REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XI – Número 42 – Noviembre 2015

ÍNDICE

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Agustín Carrillo de Albornoz
Alicia Fort
Ana S. Martinez
Ana Tadea Aragón
Antonino Viviano Di Stefano
Barbara Lutaif Bianchini
Carlos Sanchez
Carmen Galván Fernández
Carmen Teresa Kaiber
Cecilia Rita Crespo Crespo
Celia Rizo
Claudia Oliveira Groenwald
Cristina Ochoviet
Etda Luisa Rodríguez Minarsky
Eugenio Carlos
Eva Cid Castro
Gabriel Loureiro de Lima
Gustavo Franco
Hugo Parra
Inés del Carmen Plasencia
Jorge Brisset
José Manuel Matos
José María Gavilán Izquierdo
José Muñoz Santonja
Josefa Hernández Domínguez
Julio Vassallo
Leonor Santos
Luis Campistrus
Luis Moreno Chandler
Luiz Otávio Maciel Miranda
Margarita González Hernández
María Candelaria Espinel Febles
María Carmen García González
María Carmen Peñalva Martínez
Maria de Lurdes Serrazina
María Elena Ruiz
María Encarnación Reyes Iglesias
María Luz Callejo de la Vega
María Mercedes Colombo
María Mercedes García Blanco
Maria Mercedes Medina Palarea
Mario Dalcin
Matías Camacho Machín
Miguel Chaquiam
Mónica Ester Villarreal
Mónica Olave
Natael Cabral
Natahali Martín Rodríguez
Nelson Hein
Olga Lidia Pérez González
Patrícia Lestón
Patrick Scott
Rafael Escolano
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Rosa Martinez
Silvia Dias Alcântara Machado
Verónica Molfino
Victoria Sánchez García
Yacir Testa

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 5-8

Editorial

Estimados colegas y amigos:

El número 42 es muy importante para nosotras ya que destaca la unión y la capacidad de los educadores matemáticos iberoamericanos. Después de algún tiempo alejadas de ustedes, volvemos con más fuerza y con mucho ánimo para lograr cumplir con los objetivos de UNIÓN.

En este volumen tenemos el honor de contar como invitado com Saddo Ag Almouloud, Doctor en Matemáticas y Aplicaciones (Université de Rennes I - França). Experto en Educación de las Matemáticas (Geometria, Pruebas y Demonstraciones, Formación de profesores); Coordinador y Profesor de Postgrado (PUC/SP, Brasil). Su participación supone una importante colaboración com nuestra revista.

En este número entre otros, encontraremos artículos sobre la red colaborativa de aprendizaje y el desarrollo profesional del profesor de Matemáticas, por Costa y Prado; El modelado en la enseñanza de Cálculo Diferencial, por Igliori y Beltrão. Pepece Junior y Savioli reflejan el pensamiento algébrico en la enseñanza de jóvenes y adultos; la preocupación de Hechavarría y Vidal es presentar una actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas. Además, pueden encontrar un artículo de Gauna y Sarasua sobre las pruebas de Matemáticas en el acceso a la Universidad; Esteban y Blanco Nieto abordan el tema de la evaluación en Matemáticas; mientras que Zang, von Metzen y León presentan reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado. Creencias epistemológicas sobre la Matemática es el tema del artículo de Ramos, Escobar y Estrada y Conocimientos puestos en juego por futuros profesores de matemáticas está firmado por González, Gómez y Polo. Este numero 42 finaliza con la importância de la educación matemática infantil en el articulo de Claudí Alsina.

En este número también encontraréis la reseña redactada por Carlos Almena Sánchez sobre el libro: “Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática” de los autores Fernández Bravo, J. A. y Barbarán Sánchez J. J.

Como en los números anteriores de la Revista Unión presentamos una sección de problemas con las estupendas contribuciones del profesor Uldarico Malaspina Jurado. En este número su propuesta tiene por título "Los niños crean problemas de matemáticas”.

Como se ha quedado descrito en los párrafos anteriores, en el numero 42 se podrá encontrar un artículo para cada tema e interés. ¡Buena lectura!

Muchas gracias a todos los que contribuyeron directa o indirectamente con este número. Son ellos los verdaderos responsables de la construcción de la Educación Matemática, como una área de investigación.

Celina Abar

Sonia Igliori

Editorial

Estimados colegas y amigos:

O número 42 é muito importante para nós, pois ele revela a união e a capacidade dos educadores ibero-americanos. Por pouco tempo precisamos ficar distantes de vocês, mas voltamos com muita força e animação para assegurar os objetivos da Revista.

Neste volume nos sentimos honrados por contarmos, como convidado, Saddo Ag Almouloud, Doutor em Matemática e Aplicações (Université de Rennes I - França). Especialista em Educação Matemática (Geometria, Provas e Demonstração, Formação de professores); Coordenador e Professor de Posgraduação (PUC/SP, Brasil). Sua participação traz uma importante colaboração.

Nesta edição se discute a rede colaborativa de aprendizagem e o desenvolvimento professional do professor de Matemática; por Costa e Prado; A modelagem no ensino de Cálculo Diferencial, por Igliori e Beltrão. Pepece Junior e Savioli refletem sobre o pensamento algébrico no ensino de jovens e adultos; a preocupação de Hechavarría e Vidal é apresentar uma atividade investigativa escolar e exercícios de matemáticas. Continuando vocês podem encontrar uma reflexão de Gauna e Sarasua sobre as provas de Matemáticas no acesso às Universidades. Esteban e Blanco Nieto abordam o tema da avaliação em Matemática; Zang, von Metzen e León apresentam reflexões sobre a implementação de problemas de modelagem. Crenças epistemológicas sobre a Matemática é o tema do artigo de Ramos, Escobar e Estrada. Conhecimentos postos em jogo por futuros professores de matemática são avaliados por González, Gómez e Polo. O número 42 se finaliza com o importante tema de educação matemática infantil, enfoque do artigo de Alsina.

Neste número também se encontra a resenha apresentada por Carlos Almena Sánchez sobre o livro: “Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática” dos autores Fernández Bravo, J. A. e Barbarán Sánchez J. J.

Como nos demais números da Revista Unión apresentamos uma seção de problemas com as contribuições preciosas de Uldarico Malaspina Jurado. Neste volume sua proposta tem por título "Los niños crean problemas de matemáticas”.

Como se pode ver, no número 42, há um assunto para cada preferência. Boa leitura!

Nossos agradecimentos a todos que contribuíram direta ou indiretamente com este número da Revista. São eles os responsáveis pela construção da Educação Matemática como uma área científica.

Celina Abar

Sonia Igliori

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 09-34

Firma Invitada

Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos

Saddo Ag Almouloud

Resumen	Este artículo tiene por objetivo discutir de manera breve algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1992, 1998, 1999, 2002) y presentar un modelo metodológico de análisis de libros didácticos, inspirado en Chaachoua e Comiti (2010) y construido basándose en la TAD. Para ilustrar el uso de este modelo, presentamos un estudio orientado al análisis de materiales didácticos apoyado en este modelo metodológico. La implementación del modelo metodológico permitió identificar los tipos de tareas, las técnicas que permiten cumplirlas y las tecnologías que justifican esas técnicas. Estos tres aspectos fueron construidos a partir de los comentarios de los autores de libros didácticos, del libro del profesor o del análisis matemático de situaciones propuestas para el afianzamiento del aprendizaje. **Palabras- Clave:** Teoría Antropológica de lo Didáctico. Modelo Metodológico. Materiales Didácticos
Abstract	This article aims to briefly discuss some aspects of the Anthropological Theory of Didactic (TAD) of Chevallard (1992, 1998.1999, 2002) and present a methodological model to analyse didactic books, inspired by Chaachoua and Comiti (2010) and based on TAD. To illustrate the use of this model, we present a study focused on the analysis of didactic materials supported by this methodological model. The implementation of the methodological model made it possible to identify different types of tasks, the techniques through which those tasks could be solved and the technologies that could support these techniques. These three aspects were observed from the comments made by the authors of the didactic books used, from the teacher's book or from the mathematical analysis of proposed activities for the consolidation of learning. **Keywords:** Anthropological Theory of Didactic. Methodological Model. Teaching Materials.
Resumo	Este artigo tem por objetivo discutir de forma sucinta alguns aspectos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992, 1998. 1999, 2002) e apresentar um modelo metodológico de análise de livros didáticos, inspirado em Chaachoua e Comiti (2010). Esse modelo é construído apoiando-se na TAD. Para ilustrar o uso desse modelo, apresentamos um estudo voltado para a análise de materiais didáticos apoiando-se nesse modelo metodológico. A implementação do modelo metodológico possibilitou identificar os tipos de tarefas, as técnicas que permitem cumpri-la e as tecnologias que justificam essas técnicas. Os três aspectos foram construídos a partir dos comentários dos autores de livros didáticos, do livro do professor ou da análise matemática de situações propostas, tendo em vista a consolidação da aprendizagem. **Palavras-chave**: Teoria Antropológica do Didático. Modelo Metodológico. Materiais Didáticos.

1. Introdução

As pesquisas em Didática da Matemática têm produzido resultados que demonstram avanços importantes na identificação e na compreensão de fenômenos que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

A ênfase na compreensão desses fenômenos trouxe à tona a necessidade de desenvolver modelos teóricos que pudessem caracterizar os conhecimentos e saberes matemáticos, bem como fatores que interferem nos processos de ensino e de apropriação de conhecimentos/saberes pelo aluno. Um dos modelos teóricos desenvolvidos na Didática da Matemática é a Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1992, 1998. 1999, 2002).

O objetivo deste artigo é discutir, de forma sucinta, alguns aspectos dessa teoria e apresentar um modelo metodológico de análise de livros didáticos, construído a partir dessa teoria. Apresentamos um estudo voltado para análise de livros didáticos cujo instrumento principal de análise apoiou-se nesse modelo metodológico.

2. A teoria antropológica do didático (TAD)

Apresentamos brevemente a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1992) focando, mais especificamente, suas noções fundamentais e como pode ser um instrumento poderoso para análise, por exemplo, de práticas docentes e de livros didáticos. Discutiremos o modelo proposto, as noções de organizações praxeológicas (organizações matemática e didática), entre outros.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber).

A Teoria Antropologia do Didático, segundo Chevallard, estuda o homem frente ao saber matemático, e mais especificamente, frente a situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais (Chevallard, p.1, 1999).

A Didática da Matemática, vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva), considera que tudo é objeto, identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições.

O conhecimento - e o saber, considerado como certa forma de organização de conhecimentos – o autor entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento. Em outras palavras, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Para Chevallard (1999), o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento, produto da ação humana, em uma instituição caracterizada por qualquer coisa que se produza, se utiliza e se ensina, além de poder eventualmente transpor as instituições. Assim, o autor introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho.

Na TAD, as noções de (tipos de) tarefa, (tipos de) técnica, tecnologia e teoria permitem modelar práticas sociais em geral e, em particular a atividade matemática. De acordo com o autor, toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica

A palavra técnica é utilizada como uma "maneira de fazer" uma tarefa, mas não é necessariamente como um procedimento estruturado e metódico ou algorítmico.

O problema, de delimitar tarefas em uma prática institucional, varia de acordo com o ponto de vista da instituição onde se desenvolve a prática ou de uma instituição externa que observa a atividade para descrevê-la com um objetivo preciso. As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar que não definem o conteúdo em estudo. Por outro lado, "resolver uma equação fracionária" ou ainda "decompor uma fração racional em elementos simples" caracterizam tipos de tarefas, em que se encontram determinadas tarefas, como por exemplo, "resolver a equação $x^2-3x+2=0$" ou "decompor a fração 7/9 em frações mais simples".

Para Chevallard a necessidade de reconstrução de tarefas, na condição de construções institucionais, caracteriza um problema a ser resolvido dentro da própria instituição, que no caso da sala de aula, por exemplo, é uma questão didática.

Para uma determinada tarefa, geralmente, existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que problematizou essa tarefa, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. A maioria das tarefas institucionais torna-se rotineira quando deixa de apresentar problemas em sua realização. Isso quer dizer que para produzir técnicas é preciso que se tenha uma tarefa efetivamente problemática que estimule o desenvolvimento de pelo menos, uma técnica para responder às questões colocadas pela tarefa. As técnicas assim produzidas são então organizadas para que funcionem regularmente na instituição. Obtém-se assim um bloco "prático-técnico", formado por um tipo de tarefas e por uma técnica, que pode ser identificado em linguagem corrente como um "saber-fazer". (Chevallard, 2002, p. 3)

Com relação à ecologia das tarefas, Bosch e Chevallard (1999, p. 85-86) afirmam que "a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições [...]". Supõe-se que, para existir em uma instituição, uma técnica deve ser pelo menos compreensível, legível e justificada. Essas condições e restrições ecológicas implicam então a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, chamado de tecnologia da técnica. Toda tecnologia precisa também de uma justificação, ou seja, a teoria da técnica.

Para Chevallard (2002) um “saber-fazer”, identificado por uma tarefa e uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa, isto é, um “discurso lógico” (logos) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Segundo o autor, a tecnologia vem descrever e justificar a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa forma uma organização “praxeológica” (ou praxeologia) pontual. Ela reporta-se ao fato de que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso, mais ou menos desenvolvido, de um logos que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico) cuja ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produz, utiliza ou transpõe. Consideram-se aqui as condições de “sobrevivência” de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na “cadeia alimentar”? Tais respostas ajudam na compreensão da organização matemática determinada por uma praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas dizem respeito à maneira que se faz essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

Em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois, seus componentes teóricos e tecnológicos perdem seu crédito. Constantemente, em uma determinada instituição I surgem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em alguma instituição I’. A passagem da praxeologia da instituição I para a da instituição I’ é chamada por Chevallard (2002) de Transposição, mais especificamente, de Transposição Didática quando a instituição de destino é uma instituição de ensino (escola, classe, etc.).

Com já destacamos na introdução, por meio de conceitos da TAD podemos construir, entre outros, um método de análise de materiais didáticos (livros, cadernos e/ou apostilas destinadas ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos). È isso descreveremos no item abaixo.

3. Metodologia de análise de materiais didáticos (livros, cadernos dos Estados e/ou prefeituras)

A análise de livros didáticos continua a ser a entrada principal para questionamento ecológico ou antropológico. O corpus de dados pode ser completado por outros documentos como programas, revistas, materiais pedagógicos, etc. Nesses trabalhos, o pesquisador realiza uma seleção de manuais e adota uma metodologia de análise com base nas perguntas que ele gera. Apresentamos apoiado em Chaachoua & Comiti (2010), a seguir, os elementos que especificam as características do livro didático, o contexto de sua produção e uma caracterização da relação institucional. Acrescentamos a esses elementos um item importante para a análise de materiais didáticos. Trata-se da avaliação, no sentido de Chevallard (1999), das tarefas/técnicas e tecnologias envolvidas nas organizações matemáticas e didáticas propostas pelos autores desses materiais.

4. O momento da edição do livro didático

Chaachoua e Comiti (2010) afirmam que vemos o sistema de ensino como um sistema dinâmico no qual cada currículo define um estado. É um estado de referência para a operacionalização do sistema.

Para Freitas & Rodrigues (s/d, p.1) "O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, ao longo de tantas transformações na sociedade, ele ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento".

Os mesmos autores destacam que "A trajetória para que os livros didáticos, dicionários, obras literárias e livros em Braille chegassem até às escolas brasileiras teve início em 1929 [...]". (Freitas e Rodrigues, s/d, p.2). Desde então, o sistema de ensino no Brasil, passou por vários Estados.

Dias (2010, p. 2) afirma que

> No período de 1972 a 1981 foram expressivos os projetos apresentados ao Congresso Nacional com o objetivo de rever algumas decisões, suprir ou minimizar a gravidade dos problemas gerados com o custo do livro escolar, por exemplo, evitar substituição de livros, uniformizar a indicação desses livros, substituí-los somente no início do 6º ano letivo a contar da data de sua adoção.

A mesma autora acrescenta que somente em 4 de fevereiro de 1976, que foi publicado o decreto – lei nº77.107

> que dispôs sobre a edição e distribuição de livros-textos, transferindo para a FENAME a competência de realização do Programa do Livro Didático através da Sistemática da co-edição. Pelo convênio firmado entre a FENAME e as Secretarias Estaduais de Educação, obriga-se o governo federal a distribuir um determinado montante de livros ao alunado carente da rede oficial de 1º grau, cabendo aos estados participarem com contrapartida financeira e material". (Oliveira et al., 1997, p. 64, apud Dias, 2010, p.2)

A partir de 1998, foi criado o Guia de Livros Didáticos por meio do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) que traz sugestões de livros para todos os anos, aprovando ou não as obras selecionadas.

De acordo com o PNLD 2016,

> O livro didático de Matemática, instrumento de trabalho do professor e de aprendizagem do aluno, é adequado na medida em que favorece a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo. Para a realização desse processo, alguns princípios gerais precisam ser considerados para que esse livro didático favoreça a aquisição, pelo aluno, de níveis gradativamente mais elevados e complexos de autonomia no pensar. (Brasil, 2015, p.21)

Nessa linha de reflexão, o PNLD 2016, considera importante que o livro didático seja um instrumento que contribua para, entre outras características, "concretizar escolha adequada de conteúdos e maneira pertinente para sua apresentação, em conformidade com as especificidades da Matemática e as demandas da sociedade atua". (Brasil, 2015, p.22)

5. A representatividade

Em países onde existem vários manuais como é o caso no Brasil, é importante proceder com a escolha de um ou vários manuais que são mais utilizados pelo professor. Essa importância é destacada pelo PNLD 2016, quando afirma que:

> O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações que interligam quatro polos: um deles é formado pelo autor e o livro didático; o professor, o aluno e a Matemática compõem os outros três [...]. (Brasil, 2015, p.18-19)

Um dos pontos importantes destacados por Chaachoua & Comiti (2010) é a estrutura da obra sobre a qual dissertaremos no item abaixo.

6. A estrutura

O estudo da estrutura do manual informa-nos sobre o lugar concedido às atividades, a presença ou não de exercícios resolvidos e comentários eventuais dos autores.

Por exemplo, a estrutura dos livros didáticos mudou, pois desde 1998, a avaliação das obras didáticas, inscritas nos PNLD, é feita por meio da articulação entre critérios eliminatórios comuns a todas as áreas e critérios eliminatórios específicos para cada área e componente curricular, requisitos indispensáveis de qualidade didático-pedagógica.

Durante o período da reforma da matemática moderna, capítulos de livros didáticos estavam estruturados em duas partes: curso e exercícios e problemas. Após essa reforma e as exigências do PNLD, hoje, os capítulos consistem, geralmente, em exemplos e atividades resolvidas, seguidos de propostas de atividades que buscam promover a consolidação da aprendizagem. No final de capitulo ou do livro, apresenta-se uma seção convidando ao uso da tecnologia, que apresenta recursos como sites e programas de computador que têm por objetivo auxiliar o aluno e/ou professor no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, tratados no livro.

Os exercícios resolvidos e comentários dos autores nos informam o que é esperado dos estudantes ou professores, quando se trata do livro do Professor.

No próximo tópico, dissertaremos de forma sucinta sobre a análise ecológica, um dos itens importantes na análise de materiais didáticos.

7. Análise ecológica

A análise ecológica de um objeto de saber é organizada em torno de dois conceitos: o ***habitat*** que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual desse objeto de saber, e o ***nicho*** que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.

Trata-se nesse tipo de análise de tentar responder as seguintes questões: O objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado?

As respostas a essas questões permitem identificar a razão de ser desse objeto de saber na instituição escola.

Retomando alguns elementos da TAD, discutiremos, a seguir, os critérios que devem ser usados para a análise de materiais didáticos.

8. Análise praxeológica

Como destacamos anteriormente, Bosch e Chevallard (1999) apresentam o conceito de praxeologia para melhor caracterizar a relação institucional e afirmam: "o que está faltando é o desenvolvimento de um método de análise das práticas institucionais, permitindo a descrição e o estudo das condições de realização. Os últimos desenvolvimentos da teorização vêm preencher essa lacuna. O conceito-chave que aparece é o da organização praxeológica ou praxeologia". (Bosch & Chevallard, 1999, p.85). Daí a hipótese de trabalho: *o estudo da relação institucional pode ser feito pela análise praxeológica*.

A Teoria Antropológica do Didático considera que, em última instância, toda atividade humana consiste em cumprir uma tarefa t de certo tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ que permite ao mesmo tempo cogitar essa técnica ou mesmo de produzi-la. A tecnologia, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Em suma, ela começa a partir da premissa de que toda atividade humana coloca em jogo uma organização, que Chevallard (1998) indica por $[T, \tau, \theta, \Theta]$ e a nomeia de praxeologia ou organização praxeológica.

A palavra praxeologia descreve a estrutura da organização $[T, \tau, \theta, \Theta]$: em grego práxis, que significa "praticar", refere-se ao bloco pratico-técnica (ou práxis) $[T/\tau]$ e o logos (em grego), que significa "razão", "discurso fundamentado", refere-se ao bloco teórico-tecnológico $[\theta/\Theta]$.

Essas noções permitem redefinir certas noções comuns. Pode-se considerar que o bloco $[T/\tau]$ representa o que geralmente chamamos de saber-fazer, e o bloco $[\theta, \Theta]$ representa o que é geralmente referido como saber (no sentido restrito). Chevallard (2002) então designa como praxeologia $[T/\tau/\theta/\Theta]$ uma organização de saber.

Esse modelo da Praxeologia é um bloco básico. Esses blocos básicos virão em geral amalgamar-se para constituir praxeologias locais, nas quais existem vários saberes-fazer justificados pelo mesmo saber, praxeologias regionais nas quais a mesma teoria justificará várias tecnologias, que por sua vez justificarão vários tipos de blocos de tarefas/técnico; praxeologias globais finalmente que incluirão várias teorias.

Falamos de praxeologia matemática – ou de organização matemática - quando os tipos de tarefas T são voltados para a matemática, praxeologia didática - ou de organização didática - quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo. Geralmente, em uma instituição I, uma teoria Θ justifica várias tecnologias θj, cada uma, por sua vez, justifica e torna inteligível várias técnicas τ_{ij} correspondentes a tantos tipos de tarefas T_{ij}. As organizações pontuais vão assim se constituir, primeiro em *organizações locais*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma determinada tecnologia θ e, em seguida, em *organizações regionais*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ. Além disso, Chevallard (1998) nomeia de organização *global*, o complexo praxeológico $[T_{'ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta]$ obtido, em uma determinada instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k.

A implementação dessa abordagem para a análise de livros didáticos, como esses são atualmente estruturados, é organizada frequentemente como segue.

- *Identificação dos tipos de tarefas*: analisam-se as atividades propostas nas diferentes partes do capítulo. Exemplos e atividades do curso (apresentado sob a forma de desafios ou exercícios resolvidos) permitem identificar os tipos de tarefas importantes para a instituição. A parte “exercício” permite identificar o conjunto de todos os tipos de tarefas. Note-se que, nessa fase, o pesquisador realiza agrupamentos de tarefas em tipo de tarefas tais como salienta Artaud (2007, apud Chaachoua & Comiti, 2010, p.776) que afirma que "a noção do tipo de tarefas tem por principal função na análise permitir agrupamentos de tarefas julgadas suficientemente próximas, o tamanho dos grupos depende da realidade modelada, da instituição em jogo e do trabalho que se deseje desenvolver."
- *Identificação de técnicas:* Após a identificação dos tipos de tarefas, procede-se à caracterização das técnicas que permitem cumprir essas tarefas apoiando-se nos exercícios resolvidos e/ou na análise matemática das situações propostas;
- *Identificação de tecnologias*: construímos a tecnologia a partir da análise dos comentários dos autores, do curso e eventualmente da análise do livro do professor *ou de análise matemática de situações propostas para consolidação da aprendizagem*.

Um dos aspectos importantes da TAD é a possibilidade de avaliar as tarefas/técnicas e tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. No item abaixo dissertaremos sobre o assunto.

9. Avaliar as tarefas/técnicas e tecnologias

Para que as análises sejam efetivadas, Chevallard (1999) propõe alguns critérios que podem ser considerados ao avaliar tipos de tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico-teórico. Ele sugere que se verifique se os critérios abaixo elencados são atendidos:

1. **Para a avaliação de tipos de tarefas** (T), Chevallard sugere os seguintes critérios:

- **Critério de identificação**: verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados;
- **Critério das razões de ser**: verificar se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;
- **Critério de pertinência**: verificar se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

2. **Para a avaliação das técnicas** (τ):

A avaliação de técnicas apoia-se nos mesmos critérios discutidos na avaliação de tipos de tarefa. Além disso, é preciso responder as seguintes questões:

a) As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?
b) São fáceis de utilizar?
c) Sua importância é satisfatória?
d) Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego?
e) São suficientemente inteligíveis?

3. **Com relação ao bloco tecnológico-teórico** (θ):

Podemos fazer observações análogas a propósito do bloco tecnológico-teórico. Assim, sendo dado um enunciado, o problema de sua justificação é somente posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?

a) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?
b) Elas são adaptadas ao problema colocado?
c) Os argumentos usados são cientificamente válidos?

O resultado tecnológico de uma dada atividade pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas.

No próximo tópico, apresentamos um exemplo de análise de materiais didáticos (livros didáticos e caderno do Estado de São Paulo), focando o objeto de saber “Equação da reta no plano cartesiano”.

10. Exemplo de análise de livros didáticos usando essa metodologia construída a partir da TAD

Apresentamos, como exemplo, uma parte de um estudo de Marcia Varella (2010), realizado sob nossa orientação. O trabalho de Varella tem por objetivo analisar como autores de materiais didáticos do Ensino Médio organizaram as tarefas propostas com provas e demonstrações no conteúdo “Geometria Analítica” para 3ª série do Ensino Médio.

O aporte teórico que fundamentou as análises de Varella, seguiu os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1999) que focaliza o estudo das organizações praxeológicas – matemática e didática – pensadas para o ensino e aprendizagem da matemática e o trabalho de Nicolas

Balacheff (1988) que visa o estudo da **tipologia de provas**[1] produzidas por alunos

Levando em conta o espaço reservado a este artigo, focalizamo-nos em uma parte da análise de materiais didáticos realizada, convidando o leitor que quiser ter uma visão mais abrangente do estudo a ler o trabalho completo disponível no link conforme as referências deste artigo.

11. Escolha dos Livros Didáticos

Varella (2010), em uma etapa de sua pesquisa, realizou análises, a respeito da organização praxeológica e níveis de provas sobre tarefas que envolvam Equação da Reta em Geometria Analítica no Plano, em livros didáticos do Ensino Médio e por meio do material disponibilizado pela SEESP/2009 – Cadernos do Professor e do Aluno.

Para escolha de livros didáticos, Varella selecionou algumas das coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) para 2009. O referido Programa foi implantado a partir de 2004, pela Resolução nº.38 do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) – Ministério da Educação. Esse Programa tem, entre seus objetivos, a distribuição de livros didáticos para os alunos do Ensino Médio das escolas públicas do país.

A escolha dos livros que serão utilizados nas escolas públicas é feita pelos professores dessas escolas, a partir do Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio fornecido pelo Ministério da Educação, enviado às escolas e disponível em página eletrônica (www.mec.gov.br). O objetivo da criação desse catálogo é selecionar, dentre as coleções de livros didáticos para o Ensino Médio disponíveis no país, aquelas que atendam a critérios que permitam a melhoria da qualidade da Educação Básica, como também o respeito às diferenças e a inclusão social.

Varella (2010) selecionou 7 coleções juntamente com o material disponibilizado pela SEESP (Secretaria do Estado de Educação de São Paulo), que nomeou de LD1, LD2, LD3, LD4, LD5, LD6 e LD7, e o material da SEESP - Caderno do Professor - foram identificados por CP2009 e – Caderno do Aluno – CA2009**.**

---

[1] **Prova pragmática** é hipotecada pela singularidade do acontecimento que a constitui, é preciso aceitar seu caráter genérico. Ela é além disso, tributária de um contingente material: ferramentas imprecisas, defeitos de funcionamento.

Prova intelectual mobiliza uma significação contra uma outra, uma pertinência contra uma outra, uma racionalidade contra uma outra. (BALACHEFF, 1988, p.54).

Balacheff (1988) determina, a partir desses dois tipos de provas, quatro principais tipos considerando a gênese cognitiva da demonstração:

Empirismo ingênuo *(empirisme naif):* é o primeiro nível de validação de uma conjectura. O aluno assume uma conjectura como verdadeira, a partir da verificação de vários casos.

Experiência crucial (*expérience cruciale*): é o segundo nível de validação de uma conjectura por alunos apoiando-se em um caso cuidadosamente escolhido.

Exemplo genérico (*exemple générique*): o aluno explicita as razões para a verdade de uma afirmação (conjectura) por meio de operações ou transformações de um objeto que considera ser o representante característico de sua classe.

Experiência mental (*expérience mentale*): o aluno invoca uma ação em um caso específico, mas afasta-se de sua concretização.

Após a seleção desses livros, Varella (2010) optou em categorizá-los, para selecionar uma amostra representativa para sua pesquisa. Os critérios adotados são:

- livros pertencentes às coleções didáticas adotadas na escola onde a pesquisadora trabalha.
- livros que abordam conceitos de Geometria Analítica.

Com relação aos critérios estabelecidos preliminarmente, os livros que foram adotados na escola da pesquisadora são o LD1 e o LD6. O segundo critério ficou contemplado pela análise preliminar que realizou nos materiais selecionados considerando somente os conceitos relacionados à Geometria Analítica que se faziam presentes antecedendo o estudo da equação de uma reta.

No final dessa fase de estudo, Varella selecionou os materiais didáticos LD1, LD6, LD7, CP2009 e CA2009, assim discriminados:

Quadro 1: – Materiais didáticos selecionados após análise preliminar

MATERIAS DIDÁTICOS PARA ANÁLISE À LUZ DO REFERENCIAL TEÓRICO				
LIVROS DIDÁTICOS			MATERIAL SEESP	
LD1	LD6	LD7	CP2009	CA2009
DANTE, L.R. Matemática. Volume único. Ática, 2005.	**SMOLE, K.C.S. DINIZ, M.I.de S. Matemática ensino médio.** volume 3. 3ª.série. Saraiva, 2005.	**PANADÉS RUBIÓ, A. FREITAS,** L.M.T. de. **Matemática e suas tecnologias**: 3ª. série IBEP, 2005.	**Caderno do Professor: matemática,** ensino médio – 3ª.série, volume 1. SÃO PAULO: SEE, 2009.	**Caderno do Aluno: matemática,** ensino médio – 3ª.série. Volume 1. SÃO PAULO: SEE, 2009

Fonte: Varella (2010, p.124)

O interesse de Varella (2010) está voltado para análise de tarefas envolvendo provas e demonstrações em Geometria Analítica no plano, visando o estudo da equação da reta. Para levar a cabo sua investigação, ela iniciou pela análise do manual do professore.

Essa análise revela os seguintes aspectos:

1. Em LD1, O Manual do Professor (LD1, p.3) faz menção aos princípios gerais da Educação: *aprender a conhecer, a fazer, a conviver e a ser*. A proposta do autor é apresentar "uma nova proposta pedagógica de ensino da Matemática para o Ensino Médio", no que diz respeito a conteúdos e metodologias. Pelas justificativas do autor, Varella afirma que houve a preocupação com o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, considerando ambos os agentes: o aluno, em seus aspectos cognitivos e o professor, pela organização metodológica dos conteúdos e atividades.

2. O material LD6 apresenta a coleção a partir do Manual do Professor com Orientações Didáticas, pretendendo "contemplar as orientações mais atuais para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, observando a necessidade de adequação a alunos com diferentes motivações, interesses e capacidades". (Manual do Professor, LD6, p.2). Nesse material, é proposto que os alunos

elaborassem seus próprios problemas com o objetivo de desenvolver a habilidade de criar, de fazer matemática e adquirir noções sobre a forma de utilização da linguagem matemática. A importância dessa elaboração se dá pelo fato de apresentar ao professor como o aluno está elaborando internamente os conteúdos estudados, ou seja, cognitivamente.

3. Igualmente ao material LD1, observamos a preocupação das autoras com o desenvolvimento cognitivo do aluno e com a organização didática das atividades que auxiliam o professor à introdução aos conteúdos.

4. No material LD7, os autores apresentam um documento denominado Planejamento e Metodologia por meio do qual discutem temas referentes aos pressupostos dos processos de ensino e de aprendizagem, tecnologias aplicadas à educação e diretrizes gerais da avaliação escolar. São apresentadas teorias que fundamentam os estudos referentes ao desenvolvimento cognitivo dos alunos como também se discute o papel da avaliação na atividade escolar, considerados pontos importantes que podem nortear o trabalho do professor.

5. No material CP2009 não há um Manual do Professor, visto que os Cadernos são bimestrais e não seriados ou em volume único. Entretanto, os autores apresentam Orientações Gerais sobre os Cadernos e os conteúdos do bimestre, discriminando as Situações de Aprendizagem presentes em cada um deles e sugerindo materiais que possam auxiliar o trabalho do professor, tais como: textos, softwares, vídeos, sites.

12. Critérios de análise da organização didática

Após a escolha do material didático, Varella (2010) definiu os critérios por meio dos quais essas análises serão realizadas.

A análise proposta por Varella (2010, p.128) baseou-se em quatro questões que julgou relevante verificar ao que concerne o estudo das provas e demonstrações em conteúdos matemáticos. Essas questões ficam identificadas como **Questão 1 (Q1), Questão 2(Q2), Questão 3(Q3) e Questão 4(Q4).**

Para a referida autora, cada questão norteadora apresenta, pelo menos, uma tarefa a ser realizada tendo por justificativa as técnicas escolhidas pelos autores e que poderão ser mobilizadas pelos alunos. Os blocos tarefa-técnica e teórico-tecnológico serão explicitados, juntamente com as especificidades de cada uma das quatro questões.

Varella identificou as tarefas pertencentes a cada uma delas e a simbologia utilizada nessa parte da pesquisa.

t : identifica tarefa τô: identifica técnica Q: identifica questão

Quadro 2: Questões e tarefas relacionadas

Questões norteadoras	Tarefas relacionadas
Questão 1 (Q1): Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo Geometria Analítica?	Tarefa1 (t1Q1): Apresentar parte introdutória[2] à Geometria Analítica
Questão 2 (Q2): Como os conceitos matemáticos que antecedem o estudo da Equação da Reta são apresentados**?**	Tarefa1 (t1Q2): Identificar quais conceitos são trabalhados precedentes ao estudo da Equação da Reta.
	Tarefa2 (t2Q2): Identificar as abordagens utilizadas para descrever esses conceitos.
Questão 3 (Q3): Na introdução aos conceitos que antecedem o Estudo da Equação da Reta são utilizados os termos *propriedade*, *teorema, demonstração, prova*, ou mesmo é feita alguma diferenciação entre eles?	Tarefa1 (t1Q3): Identificar a utilização dos termos nas tarefas executadas e propostas.
	Tarefa2 (t2Q3): Identificar se é apresentada alguma diferenciação entre os termos utilizados pelo método axiomático-dedutivo.
Questão 4 (Q4): As tarefas propostas, voltadas ao estudo da Equação da Reta, apresentam demonstrações ou provas?	Tarefa1 (t1Q4): Identificar as tarefas propostas para o estudo da Equação da Reta.
	Tarefa2 (t2Q4): Identificar, por meio das tarefas, a utilização de provas ou demonstrações.

Fonte: quadro construído a partir de Varella (2010)

A análise foi realizada apoiando-se em dois blocos: tarefas executadas pelos autores na introdução ao conceito (incluindo os exemplos) e tarefas propostas aos alunos, a partir das escolhas de cada autor. Essa escolha permite ter uma visão geral ao comparar o que foi utilizado pelo autor e efetivamente solicitado ao aluno. Esses dois blocos ficam identificados por Bloco de Tarefas 1 (BT1 – atividades executadas pelos autores) e Bloco de Tarefas 2 (BT2 – atividades propostas aos alunos).

Por problema de espaço, apresentaremos os resultados da análise realizada sobre as tarefas executadas pelos autores de materiais didáticos na introdução ao conceito estudado (BT1), mais especificamente resultados relativos às duas primeiras questões norteadoras da análise dos materiais didáticos.

13. Tarefas executadas pelos autores – BT1

1.1.1.1. Análise quanto à 1ª. Questão:

Q1: Qual a abordagem utilizada pelo autor para introdução ao conteúdo Geometria Analítica?

Com relação a essa questão, Varella (2010) identificou três técnicas que permitem realizar a tarefa (t1Q1):

[2] Consideramos aqui o termo "parte introdutória" como o início do capítulo, ou seja, como o capítulo sobre Geometria Analítica está sendo apresentado ao aluno em seu "primeiro contato" com o tema.

Tarefa1 (t1Q1): apresentar parte introdutória à Geometria Analítica, Técnica1 (τô1Q1): abordagem histórica, **Técnica2 (τô2Q1):** abordagem direta sem recorrer à história da matemática e **Técnica3 (τô3Q1)**: utilização de registros de representação semiótica[3].

A tarefa (t1Q1) e a técnica (τô1Q1) são contempladas nas três coleções selecionadas (LD1, LD6, LD7) ao iniciarem o assunto com um breve histórico sobre a origem da Geometria Analítica, mas a técnica (τô2Q1) não é contemplada. Os textos introdutórios referem-se aos estudos de Nicole Oresme, René Descartes citando sua obra *La Géométrie,* o Sistema Cartesiano Ortogonal, os estudos de Newton e Pierre de Fermat.

Varella (2010) observou no texto da coleção LD1 e no exemplo utilizado na coleção LD7 a correlação da Geometria Analítica com elementos e processos algébricos, mencionando que é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas e representar, por meio da Geometria, algumas questões algébricas.

Quanto à técnica (τô3Q1), ela é verificada nas três coleções (LD1, LD6, LD7) por apresentarem registros de representação (algébricos, figurais e textuais) para exemplificar a utilização da Geometria Analítica**.** No material LD6 o registro figural remete ao estudo do ponto e das coordenadas cartesianas no plano.

Diferentemente de LD1 e LD6, em LD7, é apresentada uma situação de localização de ruas. A localização se dá pela utilização de uma malha quadriculada, com o objetivo de promover a adequação de trajetos, quantidade de praças e ruas que possam ser instaladas na região. Essa situação promove a substituição de pontos por números ou pares de números, relacionando conteúdos algébrico e geométrico**.**

No material CP2009, a Geometria Analítica aparece sob o tema *"O plano de Descartes: a parceria entre a álgebra e a geometria"* com destaque à equação da reta, relacionando a Geometria Analítica com um método de abordagem dos problemas geométricos, contemplando o ideal cartesiano, aproximando a Geometria e a Álgebra.

Em CA2009, não são propostas a tarefa (t1Q1) nem a técnica (τô1Q1). Contempla-se a técnica (τô2Q1), em ambos os materiais, visto que a introdução a Geometria Analítica é realizada de forma direta. Essa abordagem contempla a técnica (τô3Q1) pela utilização de registros figurais e algébricos que exemplificam o estudo da distância entre dois pontos, da inclinação de um segmento de reta, do alinhamento de três pontos e das posições relativas entre duas retas.

Varella (2010) afirma que nas três coleções selecionadas (LD1, LD6, LD7), a parte introdutória à Geometria Analítica foi feita por meio de abordagem histórica. Estabeleceu-se correlação entre a Geometria e a Álgebra, ora pelo tratamento algébrico às questões geométricas, ora representando geometricamente expressões algébricas. A utilização de registros de representação (algébricos, figurais e

[3] Um registro de representação semiótica é, segundo Duval (1999), um sistema semiótico que tem as funções fundamentais em nível do funcionamento consciente. Esses registros podem ser: desenho ou figura geométrica, a linguagem natural ou mesmo a linguagem matemática/simbólica. (ALMOULOUD, 2003, p.125)

textuais) também foi verificada nas três coleções, por meio de exemplos no contexto matemático e fora dele.

Varella (2010), comparando as coleções de livros didáticos (LD1, LD6, LD7) com o material CP2009 e CA2009, observa uma carência, no que diz respeito à abordagem histórica, nos materiais da SEESP.

Análise quanto à 2ª. Questão:

Questão 2 (Q2): Como são apresentados os conceitos matemáticos que antecedem o estudo da Equação da Reta?
Tarefa1 (t1Q2): identificar quais conceitos são trabalhados antes do estudo da Equação da Reta.
Técnica1 (τô1Q2): levantamento dos conteúdos abordados em cada material didático.
O quadro 3 apresenta os conteúdos abordados em Geometria Analítica que antecedem o estudo da Equação da Reta, com divergências de um volume para outro. O quadro 3 revela os seguintes conteúdos contemplados no total de materiais verificados, atendendo a tarefa (t1Q2) e a técnica (τô1Q2): estudos sobre a Reta Real (LD7), o Sistema Cartesiano Ortogonal (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Bissetrizes dos Quadrantes (LD6), Distância entre dois pontos (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Ponto Médio de um segmento de reta (LD1, LD6, LD7, CP2009, CA2009), Baricentro de triângulos (LD6, LD7), Condição de Alinhamento de três pontos (LD1, LD6, CP2009, CA2009), Área de triângulos (LD6, LD7) e Coeficiente angular de uma reta (LD1, CP2009, CA2009).

Quadro 3: Conteúdos abordados que antecedem o estudo da Equação da Reta (t1Q2)

	RETA REAL	SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL	BISSETRIZES DOS QUADRANTES	DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA	BARICENTRO DE TRIÂNGULOS	CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS	ÁREA DE TRIÂNGULOS	COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA
LD1		•		•	•		•		•
LD6		•	•	•	•	•	•	•	
LD7	•	•		•	•	•		•	
CP2009		•		•	•		•		•
CA2009		•		•	•		•		•

Fonte: Varella (2010, p.136)

Após a realização de t1Q2 e τô1Q2, Varella(2010) identificou as seguintes tarefas:

Tarefa2 (t2Q2): localizar pontos na reta real.

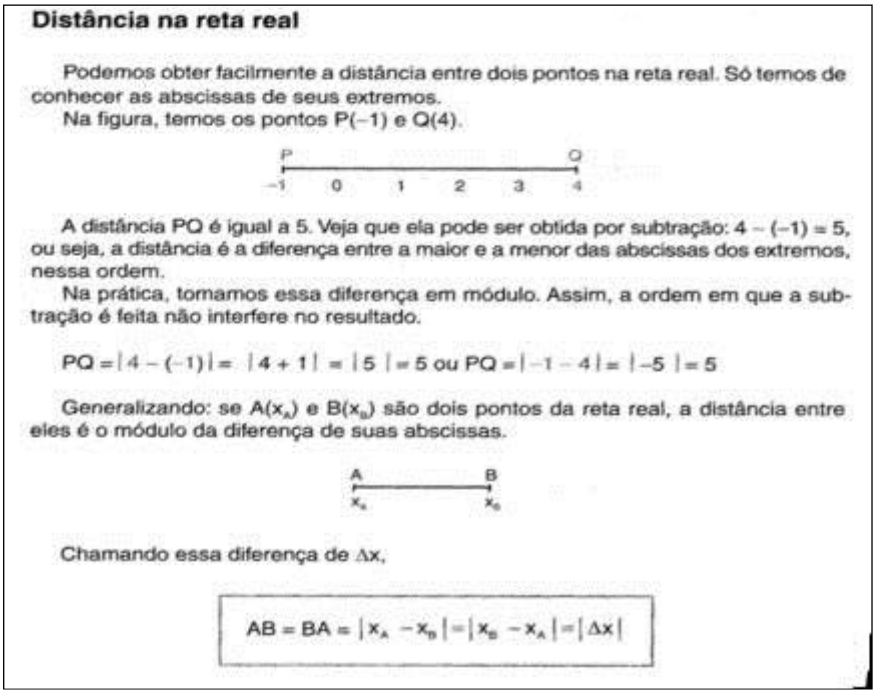
Técnica1 (τô1t2Q2): utilização do sistema de coordenadas.

A tarefa (t2Q2) foi proposta somente pelo autor do material LD7. O objetivo era relembrar os conceitos sobre a correspondência entre os números reais e os pontos na reta numérica e estabelecer uma unidade de comprimento sobre a reta. A reta numérica, posteriormente no Sistema Cartesiano Ortogonal, se denominará *eixo* a partir de sua orientação positiva ou negativa. A técnica utilizada pelo autor para desenvolver essa tarefa foi fazer uso de um registro figural (reta orientada) para exemplificar a localização dos pontos e o cálculo da distância entre dois pontos sobre a reta. O autor do livro apresentou um exemplo numérico (Figura 1). A intenção é fazer com que o aluno entenda a generalidade a partir de um exemplo numérico. Partindo da categorização de provas idealizada por Balacheff (1988), podemos classificar esse exemplo como uma prova pragmática, do tipo exemplo genérico, utilizada com o intuito de mostrar ao aluno como se estabelece o cálculo (numérico) da distância entre dois pontos na reta com posterior generalização.

A generalização da distância entre dois pontos sobre a reta é apresentada sem menção ao termo teorema, sendo apresentada em linguagem natural e matemática simbólica, com destaque à expressão Δx.

Ao avaliarmos a técnica escolhida pelo autor para realizar a tarefa proposta, conforme especifica Chevallard (1999) sobre critérios de avaliação de técnicas, acreditamos que outros exemplos numéricos fossem necessários e que a generalização devesse ser construída nos moldes de um sistema dedutivo, concluindo ao teorema em questão e ao uso linguagem formal apropriada.

Figura 1: Cálculo da distância na reta real. (LD7, p.151)



Distância na reta real

Podemos obter facilmente a distância entre dois pontos na reta real. Só temos de conhecer as abscissas de seus extremos.

Na figura, temos os pontos P(−1) e Q(4).

A distância PQ é igual a 5. Veja que ela pode ser obtida por subtração: $4 - (-1) = 5$, ou seja, a distância é a diferença entre a maior e a menor das abscissas dos extremos, nessa ordem.

Na prática, tomamos essa diferença em módulo. Assim, a ordem em que a subtração é feita não interfere no resultado.

$PQ = |4 - (-1)| = |4 + 1| = |5| = 5$ ou $PQ = |-1 - 4| = |-5| = 5$

Generalizando: se $A(x_A)$ e $B(x_B)$ são dois pontos da reta real, a distância entre eles é o módulo da diferença de suas abscissas.

Chamando essa diferença de Δx,

$$\boxed{AB = BA = |x_A - x_B| = |x_B - x_A| = |\Delta x|}$$

Fonte: Varella (2010, p.138)

O discurso tecnológico-teórico que justifica a técnica utilizada na resolução da tarefa de localizar pontos na reta real, baseia-se no campo da Geometria a partir de eixos orientados que dão suporte ao Sistema Cartesiano Ortogonal e o teorema da distância entre dois pontos.

Tarefa3 (t3Q2): localizar pontos no plano

Técnica1 (τô1t3Q2): utilização do Sistema Cartesiano Ortogonal.

A tarefa (t3Q2) foi realizada pelos autores dos três materiais didáticos como introdução a esse tópico. Os materiais CA2009 e CP2009 não apresentam tarefas introdutórias, resolvidas pelos autores, sobre localização de pontos no plano. Em

LD1, LD6 e LD7, o Sistema Cartesiano Ortogonal é introduzido com o intuito de relembrar os conceitos sobre eixos orientados, correspondência biunívoca entre números reais e pontos no plano, coordenadas de um ponto (abscissa, ordenada), divisão do plano em quatro quadrantes e apresentação das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.

As técnicas escolhidas pelos autores utilizam registros figurais (representação do plano cartesiano) em malha quadriculada (LD1, LD7) e linguagem matemática simbólica para o par ordenado ora constituído (abscissa, ordenada). Ainda nesses materiais, apresentam-se pontos a serem localizados por exemplos numéricos, sem definir a generalização para um ponto qualquer do plano.

Tal generalização é constatada em LD6 que apresenta a localização de pontos a partir de suas coordenadas gerais: $P(x_p, y_p)$. Percebemos em LD6 que a técnica escolhida pela autora privilegia a linguagem matemática simbólica, característica do método axiomático. Essa escolha antecipa o contato do aluno com aspectos generalizadores que permeiam a elaboração de uma demonstração.

No material CP2009, a técnica empregada privilegia a utilização do Sistema Cartesiano Ortogonal, a partir da representação de segmentos de reta e retas, porém não apresenta atividades resolvidas sobre localização de pontos no plano.

O discurso tecnológico-teórico que justifica a utilização dessas técnicas é o campo da Geometria, pela formalização do Sistema Cartesiano Ortogonal, pelo teorema que estabelece a correspondência biunívoca entre pontos do plano e pares de ordenados.

Tarefa4 (t4Q2): Estudar as bissetrizes pertencentes aos quadrantes pares e ímpares.

Para essa tarefa, Varella (2010) identificou duas técnicas: “Técnica1 (τô1t4Q2): definição de bissetriz” e “Técnica 2 (τô2t4Q2): definição da relação de pertinência de ponto a reta”.

A tarefa (t4Q2) foi proposta pelo autor do material LD6. Em LD7, o autor representa as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano, porém não cumprida, já que o autor não discutiu o significado das mesmas e as propriedades geométricas que podem ser deduzidas.

Nesse material (LD7), o autor propõe uma reflexão sobre o comportamento das coordenadas dos pontos localizados nas bissetrizes. Entendemos que essa escolha possa ser interpretada como uma técnica para incutir no aluno a curiosidade da busca de uma propriedade que explicasse esse comportamento. Apesar de não se tratar de uma demonstração explícita, essa reflexão pode suscitar a descoberta das funções das demonstrações nos moldes propostos por De Villiers (2002).

Em LD6, a técnica (τô1t4Q2) não foi aplicada, e para cumprir a tarefa (t4Q2), o autor dá destaque à representação geométrica das bissetrizes no plano cartesiano, à linguagem natural para apresentação da propriedade e à linguagem matemática simbólica. Vale ressaltar que o termo propriedade não é utilizado.

A linguagem simbólica, utilizada para estudar a propriedade de pertinência de um ponto à bissetriz dos quadrantes pares ou ímpares, poderia ser deduzida a partir da utilização de provas pragmáticas. Essa escolha privilegiaria o entendimento da propriedade definida a partir de exemplos numéricos que conduzissem a uma generalização. Entendendo esse processo, como uma etapa da definição de uma propriedade geral a partir de casos particulares.

Comparando as técnicas utilizadas em ambos os materiais – representação geométrica e a reflexão sobre as coordenadas dos pontos pertencentes a uma bissetriz - acreditamos que uma junção das duas provocaria a busca de conjecturas e suas eventuais validação.

No Quadro 4, apresentam-se as tarefas e as técnicas relacionadas às tarefas t2Q2, t4Q2 e t4Q2, mas também os registros de representação semiótica privilegiados pelos autores e o tipo de prova usada.

Quadro 4: Quadro sintético das tarefas executadas pelos autores em BT1

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
Tarefa	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
t2Q2	LD7	Localizar pontos na reta real.	Localização de números reis sobre a reta numérica; Localização de pontos sobre a reta numérica;	Figural; Linguagem natural;	Não houve necessidade de produção de prova.
t3Q2	LD1	Localizar pontos no plano cartesiano.	Utilização de malha quadriculada no referencial cartesiano, com unidade de medida;	Figural; linguagem natural; linguagem matemática simbólica;	
	LD7	Determinar as coordenadas dos pontos A,B,C,D,E,F.			
	LD6	Não elaborada.	Utilização do referencial cartesiano.		
t4Q2	LD6				

Fonte: Varella (2010, p.141)

Tarefa5 (t5Q2): Definir e calcular a distância entre dois pontos.

Varella (2010) destaca quatro técnicas que permitem cumprir a referida tarefa: "Técnica1 (τô1t5Q2): demonstração da fórmula da distância entre dois pontos", "Técnica2 (τô2t5Q2): apresentação da fórmula da distância entre dois pontos", "Técnica3 (τô3t5Q2): utilização de exemplos para aplicação da fórmula", e "Técnica4 (τô4t5Q2): representação geométrica para o cálculo da distância".

No Quadro 6, apresentam-se informações sintéticas sobre a tarefa 5 e as técnicas relacionadas.

Varella (2010) assevera que nos materiais LD1 e LD7, as demonstrações apresentadas pelos autores, definem provas intelectuais com o objetivo de confirmar uma conjectura verificada numericamente.

O bloco tecnológico-teórico, que justifica as técnicas ora apresentadas, é formado pela noção de distância entre dois pontos, o Teorema de Pitágoras para compor a fórmula que calcula a distância entre dois pontos do plano, a localização de pontos e segmentos de reta no plano cartesiano.

As coleções LD1, LD6 e LD7 apresentam tarefas resolvidas utilizando o conceito de distância entre dois pontos. Pelas técnicas utilizadas pelos autores, observa-se que esses autores de livros didáticos privilegiaram resoluções algébricas por meio de provas ora pragmáticas ora conceituais e, com exceção do autor da coleção LD7, todas as tarefas executadas utilizaram a representação geométrica como auxiliar no processo de resolução.

Quadro 5: Tarefas do bloco BT1 – (t5Q2)

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
Tarefa (t5Q2)	LD1	Um ponto P(a,2) é equidistante dos pontos A(3,1) e B(2,4). Calcular a abscissa do ponto P.	Demonstração por resolução algébrica com representação geométrica.	Figural; linguagem algébrica e numérica;	Produção de prova pragmática e intelectual;
		Demonstrar que o triângulo com vértices A(-2,4), B(-5,1) e C(-6,5) é isósceles.			
	LD6	Determine no eixo das abscissas, um ponto que dista 5 unidades de A(6,-3).		Figural; linguagem matemática simbólica (generalização)	
		Determine na bissetriz do 2º. E do 4º. Quadrante, o ponto equidistante de A(3,2) e de B(-4,-1).			
		A(3,1) e B(1,5) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD.Determine os outros vértices.			
		Determine o centro da circunferência que passa pelo ponto A(1,2) e tangencia os eixos coordenados.			
	LD7	Calcular o perímetro do triângulo de vértices A(2,0), B(-2,-3) e C(-1,4).		Figural; linguagem algébrica e numérica;	
		Determinar o ponto da 2ª. bissetriz que é equidistante de A(1,2) e B(-4,-1).			

Fonte: Varella (2010, p.149)

Em relação aos critérios propostos por Chevallard (1999) para avaliar tipos de tarefas (T), técnicas (τ) e bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), Varella afirma que:

> as tarefas propostas pelos autores são representativas das situações iniciais de estudo. Em relação às técnicas escolhidas foram efetivamente esboçadas e de fácil utilização desde que haja domínio dos conhecimentos prévios necessários para a realização de tais técnicas: localização de pontos no plano cartesiano, resolução de triângulos retângulos e aplicação do teorema de Pitágoras, dentre outros. O bloco tecnológico-teórico apresentou justificativas inseridas no campo da Álgebra e da Geometria, por vezes pela utilização da linguagem matemática simbólica, podendo suscitar novas técnicas para a resolução de novas tarefas. (Varella, 2010, p.149)

Com relação às tarefas: Tarefa 6 (t6Q2): Definir e calcular as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e Tarefa 7 (t7Q2): Definir e estudar o conceito de Baricentro de um triângulo**,** Varella definiu as técnicas que podem ser aplicadas para a resolução de ambas, tais como: Técnica1 (τô1Q2): demonstração da fórmula,Técnica2 (τô2Q2): apresentação da fórmula, Técnica3 (τô3Q2): utilização de exemplos para aplicação da fórmula eTécnica4 (τô4Q2): representação geométrica como registro figural do conceito estudado. No Quadro 6, apresentam-se exemplos de situações cuja resolução faz apelo a essas técnicas.

Na sua análise, Varella (2010) aponta que, nos materiais LD1, LD6 e LD7, as atividades relativas às tarefas (t6Q2) e (t7Q2) são executadas a partir da técnica (τô3Q2). Pela análise dessas atividades, ela observou que os autores privilegiaram as aplicações diretas das fórmulas ora demonstradas, caracterizando o que Balacheff (1987) denomina de raciocinar para a prática, inclusive em questões que exijam aprofundamentos, seja pela organização matemática ou pela interpretação do enunciado da questão.

Quadro 6: Apresentação sintética das atividades executadas pelos autores–BT1–tarefas (t6Q2/t7Q2).

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividades	Técnicas	Registros de represen-tação	Tipo de prova
Tarefa (t6Q2)	LD1	Determinar M, ponto médio do segmento AB, nos seguintes casos: a) A(3,-2) e B(-1,-6) b) A(1/2;1/3) e B(-1;2/3)	Resolução algébrica (aplicação de fórmula)	Figural; linguagem matemática simbólica.	Produção de prova pragmática e intelectual; Demonstração com função de comunicação.
		Calcular os comprimentos das medianas de um triângulo de vértices A(2,-6), B(-4,2) e C(0,4).	Resolução algébrica com representa-ção geométrica		
	LD6	Calcular as coordenadas do ponto médio do segmento AB cujas extremidades são A(-4.8) e B(7,-1).			
		Determinar o ponto de intersecção das diagonais e o 4º. vértice de um paralelogramo ABCD cujos outros vértices são A(3,-5), B(5,-3) e C(-1,3)			
	LD7	Achar o ponto médio do segmento de extremos A(5,-4) e B(-3,8).			
		Encontrar o ponto simétrico de P(1,-1) em relação ao ponto Q(-2,3).			
Tarefa (t7Q2)	LD6	Determinar os vértices A,B, C e o baricentro G do triângulo ABC, sabendo que M(2,-1), N(-1,4) e P(-2,2) são os pontos médios, respectivamente, dos lados AB, BC e AC.			
	LD7	Determinar o baricentro do triângulo de vértices A(6,-3), B(3,4) e C(-3,2).	Resolução algébrica (aplicação da fórmula)		

Fonte: Varella (2010, p.155)

O bloco tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas adotadas para a realização das tarefas (t6Q2) e (t7Q2), comporta as noções de ponto médio de um segmento de reta e Baricentro de triângulos definidas nos campos da Álgebra e da Geometria. A noção de demonstração é apresentada tanto na introdução ao conceito quanto na execução das tarefas, pela formalização utilizada e adequação dos termos: *seja, então, logo*, que são característicos da linguagem formal e do método axiomático.

Em relação aos critérios estipulados por Chevallard (1999) para avaliar as tarefas, técnicas ou mesmo o bloco tecnológico teórico, adotados em BT1 para as tarefas (t6Q2) e (t7Q2), Varella considera que foram contemplados os critérios 1 e 2 nos três materiais didáticos que apresentaram tais tarefas. O critério 3 também foi contemplado, pois os tipos de tarefas considerados são representativos das situações envolvendo a Geometria Analítica geralmente trabalhadas no Ensino Médio e são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

Tarefa8 (t8Q2): Definir a condição de alinhamento de três pontos.

Varella identificou cinco técnicas que podem ser empregadas para a resolução da tarefa t8Q2: Técnica1 (τô1t8Q2): relação de pertinência de um ponto a uma reta, Técnica2 (τô2t8Q2): relação de semelhança entre triângulos retângulos, Técnica3 (τô3t8Q2): demonstração da colinearidade por determinante nulo, Técnica4 (τô4t8Q2): apresentação da colinearidade por determinante nulo eTécnica5 (τô5t8Q2): utilização da representação geométrica para definição do alinhamento de três pontos.

O Quadro 7 sintetiza exemplos de situações propostas pelos autores.

Quadro 7: Síntese das tarefas executadas pelos autores BT1-tarefa (t8Q2)

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	**Atividades**	**Técnicas**	**Registros de representação**	**Tipo de prova**
Tarefa (t8Q2)	LD6	Verificar se são colineares os pontos: a) A(-3,-5), B(1,3) e C(-1,-1) b) A((-1,4), B(5,-2) e C(2,3)	Resolução algébrica, pelo cálculo de determinante.	Figural; linguagem matemática simbólica;	Produção de prova intelectual e pragmática; Demonstração com função de comunicação e explicação;
	LD1	Verificar se os pontos A(-3,5), B(1,1) e C(3,-1) estão alinhados.			

Fonte: Varella (2010, p.157)

O bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas utilizadas apoia-se nos campos da Álgebra e da Geometria por abranger propriedades relativas à resolução de igualdade de sentenças algébricas, da semelhança de triângulos, das operações no conjunto dos números reais e o sistema de coordenadas cartesianas que permitiu a representação geométrica e a visualização do alinhamento de três pontos.

É interessante observar que, após a formalização das demonstrações em LD1 e LD6, as atividades propostas privilegiaram a técnica do determinante caracterizando-se, segundo Balacheff (1987), como esferas de prática. Esse autor define esferas de prática como aquelas situações nas quais não há a necessidade de validação das ações, uma vez que elas podem ser asseguradas por aplicação de um algoritmo, ou mesmo, pela aplicação de estratégias padronizadas.

As atividades executadas pelos autores para institucionalização do conceito estudado constituem provas pragmáticas, caracterizadas pela função de verificação da veracidade de uma propriedade.

Com relação à "**Tarefa 9 (t9Q2): Determinar o coeficiente angular de uma reta**", Varella identificou três técnicas para cumpri-la, são elas**:** Técnica1 (τô1t9Q2): dedução da fórmula do coeficiente angular, Técnica2 (τô2t9Q2): apresentação da fórmula do coeficiente angular, Técnica3 (τô3t9Q2): utilização da representação geométrica.

O Quadro 8 apresenta exemplos de situações propostas pelos autores dos materiais didáticos e as técnicas relacionadas.

Ressaltamos que nos materiais didáticos LD6 e LD7, os temas Coeficiente angular e inclinação de uma reta são tratados antes do estudo da Equação da Reta, portanto não analisaremos essa tarefa nesse momento.

Em LD1, esse assunto é estudado antes do tópico Equação da Reta. A abordagem utilizada pelo autor faz referência à inclinação (α) de uma reta *r* em relação ao eixo x, sem mencionar a equação geral ou reduzida da reta, visto que esses assuntos ainda não foram estudados. Inicialmente, o autor apresenta a fórmula do coeficiente angular contemplando a técnica (τô2t9Q2), escolhendo explicitá-la posteriormente. O autor observa quatro casos para estudar a declividade da reta, considerando $0° \leq \alpha < 180°$: $\alpha = 0°$; $0° < \alpha < 90°$; $90° < \alpha < 180°$ e $\alpha = 90°$. A dedução da fórmula (τô1t9Q2) se dá, aliada à técnica (τô3t9Q2), a partir da elaboração de provas intelectuais abrangendo duas maneiras para obtenção do coeficiente angular: conhecendo a inclinação (α) da reta e conhecendo dois pontos quaisquer da reta $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Na elaboração dessas provas, o autor utiliza-se do cálculo da tangente de um ângulo por meio da diferença entre abscissas (Δx) e ordenadas (Δy) de dois pontos, para definir o coeficiente angular (m) de uma reta.

Quadro 8: Síntese das tarefas executadas (t9Q2) em LD1

TAREFAS EXECUTADAS PELOS AUTORES – BT1					
	Material didático	Atividade	Técnicas	Registros de representação	Tipo de prova
Tarefa (t9Q2)	LD1	Calcular o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(2,3) e B(4,7). Sugestão: O ângulo α é agudo $(0° < \alpha < 90°)$, pois m>0. Confirme construindo a figura com A e B.	Aplicação da fórmula do coeficiente angular pela tangente trigonométrica; resolução algébrica.	Figural; linguagem matemática simbólica;	Produção de prova intelectual e pragmática.

Fonte: Varella (2010, p.159)

Na tarefa apresentada pelo autor como exemplo do conteúdo estudado, observa-se a elaboração de uma prova pragmática pertencente ao bloco (BT1), a partir da aplicação da fórmula para cálculo do coeficiente angular. O autor sugere que se faça a verificação ou validação do resultado por meio da comparação usando a seguinte tecnologia: se m>0, então a reta apresenta sentido crescente em relação ao eixo x, como também a sugestão da construção geométrica. Na proposta desse autor de livro didático, deu-se ênfase à articulação entre Álgebra e Geometria na demonstração elaborada para a apropriação de Coeficiente angular de uma reta.

A partir das observações tecidas acima, Varella (2010) afirma que essa tarefa seria um momento oportuno para se explorar o uso da linguagem simbólica na produção de uma prova. Ela ainda afirma que

> A técnica escolhida pelo autor pode criar condições para o aluno interpretar o significado de coeficiente angular de uma reta como um procedimento puramente mecânico, singular, no sentido de não entender a necessidade de uma análise e validação do resultado encontrado. (Varella, 2010, p.159)

O bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas escolhidas pelo autor é composto pela álgebra, geometria e trigonometria, ao representar geometricamente, no plano cartesiano, dois pontos pertencentes a uma reta e utilizar o conceito de tangente (trigonometria) para determinação do coeficiente angular (cf. figura 2).

Figura 2: Prova intelectual tarefa (t9Q2). (LD1, p.401)

Seja **r** a reta determinada por **A**(x_1, y_1) e **B**(x_2, y_2) e seja **C**(x_2, y_1).

No triângulo retângulo ABC ($\hat{C}$ é reto), temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d(C, B)}{d(A, C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Então:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Fonte: Varella (2010, p.160)

A ideia de demonstração pode ser verificada no emprego da técnica (τô1t9Q2) e pela utilização dos termos *seja*, *temos* e *então*... pertencentes à linguagem simbólica da demonstração

14. Considerações a respeito dessa análise

O propósito da elaboração dessa questão foi o de analisar quais conteúdos matemáticos os O propósito da elaboração dessa questão foi o de analisar quais conteúdos matemáticos e materiais didáticos propunham como precedentes ao estudo da equação da reta, as organizações didáticas (OD) e matemáticas (OM) desses conteúdos a partir das abordagens escolhidas e a existência de provas segundo a tipologia proposta por Balacheff (198, 1988). A análise permitiu levantar os conteúdos matemáticos que esses autores consideraram necessários à compreensão da representação de uma reta por meio de sua equação.

A partir do levantamento realizado nos materiais didáticos, Varella identificou os conteúdos que são comuns a todos esses materiais, tais como: Sistema Cartesiano Ortogonal, distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta.

A propriedade “Condição de alinhamento de três pontos” e “o coeficiente angular de uma reta” foram trabalhados pela maioria dos autores dos materiais antes do estudo da equação da reta.

Os estudos com Baricentro e área de triângulos foram contemplados somente por dois materiais didáticos (LD6, LD7). A importância do estudo desses dois temas reside no fato de possibilitar relacionar a medida de área de triângulo ao teorema que estabelece a condição de alinhamento de três pontos, uma vez que três pontos não colineares definem um triângulo e colineares definem uma reta. Essa interação poderia ser proposta nos demais materiais didáticos.

Apesar de existirem conteúdos de Geometria Analítica não contemplados em alguns desses materiais, todos atendem às recomendações dos documentos oficiais que estabelecem tais conteúdos.

O estudo de Varella (2010) permite ter

> um panorama geral da OM referente ao conteúdo Geometria Analítica proposto por cada um dos materiais didáticos até o estudo da equação da reta, bem como, as escolhas dos autores, por meio da OD proposta. Chevallard (1999) considera de fundamental importância a elaboração de uma OD, visto que tem por objetivo o ensino e a aprendizagem de uma OM, ou seja, "fazer existir uma relação pessoal com a organização matemática ou modificar a relação já existente com essa organização". Entende-se por modificação a mobilização de novas técnicas para uma tarefa já existente, ou mesmo, a ampliação do bloco tecnológico-teórico. (Varella, 2010, p.161)

Além disso, Varella (2010) observou que os autores elaboram provas que vão de pragmáticas às intelectuais em algumas tarefas propostas. Ela afirma que

> [..]. Há a preocupação em relacionar a linguagem algébrica e geométrica que representam os objetos matemáticos estudados. As técnicas mobilizadas utilizam-se dos conhecimentos específicos do capítulo como também retomam conhecimentos anteriormente adquiridos. (Varella, 2010, p.161)

Pela análise realizada, tudo indica que os materiais didáticos analisados apresentam subsídios suficientes para que o aluno possa compreender a representação de uma reta no plano, algebricamente e geometricamente. No entanto, Varella (2010) considera que, o tipo de organização didática, proposta para o ensino e a aprendizagem de alguns conteúdos, pode causar a memorização de fórmulas prontas e desvinculadas de teoremas e propriedades que sustentam sua validação matemática.

Do ponto de vista da análise ecológica, apesar de ter apresentado resultados parciais da pesquisa de Varella, observamos os tipos de tarefas escolares em que se utilizam as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos da Geometria Analítica, em especial, a Equação da Reta no Plano. A "razão de ser" da Geometria Analítica, mais especificamente do estudo da Equação da Reta, isto é, as questões problemáticas que dão sentido ao estudo da Equação da Reta no Plano, parecer ser relacionada à "condição de alinhamento de três pontos do plano", a construção de uma equação que representa essa condição e tarefas cujo cumprimento exige a mobilização de técnicas e tecnologias diretamente ensinadas e/ou oriundas de organizações matemáticas (Teorema de Pitágoras, medidas de área de figuras planas etc.) anteriormente estudadas no âmbito da Geometria Analítica, Geometria Plana e/ou álgebra.

Referências

Balacheff, N.(1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation.* In: Educational Studies in Mathematics, n.18. pp. 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve em mathématique chez des eleves de Collège.* 1988, 619 f. Vol.1 e 2. These (Docteur ès- Sciences Didactique des Mathématiques). Université Joseph Fourier – Grenoble 1. Institut National Polytechnique de Grenoble.

Balacheff, N. (1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation.* In: Educational Studies in Mathematics. no.18. pp.147-176.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

Brasil (2015). PNLD 2016, Ensino Fundamental – Anos iniciais. disponível no http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-editais/item/4889-edital-pnld-2016 , acesso, 02/11/2015.

Chaachoua, H., Comiti C. (2010) *L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique*, ACTESCITAD2, 2010, p. 771-789
(in http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/9%20-%20Chaachoua-Comiti-congres_TAD_2.pdf, acesso, 02/11/2015)

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique.* Recherches em Didactique dês Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v.12.1, p.73-112.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des *mathematiques: l'approche anthropologique***.** Recherches em Didactique dês Mathématiques. Vol.19, no.2, pp.221-26.

Chevallard, Y. (2002). *Organiser l'etude.1. Structures & fonctions*. Actes de la 11 École d' Été de Didactique dês Mathématiques. France: La Penseé Sauvage. 2002. versão eletrônica, disponível em: <www.yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: 15 Jul. 2015.

Dias, E. (2010). Livro didático: do surgimento às mudanças atuais**,** Anais do II Seminário de Pesquisa do NUPEPE Uberlândia/MG, p. 132-143 21 e 22 de maio 2010, versão eletrônica disponível em http://www.eseba.ufu.br/arquivos/anais/trabalhos_Completos/Eixo_1/Eliana_Dias_-_Livro_didatico_do_surgimento_as_mudancas_atuais.pdf , acesso em 01/11/2015

Varella, M. (2010). *Prova e demonstração na Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP – acessado em 01/11/2015 no http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=12213

Saddo Ag Almouloud concluiu o doutorado em Mathematiques et Applications – na Université de Rennes I - França em 1992. É professor e está como coordenador do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Consultor ad hoc da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, da CAPES e bolsista pesquisador do CNPQ. Publicou mais de 30 artigos em periódicos especializados e mais de 83 trabalhos em anais de eventos. Possui 5 capítulos de livros e 12 livros publicados. Possui 1 software e mais de 80 itens de produção técnica. Participou de 10 eventos no exterior e mais de 112 no Brasil. Orientou mais de 50 dissertações de mestrado e teses de doutorado na área de Educação Matemática. Participou de pelo menos 80 bancas de defesa de dissertações e doutorados. Atualmente coordena dois projetos de pesquisa aprovados pelo CNPq e FAPESP. Em suas atividades profissionais interagiu com pelo menos 50 colaboradores em coautorias de trabalhos científicos. Os termos, mais frequentes na contextualização de sua produção cientifica são: ensino-aprendizagem, geometria, educação matemática, matemática, demonstração, ensino básico, formação de professores, geometria dinâmica. saddoag@pucsp.br e saddoag@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 35-54

www.fisem.org/web/union

La red colaborativa de aprendizaje y el desarrollo profesional del profesor de Matemáticas: investigando conexiones

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Maria Elisabette Brisola Brito Prado

Fecha de recepción: 23/01/2012
Fecha de aceptación: 25/10/2015

Resumen	Esta investigación de carácter cualitativo analiza registros textuales de memorandos de reflexión de un grupo de profesores de Educación Primaria para entender cómo se establece una red colaborativa de aprendizaje durante acciones de formación continua. El análisis interpretativo permitió identificar categorías, tales como: Reflexión compartida, Aprendizaje, Confianza, Reflexión sobre la práctica, Intercambio de experiencias, Metas compartidas y Compromiso con los demás, las cuales dejan en evidencia características del trabajo colaborativo. El tratamiento dado a las categorías, con el software CHIC, permitió un análisis relacional entre ellas, mostrando que la formación en esa perspectiva puede favorecer el desarrollo profesional docente al darle al profesor la oportunidad de sentirse aprendiz por un lado y, también, enseñante por otro. **Palabras claves:**Formación continua,Trabajo colaborativo,Aprendizaje en red.
Abstract	This qualitative research analyzes text records of reflective logs from an Elementary School group of teachers aiming at understanding how a collaborative learning network is set up during continued education activities. The interpretative analysis allowed us to identify categories such as follows: Shared reflection, Learning, Confidence and Reflection about practice, Exchanging experience, Shared goals and Commitment to others, all of which have collaborative work features. Categories were analyzed using CHIC software, which allows for the relational analysis among them showing teacher development under this perspective can promote professional development by giving teachers the opportunity to experience themselves as learners and, also, as tutors to others. **Key words:** Continued Education, Collaborative Work, Network Learning.
Resumo	Esta pesquisa de caráter qualitativo analisa registros textuais de memoriais reflexivos de um grupo de professores da Educação Básica para entender como se estabelece uma rede colaborativa de aprendizagem durante ações de formação continuada. A análise interpretativa permitiu identificar categorias, tais como: Reflexão compartilhada, Aprendizagem, Confiança, Reflexão sobre a prática, Troca de experiências, Metas compartilhadas e Compromisso com o outro, as quais evidenciam características do trabalho colaborativo. O tratamento dado às categorias, com o software CHIC, permitiu análise relacional entre elas mostrando que a formação nessa perspectiva pode favorecer o desenvolvimento profissional docente ao oportunizar ao professor sentir-se aprendiz e, também, ensinante do outro. **Palavras-chave:** Formação Continuada, Trabalho colaborativo, Aprendizagem em rede**.**

1. Presentación

El trabajo docente del profesor requiere, actualmente, una atención especial considerando el nuevo paradigma de la sociedad y de la escuela. Eso, en realidad, implica repensar la formación del profesor, tanto la inicial como la continua, de modo que pueda impulsar el desarrollo profesional docente, así como estimular una actitud de aprendizaje continuo, o sea, durante toda la vida. El profesor de Matemáticas de hoy necesita tomar en cuenta los artefactos de la cultura actual, lo que significa manejar diferentes formas de interpretar y expresar el pensamiento, así como de resignificar el conocimiento de tal forma que pueda reconstruir su práctica pedagógica. Además, el profesor que actúa en la Educación Primaria se encuentra constantemente con nuevas propuestas y orientaciones curriculares que, a su vez, exigen reconstrucciones, tanto del propio conocimiento matemático como de lo que ocurre habitualmente en la escuela.

Existe una preocupación en las instancias de las políticas educativas, así como entre los educadores matemáticos, por la calidad del aprendizaje del alumno, especialmente en la Educación Primaria que es estructurante para los futuros profesionales del siglo XXI. En ese sentido, queda cada vez más evidente la necesidad de dirigir acciones hacia la formación de los profesores pues, porque en última instancia, son ellos los interlocutores entre el conocimiento y el estudiante de ese segmento escolar. Las cuestiones y las problemáticas involucradas en la formación inicial y en la continua son instigadoras para que se desarrollen proyectos de investigaciones que objetiven comprender las demandas existentes, procurando caminos para que los enfoques de formación se conciban pautados en principios que favorezcan el desarrollo profesional del profesor.

2. Desarrollo Profesional Docente y Trabajo Colaborativo

Las investigaciones han mostrado indicadores para el desarrollo de procesos de educación continuada que pueden contribuir para transformaciones de la práctica docente objetivando favorecer la mejora de la calidad de la enseñanza de las Matemáticas. Tales indicadores enfatizan la importancia de que se creen situaciones que le propicien oportunidades al profesor para reflexionar sobre el propio aprendizaje y sobre su práctica pedagógica, que permitan que el individuo identifique sus percepciones, su actitud pedagógica y estrategias metodológicas que utiliza en el contexto del aula. (Pietropaolo et al, 2009).

En ese sentido, varios autores tales como Imbernón (2010); Prado y Valente (2002); Campos et al (2009), entre otros, destacan que la formación continua dedicada al desarrollo profesional debe considerar los aspectos cotidianos del aula, integrando las acciones contextuales para que el profesor pueda revisitar su práctica, reflexionar sobre ella y reconstruirla.

> "…la vivencia práctica del aula del profesor también debe presentarse como una situación de estudio y de reflexión del profesor en formación. Esa situación permite que el profesor ponga en acción los presupuestos teóricos y, así, perciba la necesidad de relativizarlos, considerando los varios elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje"(Prado, 2003, p. 41).

El enfoque de la formación continua que prioriza el aprendizaje contextualizado, la actitud investigativa y reflexiva del profesor, requiere el seguimiento sistemático del formador como mediador pedagógico en el contexto de la actuación del profesor. En ese sentido, Lobo da Costa et al. (2010); Prado (2006), destacan la importancia del papel del formador para proporcionar situaciones que favorezcan las interacciones entre los docentes para que se pueda construir una red colaborativa en la que cada uno aprende y le enseña al otro.

El trabajo colaborativo, con base en las ideas de Fullan et al. (2000) se caracteriza por varios aspectos entre los cuales destacamos: las actitudes y los comportamientos en las relaciones entre docentes, las cuales revelan confianza, compromiso, compartir ideas, experiencias y cuestionamientos, así como la valoración tanto individual como del grupo al cual pertenecen.

Sin embargo, conviene enfatizar que el trabajo colaborativo no se establece de inmediato entre los involucrados. Según Imbernón (2010):

> "... el trabajo colaborativo entre los profesores no es fácil, ya que es una manera de entender la educación que busca propiciar espacios donde ocurra el desarrollo de habilidades individuales y grupales de intercambio de diálogo, del análisis y de la discusión entre todos en el momento de explorar nuevos conceptos" (p.65).

Siendo así, un abordaje de formación necesita desarrollar intencionalmente estrategias que favorezcan la colaboración como una práctica construida por los integrantes de un grupo. Eso porque diversas investigaciones, como la de Fiorentini et al. (2002) han constatado la existencia de indicios de que el trabajo colaborativo es fundamental para el desarrollo profesional de los profesores.

El desarrollo profesional aquí se entiende a partir de la definición de Ponte (1997) como un compuesto de todos los movimientos emprendidos por el profesor, que llevan a la reestructuración de su práctica pedagógica, partiendo de reflexión, acción y nueva reflexión. Es "*un proceso de crecimiento en la competencia en términos de prácticas lectivas y no lectivas, en el autocontrol de su actividad como educador y como elemento de la organización escolar*" (p. 44)

Para impulsar el desarrollo profesional, según el autor, es importante considerar tanto el elemento colectivo como el individual. Una vez que ése es favorecido por contextos colaborativos (institucionales, asociativos, formales o informales) en los cuales el profesor tiene la oportunidad de interactuar con sus pares.

En particular, en el estudio de Lobo da Costa (2004) se identificó que el trabajo colaborativo involucraba características que se presentaron en el proceso de formación, las cuales fueron denominadas *categorías*. Ellas son: (C1) Reflexión compartida, (C2) Aprendizaje/Aprender con los demás, (C3) Acciones docentes, (C4) Acciones de formación, (C5) Investigación sobre la práctica, (C6) Intercambio de experiencias, (C7) Representatividad del pensamiento de todos los participantes, (C8) Alianza; (C9) Metas compartidas, (C10) Compromiso con el grupo, (C11) Confianza, (C12) Participación voluntaria, (C13) Diálogo/Interacción; (C14) Desarrollo de la autonomía y (C15) Reflexión sobre la práctica.

Cabe resaltar que investigadores tales como Boavida y Ponte (2002) también han apuntado el trabajo colaborativo como una interesante posibilidad en los procesos de educación continuada. Para esos autores la colaboración ocurre en "*casos en los cuales diversos intervinientes trabajan en conjunto, no en una relación jerárquica, sino en una base de igualdad de manera que haya ayuda mutua y se alcancen objetivos que beneficien a todos*" (p.45). En el trabajo colaborativo existe la ventaja de lanzar múltiples miradas sobre la situación educativa lo que, por consiguiente, permite que se produzcan cuadros interpretativos consistentes sobre el tema estudiado e investigado.

Al trabajar en grupos de connotación colaborativa se subvierte la relación formador-formando, de manera que la idea, muchas veces cristalizada, de que en un proceso de educación continuada existe un formador o equipo de formadores que actúa con un grupo de profesores promoviendo su formación sea sustituida por la idea de formar un equipo de educadores en el cual actúen juntos los investigadores de la universidad y/o de instituciones responsables de los proyectos y los profesores, en una relación de aprendizaje y desarrollo mutuo. (Lobo da Costa, 2006).

Otro tema relevante se refiere a las conclusiones de la reunión del GT 7 en el III SIPEM[1] contenidas en el Informe (SBEM, 2007), esas indicaron que:

> La alianza, la búsqueda de la construcción de conocimiento colectivo responden a las necesidades actuales. Los profesores de las escuelas, muchas veces, están actuando como sus alumnos al recibir un conocimiento impuesto y/o sin significado: lo rechazan. Las

[1] SIPEM: Seminario Internacional de Investigaciones en Educación Matemática, 2006. GT7: Grupo de Investigación sobre Formación de Profesores.

> propuestas de formación que se apoyan en la transmisión de conocimientos -bien intencionadas, aunque desvinculadas de la realidad local de cada grupo de profesores- no se muestran relevantes hace décadas. Juntos -profesor de escuela y profesor de la universidad– reflexionan sobre sus propios conocimientos profesionales y dan un nuevo significado a su propio desarrollo profesional[2].

El GT7 enfatiza la importancia de proyectos de educación continuada cuyo foco no sea únicamente el aumento del conocimiento matemático del profesor, pero que promuevan discusiones de contenidos que estén vinculados con el cotidiano del aula. Destacan que el establecimiento de alianzas entre los educadores matemáticos de la universidad y los de las escuelas es fundamental para el desarrollo de conocimientos conjuntos, necesarios tanto para la academia como para la escuela. En ese sentido, el grupo de investigadores brasileños se acerca a indicadores que han sido indicados en el contexto mundial (Jaworski, 2008).

El estudio al cual se refiere este artículo está dentro del Programa Observatorio de la Educación, que tiene como característica involucrar a los investigadores de la academia con los profesores en ejercicio en la Educación Primaria, teniendo como principio el desarrollo de un trabajo en alianza, con estricta vinculación con la realidad del aula. Expresado de otra manera, esta alianza se constituye a partir de la integración de los diferentes conocimientos: el teórico y el práctico.

3. Escenario del estudio

La investigación que subvenciona este artículo se encuentra en el Proyecto “Educación Continuada de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Primaria y Secundaria: Constitución de un Núcleo de Estudios e Investigaciones sobre Procesos de Formación” (ECPMEFM, según sus siglas en portugués), vinculado al Programa Observatorio de la Educación. Ese Programa es una iniciativa del Gobierno Federal Brasileño que tiene como meta la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las escuelas públicas del país y se desarrolla en alianza con universidades. En él, la comunidad académica es incentivada a desarrollar acciones e investigaciones dirigidas a las necesidades de formación de los profesores que actúan en la Educación Primaria.

El Proyecto ECPMEFM se ha desarrollado en una Universidad privada poner el nombre concreto de la ciudad de São Paulo, en el área de Educación Matemática, con un grupo de docentes, alumnos de doctorado y de maestría que actúan e investigan con profesores que enseñan Matemáticas en escuelas públicas. El Proyecto de formación e investigación tiene como principal finalidad desarrollar una metodología de educación continuada de profesores de Matemáticas de Primaria, incluyendo la creación de redes colaborativas de aprendizaje profesional, para propiciar la sostenibilidad que es considerada un concepto base.

[2]Informe del GT7 – disponible en: http://www.sbem.com.br/files/RelatorioGT7.pdf

Este Proyecto está en desarrollo, tiene una duración de cuatro años e involucra diversos grupos de profesores de Matemáticas de Educación Primaria de la ciudad de São Paulo; las acciones de formación son realizadas presencialmente en la Universidad mediante actividades prácticas y teóricas relacionadas con los conceptos matemáticos y sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las prácticas desarrolladas por los profesores en los contextos de las escuelas junto con sus respectivos alumnos son relativas y debatidas. El grupo utiliza un ambiente virtual de aprendizaje (AVA) especialmente personalizado para el Proyecto, con el fin de ampliar los espacios de interacción y de diálogo entre los participantes, compartiendo ideas y experiencias sobre el propio proceso vivido y en sus prácticas en la enseñanza de las Matemáticas.

Uno de los ejes que guían la formación del profesor de Matemáticas del Proyecto ECPMEFM es la constitución de grupos colaborativos entre profesores de la escuela y de la universidad, profesores de la escuela entre sí y profesores y alumnos. En ese aspecto, se procura investigar en qué medida tales grupos favorecen el desarrollo profesional de los profesores involucrados. Se trata de emprender investigación cualitativa, de cuño co-generativo, en el sentido dado por Greenwood y Levin (2000), o sea, un tipo particular de investigación-acción que se desarrolla debido a la alianza entre los investigadores y los profesores que, juntos, generan el conocimiento. Se considera que ambos tipos de conocimiento, el práctico y el académico, son esenciales para el desarrollo de la investigación. La formación continua se delinea por diferentes estrategias de acciones relacionadas a la contextualización del aprendizaje y con la construcción de una red colaborativa entre los pares, incluyendo las posibilidades de las interacciones virtuales como una de las maneras de permitir los registros escritos de las reflexiones de los participantes. (Prado, 2003; Lobo da Costa et al, 2008).

Es en ese escenario en el que se desarrolla el estudio aquí relatado. El objetivo fue el de comprender cómo se establece una red colaborativa de aprendizaje durante acciones de formación continua. Para eso analizamos datos recopilados del primer grupo de participantes del Proyecto, constituido por treinta profesores de Educación Primaria de la red pública del Estado de São Paulo.

Las acciones de formación desarrolladas con ese grupo fueron los siguientes:

- Discutir contenidos con base en el currículo oficial de Matemáticas del Estado de São Paulo, iniciando por Secuencias y, luego, Geometría Plana.
- Desarrollar actividades incluyendo: narrativas, identificación de las expectativas y solicitudes de los profesores, así como historias de vida y reflexión sobre el propio aprendizaje.
- Discutir sobre las finalidades de Educación Matemática.

- Discutir temas relacionados a las prácticas desarrolladas en las escuelas con los alumnos y las teorías abordadas, reflexiones y estudios hechos en los momentos presenciales.

En lo que se refiere a la recopilación de datos, una de las estrategias utilizadas en el Proyecto ECPMEFM fue la de solicitar –después de un semestre de interacción con el grupo-, la elaboración de un memorándum de reflexión. Tal memorándum fue hecho individualmente y poniendo a disposición en el ambiente virtual de soporte las acciones de formación.

El Memorando de Reflexión fue un documento fundamental en la recopilación de datos de investigación, principalmente por dos razones: uno, por propiciarle al profesor la oportunidad de registrar su trayectoria de aprendizaje, de tal modo que en ese proceso de reconstitución pueda reflexionar y tomar conciencia de lo que vivió en el grupo. Otra razón es que permite al formador y al investigador, para llevarlos a conocer las acciones, reacciones, sentimientos, impresiones, interpretaciones, explicitaciones, hipótesis y preocupaciones en las experiencias vividas por los profesores del grupo y también reorientar las futuras acciones de formación.

El análisis de los Memorándums fue interpretativo, utilizando como categorías las características recopiladas en la investigación de Lobo da Costa (2004) mencionadas en la sección anterior. Además de ese análisis interpretativo de los registros textuales se hizo un tratamiento de cuño estadístico de las categorías, por medio del uso del software CHIC 2004 (Clasificación Jerárquica Implicativa y Coercitiva, por sus siglas en portugués)[3] que nos permite obtener una visualización de semejanzas y clases de variables mapeadas en niveles de un árbol jerárquico.

A partir de esos indicadores identificamos y analizamos las categorías que se mostraban presentes en los registros puestos a disposición en el ambiente virtual, que son provenientes de los memorándums de reflexión de los profesores participantes.

Resultados

El análisis interpretativo de los registros almacenados en el AVA puso en evidencia la presencia de las siguientes categorías de características del trabajo colaborativo:

Código	Categoría	Descripción
C1	**Reflexión compartida**	Relatos revelándole al grupo su forma de pensar y sus indagaciones.

[3] Para más detalles sobre el CHIC véase Gras (2000) y Almouloud (1992).

C2	**Aprendizaje/Aprender con los demás**	Relatos declarando el propio aprendizaje (específico y pedagógico del contenido).
C3	**Acciones docentes**	Relatos involucrando experiencias en el aula.
C6	**Intercambio de experiencias**	Relatos involucrando contenidos y actividades prácticas.
C9	**Metas compartidas**	Relatos involucrando proceso de búsqueda para alcanzar objetivos comunes.
C10	**Compromiso con el grupo**	Relatos declarando actitudes comprometidas con los demás
C11	**Confianza**	Relatos que indican sensación de pertinencia y comodidad.
C13	**Diálogo/Interacción**	Relatos que demuestran reconocimiento del valor de los diálogos en el grupo.
C14	**Desarrollo de la Autonomía**	Relatos que indican mayor seguridad en las decisiones.
C15	**Reflexión sobre la práctica**	Relatos que demuestran reconstitución de la práctica pedagógica vivida.

Tabla 1. Categorías de características del trabajo colaborativo

En definitiva, de las quince categorías listadas por Lobo da Costa (2004), diez fueron identificadas en los registros de esta investigación. Presentamos extractos de registros de memorándums de reflexión de los participantes, que ejemplificanlas distintas categorías de trabajo colaborativo que están descritos abajo:

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C13 Diálogo/Interacción
C11 Confianza

ESTA CONVIVENCIA FUE DE GRAN AYUDA, PUES MUCHAS DUDAS QUE YO TENÍA FUERON ACLARADAS Y LOS TEMAS DISCUTIDOS FUERON DE GRAN IMPORTANCIA. POR EJEMPLO, ESTUDIAR LOS NIVELES DE PARSYSZ FUE MUY INTERESANTE, PUES REFLEXIONAMOS UN POCO MÁS SOBRE CÓMO FUNCIONA LA MENTE DE LOS NIÑOS. FUE GRANDE LA INTERACCIÓN DE ESTE GRUPO DE ESTUDIO.
(**REGISTRO DEL PROF. A**)

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C6 Intercambio de Experiencias
C13 Diálogo/ Interacción

LOS ENCUENTROS EN LOS QUE HACÍAMOS EJERCICIOS PRÁCTICOS ERAN MÁS PROVECHOSOS, CONSEGUÍAMOS INTERCAMBIAR EXPERIENCIAS Y APRENDÍAMOS A RESOLVER LOS EJERCICIOS DE VARIAS MANERAS, PUES SURGÍAN VARIAS FORMAS DE SOLUCIÓN.
(**REGISTRO DEL PROF. B**)

En esos dos registros se observa que el dominio del contenido matemático es fundamental y constituye el primer paso para hacer que el profesor repiense su práctica pedagógica, aunque sepamos que tan sólo tener el conocimiento matemático no asegura reflexión sobre la práctica ni transformaciones en el aula.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C15 Reflexión sobre la práctica	PUDE NOTAR QUE HABLARLES SOBRE GEOMETRÍA A MIS ALUMNOS NO ES TAN COMPLEJO, ES POSIBLE Y ES REAL, LA GEOMETRÍA PRESENTADA DURANTE LOS MÓDULOS ES UNA GEOMETRÍA BONITA Y FÁCIL DE SER DESARROLLADA, Y SIRVIÓ DE INCENTIVO PARA LA APLICACIÓN EN EL AULA. POR EJEMPLO, SOBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS, CUANDO DIBUJAMOS EN LA CARTULINA Y EXPLORAMOS DIVERSOS ASUNTOS (¡PUES UNA COSA LLAMA A LA OTRA!), CONSTRUYENDO EL TANGRAM, USÁNDOLO CÓMO ROMPECABEZAS, ¡CARAMBA, ESO FUE LO MÁXIMO! DESPUÉS NOS ENFOCAMOS EN OTRO TEMA SOBRE EL ÁREA DEL TRAPECIO (…) Y NOS PROFUNDIZAMOS MÁS EN EL TEOREMA DE PITÁGORAS. (**REGISTRO DEL PROF. C**)

En el registro anterior queda evidente que cuando el docente nota nuevas posibilidades de enfocar las Matemáticas, a las cuales asigna significado, él se siente satisfecho y constata que puede ser adecuado para su alumno; se inicia a partir de ahí un movimiento que puede tener impacto en el aula.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C11 Confianza	APRENDÍ MUCHO, Y ES DIFÍCIL DECIR QUÉ FUE MÁS SIGNIFICATIVO, PUES TODO Y TODOS LOS TEMAS FUERON SIGNIFICATIVOS. APRENDÍ SOBRE LOS DIVERSOS TIPOS DE TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y ME ENCUADRÉ EN ALGUNAS DE ELLAS, APRENDÍ CÓMO PODEMOS UTILIZAR LA GEOMETRÍA EN EL AULA UTILIZANDO MATERIALES CONCRETOS HECHOS DE FORMA SENCILLA Y CONSTRUCTIVA, APRENDÍ MUCHO SOBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y SU CONTEXTUALIZACIÓN. EL CONTENIDO MÁS SIGNIFICATIVO FUE EL DESARROLLO DE LOS EJERCICIOS DE GEOMETRÍA, LA PARTE DELA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS, EN EL CUAL TUVE LA OPORTUNIDAD DEACLARAR DUDAS Y APRENDER...(**REGISTRO DEL PROF.D**)

La palabra que surge con más fuerza en el registro anterior es *“aprendí”*. Analizamos que para eso es fundamental que el docente se sienta a gusto en el grupo y confiado para asumir una actitud abierta de *“aprendiente”*, que propicia que el aprendiz establezca relaciones entre lo que seenfoca y estudia en el colectivo con sus acciones en el desarrollo de su enseñanza en la escuela. Se nota en ese registro que el aprendizaje de conceptos matemáticos no ocurrió de forma aislada, sino relacionada con el contexto y de forma reflexiva.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C3 Acciones docentes C6 Intercambio de Experiencias C11 Confianza C15 Reflexión sobre la práctica	LAS DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS DE PITÁGORAS Y OTRAS HECHAS EN LOS TRIÁNGULOS FUERON TRABAJADAS JUSTAMENTE CUANDO YO LES DABA CLASES DE SEMEJANZA A MIS ALUMNOS DEL 9.ºAÑO. TUVE QUE HACER ALGUNOS CAMBIOS HACIENDO APLICACIONES PRÁCTICAS EN LUGAR DE UTILIZAR TÉRMINOS TÉCNICOS. APROVECHÉ LAS IDEAS DE ALGUNOS COLEGAS QUE FUERON UTILIZADAS EN LAS DEMOSTRACIONES Y DIO UN BUEN RESULTADO. (**REGISTRO DEL PROF. E**)

Se observa en ese registro el hecho de estar abierto a *Aprender con los demás* y que el aprendizaje en el grupo ha potenciado que ocurran transformaciones de la práctica. Notamos que, como hubo coincidencia entre lo que era discutido en los encuentros y el contenido curricular de las clases, fue posible desarrollar acciones docentes utilizando materiales y metodologías anteriormente discutidas y analizadas en el trabajo colectivo.

C1 Reflexión compartida C9 Metas compartidas C10 Compromiso con el grupo	LO QUE MÁS ME ATRAE EN ÉSTE Y EN OTROS CURSOS ES FORMAR GRUPOS QUE TIENEN EL MISMO FOCO DE INTERÉS: MEJORAR LA FORMA DE ABORDAR CONTENIDOS EN EL AULA. Y, PARA LOGRARLO, NOTE QUÉ LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES ESTÁ DEFICITARIA, PUES MUCHOS COLEGAS DEMUESTRAN Y AFIRMAN TENER MUCHA DIFICULTAD EN ENTENDER DIVERSOS CONTENIDOS Y ESO ME AFLIGE, PUES NO SÉ COMO EVITAR ESA SITUACIÓN. (**REGISTRO DEL PROF. F**)

El docente reconoce una de las características más importante en el trabajo colaborativo de un grupo que es tener un mismo foco de interés. Al observar a los colegas identificando sus fragilidades conceptuales, consecuencia de la deficiencia de la formación inicial nos da la sensación de que, en muchos casos, el profesor es víctima de un sistema de formación que si no es revisado provoca un círculo vicioso que dificulta la mejora de la educación.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C9 Metas compartidas C10 Compromiso con el grupo C 15 Reflexión sobre la práctica	EN EL SEGUNDO MÓDULO, QUE FUE UNA CONTINUIDAD POSITIVA DEL PRIMERO, TUVIMOS MÁS ENFOQUES DE GEOMETRÍA, AMPLIANDO NUESTRACOMPRENSIÓN. HUBO UNA EXPOSICIÓN INTERESANTE DE LA PROFESORA SERRAZINA QUE ME HIZO PENSAR Y ASUSTARME CUANDO ELLA DIJO: “SI YO ENSEÑO Y MIS ALUMNOS NO APRENDEN, ES PORQUE NO ENSEÑO. (**REGISTRO DEL PROF. G**)

El efecto de la frase *“si yo enseño y mis alumnos no aprenden, es porque no enseño”* muestra la toma de conciencia del docente al reconocer que la enseñanza y el aprendizaje son dos procesos distintos, pero que están interrelacionados en la acción educativa. Profesor y alumno forman un sistema y, en la interacción, uno enseña y aprende cómo enseñar y el otro aprende y enseña cómo aprende, siendo ambos responsables por el desarrollo del otro.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C11 Confianza	...RENOVÉ MIS CONOCIMIENTOS, APRENDÍ DETERMINADOS TEMAS QUE NO HABÍA ESTUDIADO, TANTO EN LA ENSEÑANZASECUNDARIACOMO EN LA FACULTAD. CONSEGURIDAD, LO QUE APRENDÍ ME AYUDÓ MUCHO, TANTO PARA MI CRECIMIENTO PERSONAL COMO PROFESIONAL. (…) LES AGRADEZCO POR LA OPORTUNIDAD DE HABER FORMADO PARTE DE ESTE GRUPO, CON PROFESORES Y COLEGAS MARAVILLOSOS. APRENDÍ MUCHO CON TODOS USTEDES **(REGISTRO DEL PROF. H)**

La sensación de completitud manifestada por el docente en el momento en que reconoce su potencial de aprendizaje muestra que el educador, sea del área que sea, necesita sentirse listo en términos de conocimiento para ejercer su profesión con autonomía. Corresponde, por lo tanto, una revisión profunda del papel de la institución de enseñanza.

C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C3 Acciones docentes C14 Desarrollo de la Autonomía C15 Reflexión sobre la práctica	LA GEOMETRÍA, SIN LUGAR A DUDAS, APORTÓ MUCHO EN LA ENSEÑANZA ENEL AULA. (...) FUE FÁCIL ACLARAR LAS DUDAS DE LOS ALUMNOS PUES DISCUTIMOS EN EL GRUPO EXACTAMENTE ESA MATERIA. TRABAJÉ PROBLEMAS DEL COTIDIANO, COMO EL DE LA ESCALERA Y EL DEL VOLANTÍN/ COMETA QUE UTILIZAMOS EN LOS ENCUENTROS. ME PARECIERON INTERESANTES LOS TRABAJOS EN GRUPO QUE DESARROLLAMOS. NORMALMENTE, EN EL AULA APLICO EJERCICIOS PARA RESOLVER INDIVIDUALMENTE, PERO, A PARTIR DE AHÍ, PASÉ A USAR LA PRÁCTICA DEINVESTIGACIONES EN GRUPO Y A LOS ALUMNOS LES GUSTÓ MUCHO.(**REGISTRO DEL PROF. I**)

Ese registro confirma lo que discutimos en los análisis ya hechos y trae una información complementaria, un aspecto relativo a la práctica de grupo; él destaca que, en el Proyecto, la vivencia de situaciones en las cuales cada uno puede aprender con los demás, interactuando, explicitando ideas y enfrentando puntos de vista han enriquecido el aprendizaje.

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C11 Confianza

EN EL MÓDULO 2: QUEDÉ DESLUMBRADO POR EL HECHO DE HABER DIVERSASMANERAS DE SOLUCIONAR LAS ACTIVIDADES. ME GUSTARÍA QUE TUVIÉRAMOS MÁS ENCUENTROS CON GEOMETRÍA, PORQUE AÚN SON TANTAS LAS DUDAS QUE NOTÉ QUE TENGO MUCHO QUE APRENDER. COMO DIJO EINSTEIN: “YO SÓLO SÉ QUE NO SÉ NADA. (**REGISTRO DEL PROF. J**)

El deseo y esa apertura, o sea, la motivación interna para aprender manifestada por el docente, muestra que fue posible construir una relación de confianza entre los componentes del grupo, permitiendo que cada uno pudiera reconocerse de forma auténtica en términos de lo que sabe y de lo que necesita saber.

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C6 Intercambio de experiencias
C13 Diálogo/Interacción
C15 Reflexión sobre la práctica

AL INICIO PENSÉ QUE SERÍA OTRO DE AQUELLOS CURSOS EN LOS QUE NUESTRO GRADO DE APRENDIZAJE SERÍA NULO, PERO VERIFIQUÉ EN LOS ENCUENTROS POSTERIORES QUE NO SE TRATABA DE UN CURSO, SINO DE MUCHO MÁS QUE ESO. SE TRATABA DE UN INTERCAMBIO DE IDEAS Y EXPERIENCIAS VIVIDAS POR OTROS PROFESORES EN SU PRÁCTICA DOCENTE DEL COTIDIANO EN EL AULA. (...) APRENDÍ QUE PARA CALCULAR UNA SIMPLE ÁREA DE UNA FIGURA COMO UN CUADRADO, PODEMOS ENSEÑAR POR LO MENOS TRES FORMAS DIFERENTES, CREANDO ASÍ UN AMBIENTE DE MAYOR INTERACCIÓN ENTRE CONTENIDO Y ALUMNO.
(**REGISTRO DEL PROF. K**)

El registro es un indicio de que, a lo largo del tiempo, se fue estableciendo una relación más flexible, con una jerarquía menor de la que se establece en cursos de educación continuada. O sea, mucho más allá de profesores de la universidad que dictarían un curso a profesores de la red pública, empezamos a constituir un grupo de educadores matemáticos discutiendo e intercambiando experiencias sobre aprender y enseñar Matemáticas.

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C6 Intercambio de experiencias
C11 Confianza

EL GRUPO ME AYUDÓ A ACLARAR DIFICULTADES EN GEOMETRÍA. AL PRINCIPIO, CUANDO NOS PIDIERON QUE ELABORÁRAMOS ACTIVIDADES REFERENTES A DETERMINADOS TEMAS, SENTÍ UN POCO DE INSEGURIDAD EN ALGUNOS MOMENTOS, PERO, CON EL TRANSCURSO DEL TIEMPO NOTÉ QUE MIS DIFICULTADES TAMBIÉN ERAN LAS DE ALGUNOS COLEGAS. NOTÉ TAMBIÉN QUE LA MANERA DE REUNIRNOS EN GRUPO AYUDÓ A SOLUCIONAR DUDAS QUE ERAN DE TODOS.
(**REGISTRO DEL PROF.L**)

C1 Reflexión compartida
C2 Aprendizaje
C11 Confianza
C6 Intercambio de experiencias

	APRENDÍ UN POCO CON CADA UNO DE LOS PARTICIPANTES Y CON LAS INTERVENCIONES DE LOS PROFESORES COLABORANDO EN PUNTOS DE VISTA AÚN NO PERCEPTIBLESSEGÚN MI COMPRENSIÓN, (…), ES UN ÁREA EN LA CUAL YO TENGO DIFICULTADES EN TRABAJAR EN ELCAMPO TEÓRICO DE LAS DEMOSTRACIONES Y PRUEBAS DE ALGUNOS AXIOMAS. APROVECHÉ BASTANTE TODAS LAS EXPLICACIONES DE LOS COLEGAS, (…) FUE LO SUFICIENTE PARA QUE YO GENERALIZARA ESE CONOCIMIENTO. (…) CON LA AYUDA DEL GRUPO LOGRÉ EVOLUCIONAR. (**REGISTRO DEL PROF. M***)*
C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje	PUDE VER QUE HOY YA ESTOY DIFERENTE DECUANDO ENTRÉ, TENGO UN “POQUITO” MÁS DE CONOCIMIENTO, PERO CREO QUE YA SIRVE PARA MEJORAR MI PRÁCTICA DOCENTE. (**REGISTRO DEL PROF. N**)
C1 Reflexión compartida C2 Aprendizaje C15 Reflexión sobre la práctica C13 Diálogo/ Interacción	APRENDÍ A REFLEXIONAR MÁS SOBRE LOS TEMAS A SER TRABAJADOS CON LOS ALUMNOS, DESARROLLANDO ASÍ MAYOR PERCEPCIÓN EN EL RAZONAMIENTO, DANDO ÉNFASIS A INVESTIGACIONES Y COMENTARIOS EN GRUPOS.VALORANDO LA OPINIÓN DE TODOS PARA UN MAYOR DISCERNIMIENTO EN APLICACIONES MATEMÁTICAS. (**REGISTRO DEL PROF. O**)
C1 Reflexión compartida C15 Reflexión sobre la práctica C11 Confianza C6 Intercambio de Experiencias C3 Acciones docentes	LO INTERESANTE ES QUE PODEMOS LLEVAR LAS SITUACIONES QUE OCURREN DENTRO DEL AULA A LA DISCUSIÓN EN GRUPO, LA FORMA COMO SE COMPORTAN LOS ALUMNOS, CÓMO APRENDEN Y SU COMPORTAMIENTO RELACIONADO A LOS DIVERSOSTEMAS DEL CONTENIDO APLICADO (**REGISTRO DEL PROF. P**)

En los cinco últimos registros textuales se observa que los profesores reconocen la existencia de una nueva forma de aprender basada en el intercambio de experiencias ocurridas en un contexto de formación en la que se desarrolla el trabajo colaborativo, estableciendo y fortaleciendo un clima de confianza para enseñar y aprender con los demás.

Con una mirada más global podemos observar en los registros textuales la presencia constante de la característica Reflexión compartida(C1). Eso se debe al hecho de que todos los participantes tuvieron acceso, en todo momento, a los registros de los memorándums de reflexión puestos a disposición en el ambiente virtual. Esa posibilidad de que el profesor participante pudiera escribir y reescribir sus registros, así como hacer la lectura y relecturas cuantas veces deseara de sus registros y del de los colegas e insertar sus comentarios, es algo favorable para compartir ideas, reflexiones, experiencias y cuestionamientos entre los componentes de un grupo.

La segunda característica que apareció con más frecuencia en los registros fue Aprendizaje (C2), mostrando que, en el trabajo colaborativo, estar abierto a aprender es algo imprescindible. Algunos de los registros muestran claramente que el profesor reconoce la importancia del papel en el otro, en su proceso de aprender.

La característica Confianza (C11) está relacionada con el Aprendizaje, ya que en el trabajo colaborativo el profesor necesita sentirse seguro para explicitarle sus fragilidades a los demás, sin temer juicios, y con el valor y la expectativa de su desarrollo personal y profesional.

Además de ese análisis interpretativo de los registros, presentamos el tratamiento dado a las categorías que están presentes en ellos, mediante el uso del software CHIC que nos permitió hacer un análisis relacional entre ellas. La siguiente figura muestra el árbol de similitud obtenido:

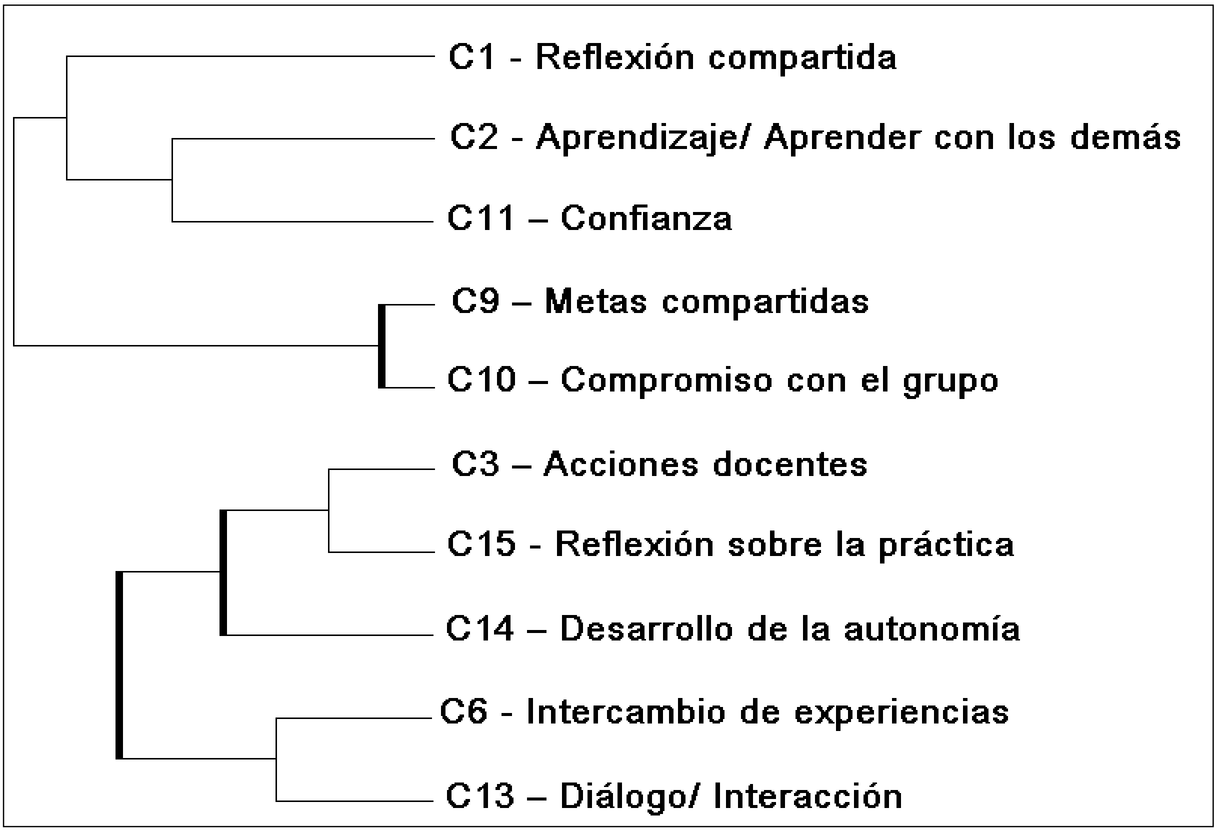


Figura 1 - Árbol de Similitud de las Categorías

Fuente: Colección Personal

En la figura 1, del árbol de similitud, se identifican dos clases: la Clase-1, formada por las categorías (C1) Reflexión compartida, (C2) Aprendizaje/ Aprender con los demás, (C11) Confianza, (C9) Metas compartidas, y (C10) Compromiso con el grupo; y la Clase-2, compuesta por las categorías (C3) Acciones docentes, (C15) Reflexión sobre práctica, (C14) Desarrollo de la autonomía, (C6) Intercambio de Experiencias y (C13) Diálogo.

La Clase-1 fue por denominada por nosotros de **Interacción,** y está formada por una subclase, constituida por las categorías (C1, (C2, C11)) y por un *nudo* formado por las categorías (C9, C10), como muestra la siguiente figura:

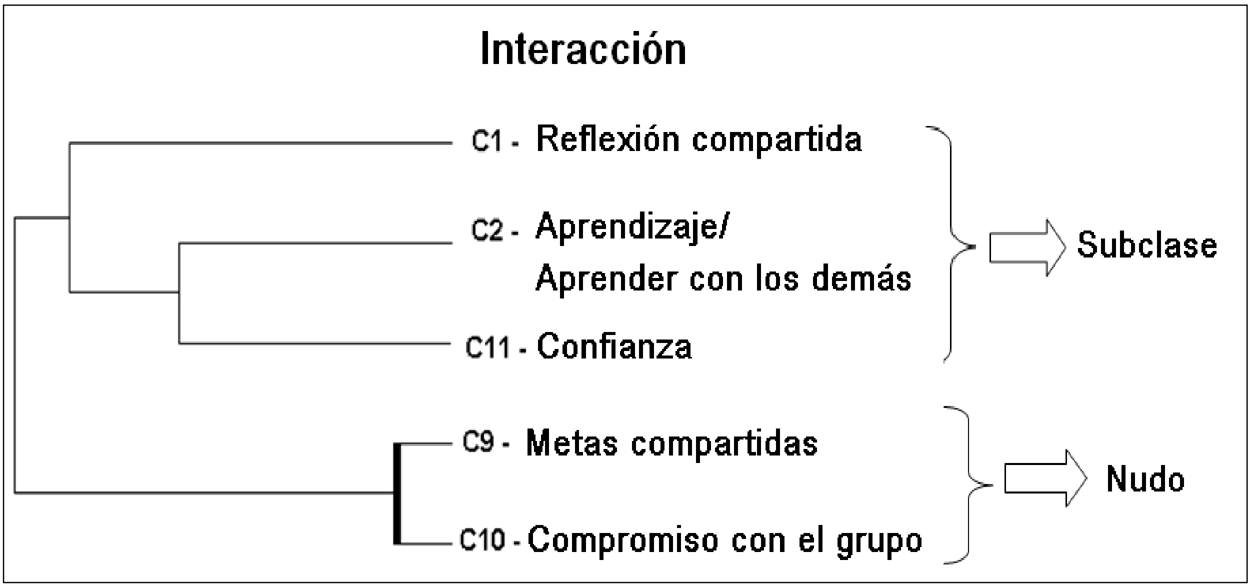


Figura 2 - Clase-1: Interacción

Fuente: Colección Personal

Se puede observar que el *nudo*(C9, C10) presenta un nivel significativo de similitud indicando que hay una gran probabilidad de que hubo interacción entre los componentes del grupo de profesores en términos de haber compartido metas, generando actitudes de compromiso. Esa posibilidad de interacción entre los pares es fundamental y debe ser uno de los propósitos de los formadores, ya que esa vivencia puede contribuir para que se establezca el compromiso, uno con el otro, en ese contexto de aprendizaje proporcionado en el Proyecto del Observatorio de la Educación.

La subclase formada por el conjunto de las categorías (C1 (C2, C11)), muestra un grado discreto de similitud, aún así, nos da indicios de que los profesores reconocen que para aprender con los demás es necesario que se cree un clima de confianza para que puedan exponer sus fragilidades conceptuales. Esa confianza es lo que le permite al profesor sentirse aceptado en el grupo, pudiendo asumir una actitud de aprender con las experiencias de los colegas y compartir sus reflexiones sobre los temas prácticos y teóricos estudiados en el grupo con la mediación pedagógica de los formadores.

La Clase-2, denominada de **Trabajo Docente** se presenta constituida por el encadenamiento de las categorías {((C3, C15), C14), (C6, C13)}, como muestra la siguiente figura:

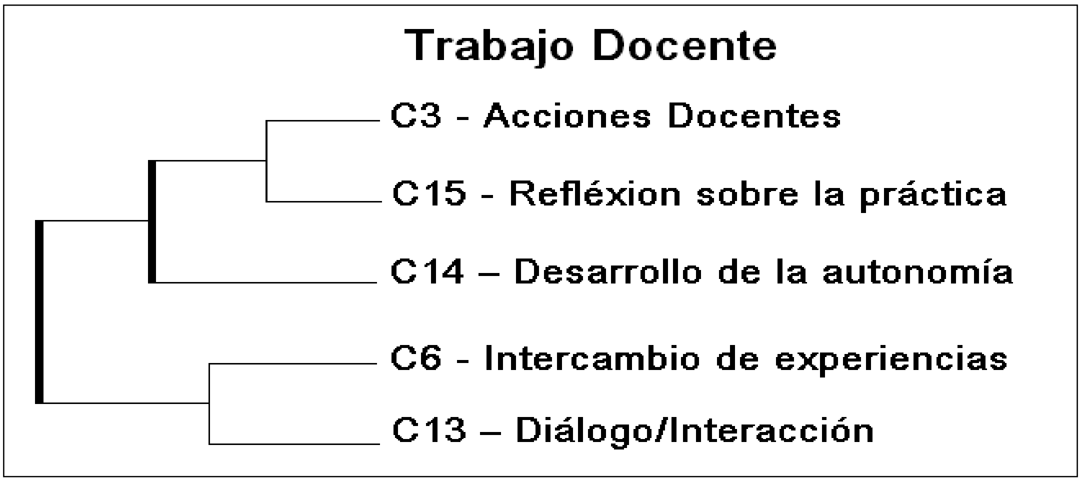


Figura 3 - Clase-2: Trabajo Docente

Fuente: Colección Personal

En ese encadenamiento de categorías queda en evidencia la existencia de un grado más elevado de similitud entre las categorías (C3, C15), mostrando que la vivencia de los profesores participantes del Proyecto del Observatorio de la Educación, permitió que saliera a relucir el contexto de la práctica del aula de los profesores para ser relatado, reflexionado y comprendido. Ahí radica la importancia de contemplar en el proceso formativo la acción del profesor, aquélla vivenciada en su realidad escolar. Sin embargo, esa acción necesita ser reflexionada y comprendida.

Eso posiblemente ocurrió por medio del intercambio de experiencias sobre la práctica del profesor con sus pares y de los diálogos establecidos entre los componentes del grupo, así como de los profesores con los teóricos estudiados, aquellos que elucidan sus comprensiones, proporcionando mejores condiciones para el desarrollo de la autonomía intelectual.

Esa autonomía puede impulsar al profesor de Matemáticas de Educación Primaria a desarrollarse profesionalmente considerando que ese proceso de aprender debe ser continuo y dinámico para que pueda actuar con los alumnos, los futuros profesionales de una nueva sociedad.

Podemos observar que esas características están interrelacionadas, el desarrollo profesional del profesor está vinculado a reflexionar sobre la práctica para reconstruirla y, en ese proceso, se encuentra el intercambio de experiencias que alienta, porque le revela al otro nuevas posibilidades y referencias que le permiten hacer cambios en las acciones docentes respecto a las estrategias de enseñanza. Ahí radica el reconocimiento del diálogo y de las interacciones que se establecen en el trabajo colaborativo durante la formación continua del profesor. Las características que surgieron más discretamente en esos registros fueron “Metas Compartidas” y

"Compromiso con los demás", hecho que nos indica que éstas van surgiendo a medida en que los componentes del grupo se perciben con más autonomía para compartir sus metas en busca de conocimientos, así como de desarrollar actitudes comprometidas con el aprendizaje de sus pares.

Destacamos que, para los formadores, el entendimiento de ese proceso es necesario para que las estrategias de formación se desarrollen contemplando acciones dinámicas, de modo que se establezca un movimiento entre análisis y profundización de contenidos matemáticos y, casi simultáneamente, ese análisis pueda incorporar los diversos aspectos existentes en la práctica pedagógica de los profesores. Es en ese movimiento entre acción y reflexión, entre contenidos matemáticos y su recontextualización en la práctica escolar en el que el conocimiento de la praxis del profesor se desarrolla en el sentido de una espiral de aprendizaje.

Conclusiones

El estudio puso en evidencia la conexión entre la red colaborativa como espacio de aprendizaje colectivo en el contexto de la formación continua y la posibilidad de impulsar el desarrollo profesional docente. La creación de la red ocurre por medio de un proceso en el cual las acciones de formación se desarrollan con base en vivencias que privilegian características propias de un trabajo colaborativo.

La indicación es que esa red incluya el uso de las contribuciones de los ambientes virtuales, ya que ellos permiten romper las barreras de tiempo y de espacio entre los participantes del grupo, así como permiten los diálogos/ interacciones que se establecen por medio de la escritura, usando los varios recursos de comunicación del ambiente virtual. Esa forma de interacción, que incluye compartir experiencias, saberes, reflexiones y cuestionamientos, ayuda a constituir un espacio colaborativo de aprendizaje y de reflexión entre los profesores. Ese modo de aprender, a su vez, hace que cada participante se pueda sentir simultáneamente aprendiz y enseñante delos demás y avanzar hacia la sostenibilidad de aprender en el transcurso de la vida.

Referencias Bibliográficas

Almouloud, S. (1992) L' Ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de donnés didactiques. *These de Docteur*. U.F.R. de Mathématiques. Rennes, França: Université de Rennes I.

Boavida, A. M. e Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. En GTI (ed.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional, 43-55.

Lisboa: APM.

Campos, T.M.M; Pietropaolo, R.C.; Prado, M.E.B.B; Campos, Silva, A.C. (2009). Uma abordagem de educação a distância em um processo de formação continuada de professores de Matemática. *VI CIBEM - Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*.Puerto Montt, Chile.

Fiorentini, D.; Nacarato, A.M.; Ferreira, A. C.; Lopes, C.A. E. ; Freitas, M. T. M. ; Miskulin, R. G. S.(2002). Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista* Belo Horizonte: UFMG, v. 36, 137-160.

Fullan, M.;Hargreaves, A. y Garcez, R. (2000). *A escola como organização aprendente:* buscando uma educação de qualidade. 2.ª ed. Porto Alegre: Artes Médicas,135p.

Gras R. (2000). Les fondements de l'analyse statistique implicative, *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, nº 9, Palermo, 189-209.

Greenwood, D. e Levin, M.(2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. En: Norman D. and Yvonna L. (ed.) Handbook for Qualitative Research, 85-106, 2nd ed. Thousand Oaks, California: SagePublications Inc.

Imbernón, F. (2010). Formação continuada de professores. Trad. Juliana dos Santos Padilha. Porto Alegre: Artmed, 120 p.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In: Jaworski, B.&Wood, T. (Eds.) *The mathematics teacher educator as a developing professional*. V. 4 Sense Publishers, pp. 335-361.

Lobo da Costa, N.M. (2004). Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica: Exploração e análise de dados em bancos computacionais. *Tese de Doutorado em Educação*. PUSP.

Lobo da Costa, N. M. (2006). Formação continuada de professores: uma experiência de trabalho colaborativo com matemática e tecnologia En: Nacarato, A.M., Paiva, M. A. V. (orgs) *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas,* 67-196. Belo Horizonte: Autêntica.

Lobo da Costa, N. M., Prado, M.E.B.B., Pietropaolo, R. C.(2010). Currículo e Mediação Pedagógica online. *IX Colóquio sobre Questões Curriculares / V Colóquio Luso-Brasileiro*, Porto, Portugal. Disponível http://www.fpce.up.pt/ciie/publs/Actas_IX_Coloquio_QuestoesCurriculares_Junho2010.zip (acesso em 20/01/2011).

Lobo da Costa, N. M., Prado, M.E.B.B., Campos, T.M.M. (2008). Formação do professor de Matemática: Uma abordagem pedagógica usando recursos de ambientes virtuais In: *6o Congreso Internacional de Educación Superior Universidad*, Havana, Cuba.

Pietropaolo, Ruy, C.; Lobo da Costa, N., M.; Prado, M. E. B.B. (2009).Análise da constituição de um grupo de pesquisa sobre formação de professores de matemática In: *Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Taguatinga, DF.

Ponte, J. P. (1997). O conhecimento profissional dos professores de matemática. *Relatório final de Projecto "O saber dos professores: Concepções e práticas*". Lisboa: DEFCUL.

Prado, M.E.B.B. (2003). Educação à distância e formação do professor: redimensionando concepções de aprendizagem. *Tese de Doutorado em Educação*. São Paulo: PUCSP.

Prado, M.E.B.B. e Valente, J.A. (2002). A educação à distância possibilitando a formação do professor com base no ciclo da prática pedagógica. In: Moraes, M.C. (org.) *Educação a Distância*: *fundamentos e práticas*. Campinas, SP: NIED-UNICAMP.

SBEM - Relatório do GT7 – Formação de Professores que Ensinam Matemática. (2007). Coordenação: Adair Mendes Nacarato e Maria Auxiliadora Vilela Paiva. III SIPEM –Águas de Lindóia. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/RelatorioGT7.pdf. (acessoem 01/10/2011).

Nielce Meneguelo Lobo da Costa. Doctorado en Educación y Currículo; Máster en Enseñanza de las Matemáticas; pedagoga y un grado en matemáticas. Profesora e investigadora del Programa de Posgrado en Educación Matemática, Universidad Anhanguera del São Paulo. Investigadora Colaboradora del Programa de Posgrado en Educación Matemática-UFMS. <nielce.lobo@gmail.com>.

Maria Elisabette Brisola Brito Prado. Doctorado en Educación y Currículo; Máster en Psicología de la Educación, pedagogo y un grado en ciencias y matemáticas. Profesora e investigadora del Programa de Posgrado en Educación Matemática, Universidad Anhanguera del São Paulo. Investigadora colaboradora el NIED-UNICAMP .
<bette.prado@gmail.com>.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 55-76

Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações em um Curso Superior Tecnológico

Sonia Barbosa Camargo Igliori, Maria Eli Puga Beltrão

Fecha de recepción: 25/02/2012
Fecha de aceptación: 14/12/2013

Resumen

El presente artículo se centra fundamentalmente en el abordaje de la enseñanza con la utilización del modelado y de las aplicaciones de la matemática. La experimentación fue realizada en la clase de Cálculo Diferencial en un curso de nivel superior tecnológico en San Pablo, Brazil. En el, es presentado un breve relato del desarrollo histórico del Modelado y de las Aplicaciones, así como informaciones sobre las investigaciones brasileñas en el tema. Incluye además la descripción de uno de los trabajos. Los datos de la investigación indicaron que el modelo puede ayudar a facilitar el aprendizaje y a atribuir significado a los conceptos matemáticos en el proceso de la enseñanza.
Palabras clave: Modelado. Aplicaciones. Nivel Superior Tecnológico. Cálculo Diferencial

Abstract

This article aims the research of the use of Modelling and Aplications at Mathematics teaching approach. In this is presented brief about development historical date and Brazilians' investigation. Is presentation also a empirical case at the implementation of Modelling and Aplications as approach at teaching Calculus classe at an undergraduate degree in Food Technology at College in the São Paulo city. The investigation's date aims the potencial of Modelling and Aplications at Mathematics Education.
Keywords: Modelling. Aplications. Undergraduate degree in Technology. Differential Calculus

Resumo

O presente artigo se centra fundamentalmente na abordagem de ensino por meio da utilização da modelagem e das aplicações da matemática. A pesquisa empírica foi realizada em aula de Cálculo Diferencial num curso de nível superior tecnológico em São Paulo, Brasil. Nele são apresentados um breve relato do desenvolvimento histórico da Modelagem e das Aplicações, assim como alguns dados sobre investigações brasileiras sobre o tema. Compreende ainda a descrição de um dos trabalhos. Os dados da investigação indicam que a modelagem pode ser um facilitador da aprendizagem e uma das formas de auxílio à atribuição de significado aos conceitos matemáticos no processo de ensino.
Palavras Chave: Modelagem. Aplicações. Nivel Superior Tecnológico. Cálculo Diferencial

1. Introdução

As disciplinas da Matemática, como o Cálculo Diferencial, nos cursos em que elas são consideradas de serviço (de aplicação para outras disciplinas), não têm em geral bom acolhimento por parte dos estudantes, assim como são aquelas que apresentam maiores índices de reprovação. É o que ocorre no Curso Superior de Tecnologia de Alimentos no qual a investigação descrita neste artigo se desenvolveu. Ao baixo interesse pela disciplina por parte dos alunos, à existência de dificuldades com conteúdos prévios, acrescenta-se como agravante regras colocadas pela instituição escolar. Entre essas regras há um programa pré-fixado, carga horária a ser cumprida e a cobrança de resultados que possibilitem a formação de egressos competentes para prática da profissão. É nesse contexto que esta pesquisa se insere e é a razão mesmo da busca de uma abordagem de ensino que envolvesse os alunos e possibilitasse melhores condições de aprendizagem. Estudos sobre a metodología de ensino por meio da Modelagem ou Aplicações estimularam a utilização da mesma como forma de superação dos entraves. De fato, muito esforço foi despendido para se conseguir resultados favoráveis, e é o que se procura descrever neste artigo. Os procedimentos metodológicos da pesquisa nortearam-se por pressupostos da pesquisa qualitativa, na medida em que se tomou o investigador como instrumento principal e se utilizou da estratégia de observações participantes dos dados. Os referenciais teóricos foram aqueles relacionados à utilização de modelagem ou aplicação no ensino, a experimentação empírica se deu no decorrer do primeiro curso de Cálculo para uma turma de um Curso Superior de Tecnologia de Alimentos. As aulas seguiram etapas programadas seguindo principios da abordagem escolhida. Este artigo apresenta de forma resumida as componentes da pesquisa. A saber: aspectos históricos do desenvolvimento do uso da Modelagem e das Aplicações no ensino de Matemática; informações sobre pesquisas brasilieras sobre o tema e aplicações e modelagem no ensino do Cálculo.

2. Aspectos Históricos

Esboçar um panorama histórico a respeito da Modelagem Matemática não é tarefa simples, e talvez apresente resultados difusos. Isso porque há diferentes interpretações desse termo ou até mesmo a ausência dele. Assim sendo o que se segue é fruto de escolhas pessoais.

Caraça (1963) concebe que, o homem, na sua necessidade de lutar contra a natureza e no desejo de dominá-la, foi levado, naturalmente, à observação e ao estudo dos fenômenos, procurando descobrir as suas causas e o seu encadeamento. Os resultados desses estudos lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo, o que no decurso dos séculos da vida consciente da humanidade se pode designar pelo nome de Ciência. O objetivo final da Ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social. Ele considera que a ciência pode ser encarada sob dois aspectos distintos: como vem exposta nos livros de ensino como “coisa criada”, um todo harmonioso, em que os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições, ou pelo seu desenvolvimento progressivo, da maneira como foi sendo elaborada, e nesse segundo caso seu aspecto é totalmente diferente pois descobrem-se hesitações, dúvidas e contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.

Desta forma, observa que no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só às necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

E nesse aspecto a Ciência, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinada às grandes necessidades do homem na luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.

Klein, por sua vez, considera que a Matemática está intimamente ligada a esse organismo vivo, buscando respostas e modelos que o homem procura para entender seu Universo. E que essa tentativa de entender o Universo e aplicar a Matemática para tal, é antiga.

A Matemática como disciplina científica há muito está ligada à Física, Astronomia, Engenharia. No início do séc.XIX foi reconhecida como uma ciência natural que envolve muitas aplicações e atividades de modelagem. Contudo, a noção de Aplicação e Modelagem como consideramos hoje, dificilmente encontraríamos expressa, até mesmo pela dificuldade de separar os vários campos em que a Matemática estaria envolvida.

Com o advento da Geometria-não-euclidiana e o desenvolvimento da Análise, da Álgebra ocorreram grandes mudanças, tornando o final do séc. XIX e início do séc. XX momentos extraordinários para o desenvolvimento da Matemática Pura. Ao lado disso, e com igual intensidade, desenvolveram-se sofisticados mecanismos de aplicação e atividades de modelagem que corroboraram para a criação de novos tópicos da Matemática, como por exemplo a Programação Linear e a Criptografia.

O ensino da Matemática, em meados do séc.XIX, encontrava-se em grande dificuldade por conta da abordagem utilizada ser a da Matemática Pura. A Matemática Aplicada passa a ser considerada para ser ensinada somente mais no final desse mesmo século. Cabe aqui destacar o grande desempenho de Klein para que a Matemática Aplicada fizesse parte do ensino em seu tempo, provocando reflexos em tempos futuros.

No final do séc.XIX, uma nova tendência começava a delinear-se, consistindo em valorizar as aplicações da matemática em todos os ramos das ciências naturais e técnicas, assim como seu significado na vida real. Basicamente são essas ideias consideradas por Klein como essenciais e tomadas como diretrizes para a proposta de modernização do ensino da matemática no início do séc. XX.

Na visão de Klein, o ensino que tinha até então uma posição particularista, e poderia ser mais bem direcionado, se acompanhasse outro processo, cuja importância maior seria dada às inter-relações das diferentes áreas da Ciência, possibilitando a compreensão simultânea de várias delas. Dessa forma o processo de ensino-aprendizagem, teria uma concepção em que veria a Matemática no seu todo. Klein trabalhou arduamente na Alemanha para que essas ideias tivessem eco.

Com os mesmos argumentos, e com o propósito de estudar assuntos relacionados ao ensino da Matemática foi apresentada uma proposta para a formação de uma comissão, durante o IV Congresso Internacional de Matemática realizado em abril de 1908, em Roma. Após a aprovação da proposta, foi estabelecida a *Comission Internacionale de L' enseignement* dês *Mathematiques*, conhecida pela sigla CIEM, e entre os alemães pela sigla IMUK *(Internationalen mathematische Unterrichts Kommission)*, passando, a partir de 1954, ser conhecida como *International Commission on Mathematical Instruction* - ICMI.

Mesmo não estando presente nesse congresso de Roma, Felix Klein foi nomeado presidente da comissão, posto que ocupou até 1920. Essa comissão, presidida por Klein, tinha como objetivo principal fazer um levantamento das principais tendências no ensino da Matemática em diversos países. Após minucioso trabalho, concluiu-se que havia dificuldades com esse ensino, levando a comissão a apresentar proposta de modificações, oportunizando Klein a expandir suas ideias.

Tem-se então, durante o séc. XX, uma alternância entre o ensino da Matemática Pura e Matemática Aplicada, dependendo de como as discussões relativas à Educação Matemática eram encaminhadas. Duas posições se estabeleciam: uma com os que defendiam as Aplicações e Modelagem para o aprendizado da Matemática e do outra que defendia o Aprender Matemática para desenvolver competências em Aplicações Matemáticas e construção de Modelos Matemáticos. É certo pensar que muita discussão foi promovida em razão dessas posições com essências tão diferentes. Em 1928, no congresso realizado em Bolonha, após abandonada a discriminação contra os países derrotados, ficou reconstituída a Comissão Internacional para o Ensino da Matemática.

Contudo, também por volta de 1950, um grupo de matemáticos, na maioria franceses, de pseudônimo Nicolas Bourbaki, aparece retomando o trabalho de Galois com as estruturas algébricas; os de Dedekind e Cantor com a teoria dos conjuntos; e os de Hilbert, focando a axiomática. O grupo Bourbaki teve como principal objetivo reconstruir o todo da Matemática clássica e moderna, numa ampla base geral de forma a encerrá-lo em um estudo unificado. Tentando obter a inteligibilidade da Matemática, apresentou uma nova organização dessa Ciência na qual a ideia de estrutura, método axiomático e unidade eram essenciais. (Pires, 2006)

Embora o primeiro livro de Bourbaki esteja datado de 1939, a divulgação mundial do estruturalismo matemático proposto pelo grupo, inicia-se por volta de 1950, sendo mais marcante nas décadas de 60 e 70, quando surgem em vários países grupos de estudo, com o objetivo de modernizar o ensino da Matemática, principalmente na Escola Básica, e que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna.

Em 1968 Hans Freudenthal organizou uma conferência em que defendia a inclusão das Aplicações e Modelagem no ensino da Matemática, com publicação do trabalho no *Educational Studies in Mathematics* no mesmo ano. Também em 68 foi nomeado presidente do ICMI, em sua nova fase. A atuação de Freudenthal irá influenciar significativamente a consolidação das Aplicações e Modelagem no ensino da Matemática.

Reconhecido internacionalmente como fundador da Educação Matemática Realística que é calcada na resolução de problemas reais, com significado, a partir de experiências cotidianas em lugar de regras abstratas que estão longe da realidade dos estudantes. Freudenthal foi determinante para que a educação holandesa não aderisse ao Movimento da Matemática Moderna, ocorrido em inúmeros países.. Ao contrário, Freudenthal optou por proporcionar aos estudantes um estudo da matemática a partir da descoberta.

De acordo com Niss (2007) o desenvolvimento das Aplicações e Modelagem Matemática na Educação Matemática, passa por três fases:

A primeira fase é aquela em que ocorre a defesa, compreendida entre 1965 e 1975, que é representada por Hans Freudenthal. A segunda fase, compreendida entre 1975 e 1990 é considerada a fase do desenvolvimento, caracterizada pela elaboração de currículo e de materiais de vários níveis. Também ocorre a implementação de material instrucional, o cultivo de casos específicos de Aplicações e Modelagem para serem usados em sala de aula. Nessa fase são feitas tentativas, analisando e sistematizando, em nível teórico, argumentos para as Aplicações e Modelagem na Educação Matemática e investigando teoricamente e historicamente as relações com outros componentes. Estava, desta forma, emergindo a perspectiva de pesquisa.

Educadores matemáticos passam a desenvolver uma série de pesquisas em diferentes níveis, desencadeando, a série de conferências no *International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Aplication* (ICTMAs), a primeira delas ocorrida em 1983.

A terceira fase, desde 1990, é considerada a fase da maturação. O número de pesquisas e de pesquisadores cresceu consideravelmente. A comunidade pertencente ao ICMTAs organizou-se, estabelecendo a *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), filiado como grupo de estudos do *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) em 2004.

Henry Pollak é considerado como um dos pioneiros na área de Aplicações e Modelagem na Educação Matemática. Nos anos de 1970 ele defendeu uma integração de Aplicações e Modelação Matemática no ensino. Era capaz de fazer isso com competência e credibilidade, em especial porque não fazia parte do sistema educacional em si, mas era um membro líder de Bell Laboratórios.

O cenário educacional dos anos sessenta foi moldado pelo Movimento da Matemática Moderna, que contrastava com as suas próprias intenções. Conduziu, em muitos países para uma ênfase aos aspectos intra- matemática. O empenho de Henry Pollak para Aplicações e Modelagem foi particularmente visível no ICME-3, em 1976, onde proferiu uma palestra de título "A interação entre Matemática e outras disciplinas escolares". Ainda no primeiro ICTMAs, Pollak teve uma posição ativa e proeminente, como palestrante na sessão ICTMA-3, em 1987.

Contudo podemos questionar: Qual é a situação das aplicações e modelagem matemática no ensino de hoje, trinta anos após a ICME-3 e vinte anos após ICTMA-3? Considera-se que Henry Pollak com sua enorme influência, contribuiu para que as aplicações e modelagem tenham agora, em muitos países, uma maior importância nos currículos. Para os autores deste artigo Felix Klein e Hans Freudental são dois elos importantes na constituição da corrente formadora, do desenvolvimento de ideias e ações, que culminaram na consolidação da Modelagem Matemática e Aplicações, como a vemos hoje, com suas diferentes nuances, dependendo do estudioso que a aborda.

3. Informações sobre pesquisas brasileiras

A pesquisa brasileira sobre o tema conta com mais de uma centena de trabalhos entre teses de doutorado e dissertações de mestrado. Em Dorow e Biembengut (2005), e em Silveira (2007) pode-se conferir a catalogação desses trabalhos. Destacam-se aqueles elaborados por D’Ambrosio e Bassanezi.

D’Ambrósio (1986) define *Modelagem Matemática* como a dinâmica que reflete sobre a realidade e da qual resulta uma ação planejada, consciente. Isso se processa pela construção de modelos com os quais o indivíduo opera, aplicando a sua experiência, conhecimento acumulado e recursos da natureza. O modelo seria o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade. Criado como um instrumento de auxilio à compreensão da realidade mediante a reflexão, favorece sobretudo em criar condições para que o homem analise a realidade.

Para Bassanezi (2004), a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Para ele, a modelagem pressupõe multidisciplinaridade, indo ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

Bassanezi chama de *modelo matemático* o conjunto de símbolos e relações matemáticas que de alguma forma representam o objeto estudado. Acrescenta que a importância do modelo consiste na concisão da linguagem, apta a expressar nossas ideias com clareza, sem ambiguidades, proporcionando um enorme arsenal de resultados que permitam usar métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas. Os relatos de Dorow e Biembengut (2005) indicam que a maioria das pesquisas utiliza práticas de salas de aula como campo de investigação, defendendo, indicando para esses casos vantagens dessa metodología de ensino para a aprendizagem da matemática. É ressaltado, principalmente, que o uso da modelagem e/ou aplicações no ensino é um auxílio para despertar o interesse do aluno já que ele percebe a aplicabilidade da matemática.

Em muitas das pesquisas brasileiras, a Modelagem Matemática é eleita, então, como uma estratégia, metodologia ou ainda, uma alternativa viável para o ensino frutífero da Matemática.

Em Silveira (2007) pode-se perceber a existencia de nítida dicotomía nos posicionamentos dos pesquisadores. Há, por um lado, aqueles que a defendem fortemente como meio de proporcionar melhorias no ensino; e por outro, os que enumeram um sem fim de dificuldades para a sua execução.

Biembengut e Hein apontam que o processo de modelagem precisa sofrer modificações nos cursos regulares, com programa a cumprir e estrutura organizacional nos moldes tradicionais. A pesquisa de Barbosa (2007a) revela dificuldades relacionadas ao aluno, à escola e ao professor na implementação da Modelagem Matemática, como metodología de ensino.

Beltrão (2010) leva em conta defesas, argumentações, espaços criados e dificuldades apontadas dessas pesquisas e apresenta seus meios para enfrentar obstáculos previstos, e para construir uma alternativa de uso dessa abordagem para o ensino de Cálculo. É o que se relata de forma resumida no ítem 4 deste artigo.

4. Procedimentos adotados na investigação empírica

Neste ítem apresentam-se, em síntese, os procedimentos adotados na investigação empírica de utilização de Modelagem Matemática e Aplicações no ensino de Cálculo.

As justificativas para esta investigação estão nas reflexões tratadas no *14º ICMI Study* relativamente ao tema – Modelagem em diferentes níveis de ensino – às quais envolveram estudiosos de nove países. Ou sejam, trata-se de se considerar a Modelagem Matemática como uma forma de minimizar a grande lacuna que separa a realidade e a Matemática; que permite aos alunos utilizar experiências da vida cotidiana para compreender Matemática, equivalendo a um atalho para compreender o mundo real; que é importante em todos os níveis de ensino, uma vez que desenvolve o pensamento crítico e enseja que os cidadãos tomem posição sobre a realidade que os circunda. Nessa perspectiva, entende-se por "Modelagem", a situação que parte da realidade para chegar à Matemática. É como se estivéssemos perguntando: "Onde posso encontrar alguma matemática para que me ajude com este problema?" Ou seja, a Modelagem visa a compreender ou resolver problemas em algum segmento do mundo real.

O termo "Aplicação" refere-se à situação contrária, isto é, parte da Matemática para se chegar à realidade. Agora a pergunta é: "conhecendo tópico(s) da matemática, onde poderei usá-la?". Ganham relevo as partes do mundo real acessíveis a um tratamento matemático para as quais já existem modelos matemáticos.

O termo "problema" é usado em sentido amplo, compreendendo não apenas os de ordem prática, mas ainda os de natureza intelectual, inclusive os que se relacionam às disciplinas científicas.

O termo "aplicações na resolução de problemas" admite uma variedade de interpretações. Às vezes, é utilizado para designar os processos envolvidos ao ser necessário resolver um problema do mundo. Nesse sentido, é apenas outro termo para a Modelagem. No entanto, é frequênte vê-lo usado na resolução de problemas com qualquer tipo de atividades extramatemáticas em um contexto artificial.

O "mundo real", mundo em que vivemos, é sinônimo de tudo o que concerne à natureza, sociedade e cultura, incluindo a vida cotidiana. O domínio extramatemático, que será relevante para as nossas considerações, envolverá um subconjunto desse mundo real.

Para o desenvolvimento da pesquisa inicialmente refletiu-se a respeito do papel desempenhado pelas Aplicações e Modelagem no ensino. Niss, Blum e Galbraith (2007), destacam duas categorias de respostas e duas orientações diferentes as quais dependem dos objetivos e dos meios. A primeira aborda "Aplicações e modelos para a aprendizagem da Matemática", e o argumento a que recorre consiste em fazer com que os alunos compreendam que a Matemática está realmente sendo usada por pessoas fora da Matemática, fazendo-os perceber uma imagem rica da natureza e do papel dessa Ciência, proporcionando significado e interpretação às atividades e às entidades matemáticas. Dessa forma, também é promovida a motivação para se engajarem no estudo da Matemática.

A segunda categoria discute que importa aprender Matemática a fim de desenvolver competências na Aplicação Matemática e na construção de modelos para as áreas e os fins que são basicamente extramatemáticos. O argumento desta vez é equipar os alunos com a capacidade de usar a Matemática para lidar com situações fora da própria Matemática, considerando o fato de seu uso ocorrer por meio de modelos matemáticos e da Modelagem.

Entende-se que essas duas posições não precisam necessariamente estar disjuntas, mesmo conhecendo a existência de provas da prática e da investigação de que não há transferência automática, ao ter aprendido Matemática puramente teórica, para usá-la em situações que já não tenham sido totalmente matematizadas.

E que há momentos propícios para que o ensino da Matemática contemple ambas as posições, sendo necessário para isso fazer ajustes ou elaborar estratégias.

Entre os vários temas em que foram subdivididas as pesquisas abordando Modelagem e Aplicações, se insere esta pesquisa parcialmente no tema "Aplicações e Modelagem para a Matemática". Justificamos essa inserção em concordância com Eric Muller e Hugh Burkhardt (2007) quando observam que ensinamos e aprendemos Matemática para desenvolver uma ferramenta poderosa de estratégias, conceitos e competências para utilizá-la na resolução de problemas do mundo real e apontam pesquisas desenvolvidas nesse segmento que oferecem boa visão a respeito do assunto. Contudo, é necessário ampliar essa visão, pois as múltiplas conexões essenciais para uma sólida compreensão da Matemática não surgem naturalmente, requerem atividades específicas que as desenvolvam.

Com esses pressupostos passa-se a indicar o posicionamento frente a questões levantadas, e definições para o equacionamento das mesmas.

5. Os elementos da experimentação

A utilização da modelagem como estratégia de ensino transcorreu em uma turma com 25 alunos de um Curso Superior de Tecnologia de Alimentos no decorrer do desenvolvimento regular da disciplina Cálculo Diferencial, com 4 aulas de 50 minutos cada uma, por semana.

No início do proceso a pesquisadora tratou de levar em conta a existência de obstáculos consagrados (falta de conhecimentos prévios, contrato didático tradicional, exigências de cumprimento de programas, falta de apoio institucional, etc); assim como fomentou ideias que a ajudaram a elaborar estratégias que facilitasse o alcance de seu alvo. Ela evitou, por exemplo, a prática de deixar completamente a cargo dos alunos a função de apresentar os fenômenos a serem modelados e/ou os conteúdos matemáticos a serem aplicados.

A pesquisadora teve a preocupação de realizar a mudança de contrato didático tradicional − a professora tem toda a responsabilidade pela aprendizagem− para o contrato em que o aluno participa ativamente de sua aprendizagem, de forma paulatina e discutida. Com isso ela buscaba contemplar exigências institucionais de modo a não deixar explicítos possíveis conflitos com as práticas tradicionais (para não assustar alunos, autoridades e país). Ou seja ela planejou essa mudança, de modo a convencer os sujeitos envolvidos de que ela traria inovação com melhoria das condições da aprendizagem. Para a instituição e pais o importante era que os alunos apresentassem bons resultados nas avaliações e que a estratégia utilizada favorecesse a formação de egressos capacitados para o trabalho.

Para a pesquisadora o desafio estava em envolver os alunos no processo, já que a disciplina era considerada difícil, apresentava frequentemente altos índices de reprovação, e por isso os alunos iniciavam seu estudo com essa imagem da disciplina, e com receio.

A primeira ação da professora/pesquisadora foi a de realizar uma atividade diagnóstica envolvendo conteúdos da Matemática básica. Os resultados dessa atividade indicaram, como era de se esperar, erros de compreensão e desconhecimento de conteúdos, e portanto a necessidade de retomada de alguns desses conceitos (operações, equações, construção de gráficos no plano cartesiano, entre outros). Essa retomada foi feita tendo como metodologia o atendimento individual enfocando em cada caso o erro cometido e/ou falta de conhecimento, e também com a classe toda, com a participação ativa dos alunos. Ainda, durante o processo de modelagem e/ou aplicações, sempre que a professora percebia que alguma dificuldade do ensino básico vinha a se constituir em entrave para a continuidade do trabalho, ela retomava o assunto. Para a pesquisadora era necessário que a escolha, de fenômenos do real a serem modelados ou de conteúdos matemáticos a serem aplicados, não fosse definida por dificuldade dos estudantes com conteúdos básicos, mas sim pela relação com os objetos de estudo do curso. A ação de retomada de conteúdos foi constante e muito produtiva pois, de certa forma, ela tornou os participantes em condições de enfrentar a proposta inovadora.

Na sequência a professora passou a tratar dos conteúdos arrolados na ementa do curso de Cálculo Diferencial (funções; limites, continuidade, derivada). Cada um desses conteúdos foi introduzido por meio de um breve histórico, e da apresentação de alguns exemplos de aplicação. Foram ainda exploradas situações com o auxílio do computador. Essa forma de introdução teve o objetivo de despertar a atenção dos estudantes para o modo como os conceitos matemáticos foram sendo contruídos ao longo do tempo e suas relações com os problemas reais, destacando fenômenos relacionados ao curso e o como eles podem ser expressos pela Matemática (os exemplos eram buscados nas outras disciplinas específicas ao curso). A justificativa dessa ação encontra-se em Barbosa (2001) para o qual as atividades de modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a Matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Ele comenta que, nem Matemática nem modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida e que isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a Matemática no mundo social, mas que modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. Salienta que é pertinente sublinhar, que necessariamente os alunos não transitam para a dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande responsabilidade para tal.

Após a introdução histórica e a exploração de exemplos a professora faz a abordagem formal com definições, propriedades e exemplos, conforme orientação de livros didáticos selecionados de conformidade com os objetivos do curso. Essa abordagem respondia às exigencias programáticas.

Só então foi proposto ao aluno a busca de fenômenos que podem ser modelados ou situações em que o conteúdo estudado tenha sido aplicado, preferencialmente em sua área de atuação. É quando se dá um retorno à questão: “com essa Matemática aprendida, onde poderei usá-la?”.

Essa proposta pode ser efetivada individualmente ou em grupo. Em geral o aluno encontra resposta em artigos científicos, ou em trabalhos desenvolvidos em outras disciplinas. O material assim coletado é discutido, tanto sobre o assunto geral abordado, como principalmente quanto à Matemática nele envolvida.

Ou seja a elaboração de modelos ou as aplicações ocorrem num último momento quando o estudante tomou conhecimento das noções formais, mesmo que de forma introdutória, e vivenciou experiências de modelagem ou de aplicações elaborados por outros. A formação de conhecimentos prévios da matemática básica foi sendo perseguida em separado, ou no bojo do desenvolvimento do curso, tendo-se por pressuposto que a mesma é fundamental para a exploração de modelos adequados ao curso e exploração de aplicações significativas.

A discussão gera interpretações que apontam o papel da Matemática na constituição daquela situação apresentada e o potencial dessa Ciência para expressá-la.

Foi essencial para o sucesso da utilização das abordagens da Modelagem e Aplicações no ensino esse posicionamento de colocar o aluno em contato com trabalhos já executados antes dele próprio se engajar num processo assemelhado, pois possibilitou a explicitação do fato de que a Matemática efetivamente oferece recursos para resolver problemas reais, e que é possível por meio deles tratar de situações dentro e fora da sua área de trabalho.

Esse primeiro contato com os trabalhos na área específica do curso geralmente surpreende o aluno, na maioria das vezes alheio ao vínculo entre a Matemática e o seu setor de atuação. Dessa forma, considerou-se iniciada a convivência do aluno com situações do real, que podem ser solucionadas com uso de recursos matemáticos. Essa é a fase que se considera das aplicações (o aluno verifica onde a Matemática aprendida foi aplicada). Caminha-se no sentido Matemática-Realidade.

Esses momentos desenvueltos durante o ensino de um determnado conceito nominou-se de fases: Fase I, II e III. Destaca-se que as Fases II e III se fundem e as atividades dos estudantes em ambas indicam a necessidade de trabalhar com as abordagens Aplicação e Modelagem de forma conjunta. Em suas ações os alunos tomam contato ora com modelos prontos (Fase II) e buscam a Matemática que os descrevem; e ora eles têm um conteúdo matemático e buscam algo para utilizá-lo, ou um fenômeno relacionado ao curso e necessitam matematizá- lo para compreendê-lo (Fase III). Para eles essas ações resultam na importante descoberta da inserção da Matemática que aprendem nos assuntos relacionados ao curso.

No que segue descreve-se a estratégia utilizada na experirmentação dividindo o desenvolvimento do trabalho nas três fases, destacando-se que, de fato, na prática pode haver fusão entre elas.

Fase I: Nessa fase a professora apresenta o conteúdo aos alunos, em três etapas: Na primeira o conteúdo é abordado históricamente; na segunda a professora explora exemplos de aplicação do conteúdo e na terceira etapa o coneúdo recebe um tratamento formal, ou seja com definição, propriedades importantes e outros exemplos significativos.

Fase II: Trata-se da realização de atividades que possibilite ao aluno vivenciar uma experiencia de modelagem ou de aplicação. A professora solicita que o aluno busque em material bibliográfico (que ela pode sugerir) ou com professores de outras diciplinas, situações que envolvam o conteúdo matemático em estudo.

Fase III: É nessa que o aluno vai elaborar situações expressas por modelos ou por aplicações.

6. Ilustração do desenvolimento das fases

Descreve-se a seguir, como ilustração, como se deu o desenvolvimento das fases. Nas etapas da Fase I, das abordagens históricas ou formais, foi utilizada a abordagem tradicional de apresentação de um determinado conteúdo. Ou seja, foi utilizada a forma de aula expositiva, em que a professora/pesquisadora discorre sobre o assunto buscando a comunicação com seus alunos por meio de perguntas, e discussão das respostas apresentadas. São efetivados exercício de aplicação, leitura de textos etc. E além disso, em atendimento individual, são retomados o estudo de conhecimentos considerados prévios e necessários para o trabalho de modelagem ou de aplicação.

Para o caso do estudo do conceito de função, por exemplo, nessa fase definiu-se ese conceito, formalmente, como uma relação entre dois conjuntos, de tal modo que, a cada elemento do primeiro conjunto associa-se um único elemento do segundo.

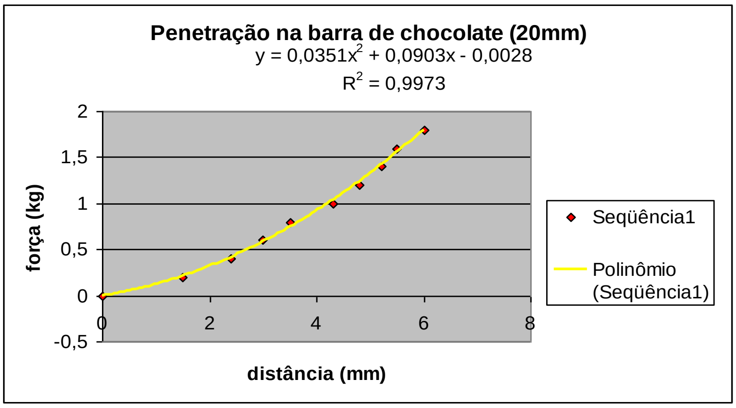
Houve exploração das representações gráfica e algébrica, e estudadas as funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítimicas.

Na segunda etapa da Fase 1, aquela em que a professora motiva os alunos, e explora aplicações do conteúdo em estudo, no o conceito de função, a professora trouxe o Penetrômetro (Figura 1).

O Penetrômetro é um instrumento que apresenta o resultado da medição da força de penetração de um cilindro ou agulha num determinado produto, em função da distância dessa penetração. Esse instrumento é utilizado para medir essa relação em alimentos como margarina, manteiga, queijos, barras de chocolate, gelatinas, geléias, maionese, enfim, alimentos de alta viscosidade e também para algumas frutas como maçã, pêra, pêssego, mamão etc. A função que aparecer é a que associa a cada medida de força empregada pelo penetrômetro (em kg) a distância de penetração (em mm). A professora ilustrou sua apresentação mostrando o que consta da Figura 1 e do Quadro 1.

A função que consta do Quadro 1 é a polinomial do 2º grau, conhecida dos alunos. A expressão algébrica dessa função : $y = 0{,}0351x^2 + 0{,}093\ x + 0{,}0028$ foi explorada para indicar a relação força de penetração e distancia.

Figura 1



Quadro 1

Fase II: Nessa fase a apresentação de aplicações ou modelo de fenômenos estava a cargo dos alunos. Como ilsutração apresenta-se um dos trabalhos que um grupo de alunos trouxe para a sala de aula. Trata-se de dados coletados em uma pesquisa sobre a fermentação láctea produzida por microorganismos inoculados no leite. Esses dados constavam de um artigo científico escrito por uma professora de outra materia do curso, cuja identidade não foi apresentada.

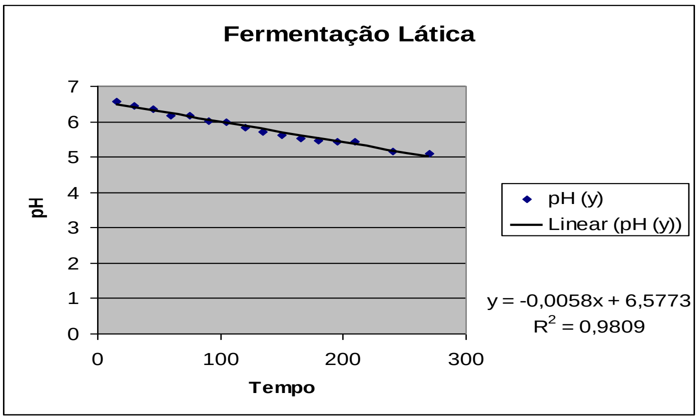
Os alunos informaram à classe que o procedimento de fermentação láctea é essencial na fabricação de iogurtes, e portanto a situação apresentada despertou o interesse da sala, pois estava bem relacionado ao curso. E que os dados foram obtidos após a inoculação dos microrganismos Streptococcus thermophilus e Lactobacillus Bulgaricus no leite. E ainda que durante a produção de ácido lático foram medidos os pHs em duplicata, em intervalo de tempo de 15 minutos.

Os dados por eles apresentados constam da Tabela 1:

DADOS DA PRODUÇÃO DE ÁCIDO LÁTICO EM DUPLICATA		
Tempo(min.)	pH 1	pH 2
15	6,56	6,52
30	6,45	6,34
45	6,36	6,23
60	6,18	6,14
75	6,17	6,00
90	6,01	5,81
105	6,00	5,62
120	5,82	5,60
135	5,72	5,52
150	5,63	5,48
165	5,54	5,46
180	5,45	5,42
195	5,44	5,35
210	5,43	5,30
225	5,17	5,19

Tabela 1

A partir desses dados os alunos obtiveram o gráfico (Quadro 2), por meio do qual foi possível a eles perceber a relação funcional entre as duas variáveis: fermentação lática, considerando o tempo em minutos, e média dos pHs obtidos em cada leitura.



Quadro 2

Eles destacaram a expressão algébrica da função afim: $Y = -0{,}0058x + 6{,}5773$ (1), e indicaram, para a classe, que essa expressão tornava possível realizar previsões. Como exemplo desse fato eles apresentaram um problema, assim enunciado: Se se deseja que um iogurte tenha pH 4,6, qual o tempo ideal de fermentação lática? Resolveram com a classe o problema, substituindo Y = 4, 6 em (1) e resolvendo a equação do 1º grau: $4{,}6 = -0{,}0058t + 6{,}5773$4. A solução foi em t ≅ 341 minutos tem-se o tempo ideal procurado.

A Fase II foi desenvolvida na forma de seminário e as informações eran socializadas entre todos os alunos da classe. A participação dos estudantes foi significativa, e eles apresentavam sugestões e dúvidas. Houve alunos que perceberam que a expressão algébrica da função era a expressão de uma reta, mas que o gráfico do Quadro 2 não era "exatamente" uma reta. A professora discutiu com eles a ideia do modelo frente ao real.

Fase III: No curso de tecnologia de alimentos é dada grande ênfase às questões ligadas às embalagens, de maneira geral. Elas são responsáveis tanto pela proteção quanto pela divulgação comercial do produto. Portanto, torna-se especialmente recomendável que uma embalagem seja analisada tanto do ponto de vista de proteção ao produto, garantindo-lhe uma boa vida de prateleira quanto a comercialização do produto, não esquecendo, contudo na economia do material gasto nessas embalagens, para que haja menor custo e menor impacto ambiental.

Por ese motivo varios alunos trabalharam com essa problemática nessa Fase III.

Uma aluna, por exemplo, trouxe uma situação (procurada sem a participação da professora) que trata do redimensionamento de embalagens de produtos encontrados no mercado. O objetivo era o de redimensionar algumas embalagens, de forma a encontrar uma forma mais econômica, sem modificar as dimensões originais do produto embalado. Ao reduzir as dimensões da embalagem diminui-se os custos e resíduos sólidos, que é ponto fundamental para o meio ambiente. O exemplo refere-se ao caso dos hamburgueres da marca “Sadia”

Conservando as dimensões e pesos dos hambúrgueres, foram feitas duas tentativas de novos formatos das embalagens: a primeira empilhando-os e acondicionando-os em uma embalagem cilíndrica, e a segunda empilhando-os e acondicionando em uma embalagem de base quadrada. Analisou-se o porcentual de redução de cada opção e sugerimos a mais econômica.

As funções trabalhadas nesse exemplo foram aquelas que permitiam calcular:

- A área total da embalagem original;

- A área total de cada nova embalagem;

- A porcentagem de redução, proporcionado pela nova embalagem;

- A área total que ficariam as embalagens secundárias após a redução da área primária;

- O alvo era apresentar sugestão para a embalagem com menor custo e menor resíduo sólido.

O trabalho da aluna é descrito de forma a indicar como foi apresentado à classe.

Situação do real: dimensionamento de embalagens de hamburges com vistas a diminuir custos.

1. Embalagem original: caixa retangular de dimensões:

$a = 20{,}8\ cm \qquad b = 10{,}5\ cm \qquad h = 5{,}9\ cm$

2. Área Total da embalagem:

$$At = (a \times b) + (a \times b) + [(2 \times a \times h) + (2 \times b \times h)]$$

$$At = (20{,}8 \times 10{,}5) + (20{,}8 \times 10{,}5) + [(2 \times 20{,}8 \times 5{,}9) + (2 \times 10{,}5 \times 5{,}9)$$

$$At = 218{,}4 + 218{,}4 + 245{,}4 + 123{,}9$$

$$At = 806{,}1\ cm^2$$

3. Dimensão dos hamburgers:

$R_{hamburguer} = 4{,}8cm$

$h_{hamburguer} = 0{,}8\ cm$

Quantidade de hamburges por caixa = 12

Estudo do redimensinamento da embalagem

Dimensões do espaço ocupado por um hamburger

$h_{empilhdos} = 0{,}8x12 = 9{,}6cm$

$a_{ocupado} = 9{,}6cm$ $b_{ocupado} = 2x4{,}8 = 9{,}6cm$ $h_{ocupado} = 9{,}6cm$

Estudo de uma embalagem cilíndrica tomando-se para raio e altura as dimensões do hamburger:

Área total

$$At = 2 \times \pi \times R^2 + 2 \times \pi \times R \times h$$

$$At = 2 \times \pi \times 4{,}8^2 + 2 \times \pi \times 4{,}8 \times 9{,}6$$

$At = 144{,}8 + 289{,}5$

$$At = 434{,}3\ cm^2$$

Redução do material da embalagem em Porcentagem

Embalagem original $At = 806{,}1\ cm^2$

Embalagem cilíndrica $At = 434{,}3\ cm^2$

Representa uma economia de 46,1%

Para uma embalagem de base quadrada

Área total do cubo $At = 6 \times a^2$

$At = 6 \times 9{,}6^2$

$$At = 553{,}0\ cm^2$$

Redução em Porcentagem

Embalagem original $At = 806{,}1\ cm^2$

Embalagem cúbica $At = 553{,}0\ cm^2$

Representando uma economia de 31,4%

Estudo da economía no caso da embalagem secundária (aquela que vao para o supermercado resultante do empilhamento das caixas. A Figura 2 representa uma embalagem secundária para o caso das caixas retangulares. São feitos 6 blocos de caixas.

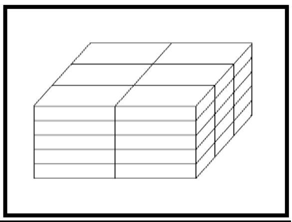


Figura 2. Embalagem Secundária- **disposição da embalagem primária do hambúrguer de carne bovina sadia – 30 embalagens**

<u>Dimensões da Embalagem Secundária original</u>

As arestas da embalagem secundária são obtidas a partir das arestas da caixa retangular, ou seja a primeira aresta é multiplicada por 2, a segunda por 3 e a terceira por 5 resultando: a = 2. (20,8) = 41,6; b=3. (10,5)= 31,5; c= 5. (5,9) = 29,5. E então a área total da elbalagem secundária é:

$$At = 2 \times a \times b + 2 \times a \times h + 2 \times b \times h$$

$$At = (2 \times 41{,}6 \times 31{,}5) + (2 \times 41{,}6 \times 29{,}5) + (2 \times 31{,}5 \times 29{,}5)$$

$$At = 2620{,}8 + 2454{,}4 + 1858{,}5$$

$$At = 6933{,}7\ cm^2$$

<u>Embalagem Secundária para a Embalagem Cilíndrica</u>

Conservam-se as dimensões originais dos hambúrgueres. Assim o formato da embalagem secundária é representado pela Figura 2, com as dimensões

$$a = 19{,}2\ cm$$

$$b = 28{,}8\ cm$$

$$h = 48{,}0\ cm$$

$$At = 2 \times a \times b + 2 \times a \times h + 2 \times b \times h$$

$$At = (2 \times 19{,}2 \times 28{,}8) + (2 \times 19{,}2 \times 48{,}0) + (2 \times 28{,}8 \times 48{,}0)$$

$$At = 1105{,}9 + 1843{,}2 + 2764{,}8$$

$$At = 5713{,}9\ cm^2$$

Economia na embalagem primária: 46,1%

Economia na embalagem secundária: 17,5%

Figura 3. Visualização das embalagens antes e depois. Hambúrguer de Carne Bovina Sadia

Observação: A embalagem utilizada pela Sadia é a da caixa retangular. A outra embalagem, a cilíndrica, foi construída pela aluna. A Figura 3 é uma fotografía tirada pela aluna.

O estudo desenvolvido por meio de substituição de valores em expressões funcionais levou a aluna demonstrar que é possível reduzir significativamente os custos e os resíduos sólidos de uma embalagem, fatores altamente relevantes para o fabricante, para o consumidor e principalmente para o meio ambiente.

7. Considerações finais

O ensino da Matemática utlizando Modelagem e Aplicações tem seu início desde finais do século XIX com as posições de Felix Klein.

Embora muito já tenha sido pesquisado até hoje sobre essa abordagem para o ensino, inúmeros entraves têm impedido os reflexos positivos esperados na prática. As pesquisas apontam benefícios, contudo alertam a respeito dos obstáculos arrolados pelos professores que impedem a prática efetiva dessa abordagem.

Esta investigação, não diferentemente das outras, também teve seus momentos difíceis, inherentes à prática docente em geral. Mas apesar disso possibilitou a constatação de que a Modelagem Matemática juntamente com as Aplicações é uma forma profícua de abordagem para o ensino de Cálculo, e que os entraves apontados podem ser enfrentados. Pode-se responder as questões:

O uso das Aplicações e Modelagem Matemática são abordagens que possibilitam explorar os conteúdos de Cálculo de modo significativo num curso de Tecnologia em Alimentos, de modo a contemplar as necessidades formativas dos egressos desse curso? Ou,

Seria viável utilizar as abordagens da Modelagem Matemática e Aplicações com uma ementa a ser cumprida em um espaço de tempo tão curto?

É possível utilizar essa abordagem, com os conteúdos mencionados, tendo em vista os resultados das atividades de sondagem inicial que apontam grande defasagem dos estudantes relativamente aos conhecimentos prévios de conteúdos básicos? Ou,

Como podem ser introduzidas com êxito as abordagens a respeito da Modelagem em um programa escolar conservador?

Após um longo percurso de leituras, trabalhos, observações, tentativas, adaptações, concluiu-se que havia necessidade de se levar em conta:

- o diagnóstico representando o perfil do aluno em relação aos conhecimentos prévios;
- os trabalhos que os alunos apresentam *a posteriori*;
- o baixo índice de reprovação compilado desde a implantação do curso;

Foi essencial para o sucesso da utilização das abordagens da Modelagem e Aplicações no ensino de Cálculo o posicionamento de colocar o aluno em contato com trabalhos já executados, antes dele próprio se engajar num processo assemelhado, pois possibilitou a explicitação do fato de que a Matemática efetivamente oferece recursos para resolver problemas reais, e que é possível por meio deles tratar de situações dentro e fora da sua área de trabalho.

A necessidade de oferecer ao aluno condições tecnológicas, como o uso da informática, foi fundamental para a evolução do aluno em relação aos conhecimentos matemáticos, como também promover sua desenvoltura em relação aos problemas pertinentes à sua área de trabalho.

Ao final pode-se responder que:

- O uso das Aplicações e Modelagem Matemática possibilita explorar os conteúdos de Cálculo, de modo significativo, num curso de Tecnologia em

Alimentos, de modo a contemplar as necessidades formativas dos egressos desse curso;

- É possível utilizar as abordagens da Modelagem Matemática e Aplicações num contexto em que há um programa a ser cumprido em um espaço de tempo definido;

- É possível utilizar essa abordagem, com os conteúdos mencionados, tendo em vista os resultados das atividades de sondagem inicial que apontam grande defasagem dos estudantes relativamente aos conhecimentos prévios de conteúdos básicos.

A estratégia de trabalho em fases favoreceu o enfrentamento de entraves (ementa pré-fixada, programa a cumprir num espaço de tempo curto, exigências de bom aproveitamento) e possibilitou explorar a contento os conteúdos previstos. O contato antecipado com trabalhos de modelagem e aplicações favoreceu o envolvimento dos estudantes na realização de suas próprias investigações quando ele se tornava o centro das atividades pedagógicas. Os estudos em literatura de modelos ou aplicações, ou as experiências vivenciadas pelos estudantes foram propícios para estabelecer entrosamento desejável com as disciplinas específicas do curso.

Bibliografia

Barbosa, J.C. (2004). Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos. In CURY, H. N. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos e propostas*, 63-83. Porto Alegre, EDIPUCRS.

Barbosa, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática. In Barbosa, J.C. *et al*, (org.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife-SBEM.

Bassanezi, R.C. (2004). Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática – uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S.; Favere, J.; Vieira, E. M. (2005). Considerações Históricas sobre a Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro. In *Anais ULBRA.* Canoas.

Brandrão, M.E.P. (2009). Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações. Teoria e Prática. Tese de doutorado. PUC-SP.

Caraça, B.J. (1963). Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Livraria Sá da Costa. 4ª Edição.

D'Ambrosio, U. (2000). Educação Matemática da teoria a prática. Campinas. SP. Ed. Papirus.

D'Ambrosio, U. (2001). Transdisciplinaridade. 1997. 2.ed. São Paulo: Ed. Palas Athena.

Dorow, K. C.; Biembengut, M. S. (2005). Mapeamento das Pesquisas sobre Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil. – Projeto – CNPq.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. Elementar Mathematik von höheren Standpunkt aus.1924-28, Berlim. Trad. castelhana Roberto Araújo: *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (s.d).

Niss, M., Blum, W., Galbraith, P. (2007) Introduction. In: Blum, W. *et al.* (ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education - the* 14^{th} *ICMI Study.* 3-29 New York: Springer.

Pires, R.C. (2006). A presença de Nicolás Bourbaki na Universidade de São Paulo. Tese de doutorado. PUC-SP.

Pollak, H. (2007). A conversation with Henry Pollak. In: Blum, W. *et al.* (ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education - the* 14^{th} *ICMI Study.* 109-122. New York: Springer.

Silveira, E. (2007). Modelagem Matemática em Educação Matemática no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

Autores: 1.Sonia Barbosa Camargo Igliori é professora do Programa de Pós graduação em Educação Matemática da PUC-SP. É doutora em Matemática pela PUC-SP e realizou pós-doutorado em Didática da Matemática, durante 1 ano, na Université Paris VII com a supervisão de Michèle Artigue. Orientou até 2011 3 teses de doutorado e mais de 30 dissertações de mestrado.
2. Maria Eli Puga Beltrão. É doutora em Educação Matemática pela PUC-SP e coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Atibaia, atuando também como professora de Cálculo e Geometria Analítica nos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática. O artigo é resultante de sua tese de doutorado.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 77-94

Pensamento algébrico e erros em atividades algébricas de estudantes da EJA

Antonio Rafael Pepece Junior, Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Fecha de recepción: 03/05/12
Fecha de aceptación: 14/12/13

Resumen	Asumiendo caracterizaciones del pensamiento algebraico y aspectos a cerca del error, este artículo presenta un análisis de los registros escritos por los estudiantes de EJA[1], "Educación para jóvenes y adultos" en actividades algebraicas que envolvieron ecuaciones de primer grado. El objetivo fue investigar indicios de pensamiento algebraico y de errores en estas producciones escritas obtenidas tras la aplicación una secuencia didáctica a estudiantes del "9º año de la enseñanza fundamental" de una escuela pública municipal. El estudio señaló la pluralidad entre los mismos e indicios del pensamiento algebraico, como utilización del lenguaje simbólico, normas y regularidades y errores que se enumeraron. **Palabras clave:** Educación Matemática. EJA - Educación para jóvenes y adultos. Pensamiento Algebraico. Error.
Abstract	Assuming characteristics of the algebraic thoughts and aspects related to the mistake, this article presents an analysis of the written registers by students from EJA (Education for young people and adults), in algebraic activities involving equation of the first degree. The aim was to investigate indications of the algebraic thoughts and mistakes in those written productions, obtained after the application of a didactic sequence to students from ninth level of the elementary school, in a public school. The study showed the plurality of them and indications of the algebraic thoughts, for instance, the utilization of the symbolic language, models and regularities and mistakes which were listed. **Keywords:** Mathematic Education. EJA - Education for young people and adults. Algebraic Thinking. Mistake**.**
Resumo	Assumindo caracterizações do pensamento algébrico e aspectos a respeito do erro, este artigo apresenta uma análise de registros escritos de estudantes da EJA[1], Educação de Jovens e Adultos, em atividades algébricas envolvendo equações do primeiro grau. O objetivo foi investigar indícios de pensamento algébrico e de erros nessas produções escritas obtidas após a aplicação de uma sequência didática a estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal. O estudo assinalou a pluralidade entre os estudantes e indícios de pensamento algébrico, como utilização de linguagem simbólica, padrões e regularidades e erros que foram listados. **Palavras-chave:** Educação Matemática. EJA – Educação de Jovens e Adultos. Pensamento Algébrico. Erro.

[1] Utilizaremos, neste trabalho, a denominação EJA para indicar a Educação de Jovens e Adultos.

1. Introdução

O trabalho com estudantes jovens e adultos não é algo recente. Ao buscar "sanar" ou "esconder" o problema do analfabetismo, vários programas e reformulações emergiram. O que fica evidente é que tais programas foram ou são voltados a uma classe social menos favorecida e têm um caráter político, conforme Haddad:

> Nos últimos anos, programas de educação de jovens e adultos no Brasil se voltaram para o sentido compensatório de uma educação voltada para os mais pobres. Buscou-se suprir a escolarização regular para aqueles que a não tiveram na idade adequada. Muitas vezes, também, buscou-se compensar a ausência de uma consciência política, através de programas que buscavam superar a "pobreza política" dos educandos (HADDAD, 1993, p.87).

Segundo o mesmo autor seria importante criar mecanismos para acabar com o analfabetismo, começando a investir em uma educação básica de melhor qualidade, bem como indicar oportunidades para que esses estudantes tenham uma educação voltada às suas necessidades. Contudo, segundo Haddad (1993), ainda são poucos e insuficientes os programas de capacitação voltados para este público e não resolvem o problema.

Conforme consta na Proposta Curricular (2002)[2] o problema é ainda mais grave quando tratamos apenas do ensino da matemática, tida como um conteúdo difícil, e na EJA isso não seria diferente, pois como argumenta Fonseca,

> [...] quando falamos em Educação Matemática de Jovens e Adultos, não nos estamos referindo ao ensino da Matemática para o estudante universitário ou da pós-graduação, nem de cursos de Matemática que integram os currículos de programas de formação especializada para profissionais qualificados, ou de sessões de resolução de problemas matemáticos com a finalidade terapêutica ou diagnóstica. Estamos falando de uma ação educativa dirigida a um sujeito de escolarização básica incompleta ou jamais iniciada e que acorre aos bancos escolares na idade adulta ou na juventude. A interrupção ou o impedimento de sua trajetória escolar não lhe ocorre, porém, apenas como um episódio isolado de não-acesso a um serviço, mas num contexto mais amplo de exclusão social e cultural, e que, em grande medida, condicionará também as possibilidades de re-inclusão que se forjarão nessa nova (ou primeira) oportunidade de escolarização (FONSECA, 2005, p.14).

Freire (2008) afirma que a educação não poderia ter sentido "bancário", no qual o professor possui o conhecimento e apenas transmite para os estudantes, sendo os alunos meros receptadores desses "depósitos" de informações. O mesmo autor declara que a pedagogia deveria começar pelo diálogo, para que os envolvidos por essa educação alcancem uma consciência crítica do mundo onde vive, e essa consciência crítica "é a representação das coisas e dos fatos como se

[2]Proposta Curricular para a EJA (2002) é uma proposta governamental utilizada em nível nacional.

dão na existência empírica. Nas suas correlações causais e circunstanciais" (p. 113).

Um desses caminhos criados por Paulo Freire tinha por objetivo tornar o aprendizado dos jovens e adultos mais rápido e acessível, conseguindo capacitar o estudante a compreender as necessidades da vida. Como ele mesmo enfatiza: "trata-se de aprender a ler a realidade (conhecê-la) para em seguida poder reescrever essa realidade (transformá-la)" (FREIRE, 2004, p.71).

2. Algumas escolhas...

Esta pesquisa baseou-se nas apostilas que o governo disponibiliza por meio do ENCCEJA[3], a qual oportuniza aos estudantes a conclusão dos estudos sem a necessidade de frequentar cursos regulares. Os estudantes têm a oportunidade de concluir o Ensino Fundamental I, Fundamental II e Ensino Médio somente realizando avaliações divididas por áreas de conhecimentos, e uma dessas áreas é a Matemática. Cada secretaria municipal pode ou não instituir essa avaliação e, no caso da cidade em estudo, esse sistema não é aplicado. Assim, os sujeitos da pesquisa foram estudantes da EJA que assistiam aula regularmente.

As apostilas disponibilizadas para estudo possuem todas as habilidades e competências que os estudantes deveriam possuir para concluir os estudos. Além disso, referente à Matemática, possui um capítulo exclusivo para o ensino da álgebra, apontando quais seriam os objetivos a serem alcançados depois do estudo de tal capítulo.[4] Apresenta algumas funções para o trabalho com a álgebra, entre essas, o de generalizar propriedades aritméticas conhecidas e estabelecer relações entre duas grandezas.

A Proposta Curricular (2002) para o ensino da EJA indica a utilização de generalizações para resolver as situações propostas, sempre nos conduzindo a reconhecer que o pensamento algébrico só existe a partir do momento que conseguimos expressar essas generalizações utilizando uma forma simbólica, ou seja, utilizando-se da linguagem algébrica.

Já na apostila do ENCCEJA (2006), não são apresentadas caracterizações diretas sobre o pensamento algébrico, mas sim, algumas funções para o trabalho com a álgebra, entre essas, o de generalizar propriedades aritméticas conhecidas e estabelecer relações entre duas grandezas.

Nesse sentido, para Arcavi (1994), uma das perspectivas em torno do objetivo principal da álgebra seria essa utilização de símbolos. Este autor defende o desenvolvimento do "sentido simbólico" (*symbol sense*[5]), porém, aponta que o pensamento algébrico e os símbolos não têm o mesmo sentido.

---

[3] ENCCEJA – Exame Nacional de Certificações de Competências de Jovens e Adultos.
[4] Para maiores detalhes verificar a apostila do ENCEJA, 2006, p.169.
[5] Para Arcavi (1994) o desenvolvimento do sentido simbólico (symbol sense) só se concretiza quando os indivíduos conseguem executar manipulações algébricas, dando ênfase para os símbolos na estrutura dos problemas. Assim, ter sentido algébrico para este mesmo autor seria possuir uma relevante invocação da Álgebra, dos símbolos de forma apropriada e o reconhecimento de uma solução simbólica.

Ponte et al. (2009) defende que uma das caracterizações do pensamento algébrico se dá a partir da habilidade na manipulação de símbolos. A capacidade desta manipulação, ou mesmo o chamado “sentido simbólico” colocado por Arcavi (1994), inclui a capacidade de interpretação e utilização desses símbolos para a descrição de situações ou para a resolução de problemas, e coloca três vertentes para essa caracterização: representar, raciocinar e resolver problemas e modelar situações.

Por outro lado, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam tendências do pensamento algébrico que se reduz apenas a uma linguagem algébrica e pode:

> [...] subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-lo, colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.85).

Porém essas colocações, como os próprios autores argumentam, são didaticamente negativas.

Num outro momento, os mesmos autores, apontam alguns elementos indicando que o pensamento algébrico não possui apenas uma forma para se manifestar e sim pode se expressar

> [...] através de uma linguagem natural, através de uma linguagem aritmética, através de uma linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.88).

Considerando tudo isso, esses autores, sinalizam algumas implicações pedagógicas sobre o pensamento algébrico que, não sendo especificamente uma linguagem simbólica, não teria motivos para uma tardia iniciação da álgebra escolar. Porém, a utilização da linguagem simbólica facilitaria o desenvolvimento de situações problema.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico que são: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização (p. 87)”.

Já, segundo Lins e Gimenez (1997), é importante abordar uma discussão sobre qual o melhor momento de se iniciar a educação algébrica e também quais os conteúdos e qual a melhor forma desta inserção, pois não é fácil perceber quando estamos trabalhando ou não com uma atividade algébrica, aliás, ser algébrico ou não, dependerá da forma como este conteúdo será desenvolvido.

Por esse motivo, os autores apontam não existir um pensamento algébrico determinado e sim o que chamam de coisas da álgebra. Assim, um problema que inicialmente poderia ser resolvido de maneira aritmética não se transforma em um problema algébrico pelo simples fato de se utilizar ou não uma linguagem simbólica.

Podemos perceber que, de acordo com as caracterizações apontadas por Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico pode se manifestar independente da utilização da linguagem algébrica.

Nesse sentido, Lins e Gimenez (1997), apresentam três características fundamentais para o pensamento algébrico. Assim, para eles, pensar algebricamente significa:

> 1 – Produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmeticismo);
>
> 2 – considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos (chamamos a isso de internalismo); e
>
> 3 – operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade) (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151).

Além disso, segundo os autores:

> Uma educação algébrica compreende dois objetivos centrais que seriam permitir que os estudantes sejam capazes de produzir significado (em nosso sentido) para a álgebra e permitir que os estudantes desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152).

Podemos, finalizando, considerar algumas concepções colocadas por Usiskin (1995) para o estudo da álgebra escolar, quando aponta a álgebra como: uma aritmética generalizada; um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; um estudo de relações entre grandezas; um estudo das estruturas.

Notamos a partir dessas informações que não existe um consenso entre os diversos autores para caracterizar realmente o que venha a ser o pensamento algébrico, educação algébrica, coisas da álgebra ou qualquer outro termo utilizado por algum desses autores.

Como nosso objetivo, na pesquisa, foi investigar indícios desse pensamento e de possíveis erros na produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas envolvendo equações do primeiro grau, apresentaremos o que, para as nossas análises constitui-se uma manifestação do pensamento algébrico, não nos importando com alguma sequência ou mesmo grau de importância dessas manifestações baseados nos autores citados, são elas: utilizar termos desconhecidos seja como variáveis ou incógnitas na sua resolução; apresentar cálculos numéricos expressando que houve uma estratégia de resolução com variável; equacionar as situações-problema, conseguindo representá-las utilizando uma linguagem simbólica; apresentar alguma resolução que faz referência ao termo a ser determinado pela situação problema.

Como as análises do trabalho ocorreram unicamente por meio da produção escrita dos estudantes em atividades envolvendo o conteúdo citado, não poderíamos deixar de lado a apresentação e discussão do erro, seja como apontado por alguns autores, como sendo um instrumento didático (BORASI, 1987) seja, por outros, quando se referencia que o erro está ligado a uma construção do conhecimento (CURY, 2007; SILVA, 2008).

Pensando no âmbito escolar, desde os primórdios, os estudantes que cometiam erros eram punidos pelos professores. Claro que tais punições, no início, eram feitas até de maneira física, conforme Luckesi (1990) descreve:

> [...] com o qual o professor batia na palma das mãos dos estudantes. A quantidade de "palmadas" dependia do juízo deste professor sobre a possível "gravidade No Nordeste brasileiro, esta mesma prática era efetivada por meio da palmatória, instrumento de castigo" do erro (LUCKESI, 1990, p.133).

Percebemos que as punições eram simplesmente impostas de acordo com a vontade do "educador", o qual impunha regras e padrões que deveriam ser respeitados.

Podemos verificar que essas atitudes estão presentes em todos os níveis de educação, desde o infantil até mesmo em cursos superiores de ensino. Isso também pode ser verificado na EJA, pois neste segmento de ensino, os estudantes, a todo o momento, se preocupam com os demais colegas de classe, muitas vezes para não demonstrar certa "ignorância" sobre o tema em estudo, ou mesmo por achar que o fato de apresentar dificuldade em certos conteúdos poderia aparecer como mais um "fracasso escolar".

Isso faz com que, segundo o mesmo autor, os estudantes sintam certa ansiedade durante as aulas, sintam-se intimidados em participar de discussões, e a partir daí comecem uma autopunição perante suas dificuldades de aprendizagem.

Entretanto, isso poderia ser evitado se o erro fosse visto sob outro olhar, "...como fonte de virtude, ou seja, de crescimento." (LUCKESI, 1990, p.136) Segundo o mesmo autor, isso

> [...] implicaria estar aberto a observar o acontecimento como acontecimento, não como erro: observar o fato sem preconceito, para dele retirar os benefícios possíveis. Uma conduta em princípio, é somente uma conduta, um fato: ela só pode ser qualificada como erro, a partir de determinados padrões de julgamento (LUCKESI, 1990, p. 136).

Mas, como podemos então classificar um erro? Luckesi (1990, p. 137) aponta que "a ideia de erro só emerge no contexto da existência de um padrão considerado correto", e partir dessas comparações, afirmar que tal situação está correta ou incorreta. Fiorentini (2006) sugere que tal comparação com esse determinado padrão pré-estabelecido em produzir significados para a matemática, pode:

> [...] servir positivamente de ponto de partida para o desenvolvimento cognitivo do estudante, se forem identificados, compreendidos e problematizados didático-pedagogicamente; e esta representa uma condição necessária para a sua superação (FIORENTINI, 2006, p. 7-8).

Assim, não poderíamos simplesmente fazer uma relação dialética entre o erro e a falta de conhecimento e isso fica evidente quando Cury (2007, p. 80) aponta o erro "como um conhecimento, um saber que o estudante possui, construído de alguma forma, e é preciso elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando os estudantes a um questionamento sobre as suas respostas".

Por esse motivo, Cury (2007) assinala que a análise dos erros pode ser considerada uma metodologia que precisa ser trabalhada e explorada na sala de aula.

Neste sentido, Fiorentini (2006) classifica o erro como resultado

> [...] do esforço dos estudantes em particular do processo de aprendizagem, produzindo e negociando, a partir de seu mundo e de sua cultura, sentidos e significados sobre que se ensina e aprende na escola. E, nesse sentido, o erro não poderia ser visto como um mal a ser erradicado, mas como parte do processo de aprender e desenvolver-se intelectualmente (FIORENTINI, 2006, p. 4).

Segundo este mesmo autor, devemos ter no erro um processo de aprendizado, compreensão para solucionar problemas, isso pode evidenciar que os estudantes em algum momento estão tentando se apropriar dos significados aprendidos na escola.

Assim devemos segundo Cury (2007), dar uma atenção maior a todo o processo, não simplesmente considerar o resultado final. Nesta perspectiva, Borasi (1987) aponta que o erro possui dois objetivos, o primeiro seria a sua eliminação, ou seja, apenas verificar se tal situação estaria correta ou incorreta, e um segundo que seria explorar as suas potencialidades, partindo para novas regras por meio de outros exemplos.

Buriasco (2000) segue uma mesma linha e afirma que os erros:

> [...] são tomados como um tipo de índice de que o estudante não sabe fazer, não tem estudado e não como um índice de que o estudante sabe alguma coisa parcial, incorreta e que portanto é preciso trabalhar com ela, para, a partir daí, construir um conhecimento correto (BURIASCO, 2000, p. 169).

Também, podemos simplesmente acreditar que o erro, conforme aponta Luckesi (1990), só é considerado erro, quando temos um padrão que é considerado correto para poder comparar, a partir disso, o mesmo autor afirmar existir então um sucesso ou insucesso dos resultados.

Da mesma forma que o erro não pode ser considerado como única maneira de apontar que o estudante não conseguiu se apropriar de um determinado conhecimento, devemos considerar que o fato do acerto também não garante que tudo foi aprendido sobre tal conteúdo.

Precisamos acreditar que todo tipo de erro deve ser utilizado, de forma correta, para ajudar no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes e, ainda, conforme Pinto (2000), que grandes descobertas se iniciaram a partir de erros cometidos.

Os erros podem ser classificados de maneiras distintas por autores diferentes. Silva (2008), por exemplo, aponta dois tipos de erros:

> O erro construtivo, quando surge durante o processo de redescoberta ou reinvenção do conhecimento, e que o sujeito abandona ao alcançar um nível de elaboração mental superior. O outro seria o erro sistemático que resiste, apesar das evidências que comprovam sua inadequação, limitando ou mesmo impedindo as possibilidades de aprendizagem (SILVA, 2008, p. 100).

Nas análises das atividades da sequência didática, os erros encontrados serão explicitados, buscando relacioná-los com os apresentados nesta sessão.

E nas conclusões finais, os erros serão classificados a partir da produção escrita dos estudantes, que serviram apenas para análise da sequência didática em questão, pois a classificação dos erros depende do momento e da maneira que cada situação é apresentada.

3. A experimentação

A sequência didática foi aplicada à luz da engenharia didática proposta por Artigue (1996) e Almouloud (2007).

Para a realização da pesquisa foi escolhida uma sala do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública no interior do estado de São Paulo, escola essa, a única a oferecer as turmas de EJA na cidade, e consideramos somente os estudantes que participaram do desenvolvimento de toda a sequência didática, sendo sete no total. Nominamos esses estudantes por A1, A2, A3, A4, A5, A6 e A7.

O grupo em estudo tinha uma pluralidade muito grande, tendo estudantes das mais diversas faixas etárias e profissões. Além disso, a cidade onde o trabalho foi realizado possui altos índices de analfabetismo e condições de estudo e infra estrutura deficientes. Os professores responsáveis em ministrar as aulas não tiveram preparação alguma para trabalhar com a EJA e o material didático utilizado é praticamente o mesmo do ensino regular.

Um pré-teste com questões do ENCEJA foi aplicado para que pudéssemos verificar algumas dificuldades e servir de parâmetro para a montagem da sequência didática.

As atividades da sequência didática foram retiradas da apostila do ENCCEJA, e a sua ordem foi determinada seguindo um grau de dificuldade atribuído pelos autores e distribuídas em três dias, constando de seis aulas de 45 minutos cada. No primeiro dia aplicamos as quatro atividades a seguir, as quais foram resolvidas e recolhidas as produções escritas. Em seguida fazíamos algumas discussões e os estudantes tinham a possibilidade de resolver novamente cada questão. A análise dos registros escritos dessas quatro atividades é que abordaremos neste estudo.

4. As análises...

Atividade 1 - O dobro da minha idade é igual a 50. Qual é a minha idade?

No pré-teste verificamos que os estudantes tinham dificuldades em trabalhar com noções de dobro, metade, etc.. Por isso a primeira atividade contemplava esse conteúdo.

Na primeira tentativa, os estudantes, em sua maioria, exibiram um resultado correto para a atividade proposta, apresentando indícios de pensamento algébrico e diferentes modos de resolução: utilização de equações pelos estudantes A1 e A3, somente a resposta por A2, representar a solução da atividade por meio de uma multiplicação ou uma divisão, como A4, A5 e A6 (Figura 1). Somente um estudante, o A7, quando leu pela primeira vez a atividade fez um comentário afirmando que estaria errado, pois a sua idade era 53 e não 50 como a atividade enunciava. Não encontramos indícios de pensamento algébrico no registro escrito desse estudante.

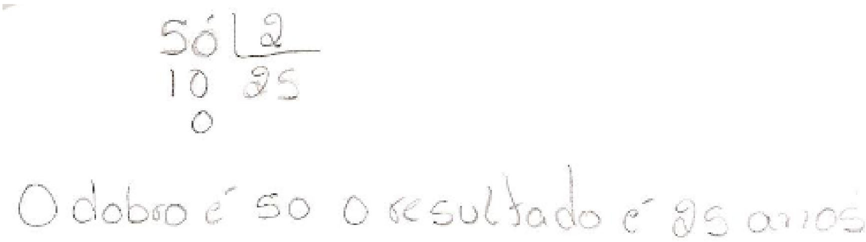


Figura 1. Resolução do estudante A6 na atividade 1 – 1ª parte

De certa forma, o objetivo com essa atividade foi alcançado, pois vários estudantes, na primeira parte ou na segunda parte da atividade, apresentaram indícios de pensamento algébrico, seja resolvendo por meio de equações ou mesmo alguma outra solução que indicava tal tipo de pensamento (Figuras 2, 3 e 4). Os erros que apareceram deixam claro a deficiência que apresentam quanto à linguagem algébrica e interpretação de enunciados.

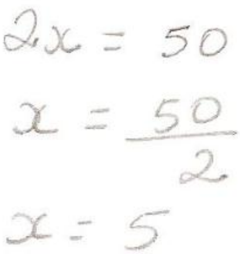


Figura 2. Resolução do estudante A5 na atividade 1 – 2ª parte

Figura 3. Resolução do estudante A4 na atividade 1 – 2ª parte

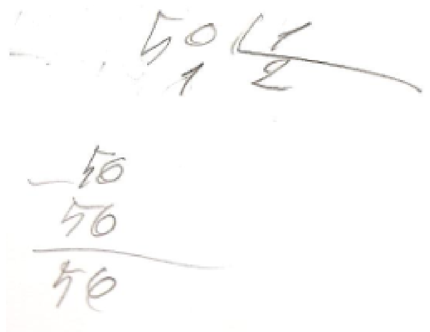


Figura 4. Resolução do estudante A7 na atividade 1 – 2ª parte

Atividade 2 - Recebi um aumento de R$ 30,00 e passei a ganhar R$ 210,00. Qual era o meu salário?

Esta atividade tinha como objetivo relacionar a utilização de valores monetários com a ideia de aumento de salário, pois tal assunto está diretamente ligado com a realidade dos estudantes.

Na primeira parte da atividade, os estudantes utilizaram operações matemáticas para chegar à solução do problema, o que pode indicar indícios de pensamento algébrico. Alguns erros foram detectados na resolução de certos estudantes: falta de atenção ou mesmo falta de conhecimento na aplicação das quatro operações (Figura 6).

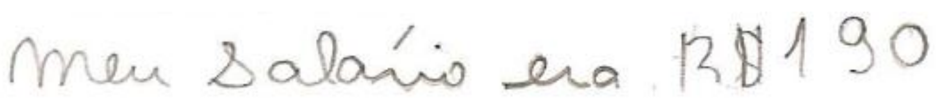


Figura 5. Resolução do estudante A2 na atividade 2 – 1ª parte

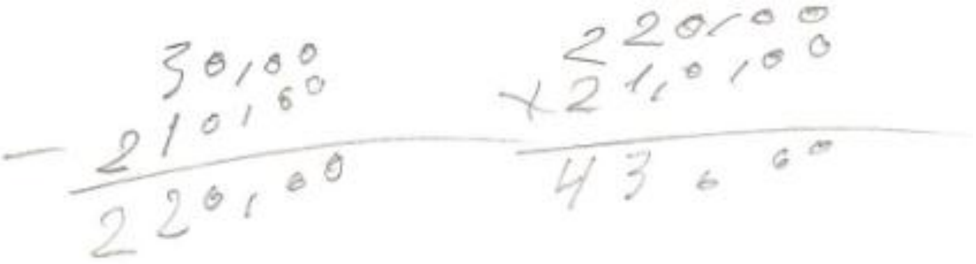


Figura 6. Resolução do estudante A7 na atividade 2 – 1ª parte

Por outro lado, na segunda resolução, os indícios de pensamento algébrico verificaram-se quando alguns estudantes utilizaram incógnitas nas equações para determinar o valor desconhecido (Figura 7). Houve um entendimento melhor do enunciado e isso pode ter ocorrido em razão da atividade tratar de valores monetários, tema ligado ao cotidiano dos mesmos.

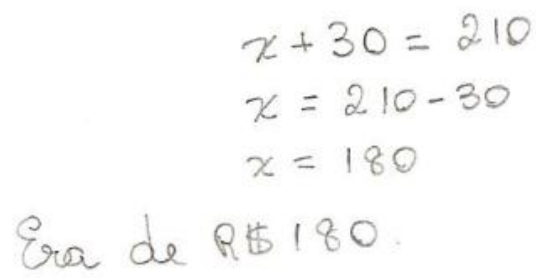


Figura 7. Resolução do estudante A1 na atividade 2 – 2ª parte

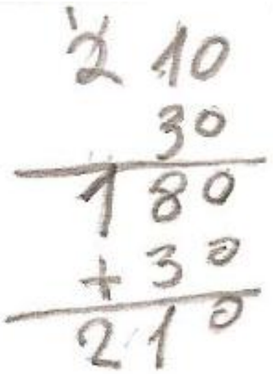


Figura 8. Resolução do estudante A2 na atividade 2 – 2ª parte

Atividade 3 - O triplo de um número mais duas unidades é igual a onze. Que número é esse?

Nesta atividade, tínhamos como objetivo associar a discussão da primeira atividade, que era a utilização de dobro, e verificar uma possível ligação que os estudantes fariam com o termo “triplo”, porém acrescentando à multiplicação uma adição para a montagem da possível equação.

Fazendo uma análise dessa atividade três, constatamos um avanço por parte dos estudantes no que diz respeito ao dobro e triplo de um número. Detectamos indícios de pensamento algébrico nas resoluções dos estudantes, pois com o andamento das atividades os mesmos se sentiram mais à vontade para apresentar soluções, discutir situações e aquele receio inicial de apresentar soluções incorretas foi sendo deixado de lado. Tivemos um número menor de erros relacionados a esta atividade. Analisando a resolução de A7, na Figura 11, consideramos que esse estudante não interpretou o enunciado da atividade e nem possui conhecimento prévio do assunto que estava sendo tratado. Destacamos a seguir alguns protocolos dos estudantes nessa atividade, tanto da 1ª parte como da 2ª:

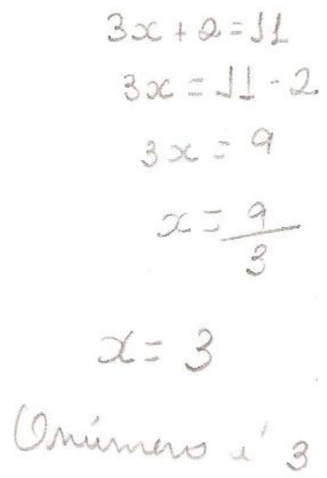


Figura 9. Resolução do estudante A5 na atividade 3 – 1ª parte

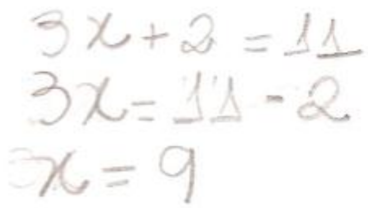


Figura 10. Resolução do estudante A4 na atividade 3 – 1ª parte

Figura 11. Resolução do estudante A7 na atividade 3 – 1ª parte

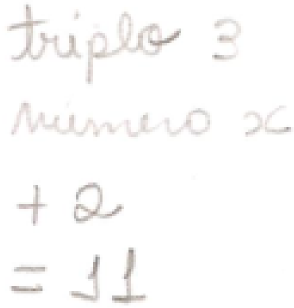


Figura 12. Resolução do estudante A5 na atividade 3 – 2ª parte

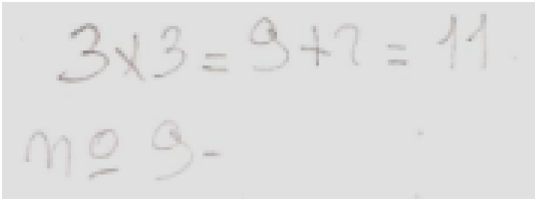


Figura 13. Resolução do estudante A2 na atividade 3 – 2ª parte

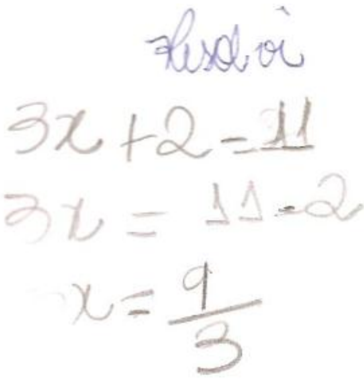


Figura 14. Resolução do estudante A4 na atividade 3 – 2ª parte

Figura 15. Resolução do estudante A7 na atividade 3 – 2ª parte

Atividade 4 - A idade de Pedro é a metade da de Carlos. A soma das idades é 30 anos. Qual a idade de Carlos?

Nesta atividade esperávamos uma dificuldade maior por parte dos mesmos, por se tratar de um problema que, para sua resolução, a incógnita deveria aparecer para representar as idades das duas pessoas, ou seja, uma idade está relacionada à outra. Além disso, os estudantes deveriam relacionar essas idades e se possível representar a atividade por meio de uma equação, ou ainda utilizar algum outro caminho que pudesse chegar à solução, demonstrando indícios de pensamento algébrico.

Essa preocupação inicial com relação ao desenvolvimento dessa atividade se concretizou, mesmo assim alguns estudantes tiveram um bom desempenho e por meio da produção escrita verificamos indícios de pensamento algébrico.

Já com relação aos erros, os mesmos verificados nas atividades anteriores, quase sempre se repetiram nessa atividade. Isso pode ter ao menos duas explicações: a primeira seria que os estudantes não estariam muito preocupados com o desenvolvimento da atividade, o que não pode ser deixado de lado, pois no inicio da sequência didática fomos questionados sobre a validade das atividades, ou seja, como eles próprios apontaram “isso aqui vai valer nota”; a segunda seria a dificuldade para entender o que foi sendo discutido em cada uma delas. Apenas dois estudantes, A1 e A6 (Figura16), utilizaram uma equação para representar a situação proposta, resolvendo-a. Segundo a resolução de cada um, concluímos que a incógnita “x”, que foi utilizada, representava a idade de Carlos, que era o valor que o problema solicitava. Nesse sentido verificamos indícios de pensamento algébrico, pois os mesmos equacionaram a atividade proposta, sendo esta uma das caracterizações definidas nesta pesquisa. A título de exemplo, apresentamos registros escritos de estudantes:

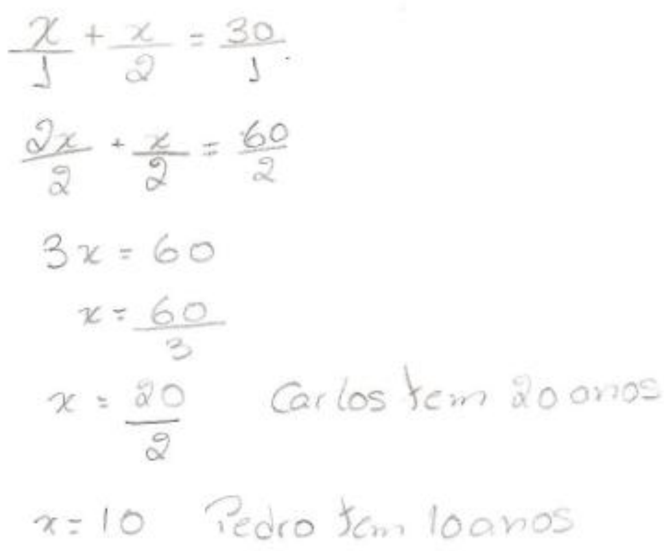


Figura 16. Resolução do estudante A6 na atividade 4 - 1ª parte

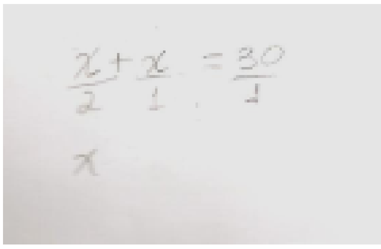


Figura 17. Resolução do estudante A3 na atividade 4 - 1ª parte

Figura 18. Resolução do estudante A5 na atividade 4 - 1ª parte

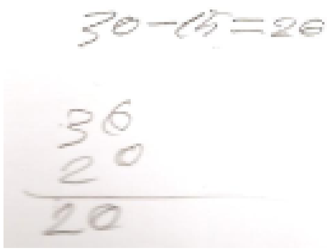


Figura 19. Resolução do estudante A7 na atividade 4 - 1ª parte

Reparamos que o estudante A7 (Figura 19) se esforçou para chegar a alguma conclusão para a atividade, porém sem representar ou mesmo entender o que estava sendo solicitado, pois trabalhou com valores que não podemos concluir como apareceram. O estudante não interpretou o enunciado da atividade e muito menos retirou alguma informação que fosse necessária para sua resolução.

Durante a discussão, os estudantes apontaram que este problema era muito mais complicado que os demais, por esse motivo alguns não resolveram. Levantaram a hipótese de utilizar duas incógnitas diferentes para representar as idades de Carlos e Pedro, porém nenhum dos estudantes tentou fazer tal representação durante sua primeira resolução. Mostramos que seria impossível determinar valores diferentes para duas incógnitas apresentando apenas uma equação.

Todas as colocações dos estudantes eram apresentadas por meio de exemplos, inclusive sobre a possibilidade ou não em utilizar determinada resolução para o desenvolvimento do problema.

Um questionamento foi o fato da incógnita possuir denominador, pois diziam que não poderiam resolver o problema utilizando o mínimo múltiplo comum, por causa de o numerador ser uma incógnita e não um valor numérico. Outros questionaram em qual momento poderiam cancelar o denominador e como calcular o MMC, alegando não lembrar ou nunca ter visto este conteúdo em anos anteriores.

Aproveitamos essas dúvidas e esses erros para atingir um dos objetivos apontado por Borasi (1987) que seria utilizar os mesmos para potencializar o aprendizado sobre o conteúdo em questão.

Figura 20. Resolução do estudante A4 na atividade 4 - 2ª parte

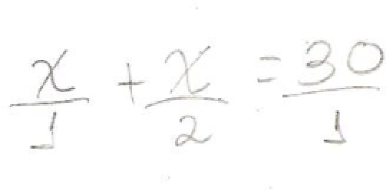


Figura 21. Resolução do estudante A3 na atividade 4 - 2ª parte

Já conforme mostra a Figura 22, o estudante A7 não resolveu o problema, e podemos inferir que não o compreendeu, mesmo depois da discussão, pois analisando sua resolução, verificamos que determinou que os dois rapazes possuíam a mesma idade e assim apresentou os mesmos erros apontados na primeira resolução.

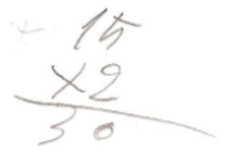


Figura 22. Resolução do estudante A7 na atividade 4 - 2ª parte

5. Considerações Finais

A maioria das pesquisas a respeito do pensar algebricamente é realizada para o público do ensino regular, ou seja, são abertas discussões para descobrir qual o momento ideal para a inclusão da álgebra e como deve ser e processo, todavia quando tratamos dos jovens e adultos acreditamos ser um pouco diferente, principalmente considerando todos os conhecimentos prévios que esses estudantes possuem e suas experiências já vividas.

Levando em conta a parte da sequência didática desenvolvida, chegamos a conclusões que estão de acordo com o proposto pela pesquisa no que diz respeito a verificar indícios de pensamento algébrico na produção escrita desses estudantes e possíveis erros.

Com a aplicação das atividades presentes na apostila do Encceja e que deveriam ser respondidas por esses estudantes do nono ano do ensino fundamental, percebemos que alguns deles estão bem preparados para essa prova de certificação, como é o caso dos estudantes A1, A3, A5 e A6, que tiveram um bom desempenho durante o desenvolvimento das atividades. Por outro lado o estudante A4 apresentou algumas dificuldades no entendimento dos enunciados e no desenvolvimento das situações o que poderia ser prejudicial na referida prova.

Além disso, inferimos que alguns estudantes, como é caso do A2, o qual entregou a maioria das atividades em branco ou somente com a resposta, e do A7, o qual apresentou maior número de erros e uma grande dificuldade no desenvolvimento das atividades, não estariam preparados para realizar a prova, muito menos concluir o ensino fundamental.

Em decorrência das análises das atividades, detectamos vários erros dos estudantes nas resoluções: erro por falta de conhecimento prévio do conteúdo ou termos utilizados; erro por falta de noção das quatro operações; erro por falta de atenção na resolução; erro na apresentação do resultado; erro por não apresentar solução para o problema; erro na interpretação do enunciado.

Finalmente, verificamos indícios de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes, destacando: utilização de termos desconhecidos, como variáveis ou incógnitas; apresentação de cálculos numéricos; equacionamento das situações-problema; utilização de linguagem simbólica; resolução fazendo referência ao termo a ser determinado pela situação problema; padrões e regularidades.

6. Agradecimentos

A segunda autora agradece à FAEPE-UEL e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Bibliografia

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* UFPR, Curitiba. Paraná.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics.* FLM Publishing Association, Frederictor. New Brunswick. Canadá, Vol. 14, nº 3, 24-35.

Artigue, M. (1996). Engenharia didática. In: Brun, J. (Org.). *Didática das matemáticas.* Instituto Piaget, Lisboa. Portugal, 193-217.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of mathematics*. FLM Publishing Association, Frederictor. New Brunswick. Canadá, Vol. 7, nº 3, 2-8.

Brasil. (2002). Ministério da Educação, Secretária de Educação Fundamental. *Proposta Curricular para a educação de jovens e adultos: segundo segmento de ensino fundamental*. 5ª a 8ª série. Introdução, Vol. 1.

Enceeja. (2010). *Apostila*. Recuperado el 27 de marzo de 2010, de http://encceja.inep.gov.br

______. (2011). *Matriz de competências.* Recuperado el 15 de enero de 2011, de http://encceja.inep.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=51&Itemid=59

______. (2006). *Matemática: livro do estudante: ensino fundamental.* Coord.: Zuleika de Felice Murrie – 2. ed. Brasília: MEC: Inep. Capítulo VII – A Álgebra: suas funções e seus usos. 149-169.

Fiorentini, D.; Miorin, M. A.; Miguel, A. (1993). Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. *Pró-posições*. Vol. 4, nº 1, 78-91.

Fonseca, M. C. F. R. (2005). Educação de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições. *Coleção Tendências em Educação Matemática.* 2ª ed. Autêntica. Belo Horizonte.

Freire, P. (2006). *Pedagogia do oprimido.* 43ª.ed. Paz e Terra. Rio de Janeiro. Brasil.

______. (2008). *Educação como prática da liberdade.* 31ª ed. Paz e Terra. Rio de Janeiro. Brasil.

______. (2004). O mentor da educação para consciência. In: *Revista Nova Escola, Grandes Pensadores.* Editora Abril. São Paulo, Brasil, 70-72.

Haddad, S. (1993). *Tendências Atuais da Educação de Jovens e Adultos no Brasil.* Anais do Encontro Latino Americano sobre Educação de Jovens e Adultos trabalhadores. Olinda, Bahia. Brasil, 86-108.

Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Papirus. Campinas, São Paulo, Brasil.

Luckesi, C. C. (1990). Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: *A construção do projeto de ensino e a avaliação.* Série Ideias. Nº. 8. FDE, São Paulo. Brasil, 133-140.

Ponte, J. P. et al. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Recuperado el *15 de agosto de 2010, de* http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/documents/npmeb/brochura algebra (set2009).pdf

Usiskin, Z. (1995). Concepções Sobre Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis. In: Coxford, A. F.; Shulte, A.P. (Org). *As idéias da álgebra.* Atual, São Paulo, São Paulo. Brasil, 9-22.

Silva, E. M. D. (2008). A virtude do erro: uma visão construtivista da avaliação, *Estudos em Avaliação Educacional.* Vol. 19, nº 39. 91-144.

Antonio Rafael Pepece Junior. Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL – PR. Docente da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos – FATEC e da ETEC Mario Antonio Verza. arpepece@gmail.com
Angela Marta Pereira das Dores Savioli. Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo, USP, SP. Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, PR e do Departamento de Matemática da UEL. angelamarta@uel.br, angela@sercomtel.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 95-113

www.fisem.org/web/union

Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote

Carlos M. Hernández Hechavarría, Olga Lidia González Vidal

Fecha de recepción: 13/09/2012
Fecha de aceptación: 25/10/2015

Resumen	Las actividades investigativas escolares y los ejercicios en matemática merecen una atención especial por su incidencia en el perfeccionamiento de la enseñanza y el aprendizaje, en este sentido se presenta sintéticamente una concepción y ejemplifica su utilización en la práctica escolar asociado a un objeto atrayente para los alumnos: el papalote; un ejercicio propuesto en un curso de superación y un sistema de ejercicios elaborado por maestros participantes. **Palabras clave**: actividad investigativa, papelote
Abstract	The investigating school activities and the exercises in mathematics focus an especial attention for their incidence in the improving of the teaching and learning process, in this sense it presents a conception itself synthetically and it exemplifies his utilization in the school practice once an attractive object was associated to for the pupils: The kite; An exercise proposed in a course of overcoming and an exercising system elaborated by participating teachers. **Keywords**: investigating school activities, the kite
Resumo	As atividades investigativas escolares e os exercícios em matemática merecem uma atenção especial pela sua incidência no aperfeiçoamento do ensino e aprendizagem, neste sentido se apresenta sinteticamente uma concepção e exemplifica sua utilização na prática escolar associado a um objeto atraente para os alunos: a pipa; um exercício proposto num curso de superação e um sistema de exercícios elaborado por mestres participantes. **Palavras Chave:** atividades investigativas, pipa

1. Introducción

Estudios regionales, nacionales y territoriales revelan que los resultados de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas no son satisfactorios y entre las causas señaladas en algunos de ellos figura la utilización de enfoques, métodos y medios inadecuados; en este sentido dificultades diagnosticadas en la orientación y desarrollo de actividades investigativas escolares y el planteamiento de ejercicios evidencian la necesidad de divulgar concepciones y ejemplos que sirvan de modelo.

El propósito de este artículo es exponer sintéticamente una concepción didáctica básica para el desarrollo de actividades investigativas escolares que transita por seis fases, desde la introducción o encuadre hasta la autoevaluación y evaluación;

también actividades de superación y observaciones didácticas para maestros que resultaron efectivas pues propiciaron su profundización en contenidos y elaboraciones de novedosos ejercicios que tuvieron un impacto favorable en la práctica escolar.

La actividad y ejercicios presentados también tuvieron un impacto novedoso por la utilización del GeoGebra ya que los docentes involucrados no conocían este potente software y transmitieron sus experiencias a otros de distintas escuelas que tampoco lo conocían. Además a aquí no solo se utiliza el GeoGebra simplemente para facilitar la obtención de un resultado, por ejemplo la imagen de una figura; fundamentalmente para obtener o redescubrir nuevos ejercicios y vías de solución aprovechando sus opciones para realizar construcciones y cálculo con rapidez.

2. Concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares.

Con el propósito precisar dificultades en la enseñanza y el aprendizaje, profundizar en sus causas de y contribuir a erradicarlas, miembros del proyecto “Evaluación y mejoramiento de la calidad educativa en la Universidad de Ciencias Pedagógicas Frank País García y Centros escolares de Santiago de Cuba” han revisado, entre otros documentos, informes sobre operativos nacionales, mediciones trimestrales del aprendizaje de distintos municipios y centros escolares, tesis y propuestas de solución, precisándose dificultades entre las que figuran:

- Persistencia en la enseñanza de algoritmos.
- Escasa vinculación entre las asignaturas y de estas con la vida. No aprovechamiento de temas y actividades atrayentes para el aprendizaje de los escolares.
- Exiguo diagnóstico de las potencialidades de los escolares y deficiente atención a las diferencias individuales.
- No selección o inadecuada utilización de un software apropiado para el tratamiento de algunos temas, por ejemplo, del GeoGebra u otro que involucre la geometría dinámica y otros contenidos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.
- Insuficiente conocimiento del enfoque investigativo y preparación para la elaboración de actividades investigativas que promuevan adecuadamente la inteligencia, la creatividad y el talento de los escolares.

Las dificultades anteriores, detectadas en las diferentes educaciones, evidencian que en general los maestros requieren preparación y entrenamiento para elaborar y desarrollar actividades investigativas adecuadas a las necesidades y potencialidades de los escolares con vistas a la estimulación y desarrollo de su creatividad.

Si bien destacados investigadores y docentes de diferentes países han abordado las actividades investigativas de los escolares desde distintas aristas con propósitos bien definidos, por ejemplo, acerca de la estimulación y desarrollo de la creatividad, la formación interdisciplinaria, el perfeccionamiento del método investigativo, las formas de organización y la autovaloración, no han permitido superar insuficiencias detectadas en la práctica escolar, por tanto se requiere profundizar en los resultados teóricos y prácticos obtenidos.

La importancia del desarrollo de actividades investigativas por los escolares es reconocida de manera explícita o implícita en diversos documentos dirigidos al perfeccionamiento del proceso de enseñanza aprendizaje, pero las indicaciones, criterios y consideraciones no cubren todas las necesidades de los docentes, pues generalmente, tienen un carácter muy general o no alcanzan un adecuado nivel de concreción y ejemplificación.

La concepción para el desarrollo de las actividades investigativas de los escolares que se presentará sintéticamente ha sido introducida en distintas educaciones, obteniéndose resultados positivos en el aprendizaje de los escolares, particularmente en las matemáticas, el establecimiento de vínculos interdisciplinarios, la formación científico investigativa de los escolares y la concreción del enfoque de resolución de problemas. También se ha reconocido su incidencia en la superación de los docentes que la utilizan.

Entre las insuficiencias que persisten en la práctica escolar respecto a las actividades investigativas de los escolares figuran las siguientes:

- Considerarlas como una actividad añadida u opcional, no como una actividad esencial, coherente y sistemática para el aprendizaje, en estrecho vínculo con los diversos componentes del proceso de enseñanza – aprendizaje.
- La insuficiente preparación de los docentes para orientarlas, dirigirlas y controlarlas adecuadamente. En algunos casos se añade el desconocimiento sobre las posibilidades que ofrecen estas actividades para la enseñanza y el aprendizaje, por lo cual no se genera el interés por profundizar en la temática.

Se asumen como actividades investigativas las diligencias, indagaciones, sondeos, tanteos o exploraciones que hacen los escolares, a partir de la asunción de un problema, para descubrir o apropiarse de un conocimiento determinado, que sea nuevo y útil para ellos. Por ende deben estar dirigidas a satisfacer necesidades intelectuales o de aprendizaje de los escolares, que pueden estar dadas por falta de conocimientos, habilidades, o por grandes motivaciones, posibilidades e intereses de éstos en profundizar en un determinado contenido.

Considerar los distintos espacios de aprendizaje, el tiempo que le dedican y las relaciones personales que en ellos se establecen son aspectos importantes en la estructuración de un proceso de enseñanza aprendizaje que considere a las actividades investigativas como esenciales, pues pueden desarrollarse de manera individual y/o colectiva, tener distintos alcances y objetivos, previstas para un lapso corto o largo, dentro y/o fuera del salón de clases y, conjugar las actividades presenciales con las no presenciales en función del mejor aprovechamiento de los distintos espacios y momentos de aprendizaje.

Las referidas actividades adecuadamente atendidas por los docentes posibilita que los escolares descubran, planteen y resuelvan problemas atendiendo a sus intereses y potencialidades, es decir ofrecen posibilidades que no brindan otras concepciones de la enseñanza que priorizan la enseñanza de algoritmos por encima del desarrollo del pensamiento.

En este sentido, los problemas abiertos, pueden desencadenar importantes investigaciones, ya que no tienen una sola solución, requieren de la búsqueda de la mayor cantidad de información y elementos posibles para seleccionar, dentro de las posibles soluciones, la que consideren más apropiada y justificar su elección con la mayor objetividad posible, para lo cual tendrán que utilizar diversos recursos: estadísticos, gráficos y otros.

A continuación se exponen resumidamente las fases de la concepción para la orientación, desarrollo y control de las investigaciones escolares, como actividad esencial en la estructuración del proceso de enseñanza aprendizaje, posteriormente con el apoyo de una Figura 1 otros detalles.

1. Introducción y encuadre general.

Considerar, al comienzo del curso escolar y de cada unidad, una introducción y encuadre general (precisión de los objetivos y las reglas generales para el desarrollo de las investigaciones estudiantiles) que incite al desarrollo adecuado y permanente de investigaciones estudiantiles, que no se limiten sólo a una revisión y análisis bibliográfico, sino a que con ayuda del profesor, valoren la necesidad y la posibilidad de hacer redescubrimientos, como vía para el aprendizaje y la resolución de problemas vinculados con la vida y las ciencias.

Atendiendo a las necesidades o intereses de los escolares y profesores se pueden concebir y desarrollar investigaciones especiales, sin que sea necesaria o conveniente su presentación sistemática al nivel de grupo. De esta manera no se frena el desarrollo personal de ningún estudiante pues en dependencia de sus conocimientos previos, potencialidades personales, posibilidades materiales y deseos emprenderá actividades investigativas que incidirán notablemente en su aprendizaje.

2. Planteamiento de la orden o problema.

Planteamiento, desde el inicio de cada unidad, de órdenes o interrogantes que induzcan a los escolares a la realización de investigaciones, para apropiarse de nuevos contenidos y aplicarlos de forma creativa.

3. Formación de equipos pequeños.

Teniendo en cuenta la caracterización de los escolares (preparación, roles que desempeñan o que pueden desempeñar, relaciones interpersonales, etc.) se forman equipos pequeños.

4. Atención al trabajo de los equipos, teniendo en cuenta sus necesidades, intereses, motivaciones y posibilidades reales.

Dicha atención contempla:

A) Valorar sistemáticamente el nivel de independencia y de creatividad de los escolares, para poder ofrecerles oportunas sugerencias o plantearles nuevas exigencias que los estimulen.

B) Brindar sistemáticamente, según las necesidades, sugerencias sobre: el establecimiento de metas; el desarrollo de las tareas, acciones, y roles de los integrantes del equipo; la bibliografía y medios a utilizar; las reflexiones que realizan sobre los problemas que más le atañen; el proceso de planteamiento y resolución de problemas; reconocer y valorar las observaciones, criterios, sugerencias y las preguntas valiosas que realizan los escolares en torno a la investigación; sobre la forma en que se presentarán los resultados a otros equipos y/o grupo.

5. Presentación y discusión de los resultados de las investigaciones por niveles.

Las investigaciones deben transitar por niveles, sin saltos, desde los más bajos hasta los más altos, por ejemplo no se debe presentar una investigación al nivel de centro, si antes no se ha presentado al nivel de grupo. Es un momento especial para la socialización de los resultados obtenidos y el reconocimiento de los avances individuales y grupales.

6. Autoevaluación y Evaluación del trabajo de los equipos.

La autoevaluación, la coevaluación y evaluación del trabajo de los equipos tienen que ser profundas, considerando los resultados finales, pero sobre todo el proceso y los avances individuales y grupales. Se debe tener en cuenta el cumplimiento de las reglas elementales para el trabajo grupal y los indicadores de aprendizaje y creatividad.

Se insiste en la flexibilidad y adecuación de las actividades investigativas acorde a las necesidades, potencialidades y posibilidades de aprendizaje de los escolares en cada área del conocimiento; no se puede exigir, al igual que en la formación postgraduada, elementos invariables u obligatorios en cuanto al diseño tiempo y otros aspectos pues están enfocadas hacia el aprendizaje de los escolares aprovechando los diferentes escenarios y factores objetivos.

En la Figura (1) se reflejan las fases expuestas, mediante flechas nexos entre ellas y otras actividades que se desarrollan fuera de las unidades temáticas. Con las flechas de bloque el carácter sistemático de las actividades investigativas; con las negras los nexos entre las investigaciones en distintas unidades, con las rojas la socialización de los resultados investigativos en jornadas científicas estudiantiles que pueden transitar desde los niveles inferiores hasta los superiores, desde el nivel de equipo o grupo hasta el provincial u otro en dependencia del grado, estrategia y espacios creados para las mismas.

Aunque no se niega el desarrollo de investigaciones especiales con un marco reducido de socialización, en importante que se valore con profundidad este aspecto pues es poco probable que la producción de un alumno no le interese o sea de provecho para el grupo escolar, además constituye un indicador de transparencia en los procesos de selección de trabajos para determinados niveles.

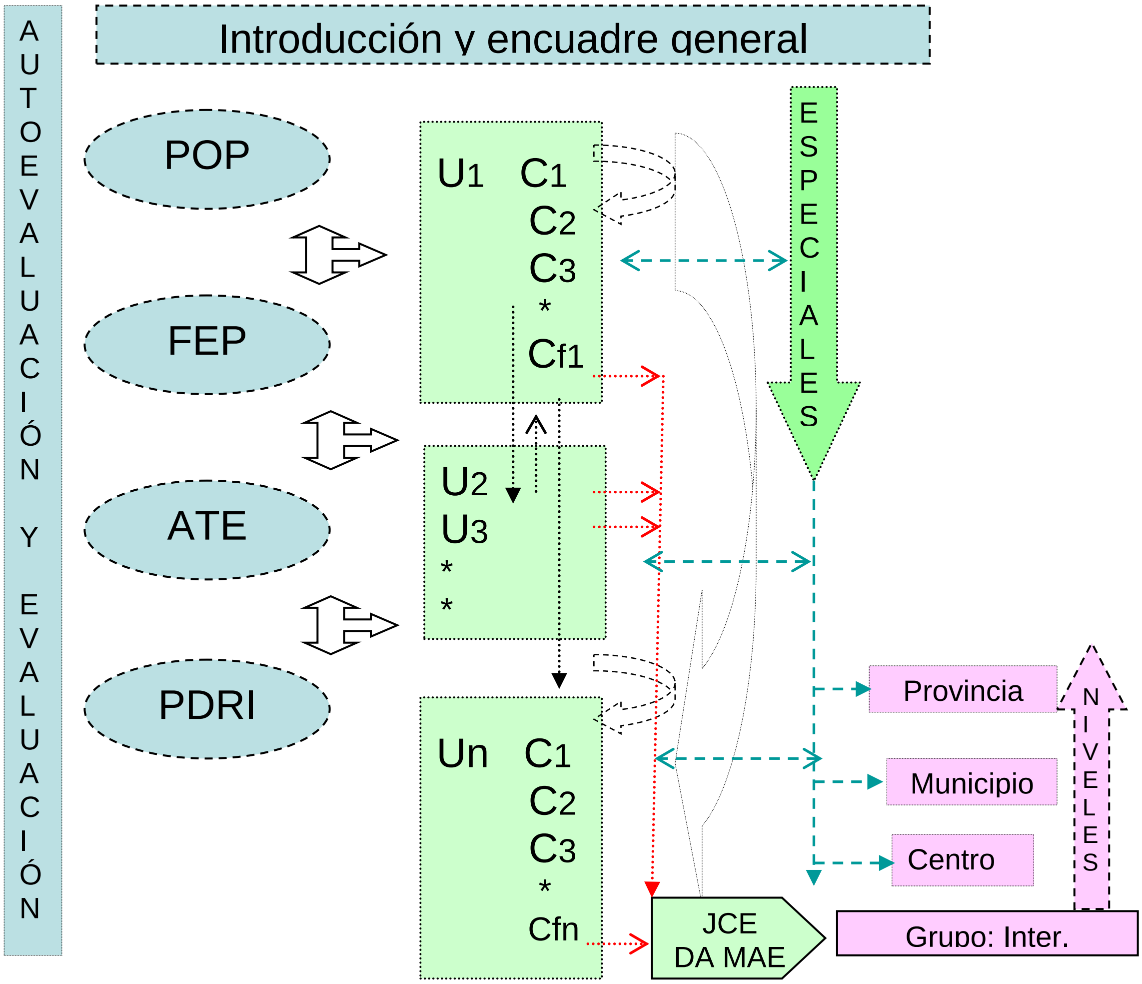


Fig. 1 Fases y nexos.

Leyenda:
n: cantidad de unidades temáticas
U_1, U_2,…,U_n representan las unidades temáticas, en general Ui: Unidad temática número i (i: número de la unidad)
C1, C2, C3… representan las clases de las unidades temáticas; en general Cj: Clase j-ésima de la unidad (j=fi indica la ultima clase de la unidad número i, fi: número de clases de la unidad número i; así Cfi: Clase final de la unidad i-pésima.
POP: Planteamiento de la orden o problema.
FEP: Formación de equipos pequeños.
ATE: Atención al trabajo de los equipos.
PDRI: Presentación y discusión de los resultados de las investigaciones
AE: Autoevaluación y evaluación del trabajo de los equipos.
JCE – DAMAE: Jornada Científica Estudiantil sobre Descubrimientos y Aplicaciones Matemáticas por los Escolares.

Para la implementación de la alternativa presentada los docentes y los escolares pueden establecer y desarrollar estrategias o metodologías específicas acordes con los objetivos propuestos, al nivel que se pretenden presentar y múltiples factores que pueden incidir en la misma; algunas ideas generales o sugerencias para su elaboración son:

- Propuesta de variados temas de investigación, que guarden relación, si es posible, con diferentes profesiones o carreras; que requieran de los contenidos matemáticos del grado u otros.
- Para la formación de equipos, tener presente los siguientes elementos: el balance o equilibrio entre ellos en cuanto a la preparación matemática de sus integrantes; las relaciones interpersonales entre los escolares; la cercanía de las viviendas y otros factores que faciliten el encuentro entre los miembros del equipo; las posibilidades de recibir ayuda de los familiares y los recursos materiales para desarrollar la investigación.
- Establecimiento de una emulación entre los equipos, favorecedora de la creatividad, cuyos parámetros surjan de las iniciativas de los escolares, entre los que pudieran figurar: el descubrimiento, el planteamiento y la resolución de problemas; asistencia, puntualidad y disciplina en las actividades planificadas, en ningún caso la emulación debe provocar el descontento de los que no puedan resultar ganadores o destacados, más bien la satisfacción por el reconocimiento de las actitudes, avances y resultados de los que lo merezcan; de esta manera todos pueden resultar ganadores en lo individual y lo grupal, es decir no es necesario limitar la cantidad de destacados.
- Selección de las “casas de estudio” teniendo en cuenta: las condiciones físicas (amplitud, iluminación, ventilación, y otras); preparación intelectual y pedagógica de los padres; disposición y posibilidades de los padres para apoyar el trabajo de los equipos.
- Brindar orientaciones a los padres sobre las características de los adolescentes y las mejores formas en que pueden ayudarlos pues no todos poseen la preparación requerida para ello, el caso de los familiares que se involucran en el trabajo grupal de los escolares durante su estancia en las “casas de estudio” merecen una tención especial ya que generalmente tienen alta incidencia en la creación de un campo favorable para la creación, principalmente a través de su incidencia en las múltiples relaciones que se establecen entre los escolares y entre estos otras personas.
- Dedicar, al menos, las dos últimas horas de clase de cada unidad (o tomarlas de la reserva) para la presentación y discusión de los resultados de las investigaciones de los equipos. Realización de oponencias, por escrito y oral, entre los equipos. Entrega de boletas para que los escolares o equipos otorguen la evaluación, preferiblemente con una breve fundamentación.
- Precisar indicadores para la evaluación acorde a las los contenidos y objetivos de cada actividad, por ejemplo, para evaluar la exposición oral de los escolares y preparación alcanzada, en esta dirección puede valorarse el desarrollo alcanzado en la expresión oral, pronunciación, expresividad, fluidez, entonación, independencia del material, donde sea capaz de exponer su investigación haciendo gala de lo aprendido y como estos conocimientos ya los puede expresar de manera independiente.

Para una mejor comprensión de la concepción presentada es conveniente su ejemplificación, con este propósito se presenta la actividad investigativa denominada “El papalote” para escolares de sexto grado de primaria, generalmente con edad de 11 años. Para su introducción en la práctica escolar debe adecuarse al diagnóstico de los escolares, disponibilidad de medios y contexto específico, es decir que tiene un carácter de modelo preparado para modificarse atendiendo a las necesidades y propósitos.

3. Actividad investigativa “El papalote”

No es casual que la comunidad científica reconozca la importancia del establecimiento de vínculos entre matemática y la vida con fines didácticos, en especial en la enseñanza primaria atendiendo a la formación de conceptos, juicios y razonamientos; lo concreto, la manipulación de objetos y la observación resultan esenciales.

Considerando que una de las principales diversiones de los niños cubanos, mexicanos y de otros países es empinar papalotes (cometas) y que en la mayoría de los casos, al menos en Santiago de Cuba, los construyen ellos mismos utilizando distintos materiales, fundamentalmente güin (pendón o vástago que echa la caña de azúcar) nylon, hilo y algún adherente o esparadrapo, consideramos que resultaría atrayente una actividad investigativa de los escolares sobre papalotes.

Atendiendo a las posibilidades del Geogebra para hacer construcciones, utilizar diferentes estilos y colores en los trazos, movimientos de puntos y figuras, visualización de transformaciones y sus implicaciones en cuanto a propiedades resulta de mucho valor en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matemática con enfoque investigativo.

A continuación se expone sucintamente la actividad investigativa denominada **“El papalote”** que ilustra la utilización de la concepción presentada para el desarrollo de las actividades investigativas escolares.

Introducción o encuadre.

Se harán comentarios y preguntas con el propósito de motivar a los escolares para el desarrollo de investigaciones sobre los papalotes o comentas que les permita apropiarse de contenidos matemáticos y culturales en sentido general.

Entre las preguntas iniciales pudieran figurar las siguientes:

¿Qué es un papalote o cometa?, ¿en cuáles meses se incrementa su uso en tu localidad?, ¿quiénes los confeccionan?, ¿qué es lo más les llama la atención sobre ellos?, ¿consideran que es un juego importante para los niños cubanos?, ¿se utiliza la matemática para la confección de los papalotes?, ¿mediante la construcción de papalotes podemos aprender matemática (desarrollar habilidades de dibujo y cálculo, utilización de instrumentos y software, etc.) y divertirnos?

¿Creen que las cometas o papalotes solamente se han utilizado para la diversión?, ¿en cuáles fuentes pudieran encontrar información?

Si investigan sobre los papalotes y cometas es posible que conozcan diferentes usos de las cometas y aprendan matemática.

Planteamiento de la orden o problema.

1. Busca informaciones en diferentes fuentes sobre papalotes y cometas, redacta un breve informe sobre el significado de estos términos y aspectos interesantes sobre ellos.
2. En estos meses la mayoría de los niños construyen y empinan papalotes (cometas).
   a) Representa gráficamente papalotes que empinas o que ves empinar a tus amiguitos y di que nombre recibe ese polígono. (figura).
   b) Describe el papalote que más te guste atendiendo a su forma (figura geométrica), área, perímetro, longitudes de sus lados y razones entre estos, amplitudes de sus ángulos, materiales utilizados, peso y otros datos que consideres importante.
   c) Representa gráficamente el papalote descrito respetando las proporciones entre sus lados y las amplitudes de sus ángulos y denota sus vértices con letras mayúsculas. Puedes auxiliarte de diferentes medios.
   d) Representa con línea discontinua los güines, hilos u otros componentes que permitan una mejor representación del papalote.
   e) Descompón el papalote en triángulos disjuntos.
   f) Si identificas algún eje de simetría en el papalote, trázalo.
   g) Formula un problema sobre papalotes que le pueda resultar interesante a tus amiguitos del aula.
3. En la Figura 2 se representa un papalote situado en un sistema de coordenadas.

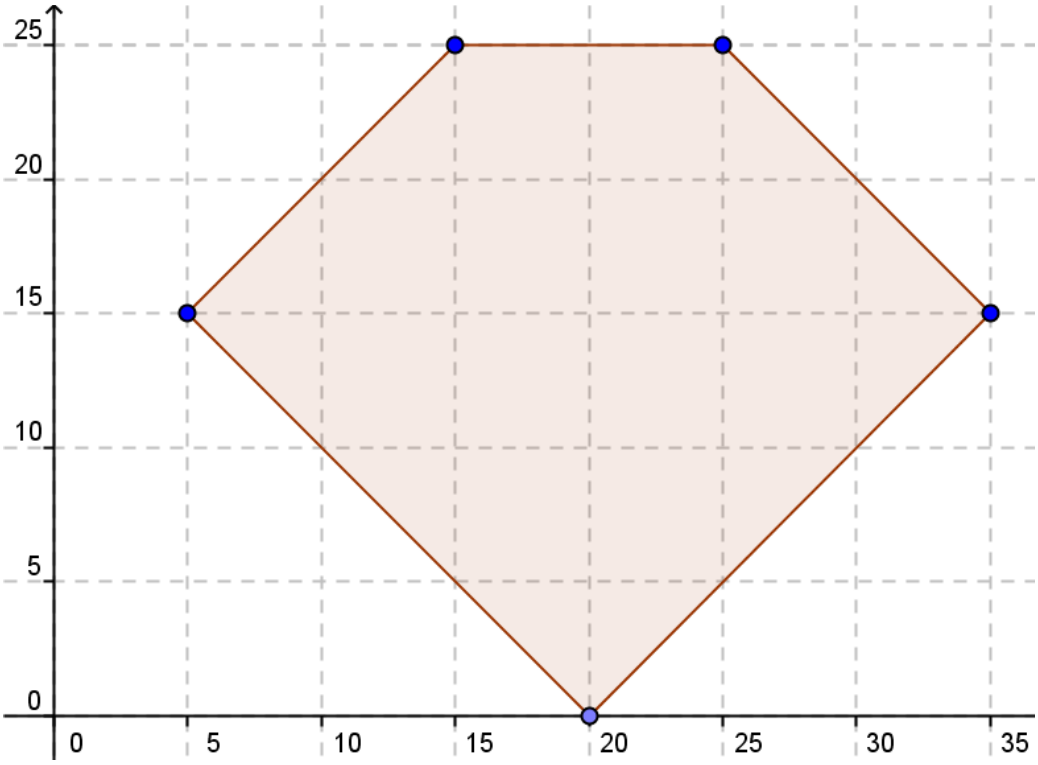


Fig. 2

   a) Determina el área y la amplitud de sus ángulos.

b) Identifica tres vértices que formen un triángulo isósceles.

c) Descompón el papalote en tres triángulos disjuntos, uno obtusángulo, uno rectángulo y uno acutángulo.

d) ¿Cuál es el resultado de la suma de los ángulos internos del papalote?

4. Cuáles cuidados deben tener los niños cuando empinan papalotes.

5. En cuáles meses se incrementa el empinado de papalotes, ¿existe alguna justificación?

Formación de equipos pequeños.

Aunque todos los escolares conocen los papalotes, en general los varones tienen cierta ventaja sobre las niñas, pues tienen más experiencias constructivas y de juego con el, por esta razón es conveniente que los equipos estén compuestos por hembras y varones y se tengan en cuenta los roles que en este sentido pudieran desempeñar. También las posibilidades de tiempo de máquina en la escuela y casas de estudio, por ejemplo si solo 5 niños del grupo poseen computadoras con la Enciclopedia en Carta y el Geogebra instalado u otro software para construcciones geométrica convendría que estos estuviesen en equipos distintos.

Además de los conocimientos y experiencias previas de los escolares sobre los papalotes es conveniente que el maestro considere la caracterización de los escolares y prevea posibles dificultades o errores en el desarrollo de las actividades y las ayudas que de manera diferenciada pudiera brindarles.

Atención al trabajo de los equipos.

En la atención al trabajo de los equipos se consideran los conocimientos y experiencias previas, la motivación y las posibilidades materiales y personales.

Los sistemas de ayuda deben ajustarse a las necesidades específicas de los escolares, sin explicarles aspectos o elementos que ellos puedan redescubrir mediante el análisis y la experimentación; en este sentido se podrían formular nuevas preguntas o comentarios sugerentes para el reconocimiento de errores, la toma de decisiones y el desarrollo iniciativas.

La atención al uso del Geogebra es importante ya que ofrece facilidades para hacer construcciones geométrica, mediciones y cálculos y corroborar ideas, por esta razón es conveniente que el maestro, además de tener previstas distintas alternativas para las actividades con su utilización lo domine con profundidad para hacer sugerencias adecuadas y oportunamente.

Si bien el Geogebra ofrece facilidades excepcionales no se debe crear dependencia total e innecesaria de el, además reconocer cuando pudiera resultar contraproducente en dependencia del objetivo o las características del problema que se aborde, por eso el maestro debe tener total claridad del objetivo de cada actividad, de qué se persigue en lo conceptual, procedimental y actitudinal.

Por ejemplo en la pregunta 3, no es necesario, ni conveniente en algunos casos utilizar todas las opciones del Geogebra, pues las cuadrículas presentadas permiten identificar fácilmente las amplitudes de los ángulos del papalote ya que sus vértices coinciden con vértices de cuadriculas y sus lados están sobre lados de las cuadrículas o diagonales de estas, lo que sugiere un procedimiento sencillo:

identificar ángulos de 45 º y 90 º y efectuar las sumas correspondientes, de esta manera el objetivo parcial se centra en el desarrollo del razonamiento lógico a partir de la representación de la figura y no en el manejo del referido software.

En otros casos si pudiera resultar conveniente por ejemplo, para descomponer el papalote en tres triángulos disjuntos, uno obtusángulo, uno rectángulo y uno acutángulo, y a partir de aquí generar nuevas interrogantes u observaciones atendiendo a los efectos del movimiento de puntos característicos del papalote, también para hacer comprobaciones de longitudes entre puntos o amplitudes de ángulos como las que se ilustran en la figura (3).

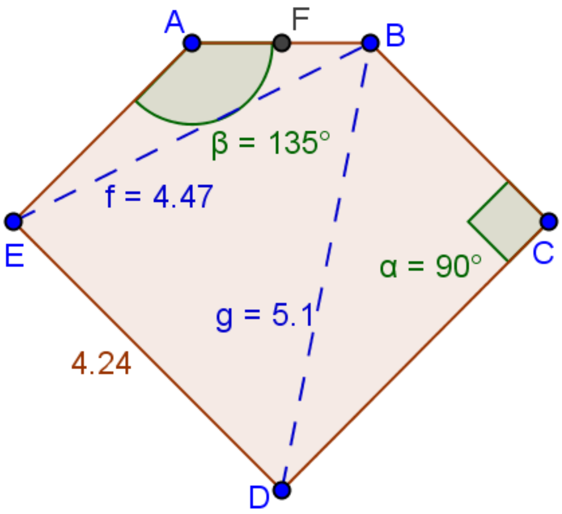


Fig. 3

Si los escolares no tienen ideas sobre fuentes o posibilidades para buscar informaciones en el tiempo concebido se les pueden hacer preguntas sugerentes, por ejemplo, ¿Cuáles fuentes de información existen en la escuela que les pudieran brindar información?, es posible que identifiquen a la Enciclopedia Encarta 2007 y diccionarios impresos o digitales.

Un aspecto a destacar pudiera ser la descripción de objetos o definiciones, en este sentido se podrían inducir a los escolares a comparar sus planteamientos con los del diccionario de la Lengua Española (Espasa, S.A.,1995) en el que se señala que el término papalote, del náhuatl papalotl, significa mariposa y que en Cuba y México se le denomina Cometa de papel y la acepción “Armazón plana y muy ligera, por lo común de cañas, sobre la cual se extiende y pega papel o tela; en la parte inferior se le pone una especie de cola formada con cintas o trozos de papel, y, sujeta hacia el medio a un hilo o bramante muy largo, se arroja al aire, que la va elevando, y sirve de diversión a los muchachos”

De esta manera es posible despertar la atención sobre la redacción y el significado de términos generalmente no utilizados por ellos, por ejemplo: “por lo común,,,”; Además destacar alguna diferencia con respecto a su contexto, una de ellas es que en algunos barrios santiagueros los niños utilizan solamente nylon sobre la armazón.

Resulta conveniente destacar cómo en los diccionarios se señala el origen de las palabras en el caso “de cometa” del lat. com$\bar{e}$ta, y este del gr. Kom¿thj, de kÕmh, cabellera y, distintas acepciones: como astro, armazón y juego.

En la atención al trabajo de los equipos también pudieran resultar provechosas nuevas interrogantes y sugerencias para búsqueda de aspectos generales o específicos, con distintos propósitos, por ejemplo:

¿Cuáles diferencias y semejanzas existen entre papalotes y competencias que se efectúan en Asia Oriental y en tu barrio?, ¿con cuáles propósitos fueron utilizados por Benjamin Franklin y Alexander Graham Bell?, ¿con cuáles en la esfera militar?

(Puede encontrarse en "Cometa." Microsoft® Encarta® 2007 [DVD]. Microsoft Corporation, 2006)

Lee la siguiente información "…Alexander Graham Bell desarrolló entre 1895 y 1910 diversas cometas en forma de tetraedro capaces de transportar a un ser humano en un pequeño alojamiento" ¿cuáles comentarios o interrogantes puedes hacer a partir de este?

Si bien es muy favorable el enriquecimiento del currículo mediante actividades como la anterior, hay que considerar tanto su necesidad o conveniencia como su posibilidad acorde a los conocimientos previos y potencialidades de los escolares, pues pudieran conducir a situaciones de enseñanza aprendizaje complejas o no pertinentes**,** por tanto los maestros deben estar preparados en este sentido para la toma de decisiones y la atención diferenciada a los escolares.

Por ejemplo, si los escolares quisieran profundizar sobre el experimento desarrollado por el inventor estadounidense Benjamín Franklin con una cometa o papalote para demostrar que la electricidad atmosférica que provoca los fenómenos del relámpago y el trueno es de la misma naturaleza que la carga electrostática de una botella de Leyden, el maestro podría destacar su interés pero que se profundizará en otros grados cuando obtengan conocimientos imprescindibles para ello.

En la Encarta 2007 se pueden encontrar diversas informaciones sobre los cometas (astronomía): definición, historia, composición, efectos solares, periodos de órbitas, grupos de cometas, relación entre cometas y lluvias de meteoros, origen y exploraciones realizadas sobre estos que, adecuadamente seleccionada y orientada enriquecería la cultura general de los escolares.

El maestro asesorará a los equipos con vista a su socialización en el grupo escolar.

Presentación y discusión de los resultados de las investigaciones.

La presentación y discusión de los resultados podrá realizarse de diferentes maneras, incluso considerando distintos escenarios y momentos, por ejemplo atendiendo al interés de los escolares desarrollar, en un primer momento, una sesión práctica de construcción o empinado de papalotes en el patio de la escuela o parque cercano, una sesión en el laboratorio de computación y otra en el aula. Podrán tomarse iniciativas, por ejemplo: hacer una presentación abierta en el patio de la escuela en determinado momento con la participación de otros maestros, escolares y familiares con vista a que opinen o valoren los resultados y exposiciones de los equipos.

Autoevaluación y Evaluación del trabajo de los equipos.

Si bien es justo tomar en cuenta los criterios de invitados externos al grupo, las valoraciones más importantes han de ser de los escolares y maestros atendiendo a los resultados integrales, no solamente del papalote físico o dibujado, ejercicio o solución bien elaborada. Considerar el respeto a las reglas de trabajo grupal, el desempeño de roles, los avances individuales y resultados obtenidos a partir de las habilidades y conocimientos previos de los escolares son aspectos importantes, igualmente las actitudes investigativas y creatividad.

Por la naturaleza de las órdenes resulta importante valorar la búsqueda de información en diferentes fuentes y su procesamiento, igualmente la utilización de instrumentos de dibujo y del software Geogebra.

Reconocer las iniciativas y valores de los escolares durante el desarrollo de las actividades y su presentación contribuye a estimular conductas adecuadas.

Si bien la concepción presentada y la actividad presentada como ejemplo sirven de orientación no cubren todas las necesidades diagnosticadas, sobre todo de los docentes en formación y no entrenados en la utilización del enfoque investigativo, por lo que resulta necesario ofrecerles cursos y asesorías.

4. Ejercicio propuesto a maestros de primaria que participan en el curso “Actividades investigativas y desarrollo de la creatividad en los escolares”

El ejercicio que se presentará como ejemplo fue propuesto a maestros de primaria que participan en el curso “Actividades investigativas y desarrollo de la creatividad en los escolares” impartido por el autor de este artículo con vista a analizar sus exigencias, la posibilidad de utilizarlo o transformarlo para su utilización en actividades investigativas relacionadas con la antes expuesta, en algún grado o grupo de escolares; también como punto de partida para profundizar en contenidos matemáticos, didácticos y su correspondencia con los presupuestos teóricos asumidos para la estimulación y desarrollo de la creatividad en los escolares.

Un niño confeccionó un papalote muy bonito y su padre le pidió que lo representara utilizando el Geogebra, respetando las amplitudes de los ángulos y las proporciones entre sus lados. El niño cumplió con la petición pero no le quedó totalmente bien pues no dominaba perfectamente el Geogebra, posteriormente con ayuda del padre obtuvo la siguiente figura (4)

Si se sabe que el güin mayor AB tiene una longitud de 48,00 cm. Teniendo en cuentas los datos de la representación

a) ¿Cuál es la longitud de los otros güines?

b) Describe un posible procedimiento para obtener esta representación

c) Realiza una estimación del área y perímetro de la figura

Luego de responder las interrogantes anteriores, utilizando el Geogebra

d) Representa la figura.

e) Calcula su área y perímetro.

f) Determina las amplitudes de los ángulos interiores

g) Representa, con líneas discontinuas y con un color diferente al de los güines, los

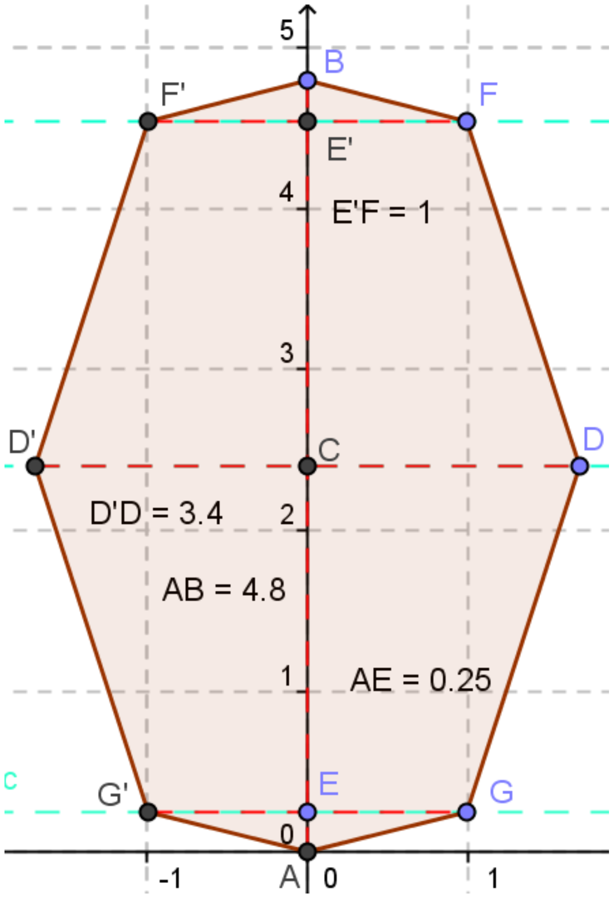


Fig. 4

hilos que pudieran fortalecer el papalote.

h) Decora el papalote con figuras geométricas y reflexiona sobre sus propiedades. Puedes aprovechar los trazos de los güines e hilos.

En la figura (5) se representa con líneas discontinuas amarillas y verdes, hilos que pudieran fortalecer el papalote; en la (6) se añaden puntos y resaltan figuras que decoran el papalote, entre los cuales existen relaciones interesantes: de simetría, de obtención por movimientos y otras.

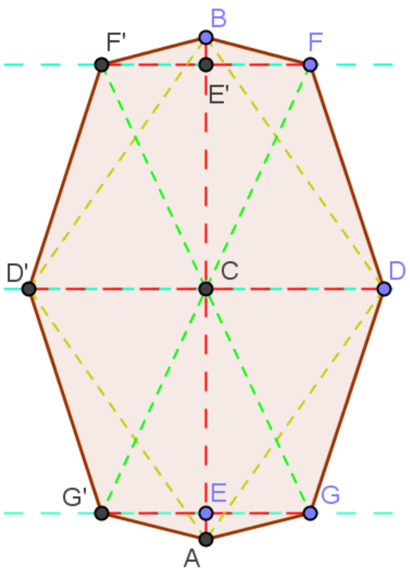


Fig. 5

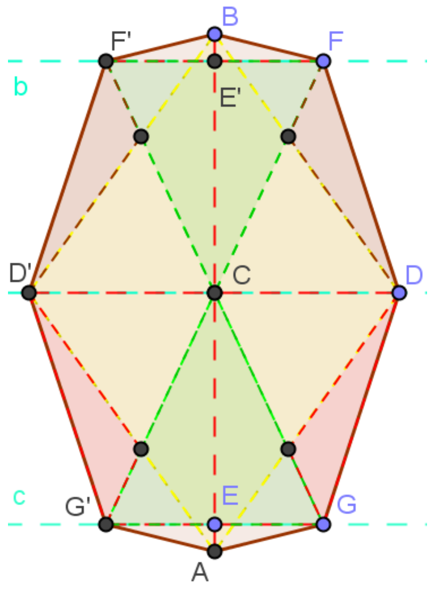


Fig. 6

i) Elabora ejercicios asociados a estas figuras que estimulen el desarrollo de la creatividad en los escolares y resuélvelos, si es posible, por diferentes vías y valora cuál es la más original.

Entre los ejercicios y soluciones elaborados por el profesor del curso, como respuesta al inciso anterior y que pudieran servir de ejemplos y punto de partida para nuevas reflexiones figuran los siguientes:

i.1) En la figura (7) se representan dos papalotes iguales que tienen un lado común, explique dos vías (movimientos) diferentes para obtener uno del otro.

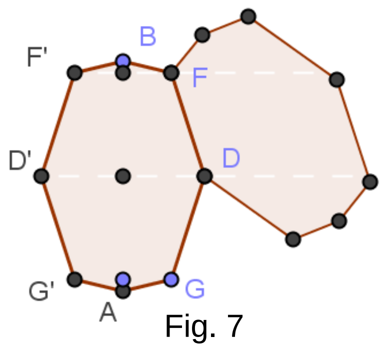


Fig. 7

Una de las posibles vías se ilustra en la figura (8): determinar un centro de rotación y ángulo que lo posibilite, en este caso el centro por la intersección de rectas sobre los lados que se obsevan y la determinación del ángulo con el apoyo del Geogebra. La posibilidad de que los escolares y los maestros puedan reconocer esta vía sugiere importantes reflexiones que no son objeto de análisis en este trabajo

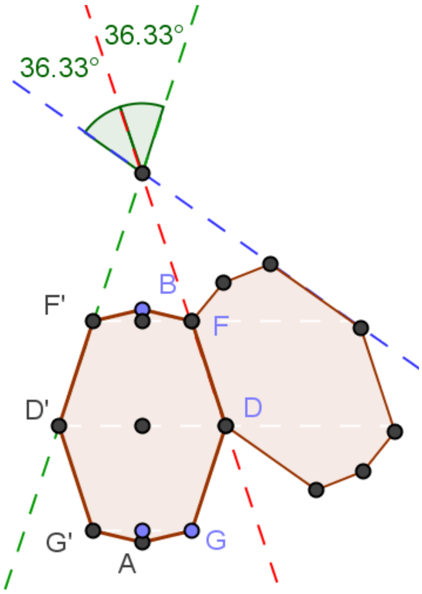


Fig. 8

i.2) Cuál es el número de papalotes que se pueden obtener por rotaciones sucesivas, con el mismo ángulo y centro, sin que se corten dos papalotes.

En la figura (9) se representa una de las posibles vías, apoyándose en las facilidades de construcción que ofrece el Geogebra, esta resulta conveniente cuando los niveles de abstración y análisis de los escolares son bajos o cuando carecen de algunos conocimientos previos, por ejemplo del ángulo completo.

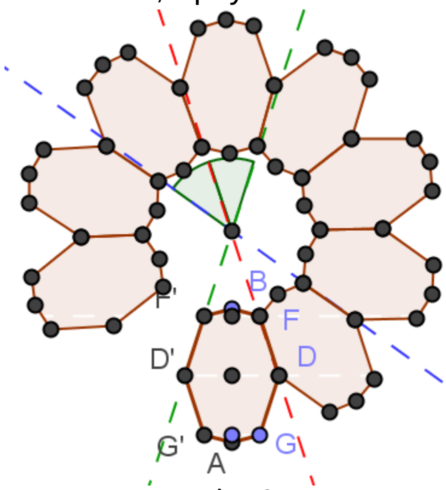


Fig. 9

5. Sistema de ejercicios sobre el papalote elaborados por maestras de la escuela Marcos Martí.

El sistema de ejercicio que se presenta fue elaborado por un equipo de maestras de la escuela Marcos Martí, atendiendo al asesoramiento y curso “Actividades investigativas y desarrollo de la creatividad en los escolares” que imparte el autor de este artículo, contiene ejercicios con diferentes grado de dificultad, algunos se diferencian notablemente de los planteados en el libro de texto y que utilizan los maestros de primaria, pues están dirigidos al aprendizaje mediante investigación, la experimentación y el redescubrimiento de distintas vías o procedimientos de solución.

1. ¿Qué unidad de medida sería la más apropiada para medir los lados del papalote que empinan los niños?

a) ___m b) ___ dam c) ___ km a) ___cm

2. Dibuja un papalote como el de la figura (10) utilizando el Geogebra, de cuatro lados, con dos güines paralelos y uno perpendicular a estos. Indica las longitudes de sus lados y otros datos que consideres importantes en su descripción para que otro niño lo pueda construir. Responde:

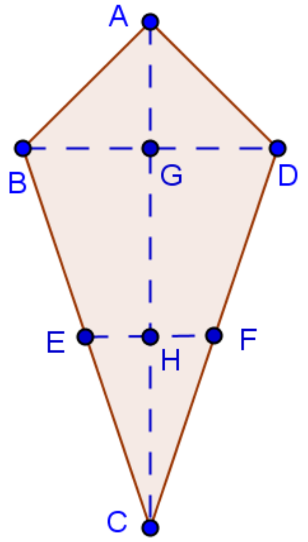


Fig. 10

2.1 ¿Cuántos triángulos identificas en el papalote?

a) ___2 b) ___ 9 c) ___ 4 d) ___6

2.2 ¿Cuántos cuadriláteros identificas en el papalote?

a) ___5 b) ___ 3 c) ___ 6 d) ___7

2.3 Si GDFH es la imagen de GBEH por una reflexión ¿cuál es su eje?

a) ___GB b) ___GE c) ___AD d) ___GH

2.4 Si tienes dibujado el triángulo ABC, cuál es el movimiento que realizarías para completar el dibujo del papalote

a) ___rotación b) ___ traslación c) reflexión___ 6 d) ___simetría

2.5 Puede ser el triángulo ECF imagen del ABD por algún movimiento. Explica por qué.

2.6 Si el triángulo ABD es isósceles, AB mide 9 cm. y BD 15 cm. Calcula su perímetro.

2.7 Si el segmento BD mide 15 cm. Y AG es la mediatriz de este ¿cuál es la longitud del segmento BG?

2.8 Traza la bisectriz del ángulo EBG.

2.9 Realiza la traslación del triángulo BCG tomando como vector de traslación al vector AF

2.10 Construye la imagen del papalote por un movimiento de rotación con centro en C.

En el marco del curso se debatieron distintos aspectos sobre la posibilidades de plantearle a los escolares los ejercicios anteriores y otros atendiendo a su preparación, también aspectos relacionados con la diferenciación de la enseñanza mediante la modificación de ejercicios. A continuación se muestran algunas variaciones de ejercicios presentados anteriormente con vistas a sustituirlos si fuese necesario con vista a que resulten problemas apropiados para los escolares.

El ejercicio 2.9 pudiera sustituirse por el siguiente:

2.9b) En la figura (11) se representa el papalote y el triángulo B´C´G´. Compáralo con el triángulo BCG y analiza si se obtuvo por algún movimiento.

En este caso no se pide que se realice un movimiento atendiendo a un vector dado y algoritmo enseñado por el maestro, se promueve la comprobación e identificación de relaciones o propiedades, entre otros impulsos pudieran figurar algunas de las siguientes interrogantes y sugerencias: ¿qué relación existe entre los lados y ángulos de estos triángulos?, ¿tienen la misma longitud los segmentos BB´, GG´ y CC´?, ¿por qué B´ pertenece al segmento GC?, compruebe si AD y CC´ tienen la misma longitud y si son paralelos.

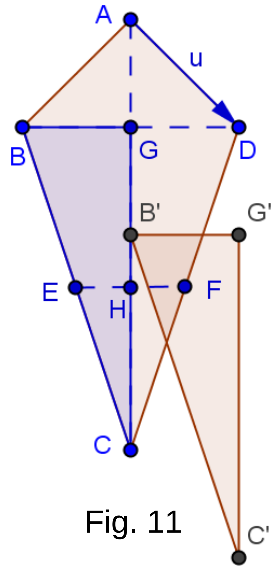


Fig. 11

El ejercicio 2.10 pudiera sustituirse por el siguiente:

2.10b) En la figura (12) se presentan dos papalotes, investiga las relaciones entre sus lados, ángulos y cómo se pudiera obtener uno a partir del otro. Encuentra dos vías para ello y explica cuál de las dos es más racional u original. Explica cómo se pudiera determinar (sin instrumentos de medición) la amplitud del ángulo BCD´ si se conociera la del ángulo BCD.

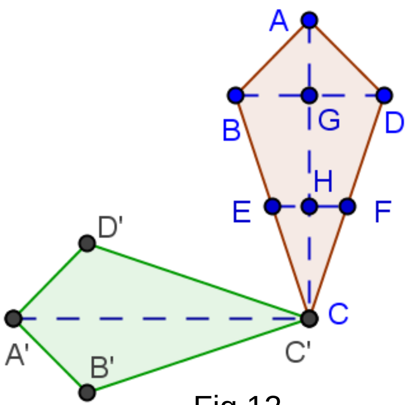


Fig.12

El ejercicio 2.10 también pudiera transformarse atendiendo al ángulo de rotación (no precisado) y otros aspectos, por ejemplo, añadiendo la orden ¨ Escriba uno o dos párrafos acerca del movimiento realizado ¨, como el tema es libre, podrán referirse a elementos matemáticos propios del ejercicio, metacognitivos y motivacionales, es decir, la orden no se limita al contenido matemático, pudiera revelar datos de importancia para la atención diferenciada a los escolares.

Otros ejercicios que no se presentan en este informe estuvieron dirigidos al reconocimiento de: puntos y partes de figuras que son original o imagen; realizar construcciones parciales o totales de papalotes utilizando el Geogebra y, reconocimiento o construcción de figuras.

Entre las observaciones realizadas por las maestras sobre el quehacer de los escolares en la resolución de algunos ejercicios se destacan en sentido general las siguientes:

- No necesitaron mucha ayuda para la construcción gráfica del papalote, solo para precisar algunos detalles.
- Necesitaron ayuda en la identificación y conteo de triángulos y cuadriláteros.
- Insuficiente dominio de conceptos y procedimientos para efectuar movimientos.

- Dificultades para fundamentar los movimientos y tendencia a operar con objetos auxiliares, por ejemplo: la reflexión mediante la simetría axial comentando “si doblo la hoja de papel los triángulos son iguales”.
- Escasa actitud investigativa ante la ausencia de conocimientos o conceptos no tratados formalmente por el maestro, por ejemplo: la formula para calcular el perímetro.
- Insuficiente vocabulario matemático.

En cuanto al quehacer de las maestras, subrayaron los cambios en su proceder didáctico, en vez de priorizar la enseñanza de algoritmos para la resolución de ejercicios promovieron la actitud investigativa de los escolares a partir del planteamiento y resolución de problemas en correspondencia con sus conocimientos previos y potencialidades. Reconocieron que esta nueva concepción les exigió profundizar en el diagnóstico y caracterización de los escolares, la atención a las diferencias individuales; que constituyó una importante vía de superación matemática, didáctica y profesional en general.

6. Consideraciones generales

Si bien la concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares, su ejemplificación y elementos expuestos contribuyen a superar dificultades diagnosticadas, no agotan las necesidades de los docentes; resulta necesario continuar divulgando otras experiencias que complementen las presentadas en este artículo y revelen un cambio favorable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Resulta necesario que los docentes mediten acerca de la forma que tradicionalmente se tratan algunos contenidos matemáticos y la necesidad de realizar cambios trascendentales que propicien el desarrollo del pensamiento de los escolares, ejemplos de interrogantes que invitan a la reflexión en este sentido son las siguientes ¿de qué manera se enseña el trazado de la bisectriz de un ángulo?, ¿de esta manera se promueve adecuadamente el desarrollo del pensamiento y la creatividad en los escolares?; ¿pudiera el enfoque investigativo contribuir a perfeccionar el aprendizaje?.

En cursos impartidos por el autor principal de este artículo se ha constatado la importancia de las interrogantes anteriores como punto de partida para reflexionar acerca del tratamiento didáctico de contenidos elementales con ejemplos concretos y las ventajas del enfoque investigativo para superar la enseñanza enfocada al dominio de algoritmos.

Bibliografía

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2010). GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. UNIÓN, Número 23, páginas 201-210

Diccionario de la Lengua Española (1995) Edición electrónica. Versión 21.1.0. Espasa, S.A.

Hernández H, C. M. (2011). Estimulación y desarrollo de la creatividad mediante el enfoque investigativo. Curso pre evento. II Encuentro bilateral Cuba-México. Ediciones UO. ISBN: 978-959-18-0721-2.Santiago de Cuba.

Hernández H, C. M. y otros (2012). Actividades investigativas escolares en la educación. Ejemplos. Curso pre evento. IV Taller CALIDED sobre Evaluación y Mejoramiento de la Calidad Educativa. Ediciones UO. ISBN 978-959-207-436-1. Santiago de Cuba.

Hernández H, C. M. y otros (2011). Concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares: Ejemplos. Resultado de Proyecto Educativo "Evaluación y mejoramiento de la calidad educativa en la UCP Frank País García y centros escolares de Santiago de Cuba".

Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J. (2008). Documento de Ayuda de GeoGebra. Manual Oficial de la Versión 3.2. 18 de Septiembre del 2009 http://www.GeoGebra.org

Mayer, R.E. (1983). Thinking, problem solving, cognition. W.H. Freeman and Company, USA, 1983.

Microsoft® Encarta® 2007 [DVD]. Microsoft Corporation, 2006

Soto N, O. E. (2008) Los juegos tradicionales y el desarrollo del niño de educación primaria. Tesis para obtener el grado académico de Maestro en Pedagogía. Michoacán, México, phttp://www.imced.edu.mx/cid/recursos/tesismaestriaenpedagogia/sotonevarezoscareduardo/losjuegostradicionalesyeldesarrollodelninodeeducacionprimaria.

Carlos M. Hernández Hechavarría: Posee los títulos de Maestro Primario, Profesor de Secundaria Básica, Licenciado en Matemática, Master en Ciencias de la Educación Superior y Doctor en Ciencias Pedagógicas. Ha dirigido proyectos de investigación e impartido conferencias y cursos en eventos científicos pedagógicos territoriales, nacionales e internacionales. Labora en el Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Ciencias Pedagógicas de Santiago de Cuba.

Olga Lidia González Vidal: Posee los títulos de Maestro Primario y Master en Ciencias de la Educación, mención Primaria. Es directora de la escuela primaria Marcos Marti y miembro del Proyecto Educativo "Evaluación y mejoramiento de la calidad educativa" de Santiago de Cuba.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 114-132

Las Pruebas de Matemáticas en el acceso a la Universidad de algunos países europeos (Alemania, España, Francia, Italia)

Josu Gotzon Ruiz de Gauna Gorostiza y Joxemari Sarasua Fernández

Fecha de recepción: 10/10/2012
Fecha de aceptación: 08/10/2015

Resumen	Se analizan las pruebas de acceso de Matemáticas a la universidad de cuatro países: Alemania, España, Francia e Italia. Se estudia su estructura y contenidos y se ejemplifican con ejercicios representativos de los últimos años correspondientes a cada una de las partes de las que consta la prueba. Se analizan las especificidades de cada país, se establece la singularidad de las italianas y se comparan las pruebas entre ellas. Se concluye que hay diferentes formas de utilización del lenguaje, diferentes notaciones y diferentes tipos de ejercicios. Algunos elementos comunes son: ejercicios en los que se parte de la gráfica, aplicaciones prácticas y contextualización. **Palabras clave**: Matemáticas, Bachillerato, Pruebas de acceso a la universidad
Abstract	We analyze the mathematics entrance tests to university of four countries: Germany, Spain, France and Italy. We examine its contents and structure and we take a sample of representative exercises from last years for each of the parts of the entrance test. We analyze the specificities of each country, establishing the uniqueness of the Italian's tests and the entrance tests are compared with each other. We conclude that there are different ways of using language, different notations and different types of exercises. Some common elements are: exercises in which the work begins with and about the graph of the function, practical applications and contextualization **Keywords**: Mathematics, Baccalaureat, Entrance Tests to University
Resumo	Analisamos os exames de admissão de matemática para a universidade de quatro países: Alemanha, Espanha, França e Itália. E examina o seu conteúdo e da estrutura e são exemplificados com exercícios representativos nos últimos anos, para cada uma das partes que compõem a prova. Analisamos as especificidades de cada país, estabelecendo a exclusividade do italiano e os testes são comparados uns com os outros. Conclui-se que há diferentes maneiras de usar a língua, notações diferentes e diferentes tipos de exercícios. Alguns elementos comuns são: exercícios de funções que trabalha a partir do gráfico, aplicações práticas e contextualização. Palavras-chave: **Matemática, Bacharelado, Exames de admissão à universidade**

1. Introducción

El Bachillerato (denominación que procede del Latín vulgar *bachalariatus),* designaba un rango de principiante en la caballería y pasó luego a designar el rango de *bacca laurea* (laureado) en la jerarquía eclesiástica y universitaria. Reciben esta denominación, con variaciones entre los países, los cursos finales de la educación secundaria. Como norma general a la finalización de este nivel de enseñanza, el requisito mínimo para acceder al nivel de la educación superior en Europa consiste en poseer un título de educación secundaria superior o equivalente. En la mayoría de los países existen además otros procedimientos de admisión o selección, que consisten, por ejemplo, en exámenes de ingreso, presentación de certificados de rendimiento académico o entrevistas. Dichos procedimientos contribuyen a regular el número de estudiantes.

Se puede establecer un procedimiento selectivo a nivel nacional o regional mediante el cual el Gobierno determina el número de plazas disponibles y ejerce un control directo sobre el procedimiento de selección (ejemplos de este modelo son Grecia, España o Portugal). Las propias universidades pueden aplicar libremente un proceso de selección en función del número de plazas o según ciertas exigencias o aptitudes demandadas a los estudiantes. Se pueden también combinar ambos modelos, como es el caso de Suecia y Finlandia. El acceso libre, habiendo finalizado la educación secundaria superior, se da en Bélgica, Islandia, Malta y Países Bajos. En el caso de Alemania, Francia, Italia y Austria existen diversos procedimientos de selección en función del área de estudio, del tipo de centro o, incluso, de cada centro en particular. Para los cuatro países cuyas pruebas de acceso vamos a analizar los requisitos de acceso se concretan mediante el siguiente título, diploma o certificado:

Alemania	Título Allgemeine Hochchulreife (Abitur)
España	Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU)
Francia	Título de Baccalauréat
Italia	Diploma de Examen de Estado o Maturità

Tabla 1. Requisitos de acceso en cada país

En Alemania, Francia e Italia sin el examen adicional que se recoge en el cuadro no se puede obtener el título de Bachiller y, sin él, no hay acceso posible a la enseñanza superior, universitaria y no universitaria. En España tampoco se puede acceder a la enseñanza universitaria sin haber superado las pruebas de acceso a la universidad, aunque estas pruebas no conducen, como en los otros países, a la obtención del título de Bachiller, que no requiere la superación de pruebas externas pero que por sí solo no posibilita el acceso a la universidad. Hay que hacer una precisión en cuanto al concepto de enseñanza superior que en España abarca los estudios ofertados exclusivamente en la Universidad, no siendo así en la mayoría de los demás países europeos, donde hay instituciones no universitarias con ofertas de formación más corta y elevados periodos de prácticas en empresas. Esta diferente organización de los estudios superiores da lugar a una diversidad de mecanismos de acceso para acceder a ellos.

2. Sistemas de acceso a la universidad

2.1. Alemania

El *Abitur* (del Latin abire = seguir adelante) es el diploma que se obtiene al terminar el *Gymnasium* con éxito y permite asistir directamente a la universidad en toda Europa sin necesidad de exámenes extras o de ingreso, como es el caso de la selectividad en España. Los alumnos eligen las materias que cursarán en su último año de secundaria distinguiendo entre materias “fuertes” y “suaves”, aunque algunas son obligatorias, como el alemán o las matemáticas. Los exámenes del *Abitur* son tanto orales como escritos y duran varias horas por materia. Los alumnos tienen por lo general dos semanas de exámenes. Una parte de la nota final corresponde al expediente académico del alumno. Aunque históricamente en Alemania el porcentaje de alumnos que se presentaban al Abitur era pequeño, –pues este no es necesario para todos los estudios superiores, sino solamente para aquellos que se imparten en la universidad–, el número de estudiantes que se presentan al Abitur ha ido creciendo gradualmente, siendo en la década de 1992 a 2003 un 40% los estudiantes de una determinada generación que lo conseguían de acuerdo con *Statistisches Bundesamt.*

2.2. España

En España las pruebas de acceso a la universidad tienen larga tradición y han recibido diferentes nombres a lo largo de su historia: examen de estado, prueba de madurez, selectividad. Actualmente se denominan Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) y su superación es requisito imprescindible para acceder a los estudios universitarios. Por ello tienen un carácter muy general y su superación es un objetivo relativamente fácil de lograr: en el año 2010 un 84,8% de los estudiantes que se presentaron a las pruebas de acceso las superaron (INE, 2012). Las pruebas varían en función del tipo de Bachillerato cursado, habiendo materias obligatorias y materias que el alumno elige y, después de la última reforma, la puntuación total puede ser de hasta 14 puntos, teniéndose en cuenta para el cálculo de la nota final la nota media del expediente académico del alumno. Las pruebas se realizan a nivel regional, con pequeñas diferencias tanto en contenidos como en resultados.

2.3. Francia

El Baccalauréat está considerado como un diploma de nivel IV que se obtiene al finalizar los tres cursos del Lycée (seconde, première y terminale) tras superar el correspondiente examen de carácter estatal. En el Bachillerato General, las opciones son tres: Económico y Social (ES), Literario (L) y Científico (S). Hay pruebas orales y escritas diferentes para cada tipo de Bachillerato, con una duración variable y con diferentes coeficientes de ponderación en la nota final. La nota final máxima son 20 puntos. Los porcentajes de aprobados en el diploma de Bachillerato General varían en cada tipo de Bachillerato pero en el año 2012 han sido del 84,5% (Ministère de l'Éducation Nationale, 2012b).

2.4. Italia

En Italia el examen de estado ha sufrido variaciones a lo largo de la historia, siendo la última la introducida en 1997 que ha supuesto que el alumno se examine de tres asignaturas del último curso elegidas por él mismo y que se valore la trayectoria escolar en la nota final que será dada en centésimas. La forma de puntuar es la siguiente: hasta un máximo de 45 puntos en las tres pruebas escritas (máximo 15 puntos para cada una); hasta un máximo de 35 puntos en la prueba oral y hasta un máximo de 20 puntos en calidad de créditos formativos, resultado de una valoración del trienio de estudios secundarios superiores (Gavari, 2003). En 2003 se produjo una nueva reforma que implantó el concepto de calidad en la educación, estableciendo que los aprendizajes se evalúen periódicamente y estableciendo que al finalizar los dos ciclos de enseñanza secundaria los alumnos deban presentarse al *Esame di Stato* (examen de fin de estudios) que establece pruebas en el centro de estudio y pruebas nacionales. Este moderno *esame di stato* es superado por el 97% de los estudiantes (Abravanel, 2008).

3. Las Pruebas de Matemáticas

La enseñanza en los cuatro países seleccionados está organizada de muy diferentes formas; la variedad de centros donde se curse o la variedad de Bachilleratos e incluso la posibilidad de realizar diferentes itinerarios formativos da lugar a una mayor o menor diversidad de pruebas de acceso de matemáticas. Por ejemplo, en España son dos las modalidades de examen que existen en función del Bachillerato cursado; en Alemania la opción depende del tipo de establecimiento en el que se curse el Bachillerato y del nivel que se pretenda acreditar en el examen de acceso; en Francia, dentro del Bachillerato General, hay tres modalidades de acceso y, por fin, en Italia dentro del Liceo Científico hay dos pruebas (ordinamento y sperimentale) y dentro de ellas con posibilidades de elección por parte del alumno.

Si además añadimos la posibilidad de descentralización de las pruebas, caso español y alemán, pero también francés puesto que aquí se plantean diferentes pruebas para la metrópoli y para la enseñanza realizada en el exterior, nos conduce a múltiples situaciones no estrictamente comparables entre sí. Sin embargo, aunque las pruebas difieran entre sí, los currículos del Bachillerato y en concreto los programas objeto de examen en las pruebas –que no tienen por qué coincidir–, sí que corresponden a los grandes capítulos de las Matemáticas de Bachillerato: Análisis, Geometría, Algebra, Probabilidad y Estadística.

3.1. Alemania

En el caso alemán las directrices señalan que el profesor elegirá dos partes del programa, Análisis y Estadística o Análisis y Geometría. De cada una de esas partes se le plantean al alumno dos cuestiones. Hay dos niveles de certificación, el básico y el avanzado, con diferentes tiempos de duración para el examen (en general tres o cuatro horas). Los problemas de los exámenes constan de varias cuestiones que conforman un desarrollo completo de cada una de las partes del programa. Por ejemplo en la parte de Análisis en el examen de (Abiturprüfung, 2011). Hemos elegido como muestra de las cuestiones que se preguntan el siguiente problema que no constituye un problema completo sino solo la mitad de uno de ellos:

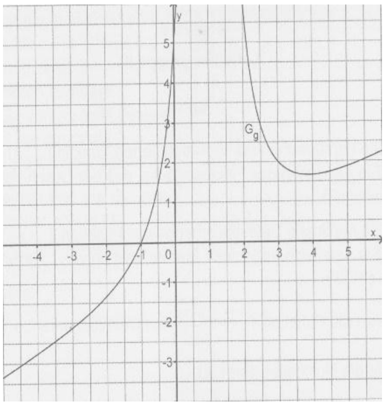


Figura 1: Gráfica de la función G_g

"En la figura se muestra la gráfica G_g *de una función racional definida en* $\Re - \{1\}$ *que posee las propiedades siguientes:*

- En x=1 tiene un polo sin cambio de signo

- La gráfica G_g *se extiende por encima de la asíntota oblicua* $y = \frac{1}{2}x - 1$

- El único cero de g es x = -1

a) Determinar, a partir de la figura, el valor aproximado de g' *en x = -1; dibujar la función derivada en ese punto. La asíntota oblicua sugiere un determinado comportamiento de* g'*. Realiza un bosquejo de la gráfica de* g'*.*

b) La función g tiene una expresión, con $a \in \Re - \{0\}$*, de una de las formas siguientes:*

I $y = x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$ *II* $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)}$

III $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$

Demostrar que las formas I y II no son posibles y calcular en el caso III el valor del parámetro a.

c) Se define la función h(x)=ln(g(x)). Determinar a partir del gráfico de G_g *el dominio de definición de h,* D_h*. Estudiar el comportamiento de h en los extremos de su dominio y calcular los ceros de h."*

En el enunciado se efectúa una lectura de los aspectos más relevantes que aporta la gráfica de la función, para pasar a demandar el valor de la derivada en un punto y un esbozo de su gráfica. Se parte del gráfico, para a través de una pregunta dirigida, llegar a determinar la expresión de la función. En la última cuestión, dominio de *h(x),* se pide su determinación partiendo de la gráfica, lo que resulta mucho más sencillo que mediante el cálculo directo. Se aprecia que el problema exige no tanto la realización de cálculos laboriosos como la comprensión de conceptos fundamentales de funciones y que constituye un ejercicio muy completo de interrelación de significados.

En Análisis, a veces, se plantean cuestiones relacionadas con la Geometría, que requieren del cálculo de distancias o áreas, y es usual demandar el cálculo de parámetros. Se pregunta específicamente sobre modelos de poblaciones en los que intervienen funciones exponenciales y sobre el comportamiento asintótico de las funciones.

La parte de Probabilidad y Estadística consta de problemas clásicos de probabilidad, dados, ruletas, de probabilidades condicionadas y teorema de Bayes y de contraste de Hipótesis. No se suelen presentar, ni demandar, diagramas de árbol, aunque si tablas de contingencia.

El problema de Geometría analítica tridimensional exige también responder a varias cuestiones que conforman una situación abordada desde muchos puntos de vista. Por ejemplo, en la misma prueba de 2011, en uno de los problemas de Geometría se planteaban cuestiones referidas a la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados, a la forma y área de la región formada por el origen de coordenadas y los puntos dados, para a continuación pasar a plantear una cuestión de aplicación que recogemos a continuación:

> *"Sean los puntos A(0│60│0), B(-80│60│60) y C(-80│0│60) y O el origen de coordenadas. El rectángulo OABC es el modelo de una parcela de tierra de fuerte pendiente, el eje x_1 positivo describe el sur, el eje x_2 positivo describe el este (En el sistema de coordenadas una unidad equivale a 1m, es decir, la longitud de la tierra en dirección este-oeste es de 60m.). Aunque el área del rectángulo OABC es de 6000 m^2, por la acusada pendiente está marcado en el mapa del catastro con un tamaño de 4800 m^2 que se establece sobre la base del dibujo. Esto presupone una regulación sensata implementada en el Registro de la Propiedad. Confirme esta conjetura del Registro de la Propiedad."*

Esto es una parte de un problema con más cuestiones que completan las aquí presentadas, pero que representa un ejercicio completo de geometría analítica en el que hay que movilizar las fórmulas fundamentales además de tener cierta orientación espacial. A destacar la modelización de una parcela de terreno mediante la ecuación de un plano inclinado, que proyectado sobre el plano Ox_1 x_2 se convierte en la base regulada en el catastro. Es decir, matemáticas prácticas al servicio de la realidad. Comentemos, de paso, que algunas de las soluciones que requieren de cálculos y que luego son utilizadas en otras partes del problema aparecen en el propio enunciado, posibilitando así la comprobación de lo realizado y, en caso erróneo, la continuación con los demás apartados del problema. Algunas de las notaciones utilizadas son específicas y diferentes de las que se emplean en otros países. Por ejemplo las coordenadas de un punto se separan con rayas verticales A(0│60│0) o para los dominios se utiliza R\{0}.

En general no hay un excesivo formalismo en la redacción de los enunciados y se procura plantear situaciones prácticas que muestren la aplicabilidad de las matemáticas, o en ocasiones, se presentan cuestiones puramente matemáticas sobre funciones (dominios, asíntotas,…) que luego son utilizadas en alguna aplicación por ejemplo relacionada con trayectorias, velocidades, etc.

3.2. España

No hay un número igual de problemas planteados en las diferentes regiones, pero la duración del examen sĺ que es igual en todas ellas, hora y media, y esto da una idea del tipo de examen, más corto, con cuestiones más concretas y específicas que las de los otros países. La estructura de los dos modelos de examen de los dos tipos de Bachillerato es diferente y las partes de que consta también. Mientras que en el Bachillerato Científico los problemas giran en torno a los bloques de Álgebra, Geometría y Análisis, en el Bachillerato de Ciencias Sociales los problemas giran en torno al Álgebra, Análisis y Estadística. Además los problemas de este último tipo de Bachillerato conllevan menos cálculos, son más intuitivos y se procura que reflejen situaciones reales.

Por ejemplo en el Bachillerato de Ciencias en las pruebas de 2012 se planteaba el siguiente problema de Álgebra (UPV/EHU, 2012):

"Dado el sistema

$$\begin{cases} x+(A+1)y+Az=A+1 \\ Ay+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro A.
b) Resolverlo, si es posible, para el caso A=4."

Como se ve es un problema sencillo de discusión y resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.

En el Bachillerato de Ciencias Sociales en la parte de Estadística uno de los problemas propuestos en 2011 fue el siguiente (Busto, 2011, p. 40):

"Se supone que la renta familiar de las familias de un determinado barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros. Se extrae una muestra de la renta de 10 familias, obteniéndose los siguientes resultados en miles de euros:
19 987, 20 096, 19 951, 20 263, 20 014, 20 027, 20 023, 19 942, 20 078, 20 069
Encontrar el intervalo de confianza del 95% para la renta familiar media e Interpretar su significado"

También un ejercicio sencillo que supone el cálculo de una media y el conocimiento y aplicación de una fórmula para el cálculo del intervalo de confianza. En este tipo de Bachillerato se plantean además problemas de Programación Lineal de dos variables y se van introduciendo, cada vez más, problemas de Análisis contextualizados, que suponen una modelización de ciertas situaciones o que incluyen aplicaciones de tipo económico.

3.3. Francia

El Bachillerato General en Francia tiene tres opciones, el denominado Bachillerato ES (Económico-Social), el Bachillerato Literario (L) y el Bachillerato

Científico (S). Las pruebas francesas son diferentes según la opción de Bachillerato General cursada y en general constan de 4 ejercicios para los que se dispone de un tiempo de tres o cuatro horas de duración.

En el denominado Bachillerato ES (económico-social) el ejercicio 1 consta de varias cuestiones de respuesta múltiple. Por ejemplo en junio de 2010 en las pruebas correspondientes a Francia-Metrópoli en el ejercicio 1 se plantearon las siguientes cuestiones (Sujet de Bac, 2012):

"1. El número -3 es solución de la ecuación:

a) $\ln x = -\ln 3$ *b)* $\ln(e^x) = -3$ *c)* $e^{\ln x} = -3$ *d)* $e^x = -3$

2. El límite en $+\infty$ *de la función f definida en el intervalo* $]\frac{1}{2};+\infty[$ *por* $f(x) = \dfrac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ *es:*

a) $-\infty$ *b)* $+\infty$ *c) -1* *d)* $-\dfrac{1}{4}$

3. Sea f la función definida y derivable en el intervalo]0; $+\infty$*[por* $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$*. En el plano provisto de una referencia, la tangente a la curva que representa la función f en su punto de abscisa 1 admite por ecuación:*

a) y=x+2 *b) y=-x+4* *c) y=3x+1* *d) y=x+3*

4. Un juego consiste en lanzar una vez un dado cúbico no cargado cuyas caras están numeradas de 1 a 6. La puesta de cada jugador son 3 euros. Se lanza el dado y se lee el número obtenido en su cara superior: si el número es 1, el jugador recibe 10 euros; si el número es 2 o 4, recibe un euro; sino, no recibe nada. En este juego la esperanza matemática de la ganancia expresada en euros es:

a) 1 *b) 0* *c) -1* *d) -2"*

En este ejercicio de análisis y probabilidad, se plantean el conocimiento de funciones, el cálculo de límites y la determinación de la recta tangente a una función en un punto y un cálculo elemental de probabilidades. Es por lo tanto un ejercicio en el que se realiza un recorrido superficial del programa de la asignatura, pero que sirve de calentamiento y motivación para los ejercicios posteriores.

El segundo ejercicio es de probabilidad, de redacción larga y con varios apartados, que incluyen problemas de recuento, cálculo de probabilidades, probabilidades condicionadas y teorema de Bayes. Casi siempre se suele pedir que dibujen un diagrama de árbol asociado a alguna de las cuestiones. El otro ejercicio de Estadística (suele ser el cuarto) es un ejercicio de cálculo de rectas de regresión, no solo lineal, sino también exponencial o logarítmica.

Un tercer ejercicio suele contener una introducción en la que se les presenta a los estudiantes alguna función de la que se piden realizar determinados cálculos, pero para luego ser utilizados en una aplicación de tipo económico. Bien se pide determinar curvas de oferta y demanda, o cálculo de puntos de equilibrio o funciones de beneficio.

Por ejemplo en junio de 2010 en las pruebas de América del Norte (Baccalauréat, 2010) se planteaban diversas cuestiones referidas a la función $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+1}{x}$ para proponer posteriormente la siguiente aplicación económica:

> "*Una empresa subcontratada fabrica piezas para la industria automovilística. Su producción para determinado tipo de piezas varía, según la demanda, entre 1000 y 5000 piezas semanales. Se supone que todas las piezas producidas se venden. El beneficio unitario, en función del número de piezas producidas por semana, viene dado por la función f, con x expresado en miles de piezas y f(x) expresado en euros. Determinar, con aproximación en céntimos, el valor medio del beneficio unitario para una producción semanal comprendida entre 1000 y 5000 piezas. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio unitario igual a 1,05 €?"*

En el Bachillerato Literario (L) el primer ejercicio es un problema de geometría en el que se les plantean cuestiones relacionadas con las perspectivas central y paralela; el segundo ejercicio, de probabilidad, es similar al planteado en el Bachillerato ES; un tercer ejercicio suele contener nociones de teoría de números planteándose cuestiones sobre congruencia, divisibilidad y sucesiones numéricas. Por ejemplo en las pruebas de 2011 se plantearon (Baccalauréat, 2011):

"1. El número 96 es congruente módulo 7 con: a) 19
b) 20 c) 21
2. ¿Cuál de los siguientes tres números es divisible por 3?
a) $9^{99}+1$ *b)* $10^{100}+1$ *c)* $11^{111}+1$*"*

Cuando existe el cuarto ejercicio suele ser sobre funciones, práctico y en el que se suelen plantear cuestiones sobre el funcionamiento de un determinado algoritmo que se les proporciona. En las mismas pruebas anteriores se planteaba el siguiente algoritmo:

"Siendo $f(x)=4e^{0,5x}-5$*, se considera el siguiente algoritmo:*

Entrada: P, un número real estrictamente positivo
Inicio: X = 0 e Y = 1
Tratamiento: Mientras que Y<0:
Dar a X el valor X+P
Dar a Y el valor f(X)
Salida: Muestra X-P y X

a) ¿Si P=0,1 cuáles son los valores que se obtienen como salida?

b) Se hace funcionar el algoritmo con un cierto valor de P. Se han obtenido como salida los números 0,44 y 0,45. ¿Cuál es el valor de entrada de P?
c) Siendo el valor de entrada de P=0,001, ¿Cuáles son los valores de salida?

En este ejercicio prima el aspecto calculatorio y el ir entendiendo la forma de aplicar el algoritmo y las salidas que proporciona. Es un ejercicio específico de este tipo de Bachillerato, pero que lo hemos recogido aquí porque sería inusual en las pruebas de los otros países.

En el Bachillerato Científico (S) la duración de la prueba es de cuatro horas y también consta de cuatro ejercicios. Hay un ejercicio de números complejos en el que suelen aparecer cuestiones relacionadas con transformaciones y con geometría del plano. El ejercicio de Geometría tridimensional puede incluir cuestiones teóricas o plantear demostraciones de propiedades conocidas y es muy frecuente proponer cuestiones relacionadas con cubos o paralelepípedos de los que se aporta el dibujo y en los que están presentes tanto la geometría sintética como la analítica. En los otros dos ejercicios se recogen en uno de ellos cuestiones de Análisis de forma bastante completa pues en el mismo ejercicio se plantea el estudio de funciones, cálculo de integrales y áreas y estudio de raíces de ecuaciones. En el otro ejercicio se tratan cuestiones de probabilidad (variables aleatorias, distribuciones). Por ejemplo una de las partes del problema de Geometría planteado en las pruebas de 2011 es la siguiente (Baccalauréat, 2011b):

"Se considera un cubo ABCDEFGH, de aristas de longitud 1. Se denota por I el punto de intersección de la recta (EC) y del plano (AFH).

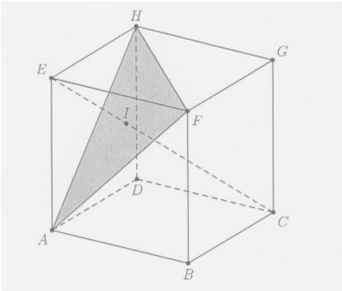


Figura 2: Cubo ABCDEFGH

1. Se toma el sistema de referencia $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$. *En este sistema de referencia los vértices del cubo tienen por coordenadas:*
A(1; 0; 0) B(1; 1; 0) C(0; 1; 0) D(0; 0; 0) E(1; 0; 1) F(1; 1; 1) G(0; 1; 1) H(0; 0; 1)
a. Determinar una representación paramétrica de la recta (EC).
b. Determinar una ecuación cartesiana del plano (AFH).
c. Deducir las coordenadas del punto I; demostrar que el punto I es la proyección ortogonal del punto E sobre el plano (AFH).
d. Comprobar que la distancia del punto E al plano (AFH) es igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$
e. Demostrar que la recta (HI) es perpendicular a la recta (AF). ¿Qué representa el punto I para el triángulo AFH ?"

Estamos ante un ejercicio de geometría analítica tridimensional, ayudado por la representación gráfica que se facilita, en el que se solicitan el cálculo de la ecuación de una recta, un plano y la distancia de un punto a un plano, que son aplicación directa de las fórmulas, además hay que calcular un producto escalar de vectores y se requiere conocer la geometría del triángulo para saber qué representa el punto I.

Una cuestión del tipo respuesta múltiple de números complejos en la que aparece la geometría planteada desde la representación gráfica de los números complejos, incluida en el ejercicio de 2011 es la siguiente:

"El conjunto de los puntos de afijo z tal que | z +i |=| z −1 | es : la mediatriz del segmento [BC], el punto medio del segmento [BC], el círculo de centro O y radio 1, la mediatriz del segmento [AD]"

También aparecen en este Bachillerato ejercicios de estudio de sucesiones y recursividad, por ejemplo, el aparecido en las pruebas del Bachillerato (S) de 2011:

"Se considera una recta D provista de un sistema de referencia (O, $\vec{i}$). Sea (A_n) la sucesión de puntos de la recta D definida del siguiente modo: A_0 es el punto O; A_1 es el punto de abscisa 1; para todo entero natural n, el punto A_{n+2} es la mitad del segmento [$A_n A_{n+1}$].

1. a. Tomando como unidad gráfica 10 cm, dibujar sobre la recta D los puntos A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6.

b. Para todo entero natural n, se denota a_n la abscisa del punto A_n. Calcular a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

c. Para todo entero natural n, justificar la igualdad: $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$

2. Demostrar por recurrencia, que para todo entero n, $a_{n+1} = \dfrac{-1}{2} a_n + 1$

3. Sea (v_n) la sucesión definida, para todo entero natural n, por $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$. Demostrar que (v_n) es una progresión geométrica de razón $\dfrac{-1}{2}$.

4. Calcular el límite de la sucesión (v_n) y después el de (a_n)."

Queremos hacer notar el aspecto formal de la redacción del enunciado, la generalidad con la que está planteado, pero también los aspectos concretos que se demandan en los apartados a y b, para a partir de ellos justificar, que no demostrar, una igualdad de tipo general (c), y aquí ya sí para demostrar en el apartado 2 una fórmula recurrente y su aplicación práctica a las progresiones geométricas y al cálculo de límites. Este tipo de ejercicio, aparecía en los textos de Matemáticas de Bachillerato de hace algunos años, pero no en los actuales (salvo en Francia).

Como características generales de las pruebas del Bachillerato General francés en sus tres modalidades podemos establecer las siguientes:

1. Pruebas de larga duración (3 o 4 horas) y con ponderación alta en la calificación global del aspirante.

2. Se plantean algunas cuestiones teóricas y se pide demostrar propiedades y efectuar conjeturas, pero no bajo la simple mención del nombre del teorema sino como parte de algún ejercicio en el que se utilizará el resultado. En ese sentido es usual dirigir el trabajo del alumno a través de apartados encadenados, consiguiendo en conjunto resultados globales de alguna de las partes del programa.

3. Se parte de la gráfica de la función para plantear cuestiones, y se aborda el estudio de funciones trascendentes.

4. Hay rigor y formalismo en el planteamiento de los ejercicios y en las nomenclaturas utilizadas.

5. Se incluyen partes de las matemáticas tales como sucesiones, divisibilidad, números complejos, empleo de algoritmos e iteraciones de sucesiones y funciones inusuales en las pruebas de los otros países.

6. Entre las instrucciones que se aportan al estudiante está la de poder usar una calculadora autorizada y la de disponer de papel milimetrado. También se recuerda que la calidad de la redacción, la claridad y la precisión de los razonamientos serán tenidos en cuenta en la corrección.

3.4. Italia

En Italia, en Matemáticas, el alumno debe resolver uno de los dos problemas que se le proponen en la prueba y cinco de entre diez cuestiones. Disponen de seis horas para la realización del examen. De los problemas el primero suele corresponder al Análisis y el segundo a la Geometría. En las pruebas de junio de 2012 en el problema 1 se demanda el empleo de fórmulas a través de un ejercicio de cálculo diferencial e integral (Tomasi, 2012):

> *“1. Calcula el periodo de la función* $g(x) = sen(\frac{3}{2}\pi x)$
> *2. Sea la función g(x) definida anteriormente y* $f(x) = \left|27x^3\right|$*. Sean r y s las rectas tangentes a f(x) y g(x) respectivamente en* $x = \frac{1}{3}$*. Calcular el ángulo que forman.*
> *3. Calcular el área de la región R comprendida entre las dos funciones en el primer cuadrante.*
> *4. Rotando la región R entorno al eje OX se genera el sólido S y rotando entorno al eje OY se genera el sólido T. Calcula sus volúmenes.”*

En este ejercicio se solicita el cálculo del periodo de una función trigonométrica, cosa muy frecuente en las pruebas italianas, pero totalmente inusual en las de los otros países, mediante un cálculo de derivadas se obtienen las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en el punto dado y a continuación utilización de la fórmula para el cálculo del ángulo que forman. Para calcular el área de la región solicitada es conveniente el esbozo de la gráfica de las funciones y el cálculo de sus puntos de corte y conocimiento de la fórmula integral para el cálculo del volumen de revolución. Como se ve es un ejercicio que requiere largos cálculos, en el que muchos de los aspectos a desarrollar no se solicitan explícitamente y es de redacción escueta.

Un ejemplo de Geometría es el problema propuesto en 2004 (Esame di Stato di Liceo Scientifico, 2004, corso di ordinamento) en el que las preguntas que se plantean son muy específicas del Bchillerato italiano:

> *“ABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa BC.*
> *1. Demostrar que la mediana relativa a BC es congruente con la mitad de BC.*

2. Dar las medidas de los catetos de ABC en función de la medida, supuesta conocida, de la hipotenusa y de la altura relativa a ella.

3. Si BC= $\sqrt{3}$ *metros, determinar el cono **K** de volumen máximo que se puede obtener a partir de la rotación del triángulo alrededor de uno de sus catetos y la capacidad en litros de K.*
4. Determinar la medida aproximada, en radianes y en grados sexagesimales, del ángulo del sector circular que resulta del desarrollo plano de la superficie lateral del cono K."

En este ejercicio, también de redacción escueta, se vuelven a demandar cuestiones para las que se requiere el uso de aspectos no explícitos en la formulación del problema: dibujo de los elementos que se describen, utilización de fórmulas, desarrollo de superficies. El aspecto calculatorio tiene también una gran presencia en el ejercicio.

En cuanto a las cuestiones hay que observar que son ejercicios en los que se demandan diferentes conocimientos que hay que aplicar en la resolución del problema planteado. Puede ser una cuestión teórica de la que se pide la demostración, o la utilización de alguna fórmula, o algún cálculo requerido o problemas usuales en los libros de texto de todos los países (cálculo de máximos y mínimos). Abarcan las diferentes partes del programa, y nunca faltan los problemas clásicos tipo problema del Ajedrez, u otros conocidos que se presentan con el nombre del matemático al que se le atribuyen. Recogemos algunas de las cuestiones planteadas el año 2012 (Tomasi, 2012)::

"1. ¿Qué representa el límite siguiente y cuál es su valor?

$$\lim_{h \to 0} \frac{5(\frac{1}{2}+h)^4 - 5(\frac{1}{2})^4}{h}$$

2. ¿Cómo definirías las asíntotas de una función? Dar un ejemplo de función que tenga una asíntota horizontal y dos asíntotas verticales.
3. La posición de una partícula viene dada por: $s(t) = 20(2 \cdot e^{\frac{-t}{2}} + t - 2)$*. ¿Cuál es su aceleración para t = 4?*
4. ¿Cuál es la capacidad en litros de un cono de apotema 1m?
5. Siendo $f(x) = 5senx\cos x + \cos^2 x - sen^2 x - \frac{5}{2}sen2x - \cos 2x - 17$*, calcular* $f'(x)$
*7. El problema de Erone (matemático Alejandrino que probablemente vivió en la segunda mitad del siglo I d.C.). Cada mañana, un campesino que vive en una granja (punto A) debe ir al río (*ver *figura), llenar dos baldes de agua y llevarlos a su establo (ubicado en B). Dado que los cubos son pesados, el agricultor intenta tomar la ruta más corta posible. Así que le pregunto, ¿en qué parte del* río *(punto C*) tengo que *ir a recoger el agua de modo que el recorrido total (de A a C más de C a B) sea el más corto?"*

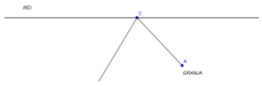


Figura 3: Problema de Erone

Obsérvese como aquí también el aspecto procedimental juega un papel importante en algunas de las cuestiones.

Características de las Pruebas:

Los problemas están divididos en cuatro apartados cada uno de los cuales constituye un problema en sí mismo. Además suelen estar encadenados de forma tal que el resultado de alguno de los apartados puede ser necesario para resolver los siguientes. Suelen ser problemas de Análisis que incluyen funciones, derivadas e integrales, pero no el estudio directo de la representación gráfica de funciones. Suelen aparecer funciones logarítmicas, trigonométricas y alguna función con valores absolutos. Se incluyen preguntas relativas a cálculo de volúmenes de sólidos de rotación.

Para las cuestiones la estructura es similar pero cada cuestión es independiente de las demás y no tienen apartados divididos como tales. Hay cuestiones teóricas (definiciones, alguna pequeña demostración). Hay cuestiones de trigonometría (en particular cálculo de parámetros y periodos de funciones), de geometría plana y espacial, de análisis (cálculo de máximos y mínimos, estudio de raíces) y problemas clásicos (ajedrez, Erone). En Análisis suele ser frecuente solicitar ejemplos de funciones que cumplan determinadas condiciones y el cálculo de dominios. No se renuncia a plantear problemas no directamente relacionados con alguna parte del currículo sino relacionados con estrategias de resolución de problemas (de combinatoria, divisibilidad, factorización,…). No aparecen cuestiones ni problemas de estadística ni de probabilidad.

4. Análisis Comparado

Del análisis efectuado de las pruebas de los cuatro países y de las características presentadas de cada una de ellas se pueden deducir algunos hechos relevantes que permiten hacerse una mejor idea de lo que se pregunta en cada país y por ende deducir qué y cómo se enseñan las Matemáticas de Bachillerato en cada uno de los cuatro países.

El primer hecho a constatar es que las pruebas españolas son de una duración mucho menor que las del resto y por lo tanto los problemas que se plantean sólo constituirían un apartado de lo que en los demás lugares se entiende como problema o ejercicio propuesto para las pruebas.

En segundo lugar hacer mención a la denominación utilizada en cada país para designar los problemas de las pruebas: en Alemania son "tareas" (*teil*), en España se utilizan las denominaciones de "problemas" y "cuestiones", en Francia son "ejercicios" (*exercise*) y en Italia son también "problemas" y "cuestiones" (*problema, questionario*).

Se ha señalado también que las notaciones utilizadas difieren de un país a otro, aunque todas ellas son conocidas y utilizadas en Matemáticas. Aquí también impera la cultura del país. Por ejemplo los grafos de las funciones se designan en Francia y Alemania de igual forma y siempre de la misma manera: C_f, G_h,… En Italia se habla del grafo G de la función f. Las funciones en España suelen aparecer como $f: R \to R$, o simplemente $f(x)$, mientras que en Alemania se escriben $f: x \mapsto e^x$, utilizándose también esta notación para las funciones definidas mediante integrales $I: x \mapsto \int_{\ln 2}^{x} f(t)dt$, en Francia suele expresarse como "sea f la función definida por $f(x) = x^2$", de una manera similar a como se hace en España y en Italia. Los intervalos son utilizados muy frecuentemente en las pruebas francesas y no tanto en las demás; en Francia y Alemania se escriben igual: intervalo cerrado [0;3], intervalo abierto]2;5[, reservando para las coordenadas los paréntesis. Además en Francia se suelen denotar los intervalos con letra propia tal como I = [3;7]. En España se escribe intervalo cerrado [0,1] (igual que en Italia) e intervalo abierto (3,6); no hemos visto ningún intervalo abierto en las pruebas italianas. Los puntos ya se ha dicho que en Alemania aparecen como A(0│60│0), en Francia B = (2;4), pero también aparece punto A de coordenadas (0,4); en España e Italia P(1,3,1). Las probabilidades condicionales en España se denotan por $p(A/B)$, mientras que en Francia son $p_B(A)$.

La teoría, en el sentido de demostración de una determinada propiedad, prueba de un determinado teorema e incluso redacción de una definición, es prácticamente inexistente en las pruebas de acceso de estos países. No quiere esto decir que los alumnos no tengan que conocer fórmulas y conceptos teóricos que resultan imprescindibles para resolver los problemas. Pero no se preguntan cuestiones de teoría en todos los países. No hay teoría en las pruebas de Alemania, ni en las de España, pero si en las de Francia e Italia. En Italia en la parte del cuestionario en la que se proponen diez cuestiones de las que tienen que elegir cinco, dos de las cuestiones suelen ser teóricas e implican la demostración de una determinada propiedad o dar alguna definición. Basten como ejemplo las siguientes:

> *"Los poliedros regulares –también conocidos como los sólidos platónicos– son salvo semejanzas, sólo cinco: el tetraedro, cubo, octaedro dodecaedro e icosaedro. ¿Puedes probarlo?". "Demostrar que para todo $n \in \mathrm{N}$ la suma de los coeficientes de $(a+b)^n$ es igual a 2^n" (2006)*

Las cuestiones teóricas planteadas en las pruebas francesas no abundan, no siempre aparecen, pero sí lo hacen en el Bachillerato Científico (S), en el que sí que se pide frecuentemente plantear y demostrar conjeturas sobre situaciones planteadas en los problemas. Por ejemplo la parte A del ejercicio 4 planteado en las pruebas de 2011 es la siguiente (Partie A – Restitution organisée de connaissances):

> *"Se dispone en el espacio de un sistema de referencia ortonormal (O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Se designa por* P *el plano de ecuación ax + by + cz + d = 0 y por* M_0 *el punto de coordenadas* (x_0, y_0, z_0)*. Se denomina H a la proyección ortogonal del punto* M_0 *sobre el plano* P*. Se supone conocida la propiedad siguiente: "el vector* $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ *es un vector normal al plano* P*". La finalidad de esta parte es demostrar que la distancia* $d(M_0, \mathrm{P})$ *del punto* M_0 *al plano* P*, es decir la distancia* M_0H *, es tal que:*
>
> $$d(M_0, \mathrm{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
>
> *1. Justificar que* $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
>
> *2. Demostrar que* $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$
>
> *3. Concluir la demostración"*

Es una demostración de aspecto muy formal, pero dirigida y ayudada, tanto porque se acompaña de propiedades que se suponen conocidas, como porque se aporta la fórmula final y se indican los cálculos a realizar y sus resultados parciales. Luego, no es una cuestión teórica al uso de la que el alumno tiene que aportar tanto su formulación como su completa demostración.

El lenguaje utilizado difiere entre los países. El de las pruebas alemanas es un lenguaje directo, en el que no se renuncia a utilizar la simbología matemática necesaria, pero descriptivo de las situaciones que se plantean y contextualizado (ver ejemplo anterior sobre área de terreno registrado en catastro); el de las pruebas españolas está reducido a un mínimo imprescindible para expresar lo que se requiere del alumno y acompaña a la simbología matemática que es la esencia del problema que se plantea; en las pruebas francesas predomina la descripción formal y matemáticamente correcta de la situación planteada; las condiciones iniciales del problema se detallan con rigor, bien sean sistemas de referencia (*plano complejo provisto de una referencia ortonormal directa*), dominios de definición, términos matemáticos que no aparecen en el resto de las pruebas (*estrictamente creciente, sucesión definida para todo entero natural n, números reales estrictamente positivos, formular una conjetura*). En Italia los problemas se dividen en varios apartados, cada uno de los cuales es equivalente en tamaño a las cuestiones que contiene el examen; el lenguaje es escueto, la terminología matemática utilizada es solo la necesaria, las preguntas son muy directas y no se aportan explicaciones de lo requerido en el ejercicio. Hay que señalar que en ninguno de los países se utilizan cuantificadores lógicos en la redacción de los exámenes, del tipo $\forall, \exists$, sino que se sustituyen por su expresión en el lenguaje ordinario.

En Francia y Alemania según la especialidad o el itinerario de Bachillerato cursado, la parte de Estadística y Probabilidad comprende cuestiones muy específicas sobre por ejemplo cadenas de Markov.

El examen italiano tiene muchas especificidades: aparecen muchos ejercicios de cálculo de derivadas o cálculo de periodos de funciones o cálculo de parámetros, en los que prima el mero aspecto procedimental. Se utilizan ampliamente las funciones trigonométricas, no entra prácticamente la probabilidad y la estadística, como no sea para calcular probabilidades mediante fórmulas combinatorias o mediante la definición de Laplace y se siguen planteando ejercicios de cálculo combinatorio, como aplicaciones de un conjunto en otro:

> *"Dados los conjuntos* $A=\{1,2,3,4\}$ *y* $B=\{a,b,c\}$*, ¿cuántas son las aplicaciones de (funciones) de A en B?", (Examen de 2006*)

Ya se ha dicho también que se mencionan y plantean cuestiones atribuidas a matemáticos de los que se aporta el nombre y algún dato biográfico.

Tanto en Francia, como en Alemania y, a veces, en alguna prueba española, pero no en las pruebas italianas, se plantean ejercicios con cuestiones relativas a una determinada función cuya gráfica se proporciona. Se parte de la gráfica, para de una manera intuitiva profundizar en el conocimiento de la función y de los significados relativos a ella y a su función derivada.

En las pruebas alemanas y españolas muchos de los problemas se suelen presentar contextualizados, en terminología alemana sacados de la realidad. Son funciones que modelizan situaciones, o aplicaciones de las Matemáticas a la resolución de situaciones problemáticas de otras áreas del conocimiento.

Las pruebas francesas tienen especificidades que no aparecen en el resto. Ya se ha comentado el uso de un lenguaje matemático muy formal para describir las situaciones que se plantean; hay muchas opciones según el itinerario cursado y la especialidad y por lo tanto hay pequeñas variaciones de unas pruebas a otras, consistentes tanto en el programa, como en el estilo de ejercicios que se demandan. Hay dos características no comentadas anteriormente, como son el que en muchos de los ejercicios, antes de plantear una determinada cuestión, se explicita el objetivo que se pretende conseguir con esa cuestión en particular o con el ejercicio en general. Por ejemplo, en las pruebas del Bachillerato (S) de 2011 aparecen los siguientes objetivos explicitados en los diferentes ejercicios:

> *"El objetivo de esta cuestión es delimitar la posición del punto M sobre el segmento [CE] para el cuál la medida del ángulo* $\widehat{IMJ}$ *es máxima (ejercicio 3, geometría)"*
> *"El objetivo de esta cuestión es probar que existe un solo valor de α para el cual las áreas* A *y* $S(\alpha)$ *son iguale (ejercicio 4, análisis)"*

Además, se explica a veces, qué se valorará en la resolución de una determinada cuestión: "*En esta cuestión la respuesta será cuidadosamente justificada. Toda iniciativa de investigación, incluso incompleta o no fructífera, será tenida en cuenta en la evaluación*"

También es frecuente demandar soluciones con un determinado nivel de exactitud: "*Redondeando a las unidades, aproximar el resultado a* 10^{-3}*, redondeando a las decenas*"

Salvo en España, donde no existen o son muy inusuales, se suelen plantear cuestiones relacionadas con la existencia y cálculo de ceros de funciones. Por ejemplo en el Bachillerato (L) francés en 2010 se planteó:

> "*Sea f la función definida sobre el intervalo I = [1;7] por* $f(x)=\frac{x^2}{2}-6x+4+8\ln(x)$*. Determinar el número de soluciones de la ecuación* $f(x)=0$ *en el intervalo I.*"

En las pruebas francesas y en las españolas la presencia de porcentajes y tasas suele ser frecuente, sobre todo, en los Bachilleratos de Sociales (ES).

5. Conclusiones

Se pueden formular algunas conjeturas sobre el tipo de enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato en los países analizados: enseñanza muy diversificada en Francia con múltiples opciones adaptadas al itinerario formativo elegido por el estudiante, con relevancia de aspectos formales y deductivos, pero no olvidando las aplicaciones; en Alemania sólidos fundamentos que se utilizan para solucionar cuestiones prácticas y pocos aspectos formales; en Italia, se aprecia una enseñanza más tradicional de las Matemáticas, con incidencia todavía importante del aspecto calculatorio y procedimental y con cuestiones definitivamente superadas en la enseñanza de los otros tres países; y en España enseñanza práctica dirigida a superar los aspectos procedimentales y con presencia cada vez mayor de situaciones de enseñanza contextualizadas.

Bibliografia

Abravanel, R. (2008). *Meritocrazia*. Garzanti Libri, Milano. Italia.

Abiturprüfung (2011). Mathematik. Recuperado el 12 de setiembre de 2012, de http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/abi/BY/mathgk11_A.pdf

Baccalauréat (2010). Baccalauréat ES, Amérique du Nord 3 juin 2010. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de http://es.bab.la/diccionario/espanol-frances/examen

Baccalauréat (2011). Baccalauréat General, Mathematiques série L, session 2011. Recuperado el 16 de setiembre de 2012, de: http://www.bankexam.fr/telecharger/annale/42744

Baccalauréat (2011b). Baccalauréat General, Mathematiques série S, session 2011, Enseignement Obligatoire. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de http://www.mathsfrance.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/2011/BacS_Juin2011_Obligatoire_Asie_Enonce.pdf

Busto, A.I. y Martínez, E. (2012). *Matemáticas aplicada a las ciencias Sociales II. Pruebas de acceso a la universidad. Selectividad 2011*. Anaya, Madrid. España.

Busto, A.I. y Martínez, E. (2012). *Matemáticas II. Pruebas de acceso a la universidad. Selectividad 2011*. Anaya, Madrid. España

Eurydice (2001). *Il sistema educativo italiano*. INDIRE, Firenze. Italia.
Eurydice-Eurostat (2007). Cifras clave de la Educación Superior en Europa. Recuperado el 3 se setiembre de 2012, de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key_data_series/088ES.pdf
Gavari, E. (2003). *Los principios rectores de la política educativa italiana contemporánea*. Educación XXI, Madrid. España.
Gobierno de Francia (2012). Resultados provisionales del Bachillerato. Recuperado el 11 de setiembre de 2010, de http://www.education.gouv.fr/cid56455/resultats-provisoires-du-baccalaureat.html
INE (2012). Anuario Estadístico de España (3. Educación). Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de: www.ine.es/prodyser/pubweb/anuario12/anu12_03educa.pdf
Ministère de l'Éducation Nationale (2012). Éduscol. Portail national des professionnels de l'éducation. Présentation du baccalauréat general. Recuperado el 7 de setiembre de 2012, de http://eduscol.education.fr/pid23233-cid46205/presentation-du-baccalaureat-general.html
Ministère de l'Éducation Nationale (2012b). Note d' Information. 13-02 Mars. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/82/6/DEPP-NI-2013-02-resultats-definitifs-baccalaureat-session-2012_245826.pdf
Studentville (2012). Maturitè 2012. Recuperado el 4 de setiembre de 2012, de: http://maturita.studentville.it/
Sujet de Bac (2012). Annales du Bac. Recuperado el 6 de setiembre de 2012, de http://www.sujetdebac.fr/serie-s.php
Tomasi, L. (2012). Risoluzione dei temi di Matematica assegnati all'esame di Stato di Liceo scientifico nella 2ª prova scritta. Recuperado el 17 de setiembre de 2012, de http://www.matematica.it/tomasi/matls/
UPV/EHU (2012). Examen de selectividad 2012. Recuperado el 16 de setiembre de 2012, de http://www.sarrera.ehu.es/p259-content/es/contenidos/plan_programa_proyecto/examen_selectividad_ord_aca/es_2012/adjuntos/MatematicasII_junio2012.pdf

Josu Gotzon Ruiz de Gauna Gorostiza. Licenciado en Matemáticas y Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU. josu.ruizdegauna@ehu.eus

Joxemari Sarasua Fernández. Licenciado en Matemáticas y Doctor en Didáctica de las Matemáticas**.** Profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de San Sebastián. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU. joxemari.sarasua@ehu.eus

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 133-149

Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º ESO.

Maria del Rocío Álvarez Esteban, Lorenzo J. Blanco Nieto

Fecha de recepción: 06/12/2012
Fecha de aceptación:20/10/2015

Resumen	El trabajo se centra en la evaluación, como organizador del currículo investigado y cuyo desarrollo ha cambiado muy poco en la educación matemática. Se escoge el álgebra al ser un tema importante en secundaria. Se comienza analizando el estado actual de la cuestión y se desglosa el currículo actual, para analizar la coherencia de sus criterios de evaluación y sus contenidos. Se analizan cuatro libros de texto de los más utilizados, centrándose en los contenidos algebraicos, fundamentalmente en sus ejercicios. Se ha entrevistado a tres profesores de matemáticas de secundaria para profundizar en sus perspectivas sobre la evaluación y analizado sus exámenes para estudiar el tipo de preguntas. **Palabras clave**: evaluación, algebra, secundaria, exámenes
Abstract	This work focuses on evaluation, as an integral part of the curriculum, which isn't much researched and whose development in the class has changed very little in mathematical education. Algebra is chosen for being an important topic in secondary education. We analyze the current state of it, and how the present curriculum develops it in order to study if its evaluation rules are consistent with its contents. Four textbooks are analyzed, focusing on algebraic contents, mainly in their exercises. Three Math teachers are interviewed to discover their points of view about evaluation and their exams are analyzed. **Keywords**: evaluation, algebra, secondary school, exams.
Resumo	Este trabalho está centrado na avaliação, como um organizador do currículo investigado e cujo desenvolvimento em aula pouco se tem modificado. O tema escolhido foi a álgebra, já que se trata de um conteúdo muito importante no 3º ciclo do ensino básico. Começamos por analisar o estado atual desta questão e esmiuçamos o atual currículo, de forma a analisar a coerência dos seus critérios de avaliação em relação aos conteúdos. Examinámos os quatro manuais mais utilizados, centrando nos conteúdos algébricos e nos exercícios apresentados. Foram entrevistados três professores para aprofundar as suas perspectivas sobre a avaliação e também foram analisados os exames. **Palavras Chave:** avaliação, álgebra, ensino básico, exames

1. Introdución

1.1. Acerca de la introducción al álgebra

Quizá una de las mayores dificultades que encuentra el alumno al iniciar su andadura en la Educación Secundaria en la asignatura de Matemáticas sea su iniciación al Álgebra. Durante toda la educación primaria los alumnos han tenido pocos referentes de este tipo. Y ello, a pesar de las posibilidades de las matemáticas en primaria para hacer actividades que pudiéramos considerar dentro del pre-álgebra.

Diferentes autores nos hablan de la dificultad del "paso de los números a las letras" (Enfedaque, 1990, Palarea y Socas, 1994), en los que señalaban algunos aspectos que desde la experiencia docente parecen no haberse superado. El Álgebra "... es una fuente de confusión y actitudes negativas considerables entre los alumnos" (Informe Cockcroft, 1982). Haetinger y Ketterman, (2002) señalan que el álgebra es una de las partes que más fobias y dificultades plantea a los alumnos.

La realidad es que actualmente muchos estudiantes siguen considerando el álgebra como un herramienta difícil de usar, poco fiable e innecesaria, por lo que la evitan en la medida de lo posible. Todo esto hace que sea una de las partes de las Matemáticas donde más errores se cometen, propiciando estudios que intentan averiguar el origen de dichos errores (Gallego, 1995) así como propuestas para el aula con el objetivo de frenar dichos errores (Palarea y Socas, 1994).

El Álgebra es uno de los bloques del Área de Matemáticas presentes en el actual currículo de la ESO, en particular en el del primer curso. Pese a ello, es un tema que genera polémica. Aun siendo uno de los bloques más importantes de la Secundaria, hay un grupo de profesores que lo considera de un nivel elevado e innecesario para la vida cotidiana, opinando que solo debería ser estudiada por estudiantes de un mayor nivel y en cuanto que una asignatura o estudio lo requiera (Steen, 1992); como contrapartida, hay autores que consideran que el álgebra en la educación primaria ayuda a los alumnos a desarrollar su potencial (Lins y Kaput, 2004). En la última modificación que sufrió el currículum extremeño, el álgebra pasó a ser un bloque específico (anteriormente no era un bloque como tal, encontrándose dentro del bloque de Números y Operaciones).

1.2. La evaluación en Matemáticas

La evaluación es uno de los organizadores del currículo menos trabajado desde el punto de vista de la investigación. Sin embargo, con las evaluaciones el profesor selecciona y dota de sentido a unos contenidos y objetivos, y los restantes difícilmente dejarán poso en los alumnos (Goñi, 2000; Cárdenas, Gómez y Caballero, 2011). Y, por otra parte, lo que el profesor evalúa condiciona el aprendizaje de los alumnos, dado que éstos se centran en asimilar los conceptos que el profesor evaluará (Lester, y Kroll, 1991; Abraira, 1993; Gairín, Muñoz y Oller, 2012).

También debemos considerar la importancia de los materiales escolares, que son "recursos instruccionales importantes que caracterizan de alguna manera la enseñanza y el aprendizaje. La forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo) si admitimos que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender, y son además una de las principales fuentes de actividades y tareas" (García y Llinares, 1995, p. 104).

Por otra parte, resultados de investigaciones anteriores muestran las dificultades que tienen los docentes ante el cambio en la evaluación en el aula. Si bien los objetivos y contenidos sufren algunas modificaciones a medida que cambian los currículos (en parte también por los cambios que presentan los libros de texto para adecuarse a ellos), los criterios de evaluación son los que menos sufren dichos cambios y, en la mayoría de los casos, los instrumentos de evaluación no cambian durante toda la vida laboral de un docente (Colomina, Onrubia y Naranjo, 2000).

En este sentido, siguen siendo el uso de exámenes escritos, la libreta de clase y la corrección de los deberes en la pizarra los más utilizados para evaluar el contenido matemático en la enseñanza obligatoria (Barberá, 2000). Los alumnos suelen tener quejas sobre los instrumentos usados por sus profesores, dado que en algunos casos el único instrumento de evaluación es el examen escrito (Coll, Barberá y Onrubia, 1999) y teniendo en cuenta solo el resultado obtenido, ignorando todo el proceso llevado a cabo para la consecución de éste (Blanco, 1997).

Esta situación explicaría, por si sola, la necesidad de analizar las distintas pruebas que los profesores tienen en cuenta para la evaluación de sus alumnos.

Rico y Sierra (1991), estudiaron el perfil básico de ideas que predominan sobre qué es evaluar en Matemáticas en los docentes en esta materia. Y entre otros aspectos señalaba los siguientes: se evalúa para controlar; en Matemáticas es prioritario evaluar el conocimiento; las dificultades de la evaluación son debidas al evaluado o el criterio clave para evaluar el libro de Matemáticas es el contenido.

1.3. Análisis del currículo

En nuestro trabajo (Álvarez, 2011) hemos considerado del currículum de Secundaria de la Comunidad Autónoma de Extremadura (Decreto 83/2007, p. 7980-8102). En él, los contenidos del bloque de Algebra son los siguientes:

1. Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.
2. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.
3. Obtención del valor numérico de una fórmula o expresión algebraica dando valores a las letras que aparecen.
4. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

5. Utilización de la calculadora, el ordenador u otros medios para la comprobación de conjeturas y la evaluación de expresiones numéricas.

Entre los criterios de evaluación, encontramos el siguiente que se ajusta a nuestro tema de estudio:

5. Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, utilizar letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas como síntesis en secuencias numéricas, así como el valor numérico de fórmulas sencillas. Este criterio pretende comprobar la capacidad para percibir regularidades en un conjunto numérico y, cuando sea posible, expresar algebraicamente tal regularidad. Se pretende asimismo valorar el uso del signo igual y el manejo de la letra en sus diferentes acepciones. Son aspectos básicos en este criterio la capacidad para utilizar letras que representen cantidades y para obtener valores numéricos a partir de fórmulas o expresiones que representen situaciones significativas para el alumno.

Dado que el currículo debe ser la referencia fundamental para el trabajo docente de los profesores de secundaria y para los libros de texto, nos parece propio comenzar haciendo algunas observaciones sobre el grado de coherencia interna que el currículo tiene. A este respecto, podemos observar algunas lagunas como la que exponemos a continuación.

Así, uno de los contenidos del bloque de álgebra es "Traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa…"; Pues bien, observamos que el único criterio de evaluación relacionado con este bloque consiste en que los alumnos deben "utilizar las letras para simbolizar distintas cantidades y obtener expresiones algebraicas". Como vemos, el "viceversa" del contenido no es evaluado, es decir, es omitido el paso de lenguaje algebraico al natural.

Si nos fijamos en el contenido "Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana", difícil caballo de batalla del profesor dada la reticencia de los alumnos al uso del álgebra, comprobamos que no posee ningún criterio de evaluación. Es más un contenido actitudinal, pero el currículo no ofrece ningún recurso en forma de herramienta de evaluación o criterio para poder evaluar si se está adquiriendo.

Es decir, podemos afirmar que en el currículo actual la evaluación está poco considerada al encontrarse algunos desajustes entre sus contenidos y criterios de evaluación y al aportar pocas herramientas concretas de evaluación para los profesores.

2.- Metodología

Los aspectos considerados en el apartado anterior nos indican la conveniencia de profundizar en los criterios e instrumentos de evaluación que los profesores utilizan en sus clases en la iniciación al álgebra.

Nos sugieren la necesidad de analizar los libros de texto, al ser el principal referente que los profesores utilizan para su actividad profesional (Fernández Muñoz, 1994) y los exámenes que son considerados por los alumnos e investigadores como el principal instrumento de evaluación.

Por ello, en nuestro trabajo (Álvarez, 2011) nos hemos planteado los siguientes ***objetivos***:

- Describir y analizar los exámenes utilizados por los profesores de secundaria para evaluar la introducción al álgebra
- Analizar los libros de texto usuales en la Comunidad Autónoma de Extremadura en relación a los contenidos de iniciación al álgebra, problemas algebraicos propuestos y actividades de evaluación.
- Analizar la imagen del profesor para justificar su actuación en el aula, en referencia a la evaluación.
- Comparar los elementos (contenidos, objetivos y criterios de evaluación) utilizados por los profesores con los que se indican en el currículo.

La ***población*** estudiada está compuesta por tres profesores de Matemáticas de centros extremeños. Son profesores jóvenes, licenciados en Matemáticas, con similar experiencia (unos 3 años), dos de ellos en centros públicos, en pueblos de 4.000 y 7.000 habitantes, y un tercero en un centro concertado, en un pueblo de 13.000 habitantes. El nivel estudiado será el primer curso de la ESO.

Hemos analizado documentos del curso 2010 – 2011, y debemos señalar que no hubo ningún aviso de que sus exámenes iban a ser fruto de estudio. Es decir, el comportamiento tanto de profesores como de alumnos a la hora de hacer estas pruebas fue el usual dentro de la marcha del curso.

El proceso de selección de estos profesores partió de la población disponible; siendo una muestra no probabilística.

En nuestro trabajo hemos utilizados diferentes instrumentos según la naturaleza de la fase de la investigación.

Así, para analizar los libros de texto hemos utilizado el esquema de Pino y Blanco (2008) representado en el Cuadro 1, diseñado para analizar las actividades propuestas en libros de Matemáticas y que presenta cuatro categorías: tipo de problemas, el soporte, el contexto y la tarea matemática

TIPO DE PROBLEMA

- Reconocimiento y Algorítmicos-Repetición.
- Traducción simple o compleja.
- Situaciones reales.
- Investigación matemática.
- Otros.

SOPORTE

- Escrito.
- Tabla.
- Gráfico.
- Imagen.

CONTEXTO

- Efectivos.
- Simulación.
- Matemático.

TAREA MATEMATICA

- Identificar.
- Completar.
- Aplicar.
- Investigar.

Cuadro 1. Categorías para el análisis de los problemas, (Pino y Blanco, 2008).

Para el análisis de los exámenes realizados por los profesores participantes para evaluar el tema de álgebra, hemos considerado el análisis de contenido, a partir de los conceptos y procesos matemáticos considerados y del tipo de actividad sugerida.

Hemos realizado entrevistas semiestructuradas a los participantes en la investigación, a partir del análisis de los exámenes y de los libros de texto.

Como guía para las entrevistas hemos utilizado el estudio realizado por Rico y Sierra (1991), que se realizó a 59 profesores españoles de distintos niveles y contenía algunas de estas preguntas:

- ¿Qué debe ser objeto de evaluación?
- ¿Por qué evaluar a los alumnos?
- ¿Quién debe evaluar a los alumnos?
- ¿Qué instrumentos se deben utilizar?¿Cómo deben expresarse los resultados de la evaluación?¿Qué aspectos deben evaluarse en Matemáticas?
- ¿Qué dificultades presenta la evaluación en Matemáticas?¿Qué criterios consideras importantes para valorar el libro de Matemáticas?¿Qué aspectos deben evaluarse en un profesor de Matemáticas?
- ¿Qué otros aspectos no considerados anteriormente se pueden valorar en un clase de Matemáticas?**3.- Análisis. Resultados. Discusión**

3. Análisis de los libros de texto

La importancia de este análisis radica en el uso que los profesores hacen de los libros de texto, que los convierten en mediadores entre el currículo y el aula. En muchos casos los libros son el único nexo de unión entre éstos.

Hemos seleccionado 3 libros de texto de amplia difusión en España (SM, Anaya y Oxford) y un cuarto escogido por su carácter innovador (Marfil), centrándonos en el tema de Introducción al Álgebra y Ecuaciones de primer curso de la ESO.

Dos de ellos plantean actividades relacionadas con conocimientos previos al inicio de la unidad. Además, hemos analizado el contenido buscando nociones algebraicas en los restantes temas. En dos de ellos podemos encontrar usos del mismo antes del tema en cuestión; después del tema de álgebra ya es más normal usar las nociones ya explicadas.

Respecto a los objetivos del tema de álgebra, ninguno ofrece un listado con los objetivos a cubrir en la unidad didáctica. Sin embargo, todos los libros cubren los objetivos planteados en el currículum extremeño de 1º de la ESO de Matemáticas en relación con el álgebra, a excepción del objetivo “Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos…”, al que ninguno hace mención ni ninguna de sus actividades va encaminada a cubrirlo.

Acerca de los contenidos, también ocurre lo mismo; el contenido de “Utilización de calculadora, ordenador u otros medios…” es omitido por todos los libros. El resto, cubre con todos los contenidos, con la única discusión en el contenido “Obtención del valor numérico de una fórmula…” que solo es explicado en la mitad de los textos.

En todos los textos encontramos una gran batería de ejercicios y/o problemas para los alumnos, al igual que ejemplos resueltos para aclarar alguno de los contenidos propuestos. Añadiremos también, como dato, que tres de los libros contenían apartados dedicados a los errores típicos del álgebra, para que los alumnos los prevengan y poder evitarlos.

El instrumento del Cuadro 1, nos ha permitido realizar un análisis más exhaustivo de los ejercicios y problemas propuestos (Gráfico 1). Así, respecto al tipo de problemas, los presentados son mayoritariamente de las categorías “ejercicios de reconocimiento y de cálculo algorítmico” (Blanco, 1993) y “problemas de traducción simple o compleja”; los problemas del tipo investigación y de situaciones reales son muy escasos. La idea que subyace es repetir algoritmos para asentar el procedimiento, y a lo más problemas sencillos (sin complicar demasiado). Apenas hay otros problemas tipo puzzle o de historias matemáticas.

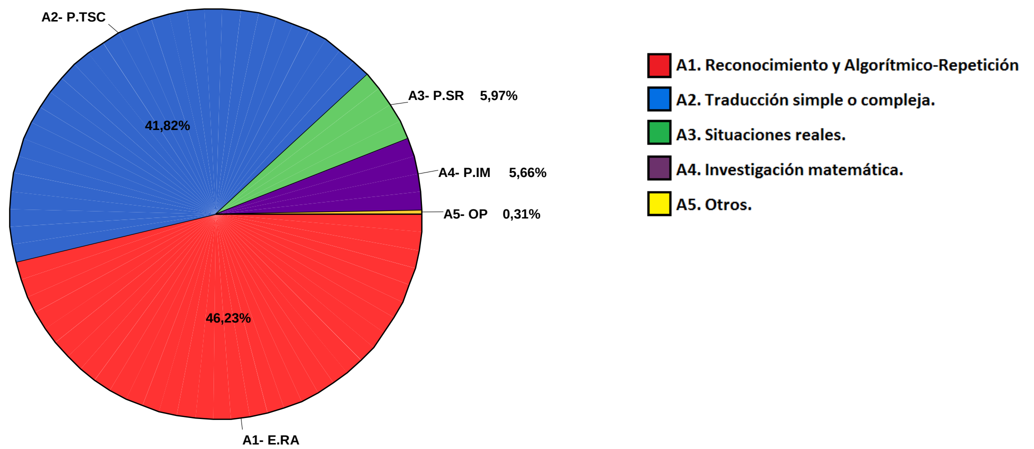


Gráfico nº 1: Tipos de problemas en los libros de texto de 1º de ESO

En cuanto a la forma de presentación de los enunciados, más del 85 % de los enunciados están dados solo con lenguaje natural o simbólico matemático, quizá con la idea de reunir muchos ejercicios en poco espacio.

Las imágenes, que aparecen en poco más de un 8%, por lo general sirven para agregar "vistosidad" a los textos, pero no dan ni sugieren información matemática significativa acerca del problema que se presenta. En ningún caso existe un problema donde todo el enunciado esté en una imagen.

Cerca del 73% son simples ejercicios mecánicos sin contexto o tienen contexto matemático, reforzando la idea de que el objetivo principal de los libros de texto es adquirir procedimientos mecánicos a partir de la repetición (de cálculos, obtención de soluciones, etc). En un 22% se tratan de problemas con un contexto efectivo, dejando los contextos sociales ajenos al alumno solo un 5%.

La tarea matemática que permite resolver el problema es en un alto porcentaje la actividad de aplicar algún procedimiento o algoritmo conocido, de modo bastante repetitivo, como apreciamos en el Gráfico nº 2. El resto corresponde a tareas de identificar e investigar, y solo una pequeña parte corresponde a tareas de completar.

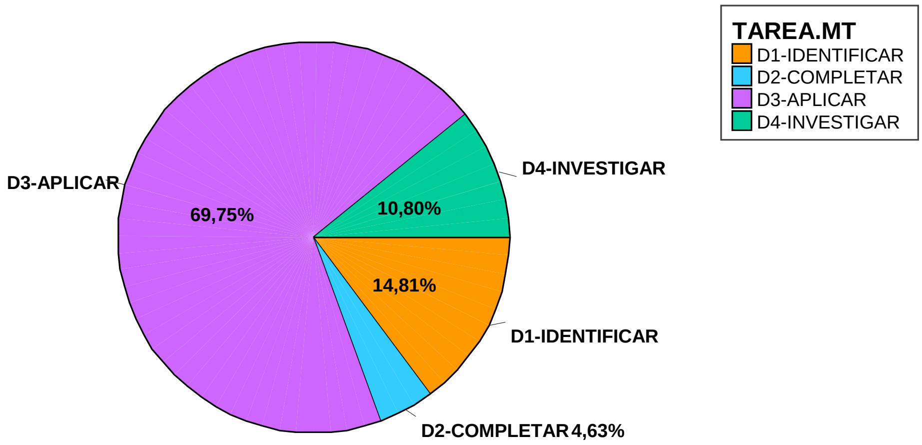


Gráfico nº 2: Tipos de tarea matemática en los libros de texto de 1º de ESO

4. Análisis de los exámenes

Presentamos el análisis individualizado de las pruebas de evaluación de los tres profesores, correspondientes con la unidad de Introducción al Álgebra.

En primer lugar, analizaremos los cuatro exámenes (todos de modalidad individual y escrita) realizados por un grupo de 26 alumnos del **profesor A**. Durante la segunda evaluación, dicho profesor realizó dos exámenes de álgebra.

Con la media de los exámenes, y teniendo en cuenta otros instrumentos de evaluación, se agrupó a los alumnos para realizar un último examen en la evaluación. Los alumnos con la calificación mayor o igual a 5 realizaron un examen de repaso (cuyo examen hará media con la nota que llevan en la evaluación) y los alumnos con la calificación menor que 5 realizaron un examen de recuperación (de mayor dificultad debido a que no habían demostrado la destreza suficiente anteriormente, y cuya nota sería definitiva en la evaluación).

Los resultados los podemos observar en el siguiente cuadro:

Prueba	Nº alumnos	Aprobados	Suspensos	Nº preguntas
Álgebra	**26**	**13**	**13**	**4**
Ecuaciones-problemas	**26**	**14**	**12**	**4**
Trimestral – recuperación	**7**	**2**	**5**	**6**
Trimestral – repaso	**19**	**16**	**3**	**6**

Cuadro nº 2: Resultados obtenidos por el profesor A.

En el *examen de álgebra,* tres de las preguntas son cuestiones procedimentales y una de tipo conceptual. Respecto al tipo de problemas, podemos decir que los cuatro ejercicios son de reconocimiento o algorítmicos-de repetición y su contexto es matemático en todos ellos. Tres de sus tareas matemáticas son de aplicar, y la restante de identificar. Por último, el nivel cognitivo es bajo en todas las preguntas.

Respecto al segundo examen de *ecuaciones y problemas*, todas sus preguntas son de tipo procedimental. En cuanto al tipo de problemas, dos son de traducción simple o compleja, uno de reconocimiento y un último problema sobre situaciones reales. Acerca del contexto, en dos de ellos es matemático y en las otras dos se trata de un contexto efectivo. Las tareas matemáticas a realizar son mayoritariamente de aplicar, quedando solo una de identificar. Para finalizar, el nivel de exigencia es bajo en las dos primeras preguntas, medio en una tercera y alto en la última, para motivar a los alumnos de más nivel a conseguir el sobresaliente.

Los dos exámenes de *recuperación y de repaso* de la segunda evaluación están formados por 6 preguntas, una de las cuales es un contenido conceptual y el resto son procedimentales. El examen de *recuperación* tiene 4 problemas de reconocimiento o algoritmo-repetición, uno de situaciones reales y el último de otros problemas. El contexto es matemático en 5 de ellas y un último de simulación. Las tareas matemáticas exigidas son la mitad de aplicar, habiendo una de cada una de las restantes. El nivel cognitivo en 4 de ellas es bajo, una se corresponde con nivel medio y la última de nivel alto.

El examen de *repaso,* tiene 4 problemas de reconocimiento o algoritmo-repetición, uno de traducción simple o compleja, y uno de otros problemas. El contexto es matemático en la mayoría, quedando una última con contexto efectivo. Respecto a las tareas matemáticas, en 4 se trata de aplicar, una de identificar y una última de completar. El nivel cognitivo es bajo en 4 de ellas, siendo las otras dos de nivel medio.

Para finalizar, indicaremos que de las 26 personas que forman el grupo de alumnos del profesor A, tan solo 5 suspendieron la segunda evaluación.

El **Profesor B** tenía un grupo de 13 alumnos de 1º de la ESO y realizó cuatro exámenes en el tema de álgebra, todos realizados individualmente por los alumnos, cuyos contenidos son todos de tipo procedimental.

El primero fue utilizando un programa del ordenador para pasar test a los alumnos, principalmente sobre el valor numérico de expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones. Posteriormente realizó una actividad en clase donde se debían resolver ecuaciones de primer grado. En tercer lugar, realizó un examen escrito dedicado exclusivamente a problemas. Por último, y solo con los alumnos que se encontraban suspensos tras las pruebas anteriores, realizó un examen de recuperación sobre todo el contenido del tema. Los datos acerca de los resultados obtenidos se pueden observar en el siguiente cuadro:

Prueba	Nº alumnos	Aprobados	Suspensos	Nº preguntas
Ordenador	**13**	**3**	**10**	**78**
Actividad clase	**13**	**7**	**6**	**20**
Problemas	**13**	**6**	**7**	**8**
Recuperación	**5**	**0**	**5**	**7**

Cuadro nº 3: Resultados obtenidos por el profesor B.

La primera prueba, *con el ordenador,* estaba compuesta por una batería de 78 preguntas de reconocimiento y algorítmicos-repetición, todas con su enunciado en soporte escrito y contexto matemático. La tarea matemática común es la de aplicar. La exigencia cognitiva es baja al ser simple aplicación de procedimientos algorítmicos aprendidos.

La actividad realizada en *clase*, que consistía en resolución de ecuaciones, tiene las mismas características que la anterior (soporte escrito, contexto matemático, tarea de aplicar…).

El soporte para el examen de *problemas* era escrito, pero su contexto se repartía entre contexto efectivo (4 de ellos), simulación (2) y contexto matemático (2). Los problemas se dividen en: 5 de traducción simple o compleja, y 3 de situaciones reales. La tarea matemática en dos de ellos es de investigar, y los otros seis de aplicar. El nivel cognitivo es medio en 3 de ellos, y bajo en el resto.

Finalmente, la actividad de *recuperación,* formada por 7 ejercicios, contenía 6 de ellos de reconocimiento o algorítmico-repetición, y el último de traducción simple o compleja, todos en soporte escrito. El contexto de uno de ellos es de simulación; el resto tiene contexto matemático. Las tareas matemáticas se dividen en: 2 de identificar, 4 de aplicar y la última de investigar. El nivel cognitivo de 6 de ellas es bajo, quedando una de nivel medio.

Cabe resaltar que el profesor B solo valora ejercicios mal (con puntuación 0) o ejercicios bien (con puntuación 1’25, al tener el examen de problemas 8 preguntas todas con la misma valoración). No existe término intermedio en la puntuación, ni siquiera en casos de alumnos que plantean correctamente los datos y la ecuación pero tienen algún pequeño error despejando términos o en algún cálculo. Esto refuerza las concepciones que suelen tener los alumnos sobre muchos profesores de Matemáticas, “Su recuerdo más común es haber sido evaluados solo en función del resultado final del problema, sin evaluar en la mayoría de los casos el proceso seguido, ni su implicación en los mismos" (Blanco, 1997).

El **profesor C** solo se realizó una única prueba individual, en la unidad de álgebra, sin posibilidad de recuperación. Dicha prueba constó de 9 preguntas, con contenido mayoritariamente procedimental (quedando una pregunta con contenido conceptual). El examen contenía una pregunta en soporte tabla, siendo el resto en texto escrito. El tipo de problemas que encontramos era en gran parte ejercicios de reconocimiento o algorítmicos-repetición, quedando 3 de traducción simple o compleja. El contexto en una de las preguntas es de contexto efectivo, el resto (8) son de contexto matemático. La tarea matemática a realizar se reparte entre identificar (1), completar (1) y aplicar (7). La exigencia cognitiva es baja en 7 casos, quedando otros 2 con exigencia media. Los resultados obtenidos por el grupo de 26 alumnos podemos observarlo en el siguiente cuadro:

Prueba	Nº alumnos	Aprobados	Suspensos	Nº preguntas
Examen unidad	**26**	**12**	**14**	**9**

Cuadro nº 4: Resultados obtenidos por el profesor C.

Esta unidad la suspendieron 14 personas, y el profesor C decidió no realizar ninguna recuperación; mediante media con otras unidades terminaron suspensos un total de 10 alumnos, recuperando 4 alumnos la evaluación.

Presentamos un cuadro resumen de los resultados de los tres profesores:

En resumen:

<table>
<tr><th>Profesor:</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>Nº Pruebas:</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Tipología:</td><td colspan="3">Algorítmico-Repetición / Traducción simple o compuesta</td></tr>
<tr><td>Soporte:</td><td colspan="3">Escrito</td></tr>
<tr><td>Contexto:</td><td colspan="3">Matemático</td></tr>
<tr><td>Tarea matemática:</td><td colspan="3">Aplicar algoritmos</td></tr>
<tr><td>Distinción:</td><td>Nivel más alto</td><td>Uso TIC's en evaluación

Corrección B/M</td><td>Devuelve exámenes corregidos</td></tr>
</table>

Cuadro nº 5: Comparativa de los profesores respecto a los exámenes.

5. Análisis de las entrevistas

Preparamos una entrevista semiestructurada, siguiendo a Woods (1987), que fue grabada en audio. Nos centramos en la evaluación, en general y, específicamente, en la evaluación realizada en la unidad de álgebra de 1º de ESO.

Comenzamos con unas preguntas de su experiencia docente, luego otras sobre la evaluación en general (Rico y Sierra, 1991), y por último, aquellas centradas en las pruebas realizadas en la unidad de álgebra. Señalamos algunos resultados de carácter general:

Todos consideran que el objeto de evaluación deben ser los contenidos explicados por el profesor. Ven importante la evaluación como medida de los conocimientos y destrezas adquiridos por los alumnos de una cierta unidad.

También hay coincidencia al asegurar que no suelen mirar contenidos y objetivos, y menos aún criterios de evaluación, a la hora de preparar un examen.

Acerca de los instrumentos para la evaluación, todos coinciden en la prioridad que debe dársele a la prueba escrita, por su mayor objetividad, aunque ésta no debe ser el único instrumento usado. No obstante, tanto de las observaciones de los profesores como de sus manifestaciones en las entrevistas, podemos señalar que el principal instrumento de evaluación de los profesores es el examen escrito, confirmando la aportación de Barberá (2000), aunque no siendo el único instrumento utilizado. Los recursos para encontrar las preguntas de examen son variados: el libro, internet, el CD que adjunta el libro del profesor o inventados.

En relación al uso de las TIC’s, hay diversidad de opinión, aunque todos coinciden sobre el uso de la calculadora: opinan que su uso diario, en el curso de 1º de ESO, provocaría un retraso en el cálculo mental, con lo que la prohíben tanto en clase como en los exámenes.

En relación al uso del libro de texto el profesor C se guía por él para dar sus clases. Los profesores A y B no lo valoran tanto y se limitan a usarlo para ejercicios o alguna lectura aislada conveniente, probablemente porque no están contentos con los libros actuales. El profesor A dice que le gustaría una combinación de claridad de explicaciones y profundidad en contendidos, y por el momento “*se pasan en una cosa o en otra*”; el profesor B busca un libro con contenido teórico escueto y una gran batería de problemas. El profesor C sí valora más los libros actuales, en particular los apartados de cálculo mental, y que existen muchos problemas con contextos cercanos al alumno.

Reseñamos un aspecto puntual en relación a la influencia del libro de texto. Dado que el libro usado por los profesores B y C no contenía el concepto de valor numérico ni ejercicios para su cálculo, se les preguntó si lo explicaban a pesar de ello. El profesor B lo daba de manera formal e incluso lo evaluó en la práctica de ordenador, pero el profesor C no explicó el concepto como tal; simplemente lo había utilizado para comprobar la solución de alguna ecuación tal y como se recoge en el libro, reforzando la idea anterior de que seguía el libro como guía.

El tiempo dedicado a la unidad del álgebra varía de unos profesores a otros. Así, el profesor A dedica unas 25 sesiones (sobre mes o mes y medio) realizando dos exámenes (más el global de evaluación). El profesor B dedica casi toda la tercera evaluación con tres pruebas (más el global, que solo hicieron los de recuperación), mientras que el profesor C dedicó unas tres semanas al tema, realizando un único examen.

Los profesores B y C aseguran que realizaban ejercicios en clase como los de los exámenes, y coinciden en que todos son de ese tipo, o incluso los mismos, por ser primero de la ESO. El profesor A argumenta que debe existir un problema con mayor profundidad para los alumnos que quieran optar al sobresaliente, donde se compruebe "*si han asimilado los conceptos como para llevarlos a un nuevo terreno*".

También hay diferente actuación en el aula posterior a los exámenes. Así, el profesor A lo corrige en la pizarra para que los alumnos corrijan sus errores; el profesor C les indica en los exámenes devueltos sus errores y cómo se deberían hacer los ejercicios. En cambio, el profesor B, dada su experiencia, considera que corregir las preguntas en la pizarra es un acto inútil dado que los alumnos no tienen ninguna motivación para mejorar. Si se observase un error común en la mayoría de los alumnos, el profesor A dedicaría algunas sesiones más a solventarlo, en cambio los profesores B y C prevé los errores más típicos e intentan corregirlos antes del tema o durante el mismo, con ejercicios que evitan los errores más comunes cometidos otros años.

La presentación de los resultados de los exámenes, no suele ser para los profesores motivo de penalización.

La evaluación de la teoría no es importante para el profesor B, mientras que los profesores A y C suelen reservar, habitualmente, una pregunta designada para ello en los exámenes.

En relación a la evaluación de los problemas, para que el alumno obtenga la totalidad de la puntuación, los profesores valoran que, aparte de la solución correcta, haya un buen planteamiento y una buena expresión de la solución. Resaltan que un problema no tiene que estar "bien o mal", sino que puede haber puntuaciones intermedias. En el caso de que un alumno obtenga la solución correcta por métodos distintos en clase, los profesores coinciden que puntuaría pero no con toda la nota posible.

En relación a las dificultades de la evaluación, hay diversidad de opiniones: dificultades en no evaluar todo lo que el alumno aprende (porque no lo transmita en el examen), dificultades a la hora de controlar el tiempo necesario para que los alumnos puedan responder suficientemente a los problemas, y una tercera opinión que considera que "*en matemáticas es fácil evaluar, en otras asignaturas es mucho más complicado*".

Por último, la valoración de contenidos-procedimientos-actitudes es distinta en cada profesor, aunque todos dan el peso principal a los procedimientos. El profesor C le da casi la totalidad, con menos importancia los conceptos, utilizando las actitudes solo al final en casos de redondeo. Los profesores A y B sí que le tienen asignados porcentajes a cada cosa; el profesor A le tiene (respectivamente) 12%-78%-10%, y el profesor B no considera los contenidos, dando a los procedimientos un 80% y a la actitud el resto.

Profesor:	**A**	**B**	**C**
Principal instrumento	**Examen escrito**		
TIC's.	**Ordenador sí. Calculadora NO (empeora cálculo).**		
Evaluador	**Interna. Necesidad de evaluación externa (objetiva).**		
Importante en libro:	**Claridad y profundidad**	**Gran batería de ejercicios**	**Como actuales**

Evaluación contenidos:	Mayor importancia de contenidos procedimentales

Cuadro nº 6: Comparativa de los profesores respecto a las entrevistas.

6. Conclusiones. Implicaciones.

De este estudio y análisis realizados, podemos extraer dos tipos de conclusiones, unas que podríamos considerar como internas o específicas de este trabajo, y otras a manera de recomendaciones. Entre las primeras, se pueden considerar las siguientes:

- El currículo extremeño presenta desajustes en sus organizadores, al considerar algunos contenidos que deberían ser evaluados y no señalar algún criterio de evaluación asociado. Además de los contenidos específicos señalados en el apartado 1.3 destacamos la ausencia de pautas y/o herramientas de evaluación para los contenidos actitudinales.

- Sobre el tema de álgebra, los profesores no tienen en cuenta los criterios de evaluación a la hora de elaborar el examen; a lo más, miran los contenidos y objetivos para preparar la unidad, o bien se guían por el libro para su desarrollo. Los ejercicios de exámenes suelen estar realizados anteriormente por los alumnos en clase, incluso algún profesor indica que en caso de que un ejercicio se atragante a los alumnos, es eliminado de los exámenes para evitar el fracaso, lo que indica comodidad del profesor ante una dificultad.

- La mitad de los libros analizados presentan contenidos algebraicos durante prácticamente la totalidad de sus temas; antes, durante y después del tema de iniciación al álgebra. Los problemas encontrados en los libros, en más de un 70%, se restringen a repetición de situaciones explicadas para memorizar algoritmos. Se observan muy pocos ejercicios donde al alumno se le planteen situaciones nuevas, donde tenga que investigar. Además, los enunciados son casi en la totalidad escritos, apoyándose solo de imágenes para ilustrar los ejercicios, nunca aportando información necesaria para la resolución del problema.

- El principal instrumento de evaluación de los profesores sigue siendo el examen escrito, aunque ciertamente en ninguno de nuestros casos es el único instrumento. Los profesores siguen dando prioridad al examen escrito por su objetividad y facilidad para realizarlo todo al mismo grupo, corregirlo y sus posteriores reclamaciones (si fuese necesario). Además, tiene utilidad para que los alumnos conozcan sus errores y poder corregirlos.

- Acerca de la evaluación en general, los profesores evalúan para controlar lo aprendido y utilizando los instrumentos usuales.

- La importancia del libro de texto, para los profesores entrevistados, radica en la claridad de expresión y la cantidad de ejercicios disponibles, no tanto en su contenido.

- A pesar de ser uno de los contenidos del currículo oficial de 1º de la ESO para el bloque de álgebra, el uso de la calculadora es desaconsejado por todos los profesores que colaboraron con este estudio; es más, su utilización en esta unidad estaba prohibida tanto durante las clases como en los exámenes (justificando en todos los casos, que retrasa el ejercicio del cálculo mental de los alumnos).

Como implicaciones o recomendaciones que podamos hacer con las conclusiones de nuestro trabajo, enumeramos las siguientes:

- Parece oportuna una revisión del currículum, analizando las conexiones entre los diferentes organizadores del currículo, para evitar lagunas como las señaladas, y más específicamente en relación a los criterios de evaluación de los diferentes contenidos y competencias.

- Al ser el libro el principal recurso del profesor deberían procurarse una mayor adecuación al currículum. Así, por ejemplo, en relación a los problemas propuestos sería conveniente incluir con mayor profusión actividades de las categorías de investigación matemática y con enunciados referidos a contextos más variados y del entorno del alumno.

- Los profesores deberían tener ejercicios de "feedback", donde se detengan a analizar cómo están haciendo las cosas, y no limitarse a la rutina adquirida. En muchos casos, los alumnos que criticaban los métodos de sus profesores terminan convirtiéndose en imágenes de ellos, no por propia convicción, sino por lo aprendido. Sería conveniente que los profesores jóvenes no perdieran su capacidad de innovación, probando nuevos instrumentos de evaluación, nuevas tecnologías en el aula, etc, y los organismos gobernantes deberían facilitar en la medida posible el desarrollo de los mismos.

Bibliografía

Abraira, C. (1993). *Efectos de la evaluación formativa en alumnos de matemáticas de E.U. de profesorado de E.G.B*. Tesis Doctoral. Universidad de León.

Alvarez, R. (2011). *Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º de ESO*. Trabajo Final de Máster. MUI interuniversitario de enseñanza y aprendizaje de las Ciencias experimentales, sociales y matemáticas. Universidad de Extremadura.

Anzola, M.; Bujanda, M.P.; Mansilla, S. y Vizmanos, J.R. (2006). *Matemáticas 1º ESO Esfera*. Madrid: Ediciones SM.

Barberá, E. (2000). Los instrumentos de evaluación en matemáticas. *Aula de Innovación Educativa nº 93-94*, 14-17

Blanco, L. J. (1993) Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon nº 25,* 49-60. Universidad de Extremadura.

Blanco, L.J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Editorial Universitas.

Blanco, L.J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quandrante. Revista Teórica e De Investigación. v. 6(2)*, 45-65.

Botella, L.; Millán, L.; Pérez, P. y Cantó, J. (2007). *Matemáticas 1º*. Alcoy: Marfil.

Cárdenas, J.A.; Gómez, R. y Caballero, A. (2011) Algunas diferencias entre la práctica y la teoría al evaluar la resolución de problemas en Matemáticas. *12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 53-62.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. MEC. Madrid.

Colera,J. y Gaztelu, I. (2007). *Matemáticas 1.* Madrid: Anaya

Colomina,R.; Onrubia, J. y Naranjo,M. (2000). Las pruebas escritas y la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria*. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado.* 3 (2).

Coll,J.; Barberá,E. y Onrubia, J. (1999). Analyzing mathematic written exams in elementary and secondary schools. *Actas de la 8th European Conference of the Association for Research on Learning and Instruction.* Agosto. Göteborg.

Fernández Muñoz, R. (1994). Modelo de Formación del profesor centrado en la Interacción comunicativa, en Docencia e Investigación, *Revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Toledo.* Año XIX, 55 -88.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En Estepa, A.; Contreras, A.; Deulofeu, J.; Penalva, M.C, y García, F,J, y Ordóñez, L. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI. Actas de la XVI SEIEM.* 261-274.

Gallego, J.L. (1995). Errores conceptuales y de procedimiento en las matemáticas elementales. *Epsilón, nº 33.* 261-264.

García, M. y Llinares, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum nº 10-11.* 103-11.

Goñi, J. (2000). La evaluación en el área de matemáticas. *Aula de innovación educativa, 93/94*, 6-9

Haetinger, C. y Ketterman, M.T. (2002). Una propuesta para la utilización de los esquemas previos operativos de los alumnos en la enseñanza del álgebra del 7º curso a partir de un estudio de caso. Bogota: *Tercer Encuentro Iberoamericano de Colectivos Escolares y Redes de Maestros que Hacen Investigación en la Escuela,* 1, 355-361.

Lester, K.L. y Kroll, D.L. (1991). Evaluation: a new vision. *Mathematics Teacher Vol 84 (4).* 276-284

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. Norwell: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*, 47-70.

MEC (2007). *Matemáticas. Secundaria Obligatoria*. DOE. Decreto 83/2007.

Palarea, M. y Socas, M.M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico*. Suma 16,* 91 – 98.

Pino,J. y Blanco,L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones 38.* 63-88.

Steen, L.A (1992). Does everybody need to study Algebra? Minnesota: *The Mathematics Teacher,* 85(4), 258-260.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas de la educación secundaria. En Rico, L. eta al. *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona. ICE/Horsoi. 125 – 154.

Rico, L. y Sierra, M. (1991). La Comunidad de Educadores Matemáticos. En Gutierrez, A. (ed.): *Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática.* Madrid: Síntesis. 11 – 58.

Rochera, M.J.; Colomina, R. y Barberá,E. (2001). Utilizando los recursos de la evaluación en matemáticas para optimizar los aprendizajes de los alumnos. *Investigación en la Escuela, 25.* 33 – 44.

Uriondo, J.L. (2007). *Matemáticas 1º Secundaria. Serie Trama*. Madrid: Oxford University Press.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.* Paidós-MEC. Barcelona.

Autores: 1. Mª del Rocío Álvarez Esteban. Licenciada en Matemáticas y Ciencias Estadísticas por la Universidad de Extremadura. Profesora de Matemáticas en Secundaria
rocioae@unex.es
2. Lorenzo J. Blanco Nieto.
Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemáticas. Dpto de Dtca. De las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura. Badajoz.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 150-165

Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales

Claudia Mariela Zang, Gretel Alejandrina Fernández von Metzen, María Natalia León

Fecha de recepción: 13/03/2013
Fecha de aceptación:02/11/2015

Resumen

Las investigaciones en educación señalan que tradicionalmente se enfatiza el estudio de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque algebraico, lo que demerita su abordaje cualitativo y potencialidad para modelar fenómenos. Este trabajo ofrece algunas reflexiones sobre el proceso de modelación como herramienta para la construcción de conceptos matemáticos. Éstas se derivan del análisis e implementación de secuencias didácticas, concebidas en el marco de la Ingeniería Didáctica, destinadas a estudiar la disponibilidad en los alumnos de algunos contenidos matemáticos ya estudiados. También se exponen los resultados de la experiencia.
Palabras clave: modelado, Ingeniería Didáctica, ecuaciones diferenciales

Abstract

Research in education indicate that traditionally emphasizes the study of differential equations from the algebraic approach, which detract their qualitative approach and their potential to modeling phenomena. This paper offers some reflections on the process of modeling as a tool for the construction of mathematical concepts. These are derived from the analysis and implementation of teaching sequences, conceived as part of the Didactic Engineering, designed to study the availability in students some mathematical content already studied. It also presents the results of the experience.
Keywords: Modelling. Didactic Engineering, differential equations

Resumo

Pesquisas em educação indicam que, tradicionalmente, se enfatiza o estudo de equações diferenciais em uma abordagem algébrica o que prejudica a sua abordagem qualitativa e potencialidade para modelar fenômenos. Este artigo oferece algumas reflexões sobre o processo de modelagem como uma ferramenta para a construção de conceitos matemáticos. Estes são derivados da análise e implementação de sequências de ensino, concebidas como parte da Engenharia Didática, destinadas para estudar a disponibilidade dos alunos de alguns conteúdos matemáticos já estudados. Também apresenta os resultados da experiência.
Palavras Chave: Modelagem, Engenharia Didática, equações diferenciais

1. Introducción

Las ED son una poderosa herramienta para la construcción de modelos matemáticos, en los que se vinculan conceptos básicos estudiados en los primeros cursos de muchas de las carreras universitarias. Por esta razón, se ha decidido estudiar en qué medida los alumnos recurren a esos conocimientos básicos para la resolución de situaciones problemáticas en el contexto de las ED, examinar las estrategias que utilizan en la resolución de problemas, los obstáculos más comunes a los que se enfrentan~~,~~ y elaborar propuestas de enseñanza que les permitan resignificar sus saberes previos, haciéndolos evolucionar hacia conocimientos nuevos.

Para lograr tales fines, se decidió diseñar un proyecto de investigación titulado “Contenidos matemáticos básicos: ¿en qué medida son el recurso en los primeros aprendizajes de ecuaciones diferenciales?”. El presente escrito se deriva como parte del trabajo de indagación realizado en el marco de dicho proyecto.

Por otro lado, las investigaciones en educación referentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reportan las ventajas que ofrece la modelización matemática como un recurso para la enseñanza y el aprendizaje de dicha disciplina. Además, en virtud de que la modelización está estrechamente vinculada a la solución de problemas del mundo real, se entiende que la misma puede funcionar como elemento motivador y generador de situaciones de aprendizajes significativas para el alumno.

Las autoras del presente trabajo -docentes vinculadas a la enseñanza de ED en las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) y de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Argentina- han notado, en base a la observación y reflexión sobre las prácticas de enseñanza habituales en los cursos de ED, al análisis de actividades complementarias propuestas para ser realizadas con software matemático y en base al análisis de los programas de tales asignaturas, el poco espacio que se otorga normalmente a los problemas de modelización. Por tal motivo, surge la idea de incluir actividades que favorezcan la modelización de situaciones matemáticas y extra matemáticas en el desarrollo de las clases, entendida ésta como una práctica que implica la reelaboración e interpretación de modelos ya construidos por la comunidad científica, pero nuevos para el grupo de alumnos.

En este sentido, las actividades propuestas a los alumnos básicamente consistieron en suministrarles información que incluía una descripción general de la variación de algún fenómeno (físico, químico, biológico, económico, etc.) como así también una serie de hipótesis que lo explican. Se les encomendó la tarea de formular una expresión matemática que describa la situación, en ningún momento se explicitó que la expresión solicitada debía ser una ED que se ajustara a los datos dados. Para lograr la expresión solicitada debieron enfrentarse a la identificación y manipulación de variables y parámetros, probar para valores particulares de los parámetros incluidos en la expresión y luego realizar las eventuales generalizaciones y finalmente validar el modelo propuesto verificando si predice la información con la que se cuenta.

La prueba se realizó en el comienzo del estudio de las ED en la asignatura Análisis IV de los profesorados en Matemática y en Física de la FCEQyN-UNaM. Se seleccionó un problema de modelado que implica el uso de una ED de primer orden y que, para su resolución, los alumnos deben recurrir a temas conocidos por ellos (proporcionalidad, derivada, función, función exponencial, etc.) De manera análoga, se procedió al momento de iniciar el estudio de los sistemas de ED de primer orden.

El presente escrito se centrará en la discusión en torno a los procedimientos puestos en juego por los estudiantes a la hora de resolver tales problemas de aplicación. La intención es exponer los aspectos más sobresalientes que se desprenden del análisis y la reflexión de la propuesta didáctica llevada adelante.

Las siguientes secciones explicitan los lineamientos teóricos que orientaron la investigación, presentan una breve reseña de los antecedentes y de los aspectos metodológicos seguidos, así como una discusión sobre los resultados obtenidos, finalmente se infieren algunas reflexiones que se derivan del análisis realizado.

2. Fundamentos teóricos

En función de los objetivos perseguidos y de las lecturas realizadas, se encontró en la escuela francesa de la Didáctica de la Matemática el marco teórico adecuado para generar las propuestas de enseñanza a ser llevadas al salón de clases. Según estos lineamientos, la Didáctica de la Matemática tiene como objeto de estudio la situación didáctica, caracterizada como aquella que permite la construcción del conocimiento a través de un problema relativo a éste y a una cierta organización del trabajo, adaptados a los objetivos planteados. La caracterización del proceso que tiene lugar en el aula se basa en la tipología de las situaciones didácticas establecidas por Guy Brousseau (2007). Dicho autor hace una distinción de cuatro momentos sucesivos en los procesos didácticos que produce para su estudio experimental: acción, formulación, validación e institucionalización.

La postura de Brousseau tiene sus orígenes en una concepción piagetana del aprendizaje, puesto que el estudiante aprende por adaptación a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (Piaget *et al*, 1960). Siguiendo con los aportes de la Psicología Cognitiva, y como ya se ha mencionado antes, no se puede dejar de reconocer el papel protagónico que adquieren las ideas previas de los alumnos a la hora de interpretar la información suministrada para su posterior utilización en la formulación de una ED que describa el fenómeno involucrado en el problema. Tal como lo manifiesta Ausubel: “Si tuviese que reducir toda la psicología cognitiva a un solo principio, enunciaría este: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente” (Ausubel *et al*, 1983, p. 151).

2.1. Reflexiones sobre la modelización y los modelos matemáticos

La literatura referente al tema es muy amplia y diversa. La modelización o modelación, es entendida como la actividad de construir modelos a partir de un evento o fenómeno de la realidad. Al mismo tiempo, se observa que la noción de modelo matemático presente en las diferentes publicaciones ha estado asociada generalmente con una construcción matemática cuyo objetivo es estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real. Este modelo puede incluir graficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano *et al.,* 1997).

En lo referente a este punto, se considera necesario realizar algunas aclaraciones. La modelización puede ser pensada como una actividad científica; en ese caso se estaría hablando de un proceso que envuelve una serie de acciones, entre ellas, la observación de cierto evento o fenómeno, la experimentación, la abstracción y simplificación. La abstracción es un proceso que conduce a la formulación de modelos matemáticos y que incluye la enunciación de las hipótesis que intentan explicar las relaciones existentes entre las diferentes variables seleccionadas como constitutivas del fenómeno, la formulación del problema en un lenguaje especializado y las simplificaciones que deben realizarse en virtud de que la complejidad de muchas situaciones hace que sea imposible emprender un estudio detallado de los mismos (Bassanezi, 2002). El proceso de modelización culmina con la institucionalización del modelo luego de que ha superado las instancias de validación (se efectúan interpretaciones y análisis a la luz del fenómeno en estudio con objeto de evaluar si explica o permite predecir la información con que se cuenta).

Se considera que el proceso de modelización pensado en éstos términos es sumamente difícil de llevar adelante en el salón de clases, en primer lugar, por no disponer del tiempo que demanda una investigación de esta naturaleza, y a la vez porque se carece del equipamiento y las instalaciones para realizar las eventuales tareas de indagación, y en segundo lugar, debido a las características de las carreras mencionadas, la investigación con fines científicos no es una meta en sí misma. Cabe aclarar que en los profesorados sí se llevan adelante tareas vinculadas a la investigación, pero las mismas están orientadas a la investigación educativa.

También, la modelización puede ser entendida como una herramienta que posibilita dotar de significado a los diferentes modelos que forman parte de los programas de las asignaturas de las carreras señaladas. En ese caso se estaría frente a la tarea de resignificar o reinterpretar modelos ya construidos. Esto presupone adherir a una visión amplia de lo que significa la actividad matemática: hacer matemáticas implica utilizar matemáticas conocidas, aprender y enseñar matemáticas, crear matemáticas nuevas; sin olvidar, a su vez, que modelizar situaciones problemáticas comprende la enseñanza y aprendizaje de modelos que permitan resolver esos problemas (Chevallard *et al*., 1997).

La bibliografía específica referida al tema también se ocupa de resaltar la importancia que adquieren las ED como modelos matemáticos. Al respecto se explica que un modelo matemático tiene por objetivo representar algunas características del objeto “real” y que básicamente el proceso de modelado se da en tres etapas: 1) establecer claramente las hipótesis en que se basará el modelo, las mismas describen las relaciones entre las magnitudes por estudiarse, 2) definir las variables y parámetros a ser utilizados en el modelo y 3) usar las hipótesis previamente formuladas para obtener ecuaciones que relacionen las variables y parámetros identificados (Blanchard *et al,* 1998)

2.2. Enfoques y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales

En los últimos años, se han presentado reportes de investigaciones que dan cuenta de las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de los conceptos del análisis matemático y en particular de las ED. Siguiendo los lineamientos teóricos brindados por los IREM (Institutos de Investigación en Enseñanza de la Matemática de Francia), se destacan los trabajos llevados adelante por Artigue. Dicha investigadora plantea que los alumnos tienen dificultades para la comprensión de los conceptos del cálculo e identifica que las mismas están ligadas a una serie de obstáculos; las agrupa en tres categorías: aquellas relacionadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (las nociones de número real y función, que se encuentran en proceso de construcción, y es el cálculo precisamente el que ayudará a la conceptualización de las mismas), aquellas vinculadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite y finalmente las correspondientes a las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo (Artigue, 1995a). Dentro de esta categorización, se considera que el obstáculo que en efecto más influencia tiene en el aprendizaje de las ED es el que está vinculado a las deficiencias en la conceptualización de función, pues esto repercute en el abordaje de la solución de una ED debido a que el proceso demanda encontrar una función, conocido el comportamiento de su variación.

Por otra parte, en lo que respecta específicamente al estudio de las ED, esta autora revela, en coincidencia con Moreno Moreno *et al* (2003) y con Habre (Habre 2000 y 2003 citado por Dullius 2009), que la enseñanza tradicional de las ED privilegia el enfoque algebraico (de resolución exacta), en detrimento de los enfoques geométrico (de resolución cualitativa) y del enfoque numérico (de resolución aproximada). Asimismo, distingue que las restricciones que obstaculizan el tratamiento cualitativo y numérico de las ED pueden ser identificadas desde tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En cuanto a la primera, tales restricciones tienen que ver con la omnipresencia histórica del cuadro algebraico, la dificultad de los problemas que dan origen a la resolución cualitativa. En lo referente a la dimensión cognitiva, la movilidad entre el registro de las ecuaciones y el de las gráficas, en el nivel de las funciones y las derivadas restringen la extensión del estudio de las ED hacia lo cualitativo y lo numérico. Finalmente, en lo didáctico, advierte que la enseñanza tradicional no plantea problemas, lo cual repercute en un nivel de exigencia mínima, ya que entiende que introducir un enfoque cualitativo aumenta el interés de la enseñanza y también su dificultad al no ser algoritmizable (aún cuando se cuenta con métodos de resolución, éstos no llegan a convertirse en algoritmos) y, a su vez, identifica como restricciones el estatus infra-matemático que los docentes otorgan a los gráficos (Artigue, 1995b).

Las investigaciones de Moreno Moreno *et al (op. cit*.) si bien no se ocupan específicamente sobre el aprendizaje de las ED, la temática que abordan tiene que ver con las concepciones y creencias de los profesores universitarios de facultades de ciencias experimentales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ED. La importancia de incluir aquí las conclusiones a las que llegaron, reside en el hecho de que se asume que el pensamiento del profesor determina las características de sus prácticas de enseñanza (Litwin, 1996). En cuanto a los resultados que obtuvieron, subrayan que algunas de las creencias de los docentes participantes del estudio tienen que ver con que los estudiantes aprenden las ED por reproducción y memorización de situaciones y por esquemas de resolución vistos en clase y que tienen un nivel de competencias matemáticas muy pobre; estas creencias simultáneamente con la concepción formalista de las matemáticas (donde, en coincidencia con lo señalado por Artigue, se confiere un status infra-matemático a los métodos numéricos y gráficos) y el miedo a perder contenidos propios de las matemáticas puras a favor de conceptos y técnicas proporcionados por la matemática aplicada, son identificadas como causas probables de que persista la enseñanza tradicional de las ED. Al mismo tiempo, los docentes participantes del estudio, en lo referente a los aspectos vinculados a la modelización, reconocieron que tienen dificultades para reconciliar las técnicas con los modelos, consecuentemente terminan enseñando las técnicas antes que los modelos porque les resulta más fácil, en virtud de que éstos últimos generalmente implican el uso de ED bastante complejas, para las que los que no existen métodos analíticos determinados.

Los cursos tradicionales de ED se centran en procedimientos y ardides especializados para resolver ED. Blanchard *et al (op. cit*.), manifiestan, en el prefacio de su libro, que se vieron en la necesidad de reformular el curso usual de ED, puesto que, en primer lugar, consideran que gracias a las nuevas tecnologías dejó de ser esencial focalizar la atención en el enfoque algebraico, y en segundo lugar, porque las ED que aparecen en las aplicaciones generalmente no son lineales y por tanto se carece de técnicas de resolución analítica. En cambio, sí creen que es prioritario que los estudiantes tengan las herramientas para la formulación de ED y la interpretación de sus soluciones, consecuentemente, en su texto, se trabaja en forma sistemática con procedimientos cualitativos y numéricos. La misma apreciación realiza Habre (*op. cit*.) al expresar que los nuevos programas informáticos actualmente disponibles lograron que el estudio cualitativo y numérico no tenga impedimentos.

En consideración a la importancia que tienen las ED como objetos constitutivos de numerosos modelos matemáticos en las diferentes ciencias, se retoman los resultados a los que ha llegado Camarena Gallardo (2008). Si bien en este caso el contexto es la ingeniería, la problemática alcanza a las demás ciencias donde los modelos diferenciales permiten el estudio de situaciones específicas.

La autora mencionada propone problematizar sobre la importancia del uso de modelos en la enseñanza de las matemáticas durante la formación de los ingenieros, investigar sobre los efectos que se producen a partir de trabajar con situaciones de aprendizaje que los involucre, y finalmente observar la relación que existe con el futuro desempeño de los ingenieros como profesionales. Resalta, como punto clave ante la falta de interés por las matemáticas en la universidad, la desvinculación existente entre los contenidos aprendidos en los cursos de matemáticas y aquellos presentados en las materias propias de la formación de la carrera.

Ante esta problemática, la propuesta de solución que presenta, es la de trabajar con la "Matemática en Contexto", una teoría que nace a partir de las investigaciones que llevó a cabo en el Instituto Politécnico Nacional de México en la década del 80 y que básicamente postula trabajar con eventos contextualizados en la futura vida profesional. También puntualiza:

"La Matemática en Contexto contempla nueve etapas:

1. Analizar los textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante.

2. Plantear el evento de las disciplinas del contexto.

3. Determinar las variables y las constantes del evento.

4. Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y su solución.

5. Determinar el modelo matemático.

6. Dar la solución matemática del evento.

7. Determinar la solución requerida por el evento en el ámbito de las disciplinas del contexto.

8. Interpretar la solución en términos del evento y áreas de las disciplinas del contexto.

9. Presentar en el salón de clases una matemática descontextualizada para que el estudiante sepa que es aplicable a otros campos del conocimiento y desarrolle las habilidades que proporciona la matemática formal." (Camarena Gallardo, *op cit)*

Según la investigadora, la actividad profesional de los ingenieros gira sobre la base de resolución de problemas de diversa índole de acuerdo a su especialidad, en la mayoría de los casos la Modelización matemática es necesaria para resolver adecuadamente tales situaciones. En consecuencia, es necesario que los estudiantes trabajen con la construcción de modelos matemáticos desde los inicios de su formación.

Finalmente, hace referencia a las experiencias realizadas con alumnos de ingeniería, luego de haber implementado esta metodología de trabajo y de haberlas contrastado con experiencias llevadas a cabo en forma tradicional. Los resultados indican que aquellos alumnos que habían estudiado con la Matemática en Contexto tuvieron mejores rendimientos en las materias de años siguientes de la carrera, es decir, en materias propias de la ingeniería, que aquellos que habían recibido la enseñanza tradicional. En virtud de que el trabajo con modelos matemáticos no es una actividad exclusiva de la ingeniería, se cree pertinente para los alumnos de profesorado incluir problemas contextualizados.

3. Aspectos metodológicos

Se puede describir de forma global la metodología como cualitativa. Se utilizó la Ingeniería Didáctica conjuntamente con el estudio de caso. En cuanto a la primera, ésta se caracteriza por plantear un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase diseñadas a partir de un trabajo de "concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza". El proceso se lleva a cabo en cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación. La validación es interna, y se da a través de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, *op. cit*.).

Con respecto al estudio de caso, este es entendido como un método usado para estudiar un individuo o una institución en un contexto o situación única y de una manera lo más intensa y detallada posible (Salkind, 1998); además, por la naturaleza misma del método, hay que ser conscientes que las generalizaciones que se puedan realizar a partir de los resultados obtenidos son limitadas.

3.1. Contexto educativo y objetivos pretendidos

Se han observado y analizado dos clases correspondientes a la Asignatura Análisis IV del ciclo lectivo 2012. Dicha asignatura se cursa en el primer cuatrimestre del tercer año de las carreras de Profesorado en Matemática y Profesorado en Física de la FCEQyN-UNaM. Las edades de los alumnos que cursan esta asignatura oscilan entre los 20 y 24 años.

La primera de las clases observadas corresponde a la clase inaugural de la materia. En ella se presentó un problema vinculado al modelado mediante ED ordinarias de primer orden. El objetivo de la misma fue introducirlas haciendo énfasis en el análisis cualitativo rescatando la información que proporciona el modelo. Con respecto a la segunda clase observada, la misma tuvo lugar luego de que los alumnos ya habían cursado la mitad del programa de la materia. El tema desarrollado fue sistemas de ED ordinarias de primer orden. Nuevamente, se introdujo el tema presentando a los alumnos un problema de aplicación que describe el comportamiento de una especie depredadora en interacción con otra especie que es la presa (conocido como modelo de Lotka-Volterra).

Con respecto a las actividades desarrolladas en la primera de las clases en cuestión, se mencionará que el problema trabajado fue tomado de la bibliografía que se maneja en el ámbito académico y fue reformulado por las docentes de la asignatura de modo que en el enunciado no aparezca explícitamente la ecuación diferencial que describe el fenómeno considerado. Sí, se brindaba información sobre el comportamiento de la situación de modo que los alumnos, debían recurrir a conocimientos que fueron abordados en el transcurso de la carrera y formular (con ellos) un modelo para la resolución de dicho problema. La actividad fue seleccionada de Zill *et al* (2002) y fue reformulada tal como se muestra a continuación:

Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de una paciente a razón constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una rapidez proporcional a la cantidad x(t) presente al tiempo t. Formule una expresión matemática que describa la cantidad x(t).

Fig. 1: Problema propuesto a los alumnos en la clase introductoria de ecuaciones diferenciales

Siguiendo los lineamientos metodológicos que ofrece la Ingeniería Didáctica, se mencionará, que en el marco del análisis a priori, se esperaba que los alumnos interpreten la información que brinda el problema, que puedan reconocer que la misma puede, en términos de Ausubel (*op. cit*), subsumirse bajo el concepto matemático de tasa de cambio, previamente estudiado por los alumnos en otras asignaturas; además se identificó como un posible obstáculo para los estudiantes el reconocer que la variación de $x(t)$ con respecto a t [1], debe ser igual a la diferencia entre la rapidez con que ingresa la medicina al cuerpo (que es constante) y la rapidez con que se absorbe (que varía de manera proporcional a la cantidad de medicina x(t) presente en el cuerpo en el tiempo t).

Asimismo, se esperaba que los estudiantes, una vez obtenido el modelo que describe el problema, puedan establecer el dominio donde el modelo es coherente con la situación y además logren reconocer qué aspectos se pueden anticipar sobre $x(t)$ a partir de la expresión hallada, dado que el modelo encontrado provee información explícita sobre la variación de la cantidad de medicina en el cuerpo[2].

Una vez establecido el modelo se pretendía introducir el concepto de condiciones iniciales formulándose preguntas como las siguientes: *¿Qué pasa si se sabe que para t=0, se tiene que x(t) < r/k? ¿Y para el caso contrario? ¿Es posible esbozar un gráfico de x en función de t?* A partir de instaurar la discusión acerca de las condiciones iniciales, se esperaba involucrar los conceptos de solución de equilibrio, puntos críticos y diagramas de fase; y proponer a los estudiantes que, teniendo en cuenta las características de la ED, piensen en qué función podría ser propuesta como una solución y que encuentren una expresión analítica para la misma.

Con respecto a la otra clase considerada, se propuso a los alumnos trabajar con una secuencia seleccionada y analizada previamente por las docentes; la que fue adaptada de las propuestas que hacen Blanchard *et al* (1998) y Zill *et al (op. cit):*

[1] Es decir, la derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo.
[2] El comportamiento de la cantidad de medicina propiamente dicho debe ser inferido a partir de esa variación. Esto es, interpretar el comportamiento de x(t) a partir de conocer el de su derivada.

Consigna N 1:
En la dinámica de la vida ninguna especie está sola. Suponga que dos especies de animales distintas interactúan en el mismo ambiente o ecosistema; además la primera come plantas y la segunda se alimenta de la primera. En otras palabras una especie es depredadora y la otra es la presa. Por ejemplo, x(t) e y(t) denotan los tamaños de las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente.
Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies en ausencia de interacción con la otra especie, sabiendo que la velocidad de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño.

Consigna N 2:
Suponga ahora que las dos especies interactúan, y que los zorros se comen a los conejos y que la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la taza de encuentros entre ambas especies y que, además la tasa de nacimientos de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorro, que es proporcional a la razón a la que los conejos y zorros interactúan.
Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies sabiendo que, si x(t) o y(t) aumentan el número de interacciones aumenta y que si alguna de ellas es cero, el número de interacciones también es cero.

Consigna N 3:
En los siguientes modelos de población depredador-presa, x representa la presa e y representa los depredadores.

$$i)\quad \frac{dx}{dt} = 5x - 3xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}xy$$

$$ii)\quad \frac{dx}{dt} = x - 8xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + 6xy$$

a) *¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores e igual número de presas?*
b) *¿En qué sistema tienen los depredadores más éxito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema los depredadores tienen un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas?*
c) *¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo números idénticos de depredadores en ambos casos?)*

Fig. 2: Secuencia propuesta a los alumnos para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales

La secuencia se pensó en base a los diferentes modelos propuestos por la bibliografía usada desde la cátedra, y se eligió el modelo de depredador – presa porque brinda la posibilidad de enfrentar la resolución del problema desde los saberes que poseen los alumnos más allá del contexto matemático, es decir, los alumnos pueden comenzar a pensar en la situación, hacer conjeturas sobre el comportamiento de las especies y encarar la resolución del problema desde sus conocimientos acerca del fenómeno biológico que se describe dado que les puede resultar familiar.

El interés de la primera consigna dada reside en que brinda la posibilidad al alumno de comenzar a trabajar matemáticamente el problema porque involucra conceptos como velocidad de crecimiento, derivada y proporcionalidad, que ya fueron estudiados en otras ocasiones. Se propuso una actividad que justamente pueda hacer funcionar el principio de reconciliación integradora de Ausubel (*op. cit*.), ya que se pretendía que los estudiantes relacionen la información nueva con la ya existente en la estructura cognitiva y que ésta a su vez se modifique con la adquisición de nuevos significados.

La siguiente consigna que se presenta posee un nivel de dificultad mayor porque ya no requiere pensar a cada especie en forma independiente, sino que es preciso analizar las interacciones entre las mismas, es decir, se debe tener en cuenta cómo la presencia de cada una modifica el comportamiento de la otra.

Esta consigna supone que en la actividad anterior los alumnos ya han podido formular un modelo para el comportamiento de cada población y que ahora resulta necesario modificar los modelos propuestos antes, a fin de incorporar en ellos la interacción entre ambas especies. Como parte del análisis preliminar, se reflexionó sobre las dificultades que podrían presentárseles a los alumnos y se pensó que podría ser un obstáculo, el modelar la interacción entre ambas especies como el producto de las dos poblaciones. Por esta razón, se pensó en la consigna 3 a fin de que se concrete el estudio del modelo de Lotka Volterra más allá de lo que hayan podido efectuar los alumnos, es decir, dicha consigna resulta valiosa tanto para el caso en que no haya surgido ningún modelo entre las producciones de los alumnos como para validar los eventuales modelos propuestos. Al mismo tiempo, ofrece la posibilidad de obtener información del modelo sin resolver el sistema de ED, interpretando los valores de los coeficientes de las incógnitas.

4. Análisis y discusión

4.1. Discusión del problema introductorio al concepto de ecuación diferencial

El panorama que se observó inicialmente en la primera clase no fue nada alentador, los alumnos plantearon varias cuestiones pero no encontraron la manera de conectarlas entre sí para elaborar el modelo matemático solicitado. Entre las dificultades observadas se puede mencionar que algunos alumnos otorgaron un comportamiento variable al parámetro r que denota la razón con que ingresa la medicina al cuerpo de la persona, también señalaron que la rapidez con que la medicina se elimina o desaparece del organismo es proporcional a la cantidad de medicina presente en el cuerpo y que aquí, como se habla de rapidez, debía estar involucrada una derivada.

Es notorio que las afirmaciones que realizan los alumnos estuvieron encaminadas hacia la solución del problema pero no lograron plasmarse en un modelo concreto. Es de fundamental importancia resaltar el papel que juega la interacción con los pares y con los docentes para la consecución de los objetivos propuestos. En este sentido, se pone en evidencia la génesis social del conocimiento y la actuación de la docente en la zona de desarrollo próximo del alumno (Vygotski, 1978), puesto que, en virtud de las intervenciones de la profesora para redireccionar la discusión -por ejemplo cuando propone en el pizarrón el esquema mostrado en la figura 1- los alumnos comienzan a realizar una serie de conjeturas que finalmente los conducen al planteo de un modelo para la situación.

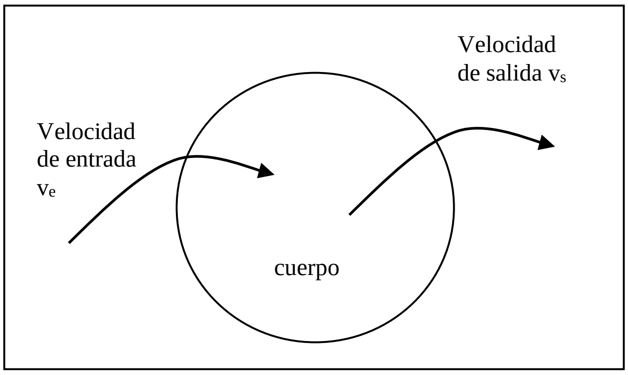


Fig.3: Esquema realizado por la docente para orientar la discusión

Después de realizar este esquema los alumnos identificaron correctamente que la velocidad de entrada es constante e igual a r y que la velocidad de salida es variable y que es proporcional a la cantidad de medicina en el cuerpo denotada como x(t), y que esto se representa simbólicamente como $v_S=kx(t)$, paralelamente reconocieron que la diferencia entre las velocidades de entrada y salida proporciona el cambio de la cantidad de medicina en el cuerpo. Finalmente plantearon el siguiente modelo

$$x'(t) = r - k\,x(t)$$

Luego de discutir sobre él, acordaron que efectivamente es un modelo adecuado para describir la situación.

Las demás cuestiones pensadas en la fase preliminar de diseño y planificación de las actividades como de la clase no pudieron concretarse por falta de tiempo. En líneas generales, de acuerdo a lo manifiesto por los alumnos, destacan que se sintieron cómodos realizando este tipo de actividades aunque reconocieron que la misma no les resultó sencilla. Esto tiene puntos de encuentro con lo que plantea Artigue (op. cit), ya que se reconoce la dificultad que conllevan los métodos cualitativos en virtud de no poder constituirse en algoritmos de resolución.

4.2. Discusión del problema introductorio a sistemas de ecuaciones diferenciales

A continuación se presentan los aspectos más sobresalientes para la clase cuyo objeto de estudio fueron los sistemas de ED. En primer lugar, antes de poder utilizar alguna estrategia en particular, a los alumnos les costó interpretar la situación que describía el problema, luego de la orientación brindada por la profesora, plantearon el siguiente modelo para la población de conejos:

$$x'(t) = kx(t) \qquad x(t) = e^{t}$$

Como justificación de su procedimiento, argumentaron que propusieron la función exponencial como la solución del problema porque la misma verifica ser proporcional a su derivada. En este caso, el procedimiento usado por los alumnos es de carácter intuitivo y en el que se resalta las propiedades de la función exponencial, sobresale el hecho de que llegan a encontrar una función para describir el comportamiento de la población sin resolver la ED haciendo solamente consideraciones cualitativas.

Otro grupo de alumnos planteó la misma ED pero para hallar la función que describe el comportamiento de la población, la resolvieron usando el método de variables separables. El modelo y la solución hallada se muestran a continuación:

$$x'(t) = kx(t) \qquad x(t) = e^{kt}$$

De manera similar plantearon la siguiente ecuación y su solución para la población de zorros:

$$y'(t) = -ky(t) \qquad y(t) = e^{-kt}$$

Como consecuencia de la discusión en torno a los modelos sugeridos, concluyeron que no era correcto usar el mismo parámetro para describir las dos poblaciones y en función a ello, modificaron los modelos propuestos asignando k_1 y k_2 para los parámetros en las ecuaciones que describen las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente.

Es de destacar que para el planteo de los modelos involucrados en esta consigna, los alumnos tuvieron menos dificultades que para la situación dada en la primera clase de la asignatura. Es de esperarse que así sea puesto que cuentan con la experiencia en el manejo de este tipo de situaciones adquirida en el transcurso de la clase inaugural, sumado a que ya han estudiado todos los tópico referentes a ED ordinarias del curso.

Con respecto a los aspectos más destacados del trabajo de los alumnos con la consigna 2, se mencionará que identificaron correctamente cómo son afectadas cada población por la interacción entre ambas pero no pudieron modelizar dicha interacción. Es decir, dedujeron acertadamente que la constante de proporcionalidad k_1 debe ser positiva porque la población de conejos aumenta en ausencia de los zorros, es decir, k_1 tiene un efecto positivo sobre la población de conejos y a la constante de proporcionalidad k_2 se le antepone un signo menos porque la población de zorros decrece si no hay conejos, es decir, k_2 posee un efecto negativo sobre la población de zorros. Al mismo tiempo señalaron correctamente que la interacción entre ambas especies perjudica a la población de conejos y beneficia a la de zorros (esto se ve en los signos más y menos que agregaron en las ecuaciones para cada población).

El modelo al que arribaron es el siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = k_1 x(t) - \\ y'(t) = -k_2 y(t) + \end{cases}$$

Si bien es cierto que los modelos propuestos están incompletos, hay que reconocer que los estudiantes comprendieron globalmente el comportamiento de las poblaciones involucradas. Esta situación, en efecto, se revirtió cuando trabajaron con la consigna 3: los alumnos pudieron identificar inmediatamente el término que modeliza la interacción entre ambas especies. De igual modo, manifestaron que plantear la interacción como proporcional al producto de las poblaciones refleja efectivamente las hipótesis del modelo, es decir, que si alguna de las poblaciones aumenta el número de interacciones también aumenta y que si alguna de las poblaciones es cero, el número de interacciones también es cero. Finalmente, los demás ítems de la consigna 3 no ofrecieron dificultades adicionales y fueron resueltos en forma correcta.

5. Reflexiones finales

A partir de las observaciones y análisis efectuados como de las lecturas realizadas acerca de la postura de la didáctica de la matemática frente a la situación de gestión y participación en una clase de matemática y considerando las dificultades advertidas por Artigue, podemos marcar algunos puntos sobresalientes:

- Se observa que, en los textos, los modelos matemáticos para representar ciertos fenómenos vienen dados o, a lo sumo, explicado el proceso de construcción de cada uno. Es comprensible que así sea, dado que construir un modelo matemático para las ciencias experimentales (o incluso para las sociales), demandaría tanto un amplio conocimiento científico como una etapa de intensa observación de la situación que se está estudiando, condiciones imposibles de lograr al nivel de la carrera donde se plantea la enseñanza del tema.

- A pesar de tratarse de estudiantes del Profesorado de Matemática y Física, no resulta inmediato apelar a objetos propios de la matemática como función exponencial y derivada, menos aún que logrado el modelo matemático solicitado se anticipe al modelo exponencial como candidato a solución.

- Con respecto a lo referente a la modelización, es poco probable que los diferentes aspectos que hacen a los procesos de modelado surjan de modo espontáneo en los alumnos, se hace necesario destinar tiempo de las clases para el estudio y análisis de los mismos, pues se considera que este tipo de prácticas de aprendizaje generan espacios de elaboración de conocimientos matemáticos.

- Situaciones de este tipo permiten al estudiante compartir con sus compañeros apreciaciones, formular conjeturas, escuchar y validar otras explicitadas por sus compañeros, recurrir a diferentes estrategias de abordaje del problema de acuerdo a las relaciones percibidas de la interpretación del mismo. Facilita la construcción grupal de la propuesta que formularán generando espacios de debates, ajustes de propuestas, acuerdos, precisión de lenguaje oral y simbólico, control y validación.

- A pesar la ausencia de algunos de los procedimientos previstos en el análisis a priori, la experiencia realizada dejó resultados positivos. Se considera que este tipo de actividades aumentan el interés de los alumnos por la materia, es decir, pueden funcionar como una forma de motivación extrínseca, al mismo tiempo resignificar contenidos abordados en asignaturas anteriores.

- La gestión áulica de la consigna demanda del docente intervenciones específicas con un alto nivel de incidencia en la producción propia del alumno, es decir un comentario o pregunta puede modificar (para bien o para mal) la dirección del trabajo que sus estudiantes estén realizando, si lo hace anticipadamente será factible que interrumpa el proceso de elaboración que los estudiantes inician ante la situación problemática. Se podrían citar algunos aspectos más acerca de la importancia de la mediación del docente, pero sólo se indicará que tal responsabilidad hace que resulte más sencillo, para el profesor, el planteo de una clase tradicional con todos los aspectos controlados, por qué no agregar que en la misma medida resultará menos provechoso para el aprendizaje de los alumnos.

Bibliografia

Artigue M. (1995a). “La enseñanza de los principios del cálculo”. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Artigue M. (1995b). “Ingeniería Didáctica”. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P.. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Ausubel D., Novak J., Hanesian H. (1983). “Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo”. Segunda edición. Editorial Trillas. México

Bassanezi R. (2002). “Ensino-aprendizagem com modelagem matemática”. Editorial Contexto. São Paulo

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). “Ecuaciones diferenciales”. Editorial Thomson. México

Brousseau G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires

Camarena Gallardo P. (2008). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Conferencia Magistral, Perú, 2008

Chevalard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). Enseñar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Orsori. Barcelona

Dullius M. (2009). “Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico”. Tesis doctoral. Burgos.

Giordano F., Weir M. y Fox W. (1997) “A first Course in Mathematical Modelling”. Brooks/Cole. Publishing Company.

Moreno Moreno M. y Azcárate Giménez C. (2003). “Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales” Enseñanza de las Ciencias, 21 (2). 265-280

Litwin, E. (1996). “El campo de la Didáctica: la búsqueda de una nueva agenda”. En Camilloni A., Davini M. C., Edelstein G., Litwin E., Souto M., y Barco S.. Corrientes Didácticas Contemporáneas. Editorial Paidós. Buenos Aires.

Piaget J., Inhelder B. (1960). Psicología del niño. Octava edición. Ediciones Morata. Madrid.

Salkind N. (1998). “Métodos de Investigación”. Editorial Prentice Hall. México.

Vygotski L. (1978). “El desarrollo de los procesos psicológicos superiores”. Crítica. Grupo editorial Grijalbo. Barcelona.

Zill D., Cullen M. (2002). “Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera”. México: Thomson.

Autores:

Claudia Mariela Zang. Profesora en Matemática y en Física, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones Argentina (FCEQyN-UNaM). Actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Actualmente trabaja como auxiliar de docencia en el área de Ecuaciones Diferenciales y de Física Atómica y Nuclear en FCEQyN-UNaM, Participa como auxiliar de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales y en enseñanza de Física. claudiamzang@gmail.com

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen. Profesora en Matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina (FCEQyN-UNaM). Actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Actualmente trabaja como docente en el área de Análisis Matemático. Participa como auxiliar de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales. gretelalefernandez@gmail.com

María Natalia León. Profesora en Matemática, Física y Cosmografía, egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales (UNaM). Magister en Matemática Aplicada egresada de FCEQyN-UNaM, Argentina. Actualmente trabaja como docente en el área de Análisis Matemático y Estadística en la Facultad de Ciencias Económicas y de Ecuaciones Diferenciales en FCEQyN. Se desempeña como directora del Proyecto PACENI (Misiones) que se ocupa de la problemática del ingreso y de la deserción en los primeros años de carreras Universitarias de Ciencias Exactas, Naturales, Económicas y de Informática, el cual tiene como parte constitutiva un sistema de tutorías; también es directora de un proyecto de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales. nleon@campus.unam.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 166-184
www.fisem.org/web/union

Creencias epistemológicas de profesores y alumnos sobre la Matemática

Idania Otero Ramos, Annia Vizcaino Escobar, Darlys Carmenates Estrada

Fecha de recepción: 26/09/2013
Fecha de aceptación: 12/03/2015

Resumen	El objetivo del trabajo se orienta a caracterizar las creencias epistemológicas que poseen los profesores y alumnos sobre la Matemática en la Secundaria Básica “Victor Díaz Oroquieta” de la provincia de Camagüey. La pesquisa se sustenta en un estudio descriptivo, con diseño no experimental transaccional. La muestra se seleccionó de manera intencional quedando conformada por 96 estudiantes que cursan 7mo, 8vo y 9no grado, además se incorporan los 5 docentes que imparten dicha materia en el centro. Para la recogida de información se empleó la técnica de “Evocación libre de palabras”, los datos se procesaron utilizándose el método de Análisis de Correspondencia. Los resultados obtenidos demuestran como las creencias epistemológicas siguen diferentes direcciones, expresándose una tendencia a un desarrollo asincrónico. **Palabras clave**: Creencias epistemológicas, Matemática, aprendizaje, enseñanza.
Abstract	The difficulties found in the learning of Mathematics orient the present investigation, with the objective to characterize the epistemological beliefs about this science in teachers and students from Victor Díaz Oroquieta High School in Camaguey. The inquiry is sustained on a descriptive study with a non experimental transactional design. The sample is selected in an intentional way. It is conformed by 96 students from 7th, 8th and 9th grade, besides 5 specialists of this subject from the same school are incorporated. To collect the information the technique of "Free Evocation of Words" is applied, the data are processed using the Method of Analysis of Correspondence. The results obtained show in general sense how teachers´ and students´ epistemological beliefs follow different directions expressing a tendency to the asynchrony development. **Key Words:** epistemological beliefs, Mathematics, learning, teaching.
Resumo	O objetivo do trabalho visa caracterizar as crenças epistemológicas que tem professores e alunos sobre a matemática básica na escola "Victor Díaz Oroquieta" na província de Camagüey. A pesquisa é baseada em um projeto transacional descritivo, não experimental. A amostra foi selecionada intencionalmente sendo composta por 96 alunos matriculados no 7º, 8º e 9º ano, também incorpora os 5 professores que ensinam essa disciplina na escola. A técnica usada para a recolha de dados foi "Evocação Livre de palavras" e os dados foram processados

usando o método de análise de correspondência. Os resultados obtidos mostram como as crenças epistemológicas seguem direções diferentes, expressando uma tendência a um desenvolvimento assíncrono.
Palavras chaves: crenças epistemológicas, Matemática, aprendizagem, ensino.

1. Introducción

Hoy el proceso educativo se encuentra inmerso en la Tercera Revolución Educacional, dirigida una vez más a su perfeccionamiento. El modelo de Secundaria Básica en nuestro país (Cuba), está en correspondencia con los actuales escenarios en que se desarrolla la educación a nivel mundial y por supuesto, se particulariza en el contexto cubano, por ende, se plasma el matiz de todos los cambios socioeconómicos que se han ido desarrollando de manera vertiginosa. En esta renovación educativa una asignatura priorizada es la Matemática, dada la importancia que presenta al contribuir al desarrollo de las capacidades, conocimientos, hábitos y habilidades de los estudiantes.

A pesar de estas valoraciones, diferentes estudios demuestran deficiencias en el aprendizaje de la Matemática en los distintos grados o niveles escolares, de esta forma, en el Segundo Informe de Resultados (TIMSS, 2003 en Vizcaíno, 2012), se señala con énfasis la presencia de estas falencias en el área mencionada.

Los resultados de las evaluaciones realizadas por organismos internacionales en países de América Latina también han demostrado cómo el aprendizaje de los estudiantes latinoamericanos en Matemática está muy por debajo de los europeos y los asiáticos. Hay pocas excepciones y corresponden a naciones con mayor desarrollo económico, como Chile, que aunque sus resultados en el contexto internacional no son muy halagadores, son superiores que el resto de la región, en donde únicamente Cuba presenta los más altos puntajes (Benavidez, 2010). Si bien estos resultados sitúan “logros de aprendizaje matemático” muy por encima del resto de la región latinoamericana, en nuestro país no queda resuelta la problemática; los distintos estudios realizados han mostrado que aún persisten deficiencias, principalmente en la comprensión y resolución de problemas, o en los propios resultados académicos obtenidos durante décadas (Vizcaíno, 2012).

A partir de estos y otros datos, múltiples investigadores han tomado como objeto de sus estudios la Matemática, de esta manera Guzmán (1993), analiza aspectos del panorama actual de la disciplina y llega a describir las tendencias actuales más donde se destaca la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la Matemática .Hernández & Morejón (2004) y Gómez (2005), se centran en el análisis del papel que juega la motivación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, realizando propuestas que contribuyen a ayudar a los estudiantes a internalizar metas de aprendizaje como estímulo y camino para desarrollar la “ motivación para hacer

Matemática". Por su parte Martínez (2010), ha orientado sus estudios a las representaciones sociales que poseen los estudiantes acerca de la Matemática, demostrando la fuerza de estas en el resultado académico.

Si bien es cierto que numerosos investigadores han dirigido sus trabajos hacia la problemática de la Matemática ofreciendo sus aportes, quedan aún interrogantes, dudas e incertidumbres que generan nuevas búsquedas, por ello se investigan nuevas variables, donde las creencias epistemológicas en este dominio específico se erigen como fundamentales.

En la década del 60-70, los aportes de William Perry (1968-1970), demostraron como las ideas de los alumnos evolucionaban desde posiciones más simples e ingenuas a posiciones más complejas, indicó que los estudiantes progresaban a lo largo de sus años de formación, pasando de tener visiones absolutistas sobre el conocimiento a relativizar sobre sus puntos de vista. Posteriormente estas investigaciones dieron paso en distintos contextos educativos, a dos líneas de investigación como son la metacognitiva y la fenomenográfica, las cuales han centrado su atención en el análisis de las creencias de los estudiantes respecto al conocimiento y al aprendizaje.

En el ámbito de la psicología metacognitiva, se destacan las investigaciones realizadas por Schommer (1990, 1993), quien centra sus trabajos en el análisis de la relación entre las creencias epistemológicas y numerosos aspectos del aprendizaje. Entre los hallazgos de las investigaciones de Schommer, cabe mencionar la detección de una interrelación significativa entre las creencias epistemológicas y el rendimiento académico (Schommer, 1993; Schommer, Calvert, Gariglietti y Bajaj, 1997).Según esta autora, los individuos tienen un sistema de creencias acerca de cómo es y cómo se adquiere el conocimiento, el cual resulta de gran importancia para comprender el aprendizaje.

Desde esta perspectiva asumimos que las creencias epistemológicas se conceptualizan como un constructo multidimensional constituido por un sistema de creencias, relativamente independientes, sobre la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje. El sistema de creencias epistemológicas está compuesto entonces por diferentes dimensiones las cuales se erigen como creencias particulares sobre las que se articula el sistema, conformando la visión que tiene el estudiante con respecto al conocimiento y al aprendizaje. Estas dimensiones no necesariamente se desarrollan en paralelo. Un mismo estudiante puede reflejar en un momento dado niveles diferentes de desarrollo (Schommer, 1990).

Al reconocerse el estrecho vínculo que existe entre las creencias epistemológicas y el aprendizaje, ha comenzado el cuestionamiento sobre si las creencias epistemológicas se manifiestan de distinta manera según los dominios específicos del conocimiento, (Hofer y Pintrich, 1997), destacándose entonces, las creencias epistemológicas en el dominio de la Matemática. (Schoenfeld, 1989; Schommer-Aikins, Duell & Hutter, 2005; Steiner, 2007, Walker, 2007).

Resulta de interés para nuestro trabajo las propuestas de Walker (2007), quien identifica a partir de los estudios de Schommer (1990), diferentes dimensiones: creencia acerca de las fuentes del conocimiento, creencia acerca de la estructura del conocimiento, creencia acerca de la certeza o estabilidad del conocimiento, creencia acerca de los determinantes del aprendizaje, creencia respecto a la velocidad para la adquisición del aprendizaje y creencia acerca de la aplicabilidad de la Matemática al mundo real (Walker, 2007).

Con el avance de las pesquisas se convierte también en centro de interés el conocer la estructura del sistema de creencias del profesorado y de los alumnos, partiendo de la hipótesis de que las creencias epistemológicas influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la Matemática (Pintor; Vizcarro, 2005). Se ha demostrado que la forma en que los profesores organizan su enseñanza está relacionada con el modo de entender el aprendizaje, por lo tanto, se han establecido relaciones entre las diferentes formas de concebir el aprendizaje y las prácticas docentes, sus creencias epistemológicas, sus estrategias cognitivas y metacognitivas, entre otros aspectos (Chan & Elliott, 2000; Kagan, 1992; Pajares, 1992), que de una u otra manera, tienen implicaciones en la práctica educativa y por supuesto en cómo el alumno aprende, qué aprende y qué creencias poseen sobre la Matemática, lo que se convierte en un proceso cíclico que puede determinar de alguna manera los resultados académicos en la disciplina.

Las creencias que los docentes tienen de su profesión, sobre los elementos que intervienen en el aprendizaje de los estudiantes y sobre cuáles son las mejores maneras de enseñar su disciplina son sin lugar a dudas, componentes que juegan un papel importante en lo que sucede en el aula. Dichas creencias pueden cambiar y reestructurarse a partir de la evaluación que los profesores hacen de ellas basados en su experiencia, se interrelacionan entonces en una estructura dinámica. Las creencias funcionan como filtro para todo lo que sucede en el proceso enseñanza-aprendizaje y cuando el docente toma una decisión en el proceso enseñanza-aprendizaje, depende más de sus propias ideas y del valor afectivo de estas (Inguanzo, 2010).

Reconociendo la importancia de caracterizar las creencias epistemológicas de profesores y alumnos para la comprensión del proceso enseñanza- aprendizaje, se toma como punto de partida para la investigación, un dominio específico, la Matemática, ya que constituye esta ciencia una de las materias “más complejas” que afecta en mayor medida los resultados académicos de los estudiantes en Cuba, planteándonos el siguiente problema investigativo:

¿Qué características poseen las creencias epistemológicas sobre la Matemática, de profesores y alumnos de la Secundaria Básica "Víctor Díaz Oroquieta", de la provincia de Camagüey?

2. Desarrollo

La investigación presentada se sustenta en el paradigma cuantitativo de investigación científica, con un tipo de estudio descriptivo y un diseño no experimental transaccional o transversal, (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006).

La unidad de análisis de la investigación son los alumnos que cursan sus estudios en la Secundaria Básica "Víctor Díaz Oroquieta" de la provincia de Camagüey, Cuba, cuyas edades oscilan entre los 12 y 14 años, además se incorporan los docentes que imparten la asignatura Matemática en dicha escuela.

Se trabaja con una muestra no probabilística o dirigida, lo que supone un proceso de clasificación intencional. Se seleccionan grupos-tipos, buscando más que la representatividad, el que exista calidad en la información (Hernández, Fernández 2007). Atendiendo a esta razón se solicita colaboración a la dirección del centro para asumir un grupo de 7mo, uno de 8vo y uno de 9no grado, sobre la base de los siguientes criterios:

- Abarcar los tres niveles de la enseñanza.
- Que el grupo sea valorado como "el mejor en su año", por: sus resultados docentes, participación en actividades escolares, disciplina, integración grupal, entre otros.
- Que posean de forma estable un maestro/a de Matemática.

Grupos	Total
7mo 1	32 alumnos
8vo 3	30 alumnos
9no 3	34 alumnos
Total	**96 alumnos**

Tabla 1: Caracterización de la muestra "alumnos" según el grado

La **muestra "profesores**" se selecciona intencionalmente sobre la base de los siguientes criterios:

- Ser profesor de Matemática de 7mo, 8vo y 9no grado.
- Voluntariedad de participación en la investigación expresando su consentimiento informado.

Criterios de exclusión:

- Desear abandonar la investigación.
- Causar baja del centro de trabajo.

Profesores	Sexo	Edad	Formación profesional	Grado donde imparte docencia
Profesor ALC	Femenino	44 años	Lic. en Matemática	9no grado
Profesor AGM	Femenino	40 años	Lic. en Matemática	7mo grado
Profesor YER	Femenino	28 años	Prof. General Integral	7mo grado
Profesor ALM	Masculino	26 años	Prof. General Integral	8vo grado
Profesor HHG	Masculino	30 años	Prof. General Integral	9no grado

Tabla 2: Caracterización de la muestra "profesores"

2.1 Métodos e instrumentos

Como método del nivel empírico se utiliza la Técnica de "Evocación libre de palabras", la cual consiste en presentar una palabra o frase-estímulo al entrevistado para que él/ ella, por medio de la asociación libre, designe cuatro palabras que le surjan espontáneamente en su mente. El carácter espontáneo y la dimensión proyectiva de esa producción facilitan tener acceso, mucho más rápido y fácil, a los elementos que constituyen el universo semántico del término. La evocación libre permite actualizar elementos implícitos o latentes que serían disimulados en las producciones discursivas. Para este caso concreto las palabras estímulos han sido incorporadas desde un proceso de triangulación de los investigadores y teniendo en cuenta el objeto de estudio del trabajo.

De los métodos matemáticos-estadísticos se utiliza el "Método de Análisis de Correspondencia (ANACOR)" aplicable a tablas de contingencia. Este se deriva de la conocida técnica factorial de componentes principales. Por medio del análisis de correspondencias se puede comprobar el grado de relación entre las categorías de cada variable. En el gráfico denominado ANACOR se muestra la normalización simétrica mediante las dispersiones o asociaciones de los vocablos respecto al eje central. (Suñé, 2001). Se recurre además al Producto Estadístico y Solución de Servicios. (SPSS) versión 21 y el Microsoft Excel 2010.

2.2 Procedimiento de Análisis de los datos

Los datos de la técnica de "Evocación libre de palabras", fueron analizados según el siguiente procedimiento:

Primeramente se les explica a los sujetos en qué consiste la técnica. La frase inductora es: "¿Qué 4 palabras te vienen a la mente cuando escuchas el término: Matemática, enseñanza, aprendizaje, aplicación y conocimientos?". Se realiza el análisis para cada grupo muestral atendiendo a las categorías propuestas por Shommer (1990, 1997). Ver tabla 2.

El análisis de las palabras evocadas se realiza sobre un universo de 1325 palabras evocadas por los alumnos y 100 palabras evocadas por los profesores. Surgen dos listas de distribución de palabras, una por orden alfabético y otra por orden de frecuencia. Basadas en esas listas se efectúa la homogenización de las palabras sinónimas. Se sustituyen las que sobrevienen con menor frecuencia por las de mayor frecuencia, conservando el sentido representacional de la palabra sustituida. En la realización de la homogenización se tuvieron en cuenta las palabras sinónimas, para formar categorías. Luego de la homogenización se obtienen las listas finales de las palabras evocadas por orden de frecuencia. Seleccionamos las palabras más citadas siguiendo como criterio un porcentaje mínimo del 2% en relación a la muestra total.

Inmediatamente se procesan los datos obtenidos y se cruzan las palabras más frecuentes generadas para cada palabra–estímulo con ellas mismas, construyéndose así un banco de datos indicativos de los cruces entre las palabras evocadas. Luego seleccionamos para todas las palabras estímulos, las 10 más frecuentes y son analizadas por el Método de Análisis de Correspondencia (ANACOR). Se expone un gráfico de dispersión demostrativo de los resultados.

Dimensiones	Subdimensiones	Creencias ingenuas	Creencias sofisticadas
Fuente del conocimiento	Figura de autoridad	Radica en la figura de autoridad.	Conocimiento producido por sí mismo.
	Conocimiento poducido por sí mismo		
Certeza del conocimiento	Conocimiento absoluto	Conocimiento absoluto, cierto, estático, no varia	Conocimiento tentativo, dinámico, dialéctico, sujeto a cambios.
	Conocimiento tentativo		
Estructura del conocimiento	Conocimiento simple y aislado	Conocimiento simple, aislado, no integrado	Conocimiento como proceso complejo, estructurado.
	Conocimiento complejo y estructurado		
Velocidad en la adquisición del aprendizaje	Aprendizaje rápido	Aprendizaje súbito, rápido, o no ocurre	Aprendizaje como proceso lento y sistemático.
	Aprendizaje lento y sistemático		
Determinantes del aprendizaje	Aprendizaje innato	Habilidad para aprender innata	Aprendizaje adquirido y controlado.
	Aprendizaje adquirido		
Aplicabilidad de la Matemática al mundo real	Aplicable	Los conocimientos de la matemática no son aplicables al mundo real.	Es posible aplicar la matemática al mundo real.
	No aplicable		

Tabla 3: Dimensiones, subdimensiones, y niveles de desarrollo de las creencias epistemológicas

2.3 Resultados

Como se expresó anteriormente para el análisis de las palabras evocadas por los profesores, se distribuyen dos listas, una por orden alfabético y otra por orden de frecuencia. Debido a la muestra utilizada (5 profesores que conforman el total de la población), no se homogenizaron las palabras, utilizándose el 100% de sus producciones verbales.

Las palabras evocadas por los alumnos, se distribuyen en dos listas, una por orden alfabético y otra por orden de frecuencia, de igual forma que en el caso de los profesores, pero sí se procedió a la homogenización, sustituyendo los vocablos de menor frecuencia por los de mayor frecuencia, quedando conformada una lista final.

Al procesarse los datos obtenidos por el Sistema SPSS versión 21.0 y cruzarse las palabras más frecuentes generadas para cada vocablo-estímulo, se seleccionan los 10 vocablos de mayor frecuencia tanto por profesores y alumnos y se analizan por el Método de Análisis de Correspondencia (ANACOR), obteniéndose gráficos demostrativos para cada palabra estímulo.

Con respecto a las asociaciones de los profesores a la palabra estímulo: "Matemática", se encontró que los vocablos más frecuentes fueron: problemas, geometría, números, cálculo, ejercicios, operaciones, álgebra, análisis, ecuaciones y fórmulas (Figura 1).

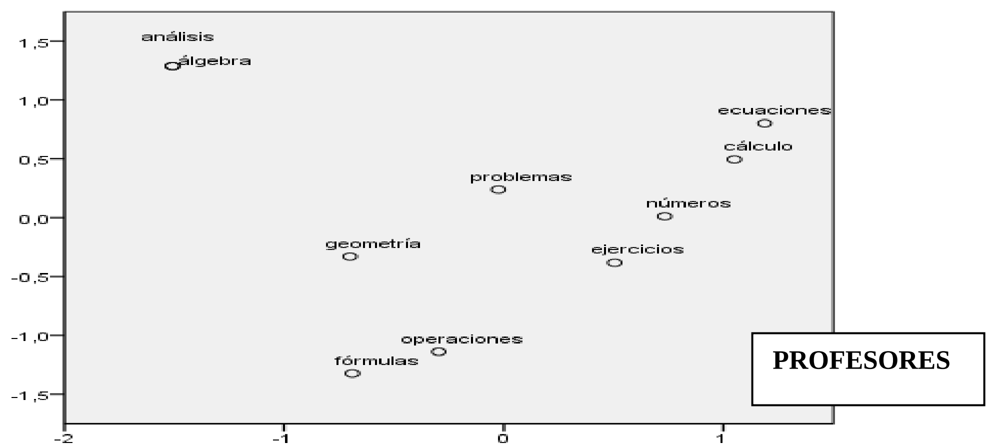


Fig. 1. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Matemática"

Como se observa en el gráfico anterior, la normalización simétrica indica una dispersión de los vocablos en el eje central (0- 0,0), no obstante, las palabras más cercanas a dicho eje son geometría y problemas. Hacia la derecha se agrupan las palabras números y ejercicios. En el cuadrante superior derecho prevalecen los vocablos ecuación y cálculo. En el superior izquierdo análisis y algebra, mientras que en el inferior se agrupan operaciones y fórmulas. Los resultados permiten inferir que para los profesores las principales asociaciones con la palabra estímulo guardan relación con los contenidos de la asignatura que imparten: geometría, ecuaciones, álgebra, números, fórmulas, así como con las principales operaciones y habilidades que se pretende lograr con la labor docente: cálculo, (calcular), problemas, ejercicios (ejercitar), análisis (analizar). Las principales creencias epistemológicas aparecen como construcciones subjetivas relacionadas con su formación profesional, con el propio conocimiento de la Matemática y su enseñanza; están además situados en el rol que desempeñan, sin embargo nos preguntamos: ¿la Matemática sólo puede asociarse a sus contenidos y formas de enseñar?, llama la atención que en estas palabras no aparezcan algunas relaciones con su utilidad para la vida, aunque como observaremos más adelante sí se expresa esta relación ante la palabra estímulo “aplicación”.

En relación con la muestra de alumnos, las 10 palabras más frecuentes ante la palabra-estímulo "Matemática", fueron: geometría, cálculo, números, operaciones, fórmulas, problemas, figuras, productos, difícil y necesaria. Se observa en el centro del gráfico de la Figura 2, la formación de un primer subgrupo constituido por las palabras números, difícil, operaciones y cálculo. Muy próximas a ese subgrupo se encuentran las palabras: fórmulas, figuras y geometría. Inmediatamente. Debajo del subgrupo central se encuentra el vocablo problemas y dispersa en relación con las demás palabras del gráfico, se localizan productos y necesaria (cuadrante derecho superior).

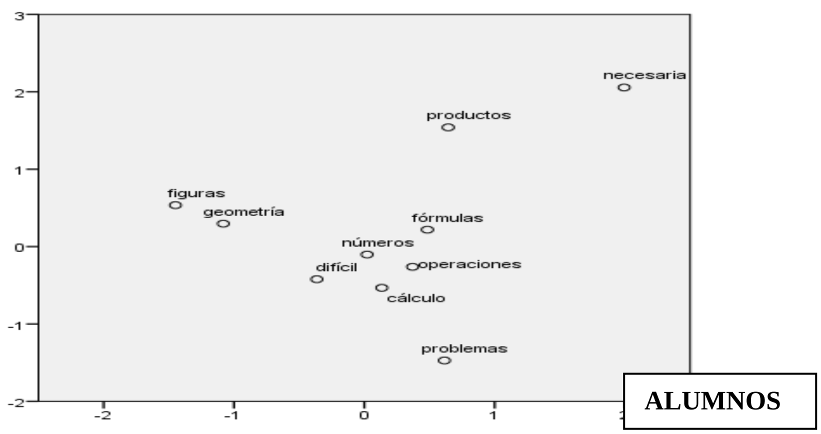


Fig. 2. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Matemática"

Esos datos sugieren que las asociaciones que realizan los alumnos están muy vinculadas a elementos de la propia materia y matizan afectivamente sus valoraciones adjudicándoles un sentido negativo. Obsérvese que hacia el centro, aparecen asociados los vocablos: “números”, “operaciones”, “cálculo”, “fórmulas”, muy cercanos a “difícil” lo que nos permite inferir que para los alumnos que participan, la matemática son todos los contenidos que reciben en clases y que al mismo tiempo les resultan difíciles.

En el cuadrante superior derecho y bien alejado del eje central aparece el vocablo "necesaria", lo que al parecer es un indicador de cierta tendencia a minimizar el reconocimiento de la aplicabilidad de esta ciencia a la vida.

Es significativo que las evocaciones de alumnos y profesores guardan relación con las temáticas propias de dicha ciencia, repitiéndose algunas de ellas, lo que deja entrever las posibles influencias que tienen los actores del proceso y el contexto, en la conformación de las creencias. Nótese una diferencia entre alumnos y profesores; en las palabras evocadas por los primeros aparece "necesaria", a pesar de lo distante en su relación con las demás, sin embargo, no es evocada por los segundos, surgiendo vocablos que orientan más al rol que desempeñan. Estas aproximaciones pueden ofrecer pistas futuras a investigaciones que se propongan profundizar en los indicadores o aspectos que determinan la conformación de las creencias epistemológicas de los docentes; en la relación de sus creencias y/o, representaciones sobre la ciencia que enseñan y los métodos de enseñanza que utilizan, así como en la planificación de la clase; en la influencia que ejercen las creencias de los profesores en las de los alumnos y en los resultados académicos que se alcanzan.

Las asociaciones a la palabra "enseñanza", realizadas por los profesores, fueron: aritmética, cálculo, números, programas, definiciones, educación, ejemplos, investigación, medios y problemas. Se puede observar en la Figura 3, que las palabras números, ejemplos, cálculo tienen una posición muy próxima al eje central. Muy cercanas a este subgrupo se encuentran los vocablos programas, educación. En el cuadrante inferior derecho están las palabras problemas, medios e investigación y en el cuadrante superior izquierdo, pero muy dispersa de las demás, el vocablo definiciones.

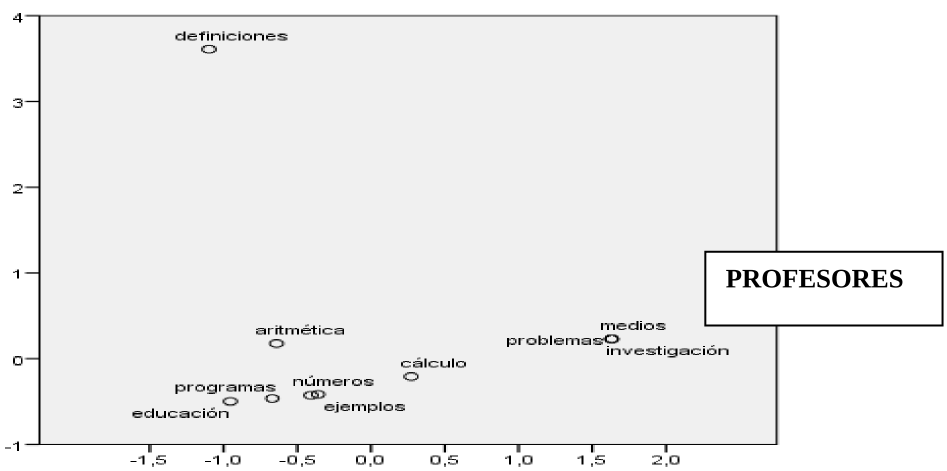


Fig. 3. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Enseñanza"

Se evidencia que los profesores creen que la "enseñanza" se compone por los ejemplos, números, cálculo, o sea, aquellos elementos de la ciencia que están presentes en su quehacer profesional. Además relacionan los vocablos medios e investigación como métodos para ejercer el proceso de enseñanza.

Para los alumnos, sin embargo, los palabras más frecuentes ante la palabra-estímulo "enseñanza" fueron: aprender, profesor, trabajo, estudiar, enseñar, esfuerzo, explicar, buena, pizarra y libros. Como se puede observar en la Figura 4, la palabra ¨enseñanza¨, para la muestra de los alumnos, se relaciona estrechamente con estudiar, situada muy próxima al eje central del gráfico, lo que indica que los alumnos presentan creencias sobre la enseñanza de la Matemática, muy vinculadas con elementos propios de esta materia. Por otra parte, se localizan vocablos como (profesor, libros y pizarra), que nos permiten inferir que para los alumnos el conocimiento de la Matemática, proviene de la figura de la autoridad (el profesor, los libros de texto), presentando una tendencia menos desarrollada (o ingenua) con respecto a la creencia sobre la fuente del conocimiento. Además se localizan calificativos de valoración positiva en relación a la enseñanza de la Matemática (buena); se expresan elementos relacionados con los procesos cognitivos (enseñar, explicar y aprender), y vocablos que indican que la enseñanza de la Matemática requiere esfuerzo y trabajo. Esta última interpretación viene a corroborar la creencia en los alumnos de que la Matemática es “difícil”, lo cual fue ilustrado en la figura 2.

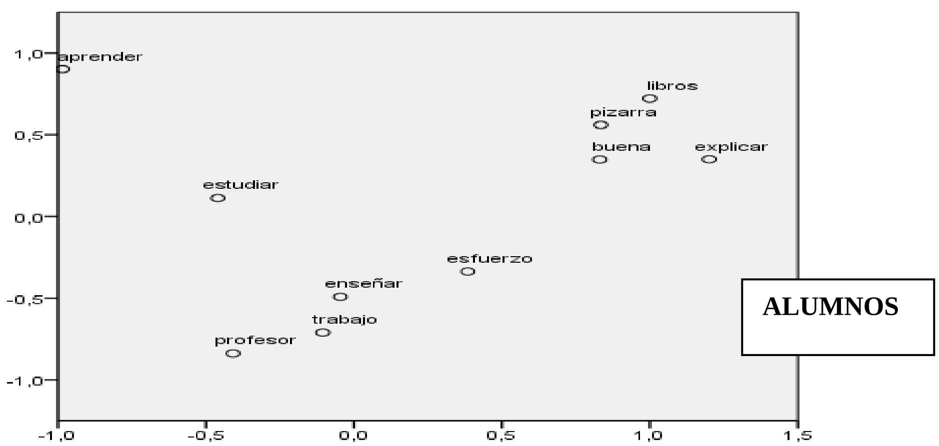


Fig. 4. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Enseñanza"

En la Figura 5 se ilustra la existencia de dispersión. Ante la palabra-estímulo “aprendizaje”, las vocablos más frecuentes por parte de la muestra de profesores fueron: problemas, ejercicios, razonamiento, conceptos, desmotivado, forzado, lentitud, niveles, preocupante y producto. Las palabras más cercanas al eje central son: razonamiento y ejercicios. En el cuadrante derecho del gráfico se localiza un subgrupo conformado por: desmotivado, forzado, preocupante y lentitud y en el cuadrante izquierdo: conceptos y problemas. Por otra parte en el cuadrante inferior izquierdo se localiza la palabra niveles y disperso del resto de los vocablos evocados, producto.

Se infiere que para los profesores, las creencias sobre el aprendizaje de la Matemática se vinculan con los procesos cognitivos (“razonamiento”), implica la práctica de “ejercicios”, la resolución de “problemas” y el dominio de “conceptos”, aspectos que se relacionan con el dominio de elementos Matemáticos y con la didáctica del proceso de enseñanza. Además, aparece el vocablo “lentitud”, que pudiera indicar creencias de los profesores relacionadas con la velocidad en la adquisición del conocimiento matemático, por ejemplo: “el aprendizaje de la Matemática es un proceso lento y sistemático”; “los alumnos de la secundaria necesitan mucho tiempo para aprender la Matemática”, etc.), pero al analizar el resto de los calificativos evocados cercanos a lentitud, (desmotivado, forzado, preocupante), también podemos inferir que el docente cree en la falta de motivación de los alumnos por el aprendizaje, en lo forzado que resulta el proceso, matizando a su vez una relación afectiva con el proceso desarrollado.

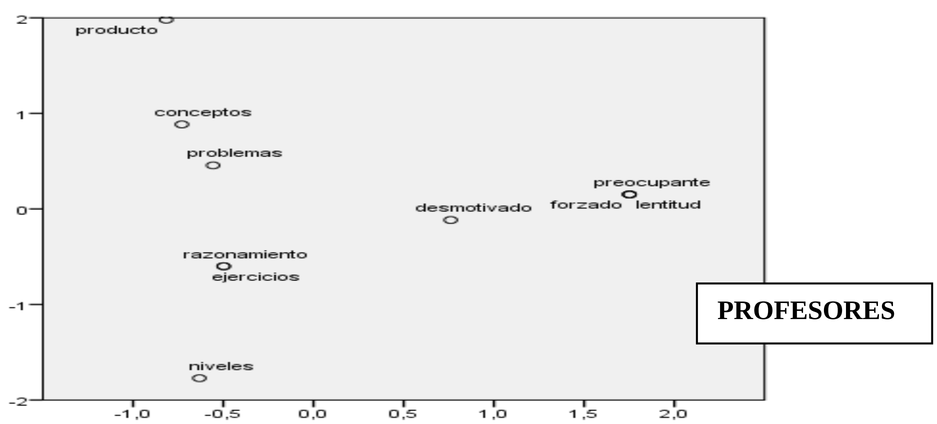


Fig. 5. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo “Aprendizaje"

En los alumnos las asociaciones a la palabra estímulo "aprendizaje", demuestran mayor frecuencia en: estudiar, memorizar, díficil, esfuerzo, aprender, desmotivado, inteligencia, recordar, calcular y complicado.

El gráfico de la Figura 6 ilustra que muy próximos al eje central se encuentran un subgrupo de palabras compuesto por díficil, memorizar y estudiar. Muy cercanos a estas se ubican los vocablos inteligencia, esfuerzo, desmotivado, aprender y complicado. Dispersos del resto de las palabras evocadas se encuentran recordar y calcular.

Al parecer los estudiantes poseen la creencia de que “se necesita mucho esfuerzo para aprender Matemática” y reconocen nuevamente su dificultad. Llama la atención que muy próximos entre sí, “desmotivado”, “aprender” y “complicado”, pueden ofrecer indicios de que los alumnos reconocen la complejidad del aprendizaje de la Matemática, pero no tienen toda la motivación que se requiere para enfrentar el proceso. Por otra parte, “inteligencia” aparece muy cercana a “díficil”, de donde inferimos que los alumnos vuelven a enfatizar su dificultad, necesitando inteligencia y memorización, expresándose con ello un estilo de pensamiento convergente orientado a reproducir el aprendizaje matemático sin un procesamiento crítico y/o autodeterminado.

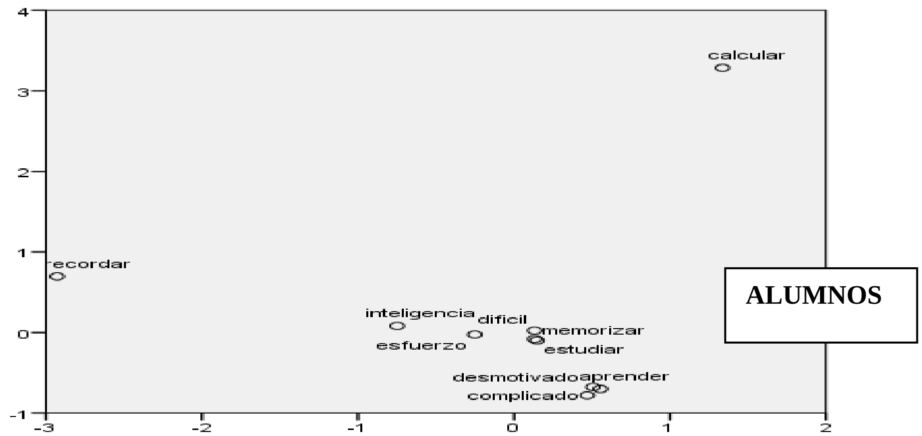


Fig. 6. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Aprendizaje"

Integrando los resultados obtenidos ante la palabra estímulo “aprendizaje”, podemos decir que se hacen llamativo “los roles asumidos”. Tanto alumnos como profesores reconocen dificultades en la motivación por la Matemática y la implicación de procesos cognitivos como el razonamiento, la inteligencia y la memoria, creencias que de acuerdo a las implicaciones que tengan para cada sujeto que aprende y enseña, puedan mediar en la autorregulación del comportamiento de unos y otros.

Ante la palabra- estímulo "aplicación", los vocablos más frecuentes por parte de los profesores fueron: escuela, vida, cálculo, demostraciones, economía, teoremas, compra, enseñanza y futuro. Si se observa el gráfico de la Figura 7 se evidencia que existe gran dipersión, los vocablos más próximos al eje central son escuela y vida. Muy próximos a estos se localizan “teoremas” (más cercano a escuela) y “economía” (más cercano a vida), una lectura podría develarnos que las aplicaciones fundamentales de la Matemática se centran en estos dos contextos; parece más claro la aplicación en la escuela al referirse a los teoremas, demostraciones, al cálculo, sin embargo, la aplicabilidad a la vida parece que solo tiene relación con la economía. Dispersas del resto aparecen: futuro y enseñanza, se reconoce el valor de estas evocaciones pero están alejadas del eje central “como si no fueran tan importantes”.

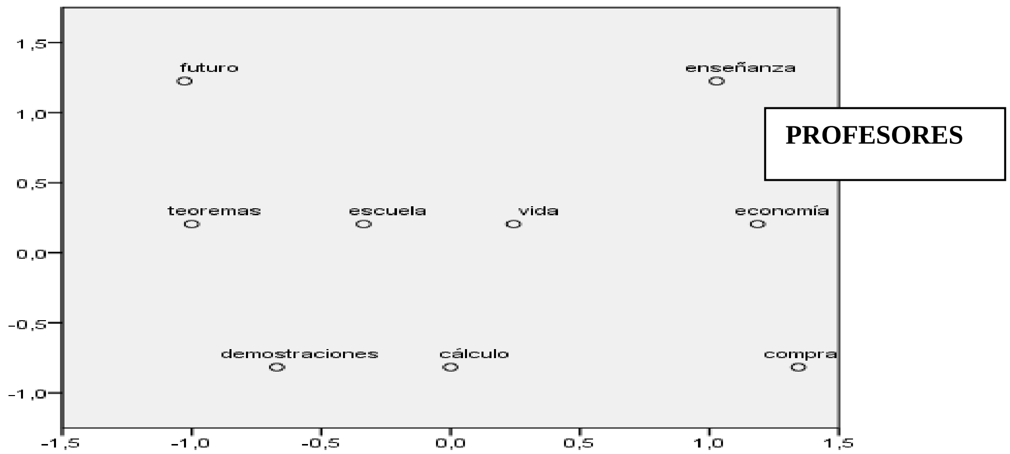


Fig. 7. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Aplicación"

Los alumnos por su parte (Figura 8), al realizar la asociación a la palabra-estímulo "aplicación", utilizan con mayor frecuencia los siguientes vocablos: clase, pruebas, cálculo, asignaturas, fórmulas, vida; de ello se puede inferir que la tendencia más fuerte se asocia a valorar su aplicabilidad en el marco del *contexto escolar,* incluyendo “vida” como una orientación ligada a la propia ciencia.

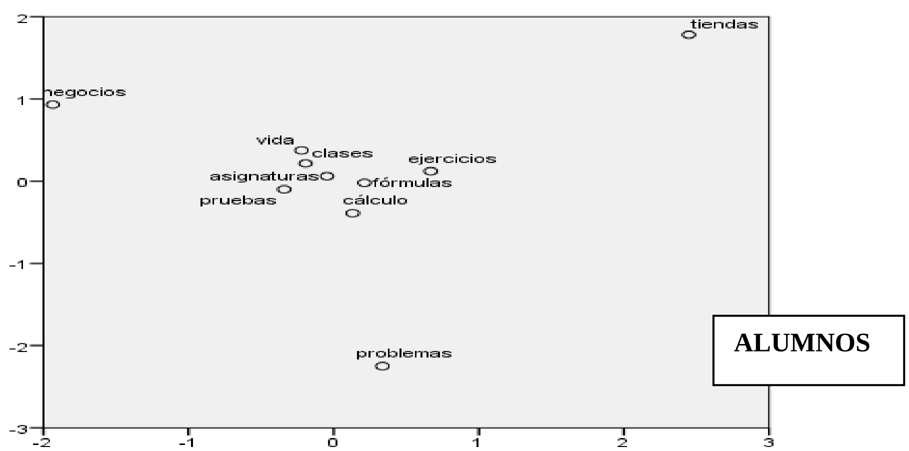


Fig. 8. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Aplicación"

Las asociaciones de los profesores a la palabra estímulo: "conocimiento", demostraron los vocablos más frecuentes: aprendizaje, aplicación, ejercicios, razonamiento, superación, regular, algorítmicos, empeño, integralidad y metodológicos. El gráfico ANACOR de la Figura 9, ilustra que la palabra más cercanas al eje central es aprendizaje, pero muy próxima a esta se ubican en el cuadrante inferior izquierdo: ejercicios, superación e integralidad. En el cuadrante derecho se localizan: razonamiento, metodológicos, algorítmicos y dispersa del resto de los vocablos se encuentran: aplicación, regular y empeño.

De estos resultados se puede inferir que los profesores reconocen el aprendizaje como complejo, en tanto asumen su carácter integral, así como el razonamiento, el empeño y la superación necesaria para su desarrollo, expresándose de esta forma creencias docentes que exigen habilidades para actualizarse y enseñar.

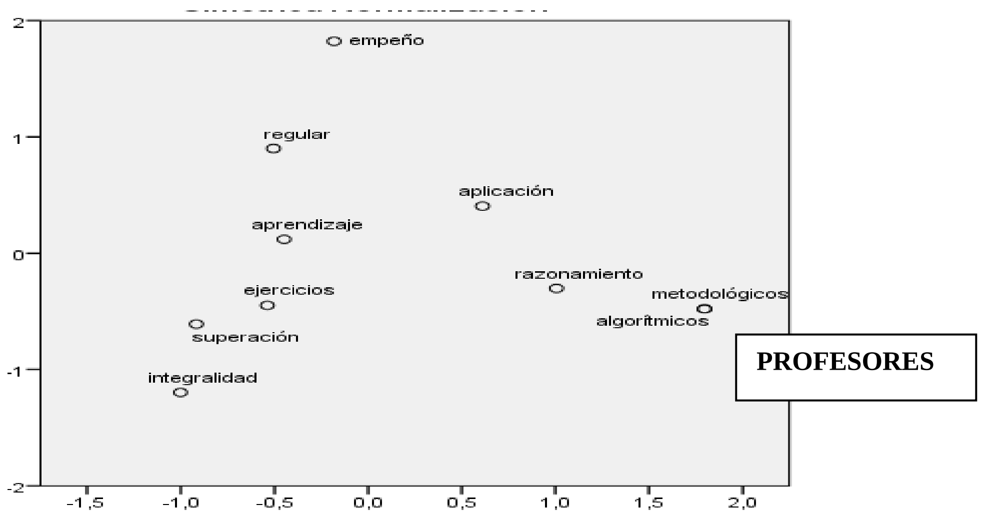


Fig. 9. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Conocimiento"

Para los alumnos, (Figura 10), los vocablos más frecuentes ante la palabra-estímulo "conocimiento" son: saber, aprender, inteligencia, sabiduría, pensar, teoría, analizar, geometría, difícil y aplicación. Muy próximos al eje central se localiza el grupo de vocablos: aplicación, inteligencia, saber y se circunscriben a ellas aprender, pensar y sabiduría. Se dispersan: difícil, teoría, analizar y geometría, pudiéndose inferir que los estudiantes creen en la complejidad del conocimiento matemático, en su aplicabilidad “contexto escolar “y su determinación.

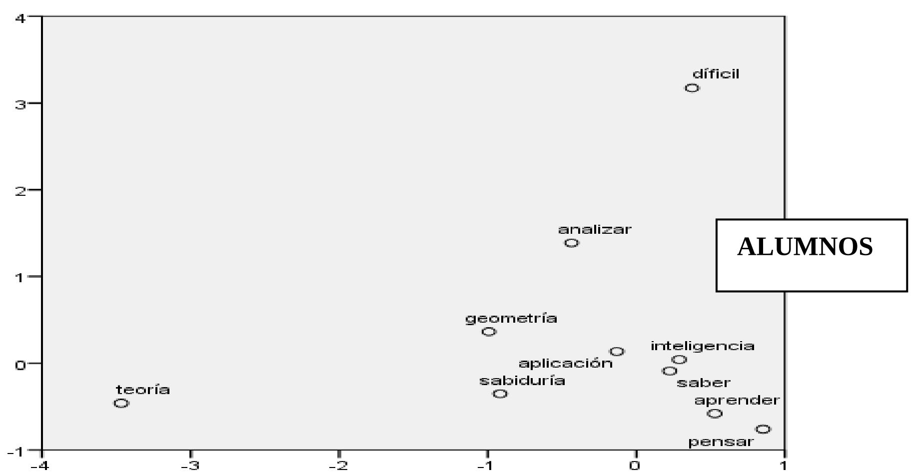


Fig. 10. ANACOR demostrativo de las evocaciones ante la palabra estímulo "Conocimiento"

2.3.1 Integración de los resultados de la técnica de "Evocación libre de palabras".

El análisis integral obtenido través de la técnica antes mencionada, nos permite valorar las posibles relaciones entre el sistema de creencias epistemológicas de profesores y alumnos en el contexto investigado, e inferir que para los alumnos el conocimiento de la Matemática proviene de la figura de la autoridad (el profesor, los libros de texto), o sea admiten su rol de aprendiz y aceptan el papel hegemónico del maestro, presentan así una tendencia ingenua respecto a la creencia “fuente del conocimiento. Los docentes se sitúan en su rol de dirección del proceso de enseñanza, creyéndose a su vez fuente fundamental del conocimiento.

Tanto profesores como alumnos consideran que la Matemática está constituida por diversos objetos matemáticos (principalmente números, problemas, ecuaciones y fórmulas) y por acciones matemáticas (operaciones como sumar y multiplicar). Las principales ideas, creencias, construcciones subjetivas expresadas por los maestros tienen un vínculo con su formación profesional, el propio conocimiento de la Matemática y su enseñanza, lo que al parecer, también ha pasado a ser una construcción subjetiva de los alumnos.

Para los profesores, las creencias sobre el aprendizaje de la Matemática se vinculan con los procesos cognitivos (“razonamiento”), implica la práctica de “ejercicios”, la resolución de “problemas” y el dominio de “conceptos”, aspectos que se relacionan con el dominio de elementos matemáticos y con la didáctica del proceso de enseñanza. Reconocen el aprendizaje como complejo, en tanto asumen su carácter integral y de ello derivan la necesidad de la superación para su desarrollo, expresándose de esta forma creencias docentes que exigen habilidades para actualizarse y enseñar. Por su parte los alumnos resaltan el esfuerzo para aprender Matemática, reconocen su dificultad, la necesidad de “inteligencia y memorización”, expresándose una tendencia a la convergencia de pensamiento y a la reproducción del aprendizaje matemático sin un procesamiento crítico y/o autodeterminado. El profesor cree en lo difícil de la asignatura y valora la desmotivación del alumno, por su parte, el alumno se autovalora como desmotivado ante esta materia.

En relación con el tiempo necesario para poder construir el conocimiento matemático tanto profesores como alumnos poseen la creencia de que se necesita mucho esfuerzo para aprender Matemática y que dicho proceso es lento, lo que nos pudiera estar indicando que ambos presentan creencias sofisticadas o desarrolladas en la dimensión “velocidad en la adquisición del aprendizaje”.

Los alumnos creen en la aplicabilidad de la Matemática al mundo real, pero ligada esta representación al contexto escolar y a las demandas de la disciplina, valoran menos su aplicabilidad a la vida diaria, aspecto que se diferencia de las creencias de los profesores, en tanto estos valoran más su aplicabilidad a la vida.

No se descarta el hecho de que las creencias epistemológicas de los sujetos estén influenciadas por el hecho de que la técnica ha sido aplicada dentro de la institución, lo cual sería una variable ajena a controlar en próximas investigaciones.

Aunque no se puedan expresar resultados concluyentes y no exista una simetría entre las creencias epistemológicas de profesores y alumnos, sí se plasma la necesidad de facilitar un cambio de las concepciones ingenuas o implícitas del aprendizaje hacia otras más fundamentadas y significativas desde el punto de vista científico, lo que pudiera redundar en el propio proceso de enseñanza –aprendizaje de dicha disciplina.

3. Consideraciones finales

Las principales creencias epistemológicas sobre la Matemática en los docentes, aparecen como construcciones subjetivas relacionadas con su formación y quehacer profesional. En el caso de los alumnos expresan una tendencia a su vinculación con las exigencias de la propia materia y quedan contextualizadas al marco escolar, son matizadas afectivamente desde una relación negativa.

Existe una tendencia marcada hacia el desarrollo asincrónico de las creencias epistemológicas tanto en profesores como alumnos, independientemente de que el primero de ellos en algunas dimensiones se exprese mayor integración, demostrando que su formación no ocurre en paralelo y que pueden existir asimetrías o contradicciones en la dinámica de su desarrollo.

Por otro lado, podemos seguir con la misma línea de análisis y destacar como sugieren los datos, que el estudio de las creencias epistemológicas se debe abordar desde una perspectiva integral en la que los diferentes tipos de creencias no siempre pueden ser explicadas por separado y en ocasiones, deben ser entendidas como un sistema complejo de información que se interrelacionan entre sí. Precisamente esta complejidad abre nuevas interrogantes para la continuidad de nuestro estudio: ¿Basta con un enfoque cuantitativo de investigación para dar respuesta a nuestro objeto de estudio? ¿Se expresan en las creencias epistemológicas de los docentes las rupturas que existen entre el discurso pedagógico y su práctica?

Para cerrar nuestras reflexiones, asumimos que los presupuestos que hemos expuesto en el trabajo, no pueden estar sujetos a interpretaciones estáticas, estas deben quedar abiertas a un movimiento de desarrollo continuo, lo que conducirá de hecho, a nuevas valoraciones, interpretaciones y replanteamientos sobre el objeto de estudio abordado.

Bibliografía

Benavidez, V. (2010). *Las evaluaciones de logros educativos y su relación con la* *calidad de la educación*. *Revista Iberoamericana de Educación, 53,* 1-8.

Chan, K.W. y Elliot, R.G. (2002). *Exploratory study of Hong Teacher Education students epistemological beliefs: Cultural perspectives and implications on beliefs research. Contemporary Educational Psychology*, *2,* 392- 414.

Gómez, I. (2005). Motivar a los alumnos de Secundaria para hacer Matemática. *Matemática: PISA en la práctica.* Recuperado el 15 de Marzo del 2013 de*: http*://www.mat.ucm.es/~imgomezc/almacen/pisa- motivar

Hernández, M. y Morejón, A. (2004). La motivación en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Recuperado 4 de Mayo del 2013 de http://www.pedagogiaprofesional.rimed.cu/Vol3%20no4/monyka.htm

Hofer, B. y Pintrich, P. (1997). *The development of epistemological theories: beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educationa Research. , 67*(1), 88-140.

Inguanzo, G. (2010). *Creencias de los profesores de nivel de Licenciatura sobre la naturaleza del conocimiento y los procesos de enseñanza y aprendizaje.* (Tesis de Doctorado Interinstitucional en Educación). Universidad de Puebla. Puebla.

Kagan, D. (1992). *Ways of Evaluating Teacher cognition: Inferences Concerning the Goldilocks Principle. Review of Educational Research*, *60*(3), 419-469.

Martínez, G. (2010). Representaciones sociales que poseen estudiantes del nivel medio superior acerca del aprendizaje y enseñanza de la Matemática. Recuperado el 6 de abril del 2013 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/2011_%20Martinez.pdf

Pajares, F. (1992). *Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332.

Perry, W. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years. A scheme*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Schommer, M. (1990). *Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. Journal of Educational Psychology*, *82*, 498–504.

Schommer, M. (1993). *Epistemological development and academic performance among secondary students. Journal of Educational Psychology*, *85*, 406–411.

Schommer, M; Calvert, Ch; Gariglietti, G y Bajaj, A. (1997). *The development of epistemological beliefs among secondary students: a longitudinal study. Journal of*

Educational *Psychology, 89*, 37-44.

Schoenfeld, A. H. (1989). *Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 338-355.

Schommer-Aikins, M., Duell, O. K., y Hutter, R. (2005). *Epistemological beliefs, mathematica Problem-solving beliefs and academic performance of middle school students. The Elementary School Journal*, *105*(3), 289-304.

Steiner, I. (2007). The effect of personal and epistemological beliefs performance in a collage development al mathematics class. An abstract of a dissertation. Universidad Estatal de Kansas, Manhattan.

Vizcaíno, A. E. (2012). La formación de creencias hacia las matemáticas: su incidencia en los resultados del aprendizaje. Multimedia VII Encuentro Internacional "Presencia de Paulo Freire" Cienfuegos: Universo Sur ISBN 978-959-257-325-3

Walker, D. L. (2007). *The development and construct validation of the epistemological beliefs survey for mathematics.* (Tesis de Doctorado). Universidad de Oklahoma. Normando.

Autores:1. Otero Ramos Idania. Profesora Titular de la Facultad de Psicología de la Universidad Central de las Villas. Doctora en Ciencias Pedagógicas. Máster en Ciencias Pedagógicas. Ha impartido docencia postgraduada en Cuba, Brasil, Chile, Perú, Colombia, República Dominicana y México. Participación en eventos nacionales e internacionales; publicaciones en sitios especializados.
2. Vizcaino Escobar Annia. Profesora de Psicología de la Universidad Central de Las Villas. Doctora en Ciencias Psicológicas; 13 años de experiencia en la docencia de pregrado y postgrado en Cuba y México. Especialista en el área de la Psicología Educativa. Participación en eventos nacionales e internacionales, autora y coautora de libros y artículos publicados en revistas especializadas.
3.Carmenates Estrada Darlys. Graduada de Psicología en la Universidad Central de las Villas en el 2013, con "Título de Oro". Se desempeñó como alumna ayudante durante los últimos 3 años de su carrera. Ha participado en eventos estudiantiles nacionales e internacionales y en Grupos Científicos Estudiantiles del área de la Psicología Educativa.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 185-209

Conocimientos puestos en juego por futuros profesores de matemáticas cuando justifican la selección de tareas

María José González, Pedro Gómez, Irene Polo, Ángela Restrepo

Fecha de recepción: 27/11/2013
Fecha de aceptación: 26/08/2015

Resumen	En algunos planes de formación de profesores, el profesor aprende a manejar herramientas conceptuales y metodológicas para elaborar propuestas docentes. En este artículo, identificamos los tres tipos de conocimiento que los futuros profesores que participaron en un plan de formación de ese tipo utilizaron cuando justificaron su propuesta docente: uno relacionado con las herramientas, otro con elementos transversales del plan de formación y un tercer tipo de conocimiento ajeno al plan de formación. Constatamos que el conocimiento relacionado con las herramientas es dominante, se entremezcla con los otros dos tipos de conocimiento y se enuncia de forma ajena a la propia matemática. **Palabras clave**: Competencia de planificación; Conocimiento del profesor de matemáticas; Formación inicial de profesores; Selección de tareas.
Abstract	In some mathematics teacher education programs, teachers are provided with methodological and conceptual tools that enable them to analyze and select teaching tasks. In this paper we analyze the arguments given by a group of future teachers that participated in a teacher education program of this type when they were asked to select tasks. We found that they enacted three types of knowledge: one directly related to the tools, a second one related to transversal knowledge included in the education program, and a third one foreign to the program. We observed that the arguments based on the tools were more frequent, but were often mixed with other arguments, and were enounced in general terms. **Keywords**: Planning competence; Preservice teacher education; Mathematics teacher knowledge; Tasks selection
Resumo	Em alguns planos de formação de professores, proporcionase aos professores ferramentas conceituais e metodológicas com as que se espera que eles analisem e selecionem tarefas. Neste artigo, identificamos os três tipos de conhecimento que os futuros professores que participaram em um plano de formação desse tipo colocaram em jogo nos seus argumentos quando justificaram a seleção de seu desenho curricular: um relacionado com as ferramentas, outro relacionado com elementos transversas e um terceiro tipo de conhecimento alheio ao plano. Constatamos que os argumento relacionados com as ferramentas são dominantes, mas se misturam com outros dois tipos de conhecimento, y se enunciam em termos gerais. **Palavras-chave:** Competência de planificação; Conhecimento do professor de Matemática; Formação inicial de professores; Seleção de tarefas.

1. Introducción

Los escolares aprenden en el aula con motivo de las oportunidades de aprendizaje que les ofrece el profesor (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001, p. 435). Estas oportunidades de aprendizaje se configuran alrededor de tareas que pretenden ser estímulos para que los escolares actúen y, con motivo de esa actuación, construyan su conocimiento matemático (Christiansen, Howson y Otte, 1986, p. 260). Algunos autores destacan que la calidad y profundidad del conocimiento matemático que los escolares desarrollan en el aula depende de las tareas que el profesor diseña o selecciona para cada sesión de clase (Wood, 2002, p. 202; Arbaugh y Brown, 2005, p. 504). Por tanto, el análisis, selección y organización de estas tareas es un aspecto clave que forma parte de la actividad de planificación del profesor en el que se espera que sea competente (Niss, 2003; Recio, 2004).

Numerosos planes de formación de profesores están orientados a desarrollar en el profesor en formación conocimientos para llevar a cabo estos procesos de análisis, selección y organización de tareas. Nosotros conjeturamos que estos procesos son complejos y que el profesor en formación pone en juego distintos tipos de conocimiento al realizarlos. Consideramos que los argumentos que emplean los profesores en formación cuando explican por qué han realizado una determinada selección de tareas dan cuenta de esta complejidad y pueden ser indicadores de los conocimientos desarrollados en el plan de formación.

En este artículo, identificamos y caracterizamos los conocimientos que, a la hora de seleccionar tareas, pusieron en juego los futuros profesores que participaron en un plan de formación inicial de tipo funcional. Para ello, recogimos información sobre sus argumentos de diferentes fuentes y la codificamos atendiendo a tres tipos de conocimiento y al grado de concreción de los argumentos. El análisis de la información codificada nos permitió establecer, entre otras cosas, en qué medida los argumentos de los profesores en formación se basan en el conocimiento didáctico que el plan de formación esperaba que desarrollaran. En lo que sigue, presentamos una breve revisión de la literatura sobre análisis y selección de tareas, establecemos nuestra posición sobre el aprendizaje de los profesores en formación, describimos el esquema metodológico que utilizamos y presentamos los resultados obtenidos.

2. Conocimientos para la selección de tareas

Mason resalta la importancia del análisis y la selección de tareas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cuando afirma que “en cierto sentido, toda la enseñanza se concreta en la construcción de tareas para los estudiantes” (2002, p. 105). Las tareas y la interacción que surge de ellas en clase son el eslabón que relaciona la enseñanza y el aprendizaje (Hiebert y Wearne, 1997). De hecho, en los estándares profesionales del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y en el informe Adding it Up (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) se considera que la construcción y selección de tareas matemáticas es una de las decisiones didácticas más importantes que debe tomar el profesor.

Los profesores proponen tareas porque consideran que esas tareas van a promover el aprendizaje. Pero Mason (2004) se pregunta: “¿qué aprendizaje va a emerger de una tarea dada y cómo se pueden seleccionar las tareas para promover cierto tipo de aprendizaje?” (p. 25). La capacidad del profesor para seleccionar e implementar tareas depende de múltiples factores entre los que se incluyen su conocimiento, sus creencias y sus metas, por un lado, y el contrato didáctico en el que participa y las normas de la situación instruccional en el la que se encuentra (Herbst y Chazan, 2012). En este artículo centramos nuestra atención en el papel del conocimiento del profesor en esa capacidad (Charalambous, 2008). Entendemos, por consiguiente, que esta capacidad es uno de los atributos fundamentales del profesor, debe formar parte de su conocimiento didáctico y debe ser objeto de los planes de formación de profesores.

El desarrollo de la capacidad para analizar y seleccionar tareas en planes de formación de profesores es un campo de investigación que se comienza a explorar. Por ejemplo, Hill, Rowan y Ball (2005) sugieren la necesidad de investigar acerca de cómo los profesores ponen en juego su conocimiento durante la planificación. Dado que, como afirma Crespo (2003), el aprender a diseñar y seleccionar tareas matemáticas es uno de los retos de aprender a enseñar matemáticas, nos preguntamos acerca de los conocimientos que los profesores en formación ponen en juego a la hora de seleccionar tareas en el contexto de un plan de formación. Recientemente se ha venido realizando investigación sobre esta cuestión (Tzur, Zaslavsky y Sullivan, 2008).

Algunos investigadores se han preocupado por explorar el proceso de selección y justificación de tareas en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. A estos efectos, Liljedah, Chernoff y Zazkis (2007) establecen cuatro fases para el proceso de selección y mejoramiento de una tarea: (a) un análisis predictivo o a priori, (b) un ensayo o primera prueba de la tarea, (c) un análisis reflexivo o a posteriori, y (d) una fase de ajustes. En un estudio con profesores en activo, Crespo (2003) encontró que la forma como ellos usaron las tareas en clase cambiaba a medida que ellos ganaban experiencia en la enseñanza. Ella conjeturó que el conocimiento del profesor podía ser uno de los elementos que permiten explicar el cambio aparente en la forma como los profesores proponen los problemas matemáticos. En la misma línea, Talanquer, Novodvorsky y Tomanek (2010) han identificado las preferencias de los candidatos a profesor de ciencias a la hora de seleccionar tareas. Ellos encontraron que los profesores en formación eligen las tareas por su capacidad para motivar al estudiante, su relevancia en la vida personal y las necesidades del alumno, y su potencial para promover la transferencia de habilidades a ámbitos no científicos. En un estudio con futuros profesores, Cannon (2008) investigó cómo ellos usaron su conocimiento del contenido matemático y su conocimiento pedagógico de contenido para diseñar y modificar tareas. Encontró que los futuros profesores usaron lo que Hill, Ball y Schilling (2008) denominan su conocimiento general del contenido cuando no tenían suficiente conocimiento en otros dominios, especialmente cuando carecían de un conocimiento especializado del contenido. Osana, Lacroix, Tucker y Desrosiers (2006) estudiaron en qué medida el conocimiento profesional tenía efectos en las capacidades de los futuros profesores de secundaria para organizar apropiadamente un conjunto de tareas. Ellos encontraron que los futuros profesores que tenían un conocimiento más sólido del contenido podían realizar mejor este tipo de actividad que aquellos con un conocimiento más débil. En un estudio relacionado con el nuestro, Clarke y Roche (2010) investigaron sobre el tipo de tareas que profesores de secundaria escogían, las razones para esa selección y las formas en que ellos cambiaban las tareas con motivo de un plan de formación. Encontraron que los futuros profesores podían articular razones para su selección de tareas, que estas razones presentaban gran diversidad, y que la mayoría de profesores cambiaron el uso que daban a los diferentes tipos de tareas como resultado de la formación.

Estos estudios ponen en evidencia la importancia que la comunidad de investigadores en Educación Matemática está dando a los procesos de análisis y selección de tareas que realizan los profesores dentro de los planes en formación y el interés de la comunidad por indagar acerca de los factores que pueden influir en esos procesos. En este artículo nos interesamos por los conocimientos que los profesores en formación ponen en juego cuando analizan y seleccionan tareas en el contexto de planes de formación de tipo funcional. En el siguiente apartado describimos este tipo de planes.

3. Planes de formación de tipo funcional

El estudio que presentamos en este artículo se desarrolló en el contexto de un plan de formación de profesores de tipo funcional. En este tipo de planes, los profesores en formación deben adoptar un papel protagonista en la toma de decisiones sobre distintos aspectos de la planificación docente. En ellos, se pretende contribuir a la competencia de planificación del profesor, es decir, a su capacidad para analizar, seleccionar y reformular de manera sistemática y justificada las tareas que él considera que pueden aportar eficientemente al logro de las expectativas de aprendizaje que espera conseguir (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Se entiende que el análisis y selección de las tareas que forman parte de un diseño curricular sobre un contenido matemático no surge informalmente como producto de la intuición didáctica del profesor (Lupiáñez y Gómez, 2003). Se espera, por el contrario, que sea fruto de la puesta en práctica del conocimiento didáctico que el profesor desarrolla en el plan de formación (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Este conocimiento didáctico se apoya en distintos referentes en el plan de formación. Por un lado, teniendo como foco de atención un tema matemático escolar, se refiere al conocimiento de dicho tema desde distintas perspectivas útiles a su enseñanza y aprendizaje: por ejemplo, conocer la estructura conceptual del tema en el currículo escolar o los errores y dificultades frecuentes en los que incurren los escolares. Por otro lado, se refiere a la concreción a un tema matemático de planteamientos cognitivos o pedagógicos de carácter transversal: por ejemplo, conocer estrategias generales de enseñanza y evaluación adaptados a los distintos temas matemáticos. Se pretende que este conocimiento didáctico permita al profesor en formación analizar el tema sobre el que va a planificar; producir y organizar información sobre el mismo, con motivo de ese análisis; basarse en esa información para analizar las tareas que él considera como candidatas para formar parte de su diseño curricular; y proponer una selección justificada de aquellas que él considera más relevantes de cara a sus expectativas de aprendizaje (Gómez, 2006).

Desde hace varios años, se vienen desarrollando en España y Colombia planes de formación de profesores de matemáticas de secundaria de tipo funcional basados en un modelo denominado análisis didáctico (Gómez, 2002, 2007; Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiánez, Marín et al., 2010). En estos planes, el profesor en formación analiza un tema de las matemáticas escolares siguiendo un ciclo de cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Cada uno de estos análisis está compuesto por un conjunto de herramientas conceptuales y metodológicas que denominamos organizadores del currículo (Rico, 1997). Con cada organizador del currículo, el profesor en formación puede analizar un aspecto particular del tema sobre el que trabaja y producir información acerca del mismo. La estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología (análisis de contenido), los errores y dificultades (análisis cognitivo), la complejidad de las tareas y los materiales y recursos (análisis de instrucción), la secuencia de evaluación (análisis de actuación), y la historia son ejemplos de organizadores del currículo. Así, por ejemplo, cuando el profesor en formación analiza su tema desde la perspectiva de su estructura conceptual, se espera que él identifique los conceptos y procedimientos involucrados en el tema y establezca las relaciones estructurales que permiten describirlo; cuando atiende a los errores y dificultades, se espera que él identifique los errores más frecuentes en los que los escolares pueden incurrir cuando abordan tareas sobre el tema en cuestión y establezca las dificultades que están en el origen de esos errores; cuando analiza las tareas, se espera que él establezca la complejidad de cada tarea de acuerdo, por ejemplo, con la clasificación de grupos de competencias del estudio PISA (OCDE, 2006, pp. 102-112). La historia es un organizador del currículo que proporciona información útil para los diferentes análisis.

4. Aprendizaje de un organizador del currículo

Rico (1997) define los organizadores del currículo como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”, establece una serie de condiciones para que un concepto pueda ser considerado como organizador del currículo y propone una lista de ocho organizadores del currículo (pp. 45-46). Resumimos esta descripción en dos condiciones principales: un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema de las matemáticas escolares con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de propuestas docentes. Por consiguiente, los organizadores del currículo son herramientas para el análisis de un tema concreto de las matemáticas escolares que le permiten al profesor producir información útil para su proceso de planificación. Por ejemplo, cuando el profesor en formación utiliza los sistemas de representación para analizar un tema, los formadores esperamos que él pueda distinguir diferentes sistemas de representación; identificar los sistemas de representación que son más relevantes para el tema; establecer de qué manera cada sistema de representación resalta aspectos particulares del mismo; identificar las relaciones entre ellos; considerar la información sobre la estructura conceptual para detallar las representaciones de conceptos y procedimientos; y utilizar la información sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación a la hora de hacer el análisis fenomenológico del tema o de analizar y seleccionar tareas para el diseño de una propuesta docente sobre dicho tema.

Para llegar a poner en práctica un organizador del currículo con estos propósitos, el profesor en formación (a) necesita cierta comprensión del organizador del currículo para (b) usarlo al analizar un concepto matemático y producir una información que, a su vez, (c) puede ser utilizada, posiblemente en conjunción con la información proveniente de otros organizadores del currículo, para analizar y seleccionar tareas. Es decir, al utilizar un organizador del currículo, el profesor en formación pone en juego tres tipos de conocimiento que denominamos significado, uso técnico y uso práctico de un organizador del currículo (González y Gómez, 2008). Esta clasificación de los conocimientos del profesor en formación se inspira en las categorías de episteme, techne y phronesis propuestas por Aristóteles (1984) y que han sido adoptadas y adaptadas por algunos autores en el terreno de la educación para referirse a los conocimientos y la actuación del profesor y la dualidad entre la teoría y la práctica (Back, 2002; Kinsella y Pitman, 2012, Orton 1997, Saugstad, 2005). Mientras que episteme se refiere a la teoría —lo universal—, techne y phronesis se refieren al conocimiento práctico —lo particular—. El significado de un organizador del currículo (episteme) es un conocimiento teórico que emerge de la literatura de Educación Matemática. Es un conocimiento aceptado por la comunidad, independiente del contexto. El uso técnico y el uso práctico son dos tipos de conocimiento práctico. Son variables y dependen del contexto —del tema que se esté analizando y de la situación de enseñanza que se está planificando—. El uso técnico (techne) está orientado hacia la producción y se caracteriza como un conocimiento que tiene como propósito responder a la pregunta "¿qué hago para producir información sobre el tema?". El uso práctico (phronesis) se orienta hacia la acción e implica la toma de decisiones relacionadas con el uso de la información que emerge del uso técnico para otros análisis o la selección de tareas y la justificación de esa selección.

5. Categorías para la clasificación de argumentos

El desarrollo de la competencia de planificación del profesor se concreta en los planes de formación de tipo funcional mediante la expectativa de que el profesor en formación utilice la información que surge de los análisis que realiza con los organizadores del currículo para analizar y seleccionar las tareas que incluirá en su diseño curricular para el tema, y que se base en esa información para justificar la selección de aquellas tareas que considera más relevantes. Que los profesores en formación utilicen los organizadores del currículo en el proceso de selección de tareas es, de hecho, la expectativa principal de estos planes. No obstante, estos planes de formación también suelen incorporar otros elementos formativos que, aunque no son específicos de los temas matemáticos, pueden condicionar las decisiones del profesor sobre la selección de tareas e intervenir en sus justificaciones. Además, el profesor llega al programa de formación con un conocimiento propio sobre el aprendizaje y la enseñanza. Este conocimiento no está tipificado a priori y no se trabaja de manera específica en el plan de formación, pero puede influir de manera importante en las decisiones del profesor cuando realiza un diseño curricular.

El marco conceptual que hemos presentado en los apartados anteriores nos permite establecer las categorías que nos permitirán abordar nuestro problema de investigación. Estas categorías se refieren, por un lado, a los tipos de conocimiento que los futuros profesores ponen en juego cuando formulan argumentos para justificar la selección de tareas y, por otro lado, al grado de concreción de esos argumentos.

5.1. Categorías de conocimiento

Como hemos indicado, los formadores de los planes de formación funcionales esperan que los profesores en formación desarrollen un conocimiento sobre los organizadores del currículo que sea útil a la planificación. Aunque el significado, el uso técnico y el uso práctico de un organizador del currículo están fuertemente relacionados entre sí, el uso práctico es el tipo de conocimiento que está directamente implicado en el proceso de análisis y selección de tareas. Por tanto, este tipo de conocimiento constituye la primera categoría de conocimiento. Los profesores en formación ponen de manifiesto este tipo de conocimiento cuando, en los argumentos que emplean al analizar o seleccionar una tarea, hacen referencia a la información sobre su tema que han generado previamente con uno o más organizadores del currículo y dicha información les permite tomar una decisión sobre la pertinencia de la tarea. Es el caso, por ejemplo, de un profesor en formación que da la siguiente explicación: “Sí, esta tarea contribuye a aclarar los conceptos de media y mediana que es el error número 11 y contribuye también a superar la dificultad 5 que es la de interpretar los parámetros estadísticos en el sistema de representación gráfico.” Observamos que el profesor en formación utiliza información que ha generado previamente sobre los errores y dificultades para explicar por qué una tarea le parece adecuada. En este trabajo, centraremos nuestra atención en cinco organizadores del currículo: los sistemas de representación, la fenomenología, los errores y las dificultades, la historia y la complejidad de las tareas. Estos son los organizadores del currículo que, en nuestra experiencia, han aparecido de forma más habitual y espontánea.

Con cierta frecuencia, los profesores en formación seleccionan tareas sin hacer ninguna referencia a los organizadores del currículo. En algunos de estos casos ellos ponen en juego conocimientos que, de forma transversal, forman parte del contenido del plan de formación, como el currículo normativo, la epistemología del conocimiento matemático, las teorías de aprendizaje, las metodologías basadas en la resolución de problemas y los modelos de evaluación. Estos contenidos, a diferencia de los organizadores del currículo, no se presentan en el plan de formación directamente vinculados a temas concretos de las matemáticas escolares, pero abordan cuestiones relevantes desde el punto de vista de la selección de tareas. Estos conocimientos transversales constituyen la segunda categoría de conocimiento que utilizaremos. Por ejemplo, un profesor en formación puede analizar una tarea y proponer una modificación utilizando el argumento siguiente: "Además, el profesor puede modificar las reglas del conocido juego, con el objetivo de analizar otras capacidades de los alumnos, tales como la expresión oral y demás aspectos en los que se insiste en el currículo." Observamos que el profesor en formación está poniendo en juego su conocimiento sobre el currículo normativo.

Por último, consideramos una tercera categoría que recoge conocimientos diversos no tratados en el plan de formación pero que aparecen con cierta frecuencia en los argumentos de los profesores. En la mayoría de los casos, son conocimientos que no son específicos a las matemáticas y que, posiblemente, los profesores en formación han desarrollado en otros contextos como producto de su experiencia como estudiantes o como profesores en ejercicio. Por ejemplo, los profesores en formación pueden argumentar que seleccionan una tarea por considerar que aumentará la motivación del escolar o proponen formular una tarea en inglés para mejorar las competencias de los escolares en esta lengua, sin que estos aspectos hayan sido objeto de instrucción en el plan de formación.

5.2. Grado de concreción de los argumentos

La forma en que los profesores en formación expresan sus argumentos al seleccionar tareas es variada. En ocasiones realizan reflexiones generales que podrían servir para cualquiera de las tareas del tema o incluso de otros temas. Aún cuando tienen delante una tarea y explican las razones que justifican su selección, puede ocurrir que no mencionen explícitamente ninguno de los atributos concretos de dicha tarea. Esta peculiaridad ocurre independientemente del tipo de conocimiento que estén poniendo en juego. Por ello, hemos considerado relevante adoptar un segundo criterio clasificación que denominamos grado de concreción del argumento. Decimos que un argumento tiene un grado de concreción particular cuando hace referencia explícita a la tarea matemática que se está analizando o cuando utiliza como ejemplo una tarea matemática concreta. En otro caso, decimos que el argumento tiene un grado de concreción general. Por ejemplo, un profesor que dice "he propuesto tareas sobre la vida cotidiana, como la del teleférico, que les ayuda a ver la importancia de las matemáticas en la vida real" está haciendo un argumento particular, mientras que si el profesor indica que con su propuesta "se introduce un cierto pluralismo en los métodos de enseñanza", entonces está haciendo un argumento general.

6. Objetivo de la investigación

El objetivo de este estudio es describir y caracterizar los conocimientos que los futuros profesores que participaron en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de tipo funcional pusieron en juego cuando seleccionaron y justificaron las tareas que configuraron su propuesta curricular. Para abordar este objetivo nos basaremos en las categorías de clasificación de los argumentos propuestos por los futuros profesores que establecimos en el apartado anterior.

7. Método

En este apartado describimos el contexto de formación de profesores en el que realizamos el estudio, las fuentes e instrumentos con los que recogimos la información, y los procedimientos que utilizamos para codificar dicha información.

7.1. Contexto de la experiencia

Realizamos la experiencia con 9 alumnos que participaron en la asignatura "Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria". Se trata de una asignatura optativa cuatrimestral de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Cantabria (España). Los alumnos que eligen esta asignatura previsiblemente continuarán su formación para ser profesores de matemáticas de secundaria. Por ello, en el contexto de la asignatura, son considerados profesores de matemáticas en formación inicial. La experiencia tuvo lugar durante el curso académico 2010/2011. Los alumnos fueron divididos en tres grupos, cada uno de los cuales realizó el análisis didáctico de un tema matemático. Los tres temas abordados fueron teorema de Pitágoras, ecuación de segundo grado y estadística.

El modo de trabajo en la asignatura consiste en ir introduciendo secuencialmente los siguientes organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología, historia, expectativas de aprendizaje, errores y dificultades, hipótesis de aprendizaje, complejidad y funcionalidad de las tareas. Para cada uno de estos organizadores se sigue un proceso secuenciado en tres partes. En la primera parte, el formador presenta —mediante apuntes, ejemplos, explicaciones o lecturas— información teórica sobre el organizador del currículo. Por ejemplo, cuando se introducen las nociones de error y dificultad, el formador las caracteriza haciendo una presentación de los significados que se adoptarán para ellas en la asignatura. Dichos significados son una selección de los que tienen estas nociones en la literatura sobre Educación Matemática. En la segunda parte, los grupos de futuros profesores analizan su tema matemático bajo la perspectiva de dicho organizador del currículo y producen información sobre el mismo. Por ejemplo, realizan un listado de los errores y dificultades asociados a su tema matemático, para lo cual siguen distintas técnicas (localizan fuentes en la literatura, llevan a cabo algún experimento concreto, utilizan su experiencia, etc). En la tercera parte, los grupos de futuros profesores utilizan la información obtenida sobre el organizador del currículo para diseñar o seleccionar tareas matemáticas relacionadas con el mismo. Por ejemplo, buscan o diseñan tareas matemáticas que permitan a los estudiantes superar los errores y dificultades del listado que han obtenido.

De esta forma, durante los cuatro meses que dura el proceso formativo, los futuros profesores van elaborando progresivamente un listado de tareas matemáticas como resultado de la utilización de la información obtenida con los organizadores del currículo. El listado se va completando y refinando a medida que se incorporan nuevos organizadores del currículo y, en consecuencia, se añaden nuevos criterios de análisis y selección de tareas. Por ejemplo, tras estudiar el organizador sistemas de representación y obtener un listado de representaciones asociado a un tema matemático, los futuros profesores diseñan y seleccionan tareas sobre dicho tema en las que intervienen las representaciones más adecuadas. Posteriormente, tras generar el listado de errores del tema, diseñan y seleccionan tareas que permiten superar los errores identificados. Pero, dado que se cuenta ya con la información sobre las representaciones, se espera que seleccionen tareas que permitan superar errores utilizando los sistemas de representación previamente seleccionados.

De forma transversal a este proceso de estudio de los organizadores del currículo, en el plan de formación se introducen temas generales sobre el currículo normativo, la epistemología del conocimiento matemático, las teorías de aprendizaje, las metodologías basadas en la resolución de problemas y los modelos de evaluación. Estos temas son presentados por el formador de forma teórica y los futuros profesores realizan lecturas críticas o estudios comparados sobre cada tema.

Como trabajo final del curso, los futuros profesores realizan una propuesta docente sobre el tema matemático que hayan analizado para estudiantes de secundaria de un nivel concreto. La propuesta docente contiene:

- Los objetivos que pretenden conseguir.
- La descripción de las tareas matemáticas que van a proponer a los estudiantes. Estas tareas se seleccionan o diseñan a partir del listado de tareas que se ha ido elaborando a lo largo del curso.

- La secuenciación de dichas tareas en sesiones de clase, así como las orientaciones metodológicas necesarias para llevar a cabo cada sesión.
- El modelo de evaluación, que incluye los criterios y los instrumentos de evaluación.

Además, los grupos elaboran la guía didáctica de la propuesta docente. Este es un documento en el que cada grupo explica, de forma argumentada, todas las decisiones que ha tomado durante la elaboración de la propuesta. Está escrito en un lenguaje dirigido a un potencial profesor que desee implementar dicha propuesta. La guía didáctica contiene, en particular, argumentos sobre la selección de las tareas matemáticas que conforman las sesiones de clase.

7.2. Instrumentos de recolección de información

En el proceso de recolección de la información utilizamos tres instrumentos: la guía didáctica de la propuesta docente elaborada por cada grupo y dos test específicos.

7.2.1. Guía didáctica

El hecho de considerar la guía didáctica como instrumento de recogida de información, aun siendo un instrumento propio de la asignatura, obedece a varias razones. Por su propia caracterización, la guía didáctica constituye un registro de gran riqueza desde el punto de vista argumentativo. Se elabora en la parte final del curso. En ese momento, el futuro profesor dispone de la información que ha generado para el tema sobre todos los organizadores del currículo y sobre los temas transversales tratados en el curso. Además, la guía didáctica contiene justificaciones espontáneas sobre las tareas seleccionadas por cada grupo, a diferencia de lo que ocurre en los test, en los que aportamos una preselección dirigida de tareas y preguntamos por organizadores del currículo concretos, como veremos enseguida.

Presentamos, a modo de ejemplo, un fragmento de la guía didáctica del grupo que trabajó sobre Estadística. En este fragmento hacen alusión a una tarea en la que se administran dos medicamentos y un placebo a tres grupos de hipertensos y se pide concluir, mediante el cálculo de la media y la mediana de varios datos observados, qué medicamento es el más efectivo.

> Las cuestiones fenomenológicas a las que da respuesta la estadística descriptiva que vamos a tratar son las siguientes:
>
> - poder comparar múltiples muestras;
> - predecir algún suceso basándose en lo sucedido anteriormente;
> - utilizar los parámetros estadísticos para la toma de decisiones;
> - llevar un registro de los datos;
> - estimar una cantidad a partir de una muestra.
>
> Dado que nuestro planteamiento fundamental es que los alumnos conozcan las aplicaciones reales de nuestro tema, hemos incluido tareas que corresponden a cada una de estas preguntas fenomenológicas. La más significativa de ellas para nosotros es la del

medicamento. Con esta tarea pretendemos que el alumno desarrolle su intuición interpretativa de una muestra antes de analizarla matemáticamente. Se trata de una actividad muy guiada en la que buscamos que el alumno se dé cuenta de los errores que comete con su propia intuición y a qué se deben estos errores. Esta tarea corresponde a la comparación de muestras y a la toma de decisiones, ya que el objetivo final es decidir qué medicamento es el adecuado basándose en la comparación de las muestras.

7.2.2. Test 1

En el test 1, proporcionamos a cada grupo dos tareas matemáticas relacionadas con su tema matemático y les solicitamos que añadieran una tarea propia. Sobre cada una de las tres tareas, los futuros profesores respondieron a la siguiente cuestión, en la que les solicitamos que reflexionaran sobre tres organizadores del currículo —sistemas de representación, errores y dificultades, y fenomenología—:

Explica en cada caso en qué sentido consideras que:
1. Al resolver la tarea se ponen en juego distintos sistemas de representación.
2. La tarea contribuye a que el alumno supere algún error.
3. El alumno utiliza su conocimiento formal en contextos prácticos.

Seleccionamos estos tres organizadores del currículo porque eran los que habían aparecido como referente frecuente para los futuros profesores cuando se les pedía proponer tareas de forma espontánea. Todas las tareas propuestas en el test 1 tienen en común que, al resolverlas, se ponen en juego distintos sistemas de representación, abordan algún error y se plantean en algún contexto propio del tema. Nuestra intención con este test era determinar si en las respuestas de los futuros profesores había evidencias de uso práctico de los organizadores del currículo señalados.

7.2.3. Test 2

En el test 2 proporcionamos una lista de tareas —entre 7 y 10— a cada grupo y solicitamos lo siguiente:

> Considera las siguientes tareas. Selecciona 3 de ellas, que sean las que consideres más adecuadas para tu propuesta docente. Justifica por qué son esas las elegidas. También puedes hacer modificaciones en las tareas que elijas explicando tus razones.

Entre las tareas propuestas, algunas se relacionan con los tres organizadores del currículo, otras con dos de ellos, otras con uno solo y otras con ninguno. La diferencia principal con el test 1 es que en la pregunta que hacemos a los futuros profesores en el test 2 no se hace ninguna alusión a los organizadores del currículo que están implicados en las tareas. De esta forma el test 2 no condiciona al profesor a emplear organizadores del currículo en sus argumentos.

Los futuros profesores realizaron los dos test en días consecutivos al final del curso, una vez que habían concluido el análisis didáctico de su tema.

7.3. Codificación de la información

En el análisis de la información que surgió a partir de estos tres instrumentos, identificamos un total de 72 argumentos, es decir, frases en las que los futuros profesores justifican su decisión sobre la selección de tareas. A continuación llevamos a cabo un proceso de codificación en dos partes.

En la primera parte, asociamos a cada argumento un código que consiste en un par formado por el tipo de conocimiento empleado y el grado de concreción. El tipo de conocimiento empleado se refiere a cada una de las tres categorías de conocimiento que presentamos anteriormente, a las que denominamos, de forma abreviada, uso práctico, conocimientos transversales y conocimientos ajenos al plan. El grado de concreción puede ser particular o general.

En la segunda parte, asociamos a la primera componente del código un subcódigo que especifica detalles sobre el tipo de conocimiento empleado. Cuando el tipo de conocimiento corresponde a la categoría de uso práctico de los organizadores del currículo le añadimos como subcódigo el organizador del currículo al que hace referencia el argumento; así, este subcódigo puede ser errores y dificultades, fenomenología, sistemas de representación, historia o complejidad. Puede ocurrir que un mismo argumento mencione dos organizadores del currículo de forma inseparable. En este caso, un mismo argumento tiene asociados dos códigos distintos que tienen el mismo par pero distinto subcódigo. Veremos un ejemplo más adelante. Cuando el tipo de conocimiento es el transversal del plan de formación le añadimos como subcódigo el nombre del tema transversal al que atribuimos el argumento; así, este subcódigo puede ser aprendizaje, currículo, resolución de problemas, epistemología o evaluación. Finalmente, cuando el tipo de conocimiento es ajeno al plan de formación le añadimos como subcódigo una palabra representativa del argumento empleado. Estos subcódigos no están tipificados a priori sino que surgen del análisis de los datos; en este caso, se refieren a: la importancia del inglés, la motivación, la necesidad de repasar, la importancia del comportamiento de los estudiantes y la gestión del tiempo.

Mediante este proceso de codificación, y teniendo en cuenta las duplicidades que suceden en los subcódigos asociados al uso práctico, los 72 argumentos generaron un total de 90 datos de la forma [(tipo de conocimiento, subcódigo), grado de concreción]. La figura 1 muestra la distribución de estos datos según el instrumento del que provienen los argumentos.

Seguidamente, ejemplificamos este proceso de codificación con argumentos que fueron codificados con diferentes combinaciones de tipos de conocimiento y grado de concreción del argumento.

En el siguiente argumento los futuros profesores justifican por qué han seleccionado una tarea en la que aparecen diagramas de barras para representar las calificaciones de cuatro grupos de alumnos y se plantean preguntas sobre la media y la mediana:

Futuro profesor: *La tarea de los cuatro diagramas ayuda a superar las dificultades asociadas a los conceptos puramente estadísticos, especialmente la confusión entre media y mediana.*

Observamos que se pone en juego el uso práctico de errores y dificultades, ya que mencionan información previamente obtenida al analizar el tema de estadística desde la perspectiva de estos organizadores del currículo: la dificultad de dar un significado técnico a los conceptos estadísticos y el error en el que incurren los estudiantes cuando confunden la media y la mediana. Además, es un argumento particular, ya que hace referencia explícita a una tarea matemática. Se codifica, por tanto, como [(Uso práctico, Errores y Dificultades), Particular].

En el siguiente argumento, los futuros profesores hacen referencia a la historia; se observa su intención de usarla en el aula, pero no mencionan ninguna tarea concreta. Por ello, le asociamos el código [(Uso práctico, Historia), General]:

Futuro profesor: *Tras analizar en profundidad esta dimensión (historia Pitágoras) no dudamos ni un momento en destinar una sesión a hablar a los alumnos de la historia del teorema y a plantear una cuestión histórica a la que diese solución.*

En el siguiente argumento, observamos que hay un uso práctico de dos organizadores del currículo que no pueden separarse; además, se hace referencia a una tarea concreta. Por ello, este argumento tiene asociados dos códigos ([(Uso práctico, Sistemas de Representación), Particular] y [(Uso práctico, Fenomenología), Particular].

Futuro profesor: *Se adjunta con el enunciado del problema un diagrama de gran utilidad a la hora de realizar la modelización matemática del problema.*

En los dos argumentos siguientes, no se hace referencia a los organizadores del currículo sino a conocimientos transversales del plan de formación.

Futuro profesor: *A lo largo de una serie de informes, se hace un especial hincapié en las ventajas que presenta un punto de vista constructivista en la enseñanza. Por este motivo se adopta el constructivismo como eje de los distintos sistemas de enseñanza empleados, tal y como queda visto en las sesiones propuestas.*

Futuro profesor: *Además, el profesor puede modificar las reglas del conocido juego, con el objetivo de analizar otras capacidades de los alumnos, tales como la expresión oral y demás aspectos en los que se insiste en el currículo.*

En el primero de estos argumentos, los futuros profesores mencionan el constructivismo, que es una de las teorías de aprendizaje analizadas en el plan. Su reflexión no se concreta en ninguna tarea matemática. Por ello, el código asociado a este argumento es [(Conocimientos transversales , Aprendizaje), General]. En el segundo caso, el argumento contiene referencias al currículo normativo y se expresa mediante una tarea concreta; por ello, su código es [(Conocimientos transversales, Currículo), Particular].

El siguiente argumento no menciona a los organizadores del currículo ni a otros contenidos del plan de formación. Sin concretar en tareas específicas, los futuros profesores explican un aspecto importante para ellos al seleccionar tareas: la trascendencia del inglés. Por ello, el código que asociamos a este argumento es [(Conocimientos ajenos al plan, Inglés), General].

Futuro profesor: *Además, es importante tener en cuenta la formulación de los problemas en inglés. Este hecho, más allá de un capricho, supone el reconocimiento desde tempranas edades del inglés como lengua universal.*

8. Análisis de la información y resultados

Tras la codificación realizada, llevamos a cabo dos tipos de análisis. En el primero, organizamos los argumentos según su grado de concreción y los tipos de conocimiento implicados. En el segundo, analizamos cada uno de los tres tipos de conocimiento estableciendo la frecuencia de aparición de los subcódigos de cada tipo. Por su importancia en el plan de formación, este segundo análisis es especialmente relevante cuando el tipo de conocimiento es el uso práctico, es decir, cuando nos aporta información sobre los organizadores del currículo empleados en los argumentos.

Debido a que era posible que el instrumento utilizado para recoger la información pudiese condicionar los tipos de argumentos empleados por los grupos de futuros profesores, para realizar el análisis de la información tenemos en cuenta el instrumento de donde proviene cada argumento —guía didáctica, test 1 y test 2—.

8.1 Análisis según tipo de conocimiento y grado de concreción

La figura 1 presenta la frecuencia de argumentos según el tipo de conocimiento y el grado de concreción, teniendo en cuenta el instrumento de donde provienen. Por ejemplo, vemos que hay 19 argumentos particulares en el test 2 en los que el tipo de conocimiento es el uso práctico, y que hay 9 argumentos generales que emplean conocimientos ajenos al plan en la guía didáctica.

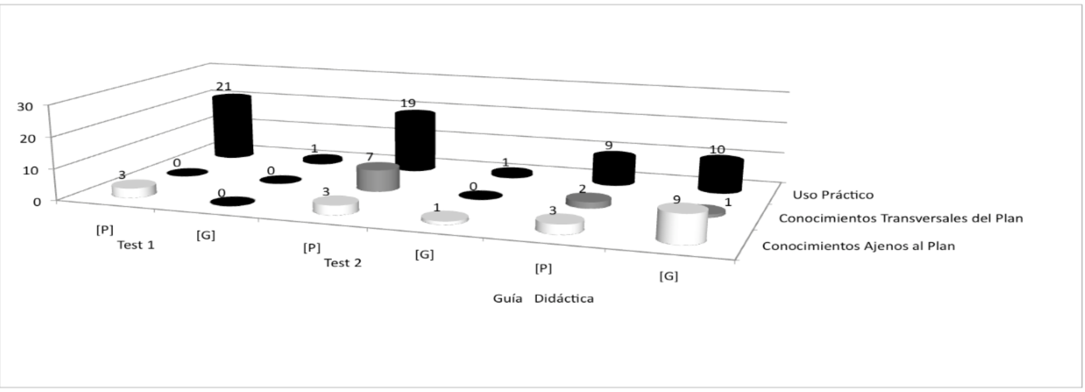


Figura 1. Distribución de los argumentos en los instrumentos según tipo de conocimiento y grado de concreción

El análisis de los datos de la figura 1 nos permite resaltar los siguientes resultados:

1. Más de dos terceras partes de los argumentos (68%) se basan en el uso práctico de los organizadores del currículo, seguidos por argumentos basados en conocimientos ajenos al plan de formación (21%); los argumentos basados en conocimientos transversales del plan de formación son los que aparecen en menor proporción (11%).
2. La proporción de argumentos que se basan en el uso práctico de los organizadores del currículo es mayor en el test 1 (88%), disminuye en el test 2 (64%) y es menor en la guía didáctica (55%).
3. Los argumentos generales son en su mayoría (83%) argumentos que se basan en el uso práctico de los organizadores del currículo.
4. Los argumentos generales se concentran en la guía didáctica, mientras que la mayoría de argumentos de los dos tests son particulares.
5. La mayoría de los argumentos que se refieren a conocimientos del plan de formación aparecen en el test 2, mientras que no hay ningún argumento de este tipo en el test 1.

Estos resultados ponen de manifiesto que los conocimientos trabajados en el plan de formación tienen una importancia considerable en los argumentos que los futuros profesores utilizan cuando analizan y seleccionan tareas. Pero es destacable el hecho de que los conocimientos ajenos al plan estén presentes en algo más de la quinta parte de los argumentos. Esto sucede con más frecuencia en la guía didáctica, que es el instrumento en el que los argumentos de los profesores no han sido motivados de forma dirigida. Se observa así que los futuros profesores dan importancia a aspectos que consideran relevantes en la selección de tareas aunque el plan de formación no los aborda explícitamente. Éste es el caso, por ejemplo, de aspectos afectivos como la motivación que aparecen con frecuencia en los argumentos. En términos del marco conceptual, estos resultados sugieren que el plan de formación promovió, en buena medida, el uso práctico de los organizadores del currículo y dejó de considerar otros conocimientos que los futuros profesores estiman relevantes en el análisis y selección de tareas.

Los resultados también muestran, como era de esperar, que el test 1 induce a los futuros profesores a proponer una proporción mayor de argumentos basados en los organizadores del currículo. No obstante, lo más destacable es que esta proporción sigue siendo importante en el test 2. Este resultado sugiere que, cuando los futuros profesores seleccionan tareas a partir de un listado de tareas dadas, ponen en juego, fundamentalmente, el conocimiento de uso práctico de los organizadores del currículo que han desarrollado en el plan de formación. Sin embargo, cuando hacen una argumentación sobre un conjunto de tareas que han seleccionado con anterioridad y que forman parte de su propuesta docente final, ponen en juego un conocimiento ajeno al plan que no habían hecho explícito al seleccionar individualmente cada una de las tareas.

8.2 Análisis de cada uno de los tipos de conocimiento

Dada la importancia que el plan de formación dio a los argumentos basados en el uso práctico de los organizadores del currículo, profundizar en los organizadores empleados en este tipo de conocimiento es especialmente relevante. La figura 2 presenta la frecuencia de aparición de cada uno de los organizadores del currículo en los argumentos utilizados por los futuros profesores en cada uno de los tres instrumentos y en total.

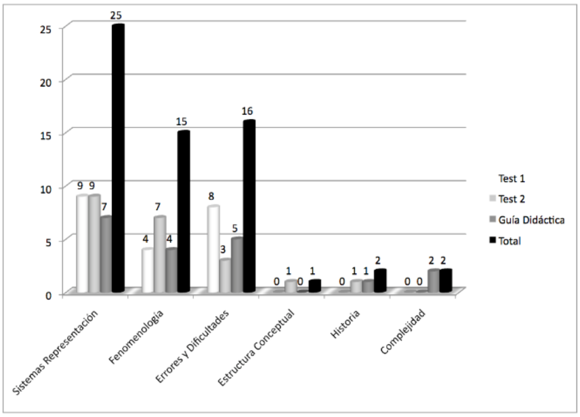


Figura 2. Frecuencia de argumentos basados en los organizadores del currículo

Era de esperar que en el test 1 apareciesen sólo argumentos relacionados con los sistemas de representación, la fenomenología y los errores y dificultades. Pero también observamos que estos tres organizadores del currículo predominan en los argumentos de los futuros profesores en los tres instrumentos. Destaca el hecho de que en el test 2 presentaron el mismo número de argumentos basados en sistemas de representación que en el test 1 y un mayor número de argumentos basados en fenomenología. Estos resultados sugieren que el plan de formación fue eficaz en el desarrollo del uso práctico de los sistemas de representación, la fenomenología y los errores y dificultades, pero no logró promover el desarrollo del uso práctico de los otros organizadores del currículo.

En los otros dos tipos de conocimiento —conocimientos transversales y conocimientos ajenos al plan— la cantidad de subcódigos encontrados es relativamente pequeña; no obstante, un tercio de los argumentos están asociados a estos dos tipos de conocimiento, por lo que resulta de interés profundizar en los detalles concretos que los sustentan.

Los argumentos asociados a conocimientos transversales del plan de formación hacen referencia a:

Restricciones impuestas por el currículo normativo. Destacan los argumentos que hacen referencia a la necesidad de que el estudiante desarrolle competencias transversales, con énfasis en el desarrollo de la competencia lectora y la expresión oral; los aspectos competenciales centran actualmente el debate sobre las expectativas de nuestro actual currículo y el plan de formación ha hecho hincapié en ellos. Otros argumentos hacen referencia a la fundamentación general del currículo —por ejemplo, indican que la propuesta docente fomenta la relación entre las matemáticas y otras materias estudiadas por el alumno "tal como dicta el currículo"— o hacen alusión a la distribución de contenidos en el mismo —por ejemplo, resaltan la importancia del lenguaje algebraico como contenido dominante en el currículo de la etapa—.

La utilización de metodologías ligadas a la resolución de problemas. Por ejemplo, mencionan la necesidad de que las tareas matemáticas que forman parte de la propuesta docente tengan un formato de respuesta abierta, que se puedan resolver mediante distintas estrategias, que fomenten el planteamiento de nuevas preguntas por parte del alumno o que se trabajen en grupo.

La adopción de alguna teoría del aprendizaje. Por ejemplo, mencionan las ventajas del constructivismo como teoría orientadora de las propuestas docentes seleccionadas.

Estos argumentos aparecen distribuidos uniformemente en los tres instrumentos. Cabe destacar que no hay referencias a algunos temas tratados en el plan de formación, como la epistemología del conocimiento matemático y los modelos de evaluación. El enfoque dado en el curso de formación a la epistemología fue fundamentalmente teórico y alejado del proceso de selección de tareas; sin embargo, el enfoque dado a los modelos de evaluación podía haber influido notablemente en dicho proceso. De hecho, la propuesta docente que elaboran contiene un modelo de evaluación que suele contemplar la evaluación formativa ligada al desarrollo de la instrucción y, por tanto, podría relacionarse con las tareas matemáticas propuestas. En cualquier caso, en el plan de formación no se establecieron vínculos explícitos entre ninguno de los temas transversales y el proceso de selección de tareas. Los resultados obtenidos aquí, muestran que los futuros profesores establecen algunos de esos vínculos de forma espontánea pero otros conocimientos que pueden ser importantes para el análisis y selección de tareas no se ponen en juego. El análisis que estamos realizando sugiere la necesidad de revisar el plan de formación para que los futuros profesores logren establecer todos los vínculos necesarios.

En relación con los argumentos clasificados como conocimientos ajenos al plan de formación, cabe destacar las referencias a:

La motivación que se quiere conseguir mediante la propuesta docente. Esta idea aparece en numerosos argumentos; se expresa mediante la selección de actividades a las que se atribuye la capacidad de estimular el interés de los alumnos o a las que se imprime un carácter lúdico con el objeto de motivar —argumentos que también habían sido identificados por Talanquer, Novodvorsky y Tomanek (2010)—. Además, se indica la necesidad de que haya pluralidad de métodos de enseñanza para contribuir a despertar el interés de los alumnos; en algún caso se menciona la motivación como forma de mantener la disciplina en el aula.

La necesidad de repaso y refuerzo. Se insiste en la necesidad de organizar la temporalización de forma que haya repasos frecuentes, tanto al inicio de la propuesta como al final, donde se seleccionan tareas para afianzar y repasar las nociones fundamentales. También se propone el uso de tecnología —algún programa de ordenador— con el propósito de revisar de nuevo lo estudiado en el aula ordinaria. Varias de las tareas matemáticas se caracterizan como de refuerzo o para superar la falta de base.

La importancia del inglés. Se proponen actividades que tienen su enunciado en inglés; en particular, se proponen lecturas y comentarios de textos matemáticos en inglés.

La mayoría de estos argumentos se concentran en la guía didáctica. A través de ellos, los futuros profesores ponen de manifiesto conocimientos cuyo origen desconocemos, aunque en algunos casos podemos interpretarlos como manifestaciones de sus propias experiencias sobre la enseñanza y el aprendizaje. Es el caso, por ejemplo, de la importancia que dan al inglés: en el contexto académico en el que se ha desarrollado el curso de formación se exige un elevado conocimiento de este idioma; interpretamos que la preocupación de los futuros profesores por este hecho les ha llevado a trasladarlo a su propia propuesta docente. O las decisiones de tipo cognitivo que les llevan a proponer el aprendizaje por refuerzo, al margen de las teorías de aprendizaje que hayan analizado o de que hayan declarado su predilección por el aprendizaje constructivista en ciertas fases del curso.

9. Interpretación de resultados y conclusiones

En otros trabajos, hemos analizado el proceso de aprendizaje de los organizadores del currículo mediante las dimensiones del significado, el uso técnico y el uso práctico. Este proceso ha mostrado una gran complejidad en su desarrollo (González y Gómez, 2008) y hemos considerado necesario profundizar en dicha complejidad. Para ello, en este artículo, hemos analizado los argumentos empleados por futuros profesores que siguen un plan de formación de tipo funcional para analizar y seleccionar tareas. Uno de los objetivos centrales de dicho plan de formación es que doten de significado a los organizadores del currículo y los utilicen como instrumentos conceptuales y metodológicos al realizar propuestas docentes. Además, el plan aporta información sobre temas transversales no vinculados a contenidos matemáticos. El diseño del plan prevé que sean los organizadores del currículo los que canalicen toda la información que el profesor maneja en el proceso de selección de tareas. Por tanto, esperábamos que los futuros profesores justificasen la selección de tareas con argumentos particulares basados en el uso práctico de los organizadores del currículo. Pero, habida cuenta de la complejidad de los procesos de selección de tareas, hemos querido identificar todos los tipos de conocimientos que los futuros profesores que participaron en uno de estos planes pusieron en juego durante este proceso; en particular, queríamos caracterizar el modo en que se manifestó el uso práctico de los organizadores del currículo y determinar qué peso tuvo en relación con los otros tipos de conocimiento que los futuros profesores pusieron en juego.

Hemos encontrado que el uso práctico de los organizadores del currículo constituye una de las tres categorías de conocimiento que los futuros profesores ponen en juego durante el proceso de selección de tareas. Es la categoría que aparece con más frecuencia, aunque se desarrolla entrelazada con las otras dos. Los futuros profesores usan los organizadores del currículo en sus argumentos cuando se les pregunta específicamente por ellos y continúan usándolos cuando se les deja libertad para argumentar, aunque con menos frecuencia. Interpretamos, por tanto, que el uso práctico no se desarrolla de manera espontánea y que es importante reforzar en el plan las tareas encaminadas a su desarrollo.

En cuanto a la variedad de organizadores del currículo utilizados, observamos un uso muy desigual de los mismos, siendo los sistemas de representación el más utilizado. Por otro lado, determinados organizadores del currículo que se introducen en la asignatura no aparecen en ninguno de los argumentos; cabe destacar la ausencia de organizadores directamente relacionados con las tareas, como es la funcionalidad de las mismas. Concluimos que el desarrollo del uso práctico de algunos organizadores del currículo no se desarrolla mediante las actividades que se proponen en el plan de formación. Buscando alguna explicación para este hecho, observamos que las técnicas de uso práctico no se explican en el plan de formación. Algunas de ellas parecen desarrollarse de forma espontánea, pero otras no. Parece lógico pensar que el desarrollo de uso práctico de algunos organizadores mejoraría se si incluyesen en el plan de formación técnicas de uso práctico que informen explícitamente sobre el modo de emplear la información de que disponen sobre estos organizadores del currículo.

Si bien el uso práctico más genuino de un organizador del currículo debería estar referido a tareas concretas, es decir, debería aparecer en argumentos particulares, observamos que ha aparecido con bastante frecuencia en argumentos generales. Esta forma de expresión nos hace pensar en que, en los procesos de aprendizaje del uso práctico de un organizador del currículo, los futuros profesores perciben una componente de transversalidad compartida por distintos temas matemáticos aún cuando el organizador del currículo se esté refiriendo a un tema particular. Así, el desarrollo de uso práctico específico sobre un tema de matemáticas sería trasladable a otros temas. Analizaremos este aspecto en el futuro.

Además de los argumentos correspondientes a la categoría de uso práctico, observamos que alrededor de un tercio de los argumentos propuestos por los futuros profesores se basan en conocimientos transversales o ajenos al plan.

Corroboramos así los resultados obtenidos por Clarke y Roche (2010), que encuentran una gran diversidad de razones en los argumentos que dan los profesores al seleccionar tareas. En cuanto a los conocimientos transversales del plan de formación, aunque son conocimientos que pueden tener gran influencia en los procesos de selección de tareas, dicha influencia no se tuvo en cuenta de forma explícita en la instrucción llevada a cabo. Sin embargo, los futuros profesores utilizaron de forma espontánea ese conocimiento en sus argumentos, concretándolo en sus temas matemáticos. Sobre los conocimientos ajenos al plan, no tenemos información suficiente que nos permita identificar el origen de los argumentos correspondientes a esta categoría. No obstante conjeturamos que, cuando los futuros profesores argumentan sobre la globalidad de la propuesta, ponen de manifiesto experiencias vividas en situaciones educativas propias que llegan tener una gran influencia en sus decisiones. Parece haber creencias fuertes sobre cómo se aprenden y enseñan las matemáticas que no se ven afectadas por la instrucción realizada.

Comparando nuestros hallazgos con los de Cannon (2008), compartimos con este estudio el hecho de que los profesores empleen algunas de las categorías de conocimiento pedagógico —por ejemplo, siguiendo la terminología de Hill, Ball y Schilling (2008), el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza—. Pero, desde el punto de vista del conocimiento directamente relacionado con el contenido matemático, los profesores del estudio de Cannon emplearon frecuentemente el conocimiento general del contenido y raramente utilizaron el conocimiento especializado del contenido. Nuestros resultados difieren de este resultado ya que el uso práctico de los organizadores del currículo, categoría que se corresponde fundamentalmente con el conocimiento especializado del contenido, ha sido la categoría dominante.

Por ello, concluimos que involucrar a los futuros profesores en procesos de selección de tareas en planes de formación de tipo funcional se ha mostrado como un tipo de actividad interesante para su formación ya que promueve el desarrollo del conocimiento didáctico del profesor en temas específicos de las matemáticas escolares. El empleo directo de conocimientos transversales en los procesos de selección de tareas y, sobre todo, de conocimientos ajenos al plan, nos proporcionan una valiosa información sobre el cumplimiento de las expectativas del plan de formación. En particular, nos induce a analizar maneras de incorporar de forma explícita y efectiva estos tipos de conocimiento en su diseño curricular.

Agradecimientos

Este trabajo ha estado financiado parcialmente por el proyecto Procesos de aprendizaje del profesor de matematicas en formación, EDU2012-33030 del Ministerio de Economía y Competitividad (España) y por el proyecto Procesos de aprendizaje en el desarrollo de las competencias profesionales del profesor de matemáticas en ejercicio de la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de los Andes (Colombia).

Bibliografía

Arbaugh, F., y Brown, C. (2005). *Analyzing Mathematical Tasks: A Catalyst for Change? Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(6), 499-536.

Aristóteles. (1984). *Ética a Nicómaco* (P. S. Abril, Trans.). Barcelona: Ediciones Orbis.

Back, S. (2002). *The Aristotelian challenge to teacher education. History of Intellectual Culture,* 2(1), 2-4.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge*. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4 ed., 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Cannon, T. (2008). *Student teacher knowledge and its impact on task design.* Tesis de doctorado no publicada, Brigham Young University Brigham.

Charalambous, C. Y. (2008). *Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research*. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (281-288). Morelia, México: PME.

Christiansen, B., Howson, G. y Otte, M. (Eds.). (1986). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Clarke, D. y Roche, A. (2010). *Teachers' extent of the use of particular task types in mathematics and choices behind that use*. En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurstr (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (153-160). Fremantle: MERGA.

Crespo, S. (2003). *Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. Educational Studies in Mathematics,* 52(3), 243-270-270.

Flyvbjerg, B. (2006). *Making organization research matter: power, values, and phronesis.* En S. R. Clegg, C. Hardy, T. B. Lawrence y W. R. Nord (Eds.), *The Sage handbook of organization studies* (2nd edition ed., 370- 387). Thousand Oaks, CA: Sage.

Gómez, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA,* 7(3), 251-293.

Gómez, P. (2006). *Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiánez, J. L., Marín, A., et al. (2010). *Máster en Educación Matemática en Colombia*. Trabajo presentado

en *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM*, Salamanca.
Gómez, P. y González, M. J. (en revisión). *Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico*.
González, M. J. y Gómez, P. (2007). *Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions*. Trabajo presentado en VIII Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, Madrid.
González, M. J. y Gómez, P. (2008). *Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. Investigación en educación matemática XII*, 425-434.
Herbst, P. (2008). *The teacher and the task*. Trabajo presentado en *Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME 32) and North American Chapter (PME-NA XXX),* Morelia.
Hiebert, J. y Wearne, D. (1997). *Instructional tasks, classroom discourse and student learning in second grade arithmetic. American Educational Research Journal,* 30(2), 393–425.
Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). *Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American Educational Research Journal,* 42(2), 371-406.
Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). *Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachersí topic-specific knowledge of students. Journal For Research in Mathematics Education,* 39(4), 372-400.
Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.
Kinsella, E. A. y Pitman, A. (Eds.). (2012). *Phronesis as professional knowledge. Practical wisdom in the professions*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
Liljedahl, P. y Chernoff, E. y. Z. R. (2007*). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. Journal of Mathematics Teacher Education,* 10(4-6), 239-249.
Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada.
Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2003). *Intuiciones de futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el aprendizaje de las matemáticas*. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El prácticum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (151-158). Granada: Universidad de Granada.
Mason, J. (2002). *Mathematics Teaching Practice: a guide for university and college lecturers*. Chichester: Horwood Publishing.
Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and using mathematical tasks*. Milton Keynes: Open University.
NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM
Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.* En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *Third*

Mediterranean Conference on Mathematics Education (115-124). Atenas: Hellenic Mathematical Society.

Noel, J. (1999). *On the varieties of phronesis. Educational Philosophy & Theory,* 31(3), 273-289.

OCDE. (2006). *PISA 2006 marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. París: Autor.

Orton, R. E. (1997). *Toward an Aristotelian model of teacher reasoning. Journal of Curriculum Studies,* 29(5), 569-584.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. y Desrosiers, C. (2006). *The Role of Content Knowledge and Problem Features on Preservice Teachers' Appraisal of Elementary Mathematics Tasks. Journal of Mathematics Teacher Education,* 9(4), 347-380-380.

Penso, S. y Shoham, E. (2003). *Student teachers' reasoning while making pedagogical decisions. decisions. European Journal of Teacher Education*, 26 (3), 313-329.

Recio, T. (2004). *Seminario: itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas*. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 7(1), 33-36.

Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Saugstad, T. (2005). *Aristotle's contribution to scholastic and non-scholastic learning theories. Pedagogy, Culture & Society,* 13(3), 347-366.

Talanquer, V., Novodvorsky, I. y Tomanek, D. (2010) *Factors influencing entering teacher candidates' preferences for instructional activities: a glimpse into their orientations towards teaching. Int. J of Sci. Ed.,* 32 (10), 1389–1406.

Tzur, R., Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2008). *Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: Teacher, teacher educator, researcher.* En O. Figuras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 123-125). Morelia, México: PME.

Viseu, F. y Ponte, J. P. d. (2009). *Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC's. Relime,* 12(3), 383-413.

Wood, T. (2002). *Demand for Complexity and Sophistication: Generating and Sharing Knowledge About Teaching. Journal of Mathematics Teacher Education,* 5(3), 201-203.

Xu, Y. (2009). *School-based teacher development through a school-university collaborative project: a case study of a recent initiative in China. Journal of Curriculum Studies*, 41 (1), 49-66.

Autores:

María José González. Profesora de la Universidad de Cantabria (España) en el área de Didáctica de la Matemática. Desarrolla su actividad docente entre la Facultad de Ciencias y la Facultad de Educación dedicándose fundamentalmente a la formación de profesores de matemáticas de primaria y secundaria. mariaj.gonzalez@unican.es

Pedro Gómez. Profesor de la Universidad de los Andes (Colombia), editor de la revista PNA, director de "una empresa docente", centro de investigación y formación en Educación Matemática del CIFE, en la Universidad de los Andes. Su principal área de trabajo es la formación de profesores de matemáticas. argeifontes@gmail.com

Irene Polo. Profesora de la Universidad de Cantabria (España) en el área de Didáctica de la Matemática. Desarrolla su actividad docente en la Facultad de Educación, dedicándose fundamentalmente a la formación de profesores de matemáticas de primaria y secundaria. irene.polo@unican.es

Ángela Restrepo. Profesora de la Universidad de Los Andes (Colombia) en el área de Didáctica de la Matemática. Desarrolla su actividad docente en el Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE), dedicándose fundamentalmente a la formación continua de profesores de matemáticas, de ciencias y de tecnología. am.restrepo253@uniandes.edu.co

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 210-232

Panorama internacional contemporáneo sobre la educación matemática infantil

Ángel Alsina

Fecha de recepción: 26/06/2014
Fecha de aceptación: 22/10/2015

Resumen	En este artículo se revisan orientaciones curriculares norteamericanas, australianas y europeas sobre la educación matemática infantil, con el objetivo de tener una amplia visión de las matemáticas que deberían trabajarse en las primeras edades y cómo deberían trabajarse. Las orientaciones actuales coinciden en la importancia de favorecer la comprensión y el uso eficaz de contenidos de números, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad a través de los procesos matemáticos, para fomentar el desarrollo de la competencia matemática. Es de esperar que progresivamente se incorporen estos aspectos en las prácticas docentes de Educación Infantil para facilitar un mayor acceso a conocimientos matemáticos necesarios para desenvolverse en la sociedad del siglo XXI. **Palabras clave**: Educación matemática infantil; Orientaciones curriculares; Competencia matemática.
Abstract	In this article North American, Australian and European curriculum guidelines on early childhood mathematics education are reviewed in order to provide a broad overview of the mathematics that should be taught to children at an early age and how these concepts and skills should be developed. In an effort to promote mathematical competence, all of these national curriculum guidelines agree on the importance of promoting mathematical processes to understand and effectively use numbers and algebra, measurement and geometry, and statistics and probability. It is hoped that all of these aspects will be progressively incorporated into early childhood education classroom practices and thereby provide greater access to the mathematical knowledge required by society in the 21st century. **Keywords**: Childhood mathematics education; Curriculum guidelines; Mathematical competence.
Resumo	Neste artigo, as diretrizes curriculares americanas, australianas e européas sobre a educação matemática na infância são revistas, a fim de ter uma visão ampla da matemática que deve ser trabalhada em crianças e como deve ser trabalhada. Todas as diretrizes contemporâneas concordam sobre a importância de promover a compreensão e a utilização eficaz dos conteúdos de números, álgebra, geometria, medição e análise de dados e probabilidade através de processos matemáticos, para promover o desenvolvimento da competência matemática. Espera-se que, gradualmente, todos esses recursos sejam incorporados nas práticas educativas das salas de aula e, assim, facilitar o acesso a conhecimentos matemáticos necessários

para funcionar na sociedade do século XXI.
Palavras-chave: Educação Matemática das crianças; Diretrizes curriculares; competência matemática.

1. Introducción

Todas las orientaciones contemporáneas en materia de educación matemática señalan la importancia de favorecer la adquisición de conocimientos matemáticos desde las primeras edades, puesto que todos aquellos que comprendan y puedan usar las matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. En la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la educación infantil (NAEYC y NCTM, 2013) se indica que para que la competencia matemática de los ciudadanos continúe mejorando, tendrá que darse una atención mucho mayor a las primeras experiencias matemáticas, ya que la investigación acumulada sobre las capacidades y el aprendizaje de los niños en los primeros años de vida confirma que las experiencias iniciales tienen resultados persistentes. La competencia matemática, indican, abre puertas a un porvenir productivo, mientras que su carencia las mantiene cerradas. En este sentido, se insiste en que todos los niños, evitando la idea que las matemáticas son únicamente para unos pocos elegidos, deberían tener la oportunidad y el necesario apoyo para aprender progresivamente conocimientos matemáticos importantes con profundidad y comprensión, ya que nunca hasta ahora había sido mayor la necesidad de entender y ser capaz de usar las matemáticas en la vida diaria y en el trabajo. Una educación de alta calidad, estimulante, y accesible para los niños de 0 a 6 años constituye, pues, el fundamento vital para el futuro aprendizaje de las matemáticas.

Desde este marco, los referentes internacionales que se exponen en este artículo pretenden ser un recurso y guía para todos los que toman decisiones que afectan a la educación matemática, y en la mayoría de ellos se ofrecen orientaciones sobre qué conocimientos matemáticos enseñar durante la etapa de Educación Infantil y cómo enseñarlos. En concreto, se revisan las orientaciones curriculares americanas descritas por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003), la declaración conjunta de esta asociación de profesores de matemáticas con la Asociación Nacional para la Educación Infantil (NAEYC y NCTM, 2013) y los Estándares Comunes para las Matemáticas, de la Iniciativa para unos Estándares Estatales Básicos Comunes en Estados Unidos (CCSSI, 2010). Se analizan también las orientaciones curriculares de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012) y, finalmente, se examina el informe de la Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural de Eurydice (EACEA P9 Eurydice, 2011) sobre la enseñanza de las matemáticas en Europa. Estas orientaciones curriculares e informes sobre la educación matemática infantil, como se verá, ofrecen muchas pistas sobre las matemáticas que deberían trabajarse y cómo deberían trabajarse para favorecer que los niños de las primeras edades puedan ir aprendiendo progresivamente las matemáticas más formales.

2. Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) y declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil (NAEYC y NCTM, 2013).

Los estándares americanos son uno de los máximos referentes a nivel internacional para el diseño de los currículos de matemáticas. En su última versión (NCTM, 2003) explicitan los conocimientos que deberían valorarse en la enseñanza de las matemáticas desde *Prekindergarten* hasta el nivel 12 (de los 3 a los 18 años aproximadamente).

Se organizan los conocimientos matemáticos en base a diez estándares, de los cuales cinco corresponden a contenidos matemáticos y otros cinco a procesos matemáticos. Cada uno de estos estándares puede ser implementado en todos los niveles, aunque se resalta el crecimiento gradual de lo que se espera en las sucesivas etapas. En la figura 1 se muestra, aproximadamente, la atención que deberían recibir los diferentes estándares de contenidos a lo largo de las diferentes etapas:

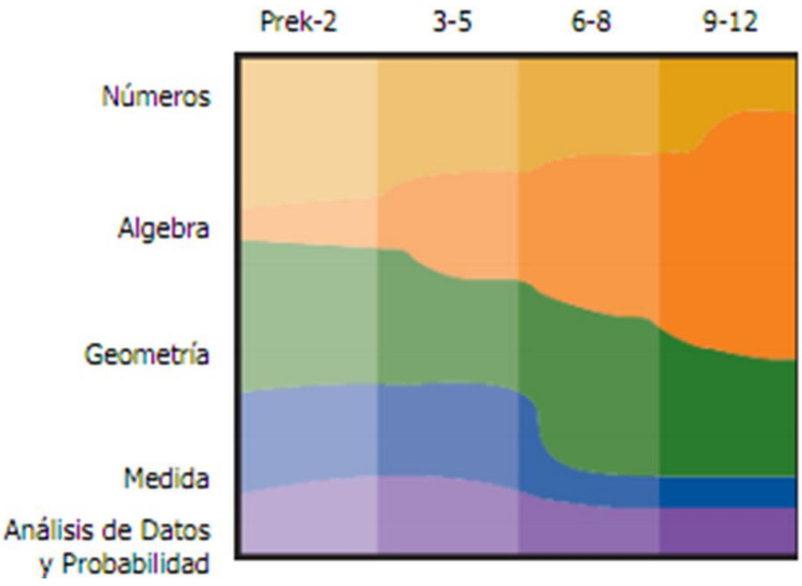


Figura 1. Nivel de atención que deberían recibir los diferentes estándares de contenidos desde Prekindergarten al nivel 12.
Fuente: NCTM (2003, p. 32).

Para los niveles de *Prek-2* (de 3 a 8 años aproximadamente) se señala la necesidad de capacitar a los niños para el uso comprensivo y eficaz de los cinco estándares de contenidos.

En relación al bloque de "Números", se concretan los siguientes contenidos:

Comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.	Contar con comprensión y darse cuenta de "cuántos hay" en colecciones de objetos. Utilizar diversos modelos para desarrollar las primeras nociones sobre el valor posicional y el sistema decimal de numeración. Desarrollar la comprensión de la posición relativa y la magnitud de los números naturales, y de los números ordinales y cardinales y sus conexiones. Dar sentido a los números naturales y representarlos y usarlos de manera flexible, incluyendo relacionar, componer y descomponer números. Relacionar los nombres de los números y los numerales, con las cantidades que representan, utilizando varios modelos físicos y representaciones diversas. Comprender y representar las fracciones comúnmente usadas, como 1/4, 1/3 y ½.
Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras.	Comprender distintos significados de la adición y sustracción de números naturales y la relación entre ambas operaciones. Comprender los efectos de sumar y restar números naturales. Comprender situaciones que impliquen multiplicar y dividir, tales como la de agrupamientos iguales de objetos y la de repartir en partes iguales.
Calcular eficazmente y hacer estimaciones razonables.	Desarrollar y usar estrategias para calcular con números naturales, centrándose en la adición y sustracción. Desarrollar fluidez en la adición y sustracción de combinaciones básicas de números. Utilizar diversos métodos y herramientas para calcular, incluyendo objetos, cálculo mental, estimación, lápiz y papel y calculadoras.

Tabla 1.Estándares de contenidos de números en las primeras edades (NCTM, 2003)

Como puede apreciarse en la tabla anterior, se enfatiza sobre todo la comprensión y el uso eficaz de los números y de las operaciones elementales de suma y resta. Para favorecerlo se incide, básicamente, en que deben usarse diferentes recursos (objetos, dibujos, etc.) para que los niños puedan reconocer, agrupar y relacionar cantidades, a la vez que desarrollar estrategias de cálculo mental. La representación es importante, pero va mucho más allá de la notación convencional y se subraya la necesidad de favorecer el uso de diferentes tipos de representaciones: orales y escritas (concretas, pictóricas y finalmente simbólicas).

Los contenidos correspondientes al "Álgebra" se detallan en la tabla 2:

Comprender patrones, relaciones y funciones.	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas con símbolos apropiados.	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.
Analizar el cambio en diversos contextos.	Describir cambios cualitativos, como “ser más alto”. Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.

Tabla 2. Estándares de contenidos de álgebra en las primeras edades (NCTM, 2003)

El hecho de que en los estándares de contenido aparezca el bloque de álgebra en las primeras edades es ya por sí mismo un hecho destacable. El álgebra no es algo que se pueda aprender de golpe cuando los alumnos acceden a la educación secundaria (a partir de la educación secundaria en la mayoría de países), sino que por el contrario requiere una adquisición progresiva que, como se señala, implica realizar múltiples actividades de clasificación, ordenación, seriaciones siguiendo un patrón de repetición o de crecimiento, análisis y descripción de cambios, etc. Se trata de conocimientos imprescindibles para poder comprender, posteriormente, contenidos algebraicos más complejos como por ejemplo la noción de igualdad en una ecuación de primer grado o bien la noción de función.

Los contenidos del bloque de “Geometría” que deberían trabajarse en las primeras edades según las orientaciones curriculares del NCTM (2003) son los siguientes:

Analizar características y propiedades de las formas de una, dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.	Reconocer, dar nombre, construir, dibujar, comparar y clasificar figuras de dos y tres dimensiones. Describir los atributos y los elementos de figuras de dos y tres dimensiones. Investigar y predecir los resultados de juntar y separar figuras de dos y tres dimensiones.
Especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.	Describir, dar nombre e interpretar posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa. Describir, dar nombre e interpretar la dirección y la distancia en los desplazamientos en el espacio y aplicar las ideas sobre las mismas. Encontrar y denominar estas nociones con relaciones simples como “cerca de” y en sistemas de coordenadas tales como mapas.
Aplicar transformaciones y usar la geometría para analizar situaciones matemáticas.	Reconocer y aplicar traslaciones, reflexiones y giros. Reconocer y crear figuras que tengan simetrías.
Usar la visualización, el razonamiento espacial, y la modelización geométrica para resolver problemas.	Crear imágenes mentales de figuras geométricas usando la memoria y la visualización espacial. Reconocer y representar figuras desde diferentes perspectivas. Relacionar ideas geométricas con ideas numéricas y de medida. Reconocer formas y estructuras geométricas en el entorno, y determinar su situación.

Tabla 3. Estándares de contenidos de álgebra en las primeras edades (NCTM, 2003)

Como puede apreciarse en la tabla 3, el primer aspecto destacable es que los contenidos geométricos se refieren tanto a aspectos del espacio relativos a la forma como a la posición. En relación a las formas se enfatiza sobre todo el análisis de las propiedades geométricas, para pasar posteriormente a dar un nombre a cada forma con base en sus características; y respecto a la posición, se incide principalmente en los tres aspectos fundamentales de la organización espacial: la posición relativa, la dirección y la distancia. También se hace alusión a las transformaciones geométricas, que dan lugar a cambios de posición (traslaciones, reflexiones, giros, etc.) y cambios de forma (composiciones y descomposiciones de formas).

A continuación se detallan los contenidos correspondientes al bloque de “Medida”:

Comprender los atributos mesurables de los objetos y las unidades, sistemas, y procesos de medición.	Reconocer los atributos de longitud, volumen, peso, área y tiempo. Comparar y ordenar objetos según estos atributos. Comprender cómo medir utilizando unidades no estándar y estándar. Seleccionar un instrumento y una unidad apropiados para el atributo a medir.

Aplicar técnicas apropiadas, herramientas y fórmulas para determinar mediciones.	Medir utilizando varias copias de unidades del mismo tamaño; por ejemplo, clips colocados uno detrás del otro. Utilizar repetidamente una unidad de medida para medir algo mayor que ésta; por ejemplo, medir el largo de la habitación con una sola cinta métrica de un metro de longitud. Utilizar instrumentos para medir. Desarrollar referentes comunes para medir y para realizar comparaciones y estimaciones.

Tabla 4. Estándares de contenidos de medida en las primeras edades (NCTM, 2003)

Se subraya principalmente la importancia de reconocer los atributos mesurables al alcance de los niños de las primeras edades (sobre todo longitud, volumen, peso, área y tiempo), realizar múltiples actividades de comparación, iniciar la cuantificación en la medida y usar progresivamente diferentes tipos de unidades (desde las antropomórficas a las convencionales), y fomentar la práctica de medida a través de técnicas de medida directas o indirectas (instrumentos).

Los estándares del NCTM (2003) señalan también la necesidad de trabajar contenidos correspondientes al bloque “Análisis de datos y probabilidad”:

Formular cuestiones sobre datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlos.	Proponer preguntas y recoger datos relativos a ellos y a su entorno. Ordenar y clasificar objetos de acuerdo con sus atributos y organizar datos relativos a aquéllos. Representar datos mediante objetos concretos, dibujos y gráficos.
Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos.	Describir parte de los datos y el conjunto total de los mismos para determinar lo que muestran los datos.
Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos.	Discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos.
Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.	No se describen estándares para este bloque en las primeras edades

Tabla 5. Estándares de contenidos de análisis de datos y probabilidad en las primeras edades (NCTM, 2003)

La incorporación estos contenidos en las primeras edades implica otra novedad importante en la mayoría de países. Como puede apreciarse, se subraya la necesidad de realizar desde las primeras edades actividades de recogida, organización, representación e interpretación de datos. A la vez, se apunta también el uso de nociones básicas de probabilidad en el marco de experiencias cotidianas.

En relación a los cinco estándares de contenido expuestos, se enfatiza que la enseñanza de las matemáticas constituye una disciplina altamente interrelacionada, es decir, cada uno de los temas se van entrelazando, ninguno se ve por separado ni de manera individual (NCTM, 2003).

Junto con las directrices acerca de los contenidos matemáticos, se hace referencia también a los estándares de procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación), que ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos:

Resolución de problemas	Construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas. Resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos. Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas. Controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
Razonamiento y prueba	Reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas. Hacer e investigar conjeturas matemáticas. Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas. Seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de prueba.
Comunicación	Organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación. Comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a los compañeros, profesores y otras personas. Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás. Usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas de forma precisa.
Conexiones	Reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas. Comprender cómo se relacionan las ideas matemáticas y se organizan en un todo coherente. Reconocer y aplicar las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.
Representación	Crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas. Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas. Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Tabla 6. Estándares de procesos en las primeras edades (NCTM, 2003)

Para las primeras edades, la resolución de problemas se plantea sobre todo desde la perspectiva de contextos reales o realistas, es decir, contextos que son reales en las mentes de los niños como los cuentos o bien los juegos, puesto que tienen unas características muy similares (los juegos, por ejemplo, empiezan con la introducción de una serie de reglas, y para avanzar en el dominio del juego es van adquiriendo técnicas y estrategias que conducen al éxito, tal como pasa en el proceso de resolución de problemas).

El razonamiento y la prueba se consideran fundamentales, desde la perspectiva que ya desde pequeños los niños deberían poder explicar, argumentar y justificar sus propias acciones y comprobarlas, aun considerando que todavía deben desarrollar todas las herramientas del razonamiento matemático y que, evidentemente, no pueden realizar todavía demostraciones matemáticas sino únicamente algunas comprobaciones sencillas. Algunos de los elementos básicos del razonamiento que se consideran en estas edades son, sobre todo, el reconocimiento de patrones y la clasificación de destrezas.

Sobre la comunicación y la representación, se enfatiza sobre todo el uso progresivo de léxico adecuado, la expresión de ideas de manera oral y la escucha a los demás. Además, se insiste en que es importante que durante la Educación Infantil los niños distingan distintas formas de representación oral y gráfica (concreta, pictórica e inicio de la notación convencional) como medios para comunicarse.

Finalmente, en relación a las conexiones, se pone de manifiesto la relación entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños aprenden a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela. También se enfatiza, como se ha indicado, la relación intrínseca entre los diferentes tipos de contenidos.

Unos años después de la publicación de los estándares de contenidos y procesos, la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos publican una declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil. En esta declaración, que hace referencia a niños de 3 a 6 años, se indican algunos aspectos que se deberían considerar en las prácticas de aula para lograr una educación matemática de calidad (NAEYC y NCTM, 2013).

Potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.	Las investigaciones muestran que mucho antes de empezar la escuela los niños usan las matemáticas de manera intuitiva en situaciones de exploración, juego, etc. Desde esta perspectiva, es importante que los primeros contactos de los niños con las matemáticas se produzcan dentro de un clima atractivo y estimulante.
Aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños, incluidos los familiares, lingüísticos, culturales y los de su comunidad, sus aproximaciones individuales al aprendizaje; y sus conocimientos informales.	Los maestros deben conocer las experiencias personales de cada niño con las matemáticas y construir lazos entre estas experiencias y los nuevos aprendizajes para lograr la equidad y la eficacia educativa.
Basar los currículos de matemáticas y las prácticas docentes en el conocimiento sobre el desarrollo cognitivo, lingüístico, físico, social y	Más allá del desarrollo cognitivo, los maestros deben estar familiarizados con el desarrollo social, emocional y motor de los niños, debido a la relevancia de todos ellos para el desarrollo matemático. Desde esta perspectiva, y dada la enorme variabilidad propia del desarrollo infantil, no es

emocional, de los niños.	recomendable establecer un momento fijo para la adquisición de cada aprendizaje específico.
Utilizar currículos y prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas.	Estos procesos se desarrollan a lo largo del tiempo, siempre que sean fomentados a través de situaciones de aprendizaje bien diseñadas, y hacen posible que los niños adquieran el conocimiento del contenido. En este sentido, la utilización de estos procesos para comprender y usar los contenidos de forma eficaz es uno de los logros más consistentes de la educación matemática.
Asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales.	En las áreas clave de las matemáticas deben establecerse secuencias didácticas de aprendizaje que vayan de lo concreto a la abstracción progresiva.
Facilitar que los niños interactúen de forma continuada y profunda con las ideas matemáticas clave.	Los maestros de la primera infancia deben planificar la implicación profunda de los niños con las ideas matemáticas, así como dar apoyo a las familias para que estas ideas se amplíen y desarrollen fuera de la escuela. Desde este prisma, se subraya que las áreas de números y operaciones, geometría y medición son de especial importancia, mientras que se recomienda que el pensamiento algebraico (a excepción de los patrones) y la estadística y la probabilidad tengan un énfasis algo menor en los primeros años.
Integrar las matemáticas con otras actividades y otras actividades con las matemáticas.	Los niños no perciben el mundo de forma parcelada, por lo que es recomendable ayudar a los niños a desarrollar su pensamiento matemático desde una perspectiva globalizada, durante todo el día y a través de todo el currículo. Ello significa que las prácticas de aula deben favorecer las conexiones entre diversas disciplinas, y también las conexiones con el entorno, por ejemplo a través de proyectos que atraviesan las fronteras de las asignaturas. Desde este enfoque integrado, los maestros deben asegurarse de que las experiencias matemáticas siguen experiencias lógicas, permiten centrarse en las matemáticas y profundizar en ellas.
Proporcionar tiempo suficiente, materiales, y apoyo del profesor para que los niños se impliquen en el juego, un contexto en el que explorar y manipular ideas matemáticas con vivo interés.	El juego no garantiza el desarrollo matemático, pero ofrece valiosas oportunidades, por lo que es importante que los maestros planteen buenas preguntas en situaciones lúdicas que provoquen el desarrollo de nuevos conocimientos.
Introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas.	Los buenos maestros de educación infantil se basan en el conocimiento matemático informal de los niños y en sus experiencias previas, y en base a ellas favorecen la construcción de nuevos conocimientos a partir de contextos de vida cotidiana, rutinas, materiales manipulativos, … que centren la atención de los niños sobre una idea matemática en particular o un conjunto de ideas relacionadas, dado que las matemáticas son demasiado importantes como para dejarse al azar.
Apoyar el aprendizaje mediante la evaluación continua y reflexiva del conocimiento,	La evaluación es muy útil para identificar los puntos fuertes y débiles en el conocimiento de los niños y de las propias actividades, para orientar la planificación docente. Desde este

destrezas y estrategias de todos los niños.	marco una buena evaluación debería fundamentarse en la observación sistemática y la documentación de las acciones; mientras que confiar la evaluación a una única prueba para documentar la competencia matemática de los niños va en contra de las recomendaciones contemporáneas sobre la evaluación de niños pequeños.

Tabla 7. Diez recomendaciones esenciales para los maestros y otros profesionales clave para lograr una educación matemática de calidad

Tomando en consideración estos aspectos, Alsina (2012) señala que este nuevo planteamiento curricular implica partir de un enfoque mucho más globalizado que no se limite a trabajar los contenidos de forma fragmentada en el contexto escolar, sino trabajar de forma integrada, explorando como se potencian y usándolos sin prejuicios en diferentes contextos. Además, exige trabajar para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando la elaboración de hipótesis, las estrategias creativas de resolución de problemas, la discusión, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar y representar planteamientos y resultados. En definitiva, pues, se trata de ayudar, a través de los procesos de pensamiento matemático, a gestionar el conocimiento, las habilidades y las emociones para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico.

3. Estándares Comunes para las Matemáticas, de la Iniciativa para unos Estándares Estatales Básicos Comunes en Estados Unidos (CCSSI, 2010)

Siguiendo todavía en Estados Unidos, en el año 2010 se publican los *Common Core State Standards for Mathematics* o normas comunes (CCSSI, 2010), que han sido desarrollados en colaboración con profesores, administradores y expertos con el objetivo de proporcionar un marco claro y coherente para preparar a los alumnos para acceder a la universidad y, posteriormente, al mercado laboral, partiendo de la base que dicha formación debe iniciarse ya en las primeras edades. Desde esta perspectiva, estos estándares comunes para las matemáticas surgen como una forma de precisar mejor y lograr una mayor coherencia en el aprendizaje de las matemáticas desde los primeros niveles educativos hasta finalizar la educación escolar a fin de mejorar el rendimiento en matemáticas.

En este documento se presentan, en primer lugar, los estándares para la práctica matemática, que describen diferentes niveles de experiencia que los maestros deberían desarrollar en sus alumnos para que sean matemáticamente competentes; y en segundo lugar, los estándares para el contenido matemático, que son una combinación equilibrada entre procedimientos y comprensión que focalizan los conceptos clave. En las tablas 8 y 9 se sintetizan estos estándares:

Estándar	Descripción
Identificar el problema y perseverar hasta resolverlo	Comienzan por explicarse a sí mismos el significado de un problema y buscan diversas alternativas para resolverlos. Realizan conjeturas acerca de la forma y el significado de la solución y buscan caminos para encontrar la solución, más que improvisar. Consideran problemas análogos, problemas más simples, etc. para entender mejor la solución. Siguen y evalúan su proceso, y si es necesario cambian de rumbo. Confían en la ayuda que supone el uso de objetos o imágenes concretas para resolver un problema. Comprueban sus respuestas y se preguntan si tienen sentido.
Razonar de forma abstracta y cuantitativa	Entienden las cantidades y sus relaciones en situaciones problemáticas. Usan dos habilidades complementarias para resolver problemas: la capacidad para descontextualizar una situación dada y representarla simbólicamente; y la capacidad de contextualizar a través de la manipulación para investigar los referentes de los símbolos involucrados. El razonamiento cuantitativo implica hábitos como crear una representación coherente del problema, teniendo en cuenta las unidades involucradas, atendiendo al significado de las cantidades y no sólo en saber calcularlas.
Crear argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás	Comprenden y utilizan los supuestos indicados, definiciones y resultados previamente establecidos en la construcción de argumentos. Hacen conjeturas y construyen una progresión lógica de las afirmaciones para explorar la verdad de sus ideas. Son capaces de analizar las situaciones dividiéndolas en casos, y pueden reconocer y usar contraejemplos. Justifican sus conclusiones, las comunican a los demás y responden a sus argumentos. Razonan inductivamente acerca de los datos, y hacen que los argumentos que consideran el contexto del que vienen los datos sean viables. Pueden comparar la efectividad de dos argumentos plausibles. Pueden escuchar o leer los argumentos de los demás, decidir si tienen sentido, y hacer preguntas útiles para aclarar o mejorar los argumentos.
Modelización matemática	Pueden aplicar las matemáticas para resolver problemas que se plantean en la vida cotidiana, la sociedad y el lugar de trabajo. Pueden simplificar una situación complicada. Son capaces de identificar cantidades importantes en una situación práctica y establecer sus relaciones con herramientas tales como diagramas, tablas de doble entrada, gráficos, diagramas de flujo y fórmulas. Pueden analizar las relaciones de forma matemática para extraer conclusiones. Interpretan los resultados basándose en el contexto y reflexionan sobre la validez de los resultados.
Utilizar las herramientas apropiadas	Consideran las herramientas disponibles para solucionar un problema matemático. Estas herramientas pueden incluir desde material manipulativo hasta el lápiz y papel, incluyendo *software* educativo, entre otros recursos. Son capaces de reconocer las limitaciones de cada recurso y de determinar en qué situaciones son útiles.

Crear precisión	Intentan comunicarse de forma precisa con los demás. Usan definiciones claras cuando razonan y dialogan con los demás. Determinan el significado de los símbolos que eligen, incluyendo el uso del signo igual de forma apropiada y coherente. Son precisos al especificar las unidades de medida y etiquetar los ejes para clarificar la correspondencia con las cantidades de un problema. Calculan con precisión y eficacia, y expresan respuestas numéricas con un grado de precisión adecuado al contexto del problema.
Buscar y hacer uso de una estructura	Buscan discernir patrones o estructuras. Identifican la importancia de una línea en una figura geométrica y pueden utilizar la estrategia de dibujar una línea auxiliar para resolver problemas. Saben distanciarse y ver el problema en un plano general. Pueden simplificar situaciones complicadas.
Buscar y expresar la regularidad en un razonamiento	Discriminan si los cálculos se repiten, y buscan métodos generales y atajos. Supervisan el proceso y se fijan en los detalles. Evalúan constantemente el sentido de sus resultados intermedios.

Tabla 8. Estándares para la práctica matemática (CCSSI, 2010)

Como puede apreciarse, los ocho estándares referentes a la práctica matemática (que no son específicos para las primeras edades) se fundamentan en los procesos matemáticos (NCTM, 2003) y por ello mantienen un paralelismo evidente con ellos. Además, se basan también en las competencias matemáticas que se especifican en el informe *Adding It* del *National Council Research* de los Estados Unidos, ya que como se ha indicado describen diferentes niveles de experiencia que los maestros deberían desarrollar en sus alumnos para que progresivamente sean ciudadanos matemáticamente competentes. Desde este punto de vista, debe entenderse que evidentemente no se trata de que los niños de las primeras edades sean ya matemáticamente competentes, sino que el trabajo que se realiza debe orientarse en esta línea para poder establecer unas buenas bases para el desarrollo progresivo de su pensamiento matemático. De ello se desprende que la práctica matemática en las primeras edades debe fundamentarse principalmente en actividades que fomenten la observación, la manipulación, la experimentación libre, la actividad heurística, el juego, etc.

En relación a los estándares de contenido, se establecen estándares específicos para cada nivel (de 3 a 14 años) que definen lo que los alumnos deberían entender y saber hacer. En la tabla 9 se exponen los estándares de contenido relativos correspondientes al nivel de Educación Infantil.

Contar y los números cardinales	Conocer los números y su secuencia. Contar para saber el número de objetos. Comparar números.
Operaciones y pensamiento algebraico	Entender la suma como el hecho de juntar y añadir y entender la resta como el hecho de separar y quitar.
Números y	Trabajar con los números del 11 al 19 para prepararse para el valor posicional.

operaciones con decimales	
Medición y datos	Describir y comparar atributos mesurables. Clasificar objetos y contar el número de objetos según las categorías.
Geometría	Identificar y describir figuras. Analizar, comparar, crear y componer figuras.

Tabla 9. Estándares de contenido de Educación Infantil (CCSSI, 2010)

Como ocurre con los estándares de contenido del NCTM (2003), se menciona también que los contenidos matemáticos que deberían priorizarse en las primeras edades son los siguientes: 1) representar, relacionar y realizar operaciones con números enteros (inicialmente con conjuntos de objetos), y 2) describir las formas y el espacio, teniendo en cuenta que se debería dedicar más tiempo a los números que a otras cuestiones.

4. Declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia, de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012)

Fuera del contexto americano también se han aportado orientaciones interesantes acerca de la educación matemática infantil. Es el caso de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas y Primera Infancia en Australia, quienes sostienen también que los primeros años son muy importantes para el desarrollo de las matemáticas y de la competencia matemática. Desde este marco, recomiendan acciones apropiadas para garantizar que todos los niños tengan acceso a las ideas matemáticas fundamentales y a su aprendizaje en los primeros años, y al aprendizaje que les prepare para el futuro y favorezca en ellos actitudes positivas. Para dar oportunidad a que accedan a estas ideas a través de actividades de gran calidad centradas en los niños, en sus hogares, comunidades, centros preescolares y escuelas, la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas y Primera Infancia (2012) ha elaborado un documento con diversas recomendaciones a los educadores infantiles, incluyendo a padres y cuidadores, educadores en centros preescolares y maestros en escuelas; las instituciones de formación docente, y los sistemas u organizaciones proveedores de servicios educativos para la infancia.

En la tabla 10 se presentan las recomendaciones para que los educadores adopten prácticas docentes que garanticen el acceso a las principales ideas matemáticas a todos los niños:

Atraer la curiosidad natural de los niños para favorecer el desarrollo de las ideas y de la comprensión de las matemáticas infantiles. Utilizar enfoques aceptados para la educación en la primera infancia como el juego, el currículo emergente, el currículo centrado en los niños o el currículo iniciado por los niños para facilitar el desarrollo infantil de las ideas matemáticas.

Asegurar que las ideas matemáticas con las que interactúan los pequeños sean relevantes para su vida actual, así como de que forman la base para su futuro aprendizaje de las matemáticas.
Reconocer, valorar y construir a partir del aprendizaje de las matemáticas que los niños han desarrollado y utilizar los métodos infantiles de resolución de problemas matemáticos como base para su desarrollo posterior.
Animar a los pequeños a verse a sí mismos como matemáticos, estimulando su interés y habilidad en la resolución de problemas y la investigación a través de actividades relevantes para ellos, que supongan un reto, y exijan mantener el esfuerzo.
Reconocer que el aprendizaje de las matemáticas es una actividad social que debe ser apoyada y en la que se debe profundizar, tanto a través de la interacción con otros niños, como con los adultos.
Proporcionar materiales apropiados, espacio, tiempo y otros recursos para animar a los niños a implicarse en su aprendizaje matemático.
Fijarse en el uso del lenguaje para describir y explicar ideas matemáticas, reconociendo el importante papel que juega el lenguaje en el desarrollo de todo aprendizaje.
Atender las necesidades de aprendizaje de los niños con discapacidad intelectual a través de la enseñanza explícita del vocabulario pertinente y de otras estrategias apropiadas para cada niño.
Atender las necesidades en el aprendizaje de las matemáticas de los niños para los cuales el inglés es la segunda o posterior lengua.
Responder a los diversos antecedentes culturales de los niños de este país y garantizar que todos los niños, en particular los de comunidades indígenas más tradicionales, tengan acceso a la formación cultural y al idioma en que se basa el aprendizaje de las matemáticas occidentales.
Animar a los pequeños a justificar sus ideas matemáticas a través de la comunicación de estas ideas, de un modo desarrollado por los niños, que muestren niveles adecuados de rigor matemático.
Reconocer que, aunque los materiales pueden ser importantes en el desarrollo infantil de las ideas matemáticas, éstas se desarrollan en realidad a través del pensamiento sobre la acción. Los niños deben ser animados a implicarse en la manipulación mental de ideas matemáticas.
Reconocer que el desarrollo matemático de los niños es interno, se ve afectado por, y tiene que ser relevante en diferentes contextos como la familia, los grupos culturales, comunitarios, los centros preescolares y la escuela.
Evaluar el desarrollo matemático de los niños a través de medios tales como la observación, las historias de aprendizaje, los debates, etc., que sean sensibles al desarrollo general de los niños, su desarrollo matemático, sus antecedentes culturales y lingüísticos, y a la naturaleza de las matemáticas como tarea o esfuerzo prolongado de investigación y resolución de problemas.
Reconocer que el fin principal de la recogida de información acerca del desarrollo matemático de los pequeños, a través de la evaluación, es hacer un seguimiento del desarrollo y facilitar la planificación de las siguientes interacciones, tareas, actividades e intervenciones.

Tabla 10. Prácticas docentes recomendadas para educadores de la primera infancia (Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia, 2012)

En las orientaciones anteriores se pone de manifiesto que las prácticas docentes, en la línea sugerida por los estándares americanos para la práctica matemática, deben fundamentarse en enfoques que den respuesta a las necesidades de aprendizaje de todos los niños, atendiendo a sus diferencias individuales: la curiosidad, el uso de materiales, la resolución de problemas, la interacción, la comunicación, etc. De ello se desprende que la educación matemática infantil debería fundamentarse en prácticas relevantes que favorezcan la experimentación, la manipulación, la actividad heurística, y que tengan muy en cuenta el contexto sociocultural en el que se desarrollan, y la evaluación debe basarse fundamentalmente en la observación, documentación e interpretación de estas prácticas.

5. La enseñanza de las matemáticas en Europa, de la Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural de Eurydice (EACEA P9 Eurydice, 2011)

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la Unión Europea (UE), y de forma más concreta la Red Eurydice, enfatizan la noción de competencia matemática, que se considera una de las competencias clave para el desarrollo personal, la ciudadanía activa, la inclusión social y la empleabilidad en la sociedad del conocimiento del siglo XXI.

La noción de competencia matemática, que se utiliza en distintos momentos y con distintos significados en el marco del proyecto PISA, se concibe en términos generales como la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004).

En el proyecto PISA, que se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros, la noción de competencia tiene también la función de marcar los niveles de dominio en las tareas de hacer matemáticas. En este sentido, han tenido una repercusión muy considerable los diferentes informes que muestran los resultados obtenidos en una evaluación a nivel internacional sobre el rendimiento en matemáticas de estudiantes de 15 años, y en los que se establecen diferentes niveles de competencia. Los datos de rendimiento se recogen conjuntamente con una extensa información general relativa a la disponibilidad de los recursos escolares y a la calidad del currículo y de la enseñanza, de manera que esta evaluación proporciona a los países una oportunidad sin precedentes de medir el progreso del rendimiento educativo junto con información empírica sobre los contextos de la escolarización.

Estos estudios, pues, realizan comparativas según el currículum del país, políticas educativas, factores sociales y culturales de los alumnos, situaciones socioeconómicas, estudios de los padres, etc. para tratar de explicar e identificar las causas de los resultados obtenidos. Sea cual sea el nivel de competencia matemática que se indica en estas pruebas internacionales, lo que está claro es que no se adquiere bruscamente sino que, por el contrario:

> (…) está claramente demostrado que los niños que tienen acceso a servicios de educación y cuidados de calidad en la primera infancia obtienen unos resultados mucho mejores, equivalente a un avance de uno o dos años escolares, en pruebas internacionales sobre competencias básicas, como PISA y PIRLS. (OCDE, 2007, p. 158)

Es evidente, pues, que el tipo de prácticas docentes que se llevan a cabo en las primeras edades son muy relevantes para favorecer (o no) la adquisición progresiva de la competencia matemática. La UE aboga por la calidad de la educación y los cuidados de la primera infancia como la mejor garantía para prepararlos adecuadamente para el mundo de mañana. En la comunicación de la comisión "Educación y cuidados de la primera infancia: ofrecer a todos los niños la mejor preparación para el mundo de mañana" se expone que:

> La educación y los cuidados de la primera infancia desempeñan una función esencial, ya que sientan las bases necesarias para mejorar las competencias de los futuros ciudadanos de la UE, permitiendo así afrontar desafíos a medio y largo plazo y disponer de una mano de obra más cualificada y capaz de contribuir al cambio tecnológico, así como de adaptarse a este. (Comisión Europea, 2011, p. 3)

En este contexto, la educación y los cuidados de la primera infancia constituyen el fundamento esencial para el éxito en materia de aprendizaje permanente, integración social, desarrollo personal y empleabilidad futura. Complementan el papel central de la familia y tienen una incidencia profunda y duradera que no se puede conseguir con medidas adoptadas en una fase posterior.

Desde este marco, se argumenta que las primeras experiencias de los niños constituyen la base de todo futuro aprendizaje. Si se adquiere una base sólida en la infancia, el aprendizaje posterior es más eficaz y es más probable que continúe a lo largo de toda la vida. La educación y los cuidados de la infancia son también especialmente importantes para los alumnos procedentes de medios desfavorecidos, como los inmigrantes y las familias con ingresos reducidos, según se indica en la comunicación de la comisión. Se concluye que al ayudar a todos los niños a aprovechar su potencial y darles los medios para conseguirlo, una educación y unos cuidados de alta calidad pueden contribuir en gran manera a la consecución de dos de los objetivos principales de la estrategia Europa 2020: reducir el abandono escolar prematuro por debajo del 10% y reducir el menos en 20 millones de personas la población en riesgo de pobreza y exclusión social.

En la tabla 11 se ofrece una síntesis de las propuestas de la UE para mejorar la calidad de la educación y los cuidados de la primera infancia:

Encontrar un equilibrio adecuado en los programas pedagógicos entre los aspectos cognitivos y los no cognitivos. Fomentar la profesionalización del personal: determinar la cualificación necesaria para las diferentes funciones. Aplicar medidas para atraer a personal cualificado, formarlo y fidelizarlo. Mejorar el equilibrio entre hombres y mujeres entre el personal. Evolucionar hacia sistemas que integren la educación y los cuidados, y mejorar su calidad, equidad y eficacia. Facilitar la transición de los niños pequeños entre la familia y los servicios de educación o cuidados, así como entre los diferentes niveles del sistema educativo Garantizar el aseguramiento de la calidad: elaborar marcos pedagógicos coherentes y bien coordinados, implicando a los principales interesados.

Tabla 11. Calidad de la educación y los cuidados de la primera infancia

(EACEA P9 Eurydice, 2011)

En relación a los programas pedagógicos se enfatiza que deben concebirse y prestarse de forma que respondan al conjunto de necesidades de los niños (cognitivas, emocionales, sociales y físicas). A la vez, se recomienda que dado que el abanico de prácticas que coexisten actualmente en la UE es muy amplio, es importante centrarse en la calidad y adecuación de los programas pedagógicos, así como analizar las buenas prácticas de los Estados miembros y aprender de ellas, a fin de garantizar que la educación y los cuidados de la primera infancia tengan el impacto más positivo que sea posible.

Desde la perspectiva de la educación matemática, en el documento "La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales" de la EACEA P9 Eurydice (2011), aunque hace referencia mayoritariamente a la educación obligatoria (a partir de los 6 años en la mayoría de países europeos), se expone que la evidencia procedente de la investigación sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la importancia de sentar las bases para el aprendizaje de las matemáticas desde la Educación Infantil.

Junto con este factor, algunas de las conclusiones más relevantes sobre medidas eficaces en la lucha contra el bajo rendimiento en matemáticas son las siguientes:

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: las conclusiones de diversos estudios indican que adaptarse a la diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas (Tieso, 2001, 2005).
- Hacer hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de "grandes temas" y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas, que es uno de los fundamentos de la Educación Matemática Realista (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).
- Intervención temprana en la educación primaria: los dos primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas (Williams, 2008).
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos (Hambrick y Svedkauskaite, 2005).
- Aumentar la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas (Williams, 2008).

En términos más generales, se destaca que para lograr cada vez mejores rendimientos de los alumnos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; y promover políticas basadas en la evidencia.

6. Conclusiones

En el transcurso de este artículo se han revisado algunas de las principales aportaciones internacionales sobre la educación matemática infantil para poder disponer de una visión más amplia de las matemáticas que deberían trabajarse en las primeras edades y cómo deberían trabajarse.

A modo de síntesis, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM (2003) se distinguen dos tipos de conocimientos matemáticos: a) contenidos matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad; b) procesos matemáticos: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación. En las primeras edades se otorga máxima importancia a la comprensión de los números y las diferentes formas de representarlos; la comprensión de las operaciones; la localización de posiciones; las propiedades geométricas de las formas y las transformaciones geométricas. Los contenidos de álgebra, medición y análisis de datos y probabilidad deben trabajarse también, aunque con una frecuencia inferior. Finalmente, se destaca el trabajo de los diferentes contenidos a través de los procesos matemáticos para favorecer su uso en diferentes contextos. A mi modo de ver, la principal fortaleza de esta aportación es que se aportan estándares de contenidos de todos los bloques ya desde las primeras edades, y se destaca la necesidad de trabajarlos a través de los procesos matemáticos para fomentar la competencia matemática.

Respecto a la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en Educación Infantil (NAEYC y NCTM, 2013), uno de los aspectos más relevantes es que se subraya que para lograr una educación matemática de alta calidad tiene que darse una atención mucho mayor a las primeras experiencias matemáticas. En este sentido, las prácticas de aula deben potenciar el interés natural de los niños por las matemáticas; aprovechar las experiencias y conocimientos previos; basar los currículos en el desarrollo integral; impulsar los procesos de pensamiento matemático; garantizar secuencias lógicas de aprendizaje que vayan de lo concreto a lo abstracto; potenciar la adquisición de conocimientos numéricos, geométricos y de medida (sin infravalorar el resto); conectar las matemáticas con otras áreas de conocimiento y con el entorno; proporcionar situaciones de juego y ofrecer una variedad de contextos de aprendizaje además del juego (por ejemplo situaciones de vida cotidiana, rutinas, materiales manipulativos, etc.); y, finalmente, apoyar el aprendizaje a través de una evaluación basada en la observación y la documentación. Parece, pues, que la evaluación debe estar en estrecha sintonía con el método de enseñanza, y que dicha enseñanza se debe focalizar en prácticas basadas en las situaciones de vida cotidiana, los materiales lúdico-manipulativos, etc.

La Iniciativa para unos Estándares Estatales Básicos Comunes (CCSSI, 2010) distingue dos tipos de estándares comunes para las matemáticas: a) los estándares para la práctica matemática: identificar el problema y perseverar hasta resolverlo; razonar de forma abstracta y cuantitativa; crear argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás; modelización matemática; utilizar estratégicamente las herramientas apropiadas; crear precisión; buscar y hacer uso de una estructura; y buscar y expresar la regularidad en un razonamiento repetido; b) los estándares para el contenido matemático: contar y los números cardinales; operaciones y pensamiento algebraico; números y operaciones con decimales; medición y datos; y geometría. De forma más concreta, en relación a las primeras edades se otorga máxima importancia a las prácticas matemáticas basadas en la observación, la manipulación, la experimentación libre, la actividad heurística, el juego, etc. Y en relación a los contenidos, se destacan en primer lugar los números (representar, relacionar y operar), a los que se debe dedicar más tiempo que a los otros temas, y en segundo lugar la descripción de figuras y el espacio.

Estas orientaciones han generado cierta controversia. Algunos de sus detractores señalan que se perjudica a los alumnos al priorizar las habilidades por encima de los conceptos, que es imposible realizar reformas educativas a nivel nacional en un territorio tan grande como es el americano, o bien que los profesores no han gozado de la preparación necesaria para llevar a cabo este tipo de estrategias educativas. A pesar de estas críticas, desde mi punto de vista es imprescindible que la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades se fundamente en las habilidades de los niños para progresivamente llegar a los conceptos, puesto que la enseñanza tradicional de las matemáticas -centrada en los conceptos- se ha mostrado insuficiente. Es evidente que este cambio debería ir acompañado de la formación adecuada al profesorado, o por lo menos a todos los profesionales que necesiten algún tipo de actualización a nivel metodológico. A mi modo de ver, pues, la crítica a este documento no se debería centrar tanto en el “cómo enseñar”, sino en el “qué enseñar”: la gran debilidad del documento es que, a diferencia de los estándares del NCTM (2003), no se mencionan contenidos para las primeras edades referentes al álgebra, la medida y el análisis de datos y la probabilidad, cuando un planteamiento curricular completo debería contemplar también estos contenidos.

Fuera de las fronteras americanas, la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas y Primera Infancia (2012) sostiene también que los primeros años son muy importantes para el desarrollo de las matemáticas y de la competencia matemática. Consideran que todos los niños, en sus primeros años, son capaces de acceder a grandes ideas matemáticas, relevantes para su vida actual y, a su vez, fundamentales para su futuro aprendizaje de las matemáticas y para otros aprendizajes si se llevan a cabo las prácticas docentes adecuadas. En las primeras edades se otorga máxima importancia a tener en cuenta el contexto sociocultural de los niños y utilizar recursos y estrategias que atraigan la curiosidad natural de los niños para favorecer el desarrollo de las ideas y de la comprensión de las matemáticas infantiles: la resolución de problemas, la acción sobre los objetos (materiales manipulativos), la interacción, la comunicación, etc. Según mi opinión, estas orientaciones están en completa sintonía con las necesidades de los niños de las primeras edades para aprender matemáticas.

Ya en Europa, el informe sobre la educación matemática de la OCDE, la UE y la Red Eurydice (2011) parte de la premisa que una educación matemática de calidad desde las primeras edades favorece el desarrollo de la competencia matemática, al estar claramente demostrado que los niños que tienen acceso a servicios de educación y cuidados de calidad en la primera infancia obtienen unos resultados mucho mejores, equivalente a un avance de uno o dos años escolares, en pruebas internacionales sobre competencias básicas. Desde este punto de vista, se otorga máxima importancia a políticas educativas orientadas a trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula, aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos, usar de forma eficaz los métodos de evaluación, establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo, mejorar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas, ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad, y promover políticas basadas en la evidencia. Aunque el informe europeo analizado no aporta orientaciones curriculares tan específicas como las que se han aportado en el contexto americano o australiano, a mi modo de ver la relevancia del documento es que deja claro que hace falta una educación matemática de calidad en la primera infancia para fomentar la competencia matemática.

En conclusión, pues, todas las orientaciones internacionales contemporáneas sobre la educación matemática infantil coinciden en la importancia de trabajar de forma rigurosa las matemáticas en la etapa de Educación Infantil con el objetivo de formar a personas matemáticamente competentes. Apoyando este argumento, Castro (2006) manifestó hace ya algunos años que es apropiado pensar que la competencia matemática se va conformado desde edades tempranas ya que las capacidades matemáticas tienen una génesis, y van evolucionando hacia una mayor complejidad conforme avanza el desarrollo cognitivo.

Actualmente se dispone, como se ha puesto de manifiesto, de orientaciones curriculares de calidad contrastada en materia de educación matemática en las primeras edades que ofrecen pautas para poder trabajar de forma sistemática contenidos de números, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad para favorecer la comprensión y el uso eficaz de estos contenidos en diferentes contextos significativos, más que su aprendizaje mecánico para finalidades únicamente escolares. Es de esperar pues, que en los próximos años, haya una apuesta decidida para incorporar todos estos elementos en los currículos y favorecer, de esta forma, un mayor acceso a conocimientos matemáticos importantes y necesarios para poder desenvolverse en la sociedad del siglo XXI.

Bibliografia

Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.

Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia en Australia (2012). Declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(2), 1-4.

Comisión Europea (2011). Comunicación de la Comisión "Educación y cuidados de la primera infancia: ofrecer a todos los niños la mejor preparación para el mundo de mañana". Recuperado de: http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=COM:2011:0066:FIN:ES:PDF

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standars for Mathematics. Recuperado de: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

EACEA P9 Eurydice (2011*). La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Hambrick, A. y Svedkauskaite, A. (2005). Remembering the child: On equity and inclusion in mathematics and science classrooms. Critical issue. Recuperado de: http://www.ncrel.org/sdrs/areas/issues/content/cntareas/math/ma800.htm.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23.

OCDE (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OCDE.

OCDE (2007). PISA 2006 Science competence for tomorrow's world. París: OCDE.

Tieso, C. (2001). Curriculum: Broad brushstrokes or paint-by-the numbers? *Teacher Educator*, 36, 199-213.

Tieso, C. (2005). The effects of grouping practices and curricular adjustement on achievement. *Journal for the Education of the Gifted*, 29, 60-89.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education in the Netherlands. En J. Anghileri (Ed.), *Principles and practice in arithmetic teaching. Innovate approaches for the primary classroom* (pp. 49-63). Buckingham: Open University Press.

Williams, P (2008). *Independent review of mathematics teaching in early years settings and primary schools: Final report*. Londres: DCSF.

Autor: Ángel Alsina: profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado. Ha publicado numerosos artículos y libros sobre cuestiones de educación matemática y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación del profesorado de matemáticas en España y América Latina.

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 233-234

Fernández Bravo, J. A. & Barbarán Sánchez J. J. (2015). Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática. Madrid: La Muralla. ISBN: 978-84-7133-814-3

http://www.arcomuralla.com/detalle_libro.php?id=444

Los autores nos presentan un libro que aborda dos tópicos tan interesantes en la Didáctica de la Matemática como son la invención de problemas y la competencia matemática. Es una obra que va dirigida principalmente al profesorado de Educación Secundaria (ESO y Bachillerato), así como a estudiantes del Grado de Maestro y del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

El libro está dividido en cinco capítulos. En los tres primeros, se analiza el estado de la cuestión sobre la competencia matemática, la invención y la resolución de problemas. En ellos se nos pone al día sobre estos tres importantes tópicos. En el capítulo 4, corazón del libro, como afirman los autores, se presenta un método para que el alumno entienda qué hacer y cómo hacerlo, que razone, que establezca relaciones, aplique propiedades, desarrolle pensamiento y acción intelectual -y se atreva a ello-. En este capítulo se presentan seis metamodelos y 49 modelos de situaciones problemáticas que tienen a la invención y reconstrucción de problemas como denominador común. Para cada modelo se proponen ejemplos de problemas de aplicación directa en el aula. Finalmente, se adjunta una tabla que podrá utilizar el profesor para seleccionar la competencia matemática que quiere trabajar con sus alumnos y que además le informa de las tres principales competencias matemáticas que desarrolla cada modelo. En el capítulo 5, se expone un programa (con sus correspondientes indicaciones metodológicas para el profesorado) para que los alumnos aprendan a resolver problemas usando como herramienta la invención y potenciando el desarrollo de la creatividad y el razonamiento. Las propuestas formuladas por los autores en los capítulos 4 y 5 están avaladas por el éxito que ha tenido su aplicación con alumnos de diferentes etapas educativas, disfrutando del hacer matemático.

El grado de comprensión y emoción de lo que se aprende es directamente proporcional al grado de la aplicación adecuada. En la sociedad del siglo XXI en la que vivimos, nuestros alumnos tienen que ser matemáticamente

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 233-234

competentes. Esta obra es un libro esencial para que de alguna manera tenemos la responsabilidad del aprendizaje en la enseñanza que impartimos.

Carlos Almena Sánchez
Profesor Asociado Facultad de Educación.
Universidad Camilo José Cela.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 235-241

www.fisem.org/web/union

El rincón de los problemas

Los niños crean problemas de matemáticas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Se dispone de una jarra con la que se puede medir exactamente solo 1,5 litros de agua y de otra jarra con la que se puede medir exactamente solo 3,5 litros de agua.

a) *Usando solamente estas jarras para medir, ¿cómo reunir en un balde exactamente 20,5 litros de agua?*
b) *¿Se puede reunir en un balde exactamente 20,5 litros de agua, usando solo la jarra de 1,5 litros?*

Los requerimientos de este problema y otros similares, que veremos más adelante, han sido creados por niños de sexto grado de primaria del colegio estatal Romeo Luna Victoria del Perú, a partir de un problema con la misma información. Es decir, han creado problemas por variación, manteniendo la información y modificando los requerimientos.

Esta es una muestra más de la potencialidad creativa de los niños y una ocasión más para reflexionar sobre la importancia de desarrollar las clases de matemáticas, en todos los niveles educativos, estimulando a nuestros estudiantes a crear problemas.

El marco en el que los niños crearon los nuevos problemas, es una experiencia didáctica desarrollada por el profesor de educación primaria Jorge Cárdenas Canchanya, como parte de su trabajo de tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú, cuya asesoría estuvo a mi cargo. Este es uno de los primeros trabajos de tesis en el Perú, en el campo de la Educación Matemática, tratando la creación de problemas ("problem posing" en la literatura en inglés). En verdad, los trabajos en este campo, aun a nivel internacional, no son tan abundantes como los trabajos referidos a resolución de problemas, pero últimamente se está publicando más. Una muestra de ello es el libro de 569 páginas *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*, editado por F.M Singer, N. Ellerton y J. Cai y publicado recientemente por Springer en el 2015; y otra muestra es el volumen 83 de la revista Educational Studies in Mathematics, publicado en mayo del 2013, íntegramente dedicado a investigaciones sobre creación de problemas.

Cabe destacar que la experiencia didáctica que ahora comentamos se ubica en la línea de investigaciones desarrolladas en otros países sobre la creación de problemas por niños de educación básica. Tenemos, por citar algunas, la tesis doctoral de María F. Ayllón: *Invención-resolución de problemas por alumnos de educación primaria*, en la Universidad de Granada, en el 2012 y la investigación de Rosli, R., Goldsby, D. y Capraro, M., Assessing students'mathematical problem-solving and problem-posing skills, publicada en el 2013 en la revista. *Asian Social Science, 9*(16), pp. 54-60.

En el trabajo realizado con el profesor Cárdenas, se tuvo como propósito analizar problemas de adición, sustracción y multiplicación de expresiones decimales, creados por alumnos de sexto grado de primaria (11 ó 12 años de edad), para obtener información sobre sus capacidades creativas y matemáticas. En esa perspectiva, una de las cuatro sesiones de trabajo que diseñamos – y la que comentamos ahora – fue con medidas de capacidad y planteando situaciones problemáticas con el uso de jarras que permitían medir con exactitud cantidades de litros que no estaban expresadas por números enteros sino por expresiones decimales. Una jarra de 3,5 litros de capacidad y otra de 1,5 litros de capacidad. La idea era que a partir del problema dado, los niños crearan nuevos problemas haciendo modificaciones a los requerimientos del problema dado.

El problema inicial

A continuación mostramos la ficha de trabajo, tal como fue propuesta a los niños. La ilustración visual y el contexto escolar extracurricular que se da a la situación problemática, fueron ideadas por el profesor Cárdenas. Inclusive, en lugar de agua, se hace referencia a un refresco típico peruano, llamado “chicha morada”.

Nombres y apellidos:.. Fecha:.....................

FICHA N° 16

Resuelve el siguiente problema

En la casa de Anita tienen una jarra con la que solo se puede medir exactamente 1,5 litros y otra jarra con la que solo se puede medir exactamente 3,5 litros. Para la fiesta en el Colegio, con motivo del Día del Niño, Anita debe llevar cierta cantidad exacta de litros de chicha morada.

a) ¿Cómo puede juntar en un bidón exactamente 13 litros de chicha morada, si para medir solamente puede usar una sola jarra o las dos, las veces que sea necesario?

b) ¿Cómo puede juntar en un bidón exactamente 2 litros de chicha morada, si para medir solamente puede usar una sola jarra o las dos, las veces que sea necesario?

Hubo cierta sorpresa inicial de los niños al recibir el problema, por ser no rutinario, pero finalmente, los diez niños resolvieron correctamente ambos ítems, teniendo más dificultad en el ítem b, que los obliga a efectuar una sustracción.

Creación de problemas

Luego que resolvieron el problema dado, se les pidió que – modificando o añadiendo preguntas – inventen individualmente un nuevo problema. La idea era hacerles vivir una experiencia de crear nuevos problemas a partir de la misma información, y esta vez, usando operaciones de adición, multiplicación y sustracción de representaciones decimales que expresaban medidas de capacidad.

Solo uno de los niños creó tres ítems, los tres en el mismo formato de pedir cómo llenar – con la información dada en el problema – determinada cantidad de litros de chicha morada en un bidón. Usaremos la letra C para representar a las cantidades de líquido que se quiere reunir, usando las jarras dadas. Así, diremos, que este niño pide, en los requerimientos de su problema, reunir C litros de líquido, siendo C, respectivamente, 14, 10 y 8. Esto revela fluidez en la capacidad creativa de este niño.

Los otros nueve niños crearon dos ítems cada uno. Dos de ellos preguntaron cuántos litros se acumulan si se vacían en un bidón determinado número de jarras de 3,5 litros de chicha morada y determinado número de jarras de 1,5 litros. Podríamos tipificar estos problemas como la determinación de los C litros de líquido que se acumulan, si se vacían *n* jarras de 3,5 litros y *m* jarras de 1,5 litros, para valores enteros conocidos de *n* y *m*. A continuación mostramos en las figuras 1 y 2 los problemas específicos de dos niños:

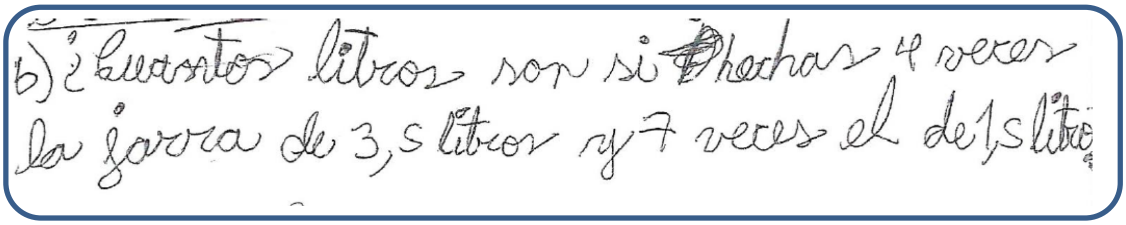

b) ¿Cuantos litros son si hechas 4 veces la jarra de 3,5 litros y 7 veces el de 1,5 litros

Figura 1

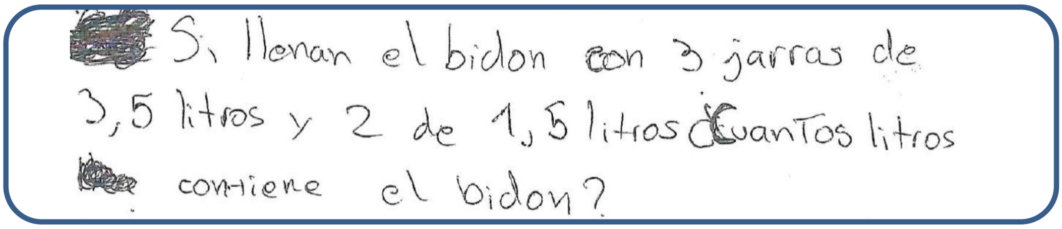

Si llenan el bidon con 3 jarras de 3,5 litros y 2 de 1,5 litros ¿Cuantos litros contiene el bidon?

Figura 2

Ciertamente este tipo de requerimiento es más sencillo que los requerimientos *a* y *b* del problema inicial, pero tiene el mérito de no ser similar a tales requerimientos, lo cual refleja flexibilidad en la capacidad creativa de estos niños.

Todos los niños, en alguno de los ítems que construyeron, preguntaron cómo se podría obtener C litros de chicha morada, usando ambas jarras, para algunos valores de C mayores que 4. Estos son los casos más parecidos al ítem *a* del problema inicial. Un niño consideró el caso C = 5, que es el más sencillo pues se logra reuniendo los 3,5 litros de una jarra y los 1,5 litros de la otra jarra. Curiosamente, lo propone luego de pedir en su ítem *a* la obtención de 15 litros, que lo resuelve con 3 jarras de 3,5 litros y 3 jarras de 1,5 litros; o sea, tres veces 5 litros (3,5 más 1,5).

Algunos de los valores de C dados, fueron no enteros (7,5; 16,5 y 20,5), lo cual también revela flexibilidad en la capacidad creativa, al salirse del “modelo” del problema inicial, en el cual se considera solo valores enteros de C (C = 13 y C = 2). Mostramos en la figura 3 un caso específico, que en el ítem *b* pide juntar 7,5 litros de chicha morada usando las dos jarras.

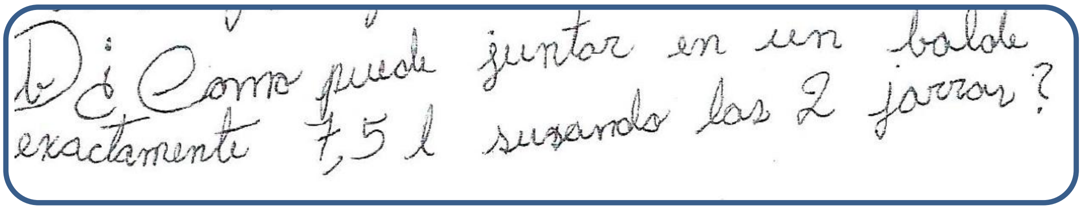

b) ¿Como puede juntar en un balde exactamente 7,5 l usando las 2 jarras?

Figura 3

Es interesante notar que es un caso en que C no es menor que 5, pero obliga a una sustracción, como lo expresa el niño en su solución, que mostramos en la figura 4.

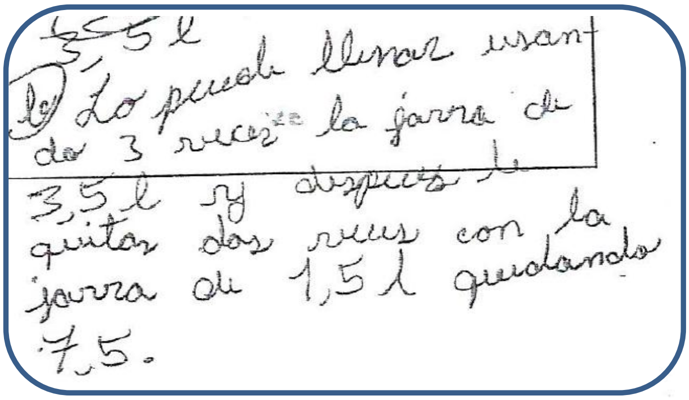

3,5 l
b) Lo puede llenar usando 3 veces la jarra de 3,5 l y después le quitas dos veces con la jarra de 1,5 l quedando 7.5.

Figura 4

Dos niños preguntaron en su ítem *b* cómo se podría medir 4 litros, lo cual ya se percibe con mayor dificultad por ser un entero menor que 5 (la suma 3,5 y 1,5), que obliga a efectuar una sustracción. Sus soluciones, que mostramos en las figuras 5 y 6, fueron diferentes, ambas correctas, y no replican sus soluciones al ítem *b* del problema inicial, en el que se pide reunir 2 litros.

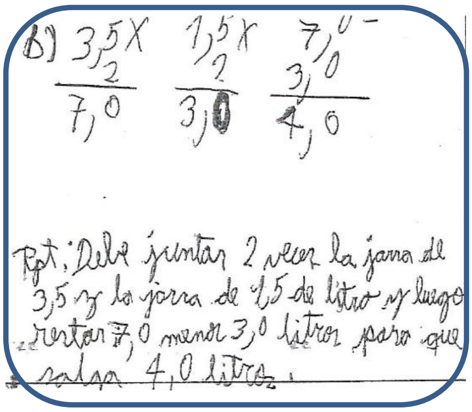

b) 3,5 x 2 = 7,0   1,5 x 2 = 3,0   7,0 − 3,0 = 4,0
Rpt: Debe juntar 2 veces la jarra de 3,5 y la jarra de 1,5 de litro y luego restar 7,0 menos 3,0 litros para que salga 4,0 litros.

Figura 5

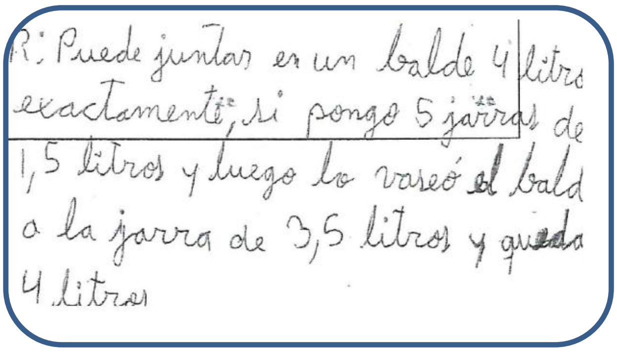

R: Puede juntar en un balde 4 litros exactamente, si pongo 5 jarras de 1,5 litros y luego lo vaseó al balde a la jarra de 3,5 litros y queda 4 litros

Figura 6

Un niño propone en su ítem *a* juntar 20,5 litros de chicha morada usando ambas jarras y en su ítem *b* pregunta si es posible juntar 20,5 litros de chicha morada, usando solo la jarra de 1,5 litros. Este es el problema con el cual iniciamos el presente artículo y cuya versión original copiamos en la figura 7.

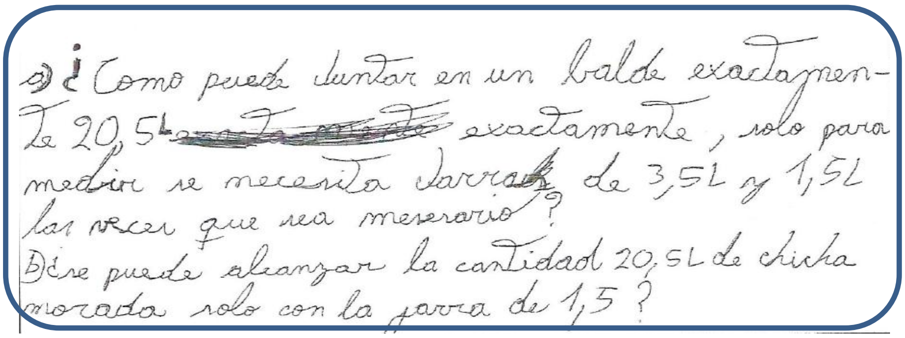
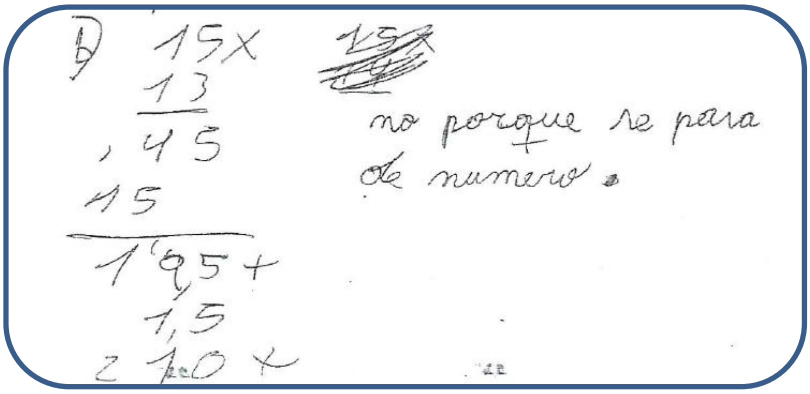

a) ¿Como puede juntar en un balde exactamente 20,5L exactamente, solo para medir se necesita jarras de 3,5L y 1,5L las veces que sea necesario?
b) ¿se puede alcanzar la cantidad 20,5L de chicha morada solo con la jarra de 1,5?

Figura 7

Es claro que el problema revela alta originalidad en la capacidad creativa del niño, no solo por ser el único caso, de diez, con este tipo de pregunta en su ítem *b*, sino porque la pregunta en sí misma es diferente en su estructura a todas las preguntas, tanto del problema dado como de los problemas creados, pues es una pregunta abierta. Es el tipo de preguntas que hacen reflexionar más y que, paradójicamente, son las menos frecuentes en los libros y en las aulas. El niño nos está dando un hermoso ejemplo de construcción de un problema con pregunta abierta. Más aún, considerando que es un niño de primaria, su solución, que mostramos en la figura 8, es correcta.


b) 15x
13
,45
15
1'95+
1,5
210

no porque se para de numero.

Figura 8

Ciertamente, para un estudiante de secundaria, un universitario, o un profesor, se exigiría un mayor rigor en su argumentación. Esto mismo nos hace ver la potencialidad del problema creado por el niño.

El lector habrá advertido que la redacción y ortografía en los textos de los problemas creados por los niños, y en sus soluciones, no siempre es la más adecuada. La creación de problemas, brinda también oportunidades para revisar y mejorar estos aspectos; sin embargo, los profesores debemos ser conscientes de que, aun para los adultos, no es fácil redactar de la mejor manera un problema para que realmente exprese lo que el autor ha pensado y sea entendido de la misma forma por todos los lectores. Así, debemos tener sumo cuidado de no afectar el estímulo de la capacidad creativa de los niños por poner mucho énfasis en las correcciones gramaticales, de redacción y de ortografía, o por hacerlo en un momento poco oportuno.

Consideraciones finales

1. Los problemas de las jarras, que acabamos de ver, podríamos considerarlos todos como casos específicos, en contexto extra matemático, de la ecuación

$$3{,}5\, n + 1{,}5\, m = C$$

   donde $m, n \in \mathbb{Z}$ (números enteros) y $C \geq 0$. Es claro que si m y n son números previamente dados, se determina inmediatamente C; y que los casos más interesantes se dan al establecer un valor determinado para C y buscar valores correspondientes – que no tienen que ser únicos – para m y n. Obviamente este es un entorno matemático de ecuaciones diofánticas, que no lo conocen los niños de primaria; sin embargo, han creado problemas, inclusive uno de ellos con una pregunta abierta.

2. La experiencia didáctica descrita y comentada confirma investigaciones de otros educadores matemáticos, en el sentido de evidenciar capacidades creativas y matemáticas de niños de primaria mediante el análisis de los problemas que ellos crean.

3. Se ha evidenciado también la estrecha relación entre resolución y creación de problemas. Todos los niños resolvieron correctamente el problema propuesto, y prácticamente todos resolvieron correctamente los problemas que ellos mismos propusieron. Hubo solo un error operativo al resolver uno de los ítems de un problema creado. Este es un aspecto importante al analizar las capacidades matemáticas de los niños.

4. Se advirtió claramente el entusiasmo de los niños al crear y resolver sus propios problemas luego de haber resuelto correctamente el problema propuesto. Como hemos mencionado, se han evidenciado casos de alta flexibilidad, fluidez y originalidad.

5. La capacidad creativa mostrada por niños de primaria en solo una experiencia didáctica de cuatro sesiones, nos lleva a afirmar que los profesores podemos contribuir grandemente a desarrollar las potencialidades creativas de nuestros alumnos, si desde los primeros grados de educación inicial y primaria los estimulamos a crear problemas, a reflexionar sobre ellos y a resolverlos. Más aún nos lleva a pensar en la responsabilidad que asumimos con el futuro de nuestros educandos y de nuestro país, si no estimulamos la creatividad; o peor aún si sin darnos cuenta la estamos recortando.

6. Los profesores debemos tomar conciencia de lo importante que es incorporar la creación de problemas en las clases de matemáticas, por lo estimulante que es para el aprendizaje y el inicio en la investigación, y por lo mucho que

influye en los estudiantes, tanto en su actitud favorable hacia la matemática como en el fortalecimiento de su autoestima.

7. Incorporar la creación de problemas en las clases de matemáticas supone también una opción por una actividad docente muy creativa, en permanente búsqueda de ideas para crear problemas relacionados con los objetos matemáticos que debe tratar en sus clases y llevarlas a las aulas adecuadamente preparadas para que sean los estudiantes los que creen los problemas y el profesor el que oriente, aclare, complemente y se involucre en un aprendizaje conjunto con sus alumnos.