los resultados de la investigación. Pero han pasado más de cien años desde entonces y a lo largo del siglo XX las matemáticas han soportado una crisis de fundamentos, se han abierto, con el advenimiento de los computadores, a nuevos ámbitos de actividad, han logrado resolver problemas centenarios… Distintas ramas de las matemáticas, como la Estadística y la Investigación Operativa, han surgido (y otras han desaparecido en la práctica) en este periodo, así como nuevos e inimaginables –hace cien años– ámbitos de aplicación…

El *Proyecto Klein* es una iniciativa conjunta de IMU/ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro citado anteriormente.

Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. Se persigue, en definitiva, acercar al currículo escolar los múltiples –y en muchos casos, insospechados– ámbitos de presencia de las matemáticas en la sociedad actual, alcanzados gracias a la investigación desarrollada durante los últimos cien años y que, por tanto, no pudieron ser reflejados en la obra original de Klein. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos.

El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos. Entre otras acciones está prevista la organización de una serie de “Conferencias Klein” para facilitar la difusión del proyecto y la participación en el mismo de distintos colectivos.

Tras la aprobación del proyecto por los comités ejecutivos de ICMI e IMU en marzo y abril de 2004, respectivamente, se ha procedido a constituir ***La Comisión Klein.*** Es una comisión que ha de diseñar y llevar a término, en los próximos cuatro años, dicho proyecto, formada por ocho personas, cuatro propuestas por el comité ejecutivo ICMI, cuatro por el comité ejecutivo IMU, con un coordinador –W. Barton, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda– consensuado por ambas partes. La Comisión Klein está constituida en la actualidad por los profesores:

- Michèle Artigue, Universidad de Paris VII, Francia
- Ferdinando Arzarello, University de Turín, Italia
- Graeme Cohen, Universidad Tecnológica, Sydney, Australia
- William McCallum, Universidad de Arizona, USA
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España
- Christiane Rousseau, Universidad de Montreal, Canadá
- Hans-Georg Weigand, Universidad de Wurzburg, Alemania

Se estima que la comisión mantendrá un par de reuniones anuales, y que organizará dos o tres conferencias para recabar ideas y/o difundir la marcha de sus trabajos. Además la comisión distribuirá sus miembros en algunas subcomisiones creadas para atender diversos aspectos concretos (creación de una serie de DVD's, desarrollo de una wiki, etc.) del trabajo. Dichas subcomisiones deberán, establecer un calendario de reuniones. La primera reunión tuvo lugar en Madeira, en Octubre de 2009 y el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos de Castro Urdiales (Santander-España) organizó la segunda el 2 y 3 de junio de 2010, con el objetivo de que la comunidad matemática española se involucre en el proyecto y haga sugerencias explícitas que ayuden al equipo a responder las preguntas que se plantea, tales como "*¿Cuáles son los desarrollos matemáticos del Siglo XX que los profesores de secundaria deberían conocer, y cómo se les pueden hacer accesibles?*".

La Comisión aprobó la realización de un libro de cerca de 300 páginas, con el objetivo de inspirar a los profesores de secundaria en la tarea de acercar a sus estudiantes a un panorama más completo sobre el creciente y complejo papel de las matemáticas en el mundo de hoy. Ese libro estaría acompañado por diversos recursos audiovisuales y web.La duración estimada del proyecto es de cuatro años.

El libro no pretende ser enciclopédico ni la última palabra en cada campo, pero con independencia de la estructura que finalmente se adopte en cada uno de sus capítulos, el texto tratará de enfatizar las conexiones entre las diversas ramas de las matemáticas y ciertos temas genéricos (como el impacto de los ordenadores). No habrá un capítulo dedicado específicamente a la didáctica de las matemáticas, pero su presencia se hará notar implícitamente en muchas ocasiones.

La Comisión Klein quiere recabar la participación activa de todos aquellos que trabajan alrededor de las matemáticas, ya sean investigadores o docentes, en este proyecto que acaba de comenzar. Además de estar abierta a la recepción de comentarios por escrito, la Comisión planea organizar diversas "Conferencias Klein" en diversos lugares del mundo, donde espera recabar sugerencias y percibir la reacción de los asistentes a las mismas sobre los materiales, en fase de desarrollo y consulta, que presente. La redacción final del libro correrá a cargo de autores invitados, de probada capacidad narrativa y divulgadora. En este contexto, la Comisión quiere invitar ahora a enviar comentarios sobre la siguiente elección de títulos para los capítulos del libro:

- Introducción
- Capítulos temáticos
  - Aritmética
  - Lógica
  - Algebra y Estructuras
  - Geometría
  - Funciones y Análisis
  - Matemática Discreta y Algorítmica
  - Matemáticas de la Computación
  - Probabilidad y Estadística
- Capítulos misceláneos
  - Interdisciplinariedad (esto es, conexiones internas)
  - Las matemáticas como disciplina viva en la ciencia y la sociedad
  - ¿Cómo trabajan los matemáticos?

## 2. Modelización Matemática

En la presentación ulterior de varios ejemplos para diferentes niveles de enseñanza, cada uno de ellos ilustrativo de los diferentes niveles de complejidad que pueden aparecer en el proceso de matematización, se puede hacer de forma explícita el marco teórico que fundamenta globalmente cada uno de los pasos dados, los enfoques adoptados o los resultados obtenidos.

Modelar matemáticamente significa que con el desarrollo de los ejemplos se pone también de manifiesto las conexiones entre la resolución de problemas y el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas; en definitiva, conseguir el descubrimiento o la creación de modelos y teorías, es uno de los objetivos.

En cuanto al papel que asume el alumno o alumna en el proceso, es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, sólo hay una diferencia: el nivel de los conocimientos con los que se trabaja (los casos que se van a estudiar pueden corresponder a diferentes niveles de enseñanza: Secundaria, ESO, Bachillerato e incluso Universidad).

Soy consciente de la dificultad que entraña tratar este tema en determinados niveles de enseñanza pero me gustaría formular y fundamentar algunas ideas para justificar el concepto de modelización:

- *¿Qué aspectos del proceso de creación y/o descubrimiento en Matemáticas debemos focalizar para que al ser llevados al aula podamos conseguir los objetivos didácticos que nos hayamos planteado?*
- *¿Podemos en Secundaria o Bachillerato, con el alumnado de estas edades, vivir el proceso utilizando como marco teórico algunas ideas sobre el mismo junto con los modelos de RP?*

Por otra parte, a la hora de plantearnos llevar el tema al aula, debemos hacer explícitos los objetivos didácticos que nos vamos a plantear. En nuestro caso son los siguientes:

- Profundizar en los métodos propios de investigación en matemáticas: la particularización, la búsqueda de leyes generales, la construcción de modelos, la generalización, el uso de analogías, conjeturas y demostraciones.
- Utilizar modelos matemáticos para la mate matización de la realidad y la resolución de problemas, experimentando su validez y utilidad, criticando sus limitaciones, mejorándolos y comunicando sus resultados y conclusiones.
- Practicar la resolución de problemas como la actividad más genuina en cualquier campo específico de las matemáticas.
- Acercar a los alumnos y alumnas a los conocimientos matemáticos priorizando el planteamiento y resolución de retos, la búsqueda de modelos explicativos, la indagación y el descubrimiento.
- Propiciar que los alumnos/as vean el verdadero rostro de las matemáticas, asumiendo en muchos momentos el papel de matemático investigador.
- Preparar a nuestros estudiantes para la invención, incrementando el gusto por ella y *regando sus gérmenes inventivos.*
- Aumentar la cultura matemática de nuestros alumnos y alumnas, desechando creencias erróneas sobre la naturaleza del conocimiento y quehacer matemático y sus resultados.

Estos planteamientos didácticos deben ir acompañados de una reflexión personal sobre las principales ideas que pueden ayudar a situarnos en cada momento o a explicarnos, de manera coherente, el tipo de situaciones que están pasando o que nos vamos encontrando.

Conviene recordar los distintos niveles de resultados, que podemos obtener en el tratamiento de la información a lo largo del proceso:

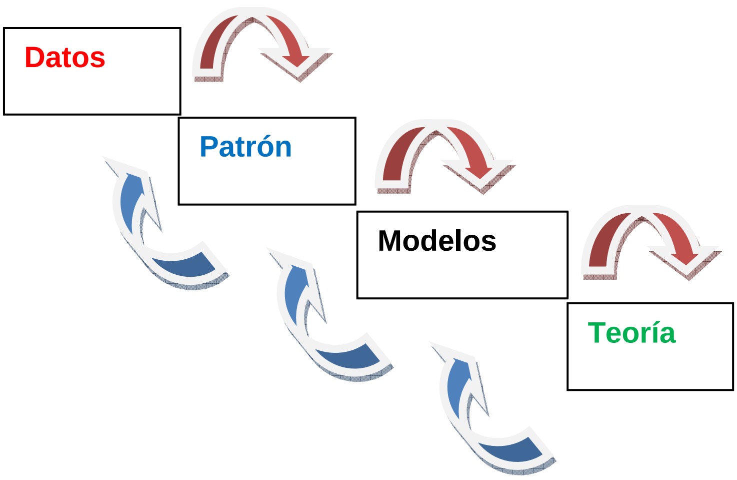



Figura 1. Tratamiento de la información

Si nos centramos en la construcción de modelos, nuestro marco de referencia sitúa esta tarea dentro del proceso de *matematización* de la realidad, caracterizado también por la puesta en práctica de estrategias de pensamiento útiles en cada fase.

## 3. Joyitas matemáticas

### 3.1. Joyita 1. En la RdP´s de Geometría: Problema de Dobögókó

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención. Con este problema de optimización de un caso de la vida real, presentamos el estudio y desarrollo de algunas formas geométricas y expresiones que aparecen en el espacio que configura el hábitat de unos pájaros en los jardines del Hotel Manreza en la provincia de Dobogókó en Hungría a unos 60 Kms. de Budapest como consecuencia de la observación directa del autor.

#### 3.1.1. Contextualización del problema

**3.1.1.1. Situación***.* Los jardines del Centro de Convenciones de Manresa (Dobogókó), un poblado de tilos, plátanos y una gran variedad de coníferas

**Figura 2. Jardines del Centro de Convención Manreza (Dobogökó)**

**3.1.1.2. Información.** Había carteles con información acerca de los hongos y los pájaros de ese entorno. Como una invitación a proteger a las aves se muestran al visitante algunos modelos de casitas que pueden ser construidas como refugios para aquéllas. En cada caso se incluye un croquis y las medidas para facilitar la construcción. La mayoría de los modelos tiene la forma de un paralelepípedo, salvo uno- particularmente interesante-que se asemeja a un prisma recto de base triangular.

**Figura 3. Hábitat para pájaros**

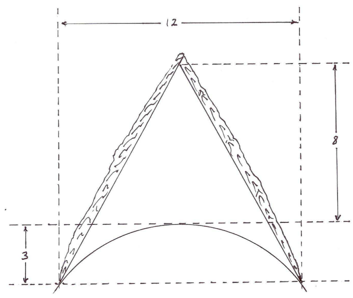



**Figura 4. Croquis del hábitat**

### 3.1.2. Cuestión: El problema de Dobogókó

Para la construcción de la casita- Ver Fig.3 y Fig.4- y como el refugio ha de adosarse a un tronco cilíndrico, con las medidas que aparecen en la Fig. 3, hallar el radio mínimo del tronco al que puede adherirse el refugio de modo que su altura sea de por lo menos de 8 centímetros.

### 3.1.3. Resolución. Sugerencias a las formas de resolución

Es importante que el alumno/a se ejercite en la toma de decisiones en función de criterios. Este es un problema que les puede proporcionar la oportunidad de decidir los criterios en función de los cuales un radio va a convenir más que otro. Respuestas basadas en que los pajaritos deben tener una vivienda amplia, o que el circulo de entrada sea suficiente estable para evitar que entren otros *inquilinos no deseables*. De cualquiera de las maneras debe tratarse de dirigir al alumno/a hacia criterios que puedan modelizarse matemáticamente, emergiendo el criterio de adosamiento al árbol (tronco cilíndrico). Esto debe dar motivos para, según el nivel de enseñanza donde nos encontremos, abordar el problema de diferentes maneras. En cualquier caso, una cuestión específica sería averiguar el radio mínimo con los datos que se han proporcionado.

También el alumno debe enfrentarse a este problema con la capacidad de discutir su propio proceso de resolución, intentando ver o descubrir las diferentes formas de resolución. Para ello debe tener claro las fases y los hallazgos citados ut-supra. En función de las diferentes fases por las que un alumno/a debe transitar en la RdP´s está claro que puede utilizar los hallazgos correspondientes. Haremos especial énfasis en algunos de éstos según sean en cada uno de los modelos de resolución que planteamos.

### Modelo 1. Utilización del teorema de Pitágoras

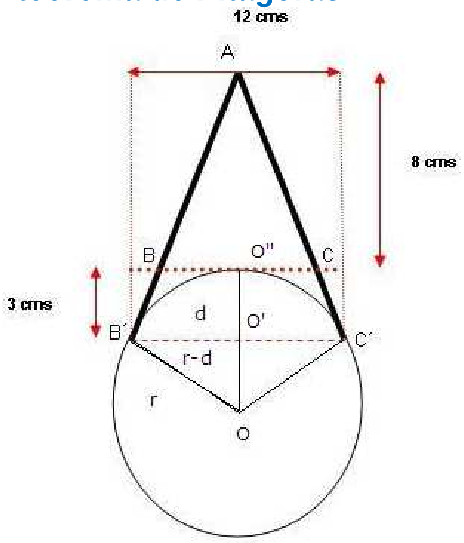



**Figura 5. Esquema disposición del hábitat**

Esta aproximación al problema trata de reunir el uso de incógnitas con varios temas geométricos y fórmulas del Teorema de Pitágoras.

En el triángulo OO'B', llamamos a B'C'= L. Como OO'= r-d y B'O'=L/2 se tiene

$$r^2 = (\frac{L}{2})^2 + (r-d)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{4} + r^2 + d^2 - 2rd \Rightarrow L^2 + 4d^2 - 8rd = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{L^2 + 4d^2}{8d}$$

Una primera restricción que determina el radio del tronco en que se sitúa la *casita* del croquis donde L=12 y d=3 se tiene que

$$r = \frac{12^2 + 4.3^2}{8.3} = \frac{144+36}{24} = \frac{180}{24} = 7.5$$

## Modelo 2. Utilización del Teorema de Thales

En desarrollos anteriores no ha aparecido el número 8 que se refleja en el croquis de la Fig. 4 de los paneles informativos del jardín. Surge, por tanto, la pregunta, ¿por qué aparece en el croquis junto al árbol el número 8 que representa la altura del triángulo ABC en la Fig. 6?

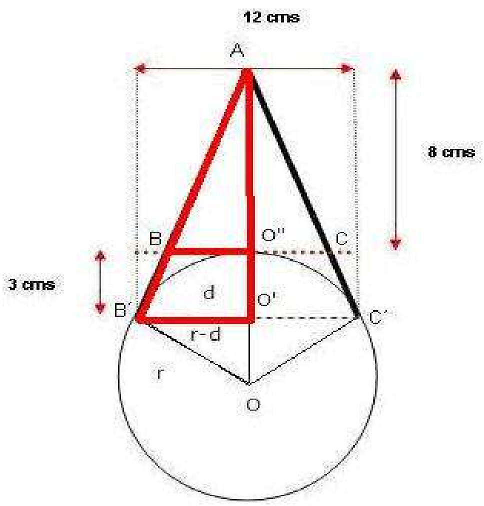



**Figura 6. Esquema disposición del hábitat**

Para dar respuesta a esta interesante cuestión e intentar justificar la presencia del número 8, apliquemos el teorema de Thales al triángulo AB'O' que aparece en la Fig.6. Con la identificación de los triángulos semejantes del croquis, se cumple que:

$$\frac{B'O'}{O'A} = \frac{BO''}{O''A}$$ , por lo que tenemos $B'O' = O'A(\frac{BO''}{O''A})$

Por lo tanto se obtiene la siguiente relación

$\frac{L/2}{b} = \frac{d+h}{h}$, siendo $h$ la altura del triángulo ABO'', y $b$ la mitad de la base del triángulo ABC. Tomando los datos que aparecen en el croquis para $L=12$, y por lo tanto $d=3$ como se ha demostrado ut-supra, se tiene la relación entre $h$ y $b$

$$h = \frac{3b}{6-b}$$

Al llegar a esta expresión en un intento de que el alumno/a pueda comprobar la consistencia de la heurística empleada puede ensayar dándole valores a $b$ y su correspondiente $h$.

a) Por ejemplo, dándole a $h=8$ se tiene que $b=\frac{48}{11}$. Este resultado debe ser consistente ya que aplicando el teorema de Thales en la Fig.7, para los valores $h=8$ y $d=3$ se tiene

$\frac{AB}{AB'}=\frac{8}{11} \Rightarrow \quad AB=AB'(\frac{8}{11})$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AB'O' se obtiene $AB'=\sqrt{36+121}=\sqrt{157}$ por lo que $AB=(\frac{8}{11})\sqrt{157}$. De aquí podemos calcular

$$b=BO''=\sqrt{(AB)^2-(AO'')^2}=\sqrt{\frac{157.64}{121}-64}=\sqrt{64(\frac{157}{121}-1)}=8\sqrt{\frac{157-121}{121}}=8\sqrt{\frac{36}{121}}=\frac{48}{11}$$

Utilizando el Teorema de Thales se ve que el heurístico de consistencia en la fase de verificación hace que el valor de la altura $h=8$ en el triángulo ABC no sea un valor elegido al azar.

## Modelo 3. Utilización del Cálculo Diferencial

Este problema podía ser tratado en nivel superior usando algunos conceptos de Cálculo Diferencial. De una manera genérica si trabajamos el proceso en 3D, y considerando a $r$ como una función de dos variables $L$ y $d$, se trata de una función escalar

$$r: R^2 \to R$$
$$(L,d) \to \frac{L^2+4d^2}{8d}$$

de dos variables reales definidas en todo $R^2$ excepto para $d=0$ ( ¡que justifica el hecho de la imposibilidad de construir una casita con un solo punto de tangencia con el árbol. ¡Se tendría una casita inestable!).

A partir de aquí podemos pensar en niveles superiores de enseñanza, por ejemplo en un primer curso de Universidad, y hacer ver a nuestros alumnos como a partir de un ejercicio sencillo de la vida real, caso u objeto, podemos llegar a introducirnos en estudio detallado de EXISTENCIA DE EXTREMOS (Máximos y mínimos) en CAMPOS ESCALARES:

a) Comprobación de los teoremas que permiten determinar si un punto crítico de un campo escalar es máximo, mínimo o punto de silla mediante una condición algebraica de la matriz jacobiana del campo escalar en el punto crítico.

b) Introducirnos en el Teorema de Taylor de segundo orden para campos escalares.

c) Deducción de criterios para la clasificación de los puntos críticos de campos escalares para funciones de varias variables, como el caso que nos ocupa a través de las formas cuadráticas y matriz Hessiana.

d) Utilización del método de los mínimos cuadrados como aplicación del cálculo de extremos relativos.

e) Existen ocasiones en las que interesa calcular los extremos relativos de una función escalar cuyo dominio ha sido restringido de alguna manera (¡puede ser nuestro caso: limitación del radio del cilindro (árbol)!). Tendríamos que proponer al alumno que utilice el método de los multiplicadores de Lagrange.

El modelo utilizado puede ser obtenido en tres dimensiones representando superficies cuyo estudio detallado sobrepasa el nivel de enseñanza secundaria.

### 3.1. JOYITA 2. En la RdP´s en la Aritmética de los números

La **teoría de números** es la rama de matemáticas puras que estudia las propiedades de los números, en particular los enteros, pero más en general, estudia las propiedades de los elementos de Dominios Enteros (Anillos conmutativos con elemento unitario y cancelación) así como diversos problemas derivados de su estudio. Contiene una cantidad considerable de problemas que podrían ser comprendidos por "no matemáticos". De forma más general, este campo estudia los problemas que surgen con el estudio de los números enteros. Tal como cita Jürgen Neukirch: *"La teoría de números ocupa entre las disciplinas matemáticas una posición idealizada análoga a aquella que ocupan las matemáticas mismas entre las otras ciencias.*"

Según los métodos empleados y las preguntas que se intentan contestar, la teoría de números ***se subdivide en diversas ramas:***

- Teoría elemental de números
- Teoría analítica de números
- Teoría de números aditiva
- Teoría algebraica de números
- Teoría geométrica de números
- Teoría combinatoria de números
- Teoría computacional de números

En la teoría elemental de números, se estudian los números enteros sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias. Son enunciados típicos el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler que lo extiende, el teorema chino del resto y la ley de reciprocidad cuadrática. En esta rama se investigan las propiedades de las funciones multiplicativas como la función de Möbius y la función φ de Euler; así como las sucesiones de números enteros como los factoriales y los números de Fibonacci.

Diversos cuestionamientos dentro de la teoría elemental de números parecen simples, pero requieren consideraciones muy profundas y nuevas aproximaciones, incluyendo las siguientes:

- Conjetura de Goldbach
- Conjetura de los números primos gemelos

- Último teorema de Fermat (demostrado en 1995)
- Hipótesis de Riemann sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, íntimamente conectada con el problema de la distribución de los números primos.

Lo importante, a nivel de secundaria y en todos los cursos, no son sólo las destrezas de cálculo y los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados para detectar posibles errores.

Presentemos algunos ejemplos que se pueden considerar como “joyitas” de naturaleza aritmética.

### 3.2.1. Agujeros negros numéricos

Fuera del campo de la Física, en Matemáticas algunos procesos repetitivos dan lugar a resultados que ya no varían en sucesivas iteraciones. Esto permite presentar dichos procesos como efectos de pseudomentalismo con números. Así como un agujero negro es un cuerpo con una gravedad tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz, también existen números que atraen a otros al efectuar ciertas operaciones.

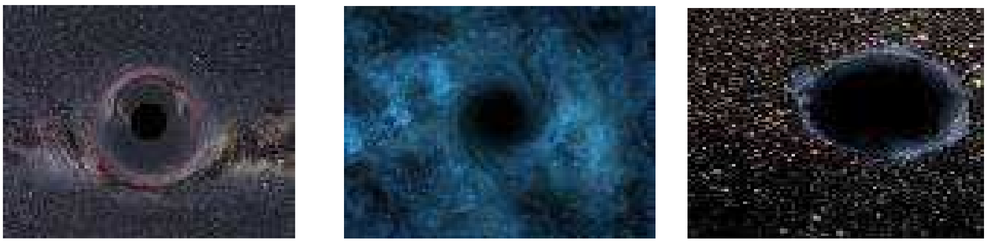


Figura 7. Agujeros negros

Los números son increíbles, tienen ciertas propiedades que nos asombran (o incluso que “nos engañan”), pero todo tiene una explicación.

#### 3.2.1.1. Un agujero negro el número 123

Otra cosa que tienen en común las matemáticas y el universo son los agujeros negros. En matemáticas un agujero negro sería un número que atrapa al resto de números sin que puedan escapar de él. Es el caso del número 123, que posee esa curiosa propiedad y vamos a ver por qué.

Voy a utilizar el fútbol como recurso didáctico para explicar el curioso número.

El Presidente del club de fútbol de mi ciudad, Huelva, al sur de España, Real Club Recreativo de Huelva, está preocupado por la baja afluencia de público al estadio denominado Nuevo Colombino, tras la trayectoria última de perder partidos de manera consecutiva.

Ha diseñado una estrategia para convencer a la gente para que vayan al campo: ***regalará la mitad de la recaudación*** del partido a uno de los aficionados que asistan al campo de fútbol.

El **sistema de sorteo** será el siguiente:

a) **Cada persona**, cuando entre en el estadio, elegirá **una cifra entre el 0 y el 9** (ambos incluidos), con la que se irá formando un número.
b) Así, si el primer espectador que entra en el estadio elige el **1**, el siguiente el **4**, el siguiente el **3**..., iremos formando el número:**143**... Este número tendrá tantas cifras como espectadores haya en el estadio.
c) Una vez que hayan entrado todos los aficionados, y tengamos ya el número completo, procederemos de la siguiente manera:

*Formaremos un nuevo número, cuyas **primeras cifras serán la cantidad de cifras pares** que contiene nuestro número, las **siguientes cifras serán la cantidad de cifras impares** que contiene el número, y **por último añadiremos el número total de cifras** (impares + pares).* Para fijar ideas veamos el siguiente ejemplo:

1). Escribamos un número cualquiera de la cantidad de cifras que sea,

**1324567347769568320184**

2). Contemos las cifras **pares**, las **impares** y el **total** de cifras y con estos 3 números formamos otro:

Éste caso concreto tiene 11 cifras **pares,** 11 **impares** y **22 cifras en total**. El nuevo número que se forma es 111**22**.

3). Contamos nuevamente las cifras **pares,** **impares** y **totales** de este número, obteniendo: **246.**

4). Se repite lo anterior y obtenemos 303.

5) Y así seguimos sucesivamente.

El premio consistente en la mitad de la recaudación se entregará a aquel aficionado cuyo número de butaca coincida con el número resultante de todo este proceso. (Todas las butacas del Colombino del 1 al 22.670). Con este sorteo, **el Presidente** consiguió durante unas jornadas que el estadio se volviese a llenar. Los aficionados estaban encantados con la posibilidad de llevarse a casa un estupendo premio. Pero poco a poco los asistentes han empezado a decrecer nuevamente:

Pues parece que los aficionados sólo volverán cuando el RECREATIVO DE HUELVA recupere el nivel deportivo de hace unos años. Porque está claro que el incentivo económico no ha bastado para recuperar el nivel de asistencia en el NUEVO COLOMBINO. Sobre todo cuando se ha dado a conocer el listado de los agraciados por el sorteo. Y es que todos los premios hasta la fecha han sido entregados al mismo espectador: El PRESIDENTE DE EL RECREATIVO DE HUELVA.

**¿Cómo es esto posible?**

**Veamos qué es lo que ocurre una vez que se ha llenado el estadio.**

Tenemos un número de 22.670 cifras que corresponde a todos los socios que han entrado:
27182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091**...........**

Hay distintas posibilidades, que pueden ser:

a) Que todos los espectadores hayan escogido una cifra impar: **02267022670**

b) Que haya menos **impares** que **pares**, por ejemplo: **13258941222670**

c) Que las cifras **pares** e **impares** sean iguales o muy parecidas: **113351133522670**

d) Que haya más **impares** que **pares**, por ejemplo: **857314097 22670**

e) Que todos hayan escogido una cifra **par**: **22670022670**

Así, vemos que el número que obtendremos después del primer proceso tendrá **entre 11 y 15 cifras**. En el caso de que este número tenga el mayor número de cifras posible, esto es, **15 cifras**, y siguiendo el mismo razonamiento, obtendremos tras el segundo proceso un número de **4** o **5 cifras**:

**01515, 11415**, **21315**, ..., **7815**, ..., **15015**

Nos ponemos nuevamente en el caso de que tenga el mayor número posible de cifras, en este caso, **5 cifras**. Aplicamos otra vez el procedimiento, y los posibles resultados ahora serán de **3 cifras**: **055**, **145**, **235**, **325**, **415**, **505**
Después de varias iteraciones, se llegará a un número de 3 cifras, que sólo puede ser **303** (si las 3 cifras son **pares**), 213 (si 2 son **pares** y una **impar**), **123** (si una cifra es **par** y 2 **impares)** o **033** (si las 3 cifras son impares).
En estos 4 casos al volver a hacer el cálculo se obtendrá inevitablemente… el 123.

**¡Qué, curiosamente coincide con el número de asiento**
**del Presidente del Recreativo de Huelva!**

### 3.2.2. JOYITA 3. Otro agujero negro el número curioso 6174

El número **6174** es conocido como la **Constante de Kaprekar** en honor de su descubridor el matemático indio Kaprekar. **Dattatreya Ramachandra Kaprekar** (1905- 1986) nació en Dahanu, cerca de Bombay. Se interesó por los números siendo muy pequeño. Desde 1930 hasta su jubilación en 1962, trabajó como profesor de escuela en Devlali, India. Kaprekar descubrió muchas propiedades interesantes en

**Figura 8. Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905-1986)**

Consideremos el número **6174**, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo también para construimos el menor número posible y restemos.

Obtenemos así: 7641-1467=6174 que es el número con el que empezamos.

Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos, 9954-4599=5355

Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355

5553-3555=1998.

Nada especial. Seguimos con 1998:

9981-1899=8082

8820-0288=8532

8532-2358=6174.

¡Otra vez el dichoso número!

Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas:

***¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?***

Las respuestas a estos dos interrogantes las comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.

A medida que el estudiante se introduzca en la RdP´s pueden surgir interrogantes como el siguiente:

*Si ello siempre ocurre, ¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174?*

Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174?

Las respuestas a estos interrogantes las dan las siguientes afirmaciones, que se demostrarán a continuación.

1. Siempre es posible llegar al 6174.
2. El número máximo de pasos es siete.
3. El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos.

A pesar de que el número de pasos necesarios para obtener el 6174 depende de la relación entre los dígitos, es bueno aclarar que a partir del primer paso se obtiene un número completamente determinado.

Después de resuelto este interesante problema, siguen otras preguntas como las siguientes:

¿Qué ocurre si el entero es de 2,3, 5, 6 o cualquier otra cantidad de dígitos?

¿Es decir, en estos otros casos qué entero juega el papel que cumple 6174?

¿Ocurre lo mismo si el número se escribe en cualquier otra base diferente de la base 10?

Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética.

Examinar qué sucede con otros números de distinta longitud arroja más misterio que luz al asunto:

a) Si se prueba con los números de dos dígitos no se llega nunca a un número fijo, sino a un bucle cíclico del tipo **09, 81, 63, 27, 45, 09**

b) Con tres dígitos se llega a **495**

c) Para cuatro dígitos el número es el misterioso **6174**

d) Para cinco dígitos, no hay número fijo, sino tres ciclos (además de distinta longitud)

e) Para seis dígitos, se puede llegar al **549945**, al **631764** o a un ciclo de siete números.

f) Para siete dígitos tampoco hay número fijo, sino un único ciclo de nueve números.

g) Para ocho y nueve hay otro par de números en cada caso.

h) Con diez dígitos se puede llegar a tres valores distintos: **6333176664, 9753086421** y **9975084201**, o entrar en cinco ciclos cortos.

### 3.3. JOYITA 4. Matemáticas y cordones

Al igual que la física o la química, lo cierto es que las matemáticas están por todas partes en nuestra vida diaria y hay muchas formas de perderles el miedo.

**¡Podemos empezar por atarnos los cordones de las zapatillas!**

Figura 9. Diferentes formas de amarrar los cordones en zapatillas

**¡No es una broma!** Hay muchas matemáticas tras el sistema más universal de sujeción para los zapatos. Al fin y al cabo, se trata de pasar un cordón por una serie de agujeros en distintas combinaciones**.**

***¿Cuántas hay? ¿Y cómo se calculan? ¿No es esto matemáticas?***

En un zapato medio con seis pares de ojales hay casi dos billones de formas distintas de hacer pasar un cordón a través de todos los ojales*.* Claro que en la práctica, a la hora de atarse unas zapatillas, no todas esas combinaciones son prácticas ni cómodas. Algunas de ellas:

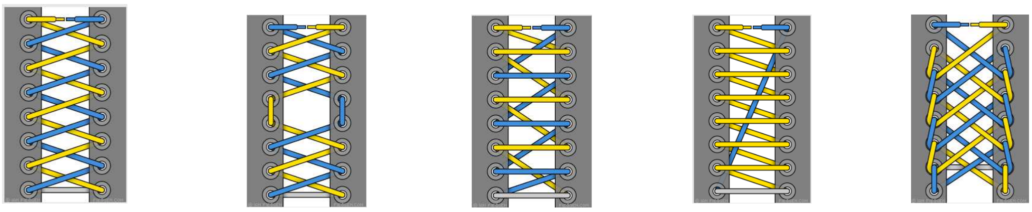


Figura 10. Cinco maneras diferentes formas de amarrar los cordones

Dos cuestiones podemos plantearnos:

a) Estética que muestra diferentes estilos (Óptica del comprador)

b) Más pertinente sería que tipo de encordonado requiere los cordones más cortos, y por consiguiente más barato (Óptica del Fabricante)

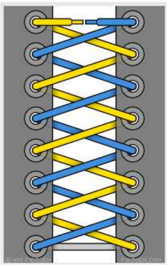
**¿Qué pauta de encordonado entre todas las posibles, requiere los cordones más cortos?**

**Para contestar a esta cuestión: IDEALICEMOS EL PROBLEMA**

Vamos a centrarnos en la longitud del cordón hasta los dos ojetes de la parte superior. La cantidad de cordón extra se necesita básicamente para hacer el nudo eficaz, y dado que es la misma para todos los métodos de encordonados, podemos ignorarla. Partiendo de un enfoque a lo bruto, la longitud del cordón puede calcularse en términos de los tres parámetros del problema:

1. El número "**n**" de pares de ojetes
2. La distancia "**d**" entre ojetes sucesivos
3. El espacio "**r**" entre los ojetes izquierdo y derecho correspondientes

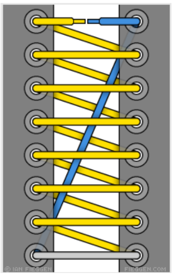
**Caso 1**: Con la ayuda del Teorema de Pitágoras (¿qué habría pensado Pitágoras de esta aplicación particular?) tenemos que la longitud del cordón es:



$$L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$$

**Figura 11. Tipo Criss Cross Lacing**

**Caso 2**: De la misma manera con la ayuda del Teorema de Pitágoras



$$L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$$

**Figura 12. Tipo Shoe Shop Lacing**

Podemos preguntarnos cuál de las longitudes es más pequeña para los dos modelos presentados. Para simplificar:

a) Si n=8, d=1 r=2, para el tipo Criss Cross Lacing:

$$L = r + 2(n-1)\sqrt{d^2 + r^2}$$
$$L = 2 + 14\sqrt{5}$$
$$L = 32{,}30492$$

b) Si n=8, d=1 r=2, para el tipo *Shoe Shop Lacing*

$$L = (n-1)r + (n-1)\sqrt{d^2 + r^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + r^2}$$

$$L = 14 + 7\sqrt{5} + \sqrt{53}$$

$$L = 36,9324$$

Se observa que la longitud más corta es la del encordonado al estilo americano. Ahora bien, ¿podemos estar seguro de que esto será siempre así o por el contrario, es posible que el resultado dependa de los valores de “n”, ”d” y “r”?

**¡Sólo un matemático se preocuparía por los diferentes casos que aparecerían dando valores distintos a “n”, “d” y “r”!**

## 4. Reflexión final

He pretendido, tomando algunos ejemplos, unos originales y otros no, como podemos innovar en el dominio de la infraestructura escolar con la concepción y puesta en escena de lo que podrían ser los Laboratorios de Matemática Creativa con la RdP´s como herramienta para que los/as alumnos/as y los/as enseñantes validen diversos prototipos de materiales que den soporte al estudio de las Matemáticas para **MODELIZAR DIFERENTES SITUACIONES** y para realizar actividades creativas diversas.

En las páginas precedentes solo he mostrado, algunas actividades teóricas y/o prácticas y teniendo como herramienta la RdP´s de Problemas. La concepción y la puesta en obra se puede abordar con otras joyitas matemáticas que podemos encontrar trabajando con:

- La radio y el teatro matemáticos.
- Matemática y fotografía.
- Poesía y matemática.
- Videos matemáticos.
- Matemáticas y cine.
- Matemáticas en otras disciplinas.
- Matemáticas y cocina.

Son algunos de los campos dónde, hemos trabajado durante años en los que estudiantes y enseñantes, con imaginación han conseguido importantes **INNOVACIONES.**

A modo de conclusión final, en torno a procesos de innovación en el actual momento procesal de la Educación en mi país, en los diferentes niveles, cabe preguntarse:

**¿Sucede con frecuencia…. pero que ya está todo inventado y no hay nada nuevo?**

**¿Habría que utilizar argumentos,…,cambios en los planteamientos educativos?**

Si hay que administrar nuevos elementos en Educación Matemática……hay que tener en cuenta

¡La capacidad de
transformar la educación
y la sociedad!

para generar una cultura de la innovación. Para ello necesitamos

¡Nuevo lenguaje de la innovación!

un lenguaje fundamental para compartir ya que:"…***sin lenguaje es posible pensar, es difícil conocer y es imposible comprender***…" (Jorge Wagensberg).
Si "Innovar es introducir novedades en alguna cosa" , el reto podría ser pasar de

- La innovación como suceso

Figura 13. Innovación como suceso

- A la innovación como proceso

Figura 14. Innovación como proceso

En resumen, la innovación se inspira en ATREVERSE, superar los miedos y cambiar de perspectiva. *"El miedo nos indica que estamos entrando en un territorio desconocido, el miedo es la membrana que separa lo nuevo de lo conocido y constituye, así, un interesante indicador de que estamos a punto de abrirnos a algo superior al mundo que estamos acostumbrados"* (J. Kornfield).

Figura 15. Miedo a lo desconocido

## Bibliografía

Atweh, B; Forsgaz, H; Nebres, B. (Eds). *Sociocultural Research on Mathematics Education. An International perspective.* 2001.

Bishop, A.J. *Second International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic. 2003.

Carrillo, J. *Resolución de Problemas. Huelva. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía* (España). 2001.

Hernán González G. *Innovar en educación matemática*. Santiago de Chile.2002

Knapp, Michael S. *Between Systemic Reforms and the Mathematics and Science Classroom: The Dynamics of Innovation, Implementation, and Professional Learning*. NISE. 1997. Univ. Wisconsin.

Lane, S. *The Conceptual Framework for the Development of a Mathematics Performance Assessment Instrument. Educational Measurement: Issues and practice.* Wiley Interscience. 2005.

Neukirch, J. *Algebraic Number Theory*. Springer, 1999.

Neukirch, J.; Schmidt, A; Wingberg, K. *Cohomology of Number Field.* Springer-Verlag.2 008.

Perie, M.; Marion, S.; Gong, B. *Moving Toward a Comprehensive Assessment System: A Framework for Considering Interim Assessments*.Vol. 28. Wiley Interscience.2009.

Romero, S. *Las matemáticas y la atención a la diversidad. Un ejemplo de aplicación para alumnos con NEE´s.* Rev. UNIÓN. 2007.

Romero, S; Castro, F. *Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior. El problema de Dobogókó*. Vol. 2. Modelling in Science Education and Learning. 2008. Valencia.

Romero. S. *Competencias Matemáticas y otras Áreas Interdisciplinares. III **J**ornadas de Educación Matemática. Competencias matemáticas y diferentes áreas del currículo. Huelva. 2010.*

Ruthven, K. *Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology*. In Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). International handbook of mathematics education. Kluwer.1996

Sierpinska, A; Kilpatrick;J. *Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity*. Kluwer Academic. 1997.

http://www.elboomeran.com/obra/496/ulises-perseo/

http://www.mathunion.org/icmi

http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm

http://ualmat.wordpress.com/videos-matematicos

http://video.google.es/videoplay?docid=513442171440946116#

http://www.catedu.es/matematicas_mundo/CINE/cine_Jungla.htm

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 33-49

# Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las matemáticas

**Jesús Cerda Quintero, María Fernández Hawrylak, Jesús Meneses Villagrá**

Fecha de recepción: 11/03/2013
Fecha de aceptación: 15/02/2014

| | |
|---|---|
| **Resumen** | A través de un estudio preliminar se destaca la baja comprensión matemática del alumnado que accede a la Universidad y sus dificultades para interpretar y organizar la información de los enunciados de problemas matemáticos y la carencia de estrategias para abordar su resolución. Presentamos los resultados obtenidos de un trabajo de investigación en el que se evalúa una Propuesta Didáctica con enfoque constructivista diseñada para tal fin. Mediante un diseño cualitativo y utilizando la técnica de triangulación de los datos procedentes de cuestionarios de opinión, entrevistas semiestructuradas, diarios, observaciones en el aula y pruebas de valoración realizadas a los estudiantes, se ha tratado de conocer la eficacia de la implementación de tres unidades didácticas sobre los *Sistemas Numéricos*.<br>**Palabras clave**: sistemas numéricos, estrategias de resolución. |
| **Abstract** | Through a preliminary study highlights the low mathematical understanding of students accessing the university and its difficult to interpret and organize information in the statements of mathematical problems and lack of strategies to address its resolution. We present the results of a research project in which a proposal is evaluated with constructivist didactics designed for that purpose. Using a qualitative design using the technique of triangulation of data from opinion questionnaires, structured interviews, journals, classroom observations, and assessment made to students, we have tried to determine the effectiveness of the implementation of three units teaching about number systems.<br>**Keywords**: resolution strategies, number systems. |
| **Resumo** | Através de um estudo preliminar destaca a compreensão baixo matemática de estudantes que acessam a universidade e sua difícil de interpretar e organizar as informações nas declarações de problemas matemáticos e falta de estratégias para lidar com a sua resolução. Nós apresentamos os resultados de um projeto de pesquisa em que uma proposta é avaliada com didática construtivista destinados a esse fim. Usando uma metodologia qualitativa utilizando a técnica de triangulação de dados de questionários de opinião, entrevistas estruturadas, revistas, observações em sala de aula, e avaliação feitas para os alunos, que têm tentado determinar a eficácia da implantação de três unidades ensinando sobre sistemas de número.<br>**Palavras-chave:** estratégias resolução, sistemas de número. |

## Introducción

El presente trabajo está encuadrado en una línea de investigación encaminada a mejorar el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la Matemática en el contexto universitario, abordando específicamente las dimensiones del aprendizaje matemático, la actitud del alumno desde una directriz psicológica, y el clima social del aula desde una óptica sociológica.

Existe mucha literatura sobre estudios de investigación incluidos dentro de esta amplia línea de trabajo. Por ejemplo, se ha indagado sobre: a) dimensiones involucradas en la resolución de problemas matemáticos, como el razonamiento inductivo (Ortiz, 1997), razonamiento deductivo (Ibañes, 2000), razonamiento combinatorio (Roa, 1999), desarrollo cognitivo (Fernández, 1990; Miñán, 1996; Gallardo, 1996; Orsini, 1999), representaciones (Castro, 1994; Romero, 1995), comprensión de conceptos (Romero, 1995); b) variables que influyen en el rendimiento matemático (Brashi, 1993; Arrieta, 1996); c) aspectos sociales a tener en cuenta en el proceso didáctico, como la interacción social (Romero, 1995), la cultura escolar (Sutherland et al., 1996), las relaciones interpersonales (Cubillo y Ortega, 2000) o la integración social del alumno (Aguiar, 2001). Así mismo, se han ensayado y evaluado diversas propuestas didácticas para mejorar el aprendizaje de los alumnos centradas en distintos aspectos, como por ejemplo, en el aprendizaje jerárquico (Sequera, 1996), la evolución histórica y epistemología (Romero, 1995), el diálogo en el aula (Aguiar, 2001), el uso de la V de Gowin y mapas conceptuales en la resolución de problemas (Morales, 1995), los microproyectos (Oliveiras, 1994), los distintos razonamientos y la demostración (Acuña, 1996), y el constructivismo (Ramírez, 1998).

Los resultados de las investigaciones muestran una situación bastante preocupante en cuanto al escaso aprendizaje de la Matemática que manifiestan los estudiantes de los diferentes niveles y modalidades del sistema educativo. En general, la compresión de los conceptos matemáticos y el desarrollo de las capacidades necesarias para aplicar los distintos razonamientos en la resolución de problemas son muy bajos. Sin embargo, las evaluaciones de las innovaciones desarrolladas en el aula sobre propuestas de enseñanza fundamentadas en principios de la psicología cognitiva indican que los estudiantes construyen aprendizajes más significativos.

Hemos centrado nuestra investigación en dos aspectos: por una parte, se trató de impulsar estrategias de aprendizaje en el alumnado para que pudiese abordar y resolver problemas matemáticos con más eficacia y facilitar un aprendizaje más significativo, y por otra, aspiramos a mejorar la actitud y el clima social de los estudiantes agrupados en aulas universitarias.

Inicialmente planteamos un estudio de diagnóstico para averiguar las estrategias de aprendizaje que utilizan generalmente los estudiantes que inician estudios universitarios para abordar los conocimientos matemáticos, la actitud general que presentan ante las matemáticas, y la influencia del clima social del aula en el aprendizaje matemático.

Después, teniendo en cuenta el análisis y reflexión de los resultados obtenidos en el diagnóstico y con la finalidad ya señalada de mejorar el aprendizaje de la Matemática, construimos una *Propuesta Didáctica con enfoque* *constructivista*, alternativa a la tradicional, fundamentada en las teorías cognitivas de Piaget (1978), Ausubel (1973), Ausubel, Novak y Hanesian (1983), y Vigotsky (2000), y en las aportaciones de Polya (1978), Alonso (1994), Llinares (1994), González (1995), Nieto (1997), Miranda et al. (1998), de Guzmán (1999), Velásquez (2000) y Valiente (2000). La finalidad de esta Propuesta es ayudar al alumno a que aprenda a aprender, y al docente a que enseñe a pensar bajo un clima social de aula dinámico, flexible, comunicativo y participativo que contribuya a generar en los alumnos confianza y actitud positiva hacia el proceso didáctico, hacia el profesor y hacia los contenidos matemáticos.

Por último, aplicamos y evaluamos la Propuesta Didáctica partiendo de los contenidos correspondientes a la Unidad Temática *“Los Sistemas Numéricos”* de la asignatura Matemática General de la Carrera Educación Integral, Titulación de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidental ‘Ezequiel Zamora’ (UNELLEZ) de la ciudad de Barinas (Venezuela), para dar respuesta a la cuestión que nos planteamos: ¿en qué grado afecta la aplicación de la Propuesta Didáctica constructivista al aprendizaje significativo, al clima social del aula, y a la actitud general del alumnado?

## 1. Fase de diagnóstico de la investigación

En esta primera fase de la investigación estudiamos el estado inicial de los estudiantes que acceden a la Universidad en Venezuela respecto a dos dimensiones concretas: a) las estrategias de aprendizaje que utilizan cuando inician el estudio de la asignatura Matemática General, y b) la actitud que muestran, así como el clima social de aula reinante durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

### Diagnóstico sobre estratégias de aprendizaje

Se indagó sobre las estrategias que el alumnado emplea en la interpretación de los enunciados y en la resolución de problemas. Para recoger información utilizamos varios instrumentos: a) grabación en audio de varias sesiones de clases de matemáticas, b) diseño de un cuestionario de opinión sobre utilización de estrategias de aprendizaje y c) planteamiento de una prueba de valoración de estrategias con ejercicios y problemas para que sea contestada por los estudiantes de la muestra. Se aplicaron los procedimientos habituales para garantizar la validez y fiabilidad de cada instrumento: validez de contenido mediante juicio de expertos en el cuestionario de opinión y la prueba de valoración de estrategias; fiabilidad del cuestionario calculando el Alfa de Cronbach; análisis de las transcripciones de las grabaciones utilizando indicadores; y comparación de los resultados de los tres instrumentos mediante la técnica de triangulación de datos.

El cuestionario de opinión se diseñó partiendo de trabajos realizados por investigadores tales como Polya (1978), Miranda et al. (1998), de Guzmán (1999), Santaló et al. (1994), Ríos (2004), y Alonso (1994), donde abordan el tema de las estrategias de aprendizaje relacionadas con la organización de la información y la resolución de problemas matemáticos, el desempeño académico del alumnado en general y en las matemáticas en particular. El cuestionario final de opinión (Cerda, 2010) quedó estructurado en 48 ítems en una escala Lickert encuadrados en quince indicadores. En la validación participaron profesores doctores de la UNELLEZ (Venezuela) especialistas en el área de metodología de la investigación, y de las Universidades de Valladolid y Burgos (España). La fiabilidad fue de $\propto$=0,92 y se aplicó a cincuenta y cuatro alumnos del primer semestre de la carrera Educación Integral.

La prueba de valoración de estrategias se construyó tomando en cuenta los contenidos del sistema de los números racionales y quedó estructurada en dos partes con nueve preguntas. La primera consta de cinco preguntas de selección simple cuyas respuestas debían ser justificadas por los alumnos para valorar su nivel de comprensión simbólico-matemática y las operaciones aritméticas fundamentales empleadas. La segunda tiene dos ejercicios dirigidos a valorar la comprensión y aplicación de las propiedades involucradas en las operaciones respectivas y dos problemas de aplicación para diagnosticar las estrategias de aprendizaje que los estudiantes utilizaron para resolverlos (Cerda, 2010).

Para la presentación, organización y descripción de los resultados obtenidos en la prueba de valoración de estrategias se utilizó una tabla de doble entrada que recogiera los criterios tenidos en cuenta. Los resultados obtenidos reflejaron que el alumnado apenas dispone de *estrategias para la organización de la información.* Por lo general, los estudiantes organizan, presentan y comunican la información verbal y escrita de forma caótica y con errores conceptuales; además, no se apoyan en ninguna forma gráfica, ni en diagramas o esquemas, ni mucho menos en mapas conceptuales.

Consideramos que las estrategias que se demandan para interpretar y organizar la información son vitales para dar al alumnado un soporte cognoscitivo suficiente para que pueda aprender de forma significativa, no sólo en la asignatura Matemática General sino también en las demás disciplinas que forman parte del currículo universitario.

Con relación al *uso de las estrategias de resolución de ejercicios y problemas*, las deficiencias siguen manifestándose. Se detectó que los estudiantes tienen dificultades para discriminar la información que aporta el enunciado de los problemas planteados, para seleccionar los datos e identificar las incógnitas. Además, no aplican procedimientos intuitivos como el ensayo y error, los contra-ejemplos, las figuras o gráficos y, ni mucho menos, procesos más formales como el razonamiento lógico-deductivo en la aplicación de conceptos, definiciones y propiedades. Esta situación conduce a establecer una posible conexión entre ambos criterios, sin la cual sería difícil lograr un verdadero aprendizaje matemático; es decir, si los alumnos tienen problemas en la aplicación de estrategias de aprendizaje para la organización de la información matemática es probable que también los tengan en las estrategias para resolver ejercicios y problemas.

De acuerdo con los resultados del cuestionario aplicado para diagnosticar estrategias de aprendizaje, así como los obtenidos fruto de las observaciones y pruebas de valoración realizadas, constatamos serias debilidades principalmente en las siguientes estrategias, consideradas fundamentales para lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas: la utilización de esquemas y diagramas como técnicas de estudio, la expresión verbal y escrita de la información, el proceso de abstracción matemática, la elaboración de planes para la resolución de problemas, el empleo del lenguaje matemático, y el uso del razonamiento deductivo. Sin embargo, en los indicadores relativos a la capacidad de concentración, utilización de material escrito, análisis de la información, procesos de verificación, intuición y procesos inductivos, acudir a asesorías y autoevaluación, sí obtuvieron resultados medianamente positivos, lo cual implica una información valiosa porque muestra un punto de partida para construir una Propuesta Didáctica siguiendo tales estrategias.

Durante el desarrollo de las sesiones de clase observadas pudieron determinarse elementos convencionales característicos de unas estrategias de aprendizaje basadas en la clase magistral. En la mayoría de los casos, las clases siguen un enfoque algorítmico y calculista, y el discurso docente se basa en el uso de un lenguaje coloquial, no académico, y en explicaciones intuitivas. Por lo tanto, el espacio para pensar, reflexionar y razonar que se dedica a los aspectos teóricos-prácticos de los contenidos es escaso. Se puede decir que el proceso didáctico desde el punto de vista psicológico se acerca más al paradigma conductista y, desde la perspectiva de la comunicación de saberes entre el docente y sus alumnos, se corresponde con un paradigma de transmisión verbal.

## Diagnóstico sobre actitud del alumnado y clima social del aula

Para diagnosticar el grado de actitud que poseen los estudiantes hacia la Matemática se indagó sobre la aceptación y valoración que muestran hacia el procedimiento didáctico ejecutado por el docente y hacia los contenidos de una de sus unidades de estudio, concretamente sobre '*Sistemas Numéricos*'. Se determinó también la participación del alumnado en las sesiones de clase y el proceso de comunicación entre el docente y sus alumnos, ambos aspectos relevantes del clima social del aula durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se emplearon tres instrumentos para recoger información: grabación en audio de varias sesiones de clase, análisis de las respuestas a un cuestionario de opinión diseñado para determinar el grado de actitud, y una entrevista semiestructurada a los estudiantes de la muestra. Se respetaron los procedimientos habituales para garantizar la validez y fiabilidad de la prueba, de forma similar a lo descrito anteriormente en el diagnóstico de las estrategias de aprendizaje.

El proceso de elaboración técnica de este segundo cuestionario de opinión fue similar al utilizado para diagnosticar las estrategias de aprendizaje, y quedó estructurado en torno a cincuenta preguntas (Cerda, 2010) tipo escala Lickert; los ítems se presentaron en forma de afirmaciones o juicios referidos al evento o situación acerca del cual se quiere medir la actitud (Hurtado, 2000). Fue validado por los mismos expertos que participaron en el mismo proceso de construcción del cuestionario de opinión diagnóstica de las estrategias de aprendizaje. En este caso el Alfa de Cronbach fue de $\propto$=0,93. El instrumento fue contestado por cincuenta alumnos matriculados en la asignatura Matemática General.

Este cuestionario se diseñó y elaboró partiendo de la revisión teórica realizada de las investigaciones de Miranda et al. (1998), de Guzmán (1999), Santaló et al. (1994) y Ríos (2004), en cuanto a la actitud que manifiestan los alumnos ante las matemáticas. Se estructuró en una dimensión denominada '*actitud y clima social del aula*'. La actitud es entendida como una disposición positiva o negativa que tiene el alumno para abordar los aprendizajes de los contenidos matemáticos, y el clima social como el estado en que se encuentra la participación y comunicación en el aula, es decir, los mecanismos de interacción que se producen entre los actores del proceso didáctico de las matemáticas. Aunque se pudieron separar ambos aspectos en dos dimensiones, se unificaron por considerarlos que están íntimamente relacionados.

Las entrevistas semiestructuradas a diecisiete alumnos brindaron más información sobre la variable *clima social del aula y actitud del alumnado* hacia las matemáticas. Quedó constituida en cuatro preguntas que versaron sobre los siguientes aspectos: actitud general del alumno ante las estrategias de enseñanza utilizadas por el profesor, comunicación personal entre el profesor y sus alumnos, elementos frecuentes en el clima social de la clase, y valoración hacia los contenidos matemáticos que se desarrollaron durante la clase.

La información recogida se organizó atendiendo a un sistema de categorías construido en función de las respuestas de los entrevistados, y fue presentada utilizando distribuciones de frecuencia.

Los resultados del cuestionario de opinión-actitud y de las entrevistas revelaron, de acuerdo a los análisis y las reflexiones efectuados, la existencia de una actitud positiva de los estudiantes hacia los contenidos matemáticos y hacia el proceso didáctico desarrollado en el aula. Las opiniones y respuestas expresadas por la mayoría demostraron un buen grado de autoestima y autoconfianza, a pesar de las dificultades de tipo cognoscitivo que tienen para comprender los aspectos abordados en las clases.

Sin embargo, hubo indicadores en donde la actitud arrojó un saldo negativo: conducta impulsiva, capacidad de razonamiento, temor al fracaso, procedimiento en la resolución de problemas, dominio del lenguaje matemático, utilización de recursos no convencionales para el aprendizaje por parte del profesor, e, incluso, el procedimiento de enseñanza que utiliza el profesor es visto por el alumnado con una actitud negativa.

Los resultados de las entrevistas reflejaron que una mayoría significativa de estudiantes destaca la utilidad e importancia de los contenidos desarrollados durante las clases, principalmente para la formación profesional docente. También consideraron que el éxito en la futura labor docente será más contundente si se dispone de una buena comprensión de los contenidos.

Por lo general, se cree que existe una relación directa entre la actitud y el aprendizaje; sin embargo en este estudio, a pesar de que se encontró una situación relativamente favorable en el autoconcepto que tiene el estudiante ante su desempeño matemático y ante el proceso didáctico desarrollado por el profesor, los resultados, en cuanto a la valoración cognoscitiva de los aprendizajes matemáticos de la Unidad de *Sistemas Numéricos*, no cubrieron totalmente las expectativas. En efecto, de acuerdo con los resultados obtenidos no se pudo concluir que una buena actitud del alumno es condición suficiente y necesaria para lograr un aprendizaje significativo en las matemáticas, porque la relación entre la actitud y el rendimiento no fue muy estrecha; es decir, aunque se observó en el grupo una buena actitud, no hubo un dominio claro de los aprendizajes matemáticos de los contenidos relacionados a los sistemas numéricos.

La comunicación y participación de los estudiantes en las sesiones de clase adquirieron niveles positivos, variables que indican un aceptable clima social en el aula. Tanto el alumnado como el docente interactuaron socialmente con fluidez, desarrollando y utilizando el intercambio de información, significados e ideas que se generan producto de la discusión y análisis que efectuaron los actores en la Unidad de *Sistemas Numéricos* de la asignatura Matemática General. Por lo tanto, fue evidente dentro del proceso didáctico la confianza en los estudiantes para exponer sus aportes, ideas, respuestas, planteamientos e inquietudes, y formular las preguntas necesarias para aclarar dudas y comprender mejor los aspectos estudiados.

Las respuestas suministradas por los alumnos entrevistados revelan, por ejemplo, que aproximadamente dos terceras partes de los estudiantes participan en el desarrollo de las clases, gracias a diferentes razones que consideramos se relacionan entre sí: el gusto general por las matemáticas, la motivación que despiertan las estrategias utilizadas por el profesor y el clima de confianza que se genera dentro del aula entre profesor y alumnos. Además, los resultados de la triangulación demuestran cierta semejanza en gran parte de los hallazgos, aunque existen algunas diferencias entre las observaciones y los cuestionarios, principalmente en lo referente a la participación de los alumnos en la resolución de ejercicios y problemas en la pizarra.

## 2. Propuesta didáctica con enfoque constructivista

Los resultados y reflexiones realizadas sobre el diagnóstico inicial nos guiaron hacia la planificación, diseño y elaboración de una Propuesta Didáctica con enfoque constructivista para la enseñanza de la Matemática, basada en las teorías cognitivas sobre el aprendizaje.

### Fundamentación teórica de la Propuesta Didáctica

La Propuesta Didáctica se elaboró siguiendo las aportaciones de Polya (1978), Alonso (1994), Llinares (1994), González (1995), Nieto (1997), Miranda et al. (1998), de Guzmán (1999), Velásquez (2000) y Valiente (2000). Estos especialistas en Didáctica General y Didáctica de las Matemáticas unifican criterios para consolidar una postura en el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de los conocimientos de esta ciencia, tomando como base las aportaciones de las teorías cognitivas de Piaget (1978), Ausubel (1973), Ausubel, Novak y Hanesian (1983), y Vigotsky (2000), cuyos aspectos fundamentales son resumidos en los postulados siguientes:

- El aprendizaje es un proceso constructivo interno.
- El grado de aprendizaje depende del desarrollo cognitivo del individuo.
- El aprendizaje consiste en un proceso de reorganización interna.
- La estrategia más eficaz para lograr el aprendizaje es la creación de contradicciones o conflictos cognitivos.
- El aprendizaje se potencia promoviendo la utilización de variadas estrategias cognitivas y metacognitivas.
- El aprendizaje se favorece enormemente mediante la interacción social.

### Objetivos y Pilares de la Propuesta Didáctica

Los objetivos planteados en la Propuesta Didáctica fueron:

1) Aplicar de manera práctica estrategias que fomenten en el alumnado un aprendizaje significativo y el pensamiento creativo en la resolución de problemas de su interés, para generar un proceso didáctico que consolide la construcción progresiva, reflexiva y científica del conocimiento matemático, utilizando los aportes teóricos del paradigma constructivista.

2) Orientar al docente en los diferentes procedimientos, recursos y actividades de enseñanza y evaluación, que contempla el proceso didáctico constructivista de las matemáticas para consolidar su formación psicopedagógica.

3) Fomentar la comunicación para lograr la participación, debate y cooperación entre los actores que interactúan en el proceso didáctico, dentro de un clima social del aula abierto, dinámico y flexible, que contribuya a un cambio de actitud del alumno hacia la Matemática.

A continuación se indican los pilares esenciales que forman parte de la configuración de la Propuesta Didáctica del Programa. Estos han representado los elementos tenidos en cuenta en el diseño, elaboración y aplicación de estrategias para lograr en los estudiantes un verdadero aprendizaje significativo.

1) Comprender e incorporar progresivamente el lenguaje matemático utilizado en el proceso didáctico.

2) Aplicar el razonamiento inductivo para activar las nociones matemáticas y conducir sucesivamente al alumnado hacia la conceptualización científica y formal del conocimiento matemático.

3) Desarrollar y aplicar estrategias en la resolución de problemas que promuevan el razonamiento deductivo y la comprensión de la estructura formal de los contenidos matemáticos.

4) Establecer un clima social del aula flexible y dinámico, analizando desde la perspectiva de la interacción social entre profesor y alumnos, mediante la comunicación y la participación.

5) Dirigir el proceso de evaluación hacia la valoración integral y equilibrada como fundamento para el crecimiento académico, personal y socio-afectivo de los actores del proceso didáctico de la Matemática.

## Estructura de la Propuesta Didáctica

De acuerdo con la fundamentación psicológica y epistemológica, los pilares que constituyen la Propuesta Didáctica bajo un enfoque constructivista y los objetivos propuestos, la secuencia de la misma se estructuró en cuatro fases:

### A. Fase de Exploración:

Se diagnosticaron y analizaron las características del alumnado desde el punto de vista cognitivo, los aprendizajes previos, su actitud, su estado socio-afectivo, y el contexto en el que se desenvuelve, lo que para la planificación de la enseñanza representó el punto de partida para la secuenciación de los contenidos, desde los más sencillos hasta los más complicados, y la definición de las estrategias adecuadas al nivel cognitivo del alumnado estableciendo un proceso de interacción socio-afectiva entre el docente y sus alumnos al compartir sus diferentes expectativas, inquietudes y puntos de vista.

Para obtener esta información, en esta fase exploratoria se utilizaron los instrumentos y técnicas de evaluación pertinentes, desde la simple observación informal hasta las pruebas de valoración de aprendizajes previos, guías de entrevistas, cuestionarios y el procedimiento socrático (en el que se utilizan preguntas y respuestas para verificar el nivel de aprendizaje y así establecer la conexión entre los aprendizajes previos y el nuevo aprendizaje).

### B. Fase de Presentación:

Los temas desarrollados siguieron un proceso inductivo de construcción de significados, cuyo origen se localiza en las ideas iniciales y cotidianas que posee el alumnado sobre los contenidos matemáticos, fomentando de esta manera la participación activa y promoviendo la motivación intrínseca y extrínseca de cada estudiante. Esta actividad se apoyó en la orientación instruccional del profesor y en los recursos audiovisuales complementarios para que la presentación tuviera un sentido tanto lógico como psicológico.

Se motivó e incorporó a cada alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se incorporaron actividades grupales que generasen discusiones y debates sobre los aspectos básicos de los contenidos, algunos asignados con anticipación por el docente, con el fin de establecer conclusiones que ayudaran a comprender mejor toda la teoría matemática de los temas desarrollados.

### C. Fase de Valoración Cognitiva:

En esta etapa se efectuó un primer acercamiento para valorar el proceso cognitivo interno de construcción de los aprendizajes, observando el grado de asimilación y acomodación que los estudiantes habían alcanzado. Se realizó a través de entrevistas y de actividades de monitoreo, en las cuales el profesor indagó a través de pequeñas preguntas el grado de comprensión que los alumnos tenían sobre los aspectos desarrollados durante la clase.

El proceso de orientación realizado por el docente constituyó la base fundamental para que el alumnado aprendiera a aprender a través de las estrategias que le permiten autoevaluarse y establecer sus debilidades, fortalezas y aspectos a mejorar dentro del nivel de aprendizaje alcanzado.

### D. Fase de Proyección:

Esta última fase se planificó con el fin de enfrentar al alumnado a situaciones novedosas donde pudiese aplicar los diferentes aprendizajes matemáticos logrados para resolver problemas y, de este modo, construir nuevos conocimientos útiles para abordarlos, generando de este modo un pensamiento crítico, reflexivo y creativo por parte del alumno.

## 3. Resultados y reflexiones de la evaluación de la Propuesta Didáctica

Atendiendo a los fundamentos, pilares, objetivos y estructura de la Propuesta Didáctica presentada en el apartado anterior, se elaboraron los materiales de trabajo de tres unidades didácticas correspondientes a los contenidos matemáticos del bloque temático *Sistemas Numéricos*, del Programa de la asignatura Matemática General del primer semestre de la Carrera de Educación Integral.

Se seleccionó este bloque de contenidos por ser básico para el aprendizaje formal de la Matemática y ofrecer una amplia gama de situaciones de aprendizaje de conceptos matemáticos relacionados con la vida cotidiana para, de esta forma, poder utilizar una gran diversidad de estrategias que ayudasen al alumnado a superar sus dificultades en la organización de la información y en la resolución de ejercicios y problemas.

La implementación de las tres Unidades Didácticas ‘Sistema de los Números Naturales’, ‘Sistema de los Números Enteros’ y ‘Sistema de los Números Racionales’ se desarrolló con un grupo de treinta y un alumnos, durante veinte horas de clase a lo largo de un mes.

Evaluamos la eficacia de la Propuesta Didáctica con enfoque constructivista en función del aprendizaje significativo de los contenidos de la unidad de *Sistemas Numéricos* logrado por el alumnado, tomando en cuenta los siguientes criterios de análisis:

- Las estrategias que los estudiantes emplean para organizar la información.
- Las estrategias de aprendizaje que los estudiantes utilizan para resolver ejercicios y problemas.
- El dominio cognoscitivo de los estudiantes en la comprensión y aplicación de conceptos, definiciones, propiedades y teoremas involucrados en los contenidos matemáticos de las sesiones de clase ejecutadas.

Así mismo, se evaluó el efecto de la Propuesta Didáctica sobre la actitud del alumnado ante las matemáticas y el clima social generado en el aula durante el proceso didáctico. Para analizar esta dimensión de estudio se utilizaron los siguientes criterios:

- El auto-concepto del alumno ante su desempeño en las actividades asignadas.
- La concepción que tiene el alumno de los aprendizajes de los contenidos de la asignatura de Matemática General.
- La concepción del proceso didáctico desarrollado por el profesor.

Para obtener información y datos de las dimensiones anteriores se utilizaron las técnicas e instrumentos aplicados en la fase diagnóstica (cuestionarios de opinión, entrevistas semi-estructuradas a los alumnos, grabaciones y trascripciones de las observaciones de las sesiones de las clases, y la prueba de valoración de los aprendizajes), además de los diarios y trabajos efectuados por los estudiantes en el aula.

## Análisis y reflexión de los resultados de la dimensión aprendizaje significativo matemático

Tras desarrollar el bloque temático *Sistemas Numéricos* los estudiantes cumplimentaron el cuestionario sobre estrategias de aprendizajes (Cerda, 2010). Al analizar sus respuestas se constató que consideran haber mejorado en el uso de las estrategias de aprendizaje: capacidad de concentración (mayor atención selectiva a las instrucciones y disminución de conductas impulsivas sin previas reflexiones), discriminación de la información, utilización del lenguaje matemático, expresión verbal y escrita (de conceptos, teoremas, propiedades...), análisis de la información (comparaciones, relevancia de los datos, relación entre datos y variables, síntesis), procesos de verificación, procesos inductivos y deductivos, autoevaluación, autorregulación y asesoría del profesor. Sin embargo, son conscientes que tienen muchas dificultades en la elaboración de esquemas, diagramas, representaciones gráficas y mapas conceptuales; es decir, en el empleo de recursos y estrategias relacionadas con técnicas de estudio y en la organización de la información. Así mismo, sostienen que les cuesta mucho llevar a cabo procesos de abstracción y establecer planes para acometer la resolución de los problemas.

Si nos atenemos a la opinión del alumnado, debe dedicarse más tiempo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje a realizar actividades de elaboración de tablas, esquemas, gráficos y mapas conceptuales que potencien estrategias de aprendizaje que mejoren el análisis y la síntesis de información. De igual modo poner énfasis en la elaboración del plan de resolución de un problema. Por último, para facilitar la aplicación de procesos de abstracción en el aprendizaje matemático se considera importante incorporar actividades que consoliden progresivamente un aprendizaje desde lo concreto, ligado a situaciones cotidianas que ofrezcan ejemplos o situaciones reales que se relacionen con los contenidos matemáticos, hasta llegar a sus representaciones gráficas y simbólicas.

La prueba de valoración de estrategias se construyó tomando en cuenta los contenidos del bloque temático de los *Sistemas Numéricos* y quedó estructurada en dos partes con diez preguntas, seis de selección simple cuyas respuestas debían ser justificadas por el alumnado para valorar su nivel de comprensión simbólico-matemática y operaciones aritméticas fundamentales, dos ejercicios para valorar la comprensión y aplicación de las propiedades involucradas en las operaciones respectivas, y dos problemas de aplicación para diagnosticar las estrategias de aprendizaje utilizadas para resolverlos (Cerda, 2010).

Comparando los resultados obtenidos en la fase diagnóstico con los obtenidos tras la puesta en práctica de la Propuesta Didáctica se observó una leve progresión en el desempeño del alumnado, dado que apenas disponían de estrategias antes del periodo de enseñanza. Por ejemplo, se consiguió que la mitad comprendiera y utilizara los símbolos matemáticos incluidos en la información de la prueba de valoración, y que una quinta parte realizara comparaciones entre conceptos como estrategia para aplicarlos de manera precisa en la resolución de ejercicios y problemas. Sin embargo, ningún estudiante utilizó esquemas, mapas conceptuales, diagramas o representaciones gráficas para organizar y presentar información en la prueba, a pesar de que durante las sesiones de aula se habían utilizado tales estrategias. En consecuencia, se constató que los estudiantes seguían teniendo dificultades en aplicar individualmente (no tanto al trabajar en grupo) algunas de las estrategias necesarias para resolver problemas matemáticos.

### Reflexión de los resultados de las observaciones de las sesiones de clase

El bajo nivel inicial de conocimientos previos de los estudiantes constituyó un obstáculo durante la ejecución de las actividades contempladas en las Unidades Didácticas. A pesar de que el material didáctico se elaboró siguiendo una secuencia de contenidos desde los más sencillos hasta los más complejos, la mayoría necesitó mucha asesoría del profesor, más tiempo del previsto para abordar y resolver los problemas, y un esfuerzo adicional para comprender los aspectos discutidos durante las clases. Se constató que algunos no tenían apenas formación sobre los conjuntos numéricos, por lo que hubo que readaptar algunas actividades para encajarlas dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante.

Esta situación de partida del alumnado, de falta de conocimientos y poca dedicación autónoma al estudio de los contenidos matemáticos tratados, representó también un problema para aplicar estrategias de conflicto cognitivo y para generar la autorregulación del pensamiento lógico-formal y el razonamiento deductivo en los estudiantes.

Con relación a las estrategias para la organización de la información que se consideran fundamentales para el éxito de la Propuesta Didáctica, el alumnado fue capacitándose de manera progresiva en la realización de esquemas, tablas y mapas conceptuales para presentar la información de las actividades planteadas durante las clases. Se observó aceptación de parte del grupo, aunque no quedó claro si era porque representaba una ayuda en el aprendizaje o porque significaba una valoración más para aprobar la asignatura. El bajo nivel de razonamiento abstracto observado obligó al profesor a proporcionar un mayor asesoramiento.

A pesar de que constantemente se insistía en que los ejercicios deben resolverse de manera ordenada, les resultaba más sencillo hacerlo (cuando sabían) de la manera más directa, sin establecer detalles o pasos más específicos; su interés fue mayor en dar una respuesta o solución rápida que en aplicar las estrategias que facilitan la resolución, posiblemente debido a su incapacidad para controlar la impulsividad.

Se observó que el uso de vídeos aportaba motivación y ayudaba a relacionar las ideas con la nueva información matemática. La realización de las actividades en pequeño grupo, con la ayuda del profesor, permitió que los estudiantes emplearan las estrategias de aprendizaje contempladas en la Propuesta Didáctica y fueran construyendo de forma activa el conocimiento matemático.

### Reflexiones del análisis de los diarios del alumnado

Se evidenció a través de los diarios que el alumnado es consciente de haber realizado una innovación didáctica, utilizando procedimientos de enseñanza distintos a los tradicionales, pero no es capaz de expresar todas las estrategias de aprendizaje específicas que se pretendió potenciar. Evalúa favorablemente la Propuesta Didáctica, destacando opiniones sobre los resultados positivos que le genera trabajar en el aula con el material didáctico diseñado para el bloque de los *Sistemas Numéricos*. Menciona la utilidad de los recursos audiovisuales, los mapas conceptuales, las situaciones cotidianas para entender las aplicaciones del conocimiento matemático, el poder realizar actividades en grupo, la ayuda del profesor, y el que se evalúe no sólo por el examen. Sin embargo, no menciona la implementación de las estrategias para resolver problemas, o el impulso de la autorregulación de su pensamiento lógico-formal que pretende la secuencia de enseñanza y aprendizaje ensayada.

### Análisis y reflexión de los resultados de la dimensión clima social de aula y actitud del alumnado

Tras comparar las observaciones efectuadas en el aula y las opiniones expresadas por el alumnado en las entrevistas, diarios y cuestionarios, se observó coherencia en cuanto a la dimensión *clima social de aula y actitud del alumnado*. Se pudo constatar una fuerte interacción y comunicación entre los actores del proceso didáctico, así como la integración, participación y colaboración existente entre los estudiantes en los equipos de trabajo.

Así mismo, se observó en el aula (y también quedó de manifiesto en el cuestionario de opinión) que a medida que avanza el proceso de enseñanza el alumnado responde e interviene de una forma menos impulsiva, tratando de autocontrolar sus procesos de razonamiento. Los estudiantes mejoraron en confianza, motivación y responsabilidad, participando en el desarrollo de las actividades programadas y en la toma de decisiones de los problemas planteados. Se detectó una mejora en iniciativa, autocontrol y serenidad para acometer la resolución de los ejercicios y problemas. Disminuyó el rechazo a las actividades planteadas aunque tuvieron dificultades para ejecutar las más complejas y valoraron al profesor como un experto que les estimula para alcanzar el éxito en sus aprendizajes. Consideraron que una mejor preparación disminuye el miedo a la Matemática, que la constancia y la disciplina en el trabajo dentro del grupo permite alcanzar mejores logros, y que el éxito depende de ellos y no de factores externos. La mayor debilidad se encontró en superar la apreciación negativa que los alumnos tienen sobre su capacidad de razonamiento y establecimiento del plan para resolver los problemas. Pero no vencieron el temor al fracaso, a equivocarse y a ser evaluados.

En general, los estudiantes de la muestra valoraron positivamente los contenidos tratados en el bloque didáctico *Sistemas Numéricos,* por ser útiles para su formación académica y vida profesional. Sin embargo, la mitad aún percibe la Matemática como una asignatura compleja, para alumnos destacados, y que requiere memorizar muchas reglas, propiedades y teoremas. Mantienen una actitud positiva hacia lo complejo que pueda representar para ellos el procedimiento utilizado en la resolución de problemas, pues entienden que les ayuda a pensar, razonar, buscar y clasificar información, ejecutar, etc. Pero tienen serias dificultades con la utilización correcta del lenguaje matemático y la expresión verbal. Fruto de los resultados también se puede afirmar que el alumnado ha expresado una actitud favorable hacia el proceso didáctico bajo las orientaciones de la Propuesta Didáctica constructivista, especialmente el uso de recursos no convencionales para el aprendizaje, y la evaluación como un proceso integral y equilibrado a través del uso complementario de los diferentes instrumentos, actividades y pruebas de valoración.

## 4. Conclusiones

Uno de los principales logros de la implementación de la Propuesta Didáctica, con los contenidos matemáticos relativos a los *Sistemas Numéricos*, ha sido el fomento de la utilización de estrategias de aprendizaje para la organización, presentación y comunicación de la información, así como para la resolución de ejercicios y problemas con una orientación constructivista. El empleo de recursos de aprendizaje audiovisuales ha tenido un efecto muy positivo en la motivación de los estudiantes, así como la incorporación de problemas cotidianos cuyas aplicaciones representan interés y significado social para el alumnado. El énfasis dado al desarrollo de estrategias por parte de los alumnos y la inclusión de una amplia variedad de recursos en la secuencia didáctica, siguiendo las fases de exploración, presentación, valoración cognitiva y proyección, provocó en ellos un proceso progresivo y paulatino en la construcción de los aprendizajes matemáticos, evolucionando desde el conocimiento preconceptual hasta las definiciones más formales de los contenidos del bloque temático abordado.

Creemos que las estrategias de aprendizaje contempladas en la secuencia de las actividades, e impulsadas con la práctica pedagógica del docente, permiten que los estudiantes superen sus principales dificultades en la comprensión y aplicación de los conceptos al capacitarles para llevar a cabo distintos procesos de resolución de problemas, indispensables para conseguir un aprendizaje matemático significativo. Sin embargo, consolidar el pensamiento lógico-formal en el alumnado precisa una permanente insistencia y utilización de las estrategias de aprendizaje contempladas en el proceso didáctico. Hemos observado que aquellas relacionadas con el razonamiento inductivo son más utilizadas que las relativas al razonamiento deductivo, por ello conviene potenciar el pensamiento creativo desde los niveles de enseñanza elemental. En la medida que el alumno aplique de manera correcta estrategias de aprendizaje para organizar información y resolver problemas logrará la comprensión de los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas, y por consiguiente un aprendizaje matemático significativo, tal como señala el enfoque constructivista.

Las evidencias confirmaron que la mayoría de los estudiantes de la muestra no llegó a obtener un alto nivel o grado de comprensión de los conceptos, definiciones y propiedades relativos a los bloques de contenidos seleccionados del Programa de estudio de la asignatura Matemática General, teniendo dificultades en la aplicación de los mismos. Sin embargo, destacamos que los estudiantes realizaron progresos, mejorando muchos de los resultados obtenidos en la fase diagnóstica; es decir, comprobamos que el grupo evolucionaba paulatinamente de manera cualitativa hacia el logro de los aprendizajes matemáticos, a pesar del corto período de clase con el que se contó para aplicar la mayoría de las estrategias de aprendizaje contempladas en la Propuesta Didáctica.

Los estudiantes presentaron inicialmente serias dificultades cognitivas para comprender e interpretar la información de los enunciados de los problemas, y procedimentales para acometer la resolución de los mismos. Sin embargo, con la puesta en práctica de los pasos de resolución propuestos por Polya (1978), mediante el trabajo en grupo fueron capacitandose en la elaboración de planes para dar respuesta a problemas. Aunque no lograron superar de manera satisfactoria las diversas situaciones problemáticas planteadas, gracias al apoyo constante, asesoría y orientación del profesorado, fueron mejorando en las estrategias de organización, estructuración y discriminación de la información, así como en las de planificación. Las actividades efectuadas con relación a la elaboración de los mapas conceptuales y esquemas resultaron técnicas de aprendizaje efectivas para la comprensión intuitiva de los conceptos matemáticos, garantizando su aplicación coherente en los diferentes ejercicios y problemas cotidianos contemplados en las tres unidades didácticas desarrolladas.

El trabajo realizado en pequeños grupos, con la constante orientación y asesoría del profesor, fomentó el estímulo, la motivación y el interés de los estudiantes dentro del aula. Las exposiciones, los debates, las reflexiones y las intervenciones en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación que se llevaron a cabo en las sesiones de clases incrementó sustancialmente la comunicación, la participación y la interacción social de los actores del proceso didáctico, así como el intercambio de significados.

Convenimos en que las causas principales del cambio de actitud de los estudiantes tienen que ver con la incorporación de actividades de enseñanza, estrategias de aprendizaje y evaluación no convencional: uso de situaciones cotidianas de nuestro entorno relacionadas con los temas matemáticos tratados; trabajo en pequeños grupos para realizar talleres; exposiciones y proyección de vídeos ilustrativos sobre la importancia de las matemáticas para el desarrollo científico, tecnológico y humanístico de la sociedad; considerar la evaluación como una herramienta para mejorar el aprendizaje de los alumnos; enseñar a acometer la resolución de los problemas en lugar de que el profesor los resuelva de una forma lineal y mecánica; empleo de estrategias metacognitivas; etc. A través de estos procedimientos y recursos los alumnos lograron mejorar la comprensión de conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, aunque no se llegó al aprendizaje significativo deseado. Estamos convencidos de que se debe modificar sustancialmente la metodología de enseñanza de la Matemática basada exclusivamente en clases magistrales expositivas sin apenas interacción, y superar la aplicación insistente de pruebas escritas al final del curso como único instrumento de evaluación de dicha enseñanza.

## Bibliografia

Acuña, C. (1996). Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior. En F. Espinoza (Dir.): *Investig. en Matemática Educativa*, 93-109. Dpto. de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México: Grupo Edit. Iberoamericana.

Aguiar, M. (2001). *El diálogo en el aula, ¿una alternativa al tradicional método de selección natural en la enseñanza de la Matemática?* Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=269664
[Fecha de consulta: 05 de febrero de 2010]

Alonso, J. (1994). *Motivación y Aprendizaje en el aula*. *Cómo Enseñar a Pensar*. Madrid: Santillana.

Arrieta, M. (1996). *Modelo causal del rendimiento en Matemáticas (11-12 años)*. Didáctica de la Matemática. Universidad País Vasco (España).
https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v16n1963.pdf
[Fecha de consulta: 23 de julio de 2009]

Ausubel, D. (1973). Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. En S. Elam (Comp.): *La educación y la estructura del conocimiento. Investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y la naturaleza de las disciplinas que integran el currículum*, 211-239. Buenos Aires: Ediciones El Ateneo.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Brashi, P.L. (1993). *Elaboración y evaluación de los módulos de enseñanza y aprendizaje para el subproyecto Matemática II.* UNELLEZ-Barinas. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora (Barinas, Venezuela).

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Base de datos Dialnet.
http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2746539
[Fecha de consulta: 06 de febrero de 2010]

Cerda, J. (2010). *Hacia un programa de autorregulación del pensamiento lógico-formal en el aprendizaje de las Matemáticas.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid (España). Inédita.

Cubillo, C. y Ortega, T. (2000). Influencia de un Modelo Didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Julio. Vol. 3, Nº 2. México.

De Guzmán, M. (1999). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos* (4ª edic.). Madrid: Pirámide.

Fernández, A. (1990). *Impacto de la calculadora electrónica en la educación matemática primaria. Un estudio cuasi-experimental en el tercer nivel*. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=87843
[Fecha de consulta: 05 de febrero de 2010]

Gallardo, A. (1996). El paradigma cualitativo en Matemática Educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. En F. Espinoza (Dir.): *Investigaciones en Matemática Educativa*, 197-222. Dpto. de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

González, F. (1995). *El corazón de la Matemática*. Maracay (Venezuela): Copiher.

Hurtado, J. (2000). *Metodología de la investigación holística*. Caracas: SYPAL.

Ibáñes, M. (2000). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de Bachillerato*. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=251352
[Fecha de consulta: 06 de febrero de 2010]

Llinares, S. (1994). Los aprendizajes y las matemáticas: el proceso de aprendizaje. En V. García (Dir.): *La Enseñanza de las matemáticas en la educación* intermedia, 183-225. Madrid: Rial, S.A.

Miñán, A. (1996). *Resolución de problemas en alumnos con necesidades educativas especiales*. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=176541
[Fecha de consulta: 05 de febrero de 2010]

Miranda, A. et al. (1998). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo*. Málaga (España): Aljibe.

Morales, E. (1995). *Efectos de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático en los alumnos de noveno grado de Educación Básica*. Trabajo de Grado de Maestría no publicado. Universidad de Carabobo. Valencia (Venezuela).

Nieto, J. (1997). *Cómo enseñar a pensar. Los programas de desarrollo de las capacidades intelectuales*. Madrid: Editorial Escuela Española.

Oliveras, M. (1994). *Etnomatemáticas en trabajos de artesanía andaluza. Su integración en un modelo para la formación de profesores y en la innovación del currículo matemático* Escolar. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=142116
[Fecha de consulta: 06 de febrero de 2010]

Orsini, M. (1999). *Procesos Cognitivos que activa el docente de Matemática de Educación Superior durante su interacción con el aula en relación con su eficacia docente*. Trabajo de ascenso no publicado. Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora (Barinas, Venezuela).

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria.* Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=193560
[Fecha de consulta: 05 de febrero de 2010]

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas.* Madrid: Siglo XXI.

Polya, G. (1978). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas.

Ramírez, Z. (1998). *Constructivismo Didáctico Aplicado a las Matemáticas*.
http://www.iisue.unam.mx/seccion/bd_iresie/index.php?lg=b2J0X2FydC5odG1s
[Fecha de consulta: 18 de marzo de 2010]

Ríos, P. (2004). *La aventura de aprender.* Caracas: Cognitus.

Roa, R. (1999). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=226899
[Fecha de consulta: 04 de febrero de 2004]

Romero, I. (1995). *La Introducción del Número Real en Educación Secundaria*. Base de datos TESEO:
https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=158220
[Fecha de consulta: 05 de febrero de 2010]

Santaló, L.A. et al. (1994). *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Madrid: Rialp.

Sequera, E. (1996). *Efecto de un diseño instruccional en el desempeño de los alumnos en la asignatura Introducción a la Matemática.* Trabajo de Grado. Universidad de Carabobo (Valencia, Venezuela).

Sutherland, R. et al. (1996). Cultura y cognición. El caso de las matemáticas y las ciencias. En F. Espinoza (Dir): *Investigaciones en Matemática Educativa*, 1-16. Dpto. de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Valiente, S. (2000). *Didáctica de la Matemática*. Madrid: La Muralla.

Velásquez, F. (2000). Las Matemáticas ante el reto cultural y social del siglo XXI. Matemáticas, Cultura y Sociedad. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Nº 23 (1), 5-8. Barcelona: Graó de Serveis Pedagògies.

Vigotsky, L.S. (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* Madrid: Crítica.

**Dr. Jesús W. Cerda Quintero**. Profesor Departamento de Educación - Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidental 'Ezequiel Zamora' (UNELLEZ) de la ciudad de Barinas (Venezuela). **cjesus72@gmail.com**

**Dra. María Fernández Hawrylak** Profesora Titular de Universidad Departamento de Ciencias de la Educación - Universidad de Burgos (España). **mfernandez@ubu.es**

**Dr. Jesús Á. Meneses Villagrá** Profesor Titular de Universidad Director del Dpto. de Didácticas específicas Departamento de Didácticas Específicas - Universidad de Burgos (España). **meneses@ubu.es**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 51-67

www.fisem.org/web/union

# Conhecimentos revelados nas Narrativas de professores de Matemática sobre o uso de Objetos de Aprendizagem

**Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Renata Ercília Mendes Nifoci**

Fecha de recepción: 11/03/2013
Fecha de aceptación: 15/02/2014

| | |
|---|---|
| **Resumen** | Se presentan los resultados de una investigación con el propósito de analizar el conocimiento de profesores de matemáticas al utilizar objetos de aprendizaje. A través de narraciones, los maestros fueron capaces de reportar sus inquietudes y expectativas frente a la enseñanza de la geometría, objetos de aprendizaje y uso de tecnologías. La investigación se basa en las ideas de Mishra y Koehler sobre Tecnología y Conocimiento de Contenido Pedagógico (TPCK). En el análisis de las narrativas de los docentes, se encontró que el conocimiento pedagógico, junto con el conocimiento del plan de estudios fue importante en la elección de objetos de aprendizaje. Los resultados marcan la necesidad de formar al profesor en el uso de recursos tecnológicos cuando reconocen la importancia de ellos en el proceso de aprendizaje, pero no saben cómo proceder en las tecnologías. **Palabras clave**: geometría, uso de tecnología. |
| **Abstract** | Presents the results of a research and aims to an analysis of the knowledge revealed by a study group of Mathematics teachers to use Learning Objects. Through Narratives, the teachers were able to report their concerns and expectations against the teaching of geometry, learning objects and use of technologies. As a theoretical contribution, this research is based on the ideas of Mishra and Koehler on the Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK). The analysis of the narratives of teachers found that pedagogical knowledge combined with the knowledge of the curriculum was important in the choice of Learning Objects. The results indicate the need to invest in teacher education forward the use of technological resources once the teacher recognizes the importance in the learning process, but does not knowing conduct on the technologies. **Keywords**: geometric, use of technologies. |
| **Resumo** | Presenta resultados de uma pesquisa com o objetivo de analisar os conhecimentos revelados por um Grupo de professores de Matemática ao utilizarem Objetos de Aprendizagem. Por meio de Narrativas, os professores puderam relatar seus anseios e expectativas frente ao ensino de Geometria, Objetos de Aprendizagem e uso das tecnologias. A pesquisa se baseia nas ideias de Mishra e Koehler sobre o Conhecimento do Conteúdo Pedagógico e Tecnológico (TPCK). Na análise das Narrativas dos professores, verificou-se que o conhecimento pedagógico aliado ao conhecimento do currículo foi importante na escolha dos Objetos de Aprendizagem. Os resultados apontam a necessidade de se investir na formação do professor na utilização de recursos tecnológicos uma vez que os mesmos reconhecem a importância desses recursos no processo de aprendizagem, mas não sabem como proceder diante das tecnologias. **Palavras-chave:** geométricas, uso das tecnologias. |

## Introducción

A Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores Paulo Renato Costa Souza (EFAP)[1], da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, promoveu um curso denominado M@tmídias3, de formação continuada a distância para professores de Matemática da rede pública com aulas atribuídas no Ensino Médio. Nesse curso e por meio do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) da EFAP foram utilizados Objetos de Aprendizagem disponibilizados no repositório M3 Matemática Multimídia do Instituto de Matemática e Estatística da Unicamp. Em cada módulo proposto havia pelo menos um áudio, um vídeo e um *software* que abordavam o assunto estudado.

Ao final do curso, os professores deveriam escolher pelo menos um Objeto de Aprendizagem, dentre os estudados, para aplicá-lo em uma turma do 3º ano do Ensino Médio e elaborar um relatório sobre essa experiência. Na análise dos relatórios, segundo os critérios estabelecidos, percebeu-se que alguns professores apontaram aspectos positivos sobre a utilização dos Objetos de Aprendizagem na sala de aula e também indicaram a possibilidade de novas investigações.

Nessa direção foi realizada uma pesquisa, cujos resultados são expostos neste artigo, que trata da utilização de Objetos de Aprendizagem como recurso para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental – Ciclo II. A ideia principal consistiu em apresentar a alguns professores tais recursos como possíveis facilitadores na contribuição do processo de ensino e aprendizagem, e analisar os conhecimentos revelados pelos mesmos com relação aos aspectos pedagógicos do conteúdo trabalhado e das tecnologias utilizadas.

Desse modo, um Grupo de Estudos com professores de Matemática da rede pública estadual de São Paulo se formou com o intuito de observar e analisar como os Objetos de Aprendizagem são utilizados em sala de aula e como eles podem auxiliar os professores no ensino de Geometria. Dentre as observações realizadas no Grupo de Estudos destaca-se a questão do conhecimento do professor em relação ao currículo, particularmente em relação ao eixo que trata do ensino de Geometria, assim como o conhecimento tecnológico e as habilidades para utilizar os recursos trabalhados.

As primeiras informações aconteceram em momentos de conversa com os professores e na formação do Grupo de Estudos. Para subsidiar os encontros utilizou-se a metodologia das Narrativas para a descrição dos processos percorridos, que pode revelar os conhecimentos dos professores e as informações desses docentes sobre a atuação em sala de aula com o uso de Objetos de Aprendizagem.

Para guiar a pesquisa, levantou-se a seguinte questão: que aspectos do conhecimento são explicitados nas Narrativas dos professores sobre a experiência vivenciada com o uso de Objetos de Aprendizagem? Assim, o objetivo da pesquisa foi analisar os aspectos referentes aos conhecimentos pedagógicos, tecnológicos, de conteúdo e suas intersecções explicitados nas Narrativas dos professores sobre a experiência no uso de Objetos de Aprendizagem.

---

[1] www.escoladeformacao.sp.gov.br

## A Geometria e a Tecnologia nos documentos oficiais

Em 1997, o Ministério da Educação (MEC) publicou os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino (PCN) como documento norteador da Educação Nacional, fornecendo subsídios necessários para que cada Estado pudesse construir seu currículo.

Nos PCN encontram-se algumas referências sobre o uso das tecnologias em sala de aula e de como elas podem influenciar na formação do aluno, permitindo a reflexão do professor sobre a contribuição desses recursos no processo de ensino e aprendizagem.

> As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas. Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer (BRASIL, 1998, p. 43).

No documento oficial acima, os computadores são citados como recursos digitais que auxiliam na compreensão de conceitos e no desenvolvimento cognitivo, permitindo um trabalho diferenciado e “que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros” (Brasil, 1998, p. 44). A escolha dos recursos é apontada como um dos fatores primordiais e deve estar de acordo com os objetivos pretendidos, conforme o processo de ensino no qual o aluno está inserido. O papel do professor também é considerado como fundamental no processo de ensino e aprendizagem.

> Longe da ideia de que o computador viria substituir o professor, seu uso vem, sobretudo, reforçar o papel do professor na preparação, condução e avaliação do processo de ensino e aprendizagem (Brasil, 1998, p. 45).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF), a tecnologia é apresentada como um recurso educacional que pode ser um aliado do professor no ambiente educacional. E a seleção desses recursos é imprescindível para alcançar os objetivos que se pretende atingir.

No Estado de São Paulo, em 2008, foi apresentada aos professores de Matemática da rede pública estadual a Proposta Curricular de Matemática. Esse documento serviu como base e antecedeu o Currículo Oficial de Matemática, implantado na rede a partir de 2010, cuja intenção é oferecer uma base comum de conteúdos de forma a alcançar uma condição igualitária de aprendizagem.

O Currículo Oficial do Estado de São Paulo sugere a utilização de instrumentos como calculadora e computadores, cita a importância da articulação a partir dos recursos tecnológicos como formas de expressão, com o objetivo de “colaborar para uma tomada de consciência da ampliação de horizontes que essas ferramentas propiciam” (São Paulo, 2010, p.35). Também há referências sobre o Ensino de Geometria nas diferentes séries do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, bem como os conteúdos a serem trabalhados em cada ano e quais habilidades serão desenvolvidas pelos alunos.

Somado à preocupação com a aprendizagem de todos os alunos, o Currículo de Matemática foi elaborado como apoio didático para subsidiar o planejamento dos professores. Além do foco à aprendizagem dos alunos, o Currículo conta com o Caderno do Professor de Matemática. Nesses documentos constam:

> Os conteúdos que versam sobre currículo, planejamento e avaliação de forma a subsidiar o professor e o gestor em suas práticas para implementar o Currículo do Estado de São Paulo, organizar sua crítica e construir a Proposta Pedagógica que representa a identidade de sua unidade. (São Paulo, 2010, p.4).

Os conteúdos de Matemática do Currículo do Estado de São Paulo foram organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. Essa organização acontece tanto no Ensino Fundamental Ciclo II como no Ensino Médio. Com o Grupo de Estudos formado por professores da rede pública estadual de São Paulo optou-se por adotar os conteúdos de Geometria para selecionar os Objetos de Aprendizagem utilizados neste estudo.

A justificativa para a inserção da Geometria no currículo de Matemática é o desenvolvimento do pensamento do aluno, para que ele seja capaz de realizar a compreensão, a descrição e a representação, de maneira organizada, do mundo que vive.

## Sobre Objetos de Aprendizagem

Os Objetos de Aprendizagem são entendidos como unidades de ensino reutilizáveis. De acordo com Assis (2005), diferente de ser um conceito muito bem estabelecido, a definição de objeto de aprendizagem é uma concepção emergente que possui várias versões.

Segundo Wiley (2000 apud ASSIS, 2005, p.27), um objeto de aprendizagem é qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para dar suporte à aprendizagem.

Outra concepção é citada por Neto (2011, p.2), conforme o *Learning Objects Metadata Workgroup* "os Objetos de Aprendizagem podem ser definidos por qualquer entidade, digital ou não digital, que possa ser reutilizada ou referenciada durante o aprendizado suportado por tecnologias".

Integrando o processo de seleção de um objeto de aprendizagem, é importante que o professor faça algumas apreciações quanto ao recurso escolhido, ou seja, que realize uma avaliação dos objetos de aprendizagem que irá utilizar em suas aulas. Essa avaliação permite uma orientação sobre o seu uso bem como "reconhecer e avaliar características importantes nestes materiais, características que podem atestar ou não sua qualidade" (Reategui *et al*, 2010, p.2).

A avaliação dos Objetos de Aprendizagem que os professores utilizaram no Grupo de Estudos se apoiou em Tarouco (n/a) do sistema EDUCAUSE. Para essa concepção, identifica-se o Objeto de Aprendizagem a ser avaliado, enumerando suas características: Título, Breve descrição, Endereço-URL, Objetivo da aprendizagem e Público-alvo.

O sistema EDUCAUSE apresenta uma forma de avaliação por escalas de diferentes critérios que se pode observar em um Objeto de Aprendizagem. Considerou-se essa avaliação como a mais adequada para auxiliar o professor no processo de seleção do Objeto de Aprendizagem para a realização de suas atividades em sala de aula.

Os Objetos de Aprendizagem podem ser encontrados em repositórios na internet, alguns de acesso gratuito, por meio de seus metadados, que são a identidade dos mesmos e possibilita fácil localização e escolha da forma mais adequada possível (Sousa, 2010, p.77).

O repositório M3 Matemática Multimídia[2], utilizado na pesquisa, foi criado pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Conforme informações, nesse repositório estão disponibilizados mais de trezentos e cinquenta recursos educacionais, licenciados sob a filosofia *Creative Commons*, que permite copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não permite o uso comercial ou o relicenciamento para uma licença mais restritiva.

Os Objetos de Aprendizagem nesse repositório estão divididos em quatro categorias: Vídeo, Áudio, Experimento e *Software*. Todos os vídeos, áudios, experimentos e *softwares* possuem o Guia do Professor, que é um aprofundamento do conteúdo, apresentando sugestões de atividades que podem ser realizadas antes ou depois da utilização desses objetos de aprendizagem. O Experimento, além do Guia do Professor, possui outros dois arquivos: “O Experimento”, onde é possível encontrar orientações básicas para que as atividades propostas possam ser realizadas em sala de aula e a “Folha do Aluno”, para que os alunos acompanhem as propostas da atividade selecionada. No *Software* encontra-se o link “Usar na internet”, que permite acesso ao recurso que será utilizado nessa mídia.

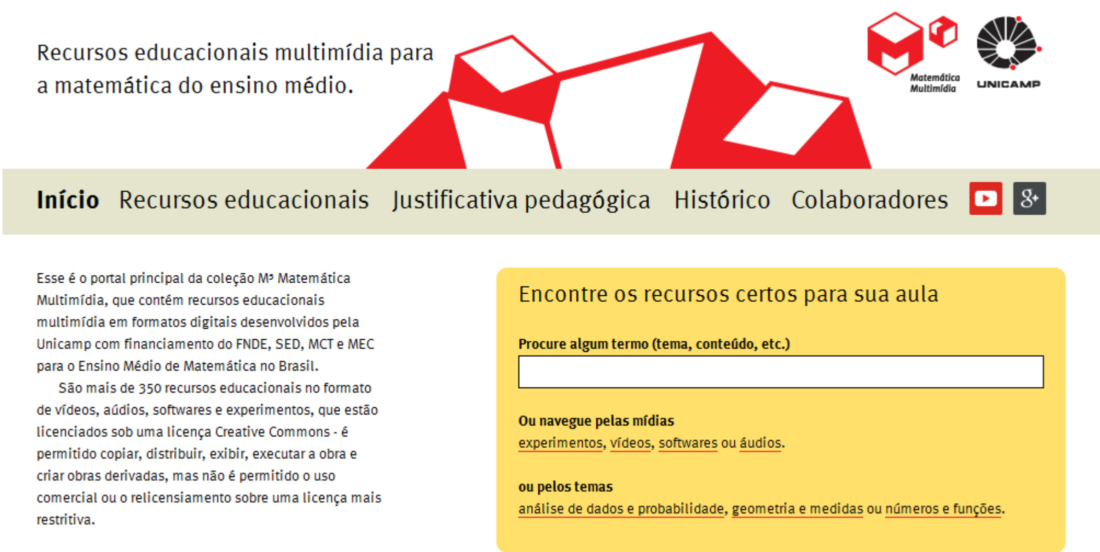



**Figura 1. Página inicial do repositório M3. Matemática Multimídias.**
**Fonte: www.m3.ime.unicamp.br**

[2] http://www.m3.ime.unicamp.br/

Pelo fato do repositório apresentar uma quantidade significativa de Objetos de Aprendizagem, para facilitar a avaliação dos professores do Grupo de Estudos, optou-se por selecionar os que possuíssem conteúdos de Geometria do Ensino Fundamental Ciclo II.

Ao estabelecer o critério de seleção "ser um Objeto de Aprendizagem que envolvesse o conteúdo de Geometria", foram localizados trinta e oito. A partir desses, seguiu-se para uma segunda seleção, que obedecia ao critério "conter conteúdos de Geometria ensinados no Ensino Fundamental do Ciclo II", chegando ao total de dez Objetos de Aprendizagem selecionados, entre áudio, vídeo e experimentos apresentados no quadro a seguir:

**Quadro 1. Objetos de Aprendizagem Selecionados. Fonte – Elaborado pelas autoras**

| Vídeos | Áudios | Experimentos |
|---|---|---|
| -A lenda de Dido<br>-A velha história das multidões<br>-Naturalmente<br>-Oferenda musical de Bach | -Calçadas<br>-O que é paralelogramo | -Como economizar cadarço<br>-Empacotamento de latas<br>-Engenharia de Grego<br>-Espelhos e Simetrias |

Embora esse repositório se intitule como uma coleção de "recursos educacionais multimídia para a Matemática do ensino médio", há recursos que podem ser utilizados no Ensino Fundamental, fato justificado por uma das características dos Objetos de Aprendizagem, que é a reusabilidade, ou seja, a possibilidade de utilizar um mesmo Objeto de Aprendizagem em diferentes contextos e para propósitos distintos.

## Technological Pedagogical Content Knowledge –TPCK

Ao trabalhar qualquer conteúdo com alunos em sala de aula, espera-se que o professor tenha, segundo Shulman (1986), o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. O conhecimento curricular trata do conhecimento por parte do professor sobre os documentos norteadores do programa curricular de ensino.

O referencial teórico que trata do Conhecimento do Conteúdo Pedagógico e Tecnológico (TPCK. Technological Pedagogical Content Knowledge), necessário ao professor para integrar a tecnologia ao seu ensino, tem como base a teoria de Shulman sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo.

O conhecimento do conteúdo é o conhecimento sobre o assunto que o professor irá ensinar. Já o conhecimento pedagógico trata dos processos e práticas de ensino, ou seja, é o conhecimento que engloba questões de aprendizagem, o papel do professor na sala de aula, o desenvolvimento de plano de aula e a avaliação do aluno. De acordo com Koehler (2011, n.p.), "um professor com profundo conhecimento pedagógico compreende como os alunos constroem conhecimentos e aquisições de competências, desenvolvem hábitos mentais e disposições positivas em relação à aprendizagem" (tradução das autoras).

O conhecimento tecnológico é o conhecimento sobre as tecnologias e sua utilização como recurso educacional. Koehler (2011) cita ainda que o conhecimento tecnológico inclui:

> O conhecimento de sistemas operacionais, *hardware*, bem como a capacidade de usar o conjunto padrão de ferramentas de *software*, tais como processadores de texto, planilhas, navegadores, e-mail, etc [...] seria incluir o conhecimento de como instalar dispositivos periféricos, instalar e remover programas, criar e arquivar documentos (Ibid, n.p. – tradução das autoras).

Koehler (2011), em seus estudos também considera as intersecções entre o conhecimento tecnológico e conhecimento do conteúdo, obtendo o conhecimento do conteúdo tecnológico (TCK. Technological Content Knowledge); entre o conhecimento tecnológico e o conhecimento pedagógico, formando o conhecimento pedagógico e tecnológico (TPK. Technological Pedagogical Knowledge) e entre o conhecimento pedagógico e o conhecimento do conteúdo, formando o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK. Pedagogical Content Knowledge).

O conhecimento do conteúdo tecnológico (TCK) trata da relação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento tecnológico. Nesse caso, além de conhecer e saber utilizar os recursos tecnológicos, o professor é capaz de identificar como recursos disponíveis podem auxiliar no ensino de determinado conteúdo e como o ensino desse conteúdo pode ser aprimorado ao aplicar a tecnologia. Já o conhecimento pedagógico tecnológico (TPK) versa sobre os recursos tecnológicos existentes, sobre como ocorre a utilização desses recursos no processo de ensino e aprendizagem e de que forma esse processo pode sofrer alterações quando há o uso de tecnologias.

O conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), considerado também por Shulman, trata das estratégias de ensino para que haja compreensão, por parte dos alunos, do que está sendo ensinado. Koehler (2011) cita que:

> O PCK está preocupado com a representação e formulação de conceitos, técnicas pedagógicas, o conhecimento do que faz conceitos serem considerados fáceis ou difíceis de aprender, o conhecimento do conhecimento prévio dos alunos e das teorias epistemológicas (Ibid, n.p. - tradução das autoras).

A figura a seguir representa tais conhecimentos e permite a compreensão das relações descritas anteriormente.

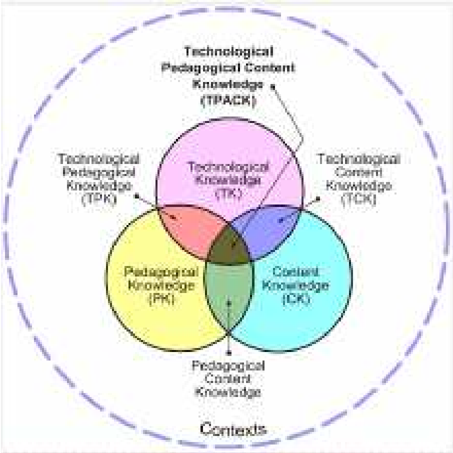



**Figura 2. Contextualização do TPCK**
**Fonte: http://tpck.org**

No contexto das teorias sobre o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), de Shulman e o Conhecimento do Conteúdo Pedagógico e Tecnológico (TPCK), de Mishra e Koehler (2006), foi possível observar no Grupo de Estudos se o professor, ao utilizar os Objetos de Aprendizagem, possui conhecimento do currículo e habilidades com os recursos tecnológicos utilizados, se tem conhecimento do conteúdo abordado em cada Objeto de Aprendizagem, se compreende o que significa ensinar um conteúdo específico bem como os princípios e procedimentos necessários para este ensino.

## Metodologia

A fala é uma das formas de comunicação de ideias. É por meio dela que as pessoas colocam e defendem suas opiniões ou simplesmente a utilizam para assuntos do cotidiano. A Narrativa é uma forma de comunicação entre as pessoas. Bruner (1991, p.14, 21 apud Hanke, 2003, p. 118) afirma que "narrar contribui para a estruturação da experiência humana, pois organizamos nossa experiência e nossa memória principalmente através da Narrativa".

De acordo com Hanke (2003, p. 118), a Narrativa "é um tipo próprio da comunicação cotidiana". O mesmo autor pontua que as Narrativas contribuem para o acúmulo, o armazenamento e a transmissão de conhecimentos e que, por meio delas, é possível que cada pessoa possa comunicar suas experiências individuais, fazendo com que fiquem conhecidas por outras pessoas.

Para se realizar uma Narrativa, alguns elementos são necessários. Segundo Chafe (1990, p.94 apud Hanke, 2003, p. 119), "uma Narrativa precisa de uma introdução, um momento (quando?), um local (onde?), personagens atuantes (quem?) e uma situação de fundo no qual o conteúdo da Narrativa se desenvolve".

A metodologia de Narrativas enquadra-se como um recurso para que os professores expressem seus saberes e suas experiências.

> Consideram-se as Narrativas como objetos que podem criar oportunidades para que o professor examine a prática real de ensino, de forma a ampliar seus saberes e a melhorar sua própria prática por meio do trabalho colaborativo, com vistas a planejar, implementar, analisar e revisar aulas que eles mesmos ministram. (Marquesin, Passos, 2009, p.223)

Por meio das Narrativas, o professor também faz uma reflexão sobre sua formação, sua rotina em sala de aula e o processo de ensino e aprendizagem no qual está envolvido.

> A produção de Narrativas de professores sobre suas aprendizagens e sobre determinadas atuações didáticas é entendida como um processo de reflexão pedagógica que lhes permite compreender as consequências de sua atuação e criar novas estratégias de ensino; e revela-nos indícios de seu desenvolvimento profissional (Passos, Galvão, 2011, p.78).

No presente trabalho, fez-se o uso de Narrativas para propiciar a troca de experiências na interação com o grupo sobre as atividades realizadas.

> Sendo assim, os estudos teóricos associados às vivências de produção e de análise de Narrativa garantem que, quando há intencionalidade e compreensão sobre o potencial interpretativo deste gênero textual, o docente consegue, ao narrar sua prática e ao ouvir as Narrativas dos outros,

> compreender o conteúdo de seus argumentos, rememorar suas experiências e tomar consciência de suas aprendizagens e, portanto, desenvolver-se profissionalmente. (Marquesin, Passos, 2009, p.235)

Nesta pesquisa optou-se pela metodologia das Narrativas dos processos percorridos e das conclusões destes professores sobre os estudos do grupo e sua atuação em sala de aula.

Espera-se que os professores participantes deem continuidade a esta prática, trocando experiências sobre outras situações, buscando alternativas tecnológicas que contribuam para o processo de aprendizagem dos alunos, além de perceber que eles mesmos se desenvolveram profissionalmente e pedagogicamente. A esse respeito, Marquesin e Passos (2009) afirmam que:

> O professor, ao narrar sua prática e ao ouvir as Narrativas dos outros, compreende o potencial de seus argumentos, rememora suas experiências e toma consciência de suas aprendizagens. Diante desses aspectos, confirma-se a possibilidade de escrita de Narrativa como contexto de formação e de desenvolvimento profissional (Ibid, p.226).

Assim, por meio dessa prática, observou-se o conhecimento que o professor apresenta sobre o conteúdo, sobre o currículo e sobre a utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem.

## Procedimentos Metodológicos

O Grupo de Estudos foi composto por professores de Matemática da Rede Pública Estadual de São Paulo, com aulas atribuídas para as séries finais do Ensino Fundamental-Ciclo II. O convite para participar do Grupo de Estudos foi enviado por e-mail e cinco professores apresentaram disponibilidade e interesse.

Os seis encontros do Grupo de Estudos aconteceram no Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino da Região de Guarulhos Sul. Cada encontro teve duração de 3 horas, totalizando 18 horas de estudos. As atividades com o uso de Objetos de Aprendizagem aconteceram em duas escolas públicas da rede estadual.

Todos os encontros do Grupo de Estudos tiveram o áudio gravado e as atividades realizadas com o uso dos Objetos de Aprendizagem nas escolas foram acompanhadas por uma das pesquisadoras.

Para o desenvolvimento deste trabalho, os professores deveriam escolher e avaliar um dos Objetos de Aprendizagem que apresenta o conteúdo de Geometria para utilizar com seus alunos e, após a aplicação, os professores se reuniriam para narrar suas experiências sobre a realização da referida atividade.

Após a aplicação dos Objetos de Aprendizagem na escola, o grupo se reuniu para que cada professor apresentasse o seu relato oral, narrando suas experiências e observando os aspectos citados anteriormente.

Nas Narrativas são descritas as ideias, as sugestões, as angústias e ansiedades do grupo, o motivo pelo qual cada professor optou por escolher um determinado Objeto de Aprendizagem e o resultado da utilização do mesmo na escola, permitindo identificar aspectos dos conhecimentos revelados pelos professores.

## Procedimentos das Narrativas

As Narrativas foram consideradas pelos seguintes eixos: Tecnologias, Geometria e Objetos de Aprendizagem.

## Sobre Tecnologias

No primeiro encontro, após a apresentação dos objetivos do Grupo de Estudos, surgiram narrativas sobre o entendimento dos professores sobre tecnologia e seu uso na sala de aula. Alguns professores apresentaram resistência, fato que geralmente ocorre porque o professor não sabe como utilizar determinado recurso tecnológico. Todavia, outros professores se mostraram receptivos quanto ao uso das tecnologias na sala de aula, mas não as utilizam por diversos motivos, tais como a falta de acesso à sala de informática, dificuldades de material disponível na escola etc. Os relatos abaixo evidenciam esse fato.

Professor D: *"Uma coisa que eu acredito é que se a gente (professor) conseguir dominar a tecnologia, a gente vai falar quase que a mesma linguagem deles (dos alunos)".*

Professor C: "*Não pode entrar na sala de Informática*?"

Professor A: "*Sem a senha... se você tiver um projeto você pode. Só que a sala ficou duas semanas sem internet, aí eu fui para o EVA mesmo*".

Professor B: "*Ano passado meus alunos fizeram um trabalho de ângulos e eles montaram e quiseram passar no computador... no data show. Eu não sei (utilizar), mas eles (os alunos) sabem e eu vou aprendendo com eles. Eles (os alunos) me ensinam".*

Professor D: *"Eu nunca parei para preparar uma aula (com uso de recurso tecnológico). Eu acho que está precisando disso (o Grupo de Estudos), um incentivo para direcionar".*

Professor E: "*Não, mas eu estou muito a fim de fazer, de usar o computador mesmo. Depois que eu conheci o Geogebra... não só ele, já me deparei com muitos softwares..."*

No segundo encontro, na apresentação do repositório M3 – Matemática Multimídia, o professor D fez uma relação entre o aprendizado e a tecnologia no ponto de vista dos alunos e ressaltou que muitos não apresentam dificuldades com os recursos tecnológicos. Já os professores não têm domínio dessa ferramenta.

Professor D: "*É que aquilo (a tecnologia) já está dentro da realidade deles. O aprendizado é nosso. Os conteúdos (de Matemática) nós é que temos que ensinar, mas a tecnologia já está no dia a dia deles. Por isso é que eles (alunos) ficam motivados (a aprender os conteúdos matemáticos com o uso de recursos de tecnologia)".*

## Sobre Geometria

Ainda no primeiro encontro, foram levantados alguns aspectos sobre o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria. É possível perceber que existe a preocupação dos professores em relação ao ensino, à sua formação inicial e ao conhecimento sobre o conteúdo. Também há relatos sobre a disposição dos conteúdos de Geometria no Currículo Oficial de Matemática.

Professor C: "*É aquilo que você falou: agora eles colocaram (a Geometria) nos vários bimestres, porque antigamente era sempre no último bimestre e eu não sei nada do último bimestre. Como meu professor de Matemática gostava de Geometria, ele ia incluindo (a Geometria entre os outros conteúdos) ao longo do ano"*.

Professor E: "*Depois do curso de Geogebra até o mais simples, a construção de um quadrado já é muito enriquecedor*".

## Sobre Objetos de Aprendizagem

Os professores selecionaram pelo menos um Objeto de Aprendizagem para utilizá-lo em sala de aula como recurso pedagógico. O Objeto de Aprendizagem escolhido deveria estar de acordo com o conteúdo estabelecido pelo Currículo Oficial, revelando o conhecimento curricular, como foi proposto por Shulman(1986). Devido a atividades já agendadas no calendário escolar, apenas dois professores conseguiram implementar essa etapa na escola.

O professor A desenvolveu essa etapa em uma sala de 5ª série / 6ª ano. Ele utilizou três Objetos de Aprendizagem em três aulas de cinquenta minutos para realizar a atividade planejada. Na sala de aula havia vinte e um alunos, que foram divididos em quatro grupos com quatro alunos e um grupo com cinco. Ele entregou os materiais necessários, além de uma pequena apostila com as atividades que os alunos deveriam realizar ao longo da aula, de acordo com as orientações do professor. As atividades dessa apostila foram desenvolvidas com sugestões dadas nos Guias do Professor dos Objetos de Aprendizagem utilizados. A realização dessa atividade foi acompanhada por uma das pesquisadoras.

No penúltimo encontro do Grupo de Estudos, o professor A já havia utilizado os Objetos de Aprendizagem em sala de aula com o objetivo de trabalhar os seguintes conteúdos de Geometria: área, perímetro e simetria. Foi possível perceber o interesse dos demais componentes do Grupo de Estudos em compreender como se deu essa situação na sala de aula.

Professor A: *"Primeiro eles assistiram o vídeo A Lenda de Dido. Depois eles fizeram as figuras de mesma medida, que é o que fala na Lenda de Dido... tem que ser figuras planas regulares. Aí então, só para construir e ter uma ideia do que são figuras planas. Depois a gente vai fazer as cercas da Lenda de Dido... as cercas... quando que vai ser maior? Quando estiver mais próximo do quadrado, que é a figura regular. Depois eles fizeram as figuras no geoplano..."*

Professor A: *"E depois fazer a tabelinha, mesmo perímetro e a maior área. Depois eles assistiram ao vídeo Naturalmente, que fala sobre simetria. Entra com figuras planas e simetria. Pegaram o "espelhinho" e procuravam a simetria tanto nas letras, números, palavras...".*

Professor C: "*Simetria com o espelhinho"?*

Professor A: *"Sim, eu dei um espelhinho para cada grupo e eles colocavam (o espelho) em cima de cada figura para ver qual é simétrica".*

O professor B realizou o experimento "Como Economizar Cadarço" com uma turma de 5ª série/6º ano e estavam presentes vinte e seis alunos, também divididos em grupos. A atividade foi realizada em duas aulas com o acompanhamento da pesquisadora.

O professor entregou para cada grupo a Folha do Aluno, com as orientações sobre a atividade e as três maneiras diferentes de passar o cadarço: o modelo europeu, o modelo americano e o modelo rápido das sapatarias. Os alunos levaram os papelões e os cadarços (alguns alunos levaram barbante em substituição ao cadarço).

O professor B realizou as atividades planejadas e, no último encontro, narrou aos demais colegas como foi essa experiência.

Professor B: *"Eu fiz o trabalho lá na escola. Escolhi o Experimento. Foi bem legal, os alunos gostaram bastante.*"

Professor B: "*Eu levei a folha impressa (a Folha do Aluno) para que vissem o modelo dos cadarços. Uma semana antes eu falei para os alunos que ia ter uma atividade diferente e pedi para eles levarem papelão e cadarço. Quase todos levaram. No dia da atividade, eles sentaram em grupo e iam fazendo conforme eu ia falando. Primeiro, entreguei a folha. Depois, pedi para eles fazerem os furos (os furos para passar o cadarço) e passar o cadarço do jeito, das três maneiras que tinha lá na folha e..."*

Professor D: *"Você também usou o computador, mostrou para eles o Experimento como estava lá no site (repositório M3)?"*

Professor B: *"Não, eu nem levei o computador. Lá na sala só tinha papelão, cadarço, régua, tesoura, barbante... Só isso. Com a folha, eles iam vendo os modelos, os desenhos dos cadarços. Aí, cada um que eles iam fazendo, me chamavam e perguntavam se estava certo, porque em um "dava" o cadarço todo (preenchia todos os furos) e no outro faltava".*

Professor C*: "Como assim faltava?"*

Professor B: *"Era porque cada desenho (modelo de passar o cadarço) era de um jeito diferente... Usa mais ou menos cadarço. Se faltou para todos os furos, é porque usa mais cadarço, precisava de um (cadarço) maior. Era isso que eles tinham que descobrir... o comprimento, o perímetro... qual era maior, qual precisa mais (cadarço). Teve um grupo que não fez assim, eles usaram barbante. Eles iam desenhando cada modelo e cortando o tanto de barbante que usavam para fazer o desenho e depois comparava, colocava um do lado do outro para ver qual usava mais, qual era o maior."*

Professor C: *"Você que falou para eles fazerem assim?*"

Professor B: "*Não, eles que pensaram e fizeram assim. Mas não parou aí... Os alunos, depois que eles terminavam de fazer os três modelos, ficaram passando os cadarços de maneiras diferentes, que não tinham lá (na folha do aluno) só para ver se usava pouco ou muito cadarço e vinham me mostrar, um tênis com o cadarço diferente do outro e mostravam qual era o bom, porque dava todo o cadarço que ele tinha no tênis".*

Professor A: "*Os meninos que fizeram com o barbante?*"

Professor C: *"Não, quase todos fizeram isso até acabar a aula.*"

Ao final da atividade, os alunos já estavam criando outras formas de utilizar o cadarço e faziam inferências se o modelo que tinham inventado era mais econômico do que aqueles feitos na atividade.

## Conhecimentos revelados pelos professores A e B

Após a realização das atividades, houve o último encontro do Grupo de Estudos. O professor A narrou sobre a utilização desses recursos tecnológicos destacando o fato dos alunos compreenderem o conceito de simetria sem ele ter abordado esse assunto anteriormente *"... eu nem tinha ensinado simetria ainda e eles fizeram (a simetria em) todas as figuras..."* (neste momento o professor A mostrava para os outros professores as atividades realizadas pelas crianças).

O professor A demonstrou ter o conhecimento do conteúdo pedagógico e tecnológico, uma vez que conseguiu agregar a tecnologia ao ensino dos conteúdos de Geometria.

Já o professor B, em sua Narrativa, destacou a facilidade com que os alunos conseguiram analisar o tamanho dos cadarços, verificando qual modo necessitava de um comprimento maior. Também foi evidenciado o fato dos alunos não se prenderem aos modelos sugeridos no experimento, criando novas maneiras de passar o cadarço com o menor comprimento possível. O professor B expressou novamente a sua dificuldade com as tecnologias, ressaltando que só consegue utilizar esses recursos se houver uma pessoa (aluno, por exemplo) que fique responsável por cuidar dos aparatos tecnológicos.

Os Objetos de Aprendizagem também se mostraram eficientes para atingir os objetivos propostos pelo professor B, porém, sua utilização fica restrita ao Experimento, uma vez que não é necessária a utilização da tecnologia.

O professor apresenta indícios de ter conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento do currículo, sempre fazendo as intervenções necessárias quando solicitado pelos alunos, mas pode-se afirmar que o professor B apresenta restrições quanto ao conhecimento do conteúdo tecnológico e pedagógico (TPCK), uma vez que demonstra grande dificuldade em integrar a tecnologia ao processo de ensino e aprendizagem.

Os dois professores também demonstraram ter conhecimento sobre o Currículo Oficial, pois os assuntos abordados na utilização dos Objetos de Aprendizagem estavam de acordo com os conteúdos a serem trabalhados na série em que eles lecionavam.

## Análise das Narrativas

Durante os encontros, os professores puderam narrar seus anseios, suas angústias e seus pensamentos sobre o uso das tecnologias em sala de aula, ensino do conteúdo de Geometria e os objetos de aprendizagem. Em alguns momentos, vieram à tona assuntos relacionados à formação continuada docente.

Partindo das Narrativas realizadas, é possível responder à questão inicial do presente trabalho “Que aspectos do conhecimento são explicitados nas Narrativas dos professores sobre a experiência vivenciada no uso de Objetos de Aprendizagem?”

Após as Narrativas dos professores A e B verificou-se que o conhecimento pedagógico aliado ao conhecimento do currículo foi importante na definição dos Objetos de Aprendizagem selecionados, pois, ao escolher os recursos, era necessário prévio conhecimento acerca do assunto abordado no currículo para que pudessem inferir e justificar a escolha de cada Objeto de Aprendizagem. Também percebeu-se que as atividades foram organizadas de forma que o conteúdo pudesse ser compreendido pelos alunos, pois o “conteúdo pedagógico também inclui o entendimento do que torna fácil ou difícil a aprendizagem de determinado tópico, bem como as concepções errôneas dos estudantes e suas implicações na aprendizagem” (Almeida, Biajone, 2007, p. 287).

Quanto ao conhecimento tecnológico, observou-se que o professor A domina a utilização das novas mídias, pois ele não se limitou em apenas mostrar os vídeos do repositório M3 – Matemática Multimídia aos alunos e utilizou o recurso *Power Point* para fazer algumas inferências sobre os conteúdos abordados em cada vídeo. O professor B apresenta restrições sobre a utilização de recursos tecnológicos e há evidências que seu Conhecimento do Conteúdo Pedagógico e Tecnológico (Tpack) é restrito, especialmente quanto ao conhecimento tecnológico, uma vez que demonstra ter o conhecimento do conteúdo matemático.

Os dois professores reconheceram os Objetos de Aprendizagem como um facilitador ao trabalhar conteúdos de Geometria com seus alunos, afinal, os mesmos demonstraram ter compreendido os conceitos envolvidos e os objetivos propostos por eles foram atingidos.

Um dado relevante é que os professores C, D e E não utilizam recursos tecnológicos por falta de acesso aos mesmos e não por apresentarem dificuldades frente às novas tecnologias, pois durante os encontros do Grupo de Estudos eles não demonstraram dificuldades com o conhecimento tecnológico.

Em relação aos Objetos de Aprendizagem, os demais professores se mostraram favoráveis à sua utilização em sala de aula, fato comprovado ao longo das Narrativas, especialmente quando o professor C afirma que já utilizou, em outro momento, um dos objetos de aprendizagem existentes no repositório M3 Matemática Multimídia. O professor C narra que o Guia do Professor orienta o trabalho em sala e que o desenvolvimento da atividade permite que o docente realize a avaliação da aprendizagem simultaneamente.

Ainda em relação à utilização dos Objetos de Aprendizagem e de acordo com o relato dos professores, há certa dificuldade em utilizar as salas que possuem computadores na escola. Outro empecilho é a falta de recursos tecnológicos, como *datashow* e *notebooks*, podendo ser um fator que dificulta a utilização dos Objetos de Aprendizagem no processo de ensino e aprendizagem.

Quanto à consolidação do conhecimento do conteúdo pedagógico e tecnológico, revelam-se aspectos favoráveis, já que os professores se mostraram intencionados a utilizar as tecnologias, buscando informações e formações em cursos ou pela troca de experiência entre eles. O fato dos professores buscarem Objetos de Aprendizagem relacionados ao conteúdo da série a qual lecionavam, pensando-os como uma estratégia diferenciada para concluir ou ensinar um novo assunto aos alunos, mostra também que eles possuíam conhecimento do currículo.

> O conhecimento pedagógico da matéria (conteúdo) consiste nos modos de formular e apresentar o conteúdo de forma a torná-lo compreensível aos alunos, incluindo analogias, ilustrações exemplos, explanações e demonstrações. A ênfase está nas maneiras de se representar e reformular o conteúdo de tal forma que ele se torne compreensível aos alunos (Almeida e Biajone, 2007, p. 288).

Acerca dos objetivos idealizados pelos professores, pode-se afirmar que foram atingidos, uma vez que o Professor A pretendia concluir o ensino do conteúdo de área e perímetro e apresentar o conteúdo simetria. Os alunos demonstraram ter compreendido os conceitos desenvolvidos nessa atividade. O professor B, mesmo não utilizando diretamente o recurso tecnológico para apresentar o Objeto de Aprendizagem selecionado, conseguiu alcançar o objetivo previsto, que era observar qual modelo de passar o cadarço era mais econômico.

## Considerações Finais

O objetivo da pesquisa apresentado neste trabalho foi analisar os aspectos do conhecimento explicitados nas Narrativas dos professores sobre a experiência vivenciada com o uso de Objetos de Aprendizagem, considerando principalmente os aspectos referentes ao conhecimento pedagógico e tecnológico do conteúdo.

Para atingir o objetivo proposto, foi formado um Grupo de Estudos com cinco professores de Matemática da rede pública estadual, para que eles pudessem analisar e selecionar os Objetos de Aprendizagem a serem utilizados com os alunos. Para esta seleção, optou-se pelos Objetos de Aprendizagem que abordavam os conteúdos de Geometria considerados no Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

Com a finalidade de atingirmos o objetivo proposto, surgiu o seguinte questionamento: que aspectos do conhecimento são explicitados nas Narrativas dos professores sobre a experiência vivenciada com o uso de Objetos de Aprendizagem?

Os estudos desta pesquisa estão embasados na teoria de Shulman, que aborda os conhecimentos essenciais ao professor, como o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK - *Pedagogical Content Knowledge*), o conhecimento do conteúdo e o conhecimento do currículo; na teoria de Mishra e Koehler (2006), que aponta, além dos conhecimentos já citados por Shulman, o conhecimento do conteúdo pedagógico e tecnológico (TPCK – Technological Pedagogical Content Knowledge), necessários ao professor para que haja a integração do uso da tecnologia no processo de ensino e aprendizagem.

Optou-se pela metodologia das Narrativas, pois trata-se de um meio que o professor tem para expor seu conhecimento e suas vivências. Dessa forma, o narrador (professor) pôde relatar os caminhos percorridos para a realização das atividades e refletir acerca do uso dos Objetos de Aprendizagem como recurso tecnológico auxiliador no ensino de Geometria. Todas essas ideias foram expostas durante os encontros do Grupo de Estudos, gerando assim debates sobre alguns eixos, como formação continuada do professor, uso das tecnologias, ensino e aprendizagem de Geometria e os Objetos de Aprendizagem.

Os resultados desta pesquisa evidenciam a necessidade de propostas para a formação do professor acerca da utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, uma vez que se percebe que há vontade do professor em utilizar as novas tecnologias em sala de aula. No entanto, tal anseio não se concretiza por conta do desconhecimento diante de tais tecnologias e de outros fatores.

Constatou-se também que os professores participantes desta pesquisa não se limitam frente à procura de cursos que possam complementar a sua formação. Eles relatam suas fragilidades mediante as tecnologias, aos conteúdos de Geometria e buscam seu aprimoramento, seja por meio de cursos de formação continuada, leitura de materiais ou na troca de experiências entre seus pares.

Quanto à utilização dos Objetos de Aprendizagem, os professores reconheceram novas possibilidades de tratar conceitos matemáticos de forma diferenciada, em especial a Geometria, por conta de algumas representações que só são possíveis de visualizar por meio de recursos que vão além da lousa e livros didáticos. Outro ponto favorável é a existência do Guia do Professor para auxiliar o docente na elaboração de atividades e, no caso do Experimento, a Folha do Aluno, que permite ao professor utilizar o Objeto de Aprendizagem sem o auxílio do computador.

Por conta desta pesquisa foi possível perceber que ser professor vai além do saber restrito ao conteúdo. Por trás de uma aula há uma série de conhecimentos envolvidos, como cita Shulman, os quais os professores devem observar para que se atinja o objetivo proposto no ensino do assunto selecionado. Quanto ao uso das tecnologias, além do conhecimento do conteúdo, da forma como o aluno aprende e do documento que orienta o processo de ensino e aprendizagem, o professor também precisa saber utilizar os recursos tecnológicos e observar de que forma poderão lhe auxiliar em sua prática docente.

Nesta pesquisa não foi selecionado o Objeto de Aprendizagem da categoria Áudio, mas sugere-se que pesquisas futuras sejam realizadas com esse recurso em alunos com deficiência visual, uma vez que o Áudio proporciona a descrição ou a definição de conceitos matemáticos (e também geométricos), possibilitando a esses alunos uma forma diferenciada de se aprender Geometria.

## Bibliografia

Almeida, P. C. Albieri de; Biajone, J. (2007) Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. *Educação e Pesquisa,* São Paulo, v. 33, n. 2, p.281-295, maio/ago.

Assis, L. Souto de. (2005) *Concepções de Professores de Matemática quanto à utilização de objetos de aprendizagem: um estudo de caso do projeto RIVED-BRASIL.* 2005. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Brasil, (1998) Secretaria de Educação Fundamental. Secretaria da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: Mec, 148 p.

Hanke, M. (2003) *Narrativas orais: formas e funções.* Revista Contracampo. Rio de Janeiro, v. 9, n. 0, p.117-126. Acesso em: 22 out. 2013.
Disponível em: <http://www.revistas.univerciencia.org/index.php/contracampo>. Acesso em: 22 out. 2013.

Koehler, M. (2011) TPCK. Technological Pedagogical Content Knowledge. Disponível em: <http://www.tpck.org/>. Acesso em: 13 set. 2012.

Marquesin, D.; Passos, L. F. *Narrativa como objeto de estudo: aportes teóricos.* (2009). *Revista Múltiplas Leituras*, São Paulo, v. 2, n. 2, p.219-237.

Mishra, P.; Koehler, M. (2006).*Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge.* Teachers College Record v.108, n.6, p. 1017-1054.

Neto, H. E. (2011) *Tecnologia: Objetos de Aprendizagem.* Disponível:<http://www.janeladofuturo.com.br/noticias/artigo_Objetos_de_Aprendizagem.pdf> Acesso em: 01 jun. 2012.

Passos, C. Brancaglion; Galvão, C. (2011). *Narrativas de Formação: Investigações Matemáticas na Formação e na Atuação de Professores.Revista Interacções*, [s.i], v. 7, n. 18, p.76-103.

Reategui, E.; Boff, E.; Finco, M. (2010). *Proposta de Diretrizes para Avaliação de Objetos de Aprendizagem Considerando Aspectos Pedagógicos e Técnicos. Revista Renove*, Porto Alegre, v. 8, n. 3, p.1-10. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/18066/10653>. Acesso em: 01 dez. 2011.

São Paulo. Secretaria da Educação. (2010). Currículo do Estado de São Paulo. Matemática e Suas Tecnologias - Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio. São Paulo: SEE.

Shulman, Lee S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Education Researcher,* [s.i], v. 15, n. 2, p.4-14.

Sousa, Edvaldo Vale de. (2010). *Objetos de aprendizagem no ensino de Matemática e Física: uma proposta interdisciplinar.* 198 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Tarouco, Liane. (2012). *Avaliação de Objetos de Aprendizagem.* CINTED/UFRGS. Disponível: http://penta2.ufrgs.br/edu/objetosaprendizagem/sld001.htm Acesso em: 06 abr.2013.

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP (São Paulo). (2012) Coleção de Recursos Educacionais M3: Matemática Multimídias. Disponível em: <http://www.m3.ime.unicamp.br/portal/>. Acesso em: 10 jun. 2013.

**Celina Aparecida Almeida Pereira Abar**. Doutora em Matemática (PUC/SP). Professora do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Endereço para correspondência: Rua Marquês de Paranaguá, 111, CEP: 01303-050, São Paulo, Brasil. E-mail: **abarcaap@pucsp.br**

**Renata Ercília Mendes Nifoci**. Graduação em Matemática pela Universidade São Judas Tadeu (2003) e Especialização em Educação Matemática pela mesma Universidade (2006). Mestranda em Educação Matemática pela PUC/SP. Coordenadora de Matemática do Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino Região de Guarulhos Sul. Professora das Faculdades Integradas de Ciências Humanas, Saúde e Educação de Guarulhos. **renifoci@hotmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 69-84

www.fisem.org/web/union

# Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario

**Graciela M. Dodera, Gustavo Bender, Ester A. Burroni, María del Pilar Lázaro**

Fecha de recepción: 9/05/2012
Fecha de aceptación: 12/09/2013

| | |
|---|---|
| **Resumen** | Para conocer los errores matemáticos típicos más frecuentes del ingresante universitario y analizar su vinculación con la actitud afectiva hacia la matemática y su rendimiento, se administró una Prueba Diagnóstica a 405 alumnos de Ciencias de la Salud que cursan la asignatura Matemática en el primer año de la Universidad de Buenos Aires. Los alumnos tienen dificultades para: representar números racionales en la recta real (pero no para comparar fracciones); especializar una función; aplicar propiedades de la potenciación; plantear matemáticamente enunciados de problemas; y en menor medida, para resolver ecuaciones lineales. Se observó además que existe correlación entre el desempeño en el primer parcial de la asignatura y el desempeño en la Prueba Diagnóstica, la opinión del nivel matemático de la escuela, y la representación que tiene de la matemática.<br>**Palabras clave**: Errores matemáticos, actitud afectivo. |
| **Abstract** | In order to know typical and most frequent mathematical errors of the student entering the University and analyze its linkage with the emotional attitude toward mathematics and their performance, a diagnostic test was administered to 405 students of Health Sciences attending the mathematics course in the first year of the University of Buenos Aires. Students have difficulties to: represent rational numbers on the real line (but not to compare fractions); evaluate a function; apply properties of powers; give the equation that models a problem; and to a lesser extent, for solving linear equations. It was also noted that there is a correlation between the performance in the first part of the course, the performance in the diagnostic test, the opinion of the mathematical level of the school, and the representation that students have about mathematics.<br>**Keywords**: mathematical errors, emotional attitude. |
| **Resumo** | A fim de conhecer os típicos e mais freqüentes erros matemáticos do alunos que entra para a Universidade e analisar a sua ligação com a atitude emocional em relação à matemática e seu desempenho, um teste de diagnóstico foi administrado a 405 estudantes de Ciências da Saúde matriculados em o cursos de matemática da primeiro ano da Universidade de Buenos Aires. Os alunos têm dificuldades para: representar números racionais na reta real (mas não para comparar frações); avaliar uma função; aplicar as propriedades das potências; dar a equação que modela um problema; e em menor medida, para resolver as equações lineares. Verificou-se também que existe uma correlação entre o desempenho na primeira parte do curso, o desempenho no teste de diagnóstico, o parecer do nível matemático da escola, e as representações que os alunos têm sobre a matemática.<br>**Palavras-chave:** erros matemáticos, atitude emocional. |

## Introducción

Los alumnos que estudian matemáticas muestran obstáculos de naturaleza diferente que dificultan el aprendizaje: esos obstáculos tienen que ver con la complejidad de los conceptos, con los procesos de pensamiento deductivo formal de la matemática, con los procesos de enseñanza, con el desarrollo cognitivo y con la actitud afectiva y emocional de los alumnos hacia la matemática. Según Socas (1997) 'las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores'.

El aspecto conceptual y el operacional de los objetos matemáticos y el lenguaje propio de la matemática ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de la disciplina. El pensamiento lógico está presente en todas las actividades, aún si se utilizan métodos intuitivos para la demostración de la veracidad de las relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos.

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza están vinculadas con la institución educativa, el currículo de matemática y la planificación de actividades. Para favorecer el desarrollo de los conceptos matemáticos y la adquisición habilidades para el desarrollo de las capacidades matemáticas que definen la competencia del alumno se deben tener presente los saberes previos, el nivel de abstracción requerido, la naturaleza lógica de la matemática y los estadios del desarrollo intelectual.

También hay que considerar que la necesidad de aprender matemática o ciencias naturales en un contexto institucional produce en los alumnos sentimientos dispares -tensión, ansiedad y miedo al fracaso, a la equivocación- que generan bloqueos de origen afectivo y rechazo hacia la disciplina que repercuten en el desempeño académico. Estos sentimientos no pueden desligarse de una representación social de las ciencias como difíciles, 'aptas para unos pocos' y otros estigmas que juegan un papel importante para el alumno ingresante a la hora de posicionarse frente al estudio de estas materias.

Desde la perspectiva de que los errores forman parte de las producciones de los alumnos y que lo que aprenden está sujeto a cómo se involucran en las actividades matemáticas, el desempeño de los estudiantes está condicionado por las actitudes y por los posicionamientos estratégicos que eligen frente a una materia que en general desconocen.

Nuestra inquietud es reconocer los errores matemáticos más frecuentes que presentan los alumnos ingresantes a la universidad, la actitud afectiva hacia la matemática y la autovaloración de los saberes previos en esta disciplina, factores que consideramos tienen alta influencia en el éxito/fracaso de la dificultosa transición nivel medio-universidad.

Para precisar la noción de error usamos a Godino (Godino, 2003, p. 73) cuando dice que 'Hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar'.

La mayoría de los autores consideran que los errores en matemática no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de situaciones problemáticas.

Rico (1995) considera a Wiener como el fundador en 1922 de la investigación didáctica orientada al estudio de errores. Según Engler (2004) la difusión de los trabajos sobre la determinación de errores en matemática comienza en 1917 a través de Thorndike; posteriormente los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático. Borasi presenta 'un abordaje más amplio sobre las posibilidades de la utilización del análisis de errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje… incorporando ideas de Kuhn, Lakatos, Piaget y Vergnaud' (Cury, 1994, p. 84).

Si bien en la didáctica tradicional se considera al error como punitivo, a partir de la década del 60, desde la óptica constructivista el error ocupa un lugar ponderado: para el alumno equivocarse es una posibilidad de aprendizaje, mientras que para el profesor los errores son una fuente de información acerca de lo que han aprendido los estudiantes y de cómo lo han aprendido (Borasi, 1994).

Brousseau, Davis y Werther (1986) señalan que los errores son frecuentemente el resultado de la aplicación de algún procedimiento no correcto y generalmente sistematizado; suelen ser la respuesta a nociones inadecuadas sobre la matemática. Charnay (1994) afirma que las producciones de los alumnos nos informan sobre su 'estado del saber. En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia del saber, sino más bien a una manera de conocer'. También afirma que 'considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos'. Socas (1997) sostiene que 'el error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en un alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste'.

Dentro de la línea de trabajos relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican y clasificación de los mismos, se pueden citar a Astolfi (1999), Rico (1995), Movshovitz-Hadar (1987), Davis (1984), Booth (1984), Radatz (1979), entre otros.

En el presente trabajo de investigación para clasificar los errores matemáticos que cometen los alumnos ingresantes a la universidad se adopta la categorización elaborada por Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987). Dicha clasificación consta de seis categorías, que se describen a continuación:

1. <u>Datos mal utilizados</u>: diferencia entre datos que aparecen en una situación y el tratamiento que da el alumno. Casos en que añade datos extraños, olvida algún dato para la solución, contesta algo que no es necesario, asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, utiliza valores numéricos de una variable para otra distinta y/o hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. <u>Interpretación incorrecta del lenguaje</u>: traducción incorrecta de un lenguaje a otro lenguaje simbólico distinto. Casos en que expresa una relación distinta a la enunciada, designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del

usual operando con él según las reglas usuales y/o interpreta incorrectamente símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

3. Inferencias no válidas lógicamente: falacias en el razonamiento. Casos en que concluye un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente y/o realiza saltos injustificados en una inferencia lógica.
4. Teoremas o definiciones deformados: deformación de un principio, regla o definición. Casos en que aplica un teorema sin las condiciones necesarias, aplica mal una propiedad, realiza una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula conocidos.
5. Falta de verificación de la solución: No verificación de los resultados parciales o totales. Casos en que no verifica la solución en la pregunta planteada.
6. Errores técnicos: errores de cálculo, errores de transcripción de datos, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y/o errores que se derivan de la ejecución de algoritmos básicos.

## Descripción de la experiencia

La investigación consiste en un estudio cuasi experimental, correlacional, de tipo transversal y, en cierto modo longitudinal dado que se identifican individualmente los estudiantes participantes.

Objetivos: (a) medir saberes previos a través de los errores matemáticos típicos y más frecuentes del ingresante a la universidad; (b) conocer la valoración que el alumno otorga al nivel matemático brindado por la escuela media; (c) conocer la valoración que tiene el estudiante sobre la utilidad de la matemática en su futura carrera; (d) conocer la representación que el alumno tiene de la palabra 'matemática'; (e) establecer si existe asociación entre la representación matemática, los saberes previos y el desempeño académico en la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires (CBC-UBA).

Muestra: 405 alumnos ingresantes a la Universidad de Buenos Aires (edades entre 18 y 21 años) inscriptos en carreras relacionadas con Ciencias de la Salud que cursan la asignatura Matemática en 6 comisiones de los dos turnos matutinos de la Sede José Luis Romero del CBC-UBA. De los alumnos encuestados 182 siguen Medicina, 95 Carreras Conexas (Paramédicas), 31 Odontología, 38 Farmacia y Bioquímica, y 59 Psicología.

Instrumento: se administró una encuesta conformada por una Prueba Diagnóstica, un cuestionario actitudinal y un formulario de datos personales (se adjunta al trabajo).

La Prueba Diagnóstica fue diseñada para detectar los errores típicos y más frecuentes; se compone de 6 ejercicios con contenidos de la escuela media que fueron seleccionados en base a la experiencia y observación docente.

En el cuestionario relacionado a lo actitudinal se solicitan opiniones del alumno sobre el nivel matemático brindado por la escuela media, la importancia/utilidad que le otorga a la asignatura Matemática del CBC-UBA en la carrera elegida y la representación que tiene de la palabra 'matemática'.

El formulario de datos personales posibilita realizar el seguimiento del encuestado y analizar la posible correlación entre los resultados de la Prueba

Diagnóstica, del cuestionario actitudinal y el desempeño académico en la primer instancia de evaluación de la materia y con la carrera de elección.

Administración: La encuesta se administró en la primera semana del ciclo lectivo correspondiente al primer cuatrimestre/2010. Se permitió el uso de calculadora para la resolución de los ejercicios.

Codificación de variables: Las preguntas del cuestionario actitudinal relacionadas con los saberes matemáticos al egresar de la escuela media y con la importancia/utilidad que le otorga a la materia Matemática del CBC-UBA para su carrera contienen cuatro alternativas de respuesta y requieren del alumno una valoración positiva ó negativa, en una escala de mayor o menor aceptación. Se asignó puntaje a cada respuesta en una escala de 0-4 puntos, siendo este puntaje tanto mayor cuanto más positiva es la valoración ó cuanto mayor es la aceptación; 0 corresponde a 'no contesta' (NC). En base a tales puntajes se establecieron 4 niveles: alto (puntaje 4) / medio (puntaje 3) / bajo (puntajes 1 y 2) / NC (puntaje 0). Por su parte, con relación a las respuestas recibidas en la pregunta abierta '¿con qué palabra asocia MATEMATICA?', se establecieron categorías que permiten determinar un sistema de conceptos e ideas que estructuran la diversidad de opiniones expresadas por los estudiantes.

El desempeño en la Prueba Diagnóstica se evaluó en una escala de 0-10 puntos: se asignó 1 punto a los ejercicios 1 y 4, y 2 puntos los ejercicios 2, 3, 5 y 6.

Para medir el grado de logro de desempeño o rendimiento académico se tomó como indicador la calificación obtenida en la primera de las dos instancias de evaluación de la asignatura (escala 0-10) y se decidió identificar las siguientes categorías: Ausente, si el alumno abandona la materia antes de la primer evaluación parcial / Insuficiente, si la nota del parcial es menor a cuatro / Satisfactorio, para notas entre 4 y 6.5 / Muy Satisfactorio, para notas entre 7 y 10. Cabe aclarar que los contenidos de la asignatura Matemática del CBC-UBA son, para el primer parcial: ecuaciones e inecuaciones y funciones (polinómica, homográfica, exponencial, logarítmica y trigonométrica) y, para el segundo parcial: derivadas e integrales.

## Procesamiento y análisis de datos

El tratamiento de los datos obtenidos incluye, en primera instancia, un análisis de cada uno los ítems de la encuesta: 6 ejercicios de la Prueba Diagnóstica y 3 preguntas del cuestionario actitudinal.

Para cada ejercicio propuesto en la Prueba Diagnóstica se informa sobre el contenido, la consigna, la nota promedio (en escala 0-10) y los errores detectados, que fueron clasificados de acuerdo a la categorización elaborada por Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar, sin pretender examinar el origen de los mismos. Se comparan las medias de las notas obtenidas en los ejercicios de la Prueba Diagnóstica determinándose los ejercicios en el cual el alumno tuvo el mejor desempeño y el más bajo.

Para las 2 preguntas cerradas del cuestionario actitudinal se da la distribución de porcentajes de acuerdo a las categorías alto/medio/bajo/NC, mientras que para la pregunta abierta se estableció una clasificación que permite contemplar la diversidad de opiniones expresadas, y se indica la correspondiente distribución de porcentajes.

En segunda instancia se presentan los resultados del cruce de variables. Se analizan las posibles correlaciones entre las variables de la Prueba Diagnóstica y del cuestionario actitudinal con el indicador del rendimiento académico (calificación obtenida en el primer examen parcial obligatorio de la asignatura) y la carrera de elección.

## Prueba Diagnóstica:

**Ejercicio 1: Números racionales - Relación de orden.**

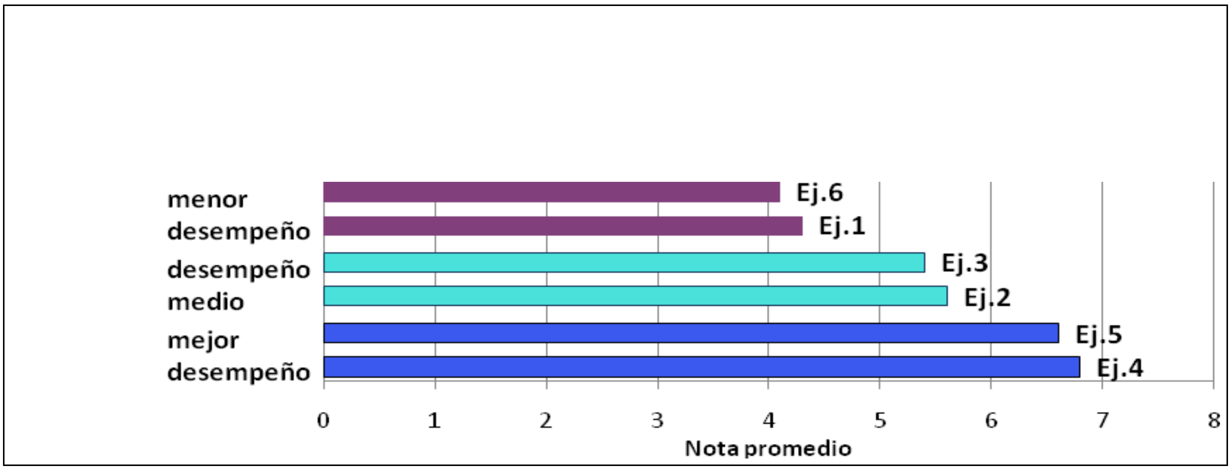
En la Tabla 1 se consigna para cada ejercicio la nota promedio (en escala 0-10) y los porcentajes de resolución correcta, resolución incorrecta y de no resuelve.

**Tabla 1: Nota promedio de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica (escala 0-10) y porcentajes de resolución correcta, resolución incorrecta y de No resuelve.**

| | Ejercicio 1 | Ejercicio 2 | Ejercicio 3 | Ejercicio 4 | Ejercicio 5 | Ejercicio 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nota promedio** | 4.3 | 5.6 | 5.4 | 6.8 | 6.6 | 4.1 |
| **% Resuelve bien** | 11.6 | 43.2 | 54.3 | 68.1 | 60.7 | 29.6 |
| **% Resuelve mal** | 25.2 | 30.9 | 24.4 | 17.5 | 28.1 | 22.5 |
| **% No resuelve** | 0.0 | 0.0 | 21.3 | 14.3 | 0.0 | 25.4 |

De la observación de las notas promedio obtenidas en los ejercicios (Tabla 1) y la aplicación del test de comparaciones múltiples de Tukey, se concluye que existen tres grupos en los cuales las medias de las notas no son significativamente diferentes unas de otras (Gráfico 1).

**Gráfico 1. Nota promedio de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica por grupo de igual desempeño**




El mejor desempeño corresponde al grupo conformado por los ejercicios 4 y 5, luego le sigue el conformado por los ejercicios 2 y 3, y por último, el grupo de ejercicios de menor desempeño corresponde al conformado por el 1 y el 6.

Era esperable que el ejercicio 6 (planteo de una situación problemática) correspondiera al de menor desempeño en la Prueba Diagnóstica, pero no así el ejercicio 1. Es alarmante que alumnos ingresantes a la universidad presenten tanta dificultad en la tarea de representar números racionales en la recta real (ejercicio 1), y más aún si se considera que no se prohibió el uso de calculadora y que todos los alumnos intentaron cumplir con la consigna del ejercicio.

## Cuestionario actitudinal

**Pregunta 1: Opinión acerca de la base matemática adquirida en la escuela media (autovaloración de saberes previos).**

En Tabla 2 se muestra la distribución de porcentajes que corresponde a esta pregunta cerrada. Sólo el 13.6% de los alumnos opina que la formación matemática al término de la escuela media es 'muy buena' (nivel alto). Más del 40% la considera 'mala' o 'regular' (nivel bajo).

**Pregunta 2: Opinión acerca de la importancia/utilidad que le otorga a la materia de Matemática del CBC-UBA para su carrera.**

La mayoría (82.2%) considera que matemática es 'muy útil' o 'medianamente útil' para su carrera (Tabla 2: nivel alto y medio, respectivamente).

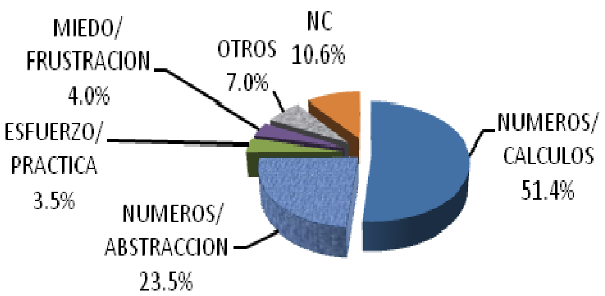
Tabla 2: Distribución de porcentajes de las preguntas cerradas 1 y 2.

| | Nivel (%) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *alto* | *medio* | *bajo* | *No Contesta* |
| **Base matemática** | 13.6 | 44.0 | 41.2 | 1.2 |
| **Importancia/utilidad** | 36.3 | 45.9 | 17.1 | 0.7 |

**Pregunta 3: Representación de la palabra 'matemática'.**

Mayoritariamente (74.9%) los alumnos encuestados asocian la palabra 'matemática' con números, cálculos, ecuaciones, ejercicios y/o funciones. Sólo un 30% de ellos (23.5% de la muestra) refieren abstracción, análisis y/o razonamiento.

Gráfico 2: Distribución de porcentajes de la pregunta *¿con qué palabra asocia 'matemática'?*




Muy pocos (3.5%) expresan que representa esfuerzo, constancia y/o práctica. Sólo el 4.0% la asocia con miedo, frustración y/o algo inalcanzable. No contesta el 10.0% (Gráfico 2).

## Cruce de variables:

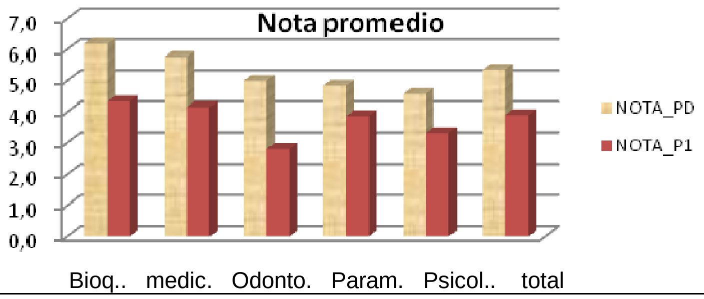
### Desempeño en la Prueba Diagnóstica y en el parcial vs. Carrera:

Del análisis realizado se destaca que el desempeño en la Prueba Diagnóstica está relacionado con la carrera de elección; los resultados arrojados por el test $\chi^2$ permite rechazar la independencia entre esas variables (p=0.0405; nivel de significación 0.05).

No hay evidencia en cambio, para rechazar la independencia entre el desempeño en la primera evaluación parcial de la asignatura Matemática del CBC-UBA y la carrera elegida (p=0.3496).

En el Gráfico 3 se presentan los resultados de las notas obtenidas en la Prueba Diagnóstica y en la primera evaluación parcial de la asignatura según la Carrera en la cual está inscripto el alumno; se consignan además, los respectivos promedios para el total de la muestra.

**Gráfico 3. Desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota_PD) y en la primer evaluación parcial (Nota_P1) por grupo de carrera y para la totalidad de la muestra (total).**




CODIGO DE CARRERA
Bioq.= Farmacia y Bioquímica
Medic..= Medicina
odonto. = Odontología
param. = Paramédicas (Conexas)
psicol. = Psicología

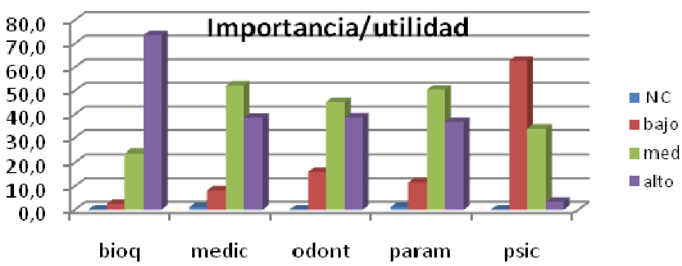
Los alumnos de Farmacia y Bioquímica son quienes presentan un mejor desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota_PD = 6.2), le siguen los de Medicina (5.8), luego los de Odontología (5.0), y por último los alumnos de carreras Paramédicas (4.8) y Psicología (4.6), siendo 5.4 la media correspondiente al total de la muestra.

Los estudiantes de Odontología y de Psicología son los que obtuvieron notas más bajas también en la primer evaluación de la asignatura (Nota_P1=2.8 y 3.3 respectivamente, siendo la media de la muestra 3.9).

## Opiniones del cuestionario actitudinal vs. Carrera:

Los resultados de la aplicación del test $\chi^2$ permite afirmar que existe correlación entre la valoración que el alumno otorga a la importancia/utilidad de la matemática para sus estudios y la carrera de elección (p=0.0000). En cambio, no hay evidencia para rechazar la hipótesis de independencia entre la apreciación de la base matemática adquirida en la escuela media y la carrera (p=0.1913), ni entre lo que representa la palabra ‘matemática’ y la carrera.

**Gráfico 4: Importancia/utilidad de la matemática para sus estudios por carrera. Porcentajes de alumnos que otorga valoración de nivel alto, medio o bajo, o NC (no contesta).**




CODIGO DE CARRERA
Bioq. = Farmacia y Bioquímica
Medic. = Medicina
Odonto. = Odontología
Param. = Paramédicas (Conexas)
psicol. = Psicología

En el Gráfico 4 se presenta la distribución porcentual por Carrera de la variable Importancia/utilidad, consignada en Tabla 3. Hay consenso (73,7%) entre los alumnos de Farmacia y Bioquímica que matemática es una asignatura muy importante/útil para la carrera (valoración de nivel alto); en cambio el 67,7% de los inscriptos en Psicología la consideran inútil o poco útil (nivel bajo).

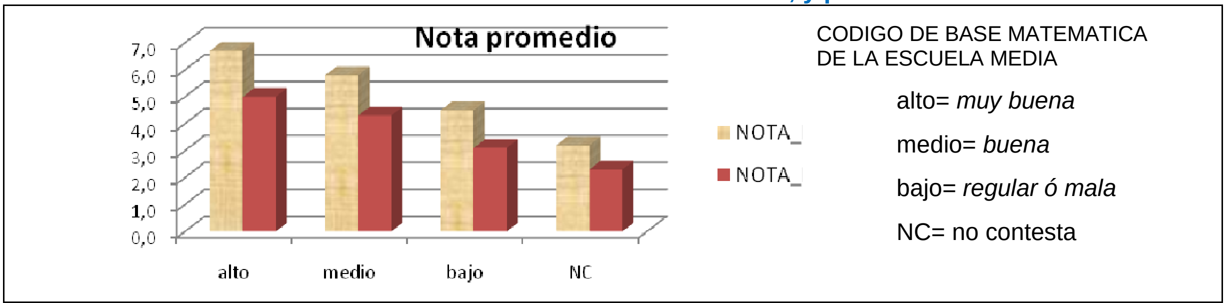
**Tabla 3: Distribución de porcentajes de Carrera – Importancia/utilidad.**

| | **Importancia / utilidad** (%) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ***alto*** | ***medio*** | ***Bajo*** | ***NC*** |
| **Farmacia y Bioquímica** | 73,7 | 23,7 | 2,6 | 0,0 |
| **Medicina** | 38,5 | 52,2 | 8,2 | 1,1 |
| **Odontología** | 38,7 | 45,2 | 16,1 | 0,0 |
| **Paramédicas** | 36,8 | 50,5 | 11,6 | 1,1 |
| **Psicología** | 3,4 | 33,9 | 62,7 | 0,0 |

**Opiniones del cuestionario actitudinal vs. el desempeño en la Prueba Diagnóstica y en el Parcial:**

La valoración de los saberes matemáticos de los alumnos al ingresar a la universidad resulta estar fuertemente relacionada con el desempeño en la Prueba Diagnóstica (test $\chi^2$ : p=0.0000) y con el del primer parcial (p=0.0002) (Gráfico 5).

**Gráfico 5. Desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota_PD) y en el primer parcial (Nota_P1) por valoración de la base matemática recibida en la escuela media, y para la totalidad de la muestra**




Como la encuesta fue realizada al comienzo del ciclo lectivo, este resultado indicaría que los alumnos tienen una apreciación bastante acertada del nivel de los saberes matemáticos adquiridos en la escuela media. Sin embargo, no se han podido extraer evidencias que permitan inferir una correlación entre la importancia/utilidad asignada a la matemática y los resultados en ambas pruebas. Lo que sí se ha podido observar es que los alumnos que asocian la palabra 'matemática' con abstracción, análisis y/o razonamiento tuvieron mejor desempeño en el primer parcial (nota promedio: 4.9) que quienes sólo mencionan números, cálculos, ecuaciones, ejercicios y/o funciones (3.7) o bien que aquellos que la asocian a esfuerzo, constancia y/o práctica (3.3), y principalmente a aquellos para quienes 'matemática' representa miedo, frustración y/o algo inalcanzable (1.0). En el Gráfico 6 se consignan las notas promedio obtenidas en la Prueba Diagnóstica y en el primer parcial según la representación que el alumno tiene de la palabra 'matemática'.

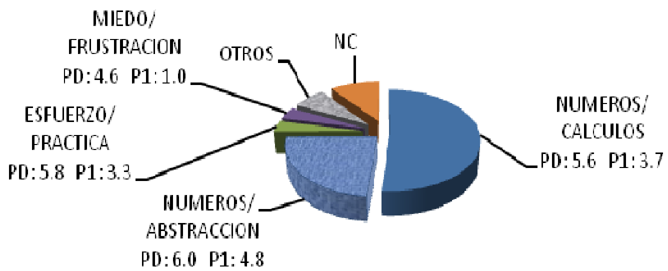



**Gráfico 6. Notas promedio obtenidas en la Prueba Diagnóstica (PD) y en el primer parcial (P1) según la representación que el alumno tiene de la palabra 'matemática'.**

## Desempeño en la Prueba Diagnóstica vs. Desempeño en el primer parcial:

De acuerdo a los resultados en el primer parcial se establecieron cuatro categorías para indicar el desempeño en dicha instancia de evaluación obligatoria: 'Ausente' (abandona la materia antes del primer parcial); 'Insuficiente' (desaprueba el parcial con nota menor a 4); 'Satisfactorio' (aprueba el parcial con nota entre 4 y 6.5; 'Muy satisfactorio' (aprueba con nota entre 7 y 10).

**Tabla 4: Desempeño en el Parcial y en la Prueba Diagnóstica: Notas promedio (escala 0-10) según el desempeño en el parcial y de la muestra total. Resultados del test $\chi^2$.**

| | **Ausente al parcial** | **Insuficiente** *(nota < 4)* | **Satisfactorio** *(nota 4 – 6.5)* | **Muy Satisfactorio** *(nota 7 – 10)* | **Muestra Total** | ***Test*** $\chi^2$ ***p*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1er Parcial** | - | 1.5 | 5.1 | 8.3 | 3.9 | 0.0000 |
| **Prueba Diagnóstica** | 3.8 | 4.8 | 6.2 | 7.7 | 5.4 | 0.0000 |
| ***ejercicio 1*** | 3.2 | 4.0 | 5.1 | 5.7 | 4.3 | 0.0000 |
| ***ejercicio 2*** | 3.8 | 5.0 | 7.1 | 7.9 | 5.6 | 0.0000 |
| ***ejercicio 3*** | 3.6 | 5.0 | 6.0 | 8.0 | 5.4 | 0.0000 |
| ***ejercicio 4*** | 5.1 | 6.3 | 7.8 | 9.2 | 6.8 | 0.0001 |
| ***ejercicio 5*** | 4.9 | 6.3 | 7.1 | 9.0 | 6.6 | 0.0000 |
| ***ejercicio 6*** | 2.6 | 3.2 | 4.6 | 7.4 | 4.1 | 0.0000 |
| *# alumnos* | (91) | (179) | (50) | (85) | (405) | (405) |

En la Tabla 4 se consignan para cada una de dichas categorías y para la muestra total las notas promedio del primer parcial, de la Prueba Diagnóstica y de los ejercicios (escala 0-10). Se detalla además la cantidad de alumnos de cada grupo y, en la última columna, se exponen los resultados de la aplicación del test $\chi^2$ de asociación entre la nota obtenida en la Prueba Diagnóstica y la obtenida en cada uno de los ejercicios con el desempeño en el parcial.

Como primera observación se puede mencionar que existe una fuerte correlación positiva entre el desempeño en el primer parcial y el desempeño en la Prueba Diagnóstica en general y en cada uno de los ejercicios que la conforman. Este resultado estaría indicando que la selección de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica parecería adecuada, tanto en contenido como en el nivel de los mismos.

El análisis de resultados del cruce de variables entre la nota obtenida en cada uno de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica y el desempeño en el primer parcial se efectúa de acuerdo a los tres grupos que resultaron de igual desempeño al aplicar el test de comparaciones múltiples de Tukey (Gráfico 1): grupo de mejor desempeño conformado por los ejercicios 4 y 5, de desempeño medio conformado por los ejercicios 2 y 3, y de menor desempeño conformado por el ejercicio 1 y el ejercicio 6.

Con referencia al grupo de ejercicios de la Prueba Diagnóstica en los cuales los alumnos mostraron un mejor desempeño, ejercicios 4 y 5 (notas promedio 6.8 y 6.5, respectivamente), cabe destacar que aún los alumnos que reprobaron el primer parcial (calificación menor a 4) obtuvieron en ambos ejercicios una nota promedio superior a 6. Esto indicaría que a pesar de incurrir en errores al aplicar la propiedad distributiva y la asociativa o al ejecutar algoritmos básicos en la trasposición de términos, el egresado de la escuela media demuestra cierto manejo en la resolución de una ecuaciones lineales, como así también para identificar una relación de orden entre dos fracciones.

Con respecto al grupo de ejercicios en los cuales los alumnos mostraron menor desempeño, ejercicios 1 y 6 (notas promedio 4.3 y 4.1, respectivamente), merece acotarse que aún quienes aprobaron el primer parcial con nota entre 7 y 10 obtuvieron en el ejercicio 1 de la Prueba Diagnóstica una nota promedio 5.7, que resulta ser bastante inferior a la obtenida en los restantes ejercicios (7.4 o más), a pesar de identificar correctamente la relación de orden entre las dos fracciones propuestas en el ejercicio 4 (grupo 'muy satisfactorio': nota promedio 9.2). Esto indicaría que representar números racionales en la recta real constituye una tarea nada sencilla para al alumno, aunque sepa identificar si una fracción es menor o mayor que otra.

Tal como se mencionara anteriormente, era esperable que el ejercicio 6 (planteo de una situación problemática) correspondiera al de menor desempeño en la Prueba Diagnóstica, principalmente en el grupo de alumnos que abandona la materia antes del primer parcial y en el grupo que rinde dicha instancia de evaluación obligatoria de la materia y la reprueba, o la aprueba con nota menor que 7.

Con referencia a los ejercicios 2 y 3 que conforman el grupo de ejercicios de desempeño medio en la Prueba Diagnóstica, en la Tabla 5 se consigna, para cada categoría establecida y para la totalidad de la muestra, el porcentaje de alumnos que cometen errores en sumar fracciones, interpretar el significado de un exponente negativo, identificar la base de una potencia, calcular el signo de una potencia (tareas requeridas para la resolución del ejercicio 2 de la Prueba Diagnóstica) y/o especializar una función (ejercicio 3 de la Prueba Diagnóstica).

**Tabla 5: Distribución porcentual de los errores cometidos en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica, según desempeño en el parcial y para la muestra total. Resultados del test $\chi^2$.**

| | Ausente al parcial | Insuficiente *(nota < 4)* | Satisfactorio *(nota 4 – 6.5)* | Muy Satisfactorio *(nota 7 – 10)* | Muestra Total | *Test* $\chi^2$ ***p*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***sumar fracciones*** | 38.5 | 26.8 | 14.0 | 10.6 | 24.4 | 0.0001 |
| ***exponente negativo*** | 63.7 | 51.4 | 34.0 | 21.2 | 45.7 | 0.0000 |
| ***base potencia*** | 25.3 | 21.2 | 10.0 | 7.0 | 17.8 | 0.0033 |
| ***signo potencia*** | 24.2 | 12.3 | 2.0 | 2.3 | 11.6 | 0.0000 |
| ***especialización*** | 42.9 | 25.7 | 24.0 | 7.1 | 25.4 | 0.0000 |
| *# alumnos* | (91) | (179) | (50) | (85) | (405) | (405) |

En primera instancia se puede destacar que los resultados del test $\chi^2$ permiten rechazar, en todos los casos, la independencia entre la incurrencia de errores en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica y el desempeño en el primer parcial (Tabla 5, última columna: $p<0.05$).

Cerca del 40% de los alumnos del grupo que abandona la materia antes del 1er parcial comete errores al sumar fracciones (38.5%); aún el 10.6% de alumnos del grupo que aprueba el parcial de forma 'muy satisfactoria' evidencia dicha dificultad.

Casi la mitad de la muestra (45.7%) comete errores al operar con exponentes negativos; aún en el grupo de alumnos que aprueba el parcial de forma 'muy satisfactoria' el 21.2% opera incorrectamente.

El 25% de los alumnos que abandona la asignatura antes del primer parcial (ausentes al parcial) no sabe a cuánto equivale $-2.5^2$ ni $(-3)^2$. El 21.2% de estudiantes que rinde el primer parcial pero no lo aprueba (nota menor a 4) comete errores en identificar la base de la potencia en la expresión $-2.5^2$.

El hecho de que no se respete la prioridad de los operadores aritméticos que determina el orden en que han de realizarse las operaciones y que se haga uso inadecuado de signos de agrupación como son los paréntesis (que encierran los operandos para dar preferencia a la realización de las operaciones de menor prioridad) evidencia errores asociables a la comprensión de la estructura de una expresión numérica. No es ocasional que los encuestados incurran en el error de infringir las reglas de la estructura numérica incluida en cada uno de los dos ítems citados del ejercicio 2 y en el ejercicio 3, sino que lo hacen en forma sistemática.

El 25.4% de la muestra no resuelve el ejercicio 3 o presenta alguna resolución que indica que no se entiende la consigna de especializar una función polinómica en un valor numérico dado. Tal como se expresó al analizar los resultados consignados en la Tabla 1, el 21.3% de la muestra no presenta resolución alguna del ejercicio, por lo tanto el 3.1% contesta algo completamente inadecuado. Llama la atención que el 24.0% de los alumnos que aprueban el primer parcial con nota inferior a 7 (desempeño 'satisfactorio') no especialice correctamente una función en un valor numérico.

Por último cabe mencionar que, en todos los casos, también se rechaza la independencia entre la incurrencia de errores en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica y la valoración de los saberes matemáticos al egresar de la escuela media (Tabla 6, última columna: $p<0.05$).

**Tabla 6. Distribución porcentual de los errores cometidos en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica, según el nivel otorgado a la base matemática de la escuela media y para la muestra total. Resultados del test $\chi^2$.**

| | ***Base matemática adquirida en la escuela media*** | | | | | ***Test $\chi^2$*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ***alto*** | ***medio*** | ***bajo*** | ***NC*** | **Total** | ***p*** |
| ***sumar fracciones*** | 6.1 | 40.4 | 52.5 | 1.0 | 24.4 | 0.0191 |
| ***exponente negativo*** | 9.2 | 40.0 | 48.6 | 2.2 | 45.7 | 0.0047 |
| ***base potencia*** | 8.3 | 29.2 | 62.5 | 0.0 | 17.8 | 0.0008 |
| ***signo potencia*** | 6.4 | 27.7 | 66.0 | 0.0 | 11.6 | 0.0032 |
| ***especialización*** | 1.0 | 32.0 | 64.1 | 2.9 | 25.4 | 0.0000 |

El 50%, y en algunos casos más del 60% de los alumnos que incurren en errores o no responden a la consigna dada, ya sea sumar fracciones, interpretar el significado de un exponente negativo, identificar la base de una potencia, calcular el signo de una potencia y/o especializar una función, opina que la base matemática adquirida en la escuela media es de nivel bajo (o bien no expresa opinión).

## Conclusiones

- Los errores detectados en la Prueba Diagnóstica concuerdan con los errores observados informalmente por los docentes del área de matemática del CBC-UBA en su experiencia de aula y se corresponden con los expuestos con la mayoría de las investigaciones sobre el tema.
- Los alumnos tienen dificultades para representar números racionales en la recta real (pero no para comparar fracciones); especializar una función; aplicar propiedades de la potenciación; plantear matemáticamente el enunciado de un problema; y en menor medida, para resolver ecuaciones lineales.
- La selección de contenidos y el nivel de los ejercicios incluidos en la Prueba Diagnóstica parecerían adecuados para medir la base matemática del alumno ingresante a la universidad.
- No resultó sencilla la identificación en forma independiente de los tipos de errores localizados en esta investigación. Se tomó como criterio encuadrar el error en la categoría más pertinente. Se detectaron errores de ‘interpretación incorrecta del lenguaje’; ‘errores técnicos’, principalmente en la ejecución de algoritmos básicos; ‘empleo incorrecto de propiedades y definiciones’; ‘falta de verificación de la solución hallada’, y en menor medida errores debidos a ‘datos mal utilizados’.
- Los errores detectados son, en su mayoría, errores sistemáticos de procedimiento, en el sentido de procedimiento inapropiado, persistente y reproducible que no se debe a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de memoria.
- Tampoco resultó sencillo establecer categorías que permiten determinar un sistema de conceptos e ideas que estructuran la diversidad de opiniones expresadas por los estudiantes en la pregunta abierta ‘¿con qué palabra asocia MATEMATICA?’. En general la asocian con números, cálculos, ecuaciones, ejercicios, funciones. Quienes además refieren razonamiento, abstracción y/o análisis, tienen mayor rendimiento. En cambio los que la asocian a miedo, frustración y/o algo inalcanzable obtienen un menor rendimiento. Son muy pocos quienes expresan que les representa esfuerzo, constancia y/o práctica.
- El alumno tiene una representación bastante acertada del nivel matemático que posee al ingresar a la universidad. La apreciación del nivel de los saberes matemáticos adquiridos en la escuela media se corresponde en gran medida al grado de desempeño alcanzado tanto en la Prueba Diagnóstica como en el primer parcial de la asignatura Matemática del CBC-UBA.
- La importancia/utilidad que el alumno asigna a la matemática está estrechamente relacionada con la carrera de elección. Los estudiantes de las carreras de Farmacia y Bioquímica, que incluyen otras materias de matemática en años posteriores, le otorgan mucha importancia; en cambio los inscriptos en Psicología la desestiman totalmente.

Consideramos que el diagnóstico y análisis de errores en la enseñanza de la matemática debe utilizarse en el tratamiento de múltiples temas en el aula, permitiendo al profesor incidir en aspectos didácticos y en el diseño curricular y conducir a una competencia cada vez más formal de los conceptos matemáticos.

Desde una perspectiva social, creemos que tiene fundamental importancia el análisis de la problemática del incurrimiento en errores en el aprendizaje de la matemática, ya que si las fuentes de error provienen del profesor, se trasmiten a los alumnos de la escuela elemental y se reproducen en toda la escolaridad.

## Bibliografía

Astofi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Díada Editora. Sevilla.

Booth, L.R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Borasi, R., (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry" a teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25 (2), 166-208.

Brousseau, G.; Davis R.B. et Werner T. (1986). Observing students at work. In Christiansen B., Howson A.G., Otte M. (eds.) *Perspective on Mathematics Education*, 205-240. Doirdrecht: Reidel Publisher.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la Resolución de Problemas. En Parra C., Saiz I. (comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, 51-64. Paidós. Buenos Aires.

Cury, H. N. (1994). *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.

Engler, A.; Gregorini, M.I.; Müller, D.; Vrancken, S.; Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa, Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática.* 6(23), 23-32.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En Godino J.D. (dir.) *Matemáticas y su Didáctica para maestros*, 7-121. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (http://www.ugr.es/local/jgodino/).

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 18 (1), 3-14.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*. 10 (3), 163-172.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick J., Gómez P. y Rico L. (eds.) *Educación matemática*, 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Socas Robayna, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico L. (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154. Barcelona: Horsori.

## Anexo: Encuesta

**ENCUESTA** - Marzo 2010 Proyecto U012 - UBACyT 2008/10

Apellido y nombre: ........................................................................ Carrera: ..............................................

*¿Cómo considera la base matemática adquirida en la Escuela Secundaria?*

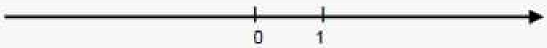
☐ *muy buena* ☐ *buena* ☐ *regular* ☐ *mala*

*¿Opina que la asignatura Matemática del CBC es importante/útil para su carrera?*

☐ *muy útil* ☐ *medianamente útil* ☐ *poco útil* ☐ *inútil*

1) Represente los siguientes números sobre la recta numérica:

$-\frac{3}{2}$ ; 0,66 ; 2,5 ; -2,8 ; $\frac{2}{3}$




2) Resuelva las siguientes operaciones:

$(-3)^2 =$ $2^3 =$ $-2.5^2 =$

$\sqrt{\frac{36}{25}} =$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$

3) Si $f(x)=3x^2+x^3$, calcule:

$f(1) =$

$f(-1) =$

4) La expresión 'a = b' se lee 'a es igual a b'. Escriba cómo se debe leer la siguiente expresión:

'a > b' ...........................................................

Indique si $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ es: verdadero ☐ falso ☐

¿Qué cálculos realizó para justificar su respuesta? ..............................................................................

..............................................................................................................................................

5) Resuelva las siguientes ecuaciones:

$5 + 3x = 6$ $2(3x-5) = 4x + 8$

6) Plantee el siguiente problema : *'Juan pensó un número y le sumó el doble de su consecutivo y obtuvo 10 disminuido en el número que pensó'*

..............................................................................................................................................

*Por último, por favor díganos ¿con qué palabra asocia **MATEMATICA**?* ................................................

- Gracias por su valiosa colaboración -

**M. Graciela Dodera**. Argentina. Licenciada en Ciencias Físicas. Maestrando en Biometría y Mejoramiento - Escuela de Graduados de la Facultad de Agronomía - Universidad de Buenos Aires. Profesor Asociado de tiempo completo de Matemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires. Directora de Proyectos UBACyT. Línea de investigación: Educación - Sociología de la Educación; Especialidad Matemática. **gdodera@cbc.uba.ar**

**Gustavo Bender.** Licenciado en Física y en Psicología, Especialista en Investigación Educativa y maestrando en Enseñanza de las Ciencias. Profesor de la Universidad de Buenos Aires y de la Universidad Tecnológica Nacional. Director de proyectos de Investigación en Didáctica de las Ciencias en la Universidad y en el Instituto Nacional de Formación Docente. Director tesistas de grado y posgrado. Asesor de la Dirección Provincial de Educación Secundaria. **gussbender@gmail.com**

**Ester Alicia Burroni.** Profesora de Matemática y Cosmografía. Licenciada en Gestión Educativa, Centro de Altos Estudios en Ciencias Exactas. Docente-Investigador de la Universidad de Buenos Aires con participación en Proyectos de Educación Matemática e Historia de la Matemática. Profesora de la Universidad Tecnológica Nacional y de la Universidad Nacional de Tres de Febrero. Capacitadora de profesores de nivel medio. **eburroni@yahoo.com.ar**

**María del Pilar Lázaro**. Argentina. Profesora de Matemática y Astronomía. Licenciada en Educación con Orientación en Enseñanza de la Matemática, Universidad Virtual de Quilmes. Docente-Investigador en el Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires con participación en Proyectos UBACyT. Línea de investigación: Educación - Sociología de la Educación; Especialidad Matemática. **pilarlazaro@fibertel.com.ar**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 85-101

www.fisem.org/web/union

# En búsqueda de un perfil académico-profesional del personal docente de matemáticas

**Yuri Morales, Jennifer Fonseca, Marcela García**

Fecha de recepción: 9/05/2013
Fecha de aceptación: 15/03/2014

**Resumen**

El objetivo de este trabajo es definir el perfil académico-profesional del personal docente de matemáticas de educación media desde el enfoque por competencias. Se realizaron consultas, mediante encuestas y talleres, a profesores de secundaria en servicio, académicos en ejercicio, profesores pensionados y estudiantes de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, asesores y principales empleadores, en La Universidad Nacional de Costa Rica, entre el segundo semestre del 2011 y el primero de 2012. Los resultados sugieren un perfil académico-profesional del docente de matemática, basado en las competencias generales y específicas que los actores definen como primordiales en la formación del futuro profesor de matemáticas.

**Palabras claves**: Formación docente, enseñanza de las matemáticas, perfil académico-profesional, competencias.

**Abstract**

This paper aims to define the academic-professional profile of secondary teachers of mathematics under the competence approach. Consultations were conducted through surveys and workshops with in-service teachers of secondary, university professors of the career of teaching mathematics, retired teachers, students of the career, advisors and major employers, in the Universidad Nacional de Costa Rica between the second half of 2011 and first half of 2012. The results suggest an academic-professional profile of teachers of mathematics, based on the general and specific skills defined by the actors as primordial in the training of the prospective teachers.

**Keywords**: prospective teachers, mathematics teaching, teacher's profile, competencies.

**Resumo**

Este artigo tem por objetivo definir o perfil acadêmico-profissional do docente no ensino médio, focalizado nas competências. Varias consultas foram feitas, com enquetes e atividades de teste, a professores de ensino médio em serviço, acadêmicos em exercício, professores aposentados e estudantes do Bacharelado e Licenciatura no Ensino da Matemática, assessores e empregadores na Universidade Nacional da Costa Rica, durante período compreendido entre o segundo ciclo do ano 2011 e o primeiro ciclo do ano 2012. Os resultados sugerem um perfil acadêmico profissional do Docente em Matemática, baseado em competências gerais e específicas, que os atores definem como primordiais na formação dos futuros docentes na área da matemática.

**Palavras-chave:** formação docente, ensino da Matemática, perfil acadêmico profissional, competências.

## 1. Introducción

Los avances en herramientas computacionales, de conceptualización y comunicación, han generado cambios fundamentales en los niveles y tipos de conocimientos y habilidades matemáticas necesarias para el buen desempeño profesional y personal de los individuos. Asesores y empleadores en los diversos campos enfatizan el hecho de que la naturaleza de los problemas y situaciones laborales, más allá del contexto escolar, ha cambiado dramáticamente en los últimos 20 años y, por ende, las cualidades y competencias que buscan en sus postulantes (Lesh, 2007).

El dominio de contenidos disciplinares y la experiencia ya no son cualidades suficientes para el buen funcionamiento en ninguno de los espacios laborales. Capacidad para trabajar en equipo, adaptarse a distintos contextos, culturas y recursos, así como ser creativo, crítico y reflexivo son algunas de las competencias que se suman a las demandas laborales actuales.

En vista de lo anterior, distintos proyectos y directrices curriculares centran sus esfuerzos en establecer los fines y metas de la educación en términos de las capacidades y competencias que deberían desarrollar el estudiantado durante su formación educativa. Por ejemplo, los proyectos PISA (Programme for International Student Assessment), Tuning Europa, Tuning América Latina, Proyecto 6x4 y otros, utilizan las competencias como marco orientador en sus acciones educativas en busca del desarrollo económico y social de los países (Lupiáñez y Rico, 2008).

Los programas de formación de formadores de matemáticas no han quedado exentos a este análisis y revisión. Existe en el nivel internacional (Abbott y Huddleston, 2000; Beck, Hart y Kosnik, 2002; Niss, 2003; Recio, 2004; Rico, 2004), un marcado interés por establecer las competencias que debe desarrollar este profesional para el ejercicio de su labor.

El panorama actual de las carreras en enseñanza de las matemáticas es desalentador y preocupante en muchos países. Los datos evidencian un favoritismo por parte de los estudiantes y las estudiantes, por escoger carreras que no involucren (o que involucren lo mínimo) contenidos matemáticos (Ho et al., 2000). La falta de estímulos salariales y laborales, así como de programas de formación atractivos y que satisfagan las competencias mundiales en el ámbito de las matemáticas y la educación pueden ser algunos de los causantes de dicho desinterés por esta profesión.

Aunado a lo anterior, existen evidencias de las fuertes carencias conceptuales y actitudinales que enfrentan el personal docente de matemáticas en la actualidad. Su formación no solo se queda corta en desarrollar competencias que vayan de la mano con los cambios tecnológicos y sociales que se viven, sino también en el dominio de contenidos matemáticos, pedagógicos y pedagógicos-matemáticos.

Al respecto, Galvis (2007) señala que “el profesor requiere nuevas estrategias, percepciones, experiencias y conocimientos para intentar dar respuesta a las múltiples interrogantes que se le presentan cada día” (p. 49). Es necesario concebir al docente bajo otro paradigma; uno que extraiga:

> …qué elementos cognitivos, actitudinales, valorativos y de destrezas favorecen la resolución de los problemas educativos,

> desde todos los niveles de desempeño del docente, para de esta manera, sea posible identificar y analizar aquellas capacidades requeridas por un grupo social determinado, en un contexto específico, lo cual le dará pertinencia social a este nuevo perfil. (p. 49)

Con base en las líneas anteriores se desarrolla esta investigación, la cual tiene como objetivo, definir un perfil académico-profesional del personal docente de matemáticas compatible con el enfoque por competencias, que responda a las necesidades y situaciones que enfrentan, o enfrentarán, dichos profesionales en su quehacer. Se aclara, además, que no se busca definir una lista de competencias estrictamente construidas; más bien, se desea una serie comprensiva de habilidades y destrezas que posteriormente puedan ser adaptadas al enfoque por competencias.

Para responder al objetivo propuesto, se realizó la consulta a diferentes actores del proceso educativo, a saber: profesores en servicio de secundaria, académicos en ejercicio de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, profesores pensionados, estudiantes de esta carrera, asesores del Ministerio de Educación Pública y principales empleadores.

La consulta se llevó a cabo mediante talleres, grupos focales y encuestas, con el fin de recolectar información que respondiera a preguntas como: ¿Qué problemas o situaciones se identifican en torno a la educación de las matemáticas? ¿Qué tipo de profesional en educación de las matemáticas se requiere para dar solución a estos problemas o situaciones? ¿Qué conocimientos se necesitan para desarrollar eficazmente su función como profesional en el campo de la educación de las matemáticas? ¿Cuál es su campo ocupacional? ¿En qué áreas se puede desempeñar el graduado en educación de las matemáticas?, entre otras

## 2. Marco teórico

### 2.1. Tendencias internacionales en la formación de docentes en enseñanza de las matemáticas

El marco internacional apunta a una diferente formación de profesionales, más integral y sensible a las necesidades de la sociedad. El constante crecimiento tecnológico, cultural y social, demanda una ciudadanía más competente, con capacidad de adaptarse a nuevas ideas, contextos y recursos, así como de actualizarse continuamente.

Dichos cambios y necesidades han forzado a países –inicialmente europeos y, más recientemente, latinoamericanos– a revisar y reformular sus sistemas educativos y programas de estudio en función de dichas transformaciones.

En Europa, el proyecto Tuning Educational Structure[1] surge en busca de soluciones a la incompatibilidad, poca competitividad y comparabilidad de la educación superior europea. Con dicho proyecto, se inician los esfuerzos por definir perfiles profesionales y académicos, basados en los resultados de aprendizajes y competencias deseables, incluyendo destrezas, conocimientos y contenidos en siete áreas: física, empresariales, matemáticas, educación,

[1] http://www.unideusto.org/tuningeu/

geología, historia y química. Se definen las competencias genéricas (instrumentales, interpersonales y sistémicas) y específicas a cada área temática (incluyen destrezas y conocimientos) que sirven de base en la construcción de los perfiles. Mientras las competencias genéricas identifican elementos compartidos que pueden ser comunes a cualquier carrera, las específicas son cruciales para la especificidad propia del campo de estudio.

En Latinoamérica, en la misma línea que Tuning Europa, se crea Alfa Tuning América Latina[2] para afinar las estructuras educativas de esta región. Al igual que en Europa, se establecen competencias genéricas y específicas, pero esta vez para 12 áreas temáticas: administración de empresas, arquitectura, derecho, educación, enfermería, física, geología, historia, ingeniería civil, matemáticas, medicina y química. Las competencias generales incluyen aspectos tales como ética profesional, trabajo en equipo, toma de decisiones, resolución de problemas. En educación, establecen competencias específicas que incorporan elementos relacionados con el dominio de contenidos pedagógicos (generales y específicos), manejo de aula, materiales didácticos, investigación educativa, entre otros. En relación con las competencias matemáticas, proponen capacidades y destrezas en conocimientos básicos de la disciplina, resolución de problemas, comunicación y lenguaje matemático, entre otros.

En ambos contextos (Europa y América Latina), el cambio curricular busca el desplazamiento de una educación centrada en la enseñanza, por una educación más centrada en el aprendizaje (Bravo, 2007); y responde la necesidad de reorientar el modelo tradicional que ha sustentado por décadas los programas universitarios de formación, por los propósitos que la post-modernidad y el pensamiento complejo ofrecen en la actualidad.

Lo anterior implica crear programas más focalizados, con estructuras menos rígidas y entrega flexible del conocimiento con la condición de mayor guía y apoyo; el currículo debe ofrecer las posibilidades para la construcción de los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes necesarias. Así, todo profesional graduado de las universidades será capaz de cumplir con la multiplicidad de roles que la sociedad demanda.

### 2.2. El panorama nacional en la formación de personal docente en enseñanza de las matemáticas

En el caso de Costa Rica, las estructuras educativas y programas de estudios muestran características similares a los enfoques tradicionales desarrollados en otros países. Los planes y programas de formación docente señalan, como rasgos del perfil docente, un énfasis en aspectos técnicos y en el dominio de conocimientos (Segundo Informe del Estado de la Educación, 2008).

En este sentido, cada currículo de las universidades se enfoca en conocimientos sólidos de educación y matemáticas; además de incluir algunos valores como perseverancia, ética profesional y excelencia.

En los casos particulares de las universidades estatales, se adhieren en la teoría los principios establecidos por la UNESCO en cuanto a educación: aprender

[2] http://tuning.unideusto.org/tuningal/

a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir y aprender a ser. Mientras algunas universidades ponen especial atención en las destrezas y saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales; otras señalan un énfasis pedagógico en conocimientos y habilidades.

En cuanto a las universidades privadas, estas establecen como rasgos de sus perfiles, entre otros elementos, el conocimiento general y el de la especialidad (Segundo Informe del Estado de la Educación, 2008). Como indican Alfaro et al., (2013), los perfiles en los documentos escritos por universidades públicas y privadas son similares.

Por su parte, las entidades gubernamentales apuntan hacia un profesional con "una amplia gama de conocimientos y que, aparte de ser educadores, tengan rasgos de filósofos, sociólogos, orientadores y administradores educativos" (Arias, citado en el Segundo Informe del Estado de la Educación, 2008, p. 144). Además, promueven valorar las tendencias mundiales en el modelo de formación basado en competencias.

No obstante, estos perfiles –comparados con los estándares que establecen proyectos tales como Tuning Europa y América Latina y el Marco para la Buena Enseñanza de Chile– no se acercan a los estándares buscados, pues dejan de lado las competencias esenciales del docente; por ejemplo, el dominio de la pedagogía específica de la materia que se imparte.

### 2.3. Formación actual en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

La carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, de la Universidad Nacional, ha sido pionera en la formación y capacitación de profesorado para la enseñanza media en Costa Rica. Esta es una carrera compartida entre la Escuela de Matemática y la División de Educología, lo que significa que ambas unidades tienen injerencia y participación; aunque, como es de esperar, esto genera una brecha importante al segmentar los cursos en dos unidades distintas.

Tal separación no solo es administrativa, sino que crea vacios importantes en la formación. Aún persiste la visión de formación en matemáticas y formación en educación y pedagogía general, lo que no permite concretar claramente la formación de educadores matemáticos.

Así, los cursos de matemáticas son impartidos por docentes de la Escuela de Matemática y los de educación por los académicos de la División de Educología. Como ya se ha documentado (Morales, 2014), esta separación es producto de la forma histórica en que fueron concebidas las carreras de educación matemática en el país medio siglo atrás.

Actualmente, la carrera está acreditada por el Sistema Nacional de Acreditación de la Educación Superior (SINAES)[3]; cuenta con aproximadamente 250 estudiantes y su ingreso promedio es de 40 personas por año. La carrera está

[3] Tal acreditación supone un alcance de los estándares de calidad definidos para estas carreras en Costa Rica. No es obligatorio ni vinculante para la educación superior costarricense.

organizada en seis ciclos lectivos, cuatro años para obtener el Bachillerato, y año y medio más para la Licenciatura. El programa consta de 21 cursos del área de matemática, 13 del área de educación, dos de idiomas, tres en la línea de investigación educativa y una gama de siete cursos entre optativas y de cultura general.

## 2.4. El perfil académico-profesional del personal docente de matemáticas desde el enfoque por competencias

La enseñanza de las matemáticas se ha centrado, principalmente, en el método magistral o expositivo, dentro de un contexto presencial, con poca contextualización y articulación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

Si bien es cierto, existe consenso en que la formación de docentes requiere de cambios radicales, en Costa Rica, los currículos prácticamente no han sufrido modificaciones significativas; por tanto, la mayoría de docentes graduados replica el sistema aprendido, perpetuando así la enseñanza tradicional. Esto pone en conflicto al personal docente de matemática, pues como señala Crespo (2011), "se le exige por un lado calidad educativa y competencias profesionales y por otro un conocimiento funcional que le permita adaptarse al constante cambio" (p.16).

Ante esta problemática, surge, como alternativa, el diseño curricular basado en competencias. Este parte de las necesidades sociales y se sustenta en la pedagogía de la problematización, la andragogía, la didáctica crítica, la planificación innovadora, la motivación, el modelamiento y la evaluación formativa. El propósito fundamental es lograr competencias para la vida, que permitan un desempeño acorde con la realidad sociolaboral.

El aprendizaje centrado en el desarrollo de competencias constituye una propuesta que parte del aprendizaje significativo y se orienta a la formación humana integral (Pinto, 1999). Integra la teoría con la práctica en las distintas actividades del proceso educativo y fomenta la construcción del aprendizaje autónomo. Este aprendizaje consta de logros complejos que involucran aspectos cognitivos (saber), procedimentales (saber hacer) y actitudinales (ser y convivir). Cada competencia es la capacidad de proceder con eficiencia, eficacia y satisfacción sobre algún aspecto de la realidad personal, social, natural o simbólica. Son aprendizajes que contemplan la reflexión sobre el propio proceso (Tobón, 2005).

Junto a esto, señala Morales (2011), no solo será necesario reorientar la mirada a los programas de estudio y a las necesidades actuales, sino a la creación de currículos flexibles que permitan tramar estas competencias en la formación inicial.

El diseño curricular por competencias es una opción que busca generar procesos formativos de mayor calidad, sin perder de vista las necesidades de la sociedad, de la profesión, del desarrollo disciplinar y del trabajo académico. Es decir, toma en cuenta las necesidades sociales, enlaza al estudiantado con la realidad en el marco de las exigencias laborales, sin sistemas fraccionados de los saberes que componen los planes de estudio actuales y ubica, como eje principal, la condición humana (Huertas, Pérez y Castellanos, s. f.).

Sobre la definición del perfil existen diferentes posiciones (Arnaz, 1981; Guédez, 1980; Ramos, 1995). Desde el enfoque por competencias, Galvis, Fernández y Valdivieso (2006, citados por Galvis, 2007) conciben el perfil como "el conjunto de competencias organizadas por unidades de competencias, requeridas para realizar una actividad profesional, de acuerdo con criterios valorativos y parámetros de calidad" (p. 52). Estas competencias permitirán establecer un perfil académico-profesional que sirva de referente para las instituciones encargadas de la formación docente en matemáticas.

Asimismo, la definición del perfil académico-profesional está íntimamente ligada con la identificación de competencias y destrezas, así como con las metodologías utilizadas para el desarrollo de estas en un programa de estudio (Bravo, 2007). En este sentido, Tejada (2009) puntualiza el alcance de lo antes expresado: "La lógica del perfil profesional da a las competencias de manera explícita un derecho a la gestión del currículo" (p. 13).

Para efectos de esta investigación, se comprende el perfil académico-profesional como los esquemas que orientan un proyecto educativo, tomando en cuenta las exigencias académicas (conocimientos y habilidades), laborales (funciones y tareas) y personales (valores y actitudes) del futuro personal docente (Alfaro et al., 2011, basados en Tobón, 2005).

Esto conduce a la definición de una serie de competencias generales y específicas de la especialidad, que le den sustento al perfil del futuro docente en matemáticas y consideren todo un diagnóstico realizado a partir de la consulta a diferentes actores (estudiantes, profesorado, personas expertas y empleadoras).

## 3. Marco metodológico

Esta investigación es descriptiva y planteada con el objetivo de conocer las problemáticas y características del futuro educador y educadora de matemáticas a través de la consulta a los distintos grupos de interés. Sus respuestas permitieron definir el perfil académico–profesional del personal docente de matemáticas. Su enfoque es cualitativo y fue conducida entre el segundo semestre del 2011 y primer semestre del 2012 en Costa Rica.

Para su desarrollo se consideró la consulta a tres tipos de poblaciones (triangulación de las fuentes). El primer grupo estuvo constituido por estudiantes de nivel avanzado de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional y que cursaban, al menos, el cuarto año del nivel del plan de estudios de esta carrera; el segundo grupo conformado por personal docente universitario y profesorado jubilado de esta misma carrera; y como tercer grupo, docentes de secundaria en servicio, y asesoras y asesores pedagógicos. En total participaron 116 personas.

Para obtener la información necesaria en esta investigación y atender el objetivo definido en la sección introductoria, se establecieron dos dinámicas distintas para los grupos mencionados (triangulación de datos).

Para los grupos uno y dos (estudiantes y docentes universitarios) se trabajó con grupos focales mediante el análisis y discusión de preguntas generadoras definidas en el instrumento. Para el grupo tres se construyó y aplicó un cuestionario abierto, el cual fue proporcionado de manera individual al profesorado de secundaria en servicio y asesores; en la figura 1 se muestra la distribución de los aspectos metodológicos.

| Grupo | Técnicas | Instrumento | Fecha y Lugar |
|---|---|---|---|
| Estudiantes avanzados de enseñanza de las Matemáticas (grupo 1) | Grupo focal | Cuestionario y preguntas generadoras (grupal) | Segundo semestre del 2011, UNA |
| Profesores universitarios y jubilados (grupo 2) | Grupo focal | Cuestionario y preguntas generadoras (grupal) | Segundo semestre del 2011, UNA |
| Profesores de secundaria en servicio y asesores (grupo 3) | Consulta | Cuestionario (individual) | Primer semestre del 2012, MEP |

**Figura 1**. Descripción de las actividades e instrumentos según poblaciones y fechas.
**Fuente**: propia de la investigación (2012)

Respecto a los cuestionarios aplicados, se diseñaron una serie de preguntas generadoras concernientes al perfil académico-profesional de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional. Tales preguntas referían a problemáticas de la educación de las matemáticas y características en su formación desde las matemáticas y la pedagogía. Asimismo, se hizo la consulta sobre las competencias (en términos de habilidades, destrezas y actitudes) que debe tener el profesional en educación de las matemáticas.

## 4. Resultados

En este apartado se describe y sistematiza cada uno de los aportes de los grupos a los que se recurrió; se organiza en dos bloques: problemáticas relacionadas con la educación de las matemáticas en secundaria y características que debe poseer el docente para responder a estas.

### 4.1. Grupo uno. Estudiantes de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

***Problemáticas de la educación de las matemáticas***

El primer aspecto que menciona el grupo de estudiantes respecto a la problemática que se vive en torno a la educación de las matemáticas es la deficiente y escasa preparación en su formación universitaria inicial, especialmente en lo que se refiere a técnicas y estrategias metodológicas adecuadas para la enseñanza de dicha disciplina, así como el pobre manejo de conocimientos matemáticos básicos. Concuerdan en que no hay relación entre la disciplina de estudio y la pedagogía.

Resaltan, también, que para efectos de contratación de docentes por parte del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, los profesionales graduados de una carrera acreditada no tienen ninguna prioridad o ventaja en relación con otros profesionales que se gradúan de universidades privadas; aducen que estas últimas gradúan estudiantes en tres años, mientras que las universidades públicas lo hacen en cinco años o más.

Asimismo, indican que el currículo actual de los Programas de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública está orientado al desarrollo de contenidos y no al cumplimiento de objetivos, y que su poca aplicabilidad a la realidad afecta la educación de las matemáticas. También, las condiciones laborales, así como los materiales y recursos con que cuenta el personal docente, no son los más adecuados.

***Características del educador y educadora en matemáticas***

Este grupo señala que el futuro profesional en enseñanza de las matemáticas debe ser una persona humilde, con calidad humana, comunicativa, con capacidad de diálogo, paciente y sensible; además, buena expositora y autodidacta.

En el campo de la enseñanza de las matemáticas el futuro profesional debe (sin orden particular):

- Poseer una sólida formación matemática
- Conocer diferentes y adecuadas metodologías para la enseñanza de las matemáticas
- Lograr en sus estudiantes una comprensión de las matemáticas más integral y profunda
- Mantener una buena relación con todos sus estudiantes
- Tener la capacidad de trabajar con aquellas personas que presentan necesidades educativas especiales, aplicando adecuaciones curriculares que favorezcan su aprendizaje
- Saber elaborar y utilizar correctamente los recursos y materiales didácticos (pizarras, software, etc.) para una adecuada mediación pedagógica
- Ser capaz de realizar una adecuada transposición didáctica
- Planificar adecuadamente utilizando diferentes métodos de enseñanza (clases magistrales, constructivistas, dinámicas, creativas)
- Saber motivar a sus estudiantes

## 4.2. Grupo dos. Profesorado universitario y jubilado

***Problemáticas de la educación de las matemáticas***

Este grupo señaló que muchas de las necesidades y problemáticas actuales en la secundaria están relacionadas con la gestión administrativa del Ministerio de Educación Pública. Así, consideran que el exceso de estudiantes en las aulas, un marco legal asfixiante, escasa comunicación entre instituciones-docente-hogar, y los escasos o mal enfocados espacios de capacitación, son parte de las problemáticas generadas desde la misma administración educativa.

Aunado a esto, realizan una crítica al currículo actual. Parte de lo expresado apunta tanto a la estructura curricular como a su enfoque (principalmente por contenidos) y la forma en que este presenta debilidades en su articulación y orientación.

Las otras dos críticas principales a la situación que se vive en secundaria están dirigidas al papel del personal docentes y del estudiantado. Respecto al rol docente, este grupo señala que el profesorado está muy poco preparado para enfrentar situaciones de índole natural dentro del sector educativo (uso de recursos como la tecnología, la adecuación del currículo, creatividad, relación teoría–práctica y la aplicación del conocimiento). Respecto al estudiantado, indican que la mayor problemática que enfrentan está relacionada con la motivación por su aprendizaje; señalan que parte de las causas podrían estar ligadas a la transición de la primaria a la secundaria.

Por otro lado, este grupo consideró una estrecha relación entre las debilidades actuales de los docentes de secundaria y su formación universitaria inicial. De esta manera, las debilidades mencionadas en el párrafo anterior pueden ser generadas por problemas de los currículos de las carreras de formación, donde se desarticulan las matemáticas de su contexto y, por supuesto, de la labor docente. La docencia se trata de manera general y nunca en didácticas específicas. Tal divorcio también se refleja en la inexistencia de propuestas comunes para la formación continua de los docentes y en la poca relación de las carreras de Enseñanza de las Matemáticas con el Ministerio de Educación Pública.

Junto a esto, expresan una situación adicional que vive nuestro país: el posicionamiento de universidades no estatales con programas de formación casi acortados a la mitad de tiempo, con perfiles y creditajes mucho más bajos y con las mismas condiciones para sus egresados frente al principal contratante (Ministerio de Educación Pública). Por último, señalan que existe un interés generalizado por no resolver estos problemas en el sector educativo.

### *Características del personal docente en matemáticas*

Cuando se discutió dentro del grupo sobre las cualidades que debe tener el futuro profesorado de matemáticas, se pudo crear un consenso sobre las siguientes características (sin orden particular):

- Saber matemáticas, es decir, tener un conocimiento sólido de la materia
- Saber enseñar matemáticas, es decir, conocer sobre metodologías y didácticas específicas, y modelarlas
- Ser capaz de investigar en educación
- Mostrar capacidad de atender situaciones de aula (estudiantes con necesidades educativas especiales)
- Tener facilidad para comunicarse asertivamente con padres de familia
- Conocer de la legislación educativa
- Ser capaz de relacionar la teoría con la práctica (es decir, articular el conocimiento matemático con la vida cotidiana y contextualizar lo que se enseña)

- Tener capacidad de innovación y creatividad en su mediación pedagógica, que responda a las necesidades estudiantiles
- Tener capacidad de trabajo cooperativo y colaborativo
- Ser capaz de aplicar el recurso tecnológico en el aula para facilitar la comprensión de las matemáticas
- Tener vocación y actitud hacia la educación, y compromiso con el desarrollo integral de sus estudiantes

### 4.3. Grupo tres. Profesorado en servicio

***Problemáticas de la educación de las matemáticas***

En cuanto a las problemáticas en educación de las matemáticas, el grupo de docentes señaló que el tiempo para desarrollar los temas satisfactoriamente, así como grupos muy numerosos, son aspectos que afectan la calidad de esta disciplina. Indicaron que cada elemento que conforma el currículo debe tener una cuota de responsabilidad en cuanto a la calidad de la educación y, que la misma sociedad ha impulsado el hecho de que no se valore la profesión docente.

De esta manera, los encuestados mencionaron que los estudiantes deben mejorar su actitud hacia el estudio (de la ciencia y la tecnología, por ende, de las matemáticas) y tener una mayor disposición al aprendizaje. El deficiente conocimiento matemático que traen de la escuela afecta todo este proceso.

Por otro lado, es necesario contar con un mayor compromiso de los padres y madres de familia en cuanto a los límites que deben ponerse desde el hogar. Sobre el currículo actual, señalan que está sobrecargado de contenidos y que el sistema de evaluación estandarizado no contribuye a una buena educación de las matemáticas.

En cuanto a la formación docente, comentaron que es necesaria una capacitación continua sobre estrategias metodológicas, adecuaciones curriculares, recursos didácticos, uso de las tecnologías, entre otras.

Finalmente, señalaron como una problemática nacional, el hecho de competir con graduados de universidades privadas que obtienen el título en menos años, para efectos de contratación, nombramientos, aumento de lecciones, entre otros.

***Características del personal docente en matemáticas***

Dentro de las características generales, se pudo determinar que el futuro docente debe ser una persona con ética, que mantenga buenas relaciones interpersonales, que respete y reconozca las diferencias individuales; que tenga conocimientos en administración educativa, psicología, investigación y legislación educativa. A continuación se describen las principales características (sin orden particular):

- Tener un conocimiento y dominio de la disciplina que va a enseñar
- Contar con una sólida formación en matemáticas y pedagogía
- Saber razonar, interpretar y resolver problemas
- Saber explicarse y comunicarse con los estudiantes

- Saber enseñar
- Tener conocimiento sobre los diferentes elementos que conforman el currículo
- Conocer y saber aplicar adecuaciones curriculares
- Tener conocimiento sobre las inteligencias múltiples y los estilos de aprendizaje
- Conocer y aplicar diferentes estrategias de mediación pedagógica (trabajo colaborativo y cooperativo)
- Conocer el contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje
- Tener buen manejo de grupos

## 5. Conclusiones

En este apartado se contrasta la información obtenida de los grupos participantes; para esto se ordena la información de manera similar al apartado anterior, partiendo de las principales problemáticas y concluyendo con las características que los tres grupos señalaron.

Primero, los grupos consultados coinciden en que el currículo actual de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria de Costa Rica está principalmente dirigido hacia los contenidos de la disciplina, estimulando procesos como la memorización y dejando poco o nada de espacio a trabajo relacionado con exploración, análisis, interpretación y producción.

Segundo, los grupos de estudiantes y profesores universitarios coincidieron en que una problemática actual es la formación universitaria inicial y sus debilidades en matemáticas, didáctica y pedagogía. El grupo de profesores en servicio se enfocó en señalar que la dificultad está íntimamente relacionada con la formación continua y capacitación. Esto puede deberse a que su necesidad inmediata es participar en procesos de instrucción universitaria no inicial, los cuales actualmente son escasos en Costa Rica.

Tercero, una circunstancia expresada por los tres grupos se relaciona con la formación y contratación entre docentes egresados de universidades estatales, en algunos casos, con más del doble de años de formación universitaria inicial que los profesores formados en universidades privadas. Se está claro que esto no necesariamente determina *a priori* mayor calidad de la formación, pero refleja la principal preocupación de las personas participantes sobre los escasos y defectuosos criterios de contratación de docentes del Ministerio de Educación Pública.

En este caso, aunque existe en Costa Rica legislación[4] que privilegia los graduados de carreras acreditadas, en la práctica, tal prerrogativa es diluida entre otros criterios de contratación.

---

[4] Artículo 4 de la Ley Nº 8798 del 16/04/2010 (Ley de costa Rica).

Por último, si se analizan cuidadosamente las características expresadas por quienes participaron en esta investigación, se pueden verificar grandes similitudes en su opinión. Con la información de todos estos grupos, este proyecto logró diseñar el conjunto de competencias genéricas y específicas que conforman el perfil académico profesional del personal docente de matemáticas. Para la redacción de las competencias se utilizó el modelo de Erazo et al. (2008).

### *Perfil académico-profesional elaborado*

**Tabla 1. Perfil académico-profesional del personal docente de matemáticas desde los tres grupos considerados**

| ***Competencias genéricas*** |
|---|
| *G1. Desarrollar habilidades sociales y culturales para participar en los contextos educativos.* |
| *G2. Desarrollar habilidades en el uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) para el fortalecimiento de los procesos cognitivos en diversos contextos educativos.* |
| *G3. Desarrollar habilidades en investigación disciplinaria, interdisciplinaria y multidisciplinaria para la transformación de realidades educativas.* |
| *G4. Aprender sobre saberes pedagógicos y disciplinarios para la actualización profesional de forma permanente.* |
| *G5. Fortalecer los hábitos de responsabilidad y compromiso en el ejercicio de su profesión.* |
| *G6. Ejercer su profesión con ética en diferentes entornos.* |
| *G7. Desarrollar la competencia comunicativa en su propio idioma para el óptimo ejercicio profesional.* |
| *G8. Desarrollar habilidades básicas de comunicación escrita y oral en un segundo idioma para el enriquecimiento de su práctica profesional.* |
| *G9. Desarrollar habilidades de trabajo en equipo, colaborativo y cooperativo para la construcción del conocimiento disciplinar, transdisciplinar e interdisciplinar.* |
| *G10. Desarrollar habilidades interpersonales en el círculo profesional para el enriquecimiento de su práctica pedagógica.* |
| *G11. Reconocer la diversidad y la multiculturalidad para convivir en paz y con respeto en todo contexto.* |

| ***Competencias específicas*** |
|---|
| ***Competencias matemáticas*** |
| *M1. Comprender los conceptos básicos de la matemática superior desde una perspectiva universitaria para su formación como docente de matemática.* |
| *M2. Ser capaz de formular problemas en lenguaje matemático durante su actividad como estudiante para fortalecer sus estructuras de pensamiento.* |
| *M3. Entender los conceptos fundamentales de la matemática a través de su evolución socio-histórica para la comprensión de la disciplina y su enseñanza en diferentes contextos.* |
| *M4. Construir e interpretar modelos matemáticos a partir de situaciones reales para reconocer la importancia de la matemática en la vida cotidiana.* |
| *M5. Aplicar los conocimientos sobre resolución de problemas en contextos multidisciplinares para mayor comprensión de su importancia en otras áreas científicas y sociales.* |

***Competencias didáctico-matemáticas***

*D1. Mediar pedagógicamente el contenido matemático para el mejoramiento de los procesos de aprendizaje en diferentes ambientes educativos.*
*D2. Incorporar, en la mediación pedagógica, los contenidos matemáticos, su origen y desarrollo histórico, así como su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (física, biología, economía, otros).*
*D3. Analizar las diversas corrientes de pensamiento en la educación matemática que proporcionan elementos teóricos y metodológicos para ser incorporados en las prácticas docentes.*
*D4. Incorporar diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje con el fin de fortalecer la mediación pedagógica de los contenidos matemáticos para valorar su uso en la cotidianidad.*
*D5. Integrar diversidad de recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la matemática de forma apropiada y crítica para la creación de ambientes de aprendizaje óptimos.*
*D6. Aplicar estrategias para la resolución de problemas que desarrollen el pensamiento lógico, de manera que les posibilite una labor profesional crítica y reflexiva.*

***Competencias pedagógicas***

*P1. Analizar las teorías que fundamentan la didáctica general y específica para la integración del saber pedagógico y disciplinar en el accionar educativo.*
*P2. Diseñar, seleccionar y aplicar estrategias de enseñanza y aprendizaje que promuevan la autorregulación, la metacognición y la creatividad en diferentes espacios educativos para la comprensión optima del contenido disciplinar.*
*P3. Diseñar, seleccionar y aplicar recursos didácticos que potencien un aprendizaje estratégico para el logro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura.*
*P4. Realizar análisis críticos de los enfoques de evaluación para asumir un posicionamiento ante los procesos de evaluación de los aprendizajes.*
*P5. Aplicar diversas estrategias de evaluación que promuevan una evaluación auténtica de los aprendizajes en los diferentes espacios educativos.*
*P6. Analizar necesidades de aprendizaje y capacidades cognitivas del estudiantado con el fin de mejorar la mediación pedagógica para el logro de los objetivos de aprendizaje.*
*P7. Integrar apropiadamente tecnologías en la mediación pedagógica para potenciar los estilos y ritmos de aprendizaje del estudiantado.*

La tabla 1 resume las principales características que esta investigación generó, a la luz de un análisis, cuyo fin fue ofrecer los insumos adecuados y poder dar prioridad a las necesidades, que en el caso de Costa Rica, urge atender. Sin temor a considerarla como una lista, esta concentra las opiniones de todos los grupos participantes y expresa las prioridades pendientes. No es el interés en este trabajo, crear extensos inventarios de cualidades donde, posiblemente, no todos sean urgentes.

De la misma manera, la investigación no sugiere adoptar el modelo de competencias por su auge en el ámbito educativo a nivel internacional. Se tiene claro que la sociedad exhorta a la creación o actualización de programas de estudio contextualizados, para lo cual el primer paso consiste en la consulta a los involucrados; este proceso es primordial, independientemente del modelo a seguir.

Respecto al objetivo inicial, se logró construir un perfil académico–profesional con particularidades que los grupos consideraron como relevantes. Posiblemente, en otros contextos las prioridades de formación universitaria inicial de docentes de matemáticas puedan ser distintas. El objetivo no es ofrecer un perfil estándar para cualquier carrera, sino más bien, compartir con la comunidad internacional, la forma y visión con la que se aborda esta labor.

Evidentemente quedan tareas pendientes y, frente a todos los propósitos, más trabajo existe en el horizonte. En el caso particular de la carrera mencionada, se requieren muchas otras consultas y análisis para poder descifrar la combinación correcta para la construcción de un currículo apropiado de los educadores y educadoras de las matemáticas.

## Reconocimiento

Esta investigación se realizó en el marco del Proyecto *Enfoque por competencias: Una propuesta para el currículo de formación de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional*, código 0329-10.

## Referencias

Alfaro, A., Alpízar, M., Morales, Y., Salas, O., y Ramírez, M. (2013). La formación inicial y continua de docentes de matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(número especial), 131–179. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1281

Abbott, I. y Huddleston, P. (2000). Standards, competence and knowledge: Initial teacher training and business. *International Journal of Value-Based Management* 13(3), 215-227.

Alfaro, M., Gamboa, A., Jiménez, S., Martín, J., Ramírez, A. y Vargas, M. (2011). *Perfil docente: Fundamentos teóricos y metodológicos*. Costa Rica: EUNA.

Arnaz, J. (1981). La planeación curricular: Cursos básicos para formación de profesores. México: Trillas.

Beck, C., Hart, D. y Kosnik, C. (2002). The teaching standards movement and current teaching practices. Canadian *Journal of Education*, 27(2-3), 175-194.

Bravo, N. (2007). *Competencias proyecto Tuning-Europa, Tuning-America Latina*. Bogotá, Colombia.

Crespo, C. (2011). El profesor de matemática y su formación. Un camino continuo en busca de respuestas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 28 (1), 11-22.

Erazo, I., Aguilar, L., Brenes, P., Paz, C. y Montero, A. (2008). *Manual para el diseño y gestión curricular basado en competencias académico-profesionales*. Tegucigalpa, Honduras.

Galvis, R. (2007). De un perfil docente tradicional a un perfil docente basado en competencias*. Acción Pedagógica*, 16, 48-57.

Guédez, V. (1980). Lineamientos académicos para la definición de los perfiles profesionales. *Revista Curriculum*, *5* (10), 93-123.

Ho, H., Senturk, D., Lam, A., Zimmer, J., Hong, S. y Okamoto, Y. (2000). The affective and cognitive dimensions of math anxiety. *Journal in Mathematics Education*, *31*(3), 362-379.

Huertas, J., Pérez, I. y Castellanos, A. (s. f.). Desarrollo curricular por competencias profesionales integrales. Recuperado de http://www2.ufro.cl/docencia/documentos/Competencias.pdf

Lesh, R. (2007). Foundations for the future in Engineering and other fields that are heavy users of Mathematics, Science and Technology. In R. A. Lesh, E. Hamilton, y J. J. Kaput, *Foundations for the future in Mathematics Education* (pp. vii-x). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L., y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación universitaria inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3 (1), 35-48.

Morales, Y. (2011). Inputs for the incorporation of the UNESCO guidelines on ICT competency standards: the training of teachers of mathematics in Central America. *Revista Aula Abierta*. 39(1), 3-12.

Morales, Y. (2014). Costa Rica: la formación inicial y continua de docentes de matemáticas. En A. Ruiz (Vicepresidente del ICMI). *CANP National Report Series #2 (pp.21-32)*. International Commission on Mathematical Instruction.

Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future*. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

Pinto, L. (1999). Currículo por competencias. Necesidad de una nueva escuela. *Tarea*, 43, 10-17. Recuperado de http://www.tarea.org.pe/images/Tarea_43_10_Luisa_Pinto.pdf

Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible (2008). *Segundo Estado de la Educación* / Consejo Nacional de Rectores. –2 ed.– San José C.R.

Ramos, M. (1995). Perfil del docente hoy en su rol de facilitador humanista. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Educación*, 6(13), 341-358.

Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemáticas Española*, 7(1), 33-36.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación universitaria inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8(1), 1-15.

Tejada, J. (2009). Competencias docentes. *Revista Profesorado*. 13(2), 1-15. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~recfpro/rev132COL2.pdf

Tobón, S. (2005). *Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica*. Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

**Yuri Morales.** Magíster en Tecnología e Informática Educativa, Licenciado en Enseñanza de la Matemática. Director de Revista Uniciencia. Coordinador del Área de Matemática Aplicada de la UNA y profesor e investigador en la Escuela de Matemática. Directivo de la Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe**.** yuri.morales.lopez@una.cr

**Jennifer Fonseca.** Máster en Ciencias de la Educación con Énfasis en Enseñanza de la Matemática de Purdue University (IN, USA). Licenciada en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Ha trabajado en resolución de problemas, diseño curricular y model-eliciting activities. Actualmente, profesora y coordinadora de la Carrera de Enseñanza de la Matemática en la UNA. **jennifer.fonseca.castro@una.cr**

**Marcela García.** Máster en Educación con Énfasis en Docencia Universitaria, Licenciada en Enseñanza de la Matemática. Profesora de grado en la carrera Enseñanza de la Matemática y profesora de posgrado de la Maestría en Educación. Miembro de la Asociación de Matemática Educativa Costarricense, ASOMED. Participante en proyectos de educación y didácticas específicas**.** **marcela.garcia.borbon@una.cr**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 103-114

# Procedimientos matemáticos para aprender límite. Su evaluación.

**Patricia Villalonga, Susana González, Marta Inés Marcilla, Susana Mercau, Lisa Holgado**

Fecha de recepción: 7/08/2012
Fecha de aceptación: 23/06/2013

| | |
|---|---|
| **Resumen** | En alumnos de primer año de una Facultad de Ciencias se diagnosticó el grado de dominio de ciertos procedimientos matemáticos necesarios para abordar: *Límite de una función.* El marco metodológico siguió principios de Samaja, que orientaron la construcción del objeto modelo de la investigación. Se elaboró e implementó una prueba escrita cuya solución requería el dominio de los procedimientos: Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Graficar y Controlar. Un estudio descriptivo mostró mayor desarrollo en Identificar, Interpretar, Calcular y Graficar y menor dominio en Recodificar y Controlar. Este diagnóstico determinó la inclusión, en el material instruccional a implementar en el aula, de actividades que contribuyan a superar las falencias detectadas. **Palabras claves**: límite de función, material instruccional. |
| **Abstract** | In first grade students of a School of Sciences was diagnosed the development of some mathematical procedures required to approach the learning of the unit: Limit of a function. The methodological framework followed the principles of Samaja that built the model object of the research. A written test with five items was elaborated. Its answers required the control of the procedures: Identify, Interpret, Re-encode, Compute, Make graphic, and Control. A descriptive study of the data would show more development in Identify, Interpret, Compute, and Make graphic, besides, a minor control in Re-encode and Control. This diagnosis determined the incorporation of activities in the instructional material required by them and contributes to its mastery. **Keywords**: Limit of a function, instructional material. |
| **Resumo** | Em alunos do primeiro ano de uma Faculdade de Ciências se diagnosticou o grau de domínio de certos procedimentos matemáticos necessários para abordar: *Limite de uma função*. O marco metodológico seguiu princípios de Samaja, que orientaram a construção do objeto modelo da investigação. Elaborou-se e executou-se uma prova escrita cuja solução requeria o domínio dos procedimentos: Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Desenhar e Controlar. Um estudo descritivo mostrou maior desenvolvimento em Identificar, Interpretar, Calcular e Desenhar e menor domínio em Recodificar e Controlar. Este diagnóstico determinou a inclusão, no material instrucional a implementar na aula, de atividades que contribuam a superar a falecias detectadas. **Palavras-chave:** Limite de uma função, material instrucional**.** |

## 1. Introducción

Los docentes de Matemática I, asignatura del primer cuatrimestre de primer año de una Facultad de ciencias, se enfrentan a problemas generados por aulas masivas: deficiente relación docente-alumno, escasa comunicación entre los participantes, alumnos pasivos, evaluaciones implementadas sólo para acreditar, entre otros. Intentando superar estas limitaciones que influyen en la calidad del aprendizaje y la evaluación, se formuló el proyecto: *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática*, aprobado por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán. Este proyecto se centra en el diseño e implementación de una estrategia didáctica que recurre al empleo de un material curricular elaborado ad hoc, construido en base a principios vigentes en investigación en educación matemática. Esta estrategia pretende favorecer aprendizajes significativos, valorizar la regulación continua del aprendizaje y contribuir a superar la práctica de evaluación del aprendizaje vigente en estas aulas, actualmente limitada sólo a evaluaciones sumativas, proponiendo actividades que no requieran de la intervención continua del profesor y favorezcan la interacción social en el aula.

Este artículo es un avance de dicho proyecto. En trabajos anteriores se identificaron una serie de criterios orientadores de la enseñanza y evaluación del aprendizaje de la Matemática, basados en principios de la psicología cognitiva, que se constituyeron en referentes durante el desarrollo del proyecto (Villalonga, González, Holgado, Marcilla y Mercau, 2009). Además, se elaboró y validó un material curricular con una serie de estrategias didácticas para desarrollar en el aula la unidad: *Límite de una función* (González de Galindo y Villalonga de García, 2010). El objetivo de este trabajo es diagnosticar el desarrollo alcanzado por los estudiantes en ciertos procedimientos matemáticos, a partir del análisis de los protocolos recabados de una prueba diagnóstica aplicada en 2010 a una muestra de ingresantes a una Facultad de Ciencias. La misma pretendía evaluar el dominio de los prerrequisitos de aprendizaje de la unidad: *Límite de una función*, en una instancia previa a la puesta en práctica de la nueva estrategia didáctica.

## 2. Fundamentación teórica

### Los procedimientos generales matemáticos

Según Talízina (1984) no es posible separar el saber del saber hacer, dado que no puede haber un conocimiento sin una habilidad. Atendiendo a esta premisa, Hernández Fernández (1989) presentó en su Tesis doctoral el ***Sistema Básico de Habilidades Matemáticas***. Dichas habilidades se refieren a los procedimientos a través de las cuales es posible resolver problemas matemáticos en su acepción amplia. Este sistema está conformado por los siguientes procedimientos: *Definir, Demostrar, Identificar, Interpretar, Recodificar, Graficar, Algoritmizar* y *Calcular*. Posteriormente este *Sistema Básico* fue ampliado con los procedimientos: *Modelar, Comparar, Resolver, Aproximar, Optimizar* y *Controlar* (Hernández Fernández, Delgado Rubí y Fernández de Alaíza, 2001). El conjunto de procedimientos generales matemáticos constituye una totalidad cuyo dominio es obligatorio cuando un individuo se involucra en la realización de tareas matemáticas. Este conjunto de procedimientos tiene naturaleza jerárquica, *"en tanto cada uno de los procedimientos o combinación de ellos puede ser considerado como un sistema y el propio sistema puede considerarse un subsistema de un sistema mayor que* *incorpora otros procedimientos (entre ellas los lógicas) los cuales confluyen en su actuar a la hora de resolver problemas matemáticos"* (Delgado Rubí, 2001: 83).

## Los procedimientos generales matemáticos, su representación

Delgado Rubí (2001) caracterizó los procedimientos generales matemáticos de la siguiente manera:

Interpretar: "*es atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate"* (Delgado Rubí, 2001: 73). Ejemplo: Se interpreta cuando se asume que el signo menos que puede aparecer al derivar dos veces la función que da la posición de un vehículo en un cierto tiempo, indica que el móvil se está frenando.

Identificar: "*es distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales"* (Delgado Rubí, 2001: 73). Ejemplo: Se identifica cuando se reconoce a la expresión: ($x^2 - y^2$) como una diferencia de cuadrados y no como el cuadrado de una diferencia.

Recodificar: "*es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro"* (Delgado Rubí, 2001: 74). Ejemplo: Se recodifica cuando se representa gráficamente en un sistema de ejes coordenados cartesianos una función definida analíticamente a través de una ecuación matemática.

Calcular: "*es una forma existencial de un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, verbal (oral o escrita), mental y mediante el uso de tablas, calculadoras o ordenadores"* (Delgado Rubí, 2001: 75). Ejemplo: Se calcula cuando se resuelve un límite indeterminado aplicando la Regla de L´Hopital, previa transformación, si fuera necesario, a la forma indeterminada 0/0 ó ∞/∞.

Algoritmizar: "*es plantear una sucesión estricta de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema"* (Delgado Rubí, 2001: 75). Ejemplo: Se algoritmiza cuando se establece, a través del Criterio de la Primera Derivada, la sucesión de pasos que deben realizarse para determinar los extremos relativos de una función.

Graficar: "*es representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, colegir las relaciones existentes a partir de su representación gráfica"* (Delgado Rubí, 2001: 76). Ejemplo: se grafica cuando se elabora un esquema donde se muestra la relación entre la existencia o no de la derivada de una función en un punto con la existencia o no de la recta tangente en ese punto.

Definir: "*es establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio"* (Delgado Rubí, 2001: 77). Ejemplo: Se define cuando se establece que la derivada de una función es el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, formalizando de esta manera este objeto matemático.

Demostrar: "*es establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación"* (Delgado Rubí, 2001: 77). Ejemplo: Se demuestra cuando a partir de ciertas hipótesis, por ejemplo, derivabilidad de una función en un punto, es posible llegar a la tesis de un teorema, en el caso que se trata continuidad de la función en ese punto, mediante un número finito de pasos.

Modelar: "*es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos"*

(Delgado Rubí, 2001: 78). Ejemplo: Se modela al asociar una función exponencial al crecimiento de las bacterias en un cultivo.
Comparar: "*es establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase"* (Delgado Rubí, 2001: 78). Ejemplo: Se compara cuando se determina la posición relativa de dos rectas analizando si son coincidentes, paralelas, perpendiculares o si se intersecan según un ángulo cualquiera.
*Resolver*: "*es encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema matemático"* (Delgado Rubí, 2001: 80). Ejemplo: Se resuelve cuando el alumno encuentra un camino para obtener información sobre una función a partir de la gráfica de su derivada.
*Optimizar*: "*es encontrar el objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.) que maximiza o minimiza (en algún sentido) la clase de objetos a la que pertenece o el método óptimo de resolución de determinado problema"* (Delgado Rubí, 2001: 81). Ejemplo: Si se requiere determinar si una función G es primitiva de una función f y la resolución de la integral de f es compleja, se optimiza el método de resolución al recurrir a la definición de primitiva de una función.
*Aproximar*: "*es sustituir un objeto por otro el cual se considera un modelo suyo"* (Delgado Rubí, 2001: 81). Ejemplo: Se aproxima cuando, en una práctica de laboratorio, se reemplaza una función no polinómica por un Polinomio de Taylor de un cierto grado n.

Hernández Fernández et al (2001) caracterizaron los siguientes procedimientos matemáticos:

*Controlar*: "*es monitorear y regular, es evaluar un conjunto de informaciones con relación a objetivos prefijados, a los efectos de tomar decisiones en el abordaje y resolución de un problema"* (Hernández Fernández et al, 2001: 113). La caracterización de cada una de las acciones que conforman el procedimiento *Controlar*, tanto en lo interpsicológico como en lo intrapsicológico, donde se convierte en estrategia metacognitiva (autocontrol), es la siguiente:

- *Monitorear: "es registrar las ocurrencias, los pasos que se van dando y las soluciones que se van obteniendo. El monitoreo ofrece información que condiciona las decisiones a* tomar" (Hernández Fernández et al, 2001: 114).
- *Evaluar*: "*es emitir un juicio de valor sobre el grado de correspondencia entre un conjunto de informaciones y de criterios con relación a un objetivo (o patrón aceptador de la acción), a los efectos de tomar decisiones"* (Hernández Fernández et al, 2001: 114).
- *Regular*: intervenir, ajustar y aplicar correctivos para modificar el proceso.

La acción de ***Estimar*** es un recurso metacognitivo que puede asociarse a la actividad de *Controlar*. ***Estimar*** puede definirse como *"conjeturar sobre las posibles soluciones o dimensiones a obtener o pronosticar características de las mismas"* (Hernández Fernández et al, 2001: 114). Sin embargo, no siempre el control presupone realizar estimaciones.

Ejemplo: El alumno se autocontrola cuando al intentar resolver la integral: $\int x \cos x \, dx$ elige erróneamente las partes de la siguiente manera: u = cos x, dv = x dx.

La integral que se obtiene resulta ser más complicada que la de partida lo que genera preguntas tales como: ¿me conviene esta elección? ¿esta elección facilita la resolución de la integral de partida? Este monitoreo lo lleva a evaluar los pasos seguidos y a tomar decisiones sobre continuar en ese camino, considerando las complicaciones mayores que se producirían o a cambiar la selección de las partes, es decir el alumno regula al efectuar correcciones y ajustes sobre el procedimiento empleado.

### Fundamentación teórica de la Metodología de la investigación

Para sistematizar el análisis de los protocolos de los estudiantes se siguieron los principios teóricos metodológicos de Samaja (2003) de los que se presenta una apretada síntesis. Dado que todo objeto real de investigación en ciencias sociales posee un gran número de atributos, relaciones y contextos, es necesario que el indagador, en base a modelos preexistentes al acto investigativo (consecuencias de la historia personal, intuiciones, experiencia y circunstancias o sea la *preconcepción modelizante* (Ladrière, 1978, c.p. Samaja, 2003)) efectúe una reducción de su complejidad explicitando qué aspectos relevantes tendrá en cuenta de sus componentes y qué *procedimientos* concretos usará para llevar a cabo su descripción. Es decir, debe construir un *objeto modelo*. El denominado *objeto modelo*, queda delimitado por los distintos tipos de *unidades de análisis* escogidas para la investigación, mediante la aplicación del conjunto de *variables,* que se seleccionen para describir el objeto real de la indagación, propio de cada tipo de *unidad de análisis* (Samaja, 2003). Desde esta perspectiva todo "*dato"* (Samaja, 2003, p.160) de cualquier investigación empírica, posee una estructura compleja invariante de cuatro componentes: *unidad de análisis*, *variables*, v*alores* e *indicadores*. Esta estructura se denomina *matriz de datos* y en ella el *indicador* es el *procedimiento* aplicado a cada dimensión relevante de la *variable* para efectuar su medición o valoración. Tales procedimientos incluyen desde el empleo de un indicio perceptivo simple, hasta la construcción de escalas o números índices que combinan muchos ítems o dimensiones de una variable compleja.

El conjunto de *variables* relevantes que se eligen para describir el objeto real de la investigación se denomina *espacio de atributos.* El *objeto modelo* de la investigación queda delimitado, entonces, por los distintos tipos de *unidades de análisis* escogidas para la investigación mediante la aplicación de un *espacio de atributos* propio de cada unidad de análisis.

## 3. METODOLOGIA

### 3.1 El instrumento

Se diseñó un instrumento que contenía cinco ítems de desarrollo (Stewart, Redlin, y Watson, 2006; Vieytes, 2004) (Ver Apéndice 1). Pretendían evaluar si el estudiante era capaz de:

- Identificar casos de factoreo.
- Calcular el valor de una incógnita, realizando los algoritmos pertinentes para reducir una ecuación algebraica fraccionaria a una expresión algebraica entera.
- Resolver una ecuación lineal.
- Controlar si las soluciones encontradas verifican la situación problemática planteada.

- Evaluar el valor de una función en un punto.
- Calcular el dominio y el rango de una función.
- Realizar la conversión entre distintos registros semióticos: del verbal al simbólico y del gráfico al simbólico.
- Interpretar gráficos.

La prueba versaba sobre:

- Expresiones algebraicas fraccionarias, factoreo, polinomios. Resolución de una ecuación algebraica fraccionaria.
- Función de variable real: dominio, rango, cálculo del valor de una función en un punto de abscisa a, interpretación geométrica de f(a), gráfica de una función. función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y trigonométrica.

Se garantizó la *validez de contenido del instrumento* sometiéndolo al juicio de tres docentes que participan en el dictado de la asignatura, quienes constataron que las actividades seleccionadas resultaban adecuadas para evaluar los objetivos especificados (Martínez Arias, 1996).

### 3.2 La muestra

Se aplicó la prueba a los 301 alumnos de Matemática I del año 2010. Se seleccionó una muestra probabilística de 60 protocolos, mediante un muestreo sistemático.

### 3.3 Metodología para analizar los protocolos de los estudiantes

En primer lugar, en cada uno de los cinco ítems de la prueba, se identificaron los procedimientos matemáticos que el alumno debía desplegar para resolverlos. La solución de cada ítem se dividió en secciones, conforme a los procedimientos que eran necesarios desarrollar. Cada una de esas secciones se consideró como *unidad de análisis* para estudiar el desarrollo del procedimiento pertinente. Las *variables* consideradas relevantes para este estudio fueron: *Identificar, Interpretar, Recodificar, Calcular, Graficar y Controlar.*

### Definición conceptual de las variables

1. *Identificar:* determinar si el objeto de estudio matemático pertenece a una determinada clase de objetos, los que presentan ciertas características distintivas.
2. *Interpretar:* Dar significado a una expresión matemática, la que adquiere sentido en función del propio objeto matemático o del fenómeno real que se trate.
3. *Recodificar:* transferir la denominación de un objeto de un lenguaje matemático a otro.
4. *Calcular:* aplicar un algoritmo que puede llevarse a cabo de forma manual, verbal (oral o escrita), mental, o recurriendo al uso de tablas, calculadoras o computadoras.
5. *Graficar:* representar relaciones entre objetos matemáticos a través de diagramas, tablas o geométricamente, y recíprocamente, deducir de ellas las relaciones existentes.
6. *Controlar*: evaluar un conjunto de información en base a objetivos prefijados, con el fin de efectuar una toma de decisiones para abordar y resolver un problema.

El *objeto modelo* para el análisis de los protocolos se presenta en el Apéndice 2

## Secciones de cada ítem y procedimientos matemáticos considerados

**Tabla 1: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 1**

| | Ítem 1 | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sección del ítem 1 | Diferencia de cuadrados | Trinomio cuadrado perfecto | Desarrollo de algoritmos para determinar la incógnita | Verificación de resultados |
| Procedimiento matemático | *Identificar* | *Identificar* | *Calcular* | *Controlar* |

**Tabla 2: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 2**

| | Ítem 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sección del ítem 2 | Dar significado a A(3) | Desarrollo del cálculo de A(3) | Dar significado a A(1) | Desarrollo del cálculo de A(1) | Dar significado geométrico a A(1) |
| Procedimiento matemático | *Interpretar* | *Calcular* | *Interpretar* | *Calcular* | *Interpretar* |

**Tabla 3: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 3**

| | Ítem 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sección del ítem 3 | Determinar la pertenencia de la ecuación al conjunto de las parábolas | Construcción de la tabla de valores | Representación geométrica | Determinación del dominio | Transferencia de un lenguaje matemático a otro para calcular el |
| Procedimiento matemático | *Identificar* | *Calcular* | *Graficar* | *Identificar* | *Recodificar* |

**Tabla 4: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 4**

| | Ítem 4 | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sección del ítem 4 | Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones | Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones | Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones logarítmicas | Determinar la pertenencia de la gráfica al conjunto de las funciones coseno |
| Procedimiento matemático | *Identificar* | *Identificar* | *Identificar* | *Identificar* |

**Tabla 5: Secciones y procedimientos matemáticos considerados en el Ítem 5**

| | Ítem 5 | | |
|---|---|---|---|
| Sección del ítem 5 | Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (-1) | Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (1) | Transferencia entre lenguajes matemáticos para determinar f (2) |
| Procedimiento matemático | *Recodificar* | *Recodificar* | *Recodificar* |

## 3.4 Indicador del grado de desarrollo en el grupo clase de cada uno de los procedimientos matemáticos estudiados.

A cada sección del ítem se le asignó el valor 1 si el procedimiento que evaluaba la sección se efectuó correctamente ó 0 en caso contrario. Para cada procedimiento matemático se consideraron todas las secciones de los distintos ítems que lo involucraban. Se calculó el porcentaje de respuestas valuadas con 1 de la muestra, tomando como base de dicho porcentaje el puntaje máximo que podían alcanzar los 60 alumnos en ese procedimiento matemático. Por ejemplo, para el procedimiento *Recodificar* los ítems que lo involucraban eran el ítem 3 y el 5. Se consideró la quinta sección del ítem 3 y las tres secciones del ítem 5, o sea en total cuatro secciones. El puntaje máximo que podían alcanzar los 60 alumnos en este procedimiento era: 4 . 60 = 240. Como el resultado obtenido de la muestra para este procedimiento fue de 91 puntos, el porcentaje de respuestas correctas fue de 38%.

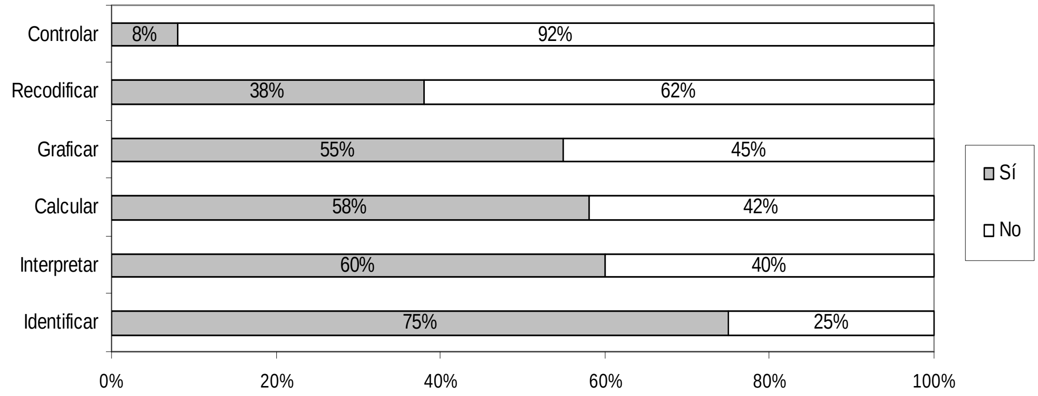
## 4. Resultados

Es posible apreciar en el Gráfico 1 que los procedimientos más desarrollados son *Identificar, Interpretar, Calcul*ar y *Graficar*. Se evidencian falencias importantes en *Recodificar*. Con respecto a *Graficar* cabe reconocer que el ítem que lo involucraba era de muy fácil resolución, sólo exigía el desarrollo de una tarea mecánica: graficar una parábola dada su ecuación.

## 5. Discusión

La toma de conciencia del escaso desarrollo de los procedimientos *Recodificar* y *Controlar* determinó que en el diseño del material instruccional para el aprendizaje de la unidad de *Límite de una función,* se incluyeran diversas actividades que los requieren y contribuyen a su dominio. También debieran enfatizarse actividades que impliquen el procedimiento *Graficar*. Con respecto a *Recodificar* sería aconsejable incorporar, en el curso de admisión a esta Facultad, un espacio orientado al aprendizaje del lenguaje simbólico y a la transformación entre representaciones de distintos sistemas semióticos. Los mismos tienen un rol fundamental en el trabajo con los objetos matemáticos caracterizados por ser abstractos y son esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento, pues las actividades matemáticas requieren ser ejecutadas dentro de un contexto de representación. Hay antecedentes que permiten afirmar que intervenciones educativas que enfatizan la enseñanza del lenguaje simbólico y la conversión entre distintos registros semióticos, producen una mejora significativa en su uso y comprensión (Distéfano, Urquijo y González de Galindo, 2010).

**Gráfico1: Porcentaje de alumnos que tienen desarrollado cada procedimiento matemático**




| | Identificar | Interpretar | Calcular | Graficar | Recodificar | Controlar |
|---|---|---|---|---|---|---|
| No | 25% | 40% | 42% | 45% | 62% | 92% |
| Sí | 75% | 60% | 58% | 55% | 38% | 8% |

## Conclusiones

No están suficientemente desarrollados los procedimientos matemáticos para encarar el aprendizaje significativo de la unidad límite de una función. Es necesario diseñar un espacio curricular extra, destinado a superar esas deficiencias.

## Bibliografía

Delgado Rubí, J. R. (2001) Los procedimientos generales matemáticos. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en el educación Polimodal y Superior, pp. 69-87.* Argentina: Homo Sapiens.

Distéfano, M. L., Urquijo, S. y González de Galindo, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista iberoamericana de educación matemática, Nº 23, pp.59-70.*

González de Galindo, S. y Villalonga de García, P. (2010) *Metacognición: Diseño de un material curricular para aulas multitudinarias*. Aceptado para publicar en la Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC). 4-08-10.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J. y Fernández de Alaíza, B. (2001) *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la educación Polimodal y Superior.* Argentina: Homo Sapiens.

Hernández Fernández, H.; Delgado Rubí, J.; Valverde Ramírez, L. y Rodríguez Hung, T. 2001. Un recurso metacognitivo para resolución de problemas en matemática: el autocontrol. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la educación Polimodal y Superior*, pp. 107-120. Argentina: Homo Sapiens.

Hernández Fernández, H. (1989). Citada por Delgado Rubí, J. R. 2001. Los procedimientos generales matemáticos. En *Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en el educación Polimodal y Superior, pp. 69-87.* Argentina: Homo Sapiens.

Ladrière, J. (1978) Citado por Samaja *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. Buenos Aires: Eudeba. 2003. 3º edición. 3º reimpresión.

Martínez Arias, R. (1996) *Psicometría: teoría de los test psicológicos y educativos*. España: Síntesis.

Samaja J. (2003) *Epistemología y metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. Buenos Aires: Eudeba. 3ª edición. 3ª reimpresión.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2006) *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo.* Quinta edición. Cengage Learning: México.

Talízina, N. (1984) Citada por Pérez Pantaleón, G. 1997. *Un sistema didáctico para la enseñanza de la matemática en la carrera de Arquitectura sustentado en el enfoque histórico-cultural y aspectos de la psicología cognitiva*. Tesis de maestría. La Habana. Cuba.

Vieytes, R. (2004) *Metodología de la investigación en organizaciones, mercado y sociedad. Epistemología y técnicas.* Argentina: Editorial de las Ciencias.

Villalonga, P., González, S., Holgado L., Marcilla, M. y Mercau, S. 2009. Pautas para diseñar actividades evaluativas basadas en teorías de aprendizaje significativo: desde Ausubel hasta Moreira. En J. Sagula (Ed.), *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática* (Vol. Cd, 1812-1829). Argentina: EMAT.

## Apéndice 1: Prueba de nivel

1) Factorea, simplifica y encuentra el valor de x que verifica la siguiente igualdad: $\frac{x-5}{x^2-4} = \frac{x-4}{x^2+4x+4}$

2) Si A es la función que permite calcular el área de un rectángulo, con $A(x) = (x^3+2).(x-2)$

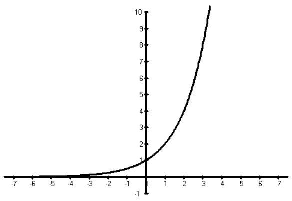
   a) Calcula el valor de A(x) para x = 3.

   b) Calcula A(1). Interpreta el resultado.

3) Grafica la función definida por la ecuación y = $2(x\text{-}3)^2 - 2$. Determina su dominio y rango.

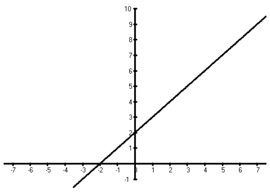
4) Une cada gráfica con la función que le corresponde:

A)



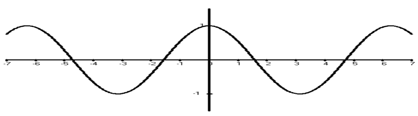
$y = 2^x$

B)



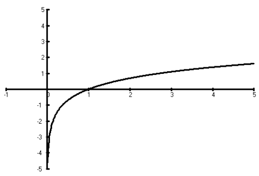
y = log x

C)



y = cos x

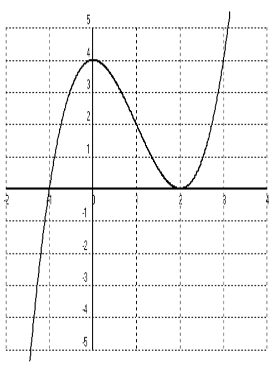
D)



y = x + 2

5) Dada la gráfica de la siguiente función, completa:

f(-1) = …..



## Apéndice 2: El objeto modelo para el análisis de los protocolos

| Unidad de análisis | Variable | Indicador | Valor |
|---|---|---|---|
| **Sección del ítem** | ***Identificar*** | Reconoce el caso de factoreo diferencia de cuadrados y lo resuelve de manera correcta. (Ítem 1) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Reconoce el caso de factoreo trinomio cuadrado perfecto y lo resuelve de manera correcta. (Ítem 1) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Reconoce que la gráfica de función cuadrática es una parábola. (Ítem 3) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Registra que el dominio de funciones polinómicas es el conjuntos todos los números reales. (Ítem 3) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Asociación correcta de la función exponencial con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 a) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Asociación correcta de la función lineal con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 b) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Asociación correcta de la función logarítmica con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 c) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Asociación correcta de la función coseno con su correspondiente gráfica. (Ítem 4 d) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | ***Interpretar*** | Reemplaza en A(x) el valor de x por 3. (Ítem 2 a) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | La expresión A(1) significa que debe reemplazar x por el valor numérico 1. (Ítem 2b) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Interpreta el resultado, es decir, escribe el significado geométrico de la expresión A(1). (Ítem 2b) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | ***Calcular*** | Opera algebraicamente en forma correcta para encontrar el valor de la incógnita x. (Ítem 1) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Realiza los cálculos algebraicos y encuentra el valor numérico correcto de A(3). (Ítem 2) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Realiza los cálculos algebraicos y encuentra el valor numérico correcto de A(1). (Ítem 2) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Calcula correctamente las coordenadas del vértice, el eje de simetría, tabla de valores, o intersección con los ejes. Es decir, calcula valores que le permitan construir `la gráfica. (Ítem 3) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | ***Graficar*** | Grafica en forma correcta la parábola. (Ítem 3) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | ***Controlar*** | Verifica si el valor numérico encontrado para x, resuelve la ecuación racional planteada. (Ítem 1) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | ***Recodificar*** | Realiza la lectura a través del gráfico del rango de la función cuadrática dada. (Ítem 3) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (-1). (Ítem 5 a) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (1). (Ítem 5 b) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |
| | | Realiza la correcta lectura, a través del grafico, del valor f (2). (Ítem 5 c) | 1: en caso afirmativo<br>0: en caso negativo |

**Patricia M. Villalonga de García.** Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Profesor Titular de la Cátedra de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Directora del proyecto *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática* del Consejo de Investigaciones de la U.N.T**.** **pvillalonga@fbqf.unt.edu.ar**

**Susana E. González de Galindo** Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Profesor Titular de la Cátedra de Matemática II - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán. Codirectora del proyecto *Estrategia didáctica que valoriza la regulación continua del aprendizaje en aulas multitudinarias de matemática* del Consejo de Investigaciones de la U.N.T. **sgalindo@fbqf.unt.edu.ar**

**Marta Inés Marcilla** Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Profesora Adjunta de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones de dicha Universidad, República Argentina**.** **mmarcill@yahoo.com.ar**

**Susana Mercau de Sancho.** Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Jefe de Trabajos Prácticos de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia de la Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones. **s_mercau@yahoo.com.ar**

**Lisa V. Holgado de Mejail** Licenciada en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Profesora Adjunta de Matemática I - Instituto de Matemática. Facultad de Bioquímica, Química y Farmacia. Universidad Nacional de Tucumán e Investigadora del Consejo de Investigaciones de dicha Universidad,, República Argentina**.** **lvholgado@yahoo.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 115-133

# Dinamización Matemática:

# Deducción geométrica de los productos notables en el espacio tridimensional como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática

**Julio Cesar Barreto García**

Fecha de recepción: 10/02/2012
Fecha de aceptación: 7/06/2013


| | |
|---|---|
| **Resumen** | En este artículo deduciremos geométricamente los productos notables que se construyen y se visualizan en el espacio tridimensional, los cuales generan un volumen por integración o suma de diversas áreas de figuras geométricas planas, formando un sólido en el espacio. Esto se realiza partiendo de conceptos y proposiciones de la geometría plana, en donde se parten de figuras geométricas básicas como son algunos polígonos regulares o irregulares. Dentro de estos productos notables deduciremos el cuatrinomio cubo perfecto que se genera del cubo de una suma y de una diferencia de un binomio, además deduciremos geométricamente los productos notables que generan la suma y la diferencia de cubos.<br>**Palabras clave**: Espacio Tridimensional, Volumen, Productos Notables. |
| **Abstract** | In this article we will deduct geometrically the notable products that are built and displayed in three-dimensional space, which generate a volume by integration or sum of several areas of plane geometric figures, forming a solid in space. This is done using concepts and propositions of plane geometry, where you start from basic shapes like some regular or irregular polygons. Within these notables products will be deducted the cuatrinomio cube perfecto that is generated from sum and a difference the cube to a binomio, and also geometrically will be deducted the notables products that generate the sum and difference of cubes.<br>**Keywords**: Tri-dimensional space, volume, Notable Products. |
| **Resumo** | Neste artigo iremos deduzir geometricamente os produtos notáveis que são construídos e exibidos em um espaço tridimensional, que geram um volume por integração ou soma de diversas áreas de figuras geométricas planas e formar um sólido no espaço. Isso é feito usando conceitos e proposições de geometria plana, onde você começa a partir de formas básicas como alguns polígonos regulares ou irregulares. Dentro destes produtos notáveis será deduzir o cuatrinomio cubo perfeito que é gerado a partir de soma e uma diferença o cubo para um binomio e geometricamente será deduzir o produto notável da soma e da diferença de binomios cubos.<br>**Palavras-chave:** Espaço tridimensional, o volume, os produtos notáveis. |

## 1. Introducción

El desarrollo de las acciones cognitivas también llamada *procesos cognitivos* dadas en el campo de la *Didáctica de la Matemática,* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de sólidos en función de la idea de volúmenes y les permitirá deducir geométricamente alguno de los productos notables que se originan al desarrollar, por ejemplo, la factorización del cubo de una suma o de una diferencia de un binomio que nos genera un cuatrinomio cubo perfecto, el cual es el cubo del primero más (o menos) el triple producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más (o menos) el cubo del segundo, así mismo deduciremos geométricamente los productos notables de la suma y de la diferencia de cubos.

Los *procesos cognitivos* se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por (Duval, 1998) y desarrollados por (Torregrosa y Quesada, 2007), en donde la *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración geométrica y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, tomando en consideración la idea de volumen que encierran las diferentes figuras geométricas solidas involucradas en el espacio tridimensional. La coordinación de estos *procesos cognitivos* permitirá a nuestros estudiantes *construir* desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables que estén en el espacio que involucran sólidos, tomando en cuenta lo propuesto por (Duval, 1998) que restringe el concepto de *visualización* al de *aprehensión* en el cual "*Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar*" según el Diccionario de la RAE (Real Academia Española, 2001).

En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo una *aprehensión operativa de reconfiguración* o una *aprehensión operativa de cambio figural* y después de acuerdo con un *razonamiento discursivo como un proceso natural* (El cual es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación), logran que ellos lleguen a las conclusiones que se pueden usar para deducir otras proposiciones o teoremas que les permitan desarrollar toda la teoría. Esto se puede lograr usando figuras o sólidos construidas en cartulinas de colores que nuestros estudiantes puedan además de construir también manipular.

## 2. Marco teórico

En (Barreto, 2008b, 2009a, 2009b) se dedujo el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de la suma de dos cantidades, el cual puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos usando los siguientes pasos: Se construyen dos cuadrados, uno de $a$ unidades de lado y otro de $b$ unidades de lado, además de dos rectángulos congruentes que tengan de largo $a$ y ancho $b$ unidades, como veremos en la siguiente figura 1:

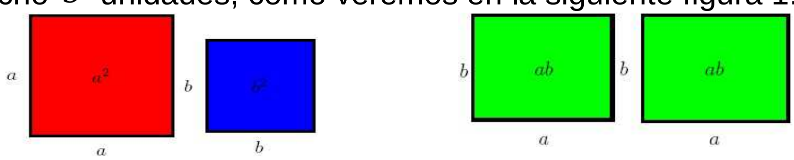
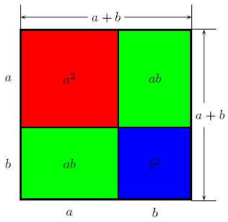


**Figura 1. Acepción geométrica de las figuras para deducir el producto notable que se origina de la factorización cuadrado de la suma de dos cantidades.**

Uniendo estas cuatro figuras, de acuerdo con una *aprehensión operativa de reconfiguración*[1], formamos un cuadrado de lado ( $a+b$ ) unidades, según la figura:



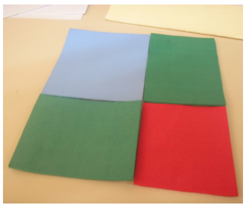



**Figura 2. A izquierda vemos la acepción geométrica del producto notable que se genera del desarrollo de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio con los polígonos de figura 1 y a la derecha se muestra una foto[2] realizada con figuras en foami.**

El área de este cuadrado es $(a+b).(a+b)=(a+b)^2$, como puede verse en la figura 2, el área está formada por un cuadrado rojo de área $a^2$, un cuadrado azul de área $b^2$, y dos rectángulos verdes de área $ab$ cada uno o sea $2ab$. (Los rectángulos son *conjuntos elementales*[3]). Luego, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*[4] se cumple que: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (1)$.

<u>Conclusión:</u> Elevar una suma de un binomio al cuadrado o a una potencia dos desde un punto de vista geométrico, significa sumar dos cuadrados que tienen la longitud de cada uno de los términos del binomio más dos rectángulos que tienen por longitud los lados del binomio. Veamos durante el desarrollo de este artículo, con ayuda de quien y hasta qué punto se generaliza esto a potencia de orden $n$.

<u>Nota Histórica (El Gnomon):</u> Los griegos antiguos usaron el "gnomon", el cual es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño. Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general. Aristóteles decía que el gnomon es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma según se ve en la figura 2 a la izquierda, para deducir el producto notable que se obtiene de la factorización del cuadrado de una suma de un binomio: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, donde tenemos que los rectángulos verdes y el cuadrado rojo dado algebraicamente por: $ab+ab+a^2=2ab+a^2$ es la parte llamada gnomon.

Ahora, usaremos un gnomon para deducir el desarrollo de la suma de un trinomio al cuadrado como el siguiente $(x+a+b)^2$, haciendo una configuración como en la figura 3:

---

[1] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según el Diccionario de la Real Academia Española.

[2] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.

[3] El área de un conjunto elemental es aditiva (Axioma).

[4] Esta permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples de la aprehensión operativa de cambio figural (Es cuando se añaden, o quitan, a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones). Conduce a la solución de un problema.

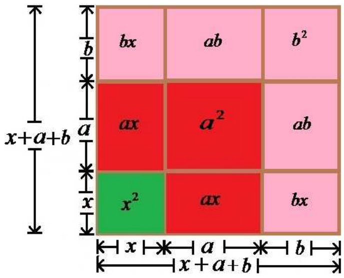



**Figura 3: Acepción geométrica para el cuadrado de una suma al tener un trinomio. En esta configuración le agregamos a la Figura 2 un gnomon rosado y notamos que efectivamente como decía Aristóteles se sigue formando un cuadrado aún más grande.**

De acuerdo con la configuración geométrica de la figura 3 cambiando de un *anclaje visual al anclaje discursivo*[5] , tenemos que desarrollando la factorización obtenemos el producto que por su forma particular se denomina notable:

$$\begin{aligned}(x+a+b)^2 &= x^2+ax+ax+a^2+bx+bx+ab+ab+b^2\\ &= x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2.\end{aligned}$$

Es decir, geométricamente ocurre que para calcular el trinomio de una suma al cuadrado se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de los productos de cada posible par de términos. O bien, se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de la suma de los productos de cada posible par de términos como veremos en la siguiente ecuación:

$$(x+a+b)^2 = x^2+a^2+b^2+2(ax+bx+ab) \qquad (2).$$

<u>Ejercicio</u>**:** Hallar el desarrollo de $(2u+3v+5w)^2$ .

<u>Respuesta</u>**:** Haciendo $x = 2u,$ $a = 3v$ y $b = 5w,$ de acuerdo con la ecuación (2) nos queda: $(2u+3v+5w)^2 = 4u^2+9v^2+25w^2+12uv+20uw+30vw.$

<u>Nota</u>**:** En general para elevar cualquier polinomio al cuadrado, como por ejemplo el trinomio al cuadrado $(x+a+b)^2$, según la figura 3 donde se cumple que: $(x+a+b)^2 = x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2$, tenemos que la parte $2ax+a^2+2bx+2ab+b^2$ es la que efectivamente corresponde al gnomon en el plano. Ahora usando los cuadrados rojos y azul, junto a los rectángulos verdes, teniendo en cuenta la *aprehensión operativa de reconfiguración* podemos ver geométricamente el cuadrado de la diferencia de de dos cantidades en la figura 4:

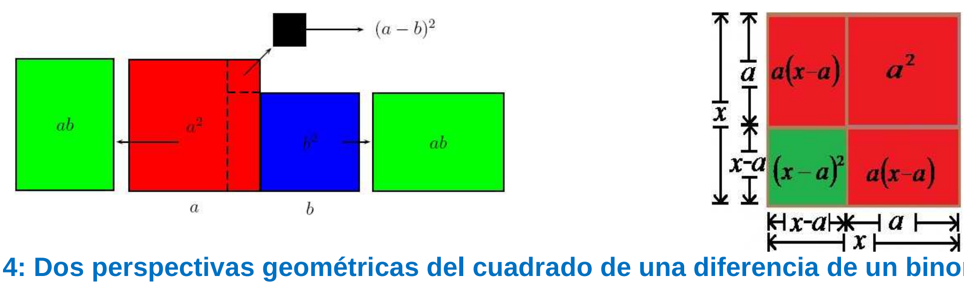



**Figura 4: Dos perspectivas geométricas del cuadrado de una diferencia de un binomio. En ambas se nota que aparece lo que denominamos como un gnomon en el plano.**

[5] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.

Y notemos que, el área de este cuadrado es $(a-b)(a-b)=(a-b)^2$, y como puede verse en la figura anterior, el área está formada por un cuadrado rojo de área $a^2$, un cuadrado azul de área $b^2$ y le quitamos dos rectángulos verdes de área $ab$ cada uno o sea $2ab$. Luego, tenemos la siguiente *conjetura sin demostración*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (3).$$

¿Qué conclusión se obtiene de este producto notable que se obtiene de desarrollar la factorización, con respecto al gnomon en función de lo discutido anteriormente?

Ejercicios propuestos:

a) Generalizar geométricamente usando gnómones: $(x+a+b+c+\cdots+z)^2$ .

b) Hacer configuraciones geométricas para los casos: $(x-a+b)^2$ y $(x+a-b)^2$ .

Veamos si también se puede generalizar este producto notable que se genera de esa factorización de una suma y de una diferencia de un binomio a una potencia de orden $n$.

Antes que todo debemos tomar en cuenta que estamos en el plano o en dos dimensiones, ahora bien si colocamos la potencia 3 o al cubo tenemos la tercera dimensión o el espacio tridimensional y por tanto en vez de áreas tenemos son volúmenes de sólidos. Así, debemos pasar a la geometría del espacio, geometría espacial o geometría de los cuerpos sólidos la cual es la rama de la geometría que se encarga del estudio de las figuras geométricas voluminosas que ocupan un lugar en el espacio. Esta geometría amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana, y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio, la geometría descriptiva y otras ramas de las matemáticas.

## 3. Volúmenes de sólidos

La teoría de áreas de figuras geométricas planas parte de las siguientes definiciones y propiedades dadas en el siguiente orden según (Barreto, 2008a):

Definición 1 (Línea Poligonal): Es la figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común. Veamos los segmentos $A, B$ y $C$ no alineados de la siguiente figura:


**Figura 5. Línea poligonal.**

Si cada vértice pertenece a dos lados, entonces la poligonal se llama cerrada.

Definición 2 (Polígono): Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Esta figura es compuesta por una secuencia finita de segmentos rectos.

Y podemos definir una figura geométrica muy importante en toda la teoría:

Definición 3 (Cuadrilátero): Es un polígono de cuatro lados. Por consiguiente, el cuadrilátero posee también cuatro ángulos interiores, formado por cada dos lados consecutivos. Además, los vértices son la intersección de cada dos lados y llamaremos vértices opuestos a aquellos que no están situados sobre el mismo lado. La diagonal de un cuadrilátero son los segmentos determinados por cada dos vértices opuestos. Son llamados cuadrángulos, o sea polígonos de cuatro ángulos.

Definición 4 (Paralelogramo): Es un tipo especial de los cuadriláteros, es decir, un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos.

Partiendo del cálculo de áreas se puede desarrollar a priori la idea de Medida, usando hechos primitivos conocidos por los griegos, tales como lo eran:

i) El área de un rectángulo de lados $a$ y $b$ es igual a $ab$.

ii) El área de un rectángulo es invariante por traslación.

En donde el rectángulo en cuestión se muestra en la siguiente figura:

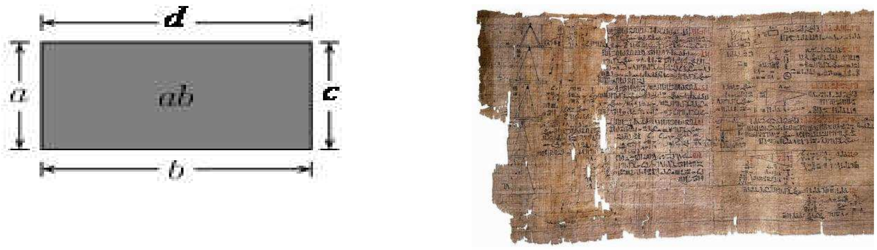



**Figura 6. A la izquierda vemos un rectángulo de lados a = b y b=d, a la derecha vemos un papiro, llamado papiro de Rhind, donde hacen referencia al rectángulo.**

Nota Histórica: En la figura anterior, a la derecha vemos un papiro, llamado papiro de Rhind (manual de cálculo del escribiente Ahmès) que tiene fecha de 1700 a 2000 años antes de J.C. aquí el área de un cuadrilátero de lados $a, b, c$ y $d$ era dada por la ecuación $\frac{(a+c)}{2} \bullet \frac{(d+b)}{2}$. Como ejercicio se pueden hacer los cálculos correspondientes y llegar a concluir que lo mostrado por los Griegos es equivalente a decir que el área es: $A_R = ab.$

Demos ahora la siguiente definición que nos permitirá deducir toda la teoría:

Definición 5 (Conjunto Elemental): Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental. Como veremos en la siguiente figura:


**Figura 7. Conjunto elemental expresado como unión de un rectángulo y un triángulo. A la figura elemental la separamos en estas figuras, dividiéndolas en dos o más figuras planas cortándolas mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*[6].**

Acá se cumple el Axioma 1, que es de aditividad para figuras planas:

Axioma[7] 1: El área de un conjunto elemental es aditiva.

---

[6] Es cuando se añaden (o se le quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones. Esta aprehensión brinda a la visión su poder heurístico en la solución de un problema.

[7] Son las afirmaciones que se aceptan sin ser demostradas. Estos se consideran “afirmaciones evidentes”.

Esto quiere decir que: Si $A$ y $B$ son conjuntos elementales tal que $A$ intersectado con $B$ es vació, un punto o un segmento, entonces el área de $A$ unión $B$ es igual a la suma del área de $A$ más el área de $B$.

Además a partir de lo anterior podemos deducir el área de un cuadrado que es un paralelogramo rectángulo de iguales lados, como lo veremos en la siguiente figura:

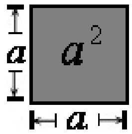



**Figura 8. De acuerdo a los hechos primitivos anteriores tenemos que el área del cuadrado es igual al producto de sus lados y entonces su área se halla elevando este lado al cuadrado o la potencia dos.**

Siguiendo este orden de ideas podemos estructurar en el espacio tridimensional toda la teoría de la siguiente manera:

Definición 6 (Poliedro): Es un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito, de acuerdo con el sentido dado por la geometría clásica, que es la rema de la geometría que se basa en los Elementos de Euclides.

Notas:

- La palabra poliedro proviene del griego clásico πολύεδρον (*polyedron*), de la raíz πολύς (*polys*), "muchas" y de έδρα (*edra*), "base", "asiento", "cara".
- Los poliedros se conciben como cuerpos tridimensionales, pero hay *semejantes topológicos* del concepto en cualquier dimensión. Así, el punto o vértice es el semejante topológico del poliedro en cero dimensiones, una arista o segmento lo es en 1 dimensión, el polígono para 2 dimensiones; y el polícoro el de cuatro dimensiones. Todas estas formas son conocidas como politopos, por lo que podemos definir un poliedro como un *polítopo tridimensional.* Los poliedros son denominados de acuerdo a su número de caras. Su designación se basa en el Griego clásico, por ejemplo tetraedro (4-caras), pentaedro (5), hexaedro (6), heptaedro (7),…, icosaedro (20), etc.

Definición 7 (Paralelepípedo): Es un poliedro de seis caras (al cual se le llama también hexaedro), en el que todas las caras son paralelogramos, paralelas e iguales dos a dos. El nombre proviene del latín *parallelepipĕdum*, y este del griego antiguo παραλληλεπίπεδον *parallēlepípedon* 'planos paralelos'. Un paralelepípedo tiene 12 aristas, que son iguales y paralelas en grupos de cuatro, y 8 vértices. Se pueden dar tres definiciones equivalentes de un paralelepípedo:

- Es un poliedro de seis caras (hexaedro), cada una de las cuales es un paralelogramo.
- Es un hexaedro con tres pares de caras paralelas.
- Es un prisma cuya base es un paralelogramo.

El paralelepípedo pertenece al grupo de los prismatoides, aquellos poliedros en los que todos los vértices se encuentran contenidos en dos planos paralelos. De acuerdo con la última definición equivalente, podemos definir lo siguiente:

Definición 8 (Prisma): Es un poliedro que consta además de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos. Las caras de un prisma no son todas semejantes a las otras.

En el caso en que las caras laterales sean rectangulares, se llama prisma rectangular. El *prisma rectangular* o *cuboide*, y el *prisma octagonal* se encuentran entre los tipos de prisma recto, con una base rectangular y octagonal, respectivamente. El volumen de un prisma recto es el producto del área de una de las bases por la distancia entre ellas (llamada altura), esto es: $V = A_{\text{base}} \bullet h.$

Tipos de paralelepípedos: Un paralelepípedo recto es aquel que tiene al menos alguna de sus aristas perpendicular a un par de caras. El paralelepípedo recto es a su vez un prisma cuyas bases son paralelogramos. Mientras que un paralelepípedo oblicuo es aquel en el que ninguna de las aristas es perpendicular a las caras.

Definición 9 (Ortoedro): Es un paralelepípedo en el que todas sus bases son rectángulos, y por tanto todas sus caras son perpendiculares entre sí. Como caso particular tenemos el paralelepípedo recto, y lo podemos ver en la Figura 9:

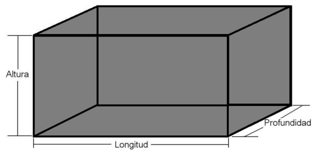



**Figura 9. Un ortoedro en donde notamos que la base es un rectángulo.**

Se puede calcular el volumen del ortoedro al igual que el de cualquier paralelepípedo, multiplicando el área de la base por la altura. Siendo el área de la base $A_{\text{base}} = ab$ y la altura $h = c,$ y de aquí tenemos su volumen: $V_O = abc.$

Definición 10 (Hexaedro regular): Es un paralelepípedo en el que todas sus bases son cuadrados. Más precisamente llamado cubo. Demos ahora la definición:

Definición 11 (Cubo): Es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes.

Un cubo, además de ser un hexaedro, puede ser clasificado también como paralelepípedo, recto y rectángulo, pues todas sus caras son de cuatro lados y paralelas dos a dos, e incluso como un prisma de base cuadrangular y altura equivalente al lado de la base. Frecuentemente un poliedro se cualifica por una descripción del tipo de caras presentes en él. Si todas sus caras son iguales se les denomina poliedro regular cuando es de caras regulares, de caras uniformes de vértices uniformes y de aristas uniformes. Así, el cubo es un hexaedro regular.

Nota Histórica (Sólidos Platónicos o Sólidos Pitagóricos): El cubo es uno de los llamados sólidos platónicos, los cuales son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras. Reciben este nombre en honor al filósofo griego Platón (*ca*. 427 adC– 347 adC), a quien se atribuye haberlos estudiado en primera instancia. También se conocen como cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos, poliedros de Platón o, con más precisión, poliedros regulares convexos. Los sólidos platónicos son además del cubo (o hexaedro regular) el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Esta lista es exhaustiva, ya que es imposible construir otro sólido diferente de los anteriores que cumpla todas las propiedades exigidas, es decir, convexidad y regularidad. Veamos un hexaedro regular o cubo:

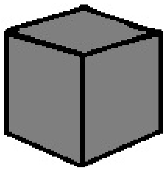


**Figura 10. Un hexaedro regular o cubo, la base es un cuadrado de lado *l* y en general todos sus lados son cuadrados**.

Se puede calcular el volumen del hexaedro regular o cubo al igual que el de cualquier paralelepípedo, multiplicando el área de la base por la altura. Siendo el área de la base $A_{\text{base}} = l^2$ y la altura $l$, entonces tenemos que: $V_C = l^2 \bullet l = l^3$.

## 4. Binomio de la suma y de la diferencia de dos cantidades al cubo

El cubo de la suma de dos cantidades puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos usando los siguientes pasos: Construimos dos cubos uno de $a$ unidades, y otro de $b$ unidades de lados.

**Figura 11. A la izquierda un cubos gris claro y a la derecha un cubo gris oscuro de *a* y *b* unidades de lado, los cuales tienen por volumen $a^3$ y $b^3$ respectivamente.**

Construimos tres paralelepípedos que tengan el área en la base igual a $a.b$ y altura $a$. Además, construimos otros tres paralelepípedos que tengan el área en la base igual a $a.b$ y altura $b$, según se nos muestra en la figura:

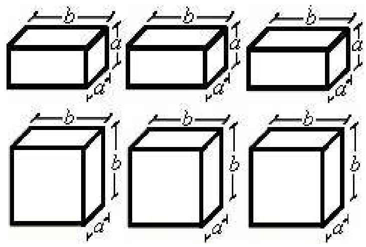


**Figura 12: Tres paralelepípedos arriba de área en la base igual a $a.b$ , altura $a$ y volumen $a^2.b$ y abajo tres de área en la base igual a $a.b$, altura $b$ y volumen $a.b^2$**

Ahora, podemos hacer la siguiente reconfiguración:

**Figura 13: En el lado izquierdo podemos colocar estos tres paralelepípedos y un cubo para tener un paralelepípedo que tendrán por volumen $a^3+2.a^2.b+a.b^2$ y en el lado derecho podemos colocar estos tres paralelepípedos y un cubo para tener un paralelepípedo más grande que tendrán por volumen $b^3+2.a.b^2+a^2.b$**

Extendamos la definición de conjunto elemental al espacio tridimensional:

Definición 12 (Conjunto Sólido Elemental en el Espacio Tridimensional): Un conjunto sólido se llama elemental si se puede expresar como unión finita de paralelepípedos (Ortoedros o cubos) y las cuñas. Cualquier poliedro es un buen ejemplo de un conjunto elemental en el espacio:

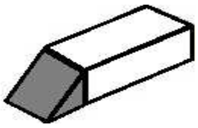


**Figura 14. Conjunto sólido elemental que se expresa como unión de un ortoedro y una cuña, dividiéndolo en dos sólidos al cortarlos mediante una *aprehensión operativa de cambio figural*. Podemos dividir un conjunto elemental en estas figuras.**

Aquí se cumple de manera general el siguiente axioma de aditividad:

Axioma 2: El volumen de un conjunto elemental sólido es aditivo.

Esto quiere decir que: Si $A$ y $B$ son conjuntos elementales sólidos tal que $\mathrm{A}$ intersectado con $B$ es vació, un punto o un segmento, entonces el volumen de $\mathrm{A}$ unión $\mathrm{B}$ es igual a la suma del volumen de $A$ más el volumen de $B$. Y tenemos la siguiente figura que nos ayudará a deducir el producto notable $(a+b)^3$:

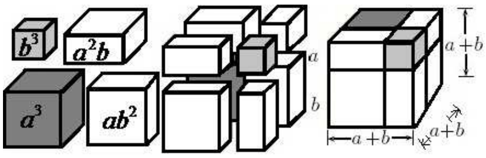



**Figura 15. Se ve que podemos unir estas figuras mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* y obtenemos un cubo de lados *a*+*b*.**

De la Figura anterior obtenemos pasando de un *anclaje visual al anclaje discursivo,* usando el Axioma 2 que: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 \qquad (5)$.

Ejercicio: Desarrollar la factorización $(3x+2y)^3$. (Use la ecuación 5).

Así, tenemos la configuración geométrica de la Figura 16, en donde se aprecia la descomposición geométrica y volumétrica que fue mostrada en la Figura 13:

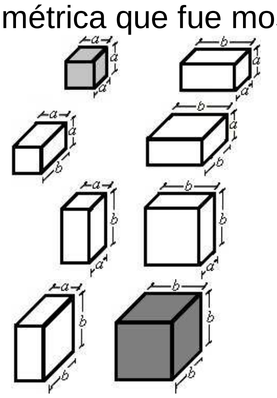


**Figura 16. Descomposición volumétrica del binomio de una suma al cubo**.

Por medio de modelos construidos de madera o de cartón podemos deducir, comprobar y explicar los procedimientos antes mencionados. Para hacer estas figuras con cartón o cartulinas de diversos colores podemos tomar en cuenta las siguientes figuras recortables, que son mostradas en la siguiente figura:

**Figura 17. Figuras geométricas recortables, con la recortable de la izquierda podemos hacer un cubo y con la figura recortable de la derecha un ortoedro.**

### 4.1. Gnómones en el espacio

Eurito solía representar los números con piedrecillas (origen de la palabra cálculo ya que en el latín calculus significa piedra), y por este procedimiento, obtuvo lo que hoy en día son los llamados números “*cuadrados*” y números “*oblongos*”:

En efecto, si partimos de la unidad y le añadimos mediante un gnomon los números impares siguiendo el gnomon, obtendremos los números «*cuadrados*», mientras que si partimos del 2 y le añadimos mediante un gnomon los números pares, obtendremos los números «*oblongos*». Veamos la figura 18:

**Figura 18. Las figuras a la izquierda nos muestra que la costumbre de representar los números o relacionarlos con la geometría ayuda a comprender por qué los pitagóricos consideraban las cosas como números y no sólo como numerables y transferían sus concepciones matemáticas al orden de la realidad material, lo cual vemos reflejado en el gnomon de la derecha.**

La figura 18 a la derecha muestra un polígono de seis lados llamado hexágono y qua al ser además cóncavo (Son todas aquellas figuras en las que al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180º) se le denomina hexágono cóncavo y es llamado más comúnmente como un gnomon.

Ejercicio propuesto: Euclides amplia el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general, has una representación geométrica de la misma. Ahora, veamos la creación de un gnomon sólido en la figura 19:

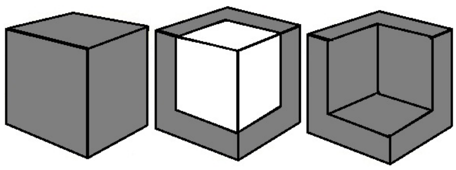


**Figura 19. En la parte izquierda se muestra un cubo gris y en el centro se le quita al cubo gris un cubo blanco con lo que nos queda un gnomon por el espacio de color gris que queda hueco en la figura que está a la derecha.**

Tomando en consideración la figura 4 a la derecha podemos hacer una configuración en el espacio para la diferencia de un binomio al cubo, partiendo de la diferencia de un binomio al cuadrado como vimos en la misma figura 4.

Si colocamos una altura de $x-a$ unidades, tenemos unos paralelepípedos con los siguientes volúmenes: $(x-a)^3, 2a(x-a)^2$ y $a^2(x-a)$. Formemos un cubo de lado

$x-a,$ y tres ortoedros: Dos iguales de área de la base $a(x-a)$ y altura $x-a,$ y uno de área de la base $a^2$ y altura $x-a.$

Ahora, si colocamos una altura de $a$ unidades, tenemos unos paralelepípedos con volúmenes: $a^3, 2a^2(x-a)$ y $a(x-a)^2$. Formemos un cubo de lado $a,$ y tres ortoedros: Dos iguales de área de la base $a(x-a)$ y altura $a,$ y uno de área de la base $(x-a)^2$ y altura $a.$ De donde desarrollando pasando de un *anclaje visual a uno discursivo* tenemos que algebraicamente lo que se cumple es que:

$$\begin{aligned}(x-a)^3 &= x^3-3a^2(x-a)-3a(x-a)^2-a^3\\ &= x^3-3a^2x+3a^3-3a\left(x^2-2ax+a^2\right)-a^3\\ &= x^3-3a^2x+3a^3-3ax^2+6a^2x-3a^3-a^3.\end{aligned}$$

De donde nos queda: $(x-a)^3 = x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \qquad (6).$

Ejercicio propuesto: Hacer las configuraciones para cada paralelepípedo. Una configuración puede estar dada en la siguiente figura:

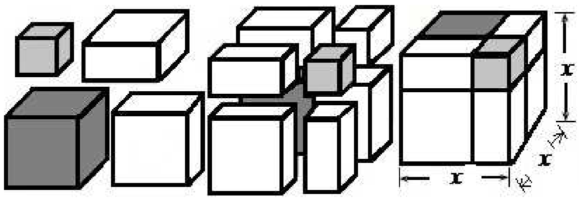



Figura 20. Configuración geométrica de la diferencia de binomios al cubo.

A la izquierda vemos un cubo gris de volumen $(x-a)^3,$ otro cubo gris de volumen $a^3,$ y dos ortoedros blancos de volumen $a^2(x-a)$ y de volumen $a(x-a)^2.$ En el centro una configuración con todos los paralelepípedos que se van a extraer del cubo de la derecha de lado $x.$

Tomando en cuenta lo propuesto por los griegos, se puede generalizar lo planteado por Aristóteles y decir que el gnomon es la figura que añadida a un cubo aumenta sus lados pero no altera su forma según se ve en la siguiente figura:

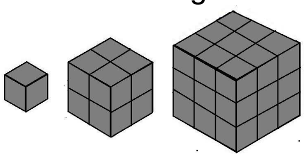


Figura 21. En la figura vemos que los cubos de los números naturales forman lo que denominamos una serie infinita.

La serie $C=\{1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, \ldots \text{cuyo término } i, C(i) = i^{3}\}.$

En la figura vemos los denominados derivados de notables de la serie $C$, los cuales se les conocen como los gnómones 1-sólido y vienen dados por: $D=\{1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, \ldots\}$. Los términos se forman a partir de las diferencias de cubos adyacentes, así: $D(i) = C(i) - C(i\text{-}1) = (i)^3 - (i\text{-}1)^3 = 3i(i\text{-}1) + 1.$

Ejercicio propuesto: Tenga en cuenta lo antes desarrollado y verifique que esto también tiene una interpretación en 2D como la serie de hexágonos numéricos y que el degenerado primer término 1, es una característica de toda la serie de números figurado. Serie de números generados contando el número de puntos necesarios para construir los miembros sucesivos de un polígono específico. Veamos esto:

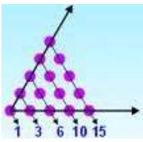



**Figura 22. Los puntos arreglados en una serie de formas triangulares regulares pueden generar la secuencia 1, 3, 6, 10, 15, en tanto que puntos arreglados en la Figura 18 a la izquierda forma una serie de cuadrados que produce la secuencia 1, 4, 9, 16,….**

Observe que 8 gnómones como el de la figura 19 a la derecha pueden ser utilizados para construir un cubo hueco, como se muestran:

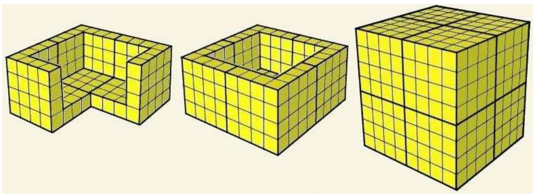


**Figura 23. En la izquierda tenemos 3 de gnómones combinados, y en el centro un cuarto gnomon, se añade para formar una estructura similar a la cuenca. A la derecha cuando se copian, se invierten y se coloca en la parte superior de la figura del centro y se completa el cubo hueco. En esta figura de la derecha, el vacío interior tiene la geometría del sexto cubo.**

El teorema de Pitágoras en el espacio se puede aplicar para calcular la medida de ciertos elementos de los cuerpos geométricos y para resolver situaciones de la vida real. Veamos la una acepción geométrica en el plano según la siguiente figura:

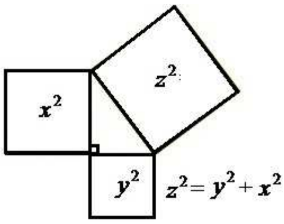



**Figura 24. Acepción geométrica del teorema de Pitágoras**.

En virtud del teorema de Pitágoras de acuerdo con (Barreto, 2010), tenemos que dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado sobre la longitud de la hipotenusa cuya área sea la suma entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, lo cual es ampliamente discutido en la referencia de (Barreto, 2008b, 2009a).

## 4.2. Diagonal en el plano y espacial

La diagonal espacial es la línea que une dos vértices opuestos del ortoedro. Basándonos en el teorema de Pitágoras, en particular en su extensión en el espacio por aplicaciones reiteradas de este teorema, deducimos el teorema de Pitágoras en el espacio. Calculemos la diagonal espacial del ortoedro de la siguiente figura:


**Figura 25. A la izquierda la diagonal espacial de un ortoedro y a la derecha la diagonal de un rectángulo, el cual es una figura plana, es decir, que yace en un solo plano.**

En donde según el triangulo $ABC$ en la base de la figura anterior tenemos que la diagonal $d$ tiene por longitud: $d^2 = m^2 + n^2$. Ahora tomando en consideración el triángulo gris $CAE$, que está en el espacio podemos aplicar de nuevo el teorema de Pitágoras y por tanto nos queda que: $D^2 = p^2 + d^2 = p^2 + m^2 + n^2$.

Además, podemos calcular la diagonal de un cubo como el de la figura:


**Figura 26. El cubo es un ortoedro en el cual todas sus dimensiones son iguales, es decir que, $a = b = c$. A la izquierda la diagonal espacial de un cubo y a la derecha la diagonal de un cuadrado, teniendo en cuenta que esta es una figura geométrica plana.**

Si aplicamos el resultado que hemos obtenido para el ortoedro, tenemos que:

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}.$$

Lo cual se puede enunciar de la siguiente forma: La diagonal de un cubo es igual a la raíz cuadrada del triple de su arista, o lo que es lo mismo, la diagonal de un cubo es el producto de su arista por la raíz cuadrada de 3.

<u>Ejemplo</u>: Si tenemos un cubo que tiene una arista de $a = 9\ cm$, entonces su diagonal espacial de acuerdo a lo anterior es $D = 9\ cm\sqrt{3} = 15{,}59\ cm$.

### 4.3. Otras formas de calcular las áreas de rectángulos y cuadrados

En el plano podemos expresar el área de un rectángulo y de un cuadrado en función de sus diagonales, veamos:

En el rectángulo de la derecha de la figura 25 que tiene largo de longitud $l$ y ancho de longitud $a$, ocurre que de acuerdo con el teorema de Pitágoras que $d^2 = a^2 + l^2$, de donde de acuerdo con la diferencia de cuadrados según (Barreto, 2011) podemos tener que $a = \sqrt{d^2 - l^2}$ o bien $l = \sqrt{d^2 - a^2}$. Por tanto, el área de un rectángulo que se calcula $A_R = la$, puede ser escrita en función de su diagonal así $A_R = l\sqrt{d^2 - l^2}$ o $A_R = a\sqrt{d^2 - a^2}$. Y en el cuadrado de la figura 26 de la derecha que tiene lado de longitud $l$, ocurre que de acuerdo con el teorema de Pitágoras que

$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow \frac{d^2}{2} = l^2$. Por tanto, el área de un cuadrado que se calcula $AC = l^2$, y escrita en función de su diagonal queda: $A_C = \frac{d^2}{2}$.

### Áreas de paralelepípedos

El área total del ortoedro denotada $A_O$ con $a$ la longitud del ancho, $b$ a la longitud su altura y $c$ a la longitud de su profundidad es igual a la suma de las respectivas áreas de sus 6 caras que son rectángulos ya que estas son figuras geométricas planas y que al estar repetidas 2 a 2 se pueden calcular como:

$$A_O = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc).$$

Por su parte, el cálculo del área lateral será análogo, pero omitiendo las bases superior e inferior:

$$A_l = 2ab + 2bc = 2(ab + bc).$$

<u>Ejercicio Propuesto</u>: Calcular el área como el producto del perímetro de la base por la altura.

En el caso de un cubo su área denotada $A_C$ al ser iguales la longitud del ancho, largo y profundidad y formar unos cuadrados digamos cada uno de área $a^2$, ocurre que: $A_C = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$.

## 5. Productos notables que generan la suma y de la diferencia cubos

Deduzcamos primero geométricamente el producto notable que se origina de la factorización de $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$, tomando en cuenta la *aprehensión operativa de cambio figural* dada en la figura 4. Veamos la siguiente figura:


**Figura 27. En el lado izquierdo vemos una perspectiva geométrica de $a^2$-$a.b$+$b^2$.**

Con una configuración de dos cuadrados uno de lado $a$ y otro de lado $b$, al cual le podemos quitar un rectángulo de lados $ab$. A la derecha tenemos que mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* nos queda una especie de gnomon formado por un rectángulo de ancho $a-b$ y largo $a$, unido con un cuadrado de lado $b$. Ahora, al gnomon de la figura 27 a la derecha lo levantamos una altura $a+b$. Veamos esta configuración a la izquierda de la siguiente figura:

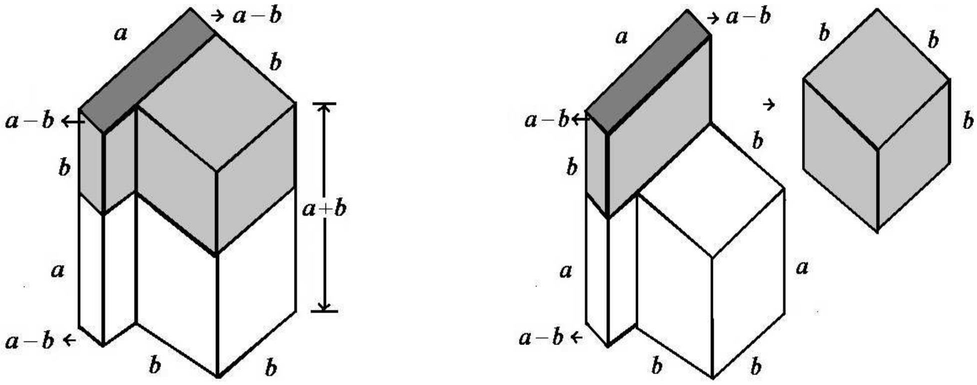



Figura 28. A la derecha notamos que podemos obtener un cubo de lado $b$ y volumen $b^3$

Ahora, haciendo una *aprehensión operativa de reconfiguración* al paralelepípedo gris de la figura 28 a la derecha, podemos obtener un cubo como el de la figura 29 a la derecha reconfigurando las figuras de la izquierda, veamos:

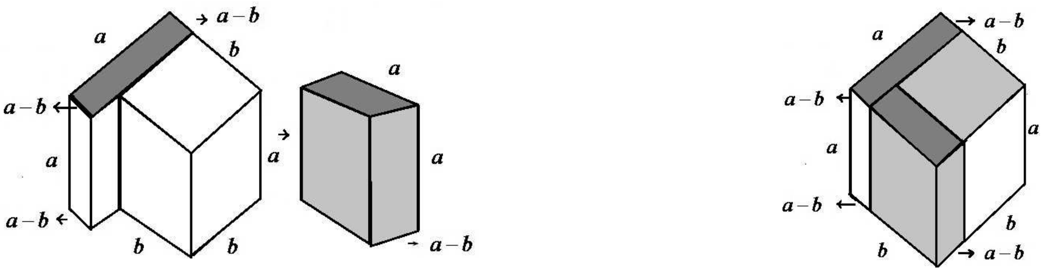



Figura 29. A la izquierda vemos las configuraciones que nos permiten formar el cubo de lado $b$ de la derecha, el cual nos hace falta para tener una suma de cubos con el de la figura 28.

En la figura 28 de la derecha tenemos un cubo de volumen $b^3$, y en la figura 29 de la derecha tenemos mediante *aprehensión operativa de reconfiguración* un cubo de volumen $a^3$. Por tanto tenemos que partimos del producto de la suma del binomio por el cuadrado de uno de los nomios menos el productos de estos más el cuadrado del otro nomio, es decir algebraicamente tenemos el siguiente factorización: $(a+b)(a^2-ab+b^2)$, y que al hacer el producto notable obtenemos la suma de los cubos de estas cantidades, esto es, para hallar el producto notable debemos sumar esos dos cubos de volúmenes $b^3$ y $a^3$.

Así, nos queda pasando de un *anclaje visual* a un *anclaje discursivo* la siguiente expresión algebraica que nos permitirá realizar diversos cálculos:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (7).$$

Despejando la ecuación (5), es decir, obtenemos otra suma de cubos así:

$$(a+b)^3-3ab^2-3a^2b=a^3+b^3 \qquad (8).$$

De donde podemos operar con ellos y nos queda esto de la siguiente manera:

$$(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=a^3+b^3 \qquad (8').$$

Ahora de acuerdo con la ecuación (7) nos queda al simplificar lo siguiente:

$$(a+b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2 \qquad (9).$$

Ejercicios:

(a) Haga una configuración geométrica de la ecuación (9).

(b) Realice la factorización de $27x^3 + 8y^3$. Usando la ecuación (7).

Deduzcamos ahora geométricamente el producto notable que se obtiene al desarrollar la factorización de $(b-a)(b^2+ba+a^2)$, tomando en cuenta la *aprehensión operativa de cambio figural* dada en la figura 4. Veamos la siguiente figura:

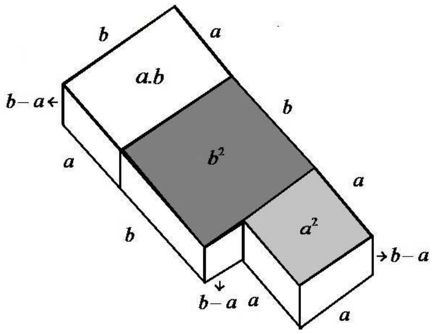



Figura 30. En la configuración tenemos perspectiva geométrica de (*b*-*a*).(*a*²+*b*.*a*+*a*²)

Podemos hacer una nueva configuración de dos cuadrados uno de lado $a$ y otro de lado $b$, al cual le podemos agregar un rectángulo de lados $ab$. Y formamos un sólido colocándole una altura $(b-a)$, según nos muestra la figura 30. Este sólido tiene por volumen el siguiente: $(b-a)(b^2+ba+a^2)$.

Luego mediante una nueva *aprehensión operativa de reconfiguración* con estos paralelepípedos nos queda la figura 31, el cual es un gnomon espacial:

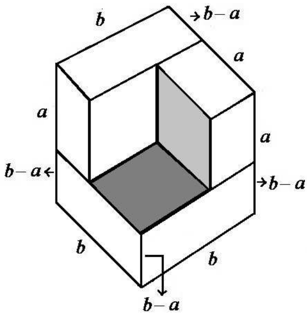



Figura 31. Configuración geométrica de la diferencia de cubos $b^3 - a^3$. Un gnomon en el espacio como el de color gris a la derecha de la figura 19.

De un *anclaje visual* a un *anclaje discursivo* tenemos que:

$$(b-a)(b^2+ba+a^2) = b^3 - a^3 \qquad (10).$$

Ejercicios: Realice la factorización de $27x^3 - 8y^3$. Usando la ecuación (10).

## Conclusiones

En esta experiencia de aula realizada con los estudiantes se evidenció la importancia que tiene el trabajo en equipo, y sobre todo cuando se construye el aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en foamis o con cartulinas de colores y se manipulan como si fueran piezas de un rompecabezas, les permite a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos constructivos llegando luego a razonamientos que les permiten crear un aprendizaje significativo. Pero debemos tener presente que se debe tener una comunicación en el aula de matemática lo cual es muy importante ya sea de diversos modos de comunicación que no se restringen únicamente a la verbal.

Sin embargo aunque la actividad fundamental en las clases de Matemática sea el razonamiento que efectúen nuestros estudiantes, la enseñanza será tanto más activa cuanto más haga funcionar la imaginación, creatividad y la inventiva de nuestros estudiantes. Al mismo tiempo que podemos mantenerlos entretenidos, interesados a la vez que ellos descubran conceptos o son tan triviales ni obvios.

## Bibliografia

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números*, 69. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.pdf.

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números*, 69. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.pdf.

Barreto, J. (2009a). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números*, 70. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

Barreto, J. (2009b). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica*. Revista Números* (71). Números, 71. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_02.pdf.

Barreto, J. (2010). Deducción y extensión más general del Teorema de Pitágoras. *Números*, 75. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Articulos_01.pdf. Recuperado el 28 de Marzo de 2012.

Barreto, J. (2011). Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Matematicalia*, 7. No. 2. Recuperado el 28 de Marzo de 2012 de: http://www.matematicalia.net/articulos/v7n2jun2011/jbarreto.pdf.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. Dordrecht, Netherlands: *Kluwer Academic Publishers*, pp 37-51.

Euclides. (1996). *Elementos.* [Traducción de M. L Puertas C.]. (tres vols.). (1ª ed.). Editorial Gredos: España.

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española (22ª ed.). Consultado en: http://www.rae.es/rae.html.

Torregosa, G y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime,* 10 (2), 273-300. México: Publicación del CLAME.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analitic strategies: a student's understanding of the group $D_4$. *Journal for Research in Mathematic Education 27* (4), 435–457.

**Julio Cesar Barreto García.** Trabajo en la Unidad Educativa "José Antonio Sosa Guillen". Palito Blanco y en la Unidad Educativa "José Antonio Páez". Boraure, Instituto Universitario de Tecnología "Antonio José de Sucre", extensión San Felipe. Nací en San Felipe estado Yaracuy. Egrese de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" de Licenciado en Ciencias Matemáticas y actualmente curso especialización en procesos didácticos en el nivel básico en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador - Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio. Núcleo San Felipe. Email: **juliocbarretog@hotmail.com**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio 2014
páginas 135-141

## El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

# Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas

## Problema

*Pedro tiene una hoja rectangular de papel ABCD, de 20 cm de largo por 12 cm de ancho, como se ilustra en la figura.*


*Pedro dobla la hoja de modo que el vértice C se ubica en el lado AD y el lado CD se superpone sobre el lado AD. ¿Es verdad que el área del trapecio que se visualiza es el 75% del área del rectángulo ABCD? ¿Por qué?*

---

Si bien es cierto que es positivo crear un problema mediante variaciones a un problema dado, siendo tales variaciones modificaciones cuantitativas a la información dada en el problema, consideramos que crear un nuevo problema haciendo modificaciones cualitativas y cuantitativas a tal información, revela una mayor creatividad en ese acto creativo y puede adoptarse como un criterio para construir algunos indicadores de la capacidad de crear problemas.

Parece claro lo que se entiende por *modificaciones cuantitativas* a la información dada en el problema (cambiar las dimensiones de las figuras, los precios de los productos, las velocidades de los móviles, etc., según lo que se considere en el problema dado). Cabe aclarar lo que estamos entendiendo por *modificaciones cualitativas* a la información dada. Como su nombre lo indica, se refiere a las cualidades de los objetos intervinientes en la información del problema dado; es decir, a cambios de objetos y a cambios en las relaciones entre los objetos. En ambos casos, estas modificaciones en la información conllevan modificaciones en los requerimientos – pueden ser requerimientos muy evidentes o muy sutiles – y éste es otro criterio a tener en cuenta en la construcción de indicadores de la capacidad de crear problemas.

Conscientes de la importancia de introducir la creación de problemas en la formación de los docentes de primaria y del uso de material didáctico manipulable en esa actividad creadora, iniciamos experiencias didácticas en esa línea de trabajo, recurriendo a la papiroflexia y a la geometría elemental.

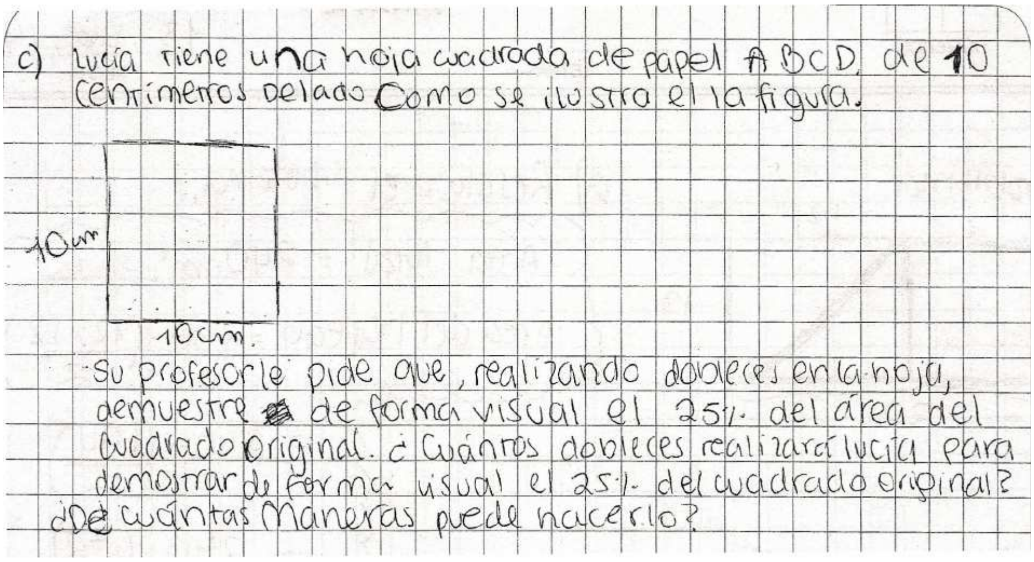
Hacer dobleces en una hoja o en una tira de papel puede brindar recursos valiosos para ilustrar propiedades de figuras geométricas planas y para crear problemas en este campo. El problema con el que iniciamos este artículo fue creado para ser usado como punto de referencia para la creación de otros problemas de geometría básica. Fue propuesto con ese fin a 23 alumnas del primer ciclo universitario de formación de docentes de educación primaria o inicial, en el marco del capítulo de Elementos de Geometría, del curso de Matemática. Concretamente, se pidió:

a) Resolver el problema
b) Identificar en el problema: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático[1]
c) Crear un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos del problema dado, identificados en (b)
d) Resolver el problema creado.

Los resultados fueron satisfactorios, pues el problema no solo fue resuelto correctamente por 19 de las alumnas, sino que 21 de ellas crearon nuevos problemas y 14 de estas lo hicieron introduciendo modificaciones relacionales a la información dada en el problema original (las otras 7 hicieron solo modificaciones cuantitativas) con las consiguientes modificaciones a los requerimientos.

A continuación reproducimos algunos de los problemas creados por las alumnas, con modificaciones cualitativas a la información dada en el problema original. Sobre los detalles de redacción nos ocuparemos posteriormente. Por ahora, ponemos la atención en las modificaciones cualitativas en relación al problema dado y a sus potencialidades didácticas y matemáticas.

## Problema de la alumna 7



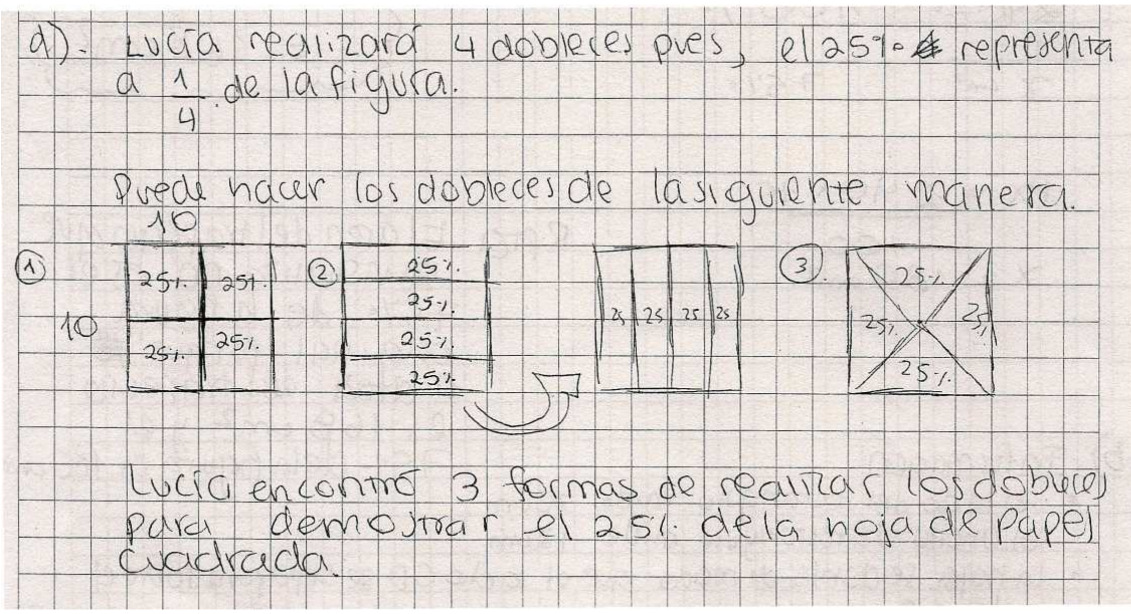

(*Lucía tiene una hoja cuadrada de papel ABCD, de 10 centímetros de lado como se ilustra en la figura. Su profesor le pide que realizando dobleces en la hoja demuestre de forma visual el 25% del área del cuadrado original. ¿Cuántos dobleces realizará Lucía para demostrar de forma visual el 25% del cuadrado original?*)

[1] Sobre estos elementos de un problema nos referimos ampliamente en nuestro artículo del No 34 de UNIÓN (*Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady)*

Las modificaciones cualitativas en relación al problema original se evidencian al no partir del mismo rectángulo sino de un caso particular interesante: un cuadrado con dimensiones asignadas por la alumna y al no mostrar un doblez sino pedir hacer dobleces como parte del requerimiento, lo cual es cualitativamente diferente en relación al problema original.

Es un problema sencillo, que permite el uso de la figura cuadrado, de formas de dividir la región cuadrada en cuatro partes con la misma área, de relacionar la cuarta parte de algo con su 25%, etc.

En su solución, la alumna mostró las tres maneras más "naturales" de hacer los dobleces.


d).- Lucía realizará 4 dobleces pues, el 25% representa a $\frac{1}{4}$ de la figura.

Puede hacer los dobleces de la siguiente manera.



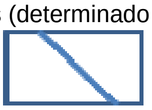
Lucía encontró 3 formas de realizar los dobleces para demostrar el 25% de la hoja de papel cuadrada.

Lo interesante del problema, es que presenta no solo un reto alcanzable por niños de primaria, sino también que suscita preguntarse si las tres formas "naturales" de hacer los dobleces para mostrar una figura con el 25% del área del cuadrado original, son las únicas. Ante esta pregunta, con otras alumnas del curso, encontramos dos formas más. Esperamos haber despertado la curiosidad del lector y que encuentre estas maneras de hacer los dobleces.

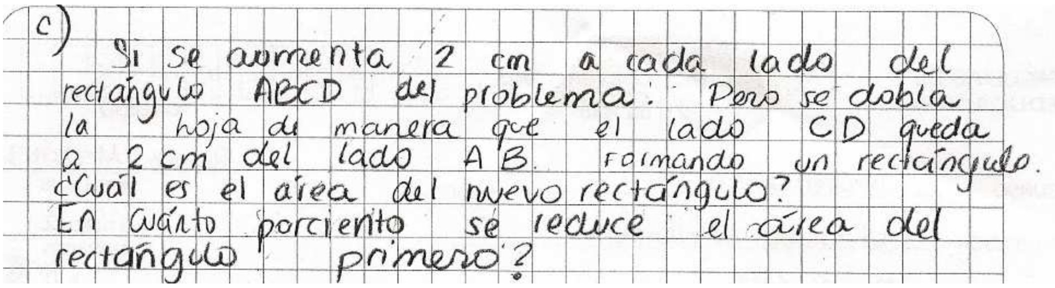
Por otra parte, con la misma idea, se podría pedir formas de hacer un solo doblez en la hoja cuadrada para mostrar dos figuras con la misma área. Es una ocasión para evidenciar que hay problemas con infinitas soluciones.

Es muy interesante notar que usando para un rectángulo el criterio para hacer el doblez en la hoja cuadrada y obtener infinitos pares de figuras con la misma área, resulta que el problema propuesto por la alumna también tiene infinitas soluciones[2].

[2] Basta ver que en el rectángulo cuya área es la mitad del área del cuadrado, mediante un doblez se puede formar dos trapecios rectángulos de la misma área y hay infinitos de estos pares de trapecios, según la ubicación del lado común de éstos (determinado por el doblez, que no es segmento paralelo a los lados del rectángulo)



## Problema de la alumna 21 (PA 21)

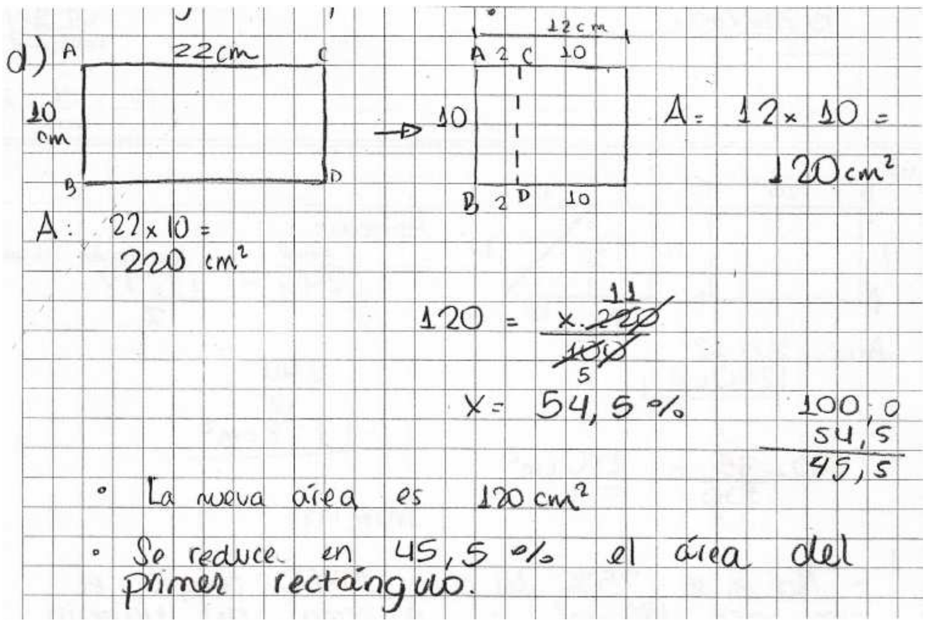

c) Si se aumenta 2 cm a cada lado del rectángulo ABCD del problema. Pero se dobla la hoja de manera que el lado CD queda a 2 cm del lado AB formando un rectángulo. ¿Cuál es el área del nuevo rectángulo? En cuánto porciento se reduce el área del rectángulo primero?

(*Si se aumenta 2cm a cada lado del rectángulo ABCD del problema. Pero se dobla la hoja de manera que el lado CD queda a 2cm del lado AB formando un rectángulo. ¿Cuál es el área del nuevo rectángulo?*

*En cuánto por ciento se reduce el área del rectángulo primero?*)

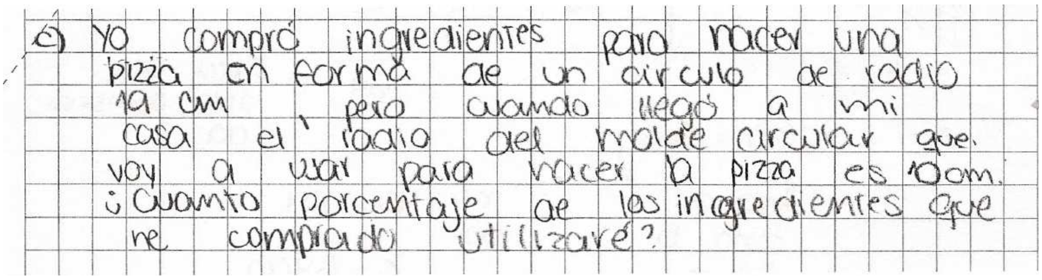
El problema se inicia con una modificación cuantitativa al problema dado (incrementar la longitud de cada lado del rectángulo en 2 cm) y continúa con modificaciones cualitativas al considerar un nuevo doblez, con especificaciones diferentes a las del problema original. Si bien el incremento en las longitudes de los lados no se podrá hacer físicamente al tener solo la hoja rectangular dada, el problema presenta un ejercicio de abstracción, pues lleva implícito un supuesto nuevo sobre las dimensiones de la hoja recibida según el problema original. En el problema también está implícito un concepto intuitivo de distancia entre dos segmentos paralelos (“el lado CD queda a 2cm del lado AB, formando un rectángulo”)

En su solución, la alumna optó por simplificar más el problema, aunque no hizo la modificación correspondiente en el enunciado que escribió. Así, el incremento de 2 cm no lo hizo a todos los lados del rectángulo dado sino solo a los dos lados más largos, como lo ilustra en su solución.



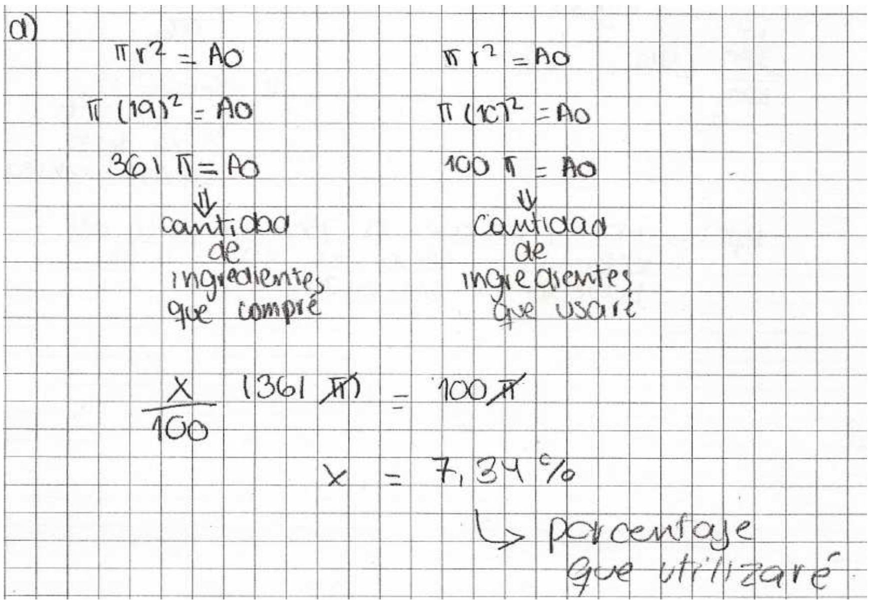

Siendo un problema bastante sencillo, el tipo de doblez que considera, puede usarse para proponer problemas de dificultad mayor, como preguntar a qué distancia deben ubicarse, mediante un doblez, los vértices C y D de los vértices A y B respectivamente para que el rectángulo ABCD que se visualiza con los vértices C y D en la nueva posición, sea un rectángulo semejante al rectángulo original. Este problema permite poner énfasis en que no todos los rectángulos son semejantes. Con el propósito de simplificar los cálculos y priorizar el enfoque geométrico, sería preferible considerar un rectángulo inicial de 10 cm por 25 cm.

### Problema de la alumna 22 (PA 22)




(*Yo compré ingredientes para hacer una pizza en forma de un círculo de radio 19 cm, pero cuando llegué a mi casa el radio del molde circular que voy a usar para hacer la pizza es 10 cm. ¿Cuánto porcentaje de los ingredientes que he comprado utilizaré?*)

Como es evidente, en este problema no solo hay modificaciones cualitativas en la información, pues los objetos geométricos son círculos, sino que – manteniendo el carácter extra matemático del contexto del problema – también hay modificación de la situación en tal contexto, pues ya no se trata de dobleces en una hoja de papel, sino de la cantidad de ingredientes que se use en la preparación de una pizza, según el tamaño de ésta. Es una situación doméstica sencilla que permite relacionar áreas de círculos y porcentajes. Hay un supuesto implícito que la cantidad de ingredientes que se usa en la preparación de una pizza es proporcional al tamaño de ésta, identificada con el área de la superficie plana del molde que se use, independientemente de la forma que tenga. La solución de la alumna está bien encaminada, dentro de los supuestos comentados en el párrafo anterior. Se destaca el uso de $\pi$ sin usar una aproximación decimal y el uso de un planteamiento algebraico para encontrar el porcentaje buscado.



Lamentablemente su resultado es incorrecto por confundir un paréntesis de apertura con el número 1 (confunde (361 con 1361 al hacer la división final, usando calculadora). Esto muestra una vez más la importancia de reflexionar sobre el resultado que se obtenga al resolver un problema. En este caso, es posible usar un criterio de aproximación, aun sin pretender mayor exactitud. No es difícil advertir que 100 $\pi$ es un poco menos que la tercera parte de 361 $\pi$; o sea un poco menos del 33% de 361 $\pi$. Obtener el resultado 7,34%, bastante alejado de esta aproximación "gruesa", como consecuencia de los cálculos hechos, debería llevar a sospecha de error y a una revisión de los mismos.

Con la situación descrita en el problema creado podrían hacerse otros requerimientos como examinar el número de pizzas enteras que se podrían preparar con los ingredientes comprados, usando el molde de 10 cm de radio.

## Comentarios generales

1. La experiencia realizada en el curso muestra una vez más que las alumnas – como muchos otros profesores en formación o en ejercicio –tienen un gran potencial de la capacidad de crear problemas de matemáticas y que es tarea de los formadores de formadores estimular el desarrollo de tal capacidad. Una forma de hacerlo es introduciendo explícitamente la creación de problemas en los cursos de matemáticas de los planes de estudio, haciendo críticas constructivas a los problemas creados por los participantes y mostrando las potencialidades didácticas y matemáticas que tienen tales problemas. Usar material manipulable contribuye a crear un ambiente lúdico mientras se crea problemas.
2. No podemos dejar de mencionar la importancia de formular claramente el problema, con una redacción adecuada, que además de la corrección gramatical tenga un conveniente equilibrio entre la expresión matemática apropiada y la sencillez de las expresiones verbales para facilitar la comprensión. Esta es una capacidad complementaria a la de crear problemas, que lamentablemente no siempre la tienen suficientemente desarrollada los profesores o futuros profesores y es un gran reto para los formadores de formadores. Hemos desarrollado experiencias positivas de hacer reformulaciones de los problemas creados al hacer la socialización de los problemas creados.

   Por ejemplo, es muy importante hacer distinguir claramente la diferencia entre mostrar y demostrar. Lo pertinente en el caso del PA7 es mostrar.
3. Sería muy interesante establecer indicadores de la capacidad de crear problemas de matemáticas; sin embargo las dificultades para obtenerlos recuerdan las dificultades y la diversidad de puntos de vista en torno a la medición de la creatividad y en particular de la creatividad matemática. Numerosos autores han hecho aportes en este campo, con diversos puntos de vista y constituyen puntos de referencia para indagar sobre la construcción de indicadores de la capacidad de crear problemas. Algunos de ellos consideran en sus tests sobre creatividad matemática, ítems que tienen gran relación con la creación de problemas. Gontijo, C. H. y Fleith, D. S. hacen referencias interesantes en el capítulo "Avaliação da creatividade em matemática", que escriben en el libro *Medidas de creatividade* (Alencar, E. M. L. S. y colaboradores, 2010)
4. Considerando solamente una de las formas de crear problemas, que es mediante variaciones de un problema dado, podríamos decir que las modificaciones cualitativas a la información de tal problema, consistentes con los

correspondientes requerimientos, revelan una mayor capacidad de creación de problemas que el hacer modificaciones meramente cuantitativas. Sin embargo esto es relativo, pues, por ejemplo, si ante el pedido de crear un problema a partir del ejercicio de calcular $2^3$, un alumno propone el problema de hallar un valor aproximado de $2^{3,2} - 2^3$, estamos ante una modificación cuantitativa pero ante un problema de una gran complejidad, en relación al ejercicio original. Mayor aún, si se pide un valor aproximado de $2^\pi - 2^3$. ¿Cómo considerar la capacidad de crear problemas de alguien que hace esos cambios cuantitativos al problema original? Ciertamente, también depende de la formación previa de quien crea el problema.

El tema es desafiante para educadores matemáticos y una invitación a los psicólogos educacionales a involucrarse en esta investigación.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio 2014
páginas 143-147
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

# Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): GeoGebraTube: el siguiente nivel de la experiencia GeoGebra

**Fabián Vitabar**

| | |
|---|---|
| **Resumen** | El uso de GeoGebra para la enseñanza de la matemática no se trata ya solo de aprender a usar un programa sino de aprovechar todas las opciones que ofrece en combinación con los recursos en línea. Se presenta a continuación el portal GeoGebraTube como una herramienta privilegiada para compartir materiales para las clases de matemática y ciencias. |
| **Abstract** | Using GeoGebra for teaching and learning Mathematics is not only handling software anymore. It is much more than that. It means that you should take of great benefits combining GeoGebra and internet. This review introduces GeoGebraTube, a useful tool for sharing materials for Mathematics and Science lessons |
| **Resumo** | O GeoGebra no ensino da matemática não é apenas aprender um programa, mas é utilizar todas as opções oferecidas em combinação do software com a Internet. O recurso GeoGebraTube é apresentado aqui como uma grande ferramenta para compartilhar materiais para nossas aulas de matemática e ciências. |

## La fuerza de la comunidad global

En nuestros días parece ser indiscutible que la comunidad global de docentes encuentra en internet una amplísima gama de oportunidades para el crecimiento profesional personal. Pero también, quienes estamos en contacto con la realidad cotidiana de los docentes de aula, tenemos la certeza de que no es tan sencillo echar mano de estas oportunidades e impulsarse a partir de ellas. Se trata de una realidad compleja en la que incide mucho el escaso tiempo disponible y el no tener mucha idea de cómo dar los primeros pasos en aprovechar lo que la red ofrece.

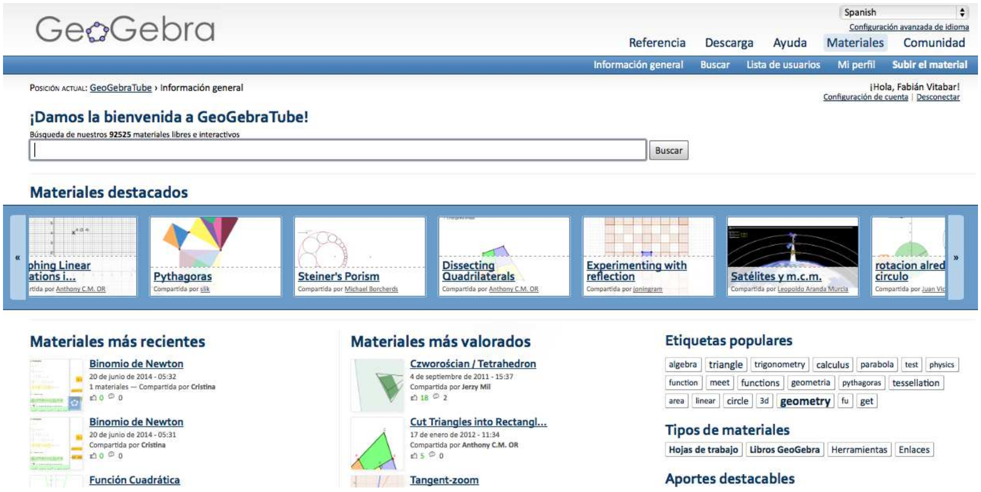
Desde algunos años y con un marcado crecimiento en el último bienio, GeoGebra (www.geogebra.org) ha cobrado popularidad entre docentes y alumnos de nuestros países. Las diversas políticas educativas gubernamentales de acceso a la tecnología han optado por incluirlo en los equipos y promover su aprovechamiento.

Este software de matemática dinámica, gratuito y de código abierto, se nutre significativamente de los aportes y sugerencias de la comunidad de usuarios. Gracias a este enriquecimiento ha logrado trascender las fronteras propias de un *software* y se va instalando, a paso firme, como un punto de encuentro de docentes y simpatizantes de la matemática, la ciencia y la tecnología.

GeoGebra ha crecido gracias a la comunidad y es capaz de ofrecer importantes oportunidades para que la comunidad siga creciendo gracias a él.

## Una plaza pública: GeoGebraTube

El mismo concepto que subyace en los populares servidores en línea para compartir fotos, videos, noticias y archivos ha hecho surgir un servicio propio de GeoGebra para el intercambio de materiales: GeoGebraTube, (www.geogebratube.org).

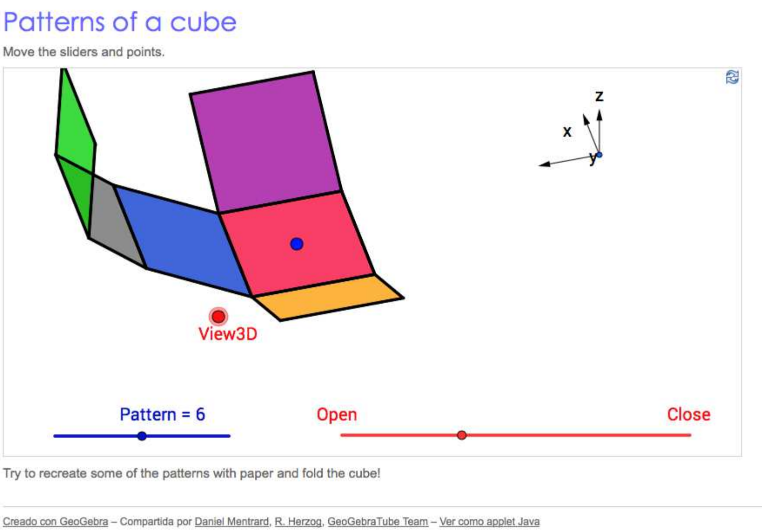



Se trata de un servicio gratuito, abierto a todos los usuarios de GeoGebra. Su mantenimiento técnico está a cargo del equipo central de GeoGebra. Tal como otros sitios de internet, basta ser usuario de alguna de las redes sociales más difundidas para poder ingresar al sitio e iniciar a disfrutar de la experiencia que ofrece.

## Miles de materiales a disposición

Si bien es sencillo tener una página web y compartir lo que uno hace, el hecho de centralizar lo compartido en un solo lugar facilita mucho la tarea de quien desea encontrar algún recurso en particular.

Estamos cercanos a alcanzar los 100 000 materiales publicados en GeoGebraTube. Cada uno de ellos representa el proceso creativo de un docente que procuró mejorar sus clases con el uso de GeoGebra y que, además, hizo pesar la importancia de compartir los recursos con la comunidad.



En las publicaciones es posible encontrar archivos generados en GeoGebra que se ejecutan directamente desde el navegador, sin la necesidad de instalar el programa en el dispositivo en el que se desea abrir el aplicativo. Esto es válido también para dispositivos táctiles y teléfonos móviles: es posible ejecutar en ellos la versión web de un archivo producido en GeoGebra a través de GeoGebraTube y un simple navegador.

Como simplemente se requiere un navegador, se puede trabajar en cualquier sistema operativo de los más habituales.

Además de los archivos se suelen agregar a los materiales algunas sugerencias didácticas, anotaciones de los profesores que produjeron los archivos y consignas de trabajo para los estudiantes.

Estos archivos pueden hallarse individualmente o incluidos en GeoGebraBooks, que son colecciones de materiales organizados en capítulos con una interfaz amigable y que procuran nuclear todos los recursos de un grupo de clase, o relacionados con un contenido en particular.

La ingente cantidad de archivos disponibles se logra manejar con varias opciones de clasificación y búsqueda. Entre ellas, es posible filtrar lo publicado por idioma y edad del destinatario y se dispone de un sistema de etiquetas que agilizan la navegación.

Los usuarios pueden evaluar los materiales y dejar registro de su opinión. Esto puede ser útil para conocer la opinión de otras personas y considerarla en el momento de la selección.

## Diversas opciones de aprovechamiento

El material disponible en GeoGebraTube puede aprovecharse de diferentes maneras.

Si se encuentra un enlace que apunta a un archivo con una buena construcción y una consigna adecuada, basta compartir ese enlace para que los alumnos puedan acceder a la actividad y trabajar con ella. Incluso es posible difundir un GeoGebraBook.

También se puede descargar un archivo alojado en GeoGebraTube para que funcione fuera de línea. Una alternativa es solicitar el archivo básico .ggb, pero también se puede descargar una carpeta comprimida que contiene una página web HTML en la que se ha incrustado la aplicación. Esta página se ve tal cual como si se estuviera trabajando en línea, pero en realidad incluye todos los archivos necesarios para correr localmente.

La función de descargar un archivo desde GeoGebraTube en formato de página web ha sustituido a la antigua opción de exportación de archivos .ggb en código HTML. Pero la integración del trabajo en la nube con las versiones de escritorio o de dispositivos táctiles es muy sencilla, y la publicación global puede hacerse con solo un par de clics desde el mismo programa.

La licencia de uso compartido que caracteriza a los materiales hechos con GeoGebra permite que se pueda descargar un archivo interesante y adaptarlo de acuerdo a las necesidades didácticas específicas. A veces se encuentran muy buenos recursos al buscar entre las etiquetas alguna expresión del tema deseado en diversos idiomas. Luego, la traducción del material es lo único necesario para que pueda ser utilizado, pero es muy sencillo porque se puede descargar el archivo .ggb, traducirlo y adaptarlo e inmediatamente volver a publicarlo en la red.

## Enriquecer a la comunidad es tarea de todos

Todas las posibilidades mencionadas anteriormente son posibles porque a alguien se le ocurrió, en algún momento, compartir el trabajo que estaba realizando. Por eso es muy importante que todos nos animemos a aportar nuestros materiales a la comunidad, aunque tengamos la sensación de que podrían mejorarse.

Hemos mencionado la posibilidad de tomar algo que ya esté hecho y adaptarlo a los requerimientos particulares de los programas nacionales, de las formas de expresión o del idioma en sí. El docente puede dar su toque didáctico y ajustar lo descargado para luego republicarlo con mención del autor original; de ese modo estará agradeciendo sensiblemente la ayuda recibida de parte de quien diseño el archivo en su inicio.

Quizás sea el momento de echar un vistazo por GeoGebraTube, realizar búsquedas, probar algún material. O incluso puede ser el momento para subir a la red los archivos preparados en GeoGebra que están muy bien cuidados en nuestras carpetas personales. Es muy probable que sean valiosos para otros docentes.

## No alcanza con compartir materiales

El intercambio de materiales, especialmente cuando se trata de esta gran cantidad, es potencialmente muy valioso. Pero, más allá de compartir materiales, el crecimiento profesional que se da a partir del trabajo colaborativo con colegas adquiere relevancia cuando se comparten experiencias de aula y reflexiones didácticas.

Un mismo material base puede ser utilizado de maneras muy variadas, con alumnos diversos y de diferentes edades. Ninguno de estos parámetros puede determinar el éxito de la propuesta de clase por sí mismo. Serán las opciones del docente y el ajuste de las consignas lo que hará la diferencia y determinará el grado de pertinencia de lo trabajado.

Por tal motivo es fundamental que los docentes nos ayudemos a superar el concepto de repositorio de materiales y lo hagamos resurgir como un ámbito para intercambiar experiencias y crecer profesionalmente. GeoGebraTube nos da la oportunidad y nos ofrece la garantía técnica del funcionamiento, pero el contenido y la riqueza de los aportes es responsabilidad de la comunidad de usuarios. Cuidemos estos aspectos y saquemos verdadero partido de la chance que se nos da.

La comunidad de GeoGebra sigue creciendo y son muchos los Institutos GeoGebra y los usuarios independientes que están trabajando duramente para instalar esta reflexión más profunda en sus prácticas y en sus discusiones. Sintámonos todos invitados a seguir este camino.

## Algunos enlaces interesantes

- www.geogebratube.org
- http://tube.geogebra.org/user/list/order/contribs/type/desc
- http://institutosgeogebra.es/Materiales/
- http://laboratoriogeogebra.depdematematica.org
- http://geogebra.itm.edu.co/Trabajos.html

**Fabián Vitabar.** Profesor de Matemática egresado del Instituto de Profesores “Artigas” (Montevideo, Uruguay). Magíster en Educación con énfasis en didáctica de la matemática (UCUDAL, Uruguay). Coordinador de la Red latinoamericana de GeoGebra. Director del Instituto GeoGebra de Uruguay. Jefe del Departamento de Matemática del Colegio Seminario (Montevideo, Uruguay).

-

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio 2014
páginas 149-153

www.fisem.org/web/union

# Ideas para enseñar:

# El concepto de límite de Cauchy, el cine, la tv y la mecánica newtoniana

**Oscar A. González Chong, Marister Lopetegui Canel, Sandra Madan Valdés**

Fecha de recepción: 8/03/2013
Fecha de aceptación: 5/02//14

| | |
|---|---|
| **Resumen** | El trabajo es una propuesta de introducir el concepto de límite de una función de una variable real formulado por Cauchy apoyados en comparaciones con el cine, la tv y la mecánica newtoniana, en cuanto a su visualización<br>**Palabras clave**: Cauchy, límite de una función, mecánica newtoniana. |
| **Abstract** | This paper is a proposal to introduce the concept of a function limit in a variable, enunciated by Cauchy, supported by comparisons with TV, movie and Newtonian mechanics regarding its visualization.<br>**Keywords**: Cauchy, limit of a function, Newtonian mechanism. |
| **Resumo** | O trabalho é uma proposta de introduzir o conceito de limite de uma função de uma variável real formulado por Cauchy apoiados em comparações com o cinema, a tv e a mecânica newtoniana, quanto a sua visualização.<br>**Palavras chave:** Cauchy, limite de uma função, mecânica newtoniana. |

## 1. Introducción

Cuando impartimos las asignaturas de cálculo diferencial e integral a estudiantes de los primeros años de la mayoría de las carreras universitarias enfrentamos las dificultades en la comprensión y aplicación del concepto básico de límite de Cauchy, sobre el cual se construye todo el cálculo.

Hoy con los avances de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones y su aplicación a la enseñanza de la Matemática, sobre todo las experiencias adquiridas en la visualización de conceptos, podemos pensar en usarlas en una visualización del concepto de límite apoyándonos en comparaciones con el cine, la televisión y la mecánica newtoniana. Surgen rápidamente las preguntas

- ¿En que se parecen el cine y la televisión con el concepto de límite de Cauchy?
- ¿Qué relación existe entre la mecánica newtoniana y el concepto de límite de Cauchy?
- ¿Qué relación existe entre el cine, la tv y la mecánica newtoniana?

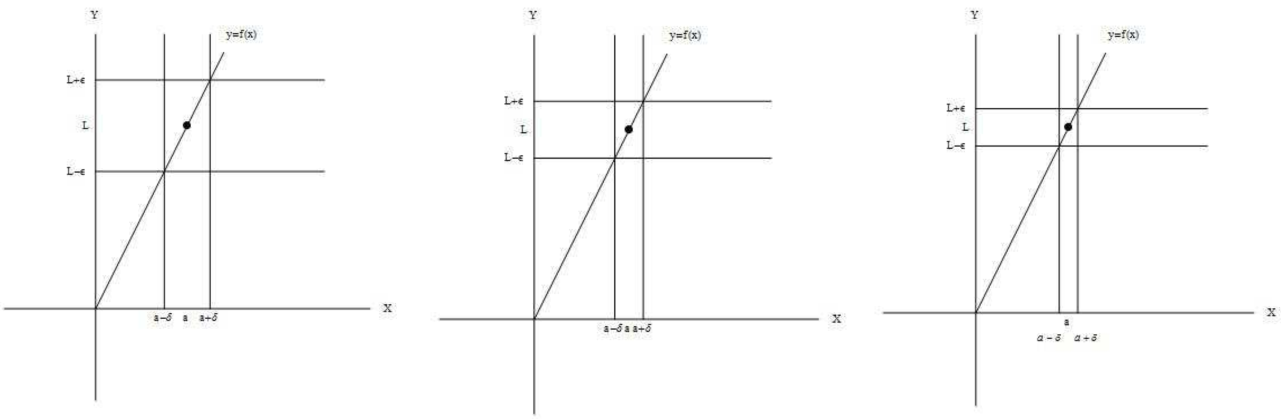
## Las diferencias del movimiento en el cine y la tv con la mecánica newtoniana

La sensación de movimiento se logra en el cine y la televisión como una secuencia de fotos o como llaman también de cuadros por segundo, el cine es de 24 cuadros por segundo, la televisión en dependencia de la norma si es NTSC es de 30 cuadros por segundo y la N Pal de 25, es decir se logra el movimiento como una secuencia de reposos (fotos).Podemos decir que en el cine, la tv y en general en el video se logra el movimiento a través del reposo.

El punto de partida de Newton en su mecánica clásica es contrario, con su primera ley determina que un cuerpo se encuentra en estado de reposo cuando su velocidad es cero, es decir define el reposo a través del movimiento con velocidad cero.

### El concepto de límite de Cauchy antecesor del cine.

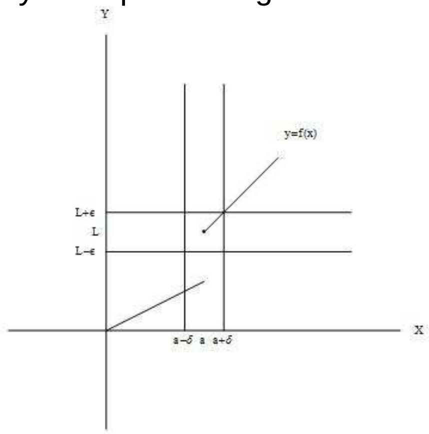
Cauchy define rigorosamente el concepto de límite de una función de una variable real $y$=f($x$), cuando determina su límite como L (valor al que se aproxima) cuando la variable independiente($x$) se aproxima de un valor(a), si para cualquier franja horizontal con centro en L de ancho 2ε existe la correspondiente vertical con centro en a de ancho 2δ que garantiza que el rectángulo intercepción de las mismas contiene dentro la gráfica próxima al centro, esto no es más que una secuencia de cuadros( de reposos) indicando el movimiento de aproximación a través de imágenes(reposos) cada vez menores. Lo mostramos a continuación en una secuencia de 3 cuadros solamente.



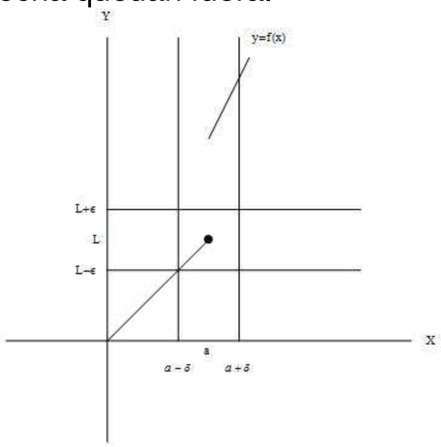

Por tanto el concepto de límite de Cauchy es el antecesor del cine, pues se define como una secuencia de reposos que indican el movimiento de aproximación de las imágenes de la función a un valor cuando su variable independiente se aproxima a un número, con la diferencia que los estados de reposo son cuadros semejantes al zoom digital dentro de una imagen alrededor de un punto central tan pequeño como queramos , donde cada cuadro sucesivo tendrá que contener completamente la gráfica de la función que corresponde a los valores próximos del número por muy pequeño que sea el zoom alrededor del punto centro.

Con este paralelo podemos cuestionarnos ¿Cuándo entonces puedo afirmar que una función no tiene límite cuando su variable independiente se aproxima de un valor determinado?

Vamos a ver en un ejemplo que no tiene límite la función cuando su variable independiente se aproxima a un valor, como se rompe la secuencia de cuadros que contienen la gráfica próxima y es imposible lograrlo.




Observe que para esa franja horizontal resulta imposible encontrar la correspondiente vertical que garantiza que toda la gráfica correspondiente a los puntos próximos del valor central (a) este dentro del cuadro intercepción. Los valores a la izquierda quedan fuera. Lo contrario ocurre para esta otra franja horizontal cuando los valores a la derecha quedan fuera.

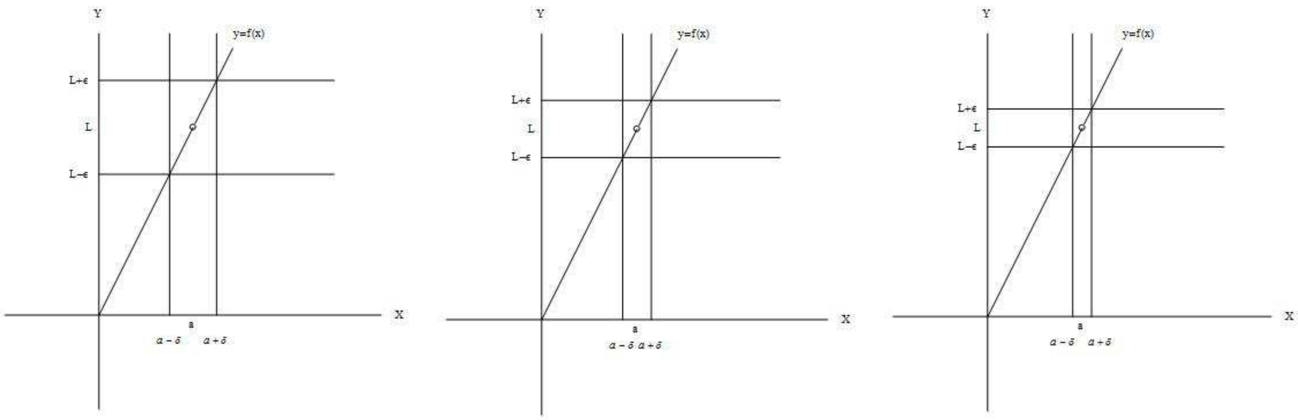



No se puede construir la película de imágenes (reposos) que contengan la gráfica de los puntos próximos.

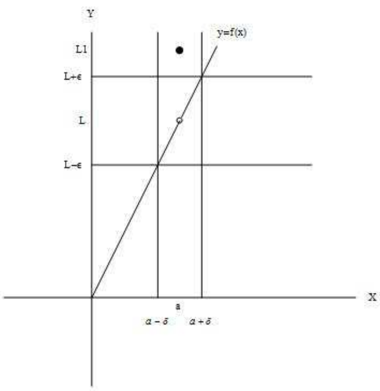
En estos ejemplos en el primero la función se aproxima a L cuando $x$ se aproxima a $a$ solo cuando lo hace por la derecha (para $x > a$) y en el segundo se aproxima a L cuando $x$ se aproxima a $a$ solo cuando lo hace por la izquierda (para $x < a$), podemos entonces definir los límites laterales derecho e izquierdo. También podemos decir que una función tiene límite en un punto cuando sus límites laterales son iguales.

Aprovechamos la situación para comenzar hablar de la continuidad de la función, en este caso se dice que es discontinua en el punto $x= a$.

Ahora podemos empezar hablar de un detalle fundamental en el concepto de límite definido por Cauchy, donde no importa si la función está definida en el punto $x= a$, solo en su vecindad, por eso aprovechamos y vemos que la película puede ser construida en caso de tener un agujero en el punto central de la misma, lo importante es que la gráfica de los puntos próximos tiene que siempre estar dentro del rectángulo intercepción de las franjas horizontal y vertical y lo mostramos gráficamente en una secuencia de 3 cuadros.




Es evidente que la función $f\,(x)$ no es continua en el punto $x = a$ donde no está definida y podemos concluir que para la continuidad en el punto no es suficiente la existencia del límite en el punto, ni tampoco que este definida independientemente, como es el caso siguiente.




Donde está definida en $x=a$, $f(a)$=L1 y no es continua en $a$, por tanto concluiríamos que es necesario que su límite cuando se aproxima $x$ a $a$, sea la propia imagen de la función en $x=a$.

Después de una visualización del concepto de límite de Cauchy el estudiante estará en condiciones de pasar a un trabajo numérico con el concepto (cuantificación de la aproximación cuadro a cuadro) encontrar para determinado valor de ε semi-ancho de la franja horizontal si existe el correspondiente semi-ancho δ de la franja vertical que garantice que la gráfica de los puntos próximos este contenida en el rectángulo intercepción de estas. Podemos plantear preguntas tipo (Stewart, p.112) ¿Qué tan cerca de $a$ debe estar x para que $f(x)$ diste de L una distancia menor qué ε? Esta pregunta sería en ejemplos concretos con valores de ε e implicaría con trabajo de inecuaciones modulares encontrar el δ.

Aprovechando un ejemplo fácil de calcular podemos cambiar para otro ε la pregunta y entonces en un proceso inductivo llegar a que existe una proporción fija entre ε y el δ, independiente de los valores numéricos de cada uno .El estudiante estaría en condiciones de crecer a una aproximación analítica del concepto de límite de Cauchy (Stewart, p. 113), es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si para cada número ε > 0 hay un correspondiente δ > 0 tal que | $f(x)$ - L|<ε siempre que 0 < | $x$ - $a$ | < δ

La solución de algunos ejemplos analíticamente (Stewart, 2002) daría al estudiante la posibilidad de crecer en el conocimiento del concepto de límite. El cálculo de límites por esta vía resulta complicado, por fortuna fueron demostradas leyes sobre los límites que nos permiten calcularlos sin recurrir a su definición. El concepto de límite de Cauchy estaba implícito en sus escritos, donde llamaba a los números pequeños ε, δ y fue formulado como lo definimos hoy por Karl Weiertrass (Stewart, p. 117). Si Newton definió el reposo en su mecánica como movimiento con velocidad cero, Cauchy definió el límite como una secuencia de reposos, es decir define el movimiento a partir del reposo, lo que en el cine y la tv está presente también.

## Conclusiones

Utilizar las analogías y diferencias entre el cine, la tv, la mecánica newtoniana para visualizar inicialmente el concepto de límite de Cauchy garantiza una motivación del estudiante, al mismo tiempo aprovechamos sus conocimientos previos sobre estos temas. Si combinamos estas ideas en la producción de páginas web interactivas para la familiarización en la etapa inicial, podemos esperar mejores resultados en el aprendizaje del concepto.

## Bibliografía

Newton, I. (1941). *Philosophie Naturalis Principia. Mathematica. Burndy* Library. London.

Rocha, A., Bianchini,W.(2002): *Aprendiendo Cálculo com Maple*, LTCeditora, Río de Janeiro.

Stewart,J. (2002): *Cálculo.Transcendentes tempranas*,cuarta edición. Thomson Learning, Mexico.

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/1/definition.2/index.html. Consultada el 6 de octubre del 2012.

**Oscar Antonio González Chong.** Licenciado en Matemática desde el año 1979, Doctor en ciencias Matemáticas desde el año 1989.Se desempeña como profesor del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Río. **oscar@mat.upr.edu.cu**

**Marister Lopetegui Canel**. Licenciada en Educación Matemática desde el año 1991. Master en Nuevas Tecnologías para la Educación. Profesora del departamento de matemática de la Universidad de Pinar del Río **marister@mat.upr.edu.cu**

**Sandra Madan Valdés**.Licenciada en Educación Matemática desde el año 1981. Master en Matemática Avanzada aplicada a la Ingeniería. Se desempeña como profesora del departamento de matemática e la Universidad de Pinar del Río**.** **zmadan@mat.upr.edu.cu**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 155-176
Coordinada por Fredy González

## Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

# Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano de Matemática en los niveles básico y medio de educación

**Alfonso Segundo Gómez Mulett**


| | |
|---|---|
| **Resumen** | En este trabajo se muestra la evolución del currículo de matemática colombiano para la enseñanza primaria y secundaria entre los años 1951 y 2000, a la luz de las reformas educativas y el análisis de algunos textos, dedicando especial atención a la implantación de la matemática moderna y en particular a la inserción de la lógica y los conjuntos. La elaboración del trabajo se basó en un análisis documental de la legislación educativa colombiana, cotejado con los contenidos de los textos de matemática utilizados en el lapso estudiado y otros trabajos afines. Con la investigación se comprobó que el currículo de matemática para la educación básica ha variado muy poco, conservándose aún aspectos de las reformas realizadas a mediados de los años cincuenta.<br>**Palabras clave:** Reformas, currículo, matemática, enseñanza básica. |
| **Abstract** | This paper shows the evolution of the Colombian mathematics curriculum for elementary and secondary levels from 1951 to 2000, based on educational reforms and the analysis of texts for teaching, paying particular attention to the development of modern mathematics and in particular the integration of logic and sets. It presents a documentary analysis of the Colombian education legislation, of the content of mathematics textbooks, and other related documents used in the period studied. It was found that the mathematics curriculum for basic education has underwent little changes, however it still remains some aspects of the reforms introduced in the mid-fifties.<br>**Keywords:** Reforms, curriculum mathematics, basic education |
| **Resumo** | Este artigo mostra a evolução do currículo de matemática colombiano para o ensino primário e secundário entre 1951 e 2000, à luz das reformas educacionais e análise de alguns textos, com especial atenção para a aplicação da matemática moderna e em especial a inclusão da lógica e da moda. O estudo baseou-se numa análise documental da legislação educacional colombiana, combinada com o conteúdo dos textos de matemática utilizados no período estudadas e outras obras relacionadas. A pesquisa constatou que o currículo de matemática para educação básica mudou muito pouco, preservar o mesmo aspectos das reformas realizadas em meados da década de 1950.<br>**Palavras-chave:** reformas curriculares, matemática, educação básica. |

## Introducción

De alguna manera, los cambios curriculares en la enseñanza de la matemática están ligados a las reformas educativas en el contexto mundial o en el contexto latinoamericano. Ubicándonos en los albores del siglo XX, la primera reforma considerada como moderna fue propuesta por Félix Klein en la última década del siglo XIX a partir del *Programa Erlanger* (Haidar, Teti & Bonacina, 2013), apoyada por su tentativa de modernizar la matemática después de publicar su teoría sobre grupos de transformaciones (Duarte, 2007). Su reforma se dirigió principalmente a la enseñanza universitaria, consideró las nociones de grupo y grupo de transformaciones como fundamento de la geometría; posteriormente, en 1905 propuso la inclusión del concepto de función y del cálculo diferencial e integral en los programas de la matemática del bachillerato alemán *(Meraner Lehrplan-entwürfe).* La inclusión del cálculo en la enseñanza media permitiría al estudiante tomar cursos más avanzados de matemática en el nivel universitario. Klein revivió la enseñanza en los campos del análisis, la geometría y la física, tomando el concepto de grupo y los principios de las transformaciones como el corazón de la teoría llamada por él *Estructura Matemática*.

Siguiendo a Nevalina (1966), la segunda reforma en la enseñanza de la matemática se debe a David Hilbert, propuesta después del Congreso Mundial de Matemáticas de París en 1900. Su reforma se basó en dos aspectos: la enseñanza de la matemática mediante métodos formales y el estudio de los objetos matemáticos bajo los conjuntos, entendidos estos como colecciones de elementos dados sin características cualitativas, desde el punto de vista intuitivo. Sobre los conjuntos se define el concepto de relación, derivándose a partir de éste los conceptos de correspondencia, mapeo y función. Decía Hilbert, que antiguamente, el concepto de función era dado por una ley del orden aritmético o analítico, donde un número producía o era transformado en otro número o argumento, o en varios números si la función era multivaluada, como en el caso de las funciones de variable compleja. Así por ejemplo, en la matemática enseñada en Colombia suele encontrarse el concepto de función a la manera antigua, generalmente en los libros de cálculo y matemáticas generales; así por ejemplo, en Budnick (1990), se define función como sigue: “la función es, en esencia, un dispositivo de entrada salida. Se proporciona una regla matemática que la transforma (manipula) en una salida específica” (p. 2).

En 1908 Klein preside el primer International Commission in Mathematical Intruction ICMI, organismo derivado del International Congress of Mathematicians realizado en Roma y sugerido por el matemático norteamericano David Eugene Smith (Bass & Hodgson, 2004), con el propósito inicial de orientar el trabajo en didáctica de la matemática. En este primer ICMI Smith planteó las siguientes preguntas: ¿Cuáles han sido los resultados de romper la barrera que separan los temas de álgebra y geometría, o de enseñar ambas simultáneamente?, ¿Se han preparado recomendaciones en esta materia?, ¿Qué posición se debe tomar en la enseñanza secundaria sobre la naturaleza de las aplicaciones y la relación entre matemática pura y matemática aplicada?, ¿Cómo deben ser los cursos de la escuela secundaria para aquellos que no deseen ingresar a la universidad?, ¿Y cómo deben ser para los que si quieren ingresar? (Rico, 1992). El congreso del ICMI continúa realizándose cada tres años, ocupándose de discutir temas relacionados con la enseñanza de la matemática, constituyéndose en un referente importante de las reformas educativas y los cambios curriculares en matemática.

En los albores del siglo XIX, mientras el ICMI se ocupaba del tratamiento específico de los problemas didácticos, el pensamiento axiomático de Hilbert se imponía durante varias décadas como método para la formalización y edificación de la matemática, logrando expandirse al álgebra y la topología modernas. Las ideas de Hilbert cambian la base empírica sobre la cual se fundamenta la matemática por una base sustentada en el método axiomático. En la enseñanza de la matemática cada teoría matemática surge como una estructura lógica, como un sistema de objetos básicos, relaciones básicas y un conjunto de axiomas cuya validez se asume entre esos objetos y sus relaciones. Mientras que en Francia, Alemania, Estados Unidos y otros países de Europa se proponía una revisión de la forma como se enseñaba la matemática, teniendo en cuenta la discusión planteada en el Coloquio de Royamount de 1959 en Francia, las propuestas de la Escuela Bourbaki y los avances de la carrera espacial de la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas URSS, en Colombia la enseñanza de la matemática ni siquiera había sido influida por la reforma de Hilbert.

La tercera reforma significativa para la enseñanza de la matemática fue motivada por los trabajos realizados en el Grupo Bourbaki. El proyecto Bourbaki para la enseñanza de la matemática a nivel universitario, según Da Cunha (2006), comenzó en 1934 con la escritura de unas notas sobre análisis, pero a causa de la segunda guerra mundial interrumpió su trabajo publicando su primer texto completo *Théorie de ensembles* en 1957, año que coincide con el lanzamiento del Sputnik por la URSS, habiéndose publicado antes por fascículos en los inicios de los cincuenta. Bourbaki propone el concepto de estructura como base para la construcción de la matemática, concepto madurado lentamente a partir de Galois, Klein y Van Der Warden. La Escuela Bourbaki tuvo mucha influencia en Bélgica, George Papy, su esposa Fréderique y W Servais, organizan en 1958, el *Centro Belga de Pedagogía de la Matemática*, desde el cual se organiza un programa por temas en un orden apropiado para la enseñanza de la matemática a partir de la teoría de conjuntos, con el propósito de acabar con las diferentes vertientes y encauzarlas en un solo camino. La propuesta contiene en los primeros tres o cuatro años del bachillerato los temas Conjuntos, Relaciones, Funciones, Conjunto de los números naturales, La recta y el plano, Grupos, Anillo ordenado de enteros, La recta y el cuerpo de los números reales, El plano vectorial y geometría afín, Cálculo numérico, Polinomios con coeficientes reales, Geometría métrica euclidiana del plano y Estadística descriptiva. Para los dos últimos años se enseñaría El plano y el cuerpo de los números complejos, Algebra abstracta, Espacios vectoriales, Geometría del espacio afín, Geometría euclidiana del espacio, Espacio de probabilidad finita, Espacio métrico y topología, Funciones continuas, Cálculo diferencial, Cálculo integral y Probabilidad en una recta real.

## Las reformas en Colombia desde 1951 hasta el 2000

Para los años cincuenta, en Colombia no se conocían las reformas sobre enseñanza de la matemática en primaria y secundaria que se daban a nivel mundial. En la primaria se enseñaba aritmética elemental y nociones de geometría; en el bachillerato, la enseñanza se llevaba a cabo de acuerdo con el plan de estudios reglamentado con el decreto 27518 de enero 17 de 1951. Según el Artículo 1º del decreto, en el primer año se enseñaba aritmética con una intensidad de cinco horas semanales (números enteros); en el segundo año, aritmética con una intensidad de cinco horas semanales (números racionales como fracciones); en el tercer año álgebra con intensidad de cuatro horas semanales (expresiones algebraicas); en el cuarto año, álgebra con tres horas semanales (ecuaciones y polinomios); en el quinto geometría con tres horas semanales (geometría euclidiana); y en el sexto año no se enseñaba matemática, pero se dejaban cinco horas semanales para intensificación de materias, consulta en biblioteca, trabajo organizado, etc. La Aritmética, el Álgebra y la Geometría se enseñaban con base en la serie escrita por G. M. Bruño.

La enseñanza en las escuelas normales regulares o institutos de enseñanza pedagógica, instituciones educativas en donde se preparaban los docentes para la educación primaria estaba regida por el decreto 0192 de enero 30 de 1951. Según este decreto, la preparación del docente se llevaba a cabo en seis años, con una segmentación del último año en dos ciclos. En primer y segundo año se enseñaba aritmética con una intensidad semanal de cinco horas, en el tercer año se ensañaba álgebra con intensidad de cuatro horas semanales, en cuarto año geometría con cuatro horas semanales, en el quinto física con cuatro horas semanales y en el último año no se enseñaba ninguna materia del área de matemática. Los programas de curso se orientaban según los textos utilizados para la enseñanza, predominando el empleo de la serie de Bruño.

El decreto 27518 es derogado por el decreto 045 de enero 25 de 1962, emitido poco después de realizarse en Bogotá la *Primera Conferencia Interamericana de Educación matemática*, auspiciada por la *Comisión Internacional de Instrucción Matemática ICMI* del 4 al 9 de diciembre de 1961. De esta reunión surgió el *Comité Interamericano de Educación matemática* y la tarea de modernizar la enseñanza de la matemática en América Latina en la escuela secundaria, estableciendo a la vez un puente adecuado para propiciar continuidad con el estudio de la matemática en el nivel universitario. El principal propósito de la conferencia fue el de explorar los métodos de la enseñanza de la matemática en los niveles medio y universitario, de allí emanó el propósito de plantear cambios en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario en América. De acuerdo con las ponencias presentadas por los delegados e invitados a la conferencia, según Ruiz & Barrantes (1998), se propuso para los niveles primario y secundario lo siguiente:

1. Introducir desde los primeros cursos el lenguaje conjuntista. Enseñar a los alumnos el álgebra de conjuntos dando paralelamente el significado de las partículas lógicas “y”, “o”, para todo y existe, en relación con la gramática del idioma.
2. Dar desde temprano el concepto de función, función biunívoca, función inversa y grupo de transformación utilizando ejemplos adecuados dentro de la aritmética, el álgebra y la física.

3. Hacer que se comprendan las relaciones de equivalencia y de orden y estudiar las nociones de la topología.
4. Agrupar las propiedades aritméticas bajo las estructuras algebraicas de grupo, anillo, campo y espacio vectorial.
5. Introducir la construcción de los números reales en vez de estudiarlos bajo la geometría métrica.
6. Renunciar al estudio de la igualdad de triángulos en la geometría euclidiana y propiciar más bien la estructura vectorial del plano.
7. Cambiar las viejas aplicaciones de la matemática por otras nuevas aplicaciones que incluyan temas de la investigación de operaciones. Esto debe hacerse desde el bachillerato.

El decreto 045 de 1962 que se venía gestando antes de la Conferencia Interamericana de 1961, se regló atendiendo a las recomendaciones del Seminario sobre Educación Secundaria de Santiago de Chile 1954-1955, la Conferencia Regional de Punta del Este Uruguay de 1961 y el Primer Seminario Sobre Problemas del Bachillerato realizado en Tunja en 1961, auspiciado por Asociación Colombiana de Universidades. El decreto dividió la enseñanza media en dos ciclos: un primer ciclo básico para los primeros cuatro años y un segundo ciclo para los años quinto y sexto, en el cual se brindaba la oportunidad de intensificar el estudio en las áreas de matemática y física, biología y química o estudios sociales y humanidades. Las materias del área matemática para cada curso escolar se distribuían como lo muestra la tabla siguiente.

**Tabla 1: Asignación intensidad horaria física y matemáticas 1962.**

| Horas año | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Años / Asignaturas | I | II | III | IV | V | VI |
| Matemáticas | 150 | 120 | 150 | 150 | 90 | 60 |
| Física | | | | | 120 | 120 |
| Intensificaciones y actividades coprogramáticas | 270 | 240 | 210 | 210 | 360 | 330 |

A diferencia del decreto de 1951, en el decreto 045 contemplaba en el segundo ciclo el estudio de la trigonometría, la geometría analítica y nociones de cálculo. De acuerdo con el mismo decreto, para el área de matemáticas en el primer y segundo año se enseñaba aritmética y nociones de geometría, en el tercer y cuarto año álgebra y geometría, en el quinto año trigonometría y geometría analítica y en el sexto año nociones de análisis matemático. Los textos de matemática más usados durante la vigencia del decreto fueron la *Aritmética* y el *Álgebra* de Aurelio Baldor, el *Curso de Álgebra Superior* de Ignacio Fossi, el *Álgebra Práctica* de Carlos Mataix, la *Geometría* de Bruño, la *Trigonometría Rectilínea* de Agustín Anfossi, la *Geometría Analítica* de Charles Lehman, la *Geometría Analítica* de Anfossi, *Introducción al Cálculo Infinitesimal* de Viedma y el *Cálculo* de Hernando Bedoya entre otros. La programación de todas las asignaturas de matemática, de acuerdo con el decreto, estaba consignada en un manual publicado por la Editorial Bedout.

El programa de matemática para el primer año de bachillerato en la primera unidad propone los siguientes temas: Nociones sobre conjuntos. Clases de conjuntos. Conjunto unitario. Conjunto vacío. Conjuntos coordinables. Propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la coordinación de conjuntos. Concepto de número natural. Número cardinal. Fundamento de los sistemas de numeración. Numeración decimal. Ideas de otros sistemas de numeración. Números romanos.

La segunda unidad contiene los temas adición y sustracción en los naturales; leyes clausurativa, asociativa y conmutativa de la suma; leyes de uniformidad y monotonía; sustracción; polinomios aritméticos. Las unidades tercera cuarta y quinta tratan la multiplicación, la división como operación inversa de la multiplicación, la potenciación y la radicación. En la sexta unidad se hace un estudio introductorio de la teoría de números; la séptima y octava se ocupan de los números fraccionarios y la última presenta la geometría plana intuitiva. El contenido de las unidades coincide en gran parte con el contenido del la aritmética de Baldor, excepto en la primera unidad. La temática del segundo año corresponde a la parte restante del texto mencionado y se ocupa básicamente del sistema métrico decimal y su utilización en medidas de áreas, volúmenes, capacidad y masa. Al final incluye las unidades de tiempo y una unidad sobre geometría.

Después de ver los contenidos de los dos primeros años cabe preguntarse ¿Para qué estudiar conjuntos si los números naturales no se estudian como un conjunto? ¿Para qué hablar de leyes de la suma y la multiplicación si no se agrupan bajo una estructura algebraica? Con el decreto 045 se pretendió mostrar que se atendieron las recomendaciones de la Conferencia Interamericana y los seminarios de Chile y Tunja, pero lo que se hizo en realidad fue pegar un parche donde no había lugar para ello ya que se seguía enseñando matemática clásica.

Los contenidos del tercer y cuarto año son casi los mismos del Álgebra de Baldor. En el cuarto año el curso de álgebra comienza con el concepto de función al estilo antiguo como lo criticaba Hilbert; la trigonometría del quinto año se hacía mediante las relaciones trigonométricas en el triángulo divorciadas totalmente de las funciones trigonométricas; en la geometría analítica las cónicas se definían recurriendo a los lugares geométricos y el cálculo estuvo privado de los conjuntos de puntos.

Teniendo en cuenta lo señalado anteriormente se observa que la organización de los contenidos de matemática dada por el decreto 045 de 1962 es un conjunto de asignaturas dispersas sin conexión; aritmética en el primer año; aritmética y elementos de aritmética comercial en el segundo año; álgebra y geometría plana en tercero; álgebra y geometría del espacio en cuarto; trigonometría rectilínea y geometría analítica en quinto; y, análisis matemático en sexto. De igual manera, los contenidos de la matemática de primaria estaban distribuidos en asignaturas dispersas según el decreto 710 de 1962.

Meses después de la aparición del decreto 045 de 1962, se realizó en Budapest El *Simposio de Investigación sobre Matemática Educativa*. Esta reunión moldeó una reforma en la enseñanza de la matemática a nivel mundial introduciendo la matemática moderna en la educación primaria. En el desarrollo del Simposio se esgrimieron argumentos a favor y en contra de la matemática moderna, pero al final se impuso esta nueva forma de enseñar la matemática; así, Dieudonné que era matemático Bourbakista y participó en la Conferencia de Rouyamont, se interesó por la renovación de la enseñanza de la matemática en el nivel secundario, otros como Walusisnski (1962), no encuentra diferencia entre la matemática clásica y la matemática moderna; la matemática, afirma, ha sido moderna en diferentes épocas, fue moderna en los tiempos de aparición de los *Elementos* de Euclides, fue moderna con la invención del cálculo por Newton y Leibniz, con el surgimiento de las geometrías no euclidianas, con el nacimiento de la teoría de conjuntos, con la introducción del formalismo de Hilbert, esto por mostrar algunos ejemplos; así que, en el pasado la matemática fue moderna, hoy la matemática es moderna y en el futuro habrá otra matemática moderna. Señala también que en vez de decir *Matemática Moderna* debiera decirse *Matemática de las Estructuras*, porque son las estructuras los conceptos bajo los cuales se organiza el conocimiento matemático, la matemática moderna es una forma actual de organización, como lo será en el futuro la organización mediante *Categorías*, entonces no muy lejos estará el advenimiento de otra matemática moderna.

Las estructuras introducidas por la matemática moderna son las estructuras definidas por una relación de equivalencia, las estructuras definidas por una relación de orden, las estructuras algebraicas y las estructuras topológicas. Estas estructuras, de manera implícita, estaban presentes en la matemática antes de la matemática moderna, como también lo estaban la lógica, los conjuntos y el método axiomático, tópicos sin los cuales hubiera sido imposible la existencia de las estructuras.

Volviendo nuevamente al decreto 045 de 1962, se insiste que este no atendió las recomendaciones de la inclusión de la matemática moderna sino las recomendaciones del Seminario de Tunja, ya que Colombia envió como delegado a Arturo Ramírez Montufar a la conferencia de Budapest (Sangiorgi, 1962), y allí lo que presentó fue un informe con las conclusiones de Tunja. Las conclusiones propiciaron los cambios reflejados en el decreto y fueron las siguientes:

1. La matemática debe ser un tópico obligatorio en sexto grado, para no perder la continuidad en la enseñanza de la matemática con el paso a los estudios universitarios.
2. Debe intensificarse la enseñanza de la matemática realizando las siguientes acciones: a) Incrementar el número de horas de estudio dedicadas a la matemática en todos los cursos; b) Incluir en los niveles inferiores algunos tópicos que son exclusivos de la enseñanza universitaria; c) la secuencia de los temas debe corresponder al desarrollo del conocimiento matemático.
3. Integrar bajo el nombre de matemáticas las denominaciones dadas a los cursos como aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.
4. La teoría de números debe ser sintética, analítica y axiomática. La enseñanza en la escuela secundaria debe establecer una clara diferencia en las distintas etapas en las cuales se construye el concepto de número, teniendo en cuenta el desarrollo psicológico de los estudiantes. Debe abstraerse el concepto de

número como propiedades o relaciones dadas en la etapa sintética, usando conceptos equivalentes en la etapa analítica.

La reforma de la educación secundaria implicó una reforma en la educación primaria, que se materializó con el decreto 1710 de julio 25 de 1963. Uno de los propósitos principales de la reforma fue terminar con la diferencia entre escuelas primarias rurales y escuelas primarias urbanas, estableciéndose un plan único de estudios con la posibilidad de adaptar los programas de las asignaturas a las necesidades del medio. El plan estableció seis horas semanales de matemática en los grados primero y segundo, y cinco horas semanales en tercero, cuarto y quinto. En total se daban 33 horas semanales para todas las asignaturas.

La asignatura de matemáticas, nombre tomado de la reforma anterior para el bachillerato, comprende contenidos de aritmética y geometría. La distribución de los contenidos para cada curso fue realizada por el Ministerio de Educación Nacional, y se publicó en unos manuales que contenían también los programas de las demás asignaturas. En estos manuales, en lo relacionado con la matemática, no se vislumbra la enseñanza de los conjuntos, pues los contenidos obedecen a números naturales, números racionales vistos como fraccionarios y decimales positivos, el número pi (π) y conceptos elementales de geometría incluyendo áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas . Los conjuntos en la enseñanza primaria aparecen en los inicios de los años setenta con la llegada de la Misión Francesa que trajo los matemáticos Puteau y Parot auspiciada por el Instituto Colombiano de Pedagogía ICOLPE, y la presencia de la Misión Alemana 1971-1975 que asesoraría al Ministerio de Educación en el diseño de programas para la enseñanza primaria.

El ICOLPE se creó mediante el decreto 3153 de 1968, anexo a la Universidad Pedagógica Nacional, como un organismo encargado de la investigación educativa, la asesoría pedagógica y la producción de materiales educativos; además, prestaba asesoría al Ministerio de Educación Nacional MEN, a las secretarías de educación departamentales y municipales, y a los planteles oficiales y privados de enseñanza primaria y media. Adicionalmente, el ICOLPE se encargó de la elaboración de una propuesta de política oficial sobre textos escolares (Báez, 2007) y se integraron a éste el Instituto de Ciencias, el Instituto Lingüístico Colombo-Americano y el Centro Lingüístico Colombo-Francés. A partir del ICOLPE se habla de currículo en Colombia; y en el campo de la pedagogía de la matemática, se investiga sobre el desarrollo del razonamiento lógico y numérico en el escolar colombiano. La investigación fue realizada por el equipo de psicólogos asesores, el equipo de matemática del ICOLPE y el Departamento de Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

El trabajo del ICOLPE en los setenta fue fundamental para la enseñanza de la matemática por tres razones. En primer lugar la misión Francesa en noviembre y diciembre de 1970 dictó en el Colegio Refous de Bogotá el primer curso de pedagogía de la matemática moderna, curso en donde se capacita un buen número de profesores de matemática del país y se introducen los textos de Papy; en segundo lugar, la Misión Alemana escribe los primeros textos para enseñanza primaria incluyendo los conceptos elementales de lógica y conjuntos; y en tercer lugar, la asesoría a los Centros Experimentales Pilotos de las secretarías departamentales de educación permitió la implementación de la matemática moderna posterior a las reformas dadas por los decretos 080 de 1974 y 088 de 1976.

El decreto 080 de 1974 deroga el decreto 045 de 1962 y reestructura el plan de estudios del bachillerato, con el objeto de ofrecer alternativas de formación en los campos científico, técnico y humanístico mediante la llamada diversificación del bachillerato. Es así como los primeros cuatro años se siguen connsiderando como ciclo básico y los dos últimos años como ciclo vocacional ofreciendo las modalidades de bachillerato académico, normalista, industrial, comercial, agropecuario y en promoción social. Durante el ciclo básico los programas de matemática continúan sin alteración en su contenido con una intensidad semanal de cinco horas; en el ciclo diversificado es de tres horas semanales. En total se tienen 26 horas de matemática para los seis cursos con la posibilidad de intensificar teniendo a disposición cinco horas semanales en cada curso, posibilidad que puede ser nula cuando la modalidad del bachillerato no es la de académico; pero aún así como mínimo se dispone de 962 horas de matemática frente a 780 que se tenían con el decreto anterior. El plan fundamental mínimo de instrucción con la distribución de horas semanales por asignatura se muestra en la siguiente tabla.

**Tabla 2: asignación intensidad horaria física y matemáticas 1974.**

| Cursos / Asignaturas | I | II | III | IV | V | VI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Física | | | | | 3 | 3 |
| Matemáticas | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 |
| Intensificaciones | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |

El ministerio de Educación Nacional, teniendo en cuenta los progresos educativos en el orden mundial, y que, el sistema educativo debe adecuarse a los avances del conocimiento del niño en todos sus aspectos, reestructura el sistema educativo mediante el decreto- ley 088 de 1976, estableciendo dos tipos de educación: educación formal y educación no formal. La educación formal, cuyos planes son establecidos por el gobierno, comprende los niveles progresivos de pre-escolar, educación básica (primaria y primeros cuatro años de secundaria), educación media e intermedia (dos últimos años de la secundaria con diversificación en ciencias, tecnología y arte) y educación superior. La educación no formal solo requiere autorización del gobierno y prepara personas en diferentes oficios con planes ad hoc.

Reorganizado el sistema educativo, y ante las inconsistencias presentadas en los decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974 por la falta de continuidad entre los planes de estudio de la primaria y el bachillerato, se emite el decreto 1419 de 1978, presentando una renovación curricular a través de la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos. Según la entidad mencionada (MEN, 1979), los programas anteriores a este decreto presentaban fallas en su diseño curricular porque los contenidos se reducían a un listado de temas, algunas veces irrelevantes; las actividades propiciaban el aprendizaje memorístico, no dando “mayor margen para los aspectos socio afectivos o para los procedimientos metodológicos que pueden favorecer la adquisición de habilidades" (MEN, 1979, p. 1); finalmente, limitan la actividad del estudiante.

El diseño curricular propuesto por el decreto 1419 de 1978 contempla para el área de matemática en la enseñanza primaria, la división del contenido en siete temas centrales para cada curso: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, y, relaciones y operaciones. A partir de este decreto se tienen oficialmente contenidos específicos de lógica y teoría de conjuntos para la primaria; no obstante, para el bachillerato básico y los dos años de diversificación, por medio de la resolución 277 de 1975, el ministerio autorizó la enseñanza de la matemática moderna, con programas que habían sido elaborados desde 1974. El contenido de estos programas corresponde a una serie de textos escritos para tal fin desde ese año y publicados entre 1975 y 1976 por editoriales comerciales, entre ellos la serie de *Matemática Moderna Estructurada* de Guarín, Wills, Gómez y Londoño publicada por Editorial Norma en seis volúmenes, y la serie *Matemática Contemporánea*.

Los programas curriculares con base en la matemática moderna, propuesta por los decretos 088 de 1976 y 1419 de 1978, tuvieron varios inconvenientes. Un número considerable de profesores responsables de la enseñanza de la matemática no estaban preparados para ello porque no eran licenciados en matemática, o habían sido formados en los planes de las licenciaturas anteriores a 1964, donde la formación se basaba en la matemática clásica con ausencia de la lógica, los conjuntos, el álgebra moderna y la topología. Por otra parte, la reforma inició inmediatamente en todos los cursos tanto de primaria como de bachillerato, sin tener en cuenta que los estudiantes carecían de los conceptos previos necesarios de un curso para otro. Además de lo anterior, los contenidos se desarrollaban entre lo moderno y lo clásico, desconectando la secuencia de los temas porque los programas aún contenían rastros de los que le antecedieron. Finalmente, los padres de los estudiantes no conocían la matemática moderna, hecho que les impedía poder ayudar a sus hijos.

Estas razones forzaron a replantear nuevamente el plan de estudios para el preescolar, la básica y la media vocacional. En aras de resolver el problema de la reforma amparada en la matemática moderna, el gobierno emite el decreto 1002 de abril 24 de 1984, con el objeto de garantizar la secuencia y la coherencia de la estructura educativa. En este decreto se modifica el número de horas dedicadas al estudio en cada nivel educativo como sigue:

**Tabla 3: Asignación intensidad horaria niveles educativos 1984.**

| Nivel educativo | Horas semanales | Horas anuales |
|---|---|---|
| Preescolar | 20 | 800 |
| Primaria | 25 | 1000 |
| Básica secundaria | 30 | 1200 |
| Media vocacional | 30 | 1200 |

El tiempo dedicado a cada área o asignatura era detrminado mediante resolución del Ministerio de Educación Nacional. Las áreas comunes para primaria y secundaria son Ciencias naturales y salud; Ciencias sociales; Educación estética; Educación física, recreación y deportes, Educación religiosa y moral; Español y literatura y Matemáticas. Además de las áreas mencionadas, en la secundaria se incluyen las áreas de Educación en tecnología e Idioma extranjero; en la media, se incluye filosofía.

El decreto 1002 de 1984, con respecto al decreto 080 de 1974, reduce la intensidad semanal en primaria y secundaria, hecho que ocasionó un menoscabo de la enseñanza, porque al reducirse el número de horas, alguna de las áreas debió ser sacrificada; además, dificultó la posibilidad de las intensificaciones. Con este decreto, la enseñanza de la matemática moderna se fue extinguiendo, orientándose primero hacia la enseñanza de la matemática bajo el enfoque de sistemas, y luego como alternativa una segunda dirección hacia el movimiento de *lo básico*, donde se retomaba la matemática tradicional insertando la teoría de conjuntos como un tema suntuoso y no fundamental, reduciendo la lógica se redujo al mínimo con el predominio de las tablas de verdad.

Durante la vigencia del decreto 1002 de 1984, Colombia redacta la nueva Carta Constitucional de 1991. Los cambios introducidos por la nueva constitución vuelven obsoletas las disposiciones en materia educativa, de tal manera que obligó al gobierno nacional a redactar una nueva ley de educación. Se expide entonces la ley 115 de 1994 o *Ley General de la Educación*, que establece en los artículos 77, 78 y 79 la autonomía escolar, la regulación del currículo mediante lineamientos generales para cada área de estudio diseñados por el Ministerio de Educación Nacional, y la elaboración del plan de estudios de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional, estructurando áreas de estudio obligatorias[1] y optativas.

El gobierno nacional, atendiendo al artículo 78 de la Ley General de la Educación elabora los lineamientos curriculares para las áreas obligatorias, entre ellas la matemática. Los lineamientos del área de matemática se publicaron en 1998 por el grupo de apoyo del Ministerio de Educación Nacional conformado por personalidades, instituciones universitarias y grupos de investigación en el área de la educación matemática. En su redacción se tuvieron en cuenta aspectos relacionados con la matemática y su enseñanza y aspectos legales.

En lo que tiene que ver con la matemática y su enseñanza, se tomaron en cuenta las tendencias internacionales sobre enseñanza de la matemática discutidas en el *Primer Estudio Internacional de Matemáticas* de 1964, el *Segundo Estudio* realizado en los años 1964 y 1967, y el *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias* (*Third International Mathematics and Science Study)* realizado en 1995. Los aspectos legales de los lineamientos están relacionados con la Ley General de la Educación (1994), en los artículos 20, 21 y 22 se propone como objetivos de la educación básica:

- *Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana.*

[1] Las áreas obligatorias son Ciencias Naturales y Educación Ambiental; Ciencias Sociales, Historia, Geografía, Constitución Política y Democracia; Educación Artística y Cultural; Educación Ética y en Valores Humanos; Educación Física, Recreación y deportes; Educación Religiosa; Humanidades, Lengua Castellana e Idiomas Extranjeros; Matemáticas; Tecnología e Informática.

- *El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones.*
- *El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos. Lógicos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y de la vida humana.*

Considerando los aspectos anteriores, los Lineamientos Curriculares proponen un currículo de matemática con una estructura apoyada en los siguientes conocimientos básicos:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos
- Pensamiento métrico y sistema de medidas
- Pensamiento aleatorio y sistema de datos
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Los conocimientos básicos propuestos en los lineamientos se aplicaron en cada uno de los cursos de matemática de la básica y la media, atendiendo el desarrollo psicológico del individuo y la construcción del conocimiento matemático. Este conocimiento aún se presenta sobre la base de los programas establecidos según el decreto 045 de 1962 y la resolución 277 de 1965, como una amalgama, donde se sigue considerando el estudio de la lógica y la teoría de conjuntos al inicio de cada programa, pero no se observa continuidad entre esta temática y la que sigue, lejos de las estructuras algebraicas. Es pertinente señalar que los lineamientos curriculares están vigentes y no se vislumbra por ahora ninguna posibilidad de reforma en la enseñanza de la matemática en los niveles de básica y media.

## Lógica y conjuntos en el currículo de primaria y secundaria

Si echamos una mirada hacia atrás, con certeza puede afirmarse que la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos en el currículo de matemática de primaria y secundaria antes de 1961 estuvieron ausentes. Este hecho es verificable observando las diferentes reformas educativas instituidas hasta llegar a los decretos 045 de 1962 y 1710 de 1963, donde por primera vez aparece el tema de conjuntos en el curso inicial del bachillerato, pero la lógica aún no aparecía. Según Vasco (1975), con la creación de los Institutos Nacionales de Enseñanza Media que se dedicarían a la enseñanza diversificada a nivel de bachillerato INEM en 1969, la enseñanza de la matemática en estos institutos se presentó en forma unificada, recibiendo la influencia de la Segunda Conferencia Interamericana de Educación Matemática de Lima de 1966, introduciéndose en el ciclo básico y en el ciclo diversificado en la modalidad de Ciencias y Matemáticas los conceptos de estructura, operaciones, sistemas de numeración, conjuntos y deducciones lógicas. Para la enseñanza de la matemática en los INEM se usaron guías de trabajo elaboradas por los profesores, debido a la carencia de libros que presentaran el material a estudiar con la metodología requerida.

En la enseñanza primaria la aparición de los conjuntos en el currículo se debe a la misión alemana. En 1975 se publicó la serie de guías para el maestro de enseñanza primaria por el grupo ICOLPE-CENDIP, introduciéndose en todas ellas en la primera unidad los conceptos de conjuntos; subconjuntos; operaciones con conjuntos; partes de un conjunto; conjuntos finitos e infinitos; cardinalidad; relaciones de orden y de equivalencia; propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa y cancelativa para la suma y la multiplicación e infinitud de los números naturales y racionales.

Las modificaciones al programa oficial para la primaria contemplado en el decreto 1710 por la misión alemana se hicieron teniendo en cuenta las reformas que a nivel mundial se daban en la enseñanza de la matemática, así quedo plasmado en la introducción de la guía para quinto grado (MEN, 1975):

> *Las Conferencias que sobre Matemática han celebrado los países de América, han llagado a la conclusión de que es necesaria la unificación de los programas, previa la actualización de los mismos. Para ello será indispensable aplicar los nuevos enfoques y los nuevos conceptos tales como: conjuntos, relaciones, sistemas de numeración en cualquier base, estructuras algebraicas (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial), un tratamiento de la geometría como interrelacionada con la aritmética y nociones básicas sobre Estadística, computadores, etc.*(p. 10)

Después de la aparición oficial de los conjuntos en la enseñanza primaria en 1975, veamos que ocurrió con la lógica. La creación de los Centros Experimentales Piloto, cuerpos en donde se daba capacitación a los profesores de primaria y secundaria, fue el medio utilizado por el estado para la difusión de las nuevas ideas en matemática. La reforma curricular dada por el decreto 1419 de 1978 permitió la enseñanza de la lógica desde el segundo año de primaria; es así como aparece en este grado el significado de las expresiones *y*, *o*, *todos*, *algunos* y *ninguno*. En el tercer año se analizan estas expresiones dentro del lenguaje ordinario; en el cuarto grado se introduce la noción de proposición, el valor de verdad de las proposiciones y la negación de proposiciones y expresiones cuantificadas; en el quinto grado se dan los nombres a las conectivas. Los contenidos de la lógica en los programas curriculares de matemática primaria se mantienen hasta finales de la década de los ochenta.

Haciendo un balance de la década de los setenta sobre la enseñanza de la lógica y la teoría de conjuntos puede decirse que en este lapso se propició un cambio bastante brusco en el currículo de matemáticas de la primaria y la secundaria. La nueva matemática introdujo con la lógica el cálculo proposicional y el cálculo de predicados, aunque muy someramente; con la teoría de conjuntos asentó operaciones y propiedades, el cálculo de relaciones, las estructuras algebraicas y la construcción de los sistemas numéricos; en pocas palabras, se inició la enseñanza de los fundamentos de la matemática.

Respecto a la enseñanza de la lógica y los conjuntos como fundamento de la matemática en el nivel secundario de la educación colombiana Takahashi (1976) afirma que

> *El método adecuado para comprender un cuerpo de conocimientos o teoría y adquirir la capacidad de usarla y contribuir a su desarrollo consiste*

> *en reducirla a términos más simple desde el punto de vista lógico. El éxito de los intentos de reducción de las matemáticas a una fuente inicia con unas pocas nociones y principios fundamentales, fuente que se halló en la teoría de conjuntos abstractos, y los avances logrados con los esfuerzos para reducir la teoría de conjuntos, y por tanto la matemática todo, a la lógica, se deben reflejar en la enseñanza. Se concluye entonces que el estudio de la matemática debe comenzar con la teoría de conjuntos, precedida a su vez por la lógica.* (p. 6)

El éxito alcanzado por este nuevo enfoque sobre la enseñanza de la matemática en la década de los setenta se vio perturbado por distintos factores. La falta de preparación de los profesores de matemática obligó a estos a continuar con la enseñanza clásica de una matemática parcelada (Gómez, 2006); el cambio se dio en las ciudades principales, ya que en las ciudades intermedias y en el sector rural el cambio se dio poco o simplemente no se dio. La nueva matemática también sirvió para que se cometieran excesos en la enseñanza, donde aquellos profesores preparados para ello utilizaban la matemática moderna para hacer gala de sus conocimientos; el exceso de rigor ante estudiantes poco o mal preparados para este evento, condujo a situaciones patológicas.

En la década de los ochenta introduce el concepto de sistema como elemento clave del currículo de matemática. La llamada *fiebre de la teoría de conjuntos* (Ministerio de Educación Nacional (1998), había pasado a un segundo plano, porque se criticaba que en los primeros años de la enseñanza primaria la idea que tiene el niño de conjunto es de pluralidad, así que los conceptos de conjunto vacío, conjunto unitario e intersección de conjuntos disyuntos se constituían en obstáculos epistemológicos para el aprendizaje de ese concepto. Si se analiza la idea de conjunto como agregado presentada por Weierstrass, esta crítica no está bien fundamentada; sin embargo, la idea de sistema recibió un número importante de adeptos y se impuso de modo oficial.

El hilo conductor del concepto de sistema como concepto clave de la matemática para la enseñanza primaria y secundaria fue planteado por Vasco (1980). Según este autor, lo que el niño conoce son sistemas como conjuntos de objetos con relaciones y operaciones, un conjunto por sí solo no significa mucho, si este conjunto se dota de relaciones y operaciones, entonces tendrá sentido para el aprendiz. Las relaciones permiten ver los objetos dentro de un contexto, se representan con un símbolo llamado operador que expresa algo predominante, contemplativo y teórico; las operaciones permiten manipular esos objetos y se representan con un símbolo llamado operador que expresa algo predominante, activo y práctica; de esta manera, los sistemas involucran teoría y práctica, correspondiendo las relaciones a la teoría y las operaciones a la práctica.

Expuestos los elementos o partes constitutivas de un sistema, este queda determinado por tres conjuntos: un conjunto A de objetos, un conjunto Θ de operaciones y un conjunto R de relaciones; así que, un sistema e representa con la terna ordenada (A, Θ, R). Definido ya un sistema, ¿Qué ventajas trae la introducción de los sistemas en la enseñanza de la matemática? Vasco (1980), justifica la importancia de los sistemas con las siguientes reglas:

1. *El estudiante se encuentra siempre con sistemas.*
2. *Sobre un mismo conjunto de objetos pueden definirse muchos sistemas.*
3. *Un conjunto es un sistema al que se le han vaciado activamente las operaciones y las relaciones.*
4. *Lo que en un sistema es operación, o relación, en otros sistemas puede ser objeto.*
5. *Una operación nunca puede ser una relación.*
6. *Una relación nunca puede ser una operación, a menos que se considere el lenguaje acerca de los objetos del sistema.*
7. *Lo más importante en el conocimiento de un sistema es su manejo práctico.*
8. *A través del manejo práctico se descubren y dominan las relaciones del sistema.*
9. *Los sistemas matemáticos son muy simplificados, los sistemas reales son más complejos.*

La enseñanza de la matemática basada en el concepto de sistema presentó tempranamente dificultades. Para alguien que comenzaba el estudio de la matemática era complicado percibir varias relaciones y operaciones simultáneamente en un conjunto. La teoría de sistemas utiliza preferiblemente el método deductivo, que va en dirección opuesta a la manera como el niño aprende; aún mas, para los alumnos del bachillerato y aún de la universidad, el enfoque de sistemas fue algo que llegó tardío cuando existía todo un andamiaje de conceptos y temáticas aprendidas no muy conexamente (Gómez, 2006).

El comienzo de la década de los ochenta fue propicio para revisar el trabajo realizado por los docentes de matemática, porque en ese momento se realizaron encuentros a nivel nacional y regional para discutir el desarrollo de la matemática. En el Congreso Nacional de Matemáticas celebrado en agosto de 1980 (Sociedad Colombiana de Matemáticas, 1980), se hizo un balance del pasado y se formularon políticas a seguir para mejorar la enseñanza de la matemática. El balance englobó la educación básica y media, la licenciatura en educación con especialidad en el área de matemática y física y la carrera de matemática.

Respecto a la educación básica y media, el Congreso consideró la inconveniencia de implantar los programas de matemática por parte del Ministerio de Educación Nacional sin consultar la comunidad matemática nacional. Se recomendó, que antes de continuar con la reforma basada en el enfoque de sistemas debía darse una discusión amplia dentro de las facultades de educación, como también garantizar la existencia de libros de matemática con buena calidad que garantizaran la implementación de esta o cualquier otra reforma.

Durante la realización del Congreso se discutieron los avances logrados con las cuatro primeras Conferencias Interamericanas de Educación matemática, la V Conferencia Internacional sobre Educación Matemática de Campinas (Brasil), y las propuestas del National Council of Teachers of Mathematics NTCM. Se propuso motivar el estudio de la matemática entre los jóvenes mediante la realización de las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas, la conformación de Clubes de matemáticas y la edición de una serie de monografías con temas de matemáticas accesibles a los estudiantes de bachillerato. Se propuso también estudiar la problemática en la transición del bachillerato a la universidad, ya que se evidenciaba la deficiente preparación de los bachilleres hasta el punto de que en el primer semestre universitario se incluía en el pensum un curso de matemáticas para remediar la situación (Sociedad Colombiana de Matemáticas, 1980).

Para las licenciaturas en Educación con especialidad en Matemática y Física y para la Carrera de Matemáticas se estudió el proyecto de programa mínimo propuesto por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES en ambas modalidades, señalándose la necesidad de discutir más a fondo la cuestión en seminarios que se establecerían para tal fin. Se recomendó también estudiar la posibilidad de orientar la Carrera de Matemáticas hacia la Matemática Aplicada.

Después del Congreso de Matemáticas de 1980, el ICFES organizó entre el 30 de noviembre y el 4 de diciembre de 1981 el Primer Simposio Nacional sobre Enseñanza de la Ciencia (PSNEC), con el objeto de estudiar las características de la enseñanza de las ciencias en todos los niveles, principalmente en el nivel de Educación Básica; pero más que eso, en el área de matemática el propósito fue reafirmar el enfoque de sistemas como enfoque unificador en la enseñanza de la matemática, presentando los programas para los primeros cinco grados de enseñanza básica. La justificación del enfoque de sistemas, según la Sociedad Colombiana de Matemáticas (1981), se expresó con el siguiente argumento. “En la matemática como en todas las ciencias ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituido escuelas matemáticas.” (p. 229). Más adelante afirma:

> *En círculos dedicados a la docencia y a la investigación matemática en Colombia son ya bien conocidos estudios como Relatores y Operadores; Lógica, Conjuntos y Estructuras; Relaciones, Operaciones y Sistemas; El concepto de Sistema como clave del Currículo de Matemática, en los cuales el asesor del MEN para la elaboración de los programas de Matemática para el nivel básico, Carlos E Vasco, desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y los específicos al caso particular de los sistemas Matemáticos.*(p. 230)

La enseñanza de la matemática en la primaria con el enfoque de sistemas se llevó a cabo utilizando una metodología basada en la psicología evolutiva de Piaget, según la cual para cada etapa del desarrollo psicológico se pueden enseñar ciertos conceptos matemáticos presentándose la abstracción alrededor de los trece o catorce años, edad apropiada para enseñar las estructuras algebraicas (Vasco, 1980). Los programas de los cinco grados fueron redactados con sus objetivos, sugerencias metodológicas, ejemplos para los temas propuestos e indicadores de evaluación; es decir, los programas constituían una guía y un elemento de capacitación para los docentes. Los textos se distribuyeron a través de los Centros Experimentales Pilotos; así por ejemplo, el Centro de Cartagena se encargaba de hacer llegar el material a los docentes de Bolívar.

La enseñanza de la matemática con el enfoque de sistema comenzó experimentalmente en el Distrito Especial de Bogotá, mientras que en el Caribe Colombiano se implementó después de 1981 en colegios de las ciudades capitales, ya que la reforma no llegó a muchas de las poblaciones apartadas de las capitales; aún mas, la reforma no llegó al sector rural del Caribe donde los profesores de primaria y bachillerato escasamente tenían el título de Maestro concedido por las Escuelas Normales que preparaban los docentes de la primaria.

Muchas fueron las críticas que recibió el enfoque de sistemas a partir del Simposio (PSNEC) de 1981. La primera crítica se refiere a que como constante general, las reformas se dan sin contar con docentes capacitados ni textos para los estudiantes, lo cual hace muy difícil la puesta en ejecución. Respecto al concepto de sistema, este existe en diversos campos, por lo tanto debió explicarse la diferencia entre los sistemas en general y los sistemas dentro de la matemática; además, éste es un concepto abstracto, y si la abstracción llega alrededor de los trece o catorce años, no es conveniente introducir un concepto que el niño no es capaz de abstraer.

En lo relacionado con la enseñanza de la lógica en primaria, el objetivo fue introducir el estudio de esta a través del lenguaje, lo que se hizo en forma fraccionada, pues primero se introdujeron la disyunción, la conjunción y los cuantificadores en los tres primeros años, terminando los dos últimos grados con proposiciones en general y la implicación simple. De esta propuesta es posible deducir varias afirmaciones. La introducción de la lógica no implicó que el alumno razonara más tempranamente en forma correcta; la intención de dar al lenguaje una estructura de sistema no consiguió su cometido porque los lenguajes de por si son una estructura compleja entendida en niveles superiores con el estudio de la semántica, la sintaxis y la pragmática, teorías poco comprensibles para un niño de primaria; además, la aparición de implicaciones simples pretendían la construcción de pequeñas inferencias organizando a la vez el lenguaje del niño, hecho que se da por la naturaleza del desarrollo mental sin necesidad de recurrir a un sistema lógico (Gómez, 2010).

Mirando ahora la teoría de conjuntos, su propósito en la reforma fue dar un soporte al concepto de sistema, permitiendo la introducción del sistema de los números naturales como primer sistema fundamental dentro de la matemática. Este propósito se diluye a lo largo de los cinco años en los cuales se dan operaciones con conjuntos hasta llegar a la definición de conjunto abstrayendo finalmente dicho concepto. Si lo que se buscó fue fundamentar la matemática desde la primaria, se cometió un error porque la mente del niño no está preparada para ello. En este sentido afirma Thom (1981) que

> *Es muy común el error de creer que los fundamentos de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma y que deben ser el punto de partida para su estudio. La realidad no es así: la fundamentación suele ser la parte más difícil de una ciencia y, en general, ha sido siempre hecha por especialistas de larga experiencia y no ha tomado forma hasta etapas muy avanzadas de la teoría. Para poder descender el estudio de los fundamentos a los primeros niveles de enseñanza hace falta adaptar los mismos a la capacidad del aprendizaje juvenil, adaptación siempre difícil…* (p. 301)

Ante las numerosas críticas hechas a la reforma en el seno del Simposio (PSNEC), se recomendó suspender temporalmente la implementación de los nuevos programas hasta cuando se realizara un análisis profundo de estos, dando así tiempo para la capacitación del magisterio mediante un plan nacional liderado por las universidades colombianas y contando con la asesoría de grupos de investigación en la enseñanza de la matemática. Mientras la reforma se suspendía en el Distrito Especial de Bogotá, en las escuelas del Caribe Colombiano comenzaba su implementación, la cual se llevó a cabo parcialmente hasta 1986 bajo la orientación de los Centros Experimentales Pilotos. Se afirma que la implementación fue parcial porque no se ejecutó en todos los colegios, ya que los profesores que trabajaban en municipios distantes de las capitales departamentales no recibieron capacitación en los centros pilotos y continuaron la enseñanza de la matemática sin contenidos de lógica y con las nociones esenciales de teoría de conjuntos, descontextualizada de la teoría matemática en cada grado (Gómez, 2006).

La situación de la enseñanza de la lógica y los conjuntos en el bachillerato del Caribe Colombiano fue similar en todas las regiones del país. Siendo precisos, la enseñanza de la lógica y los conjuntos en el bachillerato se dio a partir de la resolución 277 de 1975, que implementó la enseñanza de la matemática moderna en todas las modalidades del bachillerato establecidas en el decreto 080 de 1974. La difusión de la matemática moderna mediante la serie *Matemática Moderna Estructurada* se realizó a nivel nacional, por lo tanto el Caribe Colombiano no fue la excepción.

Tal como sucedió con los textos diseñados para la enseñanza de la lógica y los conjuntos en los programas de matemática de la primaria, en el bachillerato esta serie no se utilizó en todos los planteles educativos porque no hubo una preparación adecuada de los docentes; además, la introducción repentina de esta temática creó traumatismos porque los textos comenzaron a utilizarse en los seis cursos y no se implementó gradualmente; así que, los contenidos de lógica y conjuntos parecían repetirse en todos los cursos.

La serie *Matemática Moderna Estructurada* y otras que aparecieron por esos años, tenían una característica en común: la presentación de la matemática moderna a partir de los conjuntos, la lógica y las estructuras. El primer curso de matemática del bachillerato comenzaba con conjuntos y no con la lógica, presentándose una ruptura con los contenidos de primaria ya que estos incluían expresiones del lenguaje con cuantificadores y proposiciones con las conectivas negación, disyunción y conjunción, mientras que la lógica aparecía en el tercer curso. Los sistemas numéricos surgen en el curso tercero y no en el primero donde debía aprovecharse el Sistema de los números naturales para su inclusión; la estructura de grupo aflora en el tercer curso y no en el segundo donde se trabajan los números racionales; además de esto, algunos temas se repiten en casi todos los cursos. La siguiente tabla muestra la frecuencia de los temas relacionados con lógica, conjuntos y estructuras en cada uno de los cursos.

**Tabla 4: Temas lógica y conjuntos en la serie Matemática Moderna Estructurada**

| CURSOS / TEMAS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Noción de conjunto | x | | x | x | | |
| Operaciones con conjuntos | x | | x | x | | x |
| Coordinabilidad | x | | | | | |
| Cardinal de un conjunto | x | | | x | | x |
| Producto cartesiano | x | x | x | | | x |
| Relación de equivalencia | x | x | | | | |
| Clase de equivalencia | x | x | x | | | |
| Relación de orden | x | x | x | | | |
| Partición de un conjunto | x | | x | x | | |
| Funciones: Funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva | x | x | x | x | x | x |
| Composición de funciones | | | x | | | |
| Álgebra de funciones | | | | | x | x |
| Relaciones binarias | | | x | | | x |
| Sistema matemático y sistema numérico | | | x | | | |
| Proposiciones, conectivas y tablas de verdad | | | x | | | |
| Implicación y equivalencia lógica | | | x | | | x |
| Funciones proposicionales | | | x | | | |
| Cuantificadores | | | x | | | |
| Métodos de demostración | | | | x | | x |
| Estructura de grupo | | | x | | | |
| Estructura de anillo y campo | | | | x | | |
| Noción de espacio vectorial | | | | | x | |

La introducción de la matemática moderna en el bachillerato no modificó sustancialmente la estructura de los programas dadas por los decretos 045 de 1962 y 080 de 1974. En los dos primeros cursos el contenido dominante fue la aritmética y la geometría; en los cursos tercero y cuarto, algebra y geometría; en quinto, trigonometría y geometría analítica; y en sexto, cálculo o análisis matemático.

Los inconvenientes de la matemática moderna en el bachillerato se debieron a la falta de preparación de los profesores, la dificultad de asimilación de los estudiantes de esta nueva forma de presentar la matemática y un currículo de matemática en primaria que no presentó avances significativos en el aprendizaje de esta matemática. Estos inconvenientes propiciaron un cambio curricular que en el interior del país se dio en los inicios de la década de los ochenta y en el Caribe Colombiano a mediados de la misma década (Gómez, 2010).

Mas o menos a partir de 1985, los nuevos programas del bachillerato siguieron la tendencia del movimiento volver a lo básico, dándose prioridad a la enseñanza instrumental de la matemática y al aprendizaje mediante la solución de problemas. No obstante, algo de la matemática moderna aparecía en los nuevos programas, la enseñanza de las estructuras desapareció pero seguían los contenidos de lógica y teoría de conjuntos, los cuales se daban por lo general al principio de los cursos como un conocimiento de tipo cultural porque realmente no estaban acoplados a los demás temas; si acaso, se mencionaban conjuntos de puntos o conjuntos numéricos, pero lo poco de lógica que se incluía conducía únicamente a definir las operaciones entre conjuntos y nada más.

Corroborando lo dicho, una exploración de los programas basada en las series de textos de mayor circulación, *Matemática Progresiva* y *Matemáticas en Acción*, las cuales determinaron los contenidos del currículo, imponiéndose sobre el currículo oficial para la enseñanza de la matemática en el bachillerato, entre mediados de los ochenta y finales de los noventa, mostró lo siguiente: En sexto grado la primera unidad comprendía los temas razonamiento y conjuntos, proposiciones y sus negaciones, proposiciones abiertas y cerradas, cuantificadores, conjuntos, notación y representación, disyunción y unión entre conjuntos, conjunción e intersección de conjuntos, diferencia y diferencia simétrica; en séptimo grado la primera unidad estudiaba lógica y conjuntos, las proposiciones, de los conjuntos a la intersección, disyunción y unión, complemento y negación, diferencia de conjuntos, diferencia simétrica y cuantificadores; en octavo grado la unidad ocho incluía lógica y conjuntos, lógica proposicional, tablas de verdad para las proposiciones compuestas, método directo de demostración, método indirecto de demostración; en el noveno grado se retoman nuevamente las tablas de verdad y los métodos de demostración ; en los grados diez y once no hay contenidos de lógica ni conjuntos.

A mediados de los noventa, la ley 115 de 1994 reorganiza la educación en Colombia y con ella se da prioridad a la enseñanza de la matemática a partir de los lineamientos curriculares de 1998. Según los lineamientos del MEN (1998), para la enseñanza de la matemática en la educación básica y media, los conocimientos matemáticos se organizan en los siguientes pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistema de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Parcelada la matemática de acuerdo con estos pensamientos y en relación con los propósitos de este trabajo surge el interrogante, ¿En qué pensamiento quedan la lógica y la teoría de conjuntos? Tratando de encontrar una respuesta, se revisaron los Estándares básicos de competencias en Matemáticas con la esperanza de encontrar algo en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, pero nada aparece; no obstante, en los estándares se habla de describir, comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos, términos que son del dominio de la lógica.

Continuando con la búsqueda de la lógica y los conjuntos en los lineamientos curriculares, se encuentra que cada pensamiento tiene un carácter transistémico y dentro de este se tiene el razonamiento como un proceso de tipo general. Al hablar de razonamiento implícitamente se habla de lógica como elemento formalizador del razonamiento, por tanto los programas curriculares de la primaria incluyen las nociones elementales sobre conjuntos, y los programas de bachillerato en el grado sexto, séptimo, octavo y noveno incluyen nociones de lógica y conjuntos estudiándose inclusive los métodos de demostración.

Un análisis detallado de los textos y el programa como tal permiten afirmar que no existe una secuencia progresiva en los contenidos de lógica y conjuntos, la inclusión de la lógica no logra que el estudiante razone mejor, los métodos de demostración no se usan porque la geometría no abarca aspectos demostrativos y los conceptos sobre la teoría de conjuntos no se transfieren a otros temas dentro de los mismos programas. Evidentemente, los contenidos de lógica y conjuntos se presentan desconectados de la temática en donde están insertados, las estructuras algebraicas desaparecen casi por completo en los programas de secundaria, excepto el concepto de espacio vectorial que se introduce en el penúltimo grado del bachillerato.

## Consideraciones Finales

A través de las reformas educativas se observa que el currículo colombiano de matemática para la enseñanza primaria y la secundaria no ha variado sustancialmente. Los intentos de introducir la enseñanza de las estructuras con la llamada matemática moderna en los años setenta y el enfoque de sistemas en los años ochenta, fueron fallidos, pues los programas del bachillerato siguen apegados a la llamada matemática clásica conservando en un alto porcentaje los contenidos dispuestos en la reforma de 1962; así que, los contenidos en los grados sexto y séptimo continúan siendo la aritmética de los enteros y los racionales y la geometría intuitiva; en los grados octavo y noveno, álgebra y geometría; en el décimo grado, trigonometría y geometría analítica; y en el grado undécimo sucesiones y cálculo diferencial e integral.

Por otra parte, los contenidos de la primaria mantienen un eje integrador que abarca los números enteros y sus operaciones, geometría intuitiva, sistemas métricos y nociones de lógica y teoría de conjuntos, contenidos que pueden variar según el proyecto educativo institucional en cada plantel. Tanto en primaria como en secundaria se constata una débil formación en geometría, lo que no ocurría antes de 1976 cuando la geometría contemplaba aspectos demostrativos importantes para el desarrollo de la lógica y la abstracción.

Las diferentes reformas aplicadas tanto a primaria como secundaria en la segunda mitad del siglo pasado, no resolvieron la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, los libros de texto, aunque editados muy exóticamente, reflejan el institucionalismo de una matemática que en el fondo sigue siendo clásica instrumental; y aún más, algunos currículos universitarios para preparar los profesores de la enseñanza básica y media, son deficientes en conocimientos disciplinares y su epistemología.

## Bibliografía

Báez, J. (2007). *Memorias del Icolpe*. Manuscrito no publicado, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá.

Bass, H., & Hodgson, B. (2004). The International Commission on Mathematical Instruction. What? Why? For whom? *Notices of the AMS*, 51, 639-644.

Budnick, S. (1990) *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*. (2ª ed). México: McGraw-Hill.

Da Cunha, R. (2006). *A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de Sao Paulo. Tesis Doctoral*. Recuperado de http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php? codArquivo=4983.

Duarte, A. (2007). *Matemática e educação matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUCSP.

Gómez, A. (2006). *La enseñanza de los fundamentos de la matemática*. Manuscrito no publicado. Programa de matemáticas, Universidad de Cartagena, Cartagena.

Gómez, A. (2010). *Lógica y conjuntos en la enseñanza universitaria del Caribe colombiano*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Cartagena, Cartagena.

Haidar, A., Teti, C., & Bonacina, M. (2013). *La enseñanza de las matemáticas: 100 años después de Klein.* Recuperado de http://www.unr.edu.ar/noticia/6827/la-ensenanza-de-las-matematicas-cien-anos-despues-de-klein.

Ministerio de Educación Nacional. (1975). *Guía para el maestro 5º grado de enseñanza primaria*. Matemática. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (1979). *Serie Programas Curriculares*. *Segundo grado de educación básica*. Bogotá: División de Diseño y Programación Curricular de Educación.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Nevalina, R. (1966). Reform in teaching mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 73 (5), 451-464.

Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/ *Archivos/ RicoL92-121.PDF*

Ruiz, A., & Barrantes, H. (1998). *La historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Sangiorgi, O. (1962). *The present status of mathematics teaching in secondary schools in Argentina, Brazil, Chile, Colombia, Costa Rica, Perú y Venezuela*. Budapest: UNESCO.

Sociedad Colombiana de Matemáticas. (1980). La nueva década. *Lecturas Matemáticas*, 1 (3), 309-326.

Takahashi, A. (1976). Lógica y conjuntos en los programas de secundaria. *Notas de matemática*, 5(1), 3-16.

Thom, R. (1981). Matemática Moderna: ¿Error educacional y filosófico? *Lecturas matemáticas*, 2(3), 279-298.

Vasco, C. (1975). La matemática en el bachillerato. Lógica, conjuntos y estructuras. *Notas de matemática*, 4(1), 5-30.

Vasco, C. (1980). El concepto de sistema como clave del currículo de matemáticas. *Notas de matemática*, 10(1), 1-14.

Walusinski, G. (1962). *Research Symposium on Mathematics Education*. Budapest: UNESCO

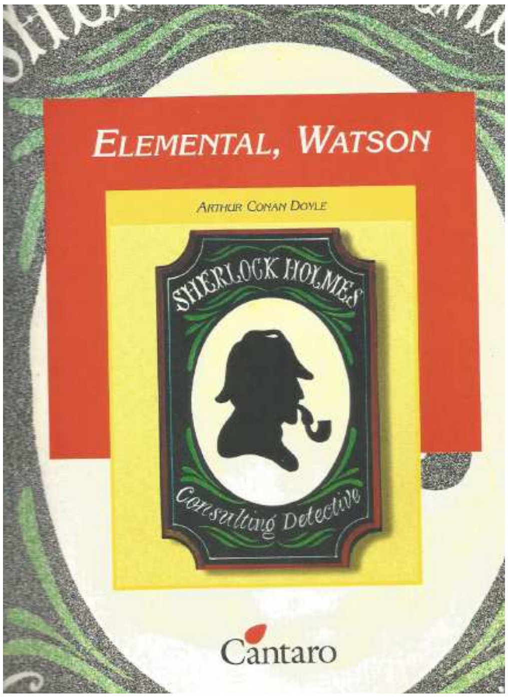
**Alfonso Segundo Gómez Mulett.** Licenciado en Educación área Matemáticas y Física, Especialista en Pedagogía para el Aprendizaje Autónomo, Especialista en Sistemas de Información, Magister en Matemáticas Aplicadas, Doctor en Educación (Rudecolombia); es Profesor Titular de tiempo completo, en el Programa de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Cartagena, Campus San Pablo. Cartagena – Colombia. Su línea de investigación es la Educación Matemática. **agomezm1@unicartagena.edu.co**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 177-178

www.fisem.org/web/union

# Libros




## Elemental, Watson.

**Autor:**
Arthur Conan Doyle.

**Editorial:**
Cántaro.

**ISBN**: 978-950-753-074-6

**Edición:** 2010.

**Páginas:** 125

## 1. Por qué se debería leer

Si usted es docente, no le ha pasado alguna vez que tiene muchas ganas de decir: "*Elemental, mi querido Martínez*", (o el apellido que sea), a algún alumno que se le escapa algo que es obvio? Si lo hiciera, estaría parafraseando al genial escritor Arthur Conan Doyle, quien pone en boca de su genial personaje Sherlock Holmes, la frase "*Elemental, mi querido Watson"*, cada vez que desea hacerle notar a su asistente que su lógica deductiva, una vez más, ha llegado a conclusiones certeras e increíblemente sorprendentes tanto para su interlocutor, como para el lector, que mientras avanza en la lectura se va sintiendo partícipe de ese trabajo de investigación, adquiriendo cada uno de nosotros una actitud detectivesca. Es imposible, que a medida que leemos, no se active un deseo de anticipación de lo que implica cada detalle que narra el autor a través del cronista, que es su ayudante y amigo Watson, quien narra a medida que observa directamente lo que acontece.

La idea de esta reseña es motivar la lectura de cualquiera de los textos de este magnífico autor, sobre todo si nos gusta la lógica y la deducción. En particular voy a comentar el cuento **La aventura de los tres estudiantes**, sumamente original y que nos mantiente atentos y apostando sobre quien es el culpable hasta su desenlace.

## 2. De qué se trata

Se trata de un Profesor que tiene preparado sobre su escritorio un examen para tomar al día siguiente, a los efectos de seleccionar al merecedor de una importante beca y descubre que alguien lo ha leído, con la consecuente sospecha de que se trata de alguno de los estudiantes que deben someterse a dicho examen. En el predio de la Universidad donde se desarrollaba la escena principal sólo viven allí tres estudiantes, los cuales, en principio están "*equisospechados"*.

La suspicacia de Sherlock Holmes para observar los detalles, su razonamiento deductivo tan hábil y la rapidez con que actúa ante los hechos hacen que el caso se resuelva con absoluta solvencia.

## 3. Por qué es imperdible

Paralelamente a la genialidad del detective, se podría decir que la habilidad del autor para imaginar esos detalles, sus conocimientos científicos y su creatividad literaria dejan al lector boquiabierto, ya sus argumentaciones lógicas slo a Conan Doyle se le podrían ocurrir.

Una de las ediciones que contiene este cuentos, que justamente lleva el nombre "**Elemental, Watson**", es acompañada por otros dos títulos maravillosos: **La aventura del carbunclo azul** y **Las cinco semillas de naranja.**

Podría mencionar otros cuentos u otros textos, pero cualquiera de ellos que se elija satisfaría al lector, no me cabe duda. Aunque para comprender esta profunda simbiosis autor-protagonista, simbiosis de la cual surge un personaje de ficción que supera al artífice, el escritor, se debería comenzar la lectura por **Estudio en escarlata**, donde el autor describe a este detective de una personalidad tan particular, extremadamente meticuloso y casi obsesivo con su trabajo, en quien "*su ignorancia era tan admirable como su conocimiento"*.

También aquí describe a su compañero de pensión, el doctor John Watson, el que pasa a ser su único amigo y su asistente, el que se sorprende permanentemente con la agudeza racional de Holmes que contrasta con su inocencia y escasa creatividad para resolver problemas.

La fortaleza de la relación entre el detective y su ayudante reside en la incondicional fidelidad y gran admiración que Watson siente por Holmes, lo que lleva en innumerables oportunidades a la expresión que caracteriza a esta relación: "*Elemental, Watson*".

**Prof. Raquel Cognigni.**
**Dpto. de Matemática.**
**Universidad Nacional del Comahue.**
**Argentina.**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 179-180

# Educación en la Red:

# sitios-educativos.wikispaces.com

***"Los Wikis son aplicaciones que actualmente realizan un aporte significativo al desarrollo de la educación, como una base de datos simple y fácil de utilizar, la cual permite a los usuarios crear, editar, borrar o modificar el contenido de una página web, de una forma interactiva, fácil y rápida estas facilidades hacen de este sitio una herramienta efectiva para la escritura colaborativa, permitiendo ser editado por varios usuarios."***

La página citada es una wiki que tiene por objetivo ser *"un banco de recursos para la tarea docente y fomentar el uso de las nuevas tecnologías en los alumnos".*

Se brinda a los visitantes del sitio una recopilación de páginas webs, organizadas temáticamente, que abarcan gran cantidad de áreas de conocimiento. En cada una de la áreas se ofrece una lista de direcciones; especificando para cada una de ellas el contenido tratado en la misma como así también una descripción clara y precisa del sitio linkeado.

Dentro de las áreas que se tratan se encuentran:

- Comprensión del Medio:

  Se presentan contenidos varios como: El Universo, los seres vivos, el clima y el tiempo, la medida, internet en el aula, los sistemas del cuerpo humano, etc.

- Educación Física:

  Conceptos de salud y cuerpo humano. Se hace gran hincapié, fundamentalmente mediante la implementación de juegos, de hábitos de vida saludable.

- Educación Musical:

  Notas, ritmo, color y sonido. Temas desarrollados básicamente mediante la presentación de páginas interactivas que enseñan y divierten, sobre todo a los más pequeños.

- Inglés:

  Vocabulario, pronunciación y más. Variedad de recursos y actividades.

- Matemáticas:

  Operatoria básica, reconocimiento de números, trabajo con el cero, problemas de operatoria básica, fracciones: fracción y porcentaje, medidas y ángulos, figuras geométricas, longitud de circunferencia, unidades de medida, longitud, superficie, peso y masa, capacidad y volumen.

  Para cada uno de estos temas se plantean una serie de links que llevan a páginas cuyo objetivo principal no es sólo transmitir los conocimientos matemáticos citados, sino también fomentar un aprendizaje divertido en cual todos los actores forman parte del proceso.

  Se brinda gran cantidad de ejercicios y problemas, se muestran situaciones de la vida cotidiana y el uso de la matemática; y también, y no menos importante, se ofrecen herramientas a los docentes que se planteen la enseñanza de la matemática desde un lugar distinto, un lugar donde las TICs ya no son recursos secundarios.

- Plan Común:

  La mayoría de los sitios aquí presentados están destinados a los docentes. Se ofrecen recursos e información variada, siempre con el objetivo de nutrir los procesos de enseñanza- aprendizaje que se desarrollan.

Los invito entonces a explorar esta página, que denominé “una web de webs”, verán que allí todo es amigable e invita a sumergirse aun más en el maravilloso mundo de los saberes.

**Prof. Valeria Cerda.**
**Dpto. de Matemática.**
**Universidad Nacional del Comahue.**
**Argentina.**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 181-186

www.fisem.org/web/union

# La Fundación Canaria Carlos Salvador y Beatriz: Tres noticias

**1. Firma de un convenio de colaboración con la Asociación *Alumni ULL* (Asociación de antiguos alumnos y amigos de la Universidad de La Laguna).**

**2. Gesto solidario de los alumnos y alumnas del Instituto de Enseñanza Secundaria Santa Ana de la villa de Candelaria (Tenerife).**

**3. Nueva convocatoria de ayudas al estudio en Canarias.**

## 1. Firma de un convenio de colaboración con la Asociación *Alumni ULL* (Asociación de antiguos alumnos y amigos de la Universidad de La Laguna)

El pasado 24 de junio de 2014 los presidentes Salvador Pérez, de nuestra Fundación y Zenaido Hernández, de la ***Alumni ULL***, procedieron a la firma de este convenio de colaboración, siendo esta la segunda vez que se realiza. La Asociación, en su Asamblea General del día 17 de febrero, había tomado el acuerdo de donar el 0,7% de su previsión de ingresos por cuotas de sus asociados a actividades solidarias en el exterior. Tras la experiencia positiva realizada en el 2012, se acordó, asimismo que esta cantidad fuese gestionada por la **Fundación Carlos Salvador y Beatriz**.

Firma del convenio

Miembros de la Junta Directiva y del Patronato presentes en el acto

En el convenio se especifica que la colaboración que se establece se fundamenta en la voluntad de las dos partes por trabajar en pro de este objetivo que comparten: ayudar solidariamente a actividades de educación y sanidad en Iberoamérica. En esta edición, existe una cláusula según la cual al convenio se le da vigencia en los años 2014 y 2015.

Nuestra Fundación ya he hecho las primeras gestiones para la aplicación de la cantidad entregada que fue de 270 euros. Se va a donar al equipo que encabeza el Doctor José Carlos Ventura Zorrilla, de Chiclayo, para realizar una Jornada Médica en un lugar, aún por determinar, en el Departamento de Lambayeque de Perú. La Jornada se realizará el día 29 de Agosto de este mismo año y de ello informaremos en el próximo número de UNIÓN.

## 2. Gesto solidario de los alumnos y alumnas del Instituto de Enseñanza Secundaria Santa Ana de la villa de Candelaria (Tenerife)

La crónica que hacemos en este apartado entra en la categoría de esas pequeñas-grandes acciones que sirven, entre otras cosas, para seguir adelante en el esfuerzo solidario que promueve nuestra Fundación como esencia de su existencia. Pero en esta ocasión hay un elemento que la hace aún mayor: se trata de jóvenes de un centro educativo.

La historia nos fue contada por el vicepresidente de nuestra Fundación, Luis Balbuena Castellano, que la vivió en primera persona. En su infatigable labor de ofrecer a los estudiantes, de forma gratuita, charlas de popularización de las matemáticas y talleres fue invitado por el Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria Santa Ana de la villa de Candelaria (Tenerife). Esta villa está situada al este de la isla, tiene 26 134 habitantes y es muy conocida por albergar en su casco histórico la Basílica en la que se encuentra la Virgen de Candelaria, patrona de las Islas. El Profesor Balbuena, después de impartir su charla de matemáticas, fue conducido a un espacio en el que se encontraba más de un centenar de estudiantes. Les explicó qué hace nuestra Fundación y qué canales utiliza para desarrollar las actividades que promueve. Pues bien, en el centro habían realizado unas actividades encaminadas a recaudar fondos y decidieron que un tercio de lo obtenido (512,70 euros), fueran donados a la Fundación Carlos Salvador y Beatriz para que la aplicase a sus acciones solidarias en Iberoamérica. El broche de oro del acto lo protagonizaron los estudiantes a través de dos representantes que le entregaron el dinero en una bolsa porque estaba todo con las mismas monedas que ellos habían aportado. *Fue muy emocionante* – declaró más tarde- *sobre todo pensando en que había sido recaudado y aportado por ellos mismos. Obviamente les felicité por el gesto. Les agradecí la ayuda en nombre de los niños y niñas a las que se destinará y les aseguré que la cantidad llegará a su destino comprometiéndome a hacerles llegar noticias de la entrega. Les transmití lo esperanzador que resulta que la juventud siga siendo solidaria y responsable.*


Desde la Fundación nos sumamos a ese agradecimiento que queremos extender al director del Centro, Miguel Ángel Alonso; a su vicedirector, Fran Pérez y al profesor de matemáticas, Sergio Darias. Podemos informar que ese dinero ya ha sido entregado en forma de material escolar en dos centros escolares de Huayrasitana, a 3300 metros de altitud, en el Distrito de Chalamarca, provincia de Chota, región de Cajamarca en el norte de Perú. Esta acción toma parte del programa que venimos desarrollando en esa zona con el título de *Materiales para todos*, del que son responsables los profesores José Ventura y Gladys Zorrilla, de la ciudad de Chiclayo. Ellos nos enviarán documentos gráficos del transporte y de la entrega de los materiales que serán colocados en la web del Instituto Santa Ana

### 3. Nueva convocatoria de ayudas al estudio en Canarias

En los primeros días del mes de septiembre de este año se realizará la nueva convocatoria de Ayudas al Estudio en Canarias. Llegamos así a la cuarta edición pues se vienen concediendo desde el curso 2011-2012. El plazo de presentación finalizará el 15 de noviembre y, como siempre, en la página web de la Fundación podrán encontrar toda la información necesaria así como una línea de consultas. Esperamos poder seguir contando con la colaboración de los centros educativos que nos ayudan a dar mayor rigor al proceso.

Recordemos que en el curso recién terminado el número de ayudas llegó a un total de 94, repartidas en seis de las siete islas y con un presupuesto de 23.800 €. Esto supuso un incremento de 22 ayudas con relación a la edición anterior. En cuanto a los criterios de selección, se tiene en cuenta el expediente académico, los miembros de la familia, los hermanos que estudian, la distancia al centro, los miembros de la familia que trabajan, la ayuda concedida el curso anterior y la valoración que hace la propia Fundación a través de la información aportada por los centros. Toda la información se procesa y finalmente se hace la selección. La intención es siempre la de escoger a los más necesitados y con mayores merecimientos.

## A Fundação Canaria Carlos Salvador e Beatriz
## Três notícias

1. **Assinatura de um convênio de colaboração com a Associação Alumni ULL (Associação de antigos alunos e amigos da Universidade da Laguna).**
2. **Gesto solidário dos alunos e alunas do Instituto de Ensino Secundário Santa Ana da villa de Candelaria (Tenerife).**

### 3. Nova convocação de ajudas ao estudo em Canárias.

### 1. Assinatura de um convênio de colaboração com a Associação Alumni ULL (Associação de antigos alunos e amigos da Universidade da Laguna).

O passado 24 de junho de 2014 os presidentes Salvador Pérez, de nossa Fundação e Zenaido Hernández, da Alumni ULL, procederam à assinatura deste convênio de colaboração, sendo esta a segunda vez que se realiza. A Associação, em sua Assembleia Geral do dia 17 de fevereiro, tinha tomado o acordo de doar o 0,7% de sua previsão de rendimentos por quotas de seus sócios a actividades solidárias no exterior. Depois da experiência positiva realizada em 2012, lembrou-se, assim mesmo que esta quantidade fosse gerida pela Fundação Carlos Salvador e Beatriz.

**Assinatura do convênio**

**Membros da Junta Directiva e do Patronato presentes no acto**

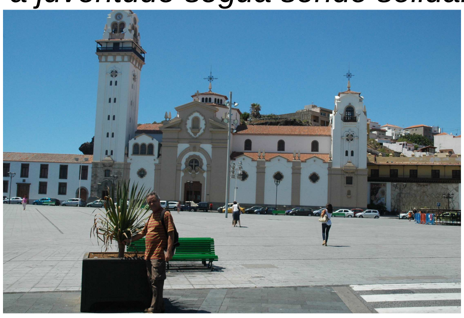
No convênio especifica-se que a colaboração que se estabelece se fundamenta na vontade das duas partes por trabalhar em pró deste objectivo que compartilham: ajudar solidariamente a actividades de educação e previdência em Iberoamérica. Nesta edição, existe uma cláusula segundo a qual ao convênio se lhe dá vigência nos anos 2014 e 20.

Nossa Fundação já tenho feito as primeiras gestões para a aplicação da quantidade entregada que foi de 270 euros. Vai doar-se à equipa que encabeça o Doutor José Carlos Ventura Zorrilla, de Chiclayo, para realizar uma Jornada Médica num lugar, ainda por determinar, no Departamento de Lambayeque de Peru. A Jornada realizar-se-á odía 29 de Agosto deste mesmo ano e disso informaremos no próximo número de UNIÃO.

### 2. Gesto solidário dos alunos e alunas do Instituto de Ensino Secundário Santa Ana da villa de Candelaria (Tenerife).

A crónica que fazemos neste apartado entra na categoria dessas pequenas-grandes acções que servem, entre outras coisas, para seguir adiante no esforço solidário que promove nossa Fundação como esencia de sua existência. Mas nesta ocasião há um elemento que a faz ainda maior: trata-se de jovens de um centro educativo.

A história foi-nos contada pelo vice-presidente de nossa Fundação, Luis Balbuena Castelhano, que a viveu em primeira pessoa. Em seu infatigable labor de oferecer aos estudantes, de forma gratuita, palestras de popularización das matemáticas e oficinas foi convidado pelo Departamento de Matemáticas do Instituto de Ensino Secundaria Santa Ana de la villa de Candelaria (Tenerife). Esta villa está situada ao este da ilha, tem 26 134 habitantes e é muito conhecida por albergar em seu capacete histórico a Basílica na que se encontra a Virgen de Candelaria, patroa das Ilhas. O Professor Balbuena, após dar sua palestra de matemáticas, foi conduzido a um espaço no que se encontrava mais de uma centena de estudantes. Explicou-lhes que faz nossa Fundação e daí canais utiliza para desenvolver as actividades que promove. Pois bem, no centro tinham realizado umas actividades encaminhadas a arrecadar fundos e decidiram que um terço do obtido (512,70 euros), fossem doados à Fundação Carlos Salvador e Beatriz para que a aplicasse a suas acções solidárias em Iberoamérica. O broche de ouro do acto protagonizaram-no os estudantes através de dois representantes que lhe entregaram o dinheiro numa carteira porque estava tudo com as mesmas moedas que eles tinham contribuído. Foi muito emocionante –declarou mais tarde- sobretudo pensando em que tinha sido arrecadado e contribuído por eles mesmos. *Obviamente felicitei-lhes pelo gesto. Agradeci-lhes a ajuda em nome dos meninos e meninas às que destinar-se-á e lhes assegurei que a quantidade chegará a seu destino me comprometendo a lhes fazer chegar notícias da entrega. Transmiti-lhes o esperanzador que resulta que a juventude segua sendo solidária e responsável.*




Desde a Fundação somámos-nos a esse agradecimento que queremos estender ao director do Centro, Miguel Ángel Alonso; a seu vicedirector, Fran Pérez e ao professor de matemáticas, Sergio Darias. Podemos informar que esse dinheiro já tem sido entregado em forma de material escolar em dois centros escoares de Huayrasitana, a 3300 metros de altitude, no Distrito de Chalamarca, província de Chota, região de Cajamarca no norte de Peru. Esta acção toma parte do programa que vimos desenvolvendo nessa zona com o título de *Materiais para todos, do que são responsáveis os professores José Ventura e Gladys Zorrilla, da cidade de Chiclayo. Eles enviar-nos-ão documentos gráficos do transporte e da entrega dos materiais que serão colocados no site do Instituto Santa Ana.*

### 3. Nova convocação de ajudas ao estudo em Canárias

Nos primeiros dias do mês de setembro deste ano realizar-se-á a nova convocação de Ajudas ao Estudo em Canárias. Chegamos assim à quarta edição pois se vêm concedendo desde o curso 2011-2012. O prazo de apresentação finalizará o 15 de novembro e, como sempre, na página site da Fundação poderão encontrar toda a informação necessária bem como uma linha de consultas. Esperamos poder seguir contando com a colaboração dos centros educativos que nos ajudam a dar maior rigor ao processo.

Recordemos que no curso recém terminado o número de ajudas chegou a um total de 94, repartidas em seis das sete ilhas e com um orçamento de 23.800 €. Isto supôs um incremento de 22 ajudas com relação à edição anterior. Quanto aos critérios de selecção, tem-se em conta o expediente académico, os membros da família, os irmãos que estudam, a distância ao centro, os membros da família que trabalham, a ajuda concedida o curso anterior e a valoração que faz a própria Fundação através da informação contribuída pelos centros. Toda a informação se processa e finalmente se faz a selecção. A intenção é sempre a de escolher aos mais precisados e com maiores merecimientos.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. junio de 2014
página 187

# Convocatoria

## Dirección de la Revista Digital Unión

## Período 2015-2017

La Dirección de la revista UNION, que avala y nombra la Junta de Gobierno de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), ha de convocarse cada tres años.

La actual dirección ejercida por Norma Susana Cotic y Teresa Claudia Braicovich de Argentina, finaliza su mandato en diciembre de 2014, por lo que se realiza la convocatoria de candidaturas para el periodo 2015-2017.

Los profesores o profesoras interesados en participar en esta convocatoria deberán enviar una solicitud a la Presidenta de la FISEM, con copia a la Secretaría General de la FISEM, **antes del 30 de septiembre de 2014**.

El procedimiento y los documentos que deben presentarse son los siguientes:

- Solicitud dirigida a la Presidenta de la FISEM en la que consten al menos estos datos: apellidos y nombres completos, domicilio, Sociedad federada a la que pertenece, E-mail, situación profesional y lugar de trabajo.
- Certificado del Secretario de su Sociedad en el que conste su condición de socio activo así como su antigüedad como tal que debe ser superior o igual a cinco años.
- Una memoria de un máximo de diez folios (tamaño A4) en la que exponga la orientación que desea dar a la revista así como las secciones fijas que va a crear y otros datos que aclaren la línea que tiene previsto aplicar.
- Currículum vítae (Breve resumen con un máximo de tres folios A4).

La dirección de la revista UNIÓN estará limitada a dos periodos, ejercidos de forma continuada.

Las solicitudes y la documentación se enviarán por e-mail a la Presidenta de la FISEM a la dirección crccrespo@gmail.com, con copia al Secretario General de la FISEM a la dirección sg@fisem.org

Todas las solicitudes recibidas serán posteriormente enviadas a la Junta de Gobierno de la FISEM para que decida cuál es la candidatura que presenta el programa más adecuado a los fines de la Federación.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 189-192

# Convocatorias y eventos

## V Reunión Pampeana de Educación Matemática

Organiza: Universidad Nacional de La Pampa.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 20 al 22 de agosto de 2014.
Información: **http://repem.exactas.unlpam.edu.ar**

---

Lugar**:** Campus Campo Mourão.
Convoca**:** Universidade Estadual do Paraná - Campus Campo Mourão
Fecha: 4 al 6 de septiembre de 2014.
Información: **http://www.fecilcam.br/eventos/index.php/eprem/xiieprem**

---

## PRIMER ENCUENTRO COLOMBIANO DE EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

Convoca: Universidad Pedagógica Nacional
Lugar: Bogotá. Colômbia
Fecha: 10 a 12 de septiembre de 2014
Información: **http://www.encoedest.org/**

---

Organiza: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Regional DF.
Lugar: Brasilia.
Fecha: 19 al 21 de setiembre de 2014.
Información: **http://www.sbemdf.com/index.php/home/viebrem/**

---

**XXIX JORNADAS NACIONALES DE DOCENTES DE MATEMÁTICA DE FACULTADES DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y AFINES**

Organiza: Asociación Civil de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines.
Lugar: Santa Rosa, La Pampa. Argentina.
Fecha: 17 al 19 de setiembre de 2014.
Información: **https://sites.google.com/site/xxixjnm/**

---

**XI Congreso Argentino de Educación Matemática**

Lugar**:** Universidad Nacional de San Juan. Argentina.
Convoca**:** Sociedad Argentina de Educación Matemática.
Fecha: 2 al 4 de octubre de 2014.
Información: **www.soarem.org.ar**

---

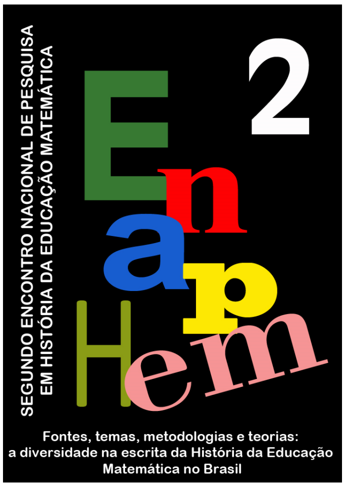
**7º ENCUENTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

Convoca**:** Sociedade Portuguesa de Matemática. Seminário Nacional de História da Matemática Sociedade Brasileira de História da Matemática.
Lugar: Óbidos. Portugal.
Fecha: 15 a 19 de octubre de 2014
Informació**:** **http://www.spm.pt/arquivo/1105**

---

Lugar: Puerto Alegre. Brasil.
Convoca: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS
Fecha: 20 al 22 de octubre de 2014
Información: **http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/10anos**

---




**II ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA
EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
II ENAPHEM**

Lugar: Universidade Estadual Paulista (UNESP). Bauru. SP
Fecha: 31 de octubre al 2 de noviembre de 2014.
Información: **http://www2.fc.unesp.br/enaphem/index.php**


**"Avanzando juntos hacia las Metas Educativas Iberoamericanas 2021"**
Lugar**:** Buenos Aires. Argentina.
Convoca**:** Organización de Estados Iberoamericanos (OEI).
Fecha: 12 al 14 de noviembre de 2014.
Información: **http://www.oei.es/congreso2014**

## AÑO 2015

## AÑO 2017

**En el mes de julio en Madrid:**

# VIII CIBEM

**Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM)**

**www.fisem.org**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio de 2014
páginas 193-194

# Normas para publicar en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a **union.fisem@sinewton.org** con copia a **revistaunion@fisem.org**. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Los artículos recibidos serán sometidos a un proceso de evaluación, en función de los resultados de la misma el Comité Editorial decidirá que el trabajo se publique, con modificaciones o sin ellas, o que no se publique.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, los cuatro márgenes de 2,5 cm., tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 25 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria deberá ser escrita con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: **Figura 1, Figura 2,… Tabla 1, Tabla 2,…(Arial, negrita, tamaño 10)**
4. El artículo debe tener un **resumen en español, en portugués y en inglés**, cada uno de los cuales tendrá una longitud máxima de 10 líneas.
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar solamente en la última página con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, deben constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: título o títulos, institución o instituciones a las que pertenece, lugar de residencia, títulos, publicaciones, así como una breve reseña biográfica de no más de ocho líneas.
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos de autor) y deben seguir los formatos que se indican a continuación:

**Para libro:**

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

**Para capítulo de libro, actas de congreso o similar:**

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

**Para artículo de revista:**

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

**Para artículo de revista electrónica o información en Internet:**

Guzmán Retamal, I. (2009). *Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo.* UNIÓN [en línea], 19. Recuperado el 15 de octubre de 2009, de **http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php**

Las referencias bibliográficas dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas, por ejemplo (Godino, 1991, p. 14-18)

**NOTA:** Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad en la redacción a los trabajos recibidos y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a **revistaunion@fisem.org**