REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XI – Número 43 – Diciembre 2015

ÍNDICE

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 3-4

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

Evaluadores

Agustín Carrillo de Albornoz
Alicia Fort
Ana S. Martinez
Ana Tadea Aragón
Antonino Viviano Di Stefano
Barbara Lutaif Bianchini
Carlos Sanchez
Carmen Galván Fernández
Carmen Teresa Kaiber
Cecilia Rita Crespo Crespo
Celia Rizo
Claudia Oliveira Groenwald
Cristina Ochoviet
Etda Luisa Rodríguez Minarsky
Eugenio Carlos
Eva Cid Castro
Gabriel Loureiro de Lima
Gustavo Franco
Hugo Parra
Inés del Carmen Plasencia
Jorge Brisset
José Manuel Matos
José María Gavilán Izquierdo
José Muñoz Santonja
Josefa Hernández Domínguez
Julio Vassallo
Leonor Santos
Luis Campistrus
Luis Moreno Chandler
Luiz Otávio Maciel Miranda
Margarita González Hernández
María Candelaria Espinel Febles
María Carmen García González
María Carmen Peñalva Martínez
Maria de Lurdes Serrazina
María Elena Ruiz
María Encarnación Reyes Iglesias
María Luz Callejo de la Vega
María Mercedes Colombo
María Mercedes García Blanco
Maria Mercedes Medina Palarea
Mario Dalcin
Matías Camacho Machín
Miguel Chaquiam
Mónica Ester Villarreal
Mónica Olave
Natael Cabral
Natahali Martín Rodríguez
Nelson Hein
Olga Lidia Pérez González
Patrícia Lestón
Patrick Scott
Rafael Escolano
Raimundo Ángel Olfos Ayarza
Rosa Martinez
Silvia Dias Alcântara Machado
Verónica Molfino
Victoria Sánchez García
Yacir Testa

Diseño y maquetación

Diseño web: Daniel García Asensio

Logotipo de Unión: Eudaldo Lorenzo

Colaboran

CARLOS SALVADOR Y BEATRIZ FUNDACIÓN CANARIA

OEI

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 05-08

Editorial

Estimados colegas y amigos:

Les presentamos el volume 43 de UNIÓN que corresponde al tercero publicado en este año 2015. Este número comienza, como ya es habitual, con el artículo correspondiente a la firma invitada, que en esta ocasión ha sido Ricardo Ulloa Azpeitia, Dr. en C. Matemática Educativa, UAE Morelos-CINVESTAV, Coordinador de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y Ing. Químico UdG.

Azpeitia nos hace reflexionar sobre el tema "Objetos para aprender: diseño, construcción, evaluación formativa y rediseño", porque según él, "se tiene la percepción de que existen innumerables opciones para emplear recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero la frecuencia de su uso es bastante pobre, lo que representa una lamentable situación, dada la trascendencia de la materia".

En este número encontrarán otros artículos que les invitamos a leer.

Comenzamos con "Dilemas de un investigador en busca de los datos de su investigación" de Alvarenga y Machado, que exponen los caminos seguidos en una investigación de tipo bibliográfica. Las investigadoras explican los tipos de búsquedas realizadas y las asignaciones hechas con el fin de formar un corpus. Por lo tanto, se exponen los obstáculos y avances de una investigación en el momento de la recogida de datos.

El segundo artículo titulado "Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica", fue escrito por Santos Edimer. La discusión es sobre el hecho de que la historia de las matemáticas presentada de una manera amena, a través de cuentos, relacionándola con los conceptos básicos de la teoría de números, como la divisibilidad o la noción de número primo, entre otros, motiva a los estudiantes y facilita la comprensión de los conceptos mencionados.

Salcedo es el autor de "Análisis de las actividades de estadística propuestas en textos escolares de Primaria". Expone su preocupación al analizar las actividades de estadística propuestas para el estudiante en los libros de matemática para la Educación Primaria de la Colección Bicentenario. El análisis indica que 13 de las actividades no estaban relacionadas con el contenido estadístico y 12 no son actividades; y de las 21 actividades restantes, 17 pertenecen a las categorías de baja demanda cognitiva del modelo utilizado.

"Os cursos de cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes" es el título del artículo de Lima e Silva. En él los autores destacan las preocupaciones didácticas observadas en los libros y en las prácticas de los maestros que enseñaron los cursos de Cálculo diferencial e integral en la Universidad de São Paulo entre los años 1930 y 1990. Se observó que, poco a poco, el curso inicial de Cálculo se ha vuelto más adecuado a la madurez matemática de los ingresantes universitarios, pero que, al mismo tiempo, las cuestiones fundamentales relacionadas a los conceptos perdieron espacio en los textos.

El propósito de esta revista es ofrecer en cada edición, además de los artículos, otras dos secciones, una dedicada a resolución de problemas y otra con una reseña de un libro que consideremos de interés.

En este volume 43, el problema presentado en "El rincón de los problemas: *Actividades lúdicas y creación de problemas (1)*" está propuesto por Uldarico Malaspina Jurado de la Universidad Pontificia Católica del Perú – IREM. Esta sección contará con uma segunda parte que se publicará en el volume 44.

Manuel Joaquim Saraiva de la Universidad de Beira Interior, Covilha, Portugal realiza la revisión del libro "Matemáticas en los programas no terciarios" (1835-1974) escrito por António José Almeida y José Manuel Matos.

Deseando haber contribuido con nuestro trabajo con la Educación Matemática de los países de Iberoamérica, enviamos nuestro agradecimiento a todos los que han hecho posible este nuevo número de UNIÓN.

Celina Abar
Sonia Igliori

Estimados colegas e amigos:

Este é o volume 43 de nossa revista UNIÓN, o terceiro dos números do ano de 2015. O número é introduzido pelo artígo de nosso convidado, Ricardo Ulloa Azpeitia, Dr. en C. Matemática Educativa, UAE Morelos-CINVESTAV, Coordinador de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y Ing. Químico UdG.

Azpeitia nos faz refletir sobre o tema: “Objetos Para Aprender: Diseño, Construcción, Evaluación Formativa y Rediseño”, pois segundo ele “existe a percepção de que existem inúmeras opções para utilizar recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem da matemática, mas a extensão de seu uso é bastante pobre, o que é uma situação lamentável, dada a importância da questão”.

Na sequência somos convidados a tomar contato com outros artigos, dos quais indicamos o título, os investigadores e algumas de suas ideias.

Começamos com “*Dilemas de um pesquisador em busca dos dados de sua pesquisa*” de Alvarenga e Machado quando indicam os caminhos seguidos em uma investigação do tipo bibliográfica. As pesquisadoras explicam os tipos de buscas realizadas e os mapeamentos feitos com o intuito de formar um *corpus*. Para isso são expostos os avanços de um pesquisador na ocasião da coleta de dados

O segundo artígo é intitulado “*Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica*”. Foi escrito por Santos Edimer. Sua discussão é sobre o fato de que a história de matemática apresentada de uma forma divertida através de histórias, a ligação com os conceitos básicos da teoria de números, tais como a divisibilidade, a noção de número primo, entre outros, motiva os alunos e também facilita a compreensão dos conceitos mencionados.

Salcedo é o autor de “*Análisis de las actividades de estadística propuestas en textos escolares de primaria*” quando se preocupa em analisar as atividades de estatística propostas nos livros de matemática para a educação Primária da Coleção Bicentenario. A análise indica que 13 das atividades não estão relacionadas com o conteúdo estatístico e 12 não são atividades. Das 21 atividades restantes, 17 pertencem às categorias de baixo nível cognitivo do modelo utilizado.

“*Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes*” é o título do artigo de Lima e Silva. Os autores destacam preocupações didáticas observadas em livros adotados e nas práticas de docentes que atuaram em cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade de São Paulo entre as décadas de 1930 e 1990. Observou-se que, pouco a pouco, o curso inicial de Cálculo se tornou mais adequado à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior, mas que, ao mesmo tempo, questões fundamentais referentes aos conceitos perderam espaço nos livros didáticos.

O objetivo desta revista é trazer em cada edição, além dos artigos duas outras seções, uma seção de problemas e outra com uma resenha de um livro.

Manuel Joaquim Saraiva da Universidade de Beira Interior, Covilha, Portugal faz a resenha do livro "Matemáticas nos programas de ensino não superior (1835-1974)” de autoria de António José Almeida e José Manuel Matos

No volume 43 o problema apresentado é "*Actividades lúdicas y creación de problemas (1)*" proposto por Uldarico Malaspina Jurado da Pontificia Universidade Católica do Perú – IREM. Essa edição contará com a segunda parte no volume 44.

Desejando ter contribuído com a Educação Matemática dos países Iberoamericanos enviamos nossos agradecimentos a todos os que tornaram possível este novo número de UNIÓN.

Celina Abar
Sonia Igliori

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Página 09

Firma Invitada: *Ricardo Ulloa Azpeitia*

Breve Reseña

Realizó sus estudios de Ingeniero Químico en la Universidad de Guadalajara, es Maestro en Ciencias en matemática educativa por el CINVESTAV-IPN y en Tecnología Instruccional por la Universidad de Houston. Obtuvo el grado de Doctor en Ciencias en Matemática Educativa por la Universidad del E. Morelos. También está certificado en Educación a Distancia por la U. de Pensilvania y cursó los diplomados en Educación a Distancia en la Universidad de Pensilvania y de San Diego, el diplomado Interinstitucional en innovación educativa, Universidades de British Columbia, Pensilvania, Houston y
Guadalajara.así como en Enseñanza de las Matemáticas en el programa nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas (PNFAPM) dirigido por el Cinvestav-IPN.

Es profesor en la Universidad de Guadalajara desde 1973 y a partir de 1993 le fue asignada la titularidad C asignándolo como profesor investigador de la misma universidad. Tiene perfil PROMEP desde 2003 y ha dirigido y asesorado más de 60 tesis de maestría, doctorado y licenciatura en diferentes Instituciones en el país. Ha impartido alrededor de 400 cursos escolarizados de matemáticas en secundaria, bachillerato, licenciatura y posgrado, además de 75 cursos de formación docente y talleres de evaluación. Ha participado en la planeación, actualización diseño y evaluación de diversos programas de maestría en Enseñanza de las Matemáticas en la República Mexicana en modalidades escolarizada y a distancia y es evaluador de Proyectos de investigación remitidos a CONACYT. Cuenta con más de 146 publicaciones y es miembro del comité de evaluación de la revista Pesquisa Matemática. Sus líneas de investigación se centran en la evaluación alternativa en la enseñanza de las matemáticas, factores lúdicos en el aprendizaje de las matemáticas y lectomatemáticas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 10-29

Objetos Para Aprender: Diseño, Construcción, Evaluación Formativa y Rediseño

Ricardo Ulloa Azpeitia

Resumen	Se tiene la percepción de que existen innumerables opciones para emplear recursos didácticos tecnológicos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero la frecuencia de su uso es bastante pobre, lo que representa una lamentable situación, dada la trascendencia de la materia. El uso de materiales digitales para presentar una diferente visión, como los llamados Objetos Para Aprender, puede ser un factor para incidir sobre la percepción de la materia por parte de los alumnos y por ende, su motivación. Parece poco arriesgado decir que si cambian los resultados de aprendizaje, en buena parte será debido al empleo de las TIC, lo que implica adecuar los modelos de enseñanza y aprendizaje, pues el mero uso de la tecnología no garantiza mejoras, más bien, se corre el peligro de cometer mayores crímenes didácticos con opciones educativas de mala calidad, mediadas por las innovaciones. **Palavras clave:** objeto para aprender, evaluación formativa, diseño instruccional
Abstract	*There exists the perception that there are many options for using technological didactical resources for teaching and learning mathematics, but the frecuency of their use is rather poor, which is a regrettable situation, given the importance of the discipline. The use of digital materials to present a different view, such as Learning Objects, may be a factor to influence students' perception about mathematics, and hence their motivation. It seems appropiate to say that if there is a change on the learning outcomes in large part will be due to the use of ICT, which involves adapting the models of teaching and learning, considering that the mere use of technology does not guarantee improvements, rather there may be the danger of committing major didactic crimes with educational options of poor quality, mediated by innovations*. ***Keywords****: Learning object, formative evaluation, instructional design.*
Resumo	*Existe a percepção de que existem inúmeras opções para utilizar recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem da matemática, mas a extensão de seu uso é bastante pobre, o que é uma situação lamentável, dada a importância da questão. A utilização de materiais digitais para apresentar uma visão diferente, como os Ojetos Para Aprender, podem ser um fator para influenciar a tendência dos alunos para evitar a escolha de carreiras que os incluem. Parece seguro dizer que, se mudarem os resultados da aprendizagem, em grande parte é devido ao uso de TIC, que envolve a adaptação dos modelos de ensino e aprendizagem, pois a mera utilização de tecnologia não garante melhorias, uma vez que existe o perigo de se cometer erros didaticos graves com opções educacionais de má qualidade, mediadas por inovações.* ***Palavras chave****: Objeto para aprender, avaliação formativa, desenho*

	para instrução.

Introducción

Cuando se observa la historia de cómo se han aprendido las matemáticas, se distingue que se busca resolver el problema de los pobres logros por parte de los estudiantes y poco a poco, parecen mejorar los resultados, pero al tiempo, los procedimientos empleados ya no funcionan, pues la sociedad evoluciona, entonces se debe cambiar de estrategia; las frecuentes adecuaciones curriculares de los últimos años, aparentemente apuntan en esa dirección.

La tecnología es agente de cambio y las innovaciones pueden generar modificaciones de paradigma. Sin vacilación, Internet es el centro de tales innovaciones. Después de originar cambios dramáticos en la forma en que la gente se comunica y hace negocios, con Internet es cada vez más realidad la transformación en la forma que aprende la gente.

Ahora es usual que los estudiantes consulten archivos durante la clase en su teléfono y empleen toda clase de instrumentos tecnológicos. Parece obligatorio para los docentes intentar no quedar muy atrás de ellos, pero también producir opciones al alcance de todos y no solo de los económicamente afortunados. Es notorio un cambio en la forma en que son concebidos, diseñados, desarrollados y distribuidos los materiales educativos.

Si bien, la docencia ha experimentado pocas modificaciones desde hace muchas décadas, el uso de la tecnología ha propiciado transformaciones que paulatinamente ganan presencia en las aulas. Una alternativa para incidir sobre la problemática ha sido construir ambientes de aprendizaje que incluyen directrices y apoyos, denominados Objetos Para Aprender (o de Aprendizaje, OPA).

Los OPAs encabezan la lista de posibles elecciones de tecnología para los años siguientes en cuanto a diseño, desarrollo y distribución de instrucción, debido al potencial que tienen para reuso, adaptabilidad y escalabilidad. En tiempos recientes se ha observado un cambio gradual, aunque relativamente lento, en la forma en que son presentados los contenidos de aprendizaje a los alumnos.

Estos objetos, posiblemente constituyen la opción que presenta más potencial de crecimiento en números absolutos, en razón de la gran versatilidad que tienen para el diseño, desarrollo y distribución de instrucción[1], además del enorme potencial que poseen de adaptación, reúso y escalabilidad.

La denominación en inglés, *Learning Object* suele ser traducido como Objeto **de** Aprendizaje. Se distingue la designación "*para aprender",* i.e., ---que sirve para aprender, que apoya el aprendizaje-, en lugar de "***de*** *aprendizaje".* Esta denominación aquí se entiende como aquello que se aprende, por ejemplo, los objetos matemáticos, con la connotación de aquello que se aprende, el contenido a aprender.

[1] Se adopta como "**instrucción**" lo que propone el profesor o se indica en el OPA; cuando genera **aprendizaje**, entonces constituye "**enseñanza**".

La idea de **objeto** es cuestionada en algunos medios, pues sugieren algo concreto de la realidad y proponen que simplemente deberían llamarse **recursos didácticos digitales**.

Una idea central alrededor del uso de OPAs es la posibilidad de que estudiantes y profesores puedan adaptar los recursos didácticos de acuerdo a sus propias necesidades, inquietudes, estilos de aprendizaje y enseñanza. Es decir no sólo se considera que los profesores sean los propiciadores del empleo de tales recursos, también pueden responder a iniciativas de los alumnos.

Esta característica permite sugerir que con los OPAs se propicia una educación flexible y personalizada. Las categorías en que se presentan son variadas, pueden incluir contenido multimedia, contenido instruccional, objetivos de aprendizaje, software instruccional, herramientas de software, etc., pero todas en formato digital, susceptibles de ser distribuidos vía internet.

Desde el ámbito del curriculum se conceptualiza a un OPA como la mínima estructura independiente que contiene un objetivo, una actividad dirigida a propiciar aprendizaje, un metadato y un instrumento de evaluación; el cual puede ser desarrollado con tecnologías de la información y comunicación (TIC´s).

Conceptualización

OPA es un concepto derivado de la tecnología instruccional. Se define como "una entidad digital construida con directrices de diseño instruccional, que puede ser usada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje apoyado en la computadora con el objetivo de generar conocimientos, habilidades y actitudes en función de las necesidades del alumno". Existen diferentes matices respecto a su naturaleza, que varían en relación al marco teórico de quien la presenta. Debe insistirse que modernamente se sobrentiende que los OPAs deben ser dispuestos en internet.

Una clasificación definida en el ámbito de los trabajos elaborados por la comunidad de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad de Guadalajara (MEM), sugiere que el OPA más pequeño es el llamado *atómico*, que implica el desarrollo de una única actividad cognitiva, es decir, un solo ***episodio didáctico***[2], lo que normalmente se espera ocurra en un lapso corto de tiempo, quizá unos 15 minutos. Dicho de otra manera, es la unidad mínima de aprendizaje, en formato digital, que puede ser reusada y secuenciada (Wiley, 2002).

Desde la perspectiva del modelo Aprendizaje Distribuido Avanzado (ADL, 2004), se establecen varios requisitos funcionales para el concepto de OPA, entre los que cobra especial protagonismo el de su reúso (Sicilia y García, 2003). En este sentido se manifiesta Polsani (2003), que incluye la reutilización en su definición: "Una unidad de contenido para aprender, independiente y completa, diseñada para ser usada en múltiples contextos instruccionales" (*An independent and self-standing unit of learning content that is predisposed to reuse in multiple instructional contexts*).

NETg sugiere una definición de tres partes: un objetivo de aprendizaje, una unidad de instrucción para enseñar el objetivo y una unidad de evaluación que mide el objetivo (L'Allier, 1998). Otra alternativa, un objeto de aprendizaje es una unidad

[2] **Episodio didáctico** es la unidad elemental de las experiencias de aprendizaje, abarca una interacción del estudiante con su medio, interacción pertinente al logro del objetivo propuesto.

mínima de aprendizaje con sentido pedagógico (Morales, García, Moreira, Rego, & Berlanga, 2005).

Una sencilla definición de OPA; es un recurso para aprendizaje electrónico, que implica la concurrencia de internet y diversos métodos de aprendizaje que son mejorados o facilitados por la tecnología. Puede observarse, que no existe acuerdo general sobre lo que se entiende por OPA. Al final, se incluye una lista no exhaustiva de bancos de objetos de aprendizaje, cuyo uso depende del tema que se desee encontrar.

Además de textos, los OPAs pueden incluir ligas a otros documentos, animaciones, videos, música, narraciones, efectos visuales y muy importante en términos del Marco Teórico, elementos interactivos.

Características

Suele resaltarse que un mismo OPA puede ser **modificado**, para usarse en otro contexto, pero también podría emplearse alguna de sus partes, para incorporarla a otro diseño. Esta característica proporciona un gran atractivo para su construcción, pues presupone un ahorro de recursos, tanto humanos, como materiales para las instituciones educativas y el hecho de que se hayan integrado bancos de OPAs (repositorios), que pueden ser fácilmente consultados en línea, potencia las posibilidades de interacción entre las diferentes comunidades académicas del mundo.

La característica de flexibilidad de los OPAs, denominada **interoperabilidad**, es entendida como la capacidad para integrarse en estructuras y plataformas diferentes, por ejemplo, Webexone, Learning Space, WebCt, Blackboard, Neobook, Wix, etc.

Por esa flexibilidad, es factible alejarse de la concepción lineal que predominó en la mayoría de los recursos didácticos tradicionales, así como en los primeros bosquejos de opciones digitales para apoyar el aprendizaje. Entonces, un profesor o un diseñador, puede tomar la sección que le interese de un OPA y usarlo tal cual, integrarlo a otra opción o adaptarlo a las necesidades de sus alumnos.

Un OPA puede ser integrado a su vez por varios OPAs, lo que constituye una forma de clasificación, i.e., el número de OPAs atómicos que abarca, lo que da una idea a los usuarios sobre los retos que representa su uso, lo que parece un importante metadato, i.e., información de referencia. Se comenta que usualmente los productos generados en la MEM, suelen incluir varios OPAs atómicos, pues difícilmente se conforman los autores con una obra sencilla.

Lo anterior tiene diferentes aristas, pues se enfocan en propiciar más aprendizaje, pero entonces, disminuye su **granulidad y flexibilidad**, lo que complica el que puedan usarse para construir otros OPAs, ya que deben ser divididos a tal fin, lo que también se estima como deseable, según la metáfora del Lego.

Existen elementos cuya caracterización es totalmente objetiva, tales como el nivel al que se dirige el OPA (elemental, medio, superior), el número de hipervínculos, etc. Otros son algo más complicados de determinar, como el mencionado número de OPAs atómicos que incluyen. También se agregan **metadatos** que permiten ubicarlos en la red o en los bancos donde son ubicados.

Los metadatos suelen incluir elementos como el tema principal, la estimación del tiempo requerido para completar las actividades que involucran a los contenidos, el número de diferentes medios que contiene (multimedia), la plataforma(s) en que puede usarse, el programa matemático en el que funciona bien, el ambiente en el que es posible trabajarlo, etc.

En torno a la idea de segmentos que pueden reutilizarse, se requiere generar una cultura de su empleo entre la gran masa de profesores, de manera que se atrevan a desmembrar los OPAs y rearmarlos de manera que den cuenta de sus intenciones instruccionales. Ésta sería una política que podría proporcionar beneficios considerables si se agrega que los OPAs fueran integrados como componentes independientes –según la metáfotra del LEGO-, que facilite la separación, lo que aumentaría la eficiencia del desarrollo instruccional y disminuiría los tiempos necesarios para hacer adecuaciones.

Una característica deseable, adicional, para los OPAs es la **durabilidad**, en el sentido que sus contenidos puedan permanecer vigentes sin requerir de actualizaciones. Para el caso de matemáticas se tienen muchas posibles variaciones en términos del enfoque educativo que se pretenda incorporar, pero la lógica misma de la materia permite que los OPAs construidos puedan ser empleados durante largo tiempo, lo que puede ser un incentivo para su elaboración y recibir apoyos oficiales.

Aspectos relacionados con el hecho de que la tecnología misma no se convierta en una carga cognitiva, son la **independencia y autonomía** de los objetos, con respecto de los sistemas desde los que fueron creados. Representan la cualidad de que la esencia de la disciplina no sea opacada por la importancia de aprender el manejo del medio tecnológico.

La versatilidad de un OPA es representada por la característica denominada **generatividad**. Determina la capacidad para desarrollar nuevos contenidos y OPAs adicionales derivados de él, así como para ser actualizados o modificados. La dimensión de esta cualidad está fuertemente vinculada a las posibilidades de colaboración que se derivan de la forma en que son construidos los OPAs.

Dar cuenta de lo anterior, sugiere tener presente la característica de interoperabilidad. También es importante que los Centros de Auto Acceso (CAA's), que ahora existen en la mayor parte de las instituciones educativas, especialmente para el aprendizaje de idiomas, amplíen su cobertura para apoyar el aprendizaje de otras materias, particularmente de matemáticas, en razón de las estadísticas de bajo rendimiento que predominan en el país, para tal disciplina.

Los productos que se obtienen de los posgrados vocacionados hacia matemática educativa deberían constituir un vehículo a propósito, para posibilitar esa función de los CAA´s, por ejemplo, muchos de los trabajos de tesis terminan sólo como evidencias que permitieron cumplir con un trámite burocrático para obtener el grado correspondiente, pero que son poco aprovechados por la comunidad, lo que representa un enorme desperdicio de recursos y talento.

Aunado a lo mencionado, es pertinente disponer de una estructura para garantizar su calidad, además de que agreguen metadatos para que los potenciales interesados aprecien su potencial. Independientemente de las diferentes ideas del porqué o para qué incluir matemáticas, se postula que la **principal función de éstas**

es resolver problemas y propiciar el desarrollo de pensamiento crítico, cualidad a buscar con los OPAs.

Plataformas para Aprendizaje

Otro elemento contextual que abona a favor del desarrollo de OPAs es la presencia cada vez mayor de Plataformas para Aprendizaje, que facilitan la distribución. Esto es notorio, no sólo para modalidades a distancia, sino para cualquier modalidad educativa, pues cada vez es más frecuente que los cursos presenciales sean apoyados con el empleo de opciones tales como, *Learning Space, WebCt, Blackboard, NeoBook, Wix y Moodle*, particularmente las dos últimas, en razón de la gratuidad de su empleo, aunque acarrean la necesidad de administración.

Mención aparte merecen las redes sociales, cada vez más empleadas por docentes para comunicación con los estudiantes, opciones que tienen enorme potencial cuyos alcances deben ser explorados e investigados formalmente por la comunidad.

Normas

Sistematizar la producción de OPAs, así como su accesibilidad, tanto para profesores como alumnos, tiene un gran potencial para mejorar los resultados de aprendizaje que lamentablemente ahora es poco aprovechado. Cada CAA podría viabilizar la mejoría y funcionar adicionalmente como un banco de OPAs, que pudiera ser consultado desde cualquier lugar.

Alrededor de la idea de sistematización y facilitar la adopción del enfoque de objetos para aprender, fue formado el Comité de Estándares para Tecnología de Aprendizaje (LTSC, *Learning Technology Standard Committee,* 2000a) del Instituto de Ingenieros Electrónicos y Eléctricos a fin de desarrollar y promover estándares de tecnología instruccional. El LTSC define los OPA como “cualquier entidad digital que pueda ser reusada para apoyar el aprendizaje apoyado en tecnología.”

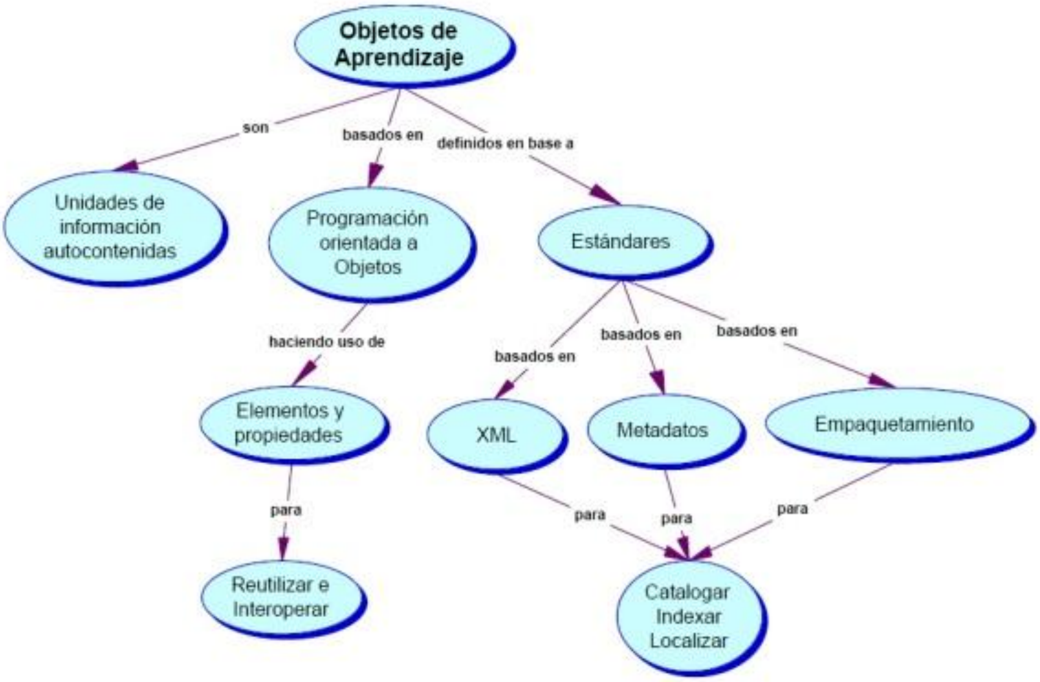


Figura 1. **Caracterización de Objetos Para Aprender.**

Esta parece ser una definición más amigable pues permite acotar el tipo de cosas a que se refiere –objetos digitales reusables para apoyar aprendizaje-.

La observación de los estándares permite que las diferentes instituciones, de cierto modo, aseguren la interoperabilidad de sus tecnologías instruccionales, específicamente, de sus OPAs. De manera semejante, se ha desarrollado en el viejo continente un proyecto denominado Alianza para Redes de Distribución y Autoría de Instrucción Remota para Europa (ARIADNE, Alliance of Remote Instructional Authoring and Distribution Networks for Europe) con financiamiento de la Comisión de la Unión Europea (ARIADNE, 2000).

En Estados Unidos se ha trabajado un proyecto denominado Sistemas Gerenciales de Instrucción (IMSa, *Instructional Management Systems*), con financiamiento de EDUCOM (IMS, 2002a). Éstas y otras organizaciones han iniciado el desarrollo de estándares técnicos para apoyar un amplio desarrollo de OPAs.

Soporte Teórico

En el ámbito de la MEM, se considera que la actividad de los estudiantes es el elemento más importante para propiciar aprendizaje, por lo que con el diseño de los OPAs se intenta involucrarlos en ese sentido. Además, aunque los OPAs suelen ser autocontenidos, también se propicia otra cualidad constructivista, i.e., que tengan el potencial de generar diferentes tipos de interacción, con el profesor, con los compañeros, con elementos de la red, etc., además de propiciar procesos de visualización.

La visualización en matemáticas implica formar imágenes y usarlas efectivamente para el descubrimiento y el entendimiento matemático, así como considerar lo visual como un preludio hacia la abstracción de conceptos, con lo que se facilita al estudiante formar varios modelos de una situación de aprendizaje (Hitt, 1998). Se tiene presente la afirmación de Boltiansky: "en matemáticas todo es geometría.

Una orientación teórica especifica para construir OPAs, se deriva de la teoría de Cambios de Registros de Raymond Duval (1993), que distingue entre un objeto matemático[3] y su representación, i.e., existen muchas formas de representación para un mismo objeto matemático. Afirma que no puede haber comprensión matemática si no se distingue entre un objeto matemático y su representación, que toda confusión provoca una pérdida de comprensión a mediano o largo plazo (Espinoza y Vasconcelo, S.F.).

Al acto por medio del cual los individuos desarrollan un proceso comunicativo se le denomina **mediación semiótica.** Por tanto una función esencial de un OPA estriba en que incluya ambientes para que los estudiantes logren construir una o más representaciones acordes a las características de los objetos matemáticos que se pretende aprendan.

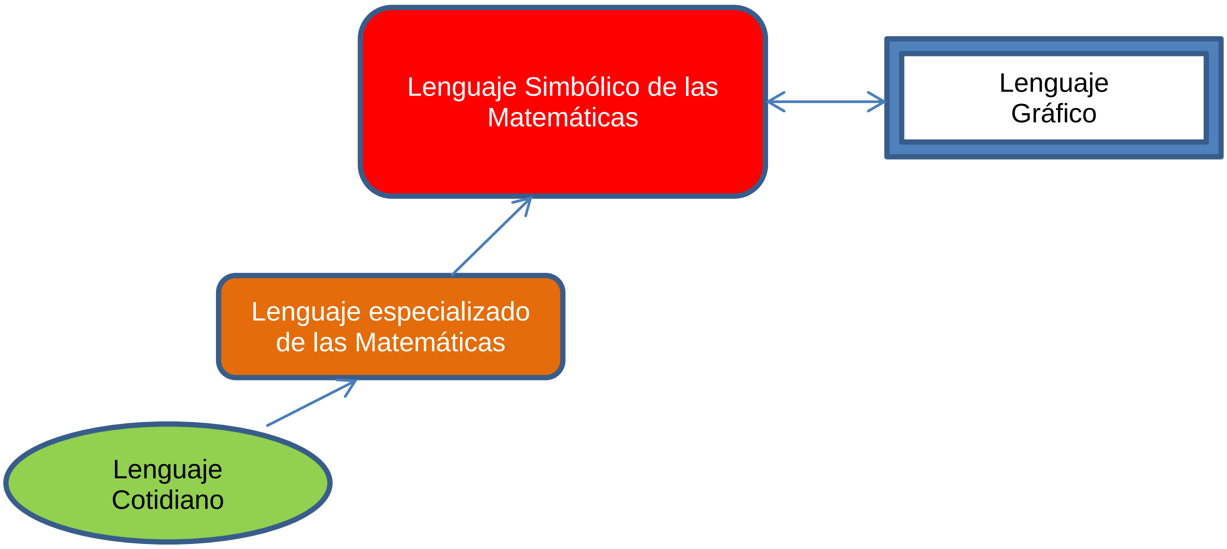


Figura 2. **Problema de lectomatemática**

Otro aspecto trascendente en el diseño de OPAs es el apoyo que pueden ofrecer para superar el problema de lectomatemática, i.e., la traducción del lenguaje cotidiano al matemático, que parece el más importante a superar, tanto por estudiantes, como por los profesores, pues la comunicación ha sido subestimada como factor a atender para superar las persistentes fallas en el aprendizaje de la materia. La clave estriba en ofrecer con los OPAs, un ambiente de aprendizaje que permita a los estudiantes una transición del lenguaje verbal, al sincopado y finalmente al simbólico, de manera que el proceso de semiosis[4], ocurra de manera natural y no forzada, como suele ocurrir en las clases tradicionales.

La idea de superar la dificultad de construir modelos simbólicos para resolver problemas es central a la función del profesor, para la cual los OPAs son una apoyo

[3] Un objeto matemático consiste generalmente en un conjunto y algunas relaciones matemáticas y operaciones definidas sobre este conjunto.
[4] Semiosis, entendido como el proceso de negociación de significados de las representaciones y particularmente, de los símbolos matemáticos.

sólido . “Desde hace mucho ha sido reconocido que el simbolismo juega un papel único y privilegiado en matemáticas” (Ernest, 1997, parr. 3).

Con esta visión, los OPAs permiten generar una enorme variedad de posibles representaciones, cada cual con la posibilidad de responder a las necesidades de aprendizaje de alumnos con historias matemáticas y obstáculos particulares.

Curiosamente no se pudieron ubicar muchas referencias específicamente dirigidas hacia el diseño instruccional de objetos para aprendizaje.

Sin embargo, existe un cierto número de teorías de diseño instruccional, aunque no hayan sido pensadas específicamente para ello, que permiten visualizar un panorama y apoyo para ordenar la construcción de OPAs. Por ejemplo, la Teoría de la Elaboración de Reigeluth (1999), el modelo de Cuatro Componentes de Diseño Instruccional de van Merriënboer (1997), y el modelo de Gibbons, Bunderson, Olsen y Rogers (1995).

Hace años, Wiley (2000) fusionó éstas y otras teorías de diseño instruccional en una, específicamente dirigida al diseño instruccional de OPAs, llamada Teoría de Diseño de Objetos para Aprendizaje y Seriación.

Selección de Contenidos

En cuanto a los aspectos relacionados con los contenidos matemáticos de los OPAs, se toman en cuenta los resultados obtenidos de la línea definida como lectomatemática, que incide sobre las dificultades causadas por deficiencias en el conocimiento del lenguaje español, que complican el proceso de traducción al lenguaje especializado de las matemáticas, así como al correspondiente lenguaje simbólico.

En la figura se reflejan con flechas algunas posibles fuentes de dificultades que se interponen en los procesos de traducción mencionados. Por ejemplo, el concepto estratégico de función tiene polisemia, pues los entrevistados sugieren diversos significados, según se constató en diferentes estudios (Ulloa, Nesterova y Yakhno, 2012, p. 166), es confundida con la presentación de un circo, o de cine, entre otros, de manera que al encontrarlo en el contexto de las matemáticas origina confusiones que dificultan su aprendizaje.

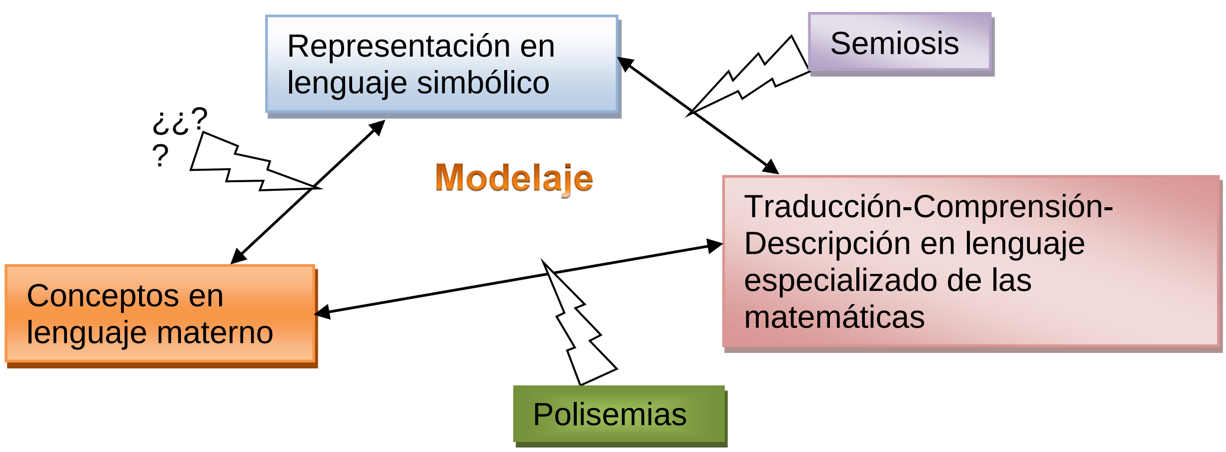


Figura 3. **Procesos de traducción y dificultades**

Cuando se supera el obstáculo del paso del lenguaje cotidiano al especializado de las matemáticas surge la dificultad de traducir al lenguaje simbólico, se observa una resistencia a emplear las representaciones usuales en matemáticas (Noriega y Rosillo, 2011). Una posible explicación se tiene a partir del paralelismo que existe con el aprendizaje del idioma materno. Los bebés cuando inician el proceso de apropiación del lenguaje emplean palabras incompletas o construcciones que no cumplen con las reglas gramaticales, pero que causan simpatía y reciben una cierta recompensa por “sus gracias”, por lo que puede especularse que eso les motiva a seguir intentando avanzar en esos intentos.

Se percibe que existe una cierta negociación de significados que no resulta complicada, ni frustrante para los niños, ya que las muestras afectivas por sus esfuerzos posiblemente les resultan gratificantes. En cambio, el proceso de semiosis está comúnmente ausente en el proceso de apropiación del lenguaje matemático y especialmente del simbólico. A los estudiantes se les presenta un lenguaje acabado, sin opción a una construcción gradual, que se debe emplear sin posibilidad de equivocación. Los errores suelen costarles caros, muchas veces representan reprobar una materia y no extraño, desertar de la escuela o incluso, ser expulsados.

Se especula que el proceso para llegar al lenguaje simbólico pasa por traducir al lenguaje especializado de las matemáticas, pero existen indicios de que muchos estudiantes brincan directamente al lenguaje simbólico, en razón de la evidencia de que son capaces de resolver los procesos algorítmicos, pero cuando deben usarlos en la solución de problemas en palabras, fallan notablemente en el proceso de simbolización y por tanto, en la determinación del modelo matemático que les permite la manipulación con los algoritmos para obtener la respuesta.

Ese salto es un objeto de estudio que se planea atender en proyectos futuros. Es posible que existen procesos de memorización que ponen en juego, de manera semejante a como algunos parvulitos son capaces de sumar, sin tener todavía una idea concreta del concepto de número.

Una desventaja para los profesores con mucha juventud acumulada, es que ahora los bebés arriban al mundo con un chip integrado al pañal, sus vivencias están mucho más ligadas al empleo de nuevas tecnologías, aprenden a usar los fierros novedosos más fácilmente que los estudiantes de generaciones anteriores. Pero en contraparte, tienen la ventaja de la experiencia y el dominio de la materia (se espera), así como la competencia para escribir guiones para que los conocimientos matemáticos sean involucrados en actividades al alcance de sus pupilos.

En torno a la solución de problemas, labor del profesor es facilitar la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje especializado de las matemáticas y de allí, al simbólico y al gráfico. Trabajos clásicos como los de Polya (1945), Schoenfeld (1964, 1985), Duval (1993, 1995), por mencionar algunos, dirigen la atención hacia ese rumbo.

Sobre esas dificultades es que se pretende incidir con la construcción de OPAs eficaces para propiciar esos procesos de traducción. Es claro que existen épocas en el desarrollo cognitivo de los estudiantes cuando es más propicio desarrollar las estructuras de pensamiento lógico para ser competentes en la solución de problemas matemáticos, de manera que el proceso de semiosis debe ser provisto de un andamiaje que proporciona el OPA, en la forma de un ambiente de aprendizaje, que además, idealmente debe proporcionar elementos lúdicos, que es algo a lo que están acostumbrados los alumnos al emplear las TIC's.

Diseño Instruccional

En función del tipo de objetivos a lograr, se pueden elegir diferentes tipos de modelo de diseño. La sistematicidad que se deriva de usar uno ya probado, abona a elevar las posibilidades de éxito del producto.

Enseguida se presenta una opción de diseño de OPAs:

1. Identificación del Episodio Didáctico (o bien, Secuencia Didáctica) ligada al objeto matemático, para el que se desea construir el OPA
2. Elaboración de un escrito en el que se describa lo que se pretende que aprendan los estudiantes.
3. Identificar en el texto términos esenciales o estratégicos, cuya interpretación puede ser potencialmente complicada para los estudiantes. La sensibilidad y experiencia de los docentes, son cualidades que posibilitan intuir qué elementos son los que dificultan el aprendizaje.
4. Crear ligas de los términos identificados en el paso anterior, a archivos en los que se define o aclara el sentido de esos términos. Lo desarrollado hasta esta parte representa la posible introducción al OPA.
5. Definir cómo se planea o se intuye lo que los estudiantes deben enfrentar para apropiarse del conocimiento deseado. Esto implica imaginar cuál sería el posible desempeño docente para propiciar ese aprendizaje. Por ejemplo, pensar en los nueve eventos de Gagné.
6. Distinguir los escenarios virtuales en los que podría desarrollarse el proceso de enfrentamiento a los estudiantes con el material a aprender, i.e., seleccionar los programas de cómputo o plataformas de trabajo en las que sería pertinente desarrollar el material necesario para incidir sobre los contenidos disciplinares seleccionados.
7. En caso de no tener una clara visión para llevar a cabo el paso anterior, revisar en internet las opciones disponibles sobre esos contenidos y seleccionar las secciones que podrían ser utilizadas en el propio OPA.
8. Escribir el guion (semejante al de una película) tentativamente definitivo de lo que aparecerá en el OPA, en cuál formato (video, animaciones, sonido, etc.).
9. Desarrollar lo previsto en el guion, ya sea que personalmente se construya el material o bien se busque apoyo de personal especializado en el empleo del medio (o medios) seleccionados. Es importante resaltar que la parte más importante de la actuación del profesor-diseñador es la elaboración del guion, pues no es de esperar que sea todólogo y necesariamente se obtendrán mejores productos con apoyo profesional.
10. Completada la primera versión del OPA, evaluar formativamente para obtener la mejor versión al alcance.

La elaboración del guion inicia por tener bien acotado el alcance que tendrá el OPA, cuáles contenidos matemáticos serán incluidos. Las siguientes indicaciones son pertinentes para cuidar su escritura:

1. Preferentemente elegir un contexto en el que las actividades que realizarán los alumnos tengan sentido y de ser posible, lúdico; mejor si se trata de una situación real, pero también es factible emplear simulaciones que resulten

atractivas. También procurar que propicien los diferentes tipos de interacción que sugiere el marco constructivista.

2.- Propiciar que la participación de los alumnos en las diversas actividades y tareas sea constante y vincularla con los procesos de evaluación.

3.- Adecuar la programación en términos de posibles alternativas para los alumnos como resultado de los logros que tengan para evitar que aquellos que avancen con mayor celeridad, lleguen a aburrirse de usar el OPA.

4.- Cuidar el empleo del lenguaje, para evitar que una mala interpretación cause que los estudiantes desarrollen actividades diferentes a las planeadas. Tener especial cuidado con la presencia de términos polisémicos.

5.- Cuidar la seriación de los contenidos a desarrollar, para evitar vacíos que puedan bloquear el avance de los estudiantes al no tener antecedentes para ligarlos.

Aspectos que contribuyen a hacer atractivas las producciones:

- Usar botones o ligas de hipertexto para navegar por el material
- Ubicar los botones en la misma posición en todas las páginas
- Usar colores e ilustraciones generosamente
- Pensar en bloques pequeños de información
- Espaciar las páginas con animaciones, sonidos y videos
- Dosificar los textos, tener presente la regla de 6 x 6. Párrafos largos son difíciles de leer en la computadora. Mucha gente omitirá leer bloques de texto extensos
- Propiciar interacción con alternativas para que los usuarios introduzcan textos o respuestas numéricas
- Incluir posibilidades para efectuar cálculos, hacer seguimiento de respuestas, realimentar, etc.

Notar que algunas opciones comerciales suelen incluir ejemplos que pueden usarse para empezar un OPA y con sugerencias sobre cómo usar las herramientas del programa.

Considerar que el material debe:

(a) obtener la atención de los alumnos

(b) separar lo esencial de lo no esencial

(c) establecer conexiones entre lo nuevo y lo que ya saben los estudiantes

(d) propiciar repetición y repaso de la información

(e) presentar el material de manera clara y organizada

(f) enfocarse en el significado y no en la memorización.

Construcción de OPAs

Se observa en muchos trabajos de tesis dirigidos al desarrollo de alguna alternativa didáctica que incluya el uso de las Tecnologías de la Información y comunicación (TIC's) un enfoque experimental (Moreno, 1987), mediante el cual se dispone de un grupo al que se aplica la innovación y un grupo de control, al que se ofrece el proceso de enseñanza usual y que se usa como contraste para determinar el efecto producido por tal.

Usualmente sucede que la diferencia observada puede no ser estrictamente causada por la alternativa. Además de las amenazas a la validez de una investigación, señaladas por Campbell y Stanley (2005), se ha notado que el grupo experimental recibe una atención cuidadosa, que va más allá de incluir como elemento distintivo el tratamiento con apoyo de las TIC's, de manera que casi siempre resulta que este grupo obtiene mejores resultados de aprendizaje que los observados en el grupo de control.

Además, es fácil caer en la tentación del efecto Pigmalión, i.e., ver lo que se espera o quiere que suceda. Para evitar esas circunstancias se diseñó un proceso sistemático que ha sido empleado en los trabajos realizados en la MEM, que representa diseñar, evaluar y rediseñar repetidamente el OPA. Implica la construcción de cinco versiones de la alternativa didáctica experimental, i.e., de los OPAs.

El sustento para construir estos materiales implica tener presente las distinciones institucionales que se atribuyen a los OPAs, aspecto que implica tomar una posición propia, pues como se mencionó, en la literatura se advierten diferencias notorias, pero pareciera que es mejor opción tomar una posición ecléctica-práctica, en el sentido de adoptar aquellas características que intuitivamente parecen lógicas para el logro de los objetivos que se persiguen, sin caer en situaciones que auto limiten los alcances del instrumento digital o caer en contradicciones.

Vinculada al proceso de construcción y validación de los OPAs se emplea un proceso de evaluación formativa (Ulloa, Pantoja y Nesterova, 2013), inspirado en la propuesta de Dick, Carey y Carey (2009), que implica diseño, desarrollo, implementación, evaluación y rediseño, en cuatro fases:

a) con colegas, profesores y expertos en el tema del OPA,

b) entrevista clínica con dos o tres estudiantes,

c) con grupo pequeño de nueve estudiantes y

d) con grupo normal, alrededor de 30 alumnos.

Esta metodología se lleva a cabo sistemáticamente en 25 pasos.

Etapas en el Diseño- Evaluación formativa- Rediseño de Objetos Para Aprendizaje (OPAs)

1. Escritura del proyecto e Investigación Bibliográfica. Definición del sustento teórico, tanto de la estructura, como respecto a los contenidos disciplinares.

2. Diseño Instruccional referido a los contenidos disciplinares. Se define cómo se presentará el material, dosificación, efectos a emplear, sonidos, música, animaciones, etc.

3. Diseño, escritura e implementación del material en formato digital, a ser incluido en el OPA. Definición de programas, plataformas y en general, medios que serán empleados. Se obtiene la primera versión.

4. Evaluación por el autor o autores del OPA, para constatar que cumple con las características atribuibles a un OPA

5. Elaboración de instrumentos para recabar la opinión de profesores y colegas investigadores.

6. Validación de los instrumentos de recolección de información por colegas e investigadores

7. Análisis del OPA por parte de profesores del tema y colegas.

8. Aplicación de encuesta y entrevistas a los profesores y colegas que experimentaron el uso del OPA, para obtener la información pertinente que se usará para mejorarlo

9. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior

10. Revisión del OPA e incorporación de los resultados pertinentes de la etapa previa, lo que incluye además, comprobar de nuevo que la propuesta cumple con las características atribuidas a un OPA. Se obtiene la segunda versión

11. Empleo del OPA por dos o tres estudiantes, mediante la estrategia de entrevista clínica

12. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior.

13. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la tercera versión

14. Empleo del OPA por un grupo de nueve estudiantes, bajo supervisión del investigador, con el empleo de una lista de observación semi-estructurada para recabar información sobre lo que sucede con los alumnos al emplear el OPA. Se eligen nueve para experimentar su uso por parte de tres pares de alumnos, así se obtienen datos de tres binas y tres que usan el OPA individualmente.

15. Aplicación de encuesta a los involucrados en la etapa anterior, para complementar la información sobre las cualidades del OPA

16. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior

17. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la cuarta versión.

18. Empleo del OPA por un grupo de 30 estudiantes, bajo supervisión del investigador, con el empleo de una lista de observación semi-estructurada para recabar información sobre lo que sucede con los alumnos al emplear el OPA

19. Aplicación de encuesta a los 30 estudiantes, para complementar la información sobre las cualidades del OPA.

20. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior.

21. Revisión del OPA en consideración de los resultados de la etapa previa. Se obtiene la quinta y última versión.

22. Sistematización de la información obtenida.

23. Elaboración de conclusiones.

24. Escritura del reporte.

25. Difusión de resultados y publicación de OPAs en internet.

Evaluación de OPAs

Como se aprecia en lo anterior, el proceso de Evaluación Formativa más bien es una metodología para construir la mejor versión al alcance. Para evaluar OPAs, pueden emplearse criterios como los siguientes:

De forma**:**

1. Presentación general del curso
2. Objetivos o propósitos del mismo
3. Recomendaciones para trabajar el curso
4. Esquema del curso que refleje la organización de los contenidos

Cada unidad, objeto de estudio o bloque debe incluir:

1. Nombre del objeto de estudio o unidades
2. Objetivos de aprendizaje
3. Actividades de aprendizaje
4. Fuentes de información (Bibliografía, sitios de interés, etc.)
5. Producto de aprendizaje o trabajo con el que se evaluará la unidad, bloque u objeto de estudio
6. Y por último el producto de aprendizaje o trabajo final con el que se evaluará el curso.

Criterios estructurales:

a) Correspondencia entre:

- Objetivos del curso y los productos con que será evaluado
- Objetivos y criterios de evaluación
- Productos y contenidos
- Productos y actividades de aprendizaje
- Productos y criterios de evaluación
- Articulación en la secuencia de unidades de aprendizaje

b) Coherencia entre:

- Contenidos y diseño curricular (por competencias o de acuerdo a decisión del departamento)

c) Suficiencia y pertinencia:

- De las fuentes de información
- De las actividades de aprendizaje
- De los espacios de interacción

<u>Elementos</u>

- Contenido

- Meta-datos: Conjunto de atributos o elementos necesarios para describir el recurso en cuestión.
- Perfil de usuario
- Datos de administración
- Información externa
- Núcleo IMS (IMS Core)

Criterios de interactividad

Características:

- Claridad
- El insumo informativo data no más de cinco años de antigüedad
- Cantidad suficiente para realizar la actividad
- Claridad en la presentación del diseño
- Estética de la composición visual (color, animación y lenguaje)
- Creatividad
- Espacio de información
- Propicia la problematización
- Precisión en las indicaciones
- Contiene actividades y/o ejercicios interactivos
- Retroalimentación efectiva
- Procesos de evaluación incluidos (metacognición)

Experiencias

Como parte de un diseño instruccional, en los últimos tiempos los alumnos de la MEM, han experimentado OPAs construidos como parte de las actividades de proyectos de tesis para obtener el grado, entre otros:

- Para el tema de ecuaciones de segundo grado, en el que los estudiantes vincularon gráficas dinámicas con la solución correspondiente.
- Desarrollo de métodos para resolver ecuaciones de grado superior (3º y 4º grado).
- Las cónicas.
- Procesos de factorización de expresiones algebraicas.
- Para aprendizaje de fracciones por futuros docentes de nivel primaria.
- Solución de desigualdades.
- Demostración de teoremas y problemas en circunferencias, en la materia de Geometría Euclideana.
- Aprendizaje de la derivada.

- Espacios Vectoriales.

Entre otros resultados se encontró que el empleo de OPAs facilita la introducción de los temas y propicia elementos para vincular diferentes contenidos, no sólo los que previamente se tenían, sino aquellos en proceso de construcción durante las sesiones lectivas. También se notó que motiva la curiosidad de los estudiantes, principalmente si el objeto para aprendizaje resuelve su necesidad de investigar.

Perspectiva

Existen muchas posibilidades de construcción de OPAs en el ámbito de las matemáticas, por lo que se planea impulsar su desarrollo, vinculados a las actividades que se realizan en la MEM. De igual manera se planea promover la existencia de un Centro de Auto Acceso que dé cabida a recursos para el aprendizaje de las matemáticas, particularmente de OPAs, al que se pueda asistir para recibir asesoría, pero también consultar en línea.

Existe una gran cantidad de Bancos de OPAs, también conocidos como repositorios, en diferentes latitudes, por ejemplo:

• Aproa: Aprendiendo con Repositorio de Objetos de Aprendizaje. Página: http://www.aproa.cl
• ARIADNE: A European Association open to the World, for Knowledge Sharing and Reuse. Página: http://www.ariadne-eu.org
• Careo: Campus Alberta Repository of Educational Objects. Página: http://www.careo.org
• LydiaLearn: LydiaLearn Exchanging Global Content. Página: http://www.lydialearn.com
• MERLOT: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching. Página: http://www.merlot.org
• Universia: El portal de los universitarios. Página: http://www.universia.net
• VCILT LEARNING OBJECTS REPOSITORY, http://vcampus.uom.ac.mu
• Jorum, http://www.jorum.ac.uk
• Maricopa Learning eXchange, http://www.mcli.dist.maricopa.edu/mlx
• Wisconsin Online Resource Center, http://www.wisc-online.com
• Canada SchoolNet http://schoolnet.ca Más de 7000 recursos, incluye un sistema de búsqueda de metadatos.
• GEM http://www.thegateway.org Buscador de materiales educativos: Inktomi búsqueda sobre más de 26,000+ recursos.
• IMS DRI Spec. http://www.imsglobal.org/digitalrepositories/
• UBP http://www.educanext.org Plataforma de comercialización de recursos bajo suscripción a nivel institucional.

No siempre se encuentran disponibles los Bancos, en ocasiones es necesario consultarlos en otro momento, algunos son bajados de la red al dejar de recibir los fondos necesarios para su funcionamiento.

Conclusiones

Como parte de las observaciones realizadas durante las investigaciones desarrolladas en el entorno de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, se tiene que el empleo de OPAs por parte de estudiantes de secundaria, preparatoria, normal y licenciatura, les motiva a profundizar en el conocimiento de los contenidos incluidos. En la totalidad de los proyectos se han observado mejoras cualitativas, aunque en algunos casos que se usó el método experimental, los resultados de aprendizaje no eran significativamente diferentes a los obtenidos por los grupos de control.

El simple hecho de que el empleo de los OPAs disminuya o evite el rechazo hacia el estudio de las matemáticas, destaca la importancia de incidir en su construcción y buscar mejorar los aspectos que contribuyan a elevar su eficiencia, i.e., propiciar el aprendizaje por parte de los usuarios.

Según observaciones, el empleo de OPAs facilita la introducción de los temas y propicia elementos para vincular diferentes contenidos, no sólo los que previamente se tenían, sino aquellos en proceso de construcción durante las sesiones lectivas. También se notó que motiva la curiosidad de los estudiantes, principalmente si el OPA resuelve su necesidad de investigar.

La adaptación y adopción de estándares internacionales puede representar una enorme ventaja para compartir OPAs generados en otras latitudes e incorporarlos a la propia cultura.

Parece prometedor el panorama que se vislumbra por el empleo de los diferentes paquetes de cómputo que permiten la construcción de opciones en multimedia. El trabajo docente cotidiano puede propiciar la construcción paulatina de OPAs, para la que puede incorporarse el talento de los mismos alumnos, que suelen tener capacidades amplias en el manejo de opciones de multimedia.

Un aspecto importante es ponderar la inversión cognitiva que acarrea el empleo de un OPA, tanto para profesores, como para alumnos. En ese sentido conviene precisar la figura del profesor como diseñador de guiones para construir OPAs y no como el experto en computación o *web-master* que hará el trabajo de traducir al ambiente computacional, las ideas pedagógicas plasmadas en el diseño. Claro que es necesario conocer las posibilidades del programa o paquete en el que se desarrollará el OPA, pero no necesariamente como responsable de la integración digital del guion, pues eso puede requerir enormes cantidades de tiempo que los docentes usualmente no tienen disponibles.

Considerar la participación de prestadores de servicio social o pagar servicios profesionales de expertos en el uso de programas, debería ser una acción cotidiana, pues existe un enorme potencial para comercializar los OPAs y recuperar la inversión, tanto a nivel personal, como institucional.

El hecho de que existe una buena aceptación por parte de autoridades e instituciones que apoyan el desarrollo de investigación, representa una oportunidad de obtener recursos para la construcción de OPAs que pueden tener enorme impacto en el contexto local. No obstante las confusiones que se observan en la Conceptualización de OPA, parece fuera de toda duda el enorme potencial que representa la construcción de OPAs para emplearlos en los cursos de matemáticas de cualquier modalidad.

El reto es responder a la calidad necesaria para que resulten opciones atractivas para los estudiantes, lo cual implica necesariamente una congruencia con el marco teórico que sustenta la construcción de estos recursos.

Referencias

ADL. (2000). *Advanced distributed learning network website* [On-line]. Available: http://www.adlnet.org/

ARIADNE. (2000). *Alliance of remote instructional authoring and distribution networks for Europe website* [On-line]. Available: http://ariadne.unil.ch/

Campbell y Stanley (2005). *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. Buenos Aires: Amorrortu.

Dick, W., Carey, L. & Carey, J.O. (2009). *The systematic design of instruction*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5:37-65 (IREM de Strasbourg).

Ernest, P. (1997). Semiotics, Mathematics and Mathematics Education. *Philosophy Of Mathematics Education Journal 10.*

Espinoza, L.L. y Vasconcelo, S.A. (S.F.). *Software multimedia Fracciónate.* Consultado el 3 de enero de 2006 en http://ima.ucv.cl/lianggi/fraccionate/detalle.htm

Gibbons, A.S., Bunderson, C.V., Olsen, J.B., and Rogers, J. (1995). Work models: Still beyond instructional objectives. *Machine-Mediated Learning, 5*(3&4), 221-236.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática, 10*(1), 23-45.

IMS. (2000a). *Instructional management systems project website* [On-line]. Available: http://imsproject.org/

IMS. (2000b). *Instructional management systems project website* [On-line]. Available: http://imsproject.org/imMembers.html

L'Allier, J. J. (1998). *NETg's precision skilling: The linking of occupational skills descriptors to training interventions* [On-line]. Available: http://www.netg.com/research/pskillpaper.htm

Morales, E., García, F., Moreira, T., Rego, H., & Berlanga, A. (2005). Valoración de la Calidad de Unidades de Aprendizaje. *RED, Revista de Educación a Distancia,* III, 1-13, Universidad de Murcia: Recuperado de http://www.um.es/ead/red/M3/morales35.pdf

Moreno, M. G. (1987). *Introducción a la metodología de la investigación educativa.* México: Ed. Progreso.

Noriega, M. y Rosillo, L. (2011). Traducción del lenguaje verbal al lenguaje gráfico y simbólico con ayuda de Geogebra. En L. Guerrero (2011). *Investigaciones y propuestas 2011.* Colección Uso de tecnología en educación matemática. Morelia: AMIUTEM.

Polsani, P. R. (2003). Use and Abuse of Reusable Learning Objects*. Journal of Digital Information*, Vol 3, No 4 (2003), Learning Technology Center, University of Arizona, USA.

Reigeluth, C. M. (1999). The elaboration theory: Guidance for scope and sequence decisions. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional design theories and models: A new paradigm of instructional theory.* (pp. 5-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sicilia, M. A, García E. (2003). On the Concepts of Usability and Reusability of Learning Objects, *International Review of Open and Distance Learning*, Octubre, 2003. Consultado el 5 de enero de 2005 en http://www.irrodl.org/content/v4.2/sicilia-garcia.html.

Ulloa, R., Nesterova, E. y Yakhno, A. (2012). Uso de Objetos Para Aprendizaje en Lectomatemáticas: Textos Dinámicos. En F. Hitt y C. Cortés. *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*. Longuueuil, Quebec: Loze-Dion éditeur inc.

Ulloa, R., Pantoja, R. y Nesterova, E. (2013). Modelo para construcción, análisis y rediseño de objetos para aprendizaje. En *Memorias VII Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática "Edgar Gilberto Añorve Solano",* Cd. Guzmán, Jal., septiembre 2013.

van Merriënboer, J. J. G., (1997). *Training complex cognitive skills: A four-component instructional design model for technical training*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Wiley D, 2000, The Instructional Use of Learning Objects: Online Versión. 2000. En http://www.reusability.org/read/

Wiley, D. (2002). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. Utah State University.

Autor:

Ricardo Ulloa Azpeitia, ricardo.ulloa@cucei.udg.mx; Coordinador de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Ing. Químico UdG, M. en C. Matemática Educativa, CINVESTAV, M. en C. Tecnología Instruccional, U. de Houston at Clear Lake, Dr. en C. Matemática Educativa, UAE Morelos-CINVESTAV

Líneas de investigación:

Problemas y procesos de aprendizaje, sistematización, evaluación y diseño curricular.

Desarrollo y aplicación de tecnologías educativas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 30-48

Dilemas de um pesquisador em busca dos dados de sua pesquisa

Karly Barbosa Alvarenga, Sílvia Dias Alcântara Machado

Fecha de Recepción: 13/10/2013
Fecha de aceptación: 14/11/2015

Resumen	Este trabajo tiene como objetivo presentar los caminos seguidos en una investigación del tipo bibliográfica. Explicamos detalladamente los tipos de búsquedas realizadas, las asignaciones hechas con el fin de formar un *corpus.* Los procedimientos metodológicos en este documento han sido adoptados en una investigación cuyo principal objetivo era el desarrollo de un estado actual de la investigación en educación matemática que tenía como principal objetivo la enseñanza y el aprendizaje de las inecuaciones. Por lo tanto, se exponen los obstáculos y avances a un investigador en el momento de la recogida de datos. **Palavras clave:** investigación; metodología de colecta de datos; dilemas.
Abstract	This work aims at presenting the paths taken in a bibliographical research. We explain in detail the types of searches performed, the mappings made in order to form a *corpus*. The methodological procedures herein have been adopted in a research whose main objective was to develop a state of the art research in mathematics education which had as its main focus the teaching and learning of inequalities. Thus, we expose the obstacles and progress to a researcher at the time of data collection. **Keywords:** research; methodological procedures of data collection; dilemmas
Resumo	Esse trabalho tem por objetivo apresentar os caminhos perquiridos em uma investigação do tipo bibliográfica. Expomos detalhadamente os tipos de buscas realizadas, os mapeamentos feitos com o intuito de formar um *corpus*. Os procedimentos metodológicos aqui apresentados foram adotados em uma pesquisa cujo objetivo principal era elaborar um estado da arte das pesquisas em educação matemática que tiveram como foco principal o ensino e a aprendizagem de inequações. Assim, expomos os entraves e os avanços de um pesquisador na ocasião da coleta de dados. **Palavras-chave:** pesquisa; metodologia de coleta de dados; dilemas.

As atividades envolvidas em fazer pesquisas incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Romberg (1992)

Introdução

O investigador que se propõe a fazer uma pesquisa documental vê-se frente a uma variedade de caminhos a ser trilhados, e a opção por um deles pode-se constituir em um desafio, pois, de alguma forma, a delimitação dos documentos a ser coletados e analisados, forçosamente, deixa muitos outros, também interessantes, de fora. O que pode guiar-nos na delimitação dos documentos é o estabelecimento dos limites e das possibilidades que esses documentos oferecem. O conjunto de documentos selecionados pelo pesquisador, segundo Bardin (2011), denomina-se *corpus*.

Este artigo apresenta os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa de doutorado de uma de suas autoras, quando investigava o estado da arte das pesquisas em educação matemática que tiveram como foco as Inequações. Os membros da banca avaliadora dessa tese de doutorado enfatizaram a importância da divulgação da logística adotada na busca e na seleção do *corpus* da pesquisa, para auxiliar a investigação de outros pesquisadores.

A pesquisa bibliográfica é quase incontornável nas ciências humanas, pois grande parte das fontes escritas constitui a base do trabalho de investigação. Enquanto, na formação do *corpus* de uma pesquisa do tipo estado da arte, a tarefa pode ser hercúlea, em outros tipos de pesquisa cuja intenção não seja esgotar determinado conhecimento, o levantamento bibliográfico mostra-se mais “amigável”, por isso acreditamos que, em ambos os casos, a logística aqui apresentada pode contribuir para minimizar as dificuldades encontradas no estabelecimento do *corpus*. Buscamos em Severino (2007) a definição do que vem a ser uma pesquisa bibliográfica.

> É aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos. (p.122)

Uma das benesses principais desse tipo de investigação é proporcionar uma bagagem teórica diversificada, subsidiando a ampliação do conhecimento, fazendo da pesquisa um material rico sobre o assunto e fundamentando-o teoricamente. Isso faz que ampliemos nossos conhecimentos, que tenhamos sede de busca, de mapear, levantar dados e informações. Como um trabalho acadêmico requer um conhecimento, mínimo que seja, de livros e de artigos científicos sobre o tema, é imprescindível tecer um processo metodológico de coleta e análise de tal material coerente e objetivo.

Corroboramos Veloso (2011), que ressalta a importância da leitura e do acesso aos livros, pois qualquer tipo de pesquisa, em qualquer área, exige investigação bibliográfica precedente quer à maneira de atividades exploratórias, quer para estabelecimento do *status quaestionis*, quer para justificativa dos objetivos e das contribuições da pesquisa. É notório que a primeira etapa de toda pesquisa acadêmica ocorre com a investigação bibliográfica exploratória e em discussões com outros pesquisadores que influenciam a demarcação do objetivo do trabalho pretendido. Após algumas leituras, ainda que breves e superficiais, define-se que o estudo será sobre algum tema. Feito isso, inicia-se a pesquisa propriamente dita. Tudo que será realizado ou que já aconteceu deve constar de experimentos confirmáveis por terceiros mediante a reprodução dos métodos e das técnicas utilizadas pelo pesquisador.

Neste artigo, destacamos os procedimentos de buscas documentais para a formação de um *corpus* e, para exemplificar, utilizamos o tema *Inequações*, isto é, expomos um caminho para formar o conjunto de dados a ser analisados em uma pesquisa bibliográfica cujo foco é fazer um estado da arte de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações. Em uma investigação desse tipo a fonte de dados é a literatura existente sobre o assunto, então, após breve contato com trabalhos publicados, necessitamos aprofundar e refinar a coleta de dados. Assim, o mapeamento torna-se mais direcionado e vice-versa, caracterizado por constante ir e vir, até percebermos que o número e os tipos de trabalhos selecionados são suficientes para sacarmos os dados que propusemos inventariar e analisar. Além disso, as publicações podem começar a repetir-se, e aí é o momento de pararmos com as buscas e concentrarmo-nos nas leituras e nas releituras.

Como pouco está exposto na literatura sobre esse tipo de método, aproveitamos para expormos os procedimentos de coleta de informação em uma investigação do tipo bibliográfica, ou seja, como levantamos e reduzimos o material a ser inventariado. Concordamos com Appolinário (2009) que explica:

> Normalmente, as pesquisas possuem duas categorias de estratégias de coleta de dados: a primeira refere-se ao local onde os dados são coletados (estratégia-local), e, neste item, há duas possibilidades: campo ou laboratório. [...] A segunda estratégia refere-se à fonte dos dados: documental ou campo. Sempre que uma pesquisa se utiliza apenas de fontes documentais (livros, revistas, documentos legais, arquivos em mídia eletrônica), diz-se que a pesquisa possui estratégia documental [...] (Appolinário, 2009, p. 85).

Muito do conhecimento científico é veiculado pela Internet, porém os dados obtidos nem sempre são confiáveis. Assim, é mais interessante direcionarmo-nos por trabalhos acadêmicos e artigos de periódicos científicos, em que é possível ter acesso às referências que versam sobre o assunto, isto é, por meio da análise das bibliografias dos trabalhos já selecionados, obtemos outros trabalhos. Esse é um método bem eficaz de busca e conhecimento de novos estudos. É uma espécie de encadeamento.

Não esquecendo que a ciência é, sobretudo, uma constituição social e que a produção do conhecimento científico se dá por meio de intensa cooperação entre os vários pesquisadores de cada área específica, podem-se também contatar membros dessa comunidade por *e-mail* e, às vezes, pessoalmente, em eventos científicos que divulgam artigos em seus anais, sendo, também, fonte de busca. Quando as teses e as dissertações não são publicadas em forma de livros e só estão disponíveis nas bibliotecas dos programas de pós-graduação, pode ser necessário recorrer ao sistema COMUT (Programa Brasileiro de Comutação Bibliográfica), porém o processo tende a ser oneroso e moroso. A consulta presencial em bibliotecas pode ser inviável pela dimensão territorial brasileira e internacional, o que torna limitado e difícil o acesso às pesquisas. Obter artigos de periódicos apresenta dificuldades idênticas, pois os sistemas de comutação não são plenos, e os *sites* de busca que possuem acervo eletrônico são recentes, o que dificulta o acesso a publicações antigas. Contatar os autores, localizando, por exemplo, em suas publicações ou em páginas pessoais, seus *e-mails* é uma alternativa imediata e, às vezes, sem custo.

Durante a realização de um estudo, principalmente para o estabelecimento de categorias, é importante a consulta a outros trabalhos semelhantes, de modo a não somente aproximar e adaptar as características de um com outros, mas também fomentar mais segurança na exposição de fatos e argumentações. Este procedimento assume importância na medida em que contribui também para indicar as tendências das pesquisas de determinada área de conhecimento. A delimitação do *corpus* da pesquisa, de acordo com o objetivo, exige o descarte de alguns trabalhos. Por exemplo, se o objetivo for fazer uma análise de livros didáticos, podemos excluir trabalhos que sejam puramente científicos sem repercussão na elaboração dos livros. No nosso caso, o objetivo é elaborar o estado da arte de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações de um período determinado.

O fato de alguns trabalhos serem desconsiderados na formação imediata do *corpus*, de maneira alguma, põe em evidência a discussão do mérito acadêmico e metodológico. Do mesmo modo, não afirmamos que os conteúdos não possam vir a constituir fonte bibliográfica e subsídio para processos educacionais e científicos na área de educação matemática.

Assumimos a pesquisa científica no sentido apresentado por Kilpatrick (1992):

> O termo *indagação* sugere que o trabalho esteja direcionado para responder a uma questão específica; isso não significa uma especulação ou ciência para uma causa própria. O termo *disciplinado* não apenas sugere que a investigação pode ser guiada por conceitos e métodos de disciplinas, tais como, a psicologia, a história, a filosofia ou a antropologia, mas também que esta possa ser exibida e explicitada de maneira que a linha de inquérito possa ser examinada e verificada. A indagação disciplinada não necessita ser "científica" no sentido de estar embasada empiricamente na testagem das hipóteses, mas, como qualquer bom trabalho científico, precisa ser acadêmico, público e aberto à crítica e à possível refutação. Pesquisa em educação matemática, então, é uma indagação disciplinada sobre o ensino e a aprendizagem de matemática (Kilpatrick, 1992, p.3, tradução nossa).

Processo metodológico da busca

Conforme o objetivo da investigação, passamos a expor os processos de busca e seleção. Inicialmente, elencamos os *sites* de pesquisas onde se podem fazer as buscas (cf. Tab. 1). Notemos que a quantidade de possibilidades de combinações de palavras é grande, o que gera maior demanda de tempo e paciência. Aqui, apresentamos níveis de combinação por ordem de abrangência e prioridade. No primeiro, está o conjunto *inequação*, *ensino*, *aprendizagem*, que foi escolhido, por consideramos ser palavras norteadoras prioritárias, mas pode ser o nome parcial ou completo de um artigo ou de um autor, e podemos utilizar, somente, uma palavra como *inequação*, mas, na média, utilizamos 3.

Para uma procura mais refinada ou avançada em periódicos, como o da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES (cf. Fig. 1) e o ProQuest[1], que possibilitam vários tipos de buscas, a combinação inicial no primeiro nível foi a área de pesquisa, e, depois, utilizamos, em média, 3 tipos de palavras. Na página dos periódicos da CAPES existem as possibilidades iniciais de pesquisa: por palavras do título dos periódicos, por assunto ou palavras-chave; em artigos com texto completo; em índices e resumos.

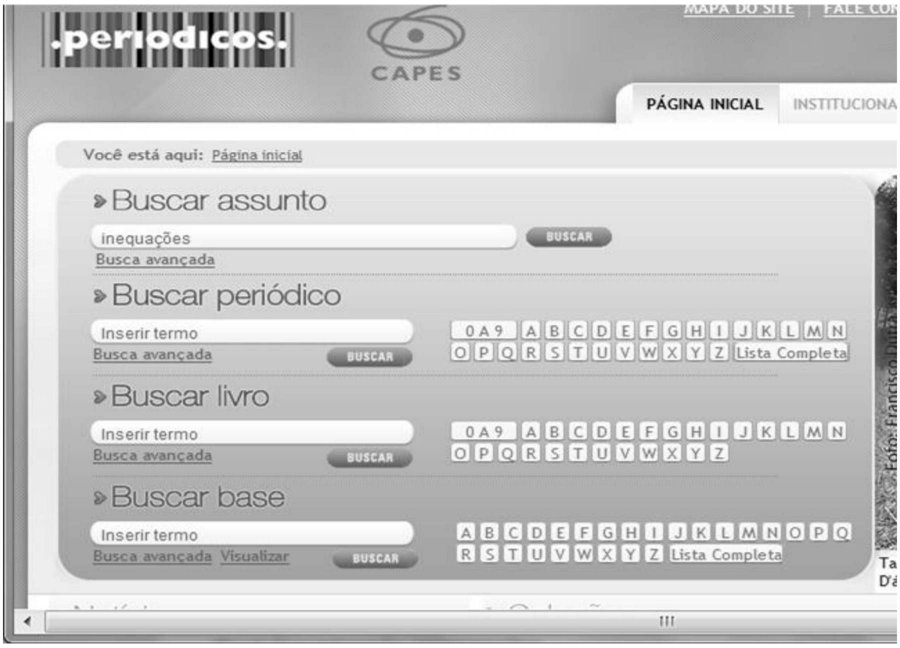


Figura 1: Exemplo da página inicial dos periódicos da CAPES

Fonte:http://www-periodicos-capes-gov-br.ez20.periodicos.capes.gov.br /index.php?option =com_phome

No ProQuest, o tipo de palavra foi a quarta combinação. A tabela 1 ilustra algumas possibilidades de pesquisa com um tipo de provedor, o *Mozilla Fire Fox*. Infere-se que a quantidade de combinações seja grande e que possa escapar algum trabalho.

[1] ProQuest é um recurso de base de dados eletrônica com milhões de artigos em revistas, jornais e outras publicações.

Tabela 1: Um exemplo de combinações de palavras para buscas em *sites*

Para o primeiro levantamento, podemos utilizar os *sites* comuns de busca,

SITES	1° nível de combinação	2° nível de combinação	3° nível de combinação	4° nível de combinação	5° nível de combinação	6° nível de combinação	TOTAL PARCIAL
GOOGLE	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular				30
CADÊ	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular				30
ASK	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular				30
GOOGLE ACADÊMICO	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular				30
CAPES Busca avançada	3 áreas de pesquisa	3 tipos de palavras	5 tipos de refinamento de busca	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular	1350
PROQUEST	2 áreas de pesquisa	3 tipos de escolaridade	6 tipos de países	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular	1080
SCIELO	3 tipos de métodos	11 localidades	3 tipos de áreas	3 tipos de palavras	5 línguas	2 tipos de gênero de número: plural e singular	2970
ANPED	13 reuniões anuais disponíveis						13
TOTAL (aproximação das possibilidades de combinações de busca)							5533

como *Google* (www.google.com.br) e *Cadê* (http://cade.search.yahoo.com/). Em paralelo, consultem-se, presencialmente, nas bibliotecas, as revistas científicas e as de divulgação científica, um periódico acerca da ciência, editado e escrito, em sua maior parte, por jornalistas e educadores e não necessariamente por cientistas. Na formação do *corpus* de nossa pesquisa, na etapa, final excluímos as dissertações, pois entendemos que os trabalhos de doutorado têm a intenção de construir conhecimento para a área, enquanto o trabalho de mestrado é, em geral, um estudo pontual que não exige ineditismo.

Assim, procuramos explicitar, de forma detalhada, um roteiro não linear da coleta de dados que realizamos em três fases: geral, selecionada e refinada. A *geral* foi de forma aleatória, porém restrita aos descritores no plural e no singular: *inequações*, *inequalities*, *desigualdades*, *disequazioni* e *inéquation*, perfazendo o total de 10. A *selecionada* restringiu-se ao nosso enfoque propriamente, isto é, ao ensino e à aprendizagem de inequações. A fase *refinada* foi direcionada por trabalhos com recorte científico estritamente: periódicos, eventos e teses entre 1991 e 2011 (cf. Fig. 2).

Embora os principais descritores tenham sido os 10 elencados anteriormente, não nos baseamos somente neles, pois, à medida que a investigação avançava, procuramos também por autor e por título, com o intuito de obtermos mais especificidade. Aliás, autor e título serviram de referências norteadoras para a elaboração das primeiras categorias.

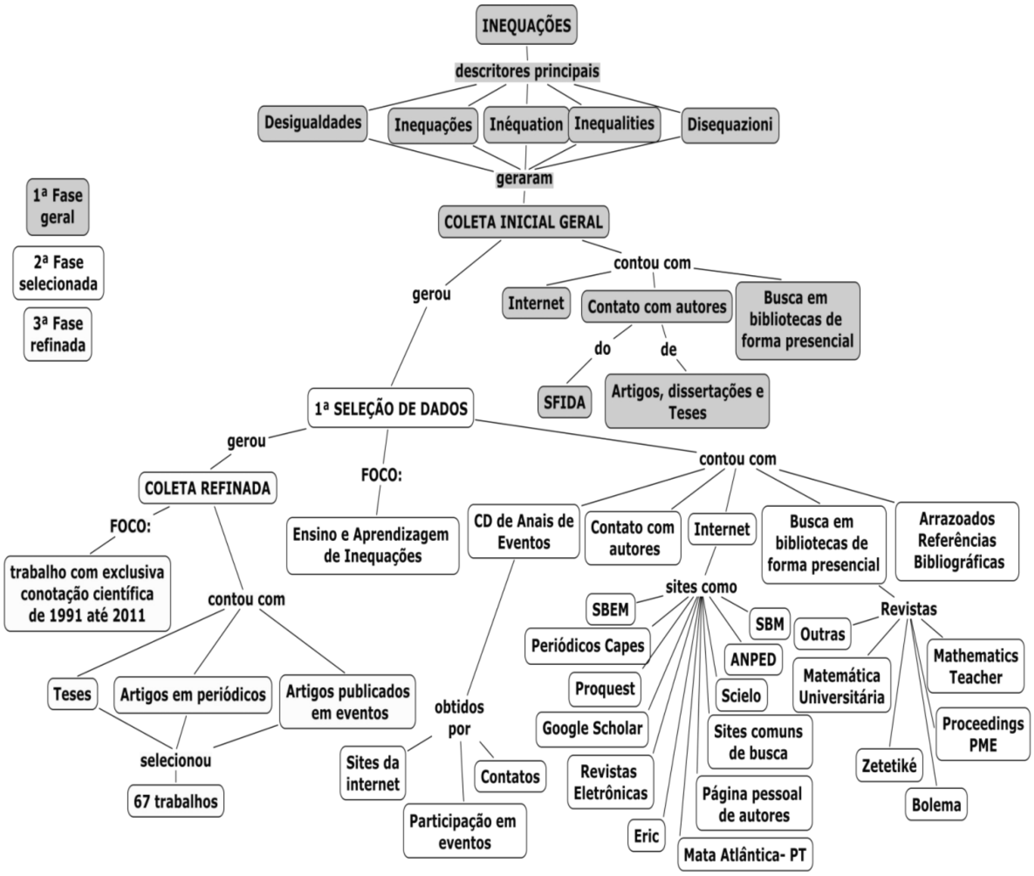


Figura 2: Mapa conceitual da coleta de dados

Em seguida, apresentamos os locais de busca. Alguns foram ilustrados com a finalidade de evidenciar as formas de apresentação dos *sites*. Dividimos a exposição em *sites* de busca, bibliotecas acadêmicas e revistas.

Sites de busca

Ao apresentar os *sites* de busca e ilustrar alguns, objetivamos explicitar a direção da coleta. Poderíamos ter optado por uma apresentação guiada pelas fases, mas elas não apresentaram um limite demarcatório nítido.

Assim, iniciamos pelo *site* mais popular, geral e abrangente e, aos poucos, refinamos, até chegar a *sites* especializados em periódicos científicos. Com o intuito de conduzir o leitor pelos caminhos de nossas buscas, apresentamos algumas restrições relacionadas às línguas, ao plural e ou ao singular.

Google, Cadê, Ask

O *Google* hospeda e desenvolve uma série de serviços e produtos baseados na internet e gera lucro, principalmente, por meio da publicidade pelo AdWords. O rápido crescimento do *Google* desde sua incorporação culminou em uma cadeia de outros produtos, aquisições e parcerias que vão além do núcleo inicial como motor de buscas.

Muito antes das tecnologias utilizadas pelo *Google* ou pelo *Yahoo*, o *Cadê* foi um marco na internet brasileira. Depois que foi comprado pelo *Yahoo*, virou mais uma porta de entrada. É uma plataforma de lançamento para novas tecnologias de busca no Brasil. O *Ask*.com é um complemento gratuito para navegadores, que permite realizar uma busca na *web*, diretamente dos navegadores *Internet Explorer* e *Firefox*.

Por meio deles, inicialmente, não encontramos nada em relação ao nosso tema, pois, empregando a palavra *inequações,* obtivemos como efeito *métodos de resolução de uma inequação* e, de forma ampla, páginas de cursinhos pré-vestibulares. Encontramos decorrências similares, utilizando a língua francesa e a italiana e, por meio do inglês, localizamos textos que se referiam às desigualdades sociais, fato que se repetiu em espanhol. Após o avanço da pesquisa, fizemos buscas por meio de outros descritores que variavam muito, como ensino e aprendizagem de inequações e nome de autores já conhecidos, entre outros. Dessa forma, localizamos vários trabalhos, mas alguns começaram a repetir-se.

Periódicos da CAPES

O Portal de Periódicos surgiu em 1990, com o objetivo de fortalecer a pós-graduação no Brasil, e o número de títulos com texto completo passou de 1.882, em 2001, para 26.372, em 2010. Tem mais de 130 bases referenciais, dez dedicadas exclusivamente a patentes, além de livros, enciclopédias e obras de referência, normas técnicas, estatísticas e conteúdo audiovisual. A quantidade de instituições participantes também evoluiu. Assim, tem-se consolidado como uma das maiores bibliotecas virtuais do mundo, tornando acessíveis conteúdos essenciais para a pós-graduação e a pesquisa brasileira. É possível realizar a busca simplificada, porém necessitamos explicitar a área de conhecimento. No nosso contexto, delimitamos duas áreas, Multidisciplinar e Área de Ciências Humanas e Sociais, e subáreas, variando entre as opções Todas as Bases (cf. Fig. 3), Educação e Ensino de Ciências e Matemática. Cabe uma observação: para ter acesso total ao portal da CAPES, é necessária uma licença institucional, obtida por meio de algum vínculo a uma instituição cadastrada.

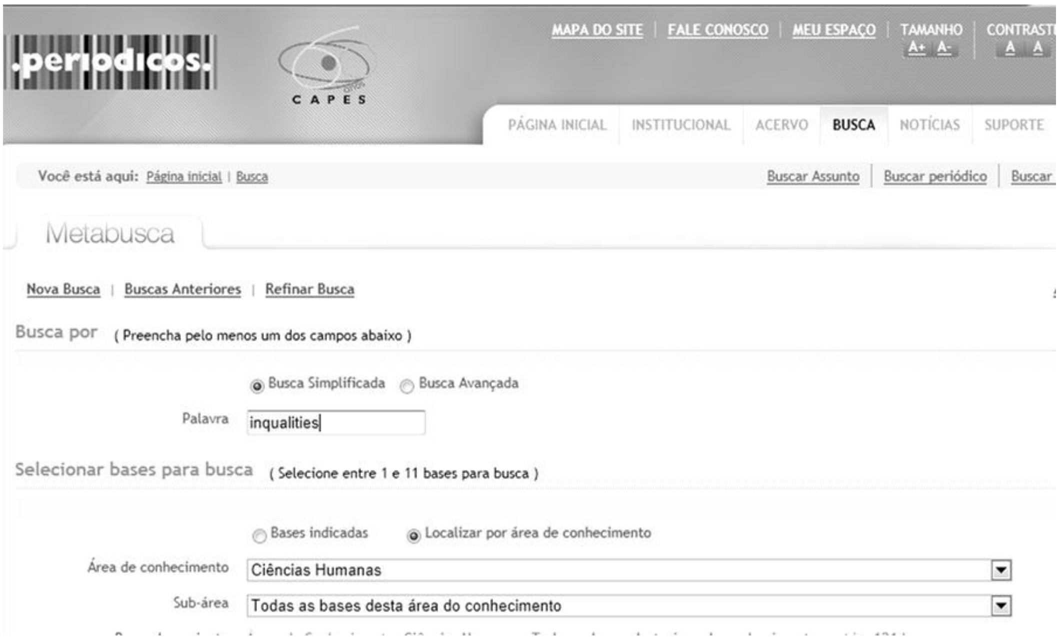


Figura 3– Exemplo 2 da busca pelo portal de periódicos CAPES

Fonte: http://www.periodicos.capes.gov.br.ez20.periodicos.capes.gov.br/index. php?option=com_phome

É importante observar que se pode pesquisar por meio de diferentes navegadores, como o Internet Explorer, o Google Chrome ou o Mozilla Firefox, e os resultados das buscas podem alterar-se segundo o navegador. O Windows Internet Explorer é um navegador de licença proprietária, produzido, inicialmente, pela Microsoft em 1995, ou seja, é um componente integrado à Microsoft. O Google patrocina o Mozilla Firefox, um navegador desenvolvido pela Fundação Mozilla. Pelo *site* Wikipédia, é o mais jovem dos grandes navegadores para Internet, lançado em 2008 e utilizado pelas universidades. Em nossas pesquisas, utilizamos o Internet Explorer e o Mozilla.

Segundo considerações de cunho restritivo, relativas à nossa investigação, citamos exemplos sobre o processo de coleta empregada. Apresentamos resultados por meio de buscas em várias línguas, utilizando o plural e o singular da palavra *inequações* em:

- Português: localizamos alguns trabalhos, porém sem a relação com o ensino e a aprendizagem de inequações.
- Inglês: 40 registros, em média, foram localizados, porém relacionados à Matemática Pura e Aplicada (MPA) e à desigualdade social, incluindo alguns em espanhol.
- Espanhol: os que encontramos já tinham sido apresentados na busca em português, porém sem relação com o nosso tema.
- Italiano: não localizamos trabalhos.
- Francês: localizamos 21 registros nas áreas de MPA e 1 registro na área de ensino de Ciências e Matemática.

Analisamos outras subáreas, Educação e Ensino de Ciências e Matemática, que, pelo Mozilla, não aparecem. Contudo, pela mesma área de conhecimento, Ciências Sociais e Humanas, e pelo Explorer, por meio de busca simples e avançada, variando os conectivos, os resultados foram similares: muitos trabalhos na área de MPA e alguns na área de desigualdades sociais.

ProQuest

Esse banco de dados permite-nos acesso a inúmeros dados diferentes e é um dos maiores repositórios de conteúdos *on-line* do mundo. Porém, só é possível acessá-lo por meio de computadores autorizados em algumas bibliotecas acadêmicas (cf. Fig. 4). É um recurso de base de dados eletrônicos com milhões de artigos originalmente publicados em revistas, jornais e publicações científicas e fornece métodos detalhados de pesquisas, para ajudar a encontrar os artigos que procuramos, podendo ser por pesquisa básica, avançada e pesquisa de publicações.

Posteriormente, ao efetuar uma pesquisa, surge a página *Resultados de Pesquisa* com uma lista de todos os documentos que correspondem às palavras que foram digitadas. Podemos usar esse ambiente, para rever a lista de publicações que satisfaçam nossos interesses. A seguir, quando encontramos um artigo que pretendemos ler, podemos clicar o título (ou o formato do ícone adequado), para visualizá-lo. Para isso, basta usar a página *Visualização do Artigo*. Enquanto trabalhamos, podemos guardar os artigos desejados juntamente com as pesquisas que não pretendemos esquecer nos *Itens Marcados*. Podemos fazer a busca por meio de regiões, e existem várias combinações a ser utilizadas, a fim de maximizar a possibilidade de localizar uma publicação. Podemos observar o ícone que permite a escolha no lado superior direito da tela, no exemplo da figura 4, no caso, América Latina. Por esse meio, localizamos pouquíssimos trabalhos diferentes dos já encontrados anteriormente, mesmo utilizando várias combinações entre os descritores.

Figura 4: Exemplo da página em português do ProQuest, região América Latina

Fonte: http://www.proquest.com.br/

Google scholar

O Google Acadêmico (cf. Fig. 5) fornece uma maneira simples de pesquisar a literatura acadêmica de forma abrangente. É possível pesquisar várias disciplinas e fontes em um só lugar: artigos revisados por especialistas (*peer-rewiewed*), teses, livros, resumos e artigos de editoras acadêmicas, organizações profissionais, bibliotecas de pré-publicações, universidades e outras entidades.

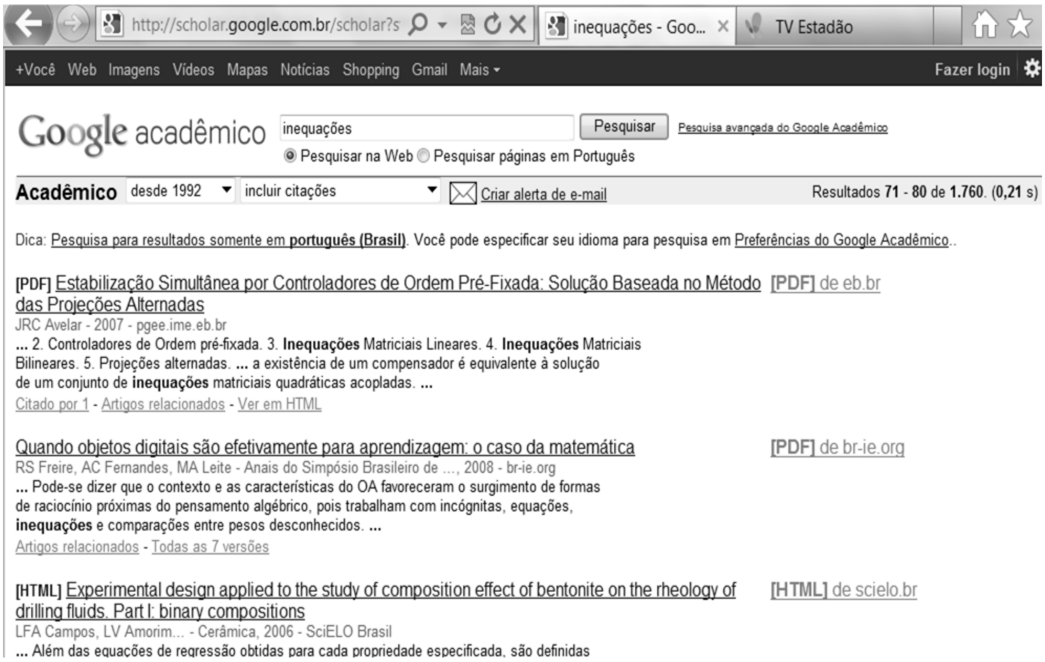


Figura 5 – Exemplo da busca no Google Scholar, realizada pelo descritor *inequações*

Fonte: http://scholar.google.com

No levantamento de trabalhos sobre inequações, obtivemos resultados em:

- Português: encontramos dissertações de mestrado, um artigo publicado na REVEMAT e outro na *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. A partir da 3ª página, não localizamos nada na área de ensino.
- Inglês: o aparecimento de inúmeros locais de pesquisas levou-nos a analisar somente algumas páginas, pois seria pouco produtivo ir até o final dos 432.000 resultados de busca, e a maioria analisada tratava-se da área de ciências sociais e MPA.
- Espanhol: observamos que a maioria dos sítios tratava de desigualdades sociais.
- Italiano: encontramos um trabalho do nosso interesse, como *Equazioni e disequazioni: dalla storia allá didattica della matemática*. Os outros trabalhos encontrados tratavam de livros, de MPA ou de materiais didáticos.
- Francês : localizamos um artigo e limitamo-nos, da mesma forma que anteriormente, a analisar as 4 primeiras páginas de resultados. Encontramos várias páginas que tratavam de MPA e alguns materiais didáticos para a educação básica.

ERIC

O *Educational Research Information Center* – ERIC fornece acesso ilimitado a mais de 1,4 milhão de registros bibliográficos de artigos de jornais e de outros materiais relacionados à educação. Semanalmente, são adicionadas centenas de novos registros. Se disponíveis, as ligações ao texto completo são incluídas. Na coleção do ERIC, podemos encontrar registros de artigos de jornais, livros, sínteses de pesquisa, *papers* de conferências, relatórios técnicos, *papers* de política e outros relacionados à educação. A procura pode ser pelo título ou por outros descritores. Ressaltamos que esse foi um dos bancos de dados em que mais encontramos publicações sobre o nosso tema.

No *site* do *International Group of Pyschology Mathematics Education* - IGPME, deparamos com uma relação de trabalhos elencados segundo seus números de registros nesse banco de dados. Assim, é mais fácil localizar tais publicações. Com o intuito de expor o nosso roteiro, exemplificamos alguns tipos de combinações realizadas nesse ambiente em:

- Inglês: detectamos 260 trabalhos, porém a maioria com foco em desigualdades sociais. Com relação ao ensino e à aprendizagem de inequação, localizamos ou um livro, ou uma abordagem didático-metodológica de ensino;
- Espanhol, francês e italiano: também não foram encontrados registros.

SciELO

O *Scientific Electronic Library Online* - SciELO é um modelo para a publicação eletrônica cooperativa de periódicos científicos na Internet, para atender, principalmente, às demandas da comunicação dos países em desenvolvimento e, particularmente, da América Latina e do Caribe. Proporciona uma solução eficiente para assegurar a visibilidade e o acesso universal a sua literatura científica, contribuindo para a superação do fenômeno conhecido como *ciência perdida*. O SCIELO contém procedimentos integrados, para medir o uso e o impacto dos periódicos científicos e é fruto da cooperação entre a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (http://www.fapesp.br), o Centro Latino-Americano e do Caribe de Informação em Ciências da Saúde – BIREME (http://www.bireme.br) e as instituições nacionais e internacionais relacionadas à comunicação e aos editores científicos. Podemos pesquisar de forma regional, atendo-nos a investigar em regiões selecionadas. (cf. Fig. 6)

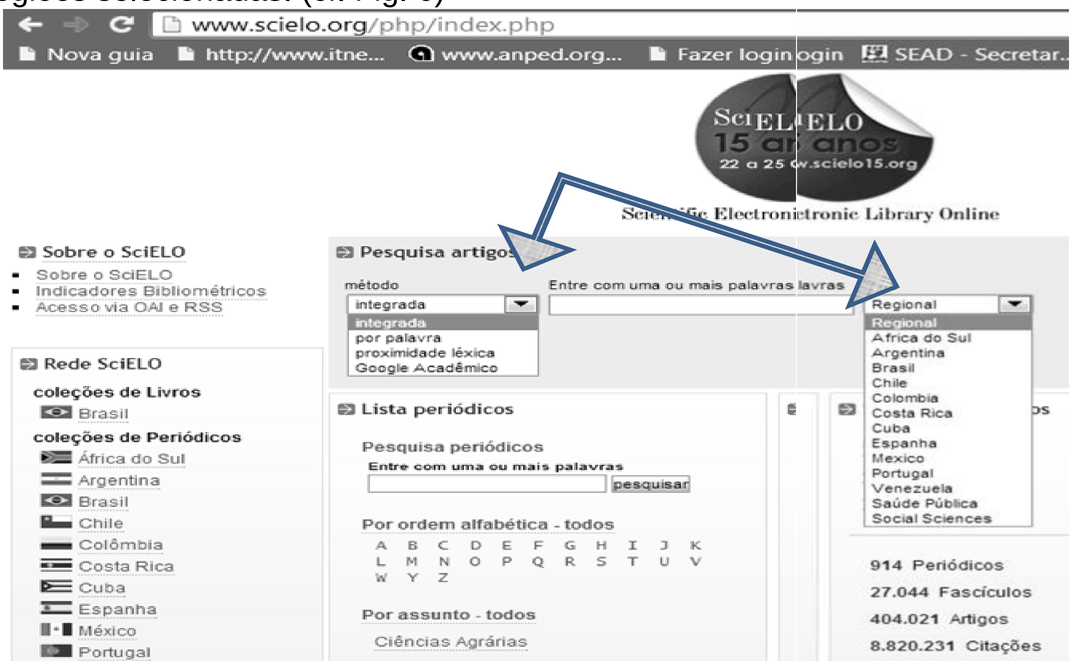


Figura 6 - Um exemplo das possibilidades de busca no SciELO.

Fonte: http://www.scielo.org/php/index.php

Por tratar-se de uma parceria entre o Brasil e os países latinos, fizemos a busca em português, espanhol e em inglês. Na língua inglesa, obtivemos como resultado vários trabalhos já localizados nas duas primeiras línguas. Iniciamos com a palavra *desigualdade* e obtivemos 1276 títulos, porém, até a 10ª página, encontramos, apenas, assuntos relacionados às Ciências Sociais. A pesquisa por meio da palavra *inequações* não apresentou resultados nem em outras línguas. Outro local onde se podem pesquisar publicações científicas é na página da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (http://www.anped.org.br/), em que estão disponíveis todos os trabalhos apresentados nos encontro realizados desde 2000.

Bibliotecas acadêmicas brasileiras

Nas universidades localizam-se as bibliotecas acadêmicas que estão a serviço, principalmente, de estudantes e acadêmicos. Elas correspondem à unidade de informação de uma universidade, pois as suas coleções devem refletir as matérias lecionadas nos cursos e nas áreas de investigações da instituição. A documentação é, sobretudo, de caráter científico e técnico e deve ser permanentemente atualizada mediante a aquisição frequente de grande número de publicações periódicas em meio impresso ou eletrônico. Estas instituições têm como objetivos principais: apoiar o ensino e a investigação; dar um tratamento técnico aprofundado aos documentos no nível da indexação; atualizar, constantemente, os fundos documentais.

Com o objetivo de socializar a ciência e os resultados de pesquisas, as bibliotecas acadêmicas disponibilizam informações por meio do seu acervo e são fonte variada para coleta de dados. Então, fizemos a busca nos catálogos e nos arquivos de dissertações e teses, de universidades brasileiras que têm o doutorado em Educação Matemática e ou em Ensino de Ciências e Matemática. Iniciamos o processo por meio de consulta ao *site* da CAPES, na relação de doutorados reconhecidos[2].

A investigação ocorreu por meio do descritor em português, *inequações*, por tratar-se de universidades brasileiras. Em última etapa de nossa coleta de dados, consultamos algumas páginas de universidades estrangeiras, mas não obtivemos publicações. A maior dificuldade encontrada foi a localização de teses estrangeiras. O processo de busca foi, basicamente, por meio de análise das referências bibliográficas; depois, ou contatávamos o autor, ou as obtínhamos por meio de outras fontes, como as já elencadas. Localizamos várias dissertações que foram incluídas em nossas leituras, com o intuito de fomentar nossas argumentações e análises. Ressaltamos que nosso mapeamento foi de 1991 a 2011. Fizeram parte de nosso roteiro de investigação os seguintes programas de pós-graduações, em Educação Matemática e ou Ensino de Ciências e Matemática, de universidades brasileiras renomadas:

[2]Realizamos um levantamento na CAPES, por meio da direção: http://conteudoweb.capes.gov.br/conteudoweb/ProjetoRelacaoCursosServlet?acao=pesquisarIes&codigoArea=90200000&descricaoArea=MULTIDISCIPLINAR+&descricaoAreaConhecimento=ENSINO&descricaoAreaAvaliacao=ENSINO.

Universidade Estadual de São Paulo (UNESP/ Rio Claro e Bauru)

Área: Educação Matemática

A procura não foi pontual, isto é, não se restringiu ao *site* do programa de pós-graduação em Educação Matemática, tendo em vista a possibilidade de existir algum trabalho sobre o nosso tema em outros *campi*. Então, analisamos vários acervos da Universidade Estadual de São Paulo.

Pontifícia Universidade Católica (PUC/SP)

Área: Educação Matemática

A busca divide-se em Mestrado Acadêmico, Mestrado Profissional e Doutorado. Neste caso, fizemos a procura diretamente na página do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Universidade de Campinas (UNICAMP/SP)

Área: *Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática*

Não encontramos um depositório de teses diretamente no *site* desse doutorado, mas encontramos dissertações e teses na biblioteca digital, apesar de não relacionadas ao nosso assunto.

Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL/SP)

Área: Ensino de Ciências e Matemática

Obtivemos, por meio de nossa pesquisa, somente três teses defendidas, até o momento da busca, porém sem foco no assunto de nosso interesse.

Universidade Bandeirantes (UNIBAN/SP)

Área: Educação Matemática

Foi localizada uma tese defendida em 2009 que não trata do tema em questão.

Universidade Federal do Pará (UFPA/PA)

Área: Educação em Ciências e Matemática

Não apresentou teses defendidas, e não há registro de dissertações na área de nosso interesse.

Universidade Estadual de Maringá (UEM/PR)

Área: Educação para a Ciência e a Matemática

Não localizamos teses, mas dissertações, porém sem interesse para nossa investigação.

Universidade Estadual de Londrina (UEL /PR)

Área: Ensino de Ciências e Educação Matemática

Localizamos quatro trabalhos, mas nenhum na área de ensino e ou aprendizagem de inequações.

Universidade Luterana do Brasil (ULBRA/RS)

Área: Ensino de Ciências e Matemática

A procura foi realizada por título, pelas palavras *inequações* e *desigualdades*, separadamente.

Além das consultas em bibliotecas eletrônicas, estivemos pessoalmente, nos acervos de bibliotecas, como do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), da Universidade de São Paulo (USP), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC/RJ) e, à época, da Universidade Santa Úrsula.

Revistas Científicas Brasileiras

Além de realizarmos um levantamento em bibliotecas, como a do IMPA, a da USP, a da PUC/SP e a da PUC/RJ, realizamos busca pelos *sites* das revistas, como as exemplificadas a seguir.

Educação Matemática Pesquisa (PUC/SP)

Foram encontrados oito registros (cf. Fig. 7), porém os autores e os títulos eram os mesmos das dissertações e das teses já localizadas. Neste caso, optamos pela leitura ampla e aprofundada que os trabalhos mais abrangentes nos proporcionam. Utilizamos, nessa busca, a palavra *inequações* em várias línguas.

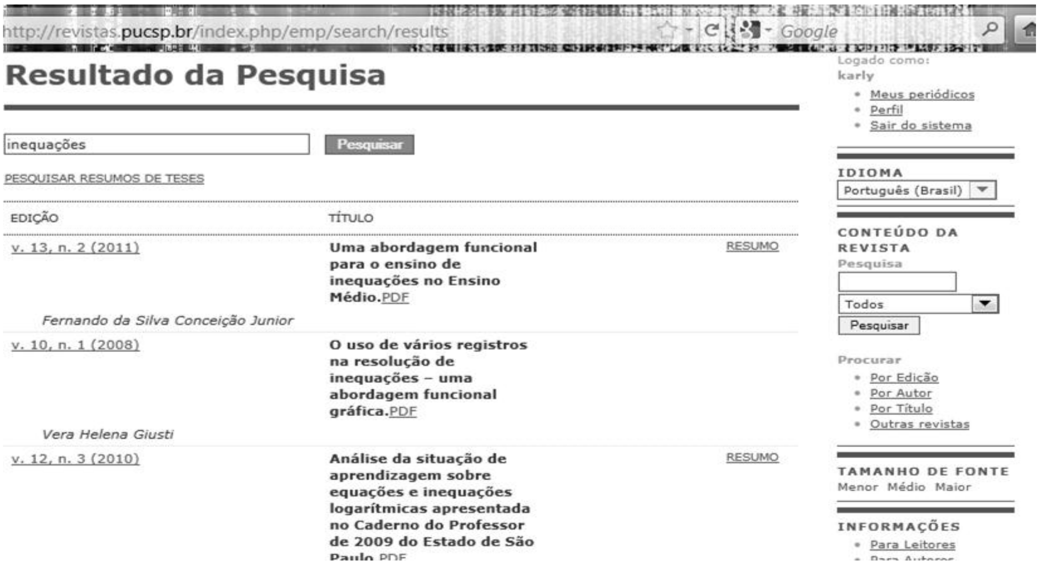


Figura 7: Exemplo de periódicos encontrados na revista publicada pela PUC/SP

Fonte: http: //revistas.pucsp.br/index.php/emp/search/results

Zetetiké (Faculdade de Educação - UNICAMP)

Nenhum registro foi encontrado mesmo por meio de busca avançada, utilizando as expressões *inequações, inequação, desigualdades*.

Bolema (Educação Matemática - UNESP/Rio Claro)

Não encontramos nenhum registro.

REVEMAT (Universidade Federal de Santa Catarina)

Localizamos somente um registro, apesar de ter sido empregada a palavra *inequações* em várias línguas. (cf. Fig. 8)

Figura 8: Resultado parcial da busca na REVEMAT

Fonte: http //www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/search/results

Outras investigações foram realizadas em periódicos como a *Revista do Professor de Matemática*, cujo principal objetivo é:

> Publicar artigos de matéria de nível elementar ou avançado, que seja acessível ao professor do ensino médio e a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido. (retirado de http://www.rpm.org.br/cms/index.php?option=com_content&view=article&id=72&Itemid=54, página inicial).

A *Educação Matemática Revista*, uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, também fez parte de nosso levantamento. Outro periódico do nosso acervo de pesquisa foi a *Revista Universitária*, uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática.

Revistas Científicas Estrangeiras

A busca em revistas estrangeiras foi realizada por uma espécie de arrazoado, analisando, primeiramente, as referências bibliográficas dos artigos que eram encontrados. Fizeram parte de nossas consultas revistas americanas, mexicanas, espanholas, portuguesas, italianas e francesas, porém o principal direcionador foram as referências bibliográficas dos trabalhos que selecionamos. Por meio delas, localizávamos as publicações que se relacionavam ao nosso tema e, em geral, as mapeávamos ou pessoalmente, nas bibliotecas, ou pelos *sites* de pesquisa como ERIC, Periódicos da CAPES, entre outros. Na figura 9, temos um exemplo do ambiente *on-line* de uma revista portuguesa.

Figura 8: Exemplo de um tipo de procura no *site* de uma revista portuguesa

Fonte: http://www.apm.pt/portal/em.php

Analisamos também revistas que versavam sobre procedimentos metodológicos de ensino de inequações encontradas em periódicos, como *Mathematics Teacher*, uma publicação do *National Council Teacher Mathematics* (NCTM), sem fins específicos de publicar artigos científicos, e *School Science and Mathematics*. Investigamos edição por edição de várias revistas:

- *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática);
- *Educational Studies in Mathematics* (EUA);
- *Rivista di Matematica della Universita di Parma* (Itália);
- *International Journal of Mathematics Education in Science and Technologies* (Inglaterra);
- *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* (Itália);
- *Recherches en Didactique des Mathematiques* (França);
- *Focus on Learning Problems in Mathematics* (EUA);
- *Eurasia Journal of Mathematics* (países europeus e asiáticos);
- *Journal School Science and Mathematics* (EUA);
- *Revista Latino Americana de Matematica Educativa* (México);
- *Journal of Research for Mathematics Education* (NCTM/EUA).

Considerações Finais

Com o objetivo de destacar a não linearidade da nossa coleta de dados e as interligações existentes entre várias fases e fontes de busca, esboçamos um mapa do procedimento de coleta. No início, as buscas foram feitas por meio da palavra-chave *inequações,* em alguns locais restritos. À medida que nos aprofundávamos na investigação, amadurecíamos, e isso se refletia em buscas cada vez mais objetivas e diretivas. Além disso, o contato com as leituras fizeram emergir novos dados, categorias que nos impulsionavam a tentar colher mais dados, para certificarmo-nos ou excluirmos certas informações que obtínhamos pelas análises. Nosso procedimento de levantamento do material documental envolveu, também, como pode ser observado pelo mapa, contatos com autores, pesquisas em CD de eventos e ou anais e atas impressas.

Em uma pesquisa dessa modalidade, mesmo depois de encerrada, existe a possibilidade de surgirem publicações interessantes que podem trazer elementos antes não percebidos, não destacados e necessários ao aprofundamento do tipo de pesquisa a que se propõe. Porém, existe um momento em que acreditamos ser necessário encerrar as buscas para concentrarmo-nos nas análises das publicações já selecionadas. Em determinado momento, observamos que as publicações começam a repetir-se, e esse é um indício de que podemos parar de coletar trabalhos. Contudo, pode ser que, ao longo das análises dos dados, surja necessidade de investigar mais, e, nesse ínterim, novas pesquisas podem ser publicadas; então é hora de atualizar a coleta.

Por fim, salientamos que as possibilidades de tipos de procura são inúmeras, pois dependem de vários fatores, como: conectivos, buscas simples e avançadas, tipos de descritores, tipos de provedores de internet, idiomas variados. De acordo com Severino (2007), “é preciso saber garimpar, sobretudo, dirigindo-se a endereços certos” (p.138). Procuramos garimpar bastante, mas algum estudo importante pode ter faltado, e é no caminhar que se aprende o caminho em uma pesquisa científica desse tipo. O fim pode não chegar!

Bibliografia

Alvarenga, B. K.(2013). O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Appolinário, F.(2009). Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo: Atlas.

Bardin, L. (2011). Análise de conteúdo. São Paulo: Edições 70.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education. In: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Simon & Schuter Macmillan.

Severino, A. (2007). Metodologia do trabalho científico. São Paulo: Cortez.

Romberg, T. A. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D.A. Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64.

Veloso, W. P. (2011). Metodologia do trabalho científico: normas técnicas para redação de trabalho científico. Curitiba: Juruá.

Autor/es: Karly Barbosa Alvarenga é Licenciada em Matemática, doutora em matemática educativa pelo Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) do Instituto Politécnico Nacional (MX). Doutora em Educação Matemática pela PUC/SP (BR). Professora do Departamento de Matemática e da Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás – (BR). karlyba@yahoo.com.br

Sílvia Dias Alcântara Machado é Bacharel e Licenciada em Matemática pela PUC/SP, diplomada em DEA em Algebra pela Universidade de Montpellier,França, USTL, mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e doutora em Matemática pela PUC/SP. É professora titular do departamento de Matemática e do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (BR). silviaam@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 49-69

Propuesta metodológica de lectura en clase de matemáticas a través de textos de divulgación científica

Santos Baron Edimer

Fecha de recepción: 30/07/2014
Fecha de aceptación: 22/11/2015

Resumen	La historia de las matemáticas presentada de una manera amena a través de cuentos, relacionándola con los conceptos básicos de la teoría de números, como la divisibilidad, la noción de número primo, entre otros, motiva a los estudiantes; además facilita la comprensión de los conceptos mencionados. Donde se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias matemáticas para que se pueda realizar un mejor abordaje a la matemática por medio de la resolución de problemas, apoyados desde el área del lenguaje en la lectura y comprensión de textos de divulgación científica. **Palabras clave**: **Lectura y escritura en matemáticas, competencia matemática, resolución de problemas.**
Abstract	The math history is presented in an enjoyable way with stories which connect the basic concepts as divisibility, prime numbers, among others. In other words, the stories facilitate the understanding to the students. It pretends that the students develop math skills to solve problems by the reading comprehension with scientist texts. **Keywords**: **Reading and writing in math, Math skill, problem-solving**
Resumo	A história de matemática apresentada de uma forma divertida através de histórias, a ligação com os conceitos básicos da teoria de números, tais como a divisibilidade, a noção de número primo, entre outros, motiva os alunos; Também facilita a compreensão dos conceitos mencionados. Sempre que se pretende que os alunos a desenvolver habilidades e conhecimentos de matemática para que você possa fazer uma melhor abordagem para a matemática através de resolução de problemas, com o apoio da área de linguagem e compreensão de leitura da ciência. **Palavras-chave: Leitura e escrita em matemática, habilidade matemática, resolução de problemas**

1. Introducción

La propuesta está encaminada hacía la mejora del aprendizaje de las matemáticas en la escuela básica secundaria (edades entre los 11 y 14 años), tomando la lectura como eje fundamental y la resolución de problemas como complemento al proceso de lectura. Se fundamenta en dos aspectos: el primero es la enseñanza de las nociones básicas de la teoría de números que se plantean desde los primeros años de escolaridad, el Ministerio de Educación Nacional colombiano (MEN) a través de los lineamientos curriculares y de los estándares para matemáticas señala cuáles deben ser las competencias matemáticas que debe desarrollar un estudiante al terminar un ciclo -dos o tres cursos- (MEN, 2006); la segunda es la necesidad de proveer recursos atractivos para los estudiantes en pro de una mejor comprensión matemática.

La matemática como los demás campos de pensamiento (MEN, 2007) requieren de un lenguaje, para el caso particular un lenguaje científico o específico (D'Amore, 2006) por lo que se requiere de ciertas habilidades y competencias (MEN, 2008) para poder dominar o por lo menos lograr comprender ciertos aspectos de este lenguaje; la palabra resulta ser el primer acercamiento, luego la literatura. Como expresión escrita, la palabra, se convierte en herramienta para lograr la comprensión esperada del lenguaje especifico de las matemáticas y en consecuencia, las competencias lectoras resultan muy importantes para entender parte de ese lenguaje, una parte se hace a través de la escuela y en el diario vivir, donde la literatura y el lenguaje se convierten en medio de comunicación para interpretar el mundo de la ciencia, en nuestro caso: las matemáticas, y mostrar una versión de nuestro entorno inmediato, manifestando una mirada casi personal de ese entorno.

El colegio El Tesoro de La Cumbre IED, de la localidad de Ciudad Bolívar en la ciudad de Bogotá usa la comunicación como eje principal del currículo y la competencia lectora es una de las más importantes, además de ser herramienta motivacional para algunos de los estudiantes, es de gran importancia para cada uno de los campos de pensamiento (MEN, 2007) puesto que en cada campo se hace necesario plantear diversas lecturas para desarrollar actividades de comprensión, interpretación y argumentación, por lo menos dos veces en el período. En el campo matemático se plantearon para el presente año, en el grado sexto (11 a 14 años), se realizaron adaptaciones de capítulos de libros como apoyo a la asignatura y como complemento a las actividades propias del quehacer matemático, además de ser parte del currículo de matemáticas para dichos grados son base para evidenciar la comprensión de algunos elementos generales de la teoría de números como lo es la divisibilidad (incluyendo el MCD y el mcm) además de los conceptos de número primo y número compuesto.

La manera como se aborda la aritmética desde los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) desconoce generalmente la relación entre las matemáticas y el entorno del estudiante. Teniendo en cuenta que los números son abstractos se requiere que los estudiantes a través de las diferentes representaciones de número identifiquen ciertas relaciones entre estos. Por ejemplo: la relación entre nombrar un número y la cardinalidad de un conjunto, es independiente de la característica del conjunto (animales, personas, objetos). Esto es distinguir entre número y numeral, siendo el primero el concepto y el segundo su representación.

La propuesta pretende brindar herramientas, a los docentes de grado sexto, para el manejo de algunos conceptos elementales de la teoría de números. Además, se pretende que la propuesta favorezca a los estudiantes al promover la lectura en clase de matemáticas con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos. Asimismo, se potencia el desarrollo de competencias matemáticas en el pensamiento numérico.

Inicialmente se hace una reflexión didáctica sobre los procesos de lectura, escritura y la comprensión en matemáticas teniendo en cuenta diferentes trabajos y artículos que han desarrollado en este campo de la matemática.

Después se desarrollan algunos aspectos pedagógicos de la propuesta con lo que se busca abordar la importancia de la lectura y escritura en las ciencias, esencialmente es las matemáticas.

Por último se presenta la propuesta didáctica, donde se muestra la metodología de aula, y se describe la organización general de cada actividad y la manera en que se pueden abordar en el salón de clases, además de algunas recomendaciones y reflexiones que buscan orientar sobre el desarrollo del trabajo y sobre los aspectos relevantes de la escritura y la lectura en matemáticas.

2. La lectura, escritura y comprensión en matemáticas

Else (2008) plantea que “la lectura de textos no tradicionales se usa principalmente para mejorar la comprensión de un concepto específico pero no para aprender un concepto matemático nuevo”. La lectura comprensiva es una herramienta que permite la elaboración de significados (Moran, 2012). Los textos de lectura están en un lenguaje natural. La matemática necesita del lenguaje natural para comunicar sus resultados, pero además le añade símbolos y fórmulas que son necesarios para comprenderla. La lectura de la matemática requiere además de comprender las palabras del lenguaje natural, entender el sentido, el significado de los símbolos y las fórmulas. No basta con leer literalmente. Por ejemplo, cuando vemos el símbolo 5 expresamos oralmente “cinco”, pero debemos saber igualmente que es la representación de un número que expresa la cantidad de dedos que tenemos en una mano, o el número de vocales del abecedario; cuando formulamos “dos más cuatro es igual a seis”, muy posiblemente estamos leyendo la expresión “2+4=6”, significando lo mismo. Pero las fórmulas, como éstas, tienen la ventaja de que las vemos de un solo golpe y posiblemente entendemos también de un solo golpe lo que la fórmula nos dice más allá de la lectura en español. Se trata del resultado de la suma de dos cantidades. O si se quiere de la relación entre tres números, representados por 2, 4, y 6. Leer significa entender, aprehender lo escrito.

El hecho de que el lenguaje matemático requiera de tablas, diagramas, expresiones simbólicas y gráficas muchas veces simultáneamente implica que leer y disfrutar un texto matemático no es lo mismo que leer una novela, de principio a fin (Freitag, p. 17). Los estudiantes requieren hacer transformaciones simbólicas, como en el ejemplo anterior, a través de un sistema de símbolos del lenguaje verbal para formar una representación escrita (gráfica) que exprese la idea verbal (Emig, 1977) y de esta manera mostrar las concepciones y experiencias que se tienen en relación con un concepto.

En matemáticas el estudiante debe, en algún momento, expresar las ideas y concepciones a través de una representación simbólica, gráfica o tabular que le permita comunicar dichos pensamientos. De acuerdo al NCTM (1989) “los estudiantes tienen la oportunidad de leer, escribir y discutir las ideas donde el uso del lenguaje matemático se vuelva natural” (citado en Campbell et al, 1997). Para realizar una discusión adecuada el estudiante debe poder interpretar la información de tal manera que pueda pasar de un lenguaje poco familiar a su lenguaje natural y para ello deben hacer una lectura “de derecha a izquierda como de izquierda a derecha (líneas de números); de arriba abajo (tablas); incluso diagonalmente (gráficas)” (Barton et al, 2002).

Para poder hacer una buena lectura de los símbolos matemáticos, los estudiantes necesitan asociar una palabra o frase con un símbolo; expresar una idea con objetos, pictogramas, palabras y símbolos (Schell, p. 546), buscando siempre que haya una coherencia entre lo que se lee y lo que se ve, ya que en algunos casos una misma escritura puede ser expresada verbalmente de otra manera, por ejemplo se puede enunciar lo siguiente: x a la dos, la segunda potencia de x, el cuadrado de x o x al cuadrado. Las anteriores expresiones tienen una única expresión en lenguaje matemático: x^2. El estudiante debe poder relacionar x^2 con cada uno de estos enunciados e identificar que la expresión x^2 es una abreviación de x•x para que haya un entendimiento y reconocimiento de la capacidad de manejar el lenguaje matemático.

Los símbolos y la notación matemática pueden ser un problema para el aprendizaje de los estudiantes por dos razones: cada símbolo o parte de la notación puede ser aprendido por el estudiante a través del desciframiento de muchos pasajes del texto matemático. La segunda está relacionada con las oraciones del texto matemático que incluyen fórmulas o ecuaciones, que generalmente pueden interrumpir la 'suave' escritura, haciendo difícil su lectura (Freitag, p. 17).

Como la matemática es el lenguaje común de la ciencia y este hecho es reconocido en todo el mundo académico (Adunar & Yagiz, 2004) la escuela debe brindar las herramientas necesarias para su comprensión haciendo uso de la lectoescritura. La escritura es generada y registrada gráficamente por el estudiante, convirtiéndose en la manera de aprendizaje más poderosa debido a que usa los dos hemisferios del cerebro. El hemisferio derecho controla las emociones y la intuición, reconociéndolas en principio como metáforas debido a que "las abstracciones ocurren de manera visual y como un todo espacial". El hemisferio izquierdo permite un pensamiento lineal que requiere estructurar las ideas de un papel de una manera coherente. Un hemisferio genera las ideas y el otro las estructura. Siendo entonces la escritura la que clarifica y organiza los pensamientos del estudiante (Freitag, p. 18).

La habilidad de lectoescritura usa ambos hemisferios, ya que por un lado la lectura le pregunta al estudiante si entendió el mensaje del autor, mientras que la escritura, requiere que el estudiante entienda el mensaje que está escrito, al mismo tiempo que debe intentar 'materializar' el pensamiento de la otra persona. Así, la escritura requiere que el estudiante tenga una comprensión del contenido y se genere una mayor habilidad para comunicar lo que ha leído.

Emig (1977) resalta la escritura como una manera de comunicar y como un desarrollo del entendimiento de las matemáticas, reconociendo que éstas tienen una estructura propia. En la escuela, la escritura matemática se reconoce como algo complicado y tedioso debido a que la escritura de los estudiantes tiene grandes deficiencias en la notación, la terminología y estructura (Freitag, 1997).

Grosmman, Smith y Miller (1993) sugieren que la habilidad de un estudiante para explicar un concepto a través de la escritura está relacionada con la habilidad de comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos. Cuando un estudiante demuestra la habilidad de escribir sobre los conceptos puede ser visto como una expresión de comprensión y como un producto de conocimiento (Citado en Freitag, p. 19). La escuela debe permitir y profundizar en que los estudiantes expresen sus ideas de una manera estructurada, clara y concisa.

Sipka (1990) cree que escribir en matemáticas puede ayudar a mejorar la escritura en general del estudiante y que la estructura natural de la matemática puede ayudar que los estudiantes impongan una estructura cuando escriben en otras clases (Citado en Freitag, p. 19). El estudiante debe entonces apropiarse de una manera de escribir que le permita expresarse de forma clara y concisa, permitiendo al otro identificar las nociones y concepciones que tiene sobre un concepto determinado, ya que cuando los estudiantes escriben para otra persona, esto les ayuda a mejorar la estructura de su escritura como la claridad de la misma.

Para Sipka (1990) hay dos formas de escribir la formal (se evalúa de acuerdo al contenido y a la calidad de la escritura, se incluyen las demostraciones, lecturas formales e investigaciones) y la informal (ayuda a los estudiantes a entender el material, escritura libre como las biografías de los matemáticos o revistas) (Citado en Freitag, p. 19).

Por otro lado, la lectura y la escritura se consideran separadas, pero ambas tienen cosas en común, por lo tanto la lectura y escritura en matemáticas se benefician mutuamente, ya que ocurren simultáneamente; si se toma un texto de lectura con contenido matemático puede ser efectivo para aprender un nuevo concepto si los estudiantes leen comprensivamente Else (2008, pp. 6).

La escritura permite al estudiante que exprese sus opiniones, preocupaciones o preguntas sobre lo que ha leído. Permitiendo al estudiante expresar los conceptos de manera personal mientras que hace más sencilla la comprensión, y permite al estudiante la organización de los conceptos a través de las oraciones que construye por eso tomar notas mientras se lee ayuda a los estudiantes a mejorar sus habilidades de lectura, convirtiendo al estudiante en un lector activo, por lo que obliga al estudiante a revisar lo que ha leído anteriormente.

3. Aspectos pedagógicos de la propuesta

La enseñanza de la matemática al igual que la de las ciencias y la literatura enseña también a escribir y teniendo en cuenta que “el lenguaje matemático obliga a una gimnasia intelectual sumamente intensa” (Dugas, 1976; citado en PISA, 2006) se requieren habilidades especiales para lograr comprender un texto de matemáticas, puesto que requiere de la interpretación de símbolos, tablas, gráficas y fórmulas (Adu-Gyamfi, Bossé & Faulconer, 2010; Barton, Heidema & Jordan, 2002; Freitag, 1997).

Por lo tanto, es necesario e importante rescatar la lectura en diferentes contextos que apunten a una lectura comprensiva y que ayuden en la interiorización de conceptos relacionados con las ciencias para que los estudiantes empiecen a adquirir las habilidades necesarias para poder realizar una lectura comprensiva de textos que involucran nociones matemáticas.

La lectura es un puente entre el profesor y el estudiante (Martins, 2006) si se lleva un adecuado proceso de lectoescritura en contexto. Se debe partir de lecturas sencillas que motiven inmediatamente al educando para que la tarea de leer no se convierta en sí misma en un problema sino que permita incentivar al estudiante a que profundice sobre ciertos temas y nociones de interés particular; para ello se debe tener en cuenta el tipo de contenido que presenta el texto. Estos pueden ser: 1) **Expositivos**, que pueden incluir definiciones, teoremas y conceptos; 2) **De procesos**, que le indica al lector el método que puede usar cuando se enfrente a una tarea específica; y 3) **De resolución de problemas**, que muestra los procesos de demostración a través de ejercicios o problemas que el estudiante puede usar posteriormente (Freitag, 1997).

Según Freitag (1997) en la lectura hay dos aspectos esenciales: *el primero* se refiere a la decodificación que hace el lector de la información que quiere transmitir el autor; y *la segunda* se refiere a la comprensión que hace el lector de la información que el autor propone. Estos dos pasos se deben hacer simultáneamente para que haya un alto nivel de comprensión. Para lograr el objetivo los estudiantes pueden ayudarse de algunas tareas antes, durante y después de la lectura; por ejemplo resaltar las palabras importantes, resaltar la idea principal, hacer un resumen, proponer preguntas, entre otras (Campbell, Schlumberger & Pate, 1997).

En matemáticas al igual que en las ciencias se trata de relacionar la naturaleza con la construcción de los conceptos y de esta forma lograr que los estudiantes vean las ciencias como algo más 'natural'; el medio para ello es el lenguaje: "e*l lenguaje de la ciencia no hace parte del lenguaje natural de los alumnos. Se trata de un "registro" foráneo (subconjunto especializado de un lenguaje) dentro del inglés [castellano] y suena extraño e incómodo para la mayoría de los alumnos hasta que lo han utilizado mucho tiempo. Los alumnos entienden mejor si se les explica en su propio lenguaje, el inglés [castellano] coloquial* (Lemke, 1997) citado en (Massa & Stipcich, 1999).

De otro lado "*la matemática ha formado parte desde la cultura griega de las llamadas artes liberales, concretamente del quadrivium, que comprendía la aritmética (estudio de los «números en reposo»), la geometría (las «magnitudes en reposo»), la música (los «números en movimiento») y la astronomía (las «magnitudes en movimiento»)*" (Peralta, 1998). Por esta razón se toman como un constructo de la humanidad. En la actualidad encontramos disciplinas, además de ciencias y por lo tanto es preciso hacer evidente este hecho a través de lecturas, científicas y no científicas, sobre cómo el hombre y su civilización han tenido que ir mejorando sus nociones sobre las ciencias y en particular en matemáticas.

En los tiempos actuales el estudiante recibe información en la escuela, a través de las nuevas tecnologías, por lo que se convierte en un receptor dinámico que se cuestiona, indaga y reflexiona en algunas ocasiones sobre lo que aprende y sobre la información obtenida; por lo que el proceso de aprendizaje y de enseñanza que se imparte en la escuela debe despertar interés en los estudiantes (Moreira, 2005). Para obtener esa motivación debemos plantearnos una pregunta inicial: ¿Cómo enseñar? La respuesta a este interrogante nos orienta sobre qué metodología debe ser la más adecuada en un contexto determinado.

Se reconoce entonces que existe una relación intrínseca entre los participantes (estudiante, educador y saber), que se encuentran en un espacio específico (el aula, en general la escuela), donde el objetivo es otorgarle significado a los conocimientos; algunas veces previos, otras veces construidos, entre la interacción de los participantes y unos materiales definidos. La lectura como objeto de aprendizaje en sí mismo se convierte en la herramienta que usa el educador para mostrar un camino entre el saber y el educando (entiéndase como una persona con habilidades intelectuales para el aprendizaje); ayudado por las experiencias que se tienen y de las cuales se resignificarán y darán inicio a un nuevo conocimiento.

Partiendo del principio de que todo sujeto tiene un conocimiento (fundamentado o no), el papel del docente es el de cuestionar sobre dichas bases: generando inquietudes, dudas sobre su propio entendimiento a través de preguntas generadoras. La pregunta generadora permite un abordaje amplio sobre un mismo tópico: "*Cuando se aprende a formular preguntas – relevantes, apropiadas y sustantivas – se aprende a aprender y nadie nos impedirá aprender lo que queramos*" (Moreira, 2005). Se infiere entonces que el estudiante debe codificar su manera de aprender y su propia realidad para poder desenvolverse en su entorno de una manera eficaz.

4. Propuesta

La lectura en matemáticas al igual que la literatura nos ayudan a entender y desarrollarnos en el mundo de una manera más adecuada (Frabetti, 2000), permitiendo formar personas más independientes en la clase, que argumenten y aprendan a recibir información del texto como de los compañeros o del profesor y que se convierta en un vehículo para la comprensión de las matemáticas (Adu-Gyamfi et all, 2010, p. 5).

Con ayuda de los capítulos seleccionados del libro Malditas Matemáticas (Frabetti, 2000) se espera que los estudiantes puedan identificar algunos aspectos de la divisibilidad. A través de la creación de actividades de comprensión lectora que involucran las formas de representación, los contextos, la argumentación y la resolución de problemas basados en el aprendizaje significativo crítico (Moreira, 2005). Asimismo usar la literatura como una motivación de la misma clase de matemáticas teniendo en cuenta la afirmación que hacen Biancarosa y Snow (2006) “la lectura es una habilidad central durante el proceso de aprendizaje” (Citado en Adu-Gyanfy, p. 3)

La lectura está ligada a la escritura, por lo tanto se considera igualmente una parte integral del aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 1989) y se deben desarrollar al mismo tiempo. Además “escribir puede ser una tarea efectiva y una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas” (Freitag, p. 16) si se realiza a conciencia. Emig (1977) plantea que la escritura es la más poderosa y única manera de aprender si se compara con el escuchar, hablar y leer; ya que es la única que se origina desde el estudiante y es registrada gráficamente (símbolos, palabras, tablas), por lo que la valoración de la lectura se hace a través de este medio permitiendo recolectar información sobre qué tanto comprendió el estudiante y en qué se le ha presentado mayor dificultad.

Con ayuda de textos de divulgación de carácter científico, específicamente capítulos del libro *Malditas Matemáticas - Alicia en el País de los Números* (Frabetti, 2000) se busca abordar las nociones asociadas a la ***construcción de los números;*** conceptos fundamentales de los ***sistemas de numeración*** *y su importancia*; una aproximación a los ***números primos***; abordar las nociones de la ***multiplicación*** para los conceptos de **Máximo Común divisor** ***y mínimo común múltiplo;*** además de mostrar la ***relación de las matemáticas con el entorno y las ciencias***.

Para ello se requiere que el estudiante tenga conocimiento sobre las operaciones básicas, sus algoritmos y las nociones de orden. De la misma manera los estudiantes deben poseer habilidades para la resolución de problemas en diferentes contextos.

Tablas: Numerar las tablas y poner texto al pie de tabla, si se considera conveniente, en Arial10, interlineado sencillo, texto centrado. Espaciado anterior y posterior automático.

4.1. Metodología de trabajo en el aula

El trabajo de aula se realizará en **dos sesiones**: a) se realiza la lectura de manera individual y grupal, b) se realiza un taller que busca validar las nociones presentes en cada lectura, el nivel de comprensión de los conceptos matemáticos abordados a través de talleres que relacionan los conceptos matemáticos, la resolución de problemas y la lectura.

De manera general se plantean los siguientes aspectos para la **primera sesión**: *lectura de cada adaptación*:

1) El docente plantea **preguntas iniciales** indagando sobre los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes en relación al concepto o temas a abordar en la lectura.
2) Se hace una **lectura en voz alta** del capítulo por uno o más estudiantes para realizar una evaluación de la forma en que se efectúa la lectura (entonación, signos de puntuación, pronunciación).
3) El docente plantea **preguntas durante la lectura** para verificar vocabulario, por parte del docente.
4) El estudiante elabora la **ficha de lectura** individual (Véase **Tabla 1**) para tener un primer control de lectura.

Ficha No.	
Nombre:	Curso:
Título:	No. Capítulo:
Temas abordados:	
Síntesis (resumen)	
Vocabulario (palabras desconocidas)	
Mensaje o enseñanza	

Tabla 1: Ficha bibliográfica para el primer control de lectura

5) Se solicita a los estudiantes que se conformen grupos de 3 para que por grupo se construya una **ficha grupal** (Véase **Tabla 2**).
6) El docente realiza unas **preguntas orientadoras** para que se realice de nuevo la lectura. Los debates sobre lo leído ayudan a reforzar la comprensión de los conceptos puestos allí. Las respuestas dadas por algunos estudiantes ayudan a los demás a comprender la lectura, recalcando que las respuestas a las preguntas de los estudiantes están en la lectura (Else, 2008)
7) Se hace una **ficha de lectura individual** y luego **grupal** (Véase **Tabla 2**)

Ficha No.
Nombre:
Temas abordados:
Síntesis (resumen)

Tabla 2: Ficha bibliográfica para el segundo control de lectura

8) El profesor plantea **preguntas post-lectura** para indagar sobre los temas matemáticos presentes en la lectura, sobre la forma en que se plantean y se abordan (explicaciones si las tiene).
9) Se plantea un **taller explicativo** sobre los conceptos abordados en la lectura para valorar el nivel de comprensión de cada de uno de ellos.

4.2. Actividades

Se realizarán cuatro (4) actividades, la primera de ellas tiene solamente una sesión, las demás actividades comprenderán dos sesiones y se organizan de la siguiente manera: se abordan cuatro capítulos del libro Malditas Matemáticas – Alicia en el país de los números (Frabetti, 2000).

- **Actividad No. 1 "La matemática en nuestra vida"**

Con esta actividad se pretende identificar algunos aspectos relevantes de la matemática en el entorno inmediato.

Revisión de preconceptos: Indagar por las posibles conexiones que realizan los estudiantes con las matemáticas

1. ¿En qué situaciones de tu vida crees que has usado o usas las matemáticas?

2. ¿Existe relación en la manera en que solucionas un problema matemático y un problema que se te presenta en el colegio, en la casa o en el barrio? Explica tu respuesta.

Etapa inicial de lectura del Capítulo 1: ***Las matemáticas no sirven para nada*** *(Malditas matemáticas)*

Lisa es una niña que se encuentra sentada en un banco del parque dispuesta a realizar las tareas de matemáticas. Aunque le parecen muy desagradables tiene que hacer los deberes. De un momento a otro de un arbusto sale un personaje (**mago**) que empieza a interactuar con ella. El mago le pregunta por el libro que tiene y se inicia una discusión sobre la importancia de las matemáticas. En una intervención Lisa afirma que "las matemáticas no sirven para nada" y el mago responde que si sirven, y mucho. Para demostrarlo este mago le pregunta a Lisa la edad que tiene actualmente y la que tenía el año anterior. Con las respuestas dadas por Lisa el mago le dice que ella sabe mucho de matemáticas, aunque no le agraden, pues tú sabes contar y "el conteo es el origen y la base de todas las matemáticas". Posteriormente, el mago le pregunta sobre la escritura de los números, por ejemplo el número once, Lisa lo escribe "11" y el mago entonces le pregunta si sabe por qué se escribe así y no de otra forma, y el mago le explica que para los antiguos romanos el "II" no significaba 'once' sino 'dos', mostrando que ella no sabía por qué se escribe el once de esa forma. A este punto Lisa ya mostraba interés por las matemáticas, ya que quería saber por qué el '11' es once y no dos. El mago le dijo a Lisa que no podría explicarle solo lo del once porque "en matemáticas todas las cosas están relacionadas entre sí, se desprenden unas de otras de forma lógica". Para poder explicarle por qué el once es "11" es necesario contarle una historia de los números. A Lisa no le gustan las historias, por lo que el mago decide contarle mejor un cuento.

Etapa intermedia de lectura; Examinar los aspectos más relevantes de la lectura

3. ¿Qué acción es la que le permite a Lisa darse cuenta de que si sabe matemáticas?
4. ¿Qué prefiere hacer Lisa en vez de realizar las tareas de matemáticas?
4.1. Después de la lectura de este párrafo se debe contestar la pregunta: ¿En nuestra vida TODO está relacionado?

"…sólo que me expliques lo del once. No puedo explicarte sólo lo del once porque en matemáticas todas las cosas están relacionadas entre sí, se desprenden unas de otras de forma lógica. Para explicarte por qué el número once se escribe como se escribe, tendría que contarte la historia de los números desde el principio"

Etapa final de lectura: Identificar el nivel de comprensión de los estudiantes después de la lectura

5. Escribe las ideas principales del texto.
6. Señala los párrafos donde crees que se encuentran las ideas principales de la lectura.
7. Realiza un dibujo que represente la idea central del texto.

- **Actividad No. 2 "Aprendiendo a Contar"**

Con esta actividad se pretende que los estudiantes infieran las características generales de un sistema de numeración.

Adaptación del Capítulo 2 ***El Cuento de la Cuenta*** *(Malditas matemáticas)*

Una leyenda cuenta que un pastor tenía una oveja, luego tuvo dos ovejas, luego tres, y el rebaño iba creciendo. Como no podría saber si estaban todas las ovejas de un solo golpe, necesitaba encontrar una manera de verificar si estaban todas o si faltaba alguna. Cuando el pastor tuvo diez ovejas se dio cuenta que si levantaba un dedo por cada oveja, tenía que levantar los dedos de ambas manos. El rebaño siguió creciendo, por lo tanto al pastor le era más difícil saber cuántas ovejas tenía y si faltaba alguna. Así que cuando tuvo muchas ovejas decidió que cuando se le acababan los dedos de las manos iba a poner una piedra en una vasija de madera, y volvía a empezar a contar con los dedos, empezando desde uno, sin dejar de lado que una piedra en la vasija valía por 10. El rebaño seguía creciendo por lo que al pastor le fue necesario usar otras vasijas, una de barro y otra de metal. La vasija de metal valía por diez piedras de la vasija de madera, es decir por cien. La vasija de madera valía por diez piedras de la vasija de barro. Cuando contaba las ovejas y se encontraba con algo como lo siguiente:

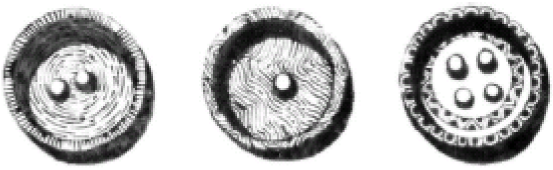


Figura 1: Representación de un número usando vasijas

Entonces el pastor sabía que tenía doscientas catorce ovejas. Como es un cuento, dijo el mago, *al pastor le regalaron un bloc y un lápiz*, pero como no es de hadas esas cosas no pueden aparecer protestó Lisa, por lo que se decidió por una tablilla de arcilla y un punzón. En vez de usar piedras el pastor ahora tallaba en la tablilla unos círculos que representaban cada vasija y las piedras por líneas. El pastor se podría encontrar lo siguiente:

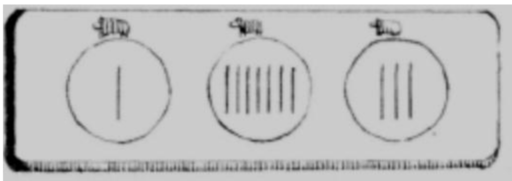


Figura 2: Representación de un número usando tablillas

La escritura con líneas no era muy cómoda para el pastor, pues algunas veces hacía todas las líneas verticales u horizontales y no le era fácil saber cuántas tenía. Así que, decidió diversificar la escritura cambiando la disposición de las líneas, de tal modo que llego a escribir los numerales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. El pastor se dio cuenta que ya no era necesario poner los círculos para las vasijas, pues los numerales se diferenciaban unos de otros fácilmente; así que solo los ponía y cuando la vasija estaba vacía ahí si dejaba el círculo dibujado. Lisa le pregunta al mago que si no era más fácil dejar un espacio en blanco, a lo que el mago le responde que no. Para explicarle el mago puso el ejemplo de 30, que si no escribiera el 'circulo' sería solamente 3 y no 30.

Con esta nueva invención (del círculo vacío) se había completado un maravilloso **sistema de numeración**, dijo el mago. A Lisa no le parecía tan maravilloso, así que el mago le explica el porqué de su expresión, poniéndole a Lisa como ejemplo que multiplicara dos números romanos, además de mostrarle que el número ***3333*** es más cómodo que escribir MMMCCCXXXIII en el sistema posicional decimal. Lisa pregunta ¿Por qué lo llamas sistema posicional de numeración? El mago le explica que en el sistema romano cada M vale lo mismo, y también las demás letras, por ejemplo, la **L** siempre valdrá **cincuenta**, la **C** siempre valdrá **cien**. Mientras que en el sistema posicional ***cada dígito tiene un valor distinto, y que ese valor depende de la posición***, por lo tanto cada número *3* tiene un valor distinto: el primero de la derecha vale *3* unidades, el segundo vale *3* decenas, el tercer *3* centenas y el último *3* millares. Y ***se llama decimal porque salta de una posición a la siguiente de diez en diez***.

Primera Sesión

Etapa inicial de lectura: preguntas que indagan sobre nociones previas de conteo y de la noción de número

1. Describe como aprendiste (te enseñaron) a contar.
2. ¿Por qué surgieron los números?
3. ¿Crees que los números se los inventaron las personas o un ser superior nos los dio?
4. ¿Desde cuándo crees que existen los números?

Etapa intermedia de lectura: preguntas que orientan hacía los conceptos matemáticos.

5. ¿Cuál fue el problema que se le presentó al pastor?
6. ¿Por qué crees que fue necesario cambiar del uso de piedras y cuencos a las líneas y círculos?
7. ¿Cuál es el significado del **cuenco vacío** y cuál es su importancia?
8. Trata de explicarle a un compañero lo que significa el **sistema posicional decimal**.

Etapa final de lectura: validación de algunos de los conceptos desarrollados durante la lectura.

9. Describe cómo fue el proceso que siguió el pastor para construir un sistema que le permitiera registrar cualquier cantidad de ovejas.
10. Explica cada uno de los gráficos que aparece en el capítulo.
11. ¿Cuál es la relación que hay entre el sistema del pastor y el sistema de numeración que usamos actualmente?
12. ¿Qué relación existe entre el primer y segundo capítulo?

Segunda sesión

En este apartado se abordan los conceptos de sistema de numeración y el concepto de base.

Lee cuidadosamente el siguiente fragmento de historia de las matemáticas.

Cuando los hombres empezaron a contar usaron los dedos, guijarros, marcas en bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece se hace necesario un sistema de representación más práctico.

En diferentes partes del mundo y en distintas épocas se llegó a la misma solución, cuando se alcanza un determinado número se hace una marca distinta que los representa a todos ellos. Este número es la base. Se sigue añadiendo unidades hasta que se vuelve a alcanzar por segunda vez el número anterior y se añade otra marca de la segunda clase. Cuando se alcanza un número determinado (que puede ser diferente del anterior constituyendo la base auxiliar) de estas unidades de segundo orden, las decenas en caso de base 10, se añade una de tercer orden y así sucesivamente.

La base que más se ha utilizado a lo largo de la Historia es 10 según todas las apariencias por ser ese el número de dedos con los que contamos. Hay alguna excepción notable como son la numeración babilónica que usaba 10 y 60 como bases y la numeración maya que usaba 20 y 5 aunque con alguna irregularidad.

Desde hace muchísimos años la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares etc. es decir de la misma forma que seguimos haciéndolo hoy. Sin embargo la forma de escribir los números ha sido muy diversa y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema eficaz que permitiese el cálculo.

Casi todos los sistemas utilizados representan con exactitud los números enteros, aunque en algunos pueden confundirse unos números con otros, pero muchos de ellos no son capaces de representar grandes cantidades, y otros requieren tal cantidad de símbolos que los hace poco prácticos.

Pero sobre todo no permiten en general efectuar operaciones tan sencillas como la multiplicación, requiriendo procedimientos muy complicados que sólo estaban al alcance de unos pocos iniciados. De hecho cuando se empezó a utilizar en Europa el sistema de numeración actual, los abaquistas, los profesionales del cálculo se opusieron con las más peregrinas razones, entre ellas la de que siendo el cálculo algo complicado en sí mismo, tendría que ser un método diabólico aquel que permitiese efectuar las operaciones de forma tan sencilla.

El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. Del origen indio del sistema hay pruebas documentales más que suficientes, entre ellas la opinión de Leonardo de Pisa (Fibonacci) que fue uno de los introductores del nuevo sistema en la Europa del siglo XIII. El gran mérito fue la introducción del concepto y símbolo del cero, lo que permite un sistema en el que sólo diez símbolos puedan representar cualquier número por grande que sea y simplificar la forma de efectuar las operaciones.

En síntesis, un sistema de numeración es un conjunto de símbolos que se usan de acuerdo con ciertas reglas o principios (aditivos, multiplicativos, repetitivos o posicionales), para asignarle numerales a las cantidades.

Responde lo siguiente de acuerdo a la lectura realizada.

1. ¿Cuál es la relación existente entre este fragmento histórico y el capítulo “El cuento de la cuenta” del libro Malditas Matemáticas?
2. Responde falso (F) o verdadero (V) a cada una de las siguientes afirmaciones y justifica cuando la respuesta sea falsa.

a. Los seres humanos siempre han usado los numerales: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9 ( )

b. La base más usada es la 10 ( )

c. La base de un sistema de numeración nos permite identificar niveles de agrupación ( )

d. Siempre ha sido necesario el uso de los números ( )

e. Los seres humanos NO necesitamos el número cero (0) ( )

f. El sistema de numeración decimal permite escribir números muy grandes ( )

g. Contar es un concepto importante en matemáticas y en la vida( )

h. Los numerales: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se los inventaron en China y Roma ( )
i. Un sistema de numeración tiene símbolos y reglas. ( )
j. Los dedos de las manos y pies son un sistema de numeración. ( )

3. ¿Cuáles son las características de un sistema de numeración?
4. ¿A qué se le llaman unidades, decenas, centenas…?
5. ¿En qué sistema de numeración usamos unidades, decenas, centenas, etc.?
6. Indaga sobre otros sistemas de numeración y compáralo con el sistema decimal de numeración, indicando las diferencias y semejanzas (si las hay).

- **Actividad No. 3 “Una difícil tarea”**

Con esta actividad se busca que indagar sobres los conceptos que tienen los estudiantes sobre los números primos.

Adaptación del Capítulo 4 ***El país de los Números*** *(Malditas matemáticas)*

Luego de haber pasado por un agujero de gusano, que resultó ser un pasadizo entre dos mundos paralelos, Lisa y el mago se encontraban en un hermoso jardín. Pasados unos minutos un personaje en forma de naipe pasó en frente de ellos, llevando un bote de pintura y una brocha. Lisa de inmediato recordó a *Alicia en el país de las maravillas* y pensó que se encontraba allí y por lo tanto el mago extraño que la acompañaba sería Lewis Carroll, mejor Charlie Dogson. El mago dijo que él no era Lewis Carroll, ni que ella era Alicia, aunque se pareciera mucho.

Los naipes eran el 2, 5 y 7 de picas, cada uno de ellos tenía un bote de pintura roja, rosa y amarilla, respectivamente. Estaban alterados pues debían cumplir una tarea que había puesto la reina de corazones y que no podían cumplir: Los naipes deberían pintar cada rosal con varios colores, varias rosas de cada color y el mismo número de cada color. Los naipes habían logrado el objetivo en un rosal con seis rosas, pero con el rosal de siete no se podía ni con el de cinco, pues solamente cumplían con dos de las tres condiciones: Si se pintan tres de rojo y cuatro de rosa, habrá varios colores y varios de cada color pero no el mismo número para cada color. Si pintamos cada una de un color, habrá varios colores, el mismo número de cada color pero no varias de cada color. Y si las pintamos todas del mismo color, habrá varias de cada color y el mismo número para cada color, pero no varios colores. Charlie les aconsejó que dejaran así, pues el 7 es un número primo, es decir que no es divisible en partes enteras iguales; se puede dividir en siete partes de una y en una sola parte de siete: los números primos sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad. Tras unos segundos apareció la Reina con su séquito, los naipes tomaron la siguiente forma para que les pasaran revista:

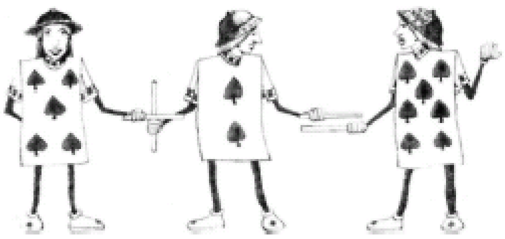


Figura 3: Forma matemática de los naipes al llegar la Reina

Luego de esto la reina cambió de aspecto, pues el rosal que tenía siete rosas no cumplía con las especificaciones que ella había dado, entonces Charlie le explicó el porqué de su blancura, aclarando que el 7 es un número primo y por lo tanto no puede cumplir las especificaciones dadas por la Reina.

A la Reina no le gustan los números primos. Charlie le dijo que no hay porque preocuparse, pues es más fácil encontrar un número compuesto que un número primo. Para demostrarlo el mago dijo que se pueden hacer listas de números compuestos tan largas como se quieran. Dicho esto la Reina le solicitó a Charlie que hiciera una lista de cien números compuestos consecutivos. Charlie tomó los números del 1 al 101 y los multiplicó, obteniendo 101!, llamó a este número N, y será divisible a 2,3,4…, 101 pues todos son factores de 101. Luego forma la sucesión N + 2, N +3, … N + 101. Como es divisible por 2, también lo será N + 2, como N es divisible por 3, también lo será N + 3,… por lo que se tendrá la serie de números: N + 2, N + 3,…, N + 101 que serán consecutivos y que entre ellos no hay ningún número primo.

Después de la explicación, Charlie se convierte en Joker y Lisa en su doncella. A Lisa no le gusta la idea así que se va, pero la Reina llama al '*cero'* y le pregunta por su arma (dos palos que forman una equis (X). Cuando llega cero los demás naipes se asustan, pues se pueden desaparecer. Charlie y Lisa se dirigen a un lugar seguidos por *cero*, este lugar tiene forma de laberinto y *cero* le tiene mucho miedo, tanto así que se desmaya y le permite a Charlie y a Lisa retomar la pregunta del disgusto de la Reina con los números primos. Charlie le dice que a la Reina que le desagradan debido a que no siguen ninguna regla. Por ejemplo los números pares van de dos en dos, los múltiplos de 3 van de 3 en 3, y así todos los números compuestos, es decir los que tienen más de dos divisores. Los primos, por el contrario, a veces aparecen muy juntos, como el 11 y el 13, o muy separados como se ha hecho ver con la lista pedido por la Reina. Por lo que no hay una regla o fórmula que nos permita obtener los números primos, en cambio los números compuestos sí. Los pares son de la forma 2n, los múltiplos de 3 son de la forma 3n. Lisa pregunta entonces si hay formas para obtener los números primos a lo que Charlie le responde que hay un método donde se hace uso de la **criba**.

Primera Sesión

Etapa inicial de lectura: Definir nociones sobre los números primos.

1. Escribe 10 números compuestos.
2. Escribe 10 números primos.
3. ¿10 es número primo? Justifica tu respuesta

Etapa intermedia de lectura: Reconocer la característica de un número primo**.**

4. Explica que quieren decir los naipes cuando dicen "*en cada rosal debe haber varias rosas de cada color, varios colores y el mismo número de cada color*" con tres ejemplos que se puedan realizar y tres ejemplos que no se puedan realizar. Dibuja cada ejemplo.
5. Explica el gráfico que tomaron los naipes al llegar la reina.

Etapa final de lectura: Registrar nociones sobre ser divisor de.

6. Escribe en cinco renglones que sabes de los números primos.
7. ¿Por qué al aparecer el cero (0) los naipes desaparecieron?
8. ¿Qué otro nombre le pondrías al capítulo del libro?
9. Explica qué crees que sea un divisor y un múltiplo.
10. ¿Cómo se llaman los números que tienen más de dos divisores?
11. ¿Cómo se llaman los números que tienen solamente dos divisores?

Segunda Sesión

En este apartado se abordan los conceptos de múltiplo y de divisor a través de la resolución de problemas cotidianos.

1. En una clase de 6º de Primaria hay más de 20 alumnos/as y menos de 30. Si se hacen grupos de 3 sobran 2, y si se hacen de 4 sobran 3. ¿Cuántos alumnos/as hay en la clase?

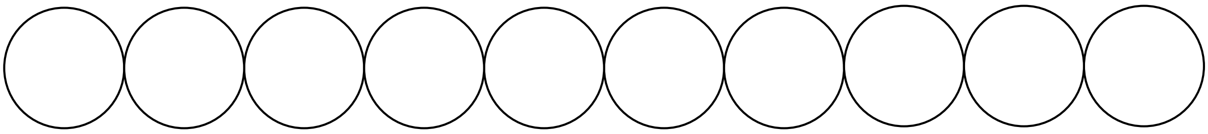
Para resolverlo:

La cantidad de estudiantes podría ser: 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29

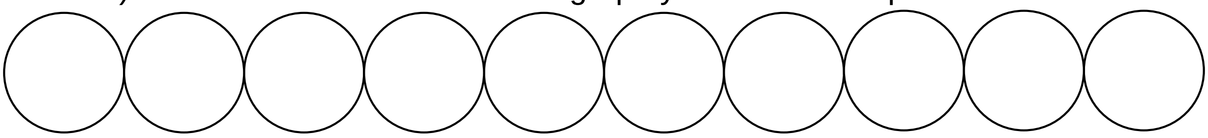
a) Calcula los múltiplos de 3 y de 4

b) Tacha los que no pueden ser, es decir, múltiplos de 3 y de 4.

c) Coloca 3 estudiantes en cada grupo y mira cuántos círculos necesitas:



d) Coloca 4 estudiantes en cada grupo y mira cuántos quedan.



e) Busca el número que cumple con la condición:

(Múltiplo de 3) + 2 = (Múltiplo de 4) + 3

2. La propuesta de evaluaciones para el segundo período en el colegio se plantean de la siguiente manera
   a. Las de matemáticas cada 15 días
   b. Las de ciencias sociales cada 6 días
   c. Las de español cada 5 días
   d. Las de ciencias naturales cada 10 días

Sabiendo que el día 30 de abril tuvieron evaluación de las 4 áreas:

a. ¿Cada Cuánto coinciden las evaluaciones de matemáticas y ciencias sociales?
b. ¿Cada cuánto coinciden las evaluaciones de matemáticas y de español?
c. ¿Cada cuánto coinciden las evaluaciones de español y de ciencias naturales?
d. ¿Cada cuánto coinciden las evaluaciones de ciencias sociales y español?
e. ¿Cada cuánto coinciden todas las pruebas?

Escribe TODO el proceso que llevaste acabo para dar solución a las preguntas planteadas.

3. Andrés, el bibliotecario, está acomodando libros en las mesas para realizar un trabajo con el grado sexto. Tiene 42 libros de aventuras y 28 libros de ciencias. Quiere acomodarlos de tal manera que haya la misma cantidad de libros de aventuras y la misma cantidad de libros de ciencias en todas las mesas, y usando la mayor cantidad de mesas posibles.

a. ¿Cuántos libros de cada clase pondrá en cada mesa?

b. ¿Cuántas mesas usará?

Escribe TODO el proceso que llevaste acabo para dar solución a las preguntas planteadas.

4. Reúnete con dos compañeros más y compara las respuestas obtenidas teniendo en cuenta las siguientes preguntas:
a. ¿Hicieron el mismo proceso? Si son diferentes en que se parecen y en que se diferencian los procesos.
b. ¿Obtuvieron los mismos resultados?
5. El profesor de educación física está realizando pruebas. Andrés, Camilo y Juan están presentando la prueba que consiste en: uno da vueltas caminando, otro, trotando y otro, corriendo. Andrés tarda 10 minutos en dar una vuelta, Camilo tarda 6 minutos y Julián, 2 minutos. Comenzaron a la misma hora y en el mismo lugar.

Si la prueba empezó a las 10:30 am, ¿cada cuánto tiempo se vuelven a encontrar en el punto de partida Andrés y Julián? ¿Andrés y Camilo? ¿Camilo y Julián? ¿Andrés, Camilo y Julián?

6. Sabiendo que los huevos se pueden comprar por docenas
a. ¿Es posible comprar 56 huevos envasados en docenas completas? Justifica tu respuesta.
b. ¿Y 132 huevos?

7. Con tu grupo realiza una presentación donde le expliques a tus compañeros como obtener los resultados a las situaciones planteadas.

- **Actividad No. 4 “Clasificando Números”**

Con esta actividad se pretende que los estudiantes diferencien dos categorías entre los números naturales: compuestos y primos.

Adaptación del Capítulo 5 ***La criba de Eratóstenes*** *(Malditas matemáticas)*

Lisa le pregunta a Charlie ¿Cómo se criban los números? Charlie le dice que igual como lo hizo Eratóstenes en el siglo III a. C. Para ello se escriben los números del 1 al 100, en 10 columnas y 10 filas. Con la lista lo que se hace es empezar a eliminar números, dejando encerrados por un círculo aquellos que sean primos, teniendo en cuenta que el 1, es un número singular, y por lo tanto no puede ser primo. Se inicia con 2, se encierra en un círculo y se tachan todos sus múltiplos. ¡La mitad de los números! Comenta Lisa. Se hace lo mismo con el 3. Para el cuatro no se hace nada, pues ya se ha eliminado porque 4 es múltiplo de 2. El cinco se encierra en un círculo y se tachan los múltiplos de 5, que van de cinco en cinco, pero ya se han tachado la mitad, que son los terminados en 0, por lo tanto solo hace falta tachar los números terminados en cinco. Los de 6, no es necesario pues 6 es múltiplo de 3 y de 2, es más se ha tachado doble vez comentó Lisa. El último que se hace es con el 7, pues 100 = 10 X 10 y cualquier número menor que 100 que tenga 11 como divisor tendrá otro divisor menor a 10 por lo que los múltiplos de 11 ya se han tachado, quedando al descubierto los primeros 25 veinticinco primeros números primos. De acuerdo al dibujo resultante Charlie hace algunas observaciones.

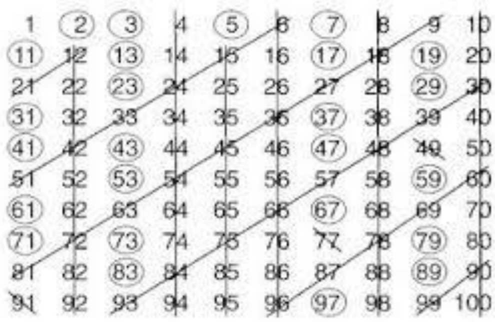


Figura 4: Criba de Eratóstenes

Los números compuestos tienen un orden, por ejemplo las líneas verticales y oblicuas representan las tablas de multiplicar, las primeras muestran las tablas del 2, 5 y 10, las segundas las del 3 y la de 9. A Lisa no le gustan las tablas de multiplicar, pero si las sumas. Charlie paró sus observaciones en ese punto; en seguida le mostró que la multiplicación tiene mucho que ver con las sumas, pues las multiplicaciones son sumas, por lo que no le pueden agradar unas y las otras no. Para explicárselo mejor hace la siguiente pregunta ¿Qué significa 3X4? Rápidamente Lisa contesta que 12, pero lo que busca Charlie es que Lisa se dé cuenta que 3X4 = 4 + 4 + 4, es decir tres veces cuatro, evidenciando además que es una suma muy sencilla debido a que los sumandos son iguales.

Luego de este comentario, se despierta cero y se desarrolla una conversación que lleva a mostrarle a Lisa los números negativos a través de la comparación entre tener manzanas y deber manzanas, ya que cero se ponía de pie antes de ser menos que nada. Charlie explica entonces que deber dos manzanas es menos que nada, por lo tanto nada es mejor que deber dos manzanas y por esta razón existen los números negativos. Ocurrido esto apareció de la nada un conejo blanco y despertó en el interés de Charlie y de Lisa.

Primera Sesión

Etapa inicial de lectura: Identificar dificultades en el proceso de multiplicación.

1. ¿Cómo hallarías los primeros 10 números primos? Describe el proceso que utilizarías para explicárselo a un compañero.
2. Explica el proceso que usas para multiplicar.

Etapa intermedia de lectura: Definir aspectos que implican el reconocimiento de un número primo.

3. ¿Por qué el número uno (1) es singular?
4. Explica con tus palabras por qué la multiplicación se puede ver como una suma.

Etapa final de lectura: Explorar métodos para obtener el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

5. Explica cómo se puede obtener los primeros números primos, escribe la lista.
6. Indaga sobre Eratóstenes y realiza una ficha bibliográfica.
7. ¿Qué relación hay entre la suma y la multiplicación?
8. ¿Cuáles son los múltiplos comunes de 2 y 3, 3 y 4; 7 y 9; 8 y 6; 3 y 10 de acuerdo a la criba de Eratóstenes?

9. ¿Cómo sabes cuáles son los divisores de 60, 45, 98, 100 y 25 de acuerdo con la criba de Eratóstenes?

Segunda Sesión

Esta parte de la actividad está orientada al uso de los algoritmos, su eficiencia y su importancia en la resolución de problemas. Para ellos se plantean diferentes procesos, además de una contextualización para algunos de ellos.

1. Los estudiantes deben buscar la siguiente información sobre Rusia, China, Egipto, India, Italia y Colombia:
a. Ubicación geográfica
b. Símbolos patrios
c. Hechos históricos y culturales más relevantes
d. Matemáticos más relevantes durante la historia del país

Con estos datos el docente organiza el salón en cinco grupos, a cada uno se les asigna, aleatoriamente uno de estos países para que se pongan de acuerdo y desarrollen una presentación del país frente a los demás compañeros.

Después de la presentación y el debate el docente informa que así como nosotros tenemos un algoritmo para multiplicar, algunos de esos países desarrollaron otros métodos para hacer una multiplicación y por lo tanto se les pide a los estudiantes que traten de explicar, primero individualmente cada uno de los siguientes métodos y que luego se reúnan de acuerdo al país asignado inicialmente para que puedan dar una explicación grupal del algoritmo y tratar de 'definir' qué algoritmo se llevó a cabo en cada país.

2. Verifica y explica cómo se realizaron las siguientes multiplicaciones

	5	4	
	6	9	
3	0	3	6
	2	4	
	4	5	
3	7	2	6

48 X 25	
48	25
24	50
12	100
6	200
3	**400**
1	**800**

69 X 37	
1	**37**
2	74
4	**148**
8	296
16	592
32	1184

321 X 456				
	3	2	1	x
	1 / 2	0 / 8	0 / 4	4
1	1 / 5	1 / 0	0 / 5	5
4	1 / 8	1 / 2	0 / 6	6
6 / 3	7	6		=
146376				

- ¿Cuál de los planteamientos es el más sencillo?
- ¿Por qué funcionan estos algoritmos?
- ¿Qué propiedades de los números crees que se están usando?

3. Resuelve las siguientes operaciones

Ejemplo	
47 X 2	
40	80
7	14
	94

ROJO					
64 X 5		69 X 7		96 X 3	

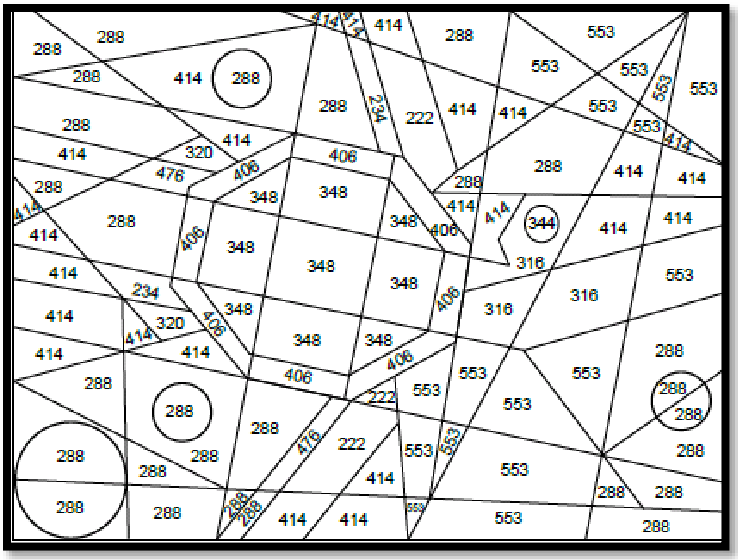
AMARILLO					
37 X 6		86 X 4		79 X 7	

AZUL			
69 X 6		58 X 7	

NARANJA			
58 X 6		79 X 4	

NEGRO	
47 X 2	

Colorea el dibujo según el resultado obtenido de acuerdo al siguiente ejemplo.



4. Explica por qué también funciona esa manera de multiplicar.
5. De todos los métodos mostrados y el habitual, ¿Cuál prefieres? ¿Por qué ese y no otro?
6. Teniendo en cuenta que el producto de números pares es un número ***par***, el producto de números impares es **impar** y que el producto entre un número par y uno impar es ***par*****,** escribe una tabla donde se diferencien los productos anteriores de acuerdo a esta condición.

4.3. Reflexiones

A partir de la elaboración de cada una de las actividades de la propuesta de aula se evidencia la necesidad de proponer situaciones alternativas para los estudiantes (por ejemplo: realizar dibujos de lo leído, reescribir los diálogos, realizar interpretaciones y exposiciones) de tal manera que ellos, además de aprender matemáticas comprendan otros aspectos que están relacionados directamente con la formación propia de la persona.

Uno de los aspectos más relevantes que los docentes debemos sugerir es el de la lectura, en nuestro campo laboral o académico y recordar que es un hábito que requiere dedicación, compromiso, auto-reflexión y sobre todo un espíritu crítico para poder obtener el mayor provecho de las lecturas que realiza. Además de estar abierto a nuevas formas de enseñanza de la matemática que permita incluir elementos que antes se habían considerado secundarios en clase como es la lectura y la escritura.

El cambio en la metodología es una característica particular de cada docente, que crea y desarrolla solamente a través del tiempo. Esto le permite al docente reflexionar sobre su propia práctica. Lo más relevante de este trabajo, es incluir algo tan cercano a los estudiantes como lo es un cuento o una historia fantástica para involucrarlos en el aprendizaje de las matemáticas, además de permitir un desarrollo de habilidades matemáticas necesarias en el proceso de aprendizaje como lo es la escritura en lenguaje matemático.

La lectura es una herramienta que requiere ser más utilizada en las clases de ciencias, en particular en matemáticas; por tal razón espero que este trabajo motive a más colegas para emprender el camino de la lectura y escritura en ciencias como una forma de acercar a los estudiantes a nociones más profundas sobre las matemáticas.

El desarrollo de cada actividad requiere de compromiso y dedicación, además de una apropiación, en primer lugar de los conceptos elementales de la teoría de números; luego la lectura de los capítulos de los libros para poder realizar un proceso adecuado dentro del aula de clase; por otro lado el docente que acepte el reto debe reconocer las habilidades que manifiestan los y las estudiantes durante la resolución de cada actividad.

La propuesta permite abrir nuevos espacios de evaluación del aprendizaje, involucrando varios aspectos como por ejemplo el aprendizaje individual y cooperativo, la participación activa, el reconocimiento de habilidades de lectura y de escritura, al igual que nuevas formas de comprensión en matemática. Todos estos aspectos ayudan en la formación de una persona, siendo esta el objetivo final de la educación.

Bibliografía

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. & Faulconer, J. (2010). Assesing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Disponible en: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/adugyamfi.pdf

Barton, M. L., Heidema, C. y Jordan, D. (2002). Teaching Reading in Mathematics and Science. Revista Educational Leadership. Vol. 60 (3). Pp. 24 – 29. Disponible en https://www.hol.edu/syllabusuploads/teachingreadinginmathandscience.pdf

Campbell, A., Schlumberger, A & Pate, L. A. (1997). Promoting Reading Strategies for Developmental Mathematics Textbooks. Selected Conference Papers, National Association for Developmental Association, Vole 3, pp.4-6. Disponible en:

http://sharepoint.chiles.leon.k12.fl.us/lcsreadingstrategies/Reading%20Strategies%20for%20Math%20Teachers/Reading%20Strategies%20for%20Math%20Textbooks.pdf

D'Amore, (2006). Matemática, didáctica de la matemática y lenguaje. En Didáctica de las Matemáticas (pp. 251 – 292). Bogotá: Magisterio.

Else, M. (2008) Reading as a Learning strategy for Mathematics. Action Research Project Report: University of Nebraska – Lincoln

Emig, J. (1977). Writing as a mode of learning. *College composition and Comunication,* V. 28, pp. 122 – 128. Disponible en

http://api.ning.com/files/dyd9zNIe01SZCip1A*laTe8YCSSs3*cbfGntdo*3ytB9EZwOTyj430RvsQMEemRnQuZ4xeLab1IyZWizRYiNuR2f2Yh7ZfPB/WritingasaModeofLearning.pdf

Frabetti, C. (2000). Malditas matemáticas, Alicia en el país de los números. Madrid: Alfaguara.

Freitag, M. (1997). Reading and Writing in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator*. V. 8 (1). Pp. 16 – 21. Disponible en

http://math.coe.uga.edu/tme/issues/v08n1/3freitag.pdf

Martins, I. (2006). Discursos de professores de ciências sobre leitura. Revista Investigações em Ensino de Ciências. Vol. VII(2), pp. 121 – 151.

Massa, M y Stipcich, M. (1999). ¿Qué esperamos los docentes al seleccionar un texto para nuestros alumnos: comprensión o legibilidad?. Revista Investigações em Ensino de Ciências. Vol. IV(3), pp. 183-195.

MEN (1998) Lineamientos Curriculares de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Ed. Magisterio.

MEN (2003). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y competencias ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

MEN (2007). Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Disponible en http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/99198-Pensamientomate_bja.pdf

Moran. E. (2012). Estrategias de lectura para la comprensión de textos matemáticos: Un estudio en educación secundaria. En el marco del Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la Cultura / IV Congreso Leer.es.

Moreira, M. A. (2005) Aprendizaje Significativo Crítico. España: Indivisa, pp. 83 – 102. Disponible en http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/771/77100606.pdf

OCDE (2006). PISA, Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.

Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura Disponible en http://www.tendenciaspedagogicas.com/articulos/1998_e2_22.pdf

Schell, V. (1982). Learnings partners: Reading and mathematics. *The Reading Teacher.* 35, 5 p. 544-548.

Nombre	**Santos Baron Edimer**
Correo	esantosb@unal.edu.co
Dirección	Carrera 72C 55 – 13 Sur, Bogotá (Colombia)
Teléfono	057 1 7194073
Celular	311 466 70 19

Profesor Titular de la Secretaría de Educación Distrital en el **Colegio El Tesoro de la Cumbre IED** de la ciudad de Bogotá (Colombia).
Magister en Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional de Colombia (2014).
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (2010)

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 70-87

Análisis de las actividades de estadística propuestas en textos escolares de primaria

Audy Salcedo

Fecha de recepción: 13/11/2014
Fecha de aceptación: 05/12/2015

Resumen	El objetivo de este trabajo es analizar las actividades de estadística propuestas para el estudiante en los libros de matemática para la educación primaria de la Colección Bicentenario. Se analizan las 46 actividades propuestas a los estudiantes en todos libros de la Colección en el tema de estadística; primero por su relación con el contenido estadístico y luego por el nivel de exigencia cognitiva, según el modelo de Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), ajustado a contenidos de estadística. El análisis indica que 13 de las actividades no estaban relacionadas con el contenido estadístico y 12 no son actividades. De las 21 actividades restantes, 17 pertenecen a las categorías de baja demanda cognitiva del modelo utilizado. **Palabras clave**: estadística; probabilidad; actividades para el estudiante; exigencias cognitivas, libros de textos de matemática.
Abstract	The aim of this paper is to analyze statistical activities proposed to the student on the Bicentennial Collection math's books for primary education. 46 activities are offered to the students in this collection of books with statistics as the subject, first by its relation with the statistical content and then for the level of cognitive demand; according to the Stein's model, Smith, Henningsen, and Silver (2000), adjusted to statistical content. The analysis shows that 13 activities weren't related to the statistical content and 12 are not activities. Finally, the remaining 21 activities, 17 fall into the categories of low cognitive demand according to the model used. **Keywords**: statistics; probability; activities for the student; cognitive demands, Mathematics textbooks.
Resumo	O objetivo deste trabalho é analisar as atividades de estatística propostas nos livros de matemática para a educação Primária da Coleção Bicentenario. Analisam-se as 46 atividades propostas aos estudantes em todos os livros da coleção no tema de estatística, primeiro quanto à sua relação com o conteúdo estatístico e depois quanto ao nível de exigência cognitiva; segundo o modelo de Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000), ajustada a conteúdos de estatística. A análise indica que 13 das atividades não estão relacionadas com o conteúdo estatístico e 12 não são atividades. Das 21 atividades restantes, 17 pertencem às categorias de baixo nível cognitivo do modelo utilizado. **Palavras-chave:** estatística; probabilidade; atividades para o estudante; exigências cognitivas, livro de textos de Matemática.

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es analizar las actividades de estadística propuestas para el estudiante en los libros de matemática para la educación Primaria de la Colección Bicentenario del Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela.

El texto escolar es uno de recursos más utilizados en la enseñanza de la matemática en las instituciones escolares de la mayoría de los países. Para muchos docentes, el texto escolar es la representación del currículum en el aula; es el saber docto transformado en saber a enseñar, de allí que en muchas ocasiones es quien determina el currículo a ser enseñado, el currículo real. En sus páginas, se encuentran las nociones teóricas que se van a explicar y cómo se debe realizar esa explicación en el aula. Sus ejemplos son referencia sobre posibles aplicaciones de los conceptos estudiados; las actividades propuestas para el estudiante brindan la oportunidad para lograr destrezas y consolidar conocimientos.

Investigaciones sobre las características de los textos escolares de matemática han evidenciado que las actividades para los estudiantes o tareas, como también se les denomina, son uno de los elementos invariantes de esos textos (Monterrubio y Ortega, 2012). Esas actividades pueden ser ejercicios, problemas, propuestas de investigación, u otras sugerencias, pero en todas se busca brindar al estudiante un espacio para su trabajo sobre los contenidos estudiados o por estudiar. Grouws, Smith y Sztajn (2004) señalan que en la clase de matemática se invierte un tiempo importante para que los estudiantes realicen actividades, generalmente, tomadas de los libros de texto.

En este trabajo, se presenta el análisis de las actividades de estadística propuestas para el estudiante en los libros de matemática para la educación primaria de la Colección Bicentenario del Ministerio del Poder Popular para la Educación. La educación primaria venezolana comprende seis años, lo más frecuente es que se curse desde los seis hasta los doce años de edad, y conduce a la obtención del certificado de educación primaria. La Colección Bicentenario es una serie de textos escolares para la educación primaria y media; diseñados, producidos, publicados y distribuidos (de forma gratuita) por el Ministerio del Poder Popular para la Educación de Venezuela. En el caso de la educación primaria, se produjeron libros para las áreas de estudio de Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Matemáticas y Lenguaje. En este trabajo, se analizan todas las unidades dedicadas al tema de estadística de los libros de matemática de primaria (1ro a 6to grado), con particular énfasis en las actividades propuestas a los estudiantes y a su nivel de exigencia cognitiva, con una adaptación de estadística del modelo de Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000). El análisis de las actividades propuestas en los libros de matemática, desde la perspectiva de las exigencias cognitivas, puede ayudar a conocer el tipo y nivel de aprendizaje que auspicia el texto analizado.

La importancia de este tipo de trabajo se encuentra en la vigencia del texto escolar como material curricular, particularmente en matemática donde ejerce una importante influencia, y llega, en ocasiones, a determinar lo que se enseña en el aula; por lo tanto, es un recurso que impacta las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes.

2. Las actividades en los textos escolares de matemática

Las actividades propuestas a los estudiantes en las clases de matemática tienen un impacto significativo en el tipo de pensamiento que se requiere o exige a los estudiantes, su nivel de participación y su capacidad de construir comprensión conceptual de las ideas matemáticas (Henningsen y Stein, 1997).

Las actividades para el estudiante son un elemento característico del texto escolar de matemática. En ocasiones, se utilizan para que el estudiante evoque definiciones, establezca diferencias entre conceptos o verifique su destreza para desarrollar procedimientos, pero también se utilizan para promover la síntesis conceptual y procedimental, la aplicación de la matemática en otras áreas y profundizar los conocimientos. Pueden presentarse al comienzo del libro, en medio o al final; en el primer caso, suelen usarse para motivar el estudio del tema o como un problema del cual se deriven los conceptos y procedimientos a estudiar. Cuando se encuentran en el medio, se utilizan para practicar algoritmos, revisar conceptos y procedimientos previamente estudiados, aunque también pueden usarse para plantear situaciones nuevas de aplicación o presentar problemas, y cuando están al final, tienden a ser actividades de recapitulación, donde el estudiante pone a prueba lo estudiado en toda la unidad o para que enfrente situaciones de aplicación en nuevos contextos. Entonces, las actividades en los textos escolares de matemática pueden ser utilizadas para que el estudiante evoque una definición o una regla, realice procesos rutinarios, comprenda procedimientos, consolide conocimientos o estimule el desarrollo de habilidades para la investigación. Hsu (2013) señala que la enseñanza de la matemática en el aula se centra, fundamentalmente, en las tareas y que su ejecución normalmente implica la interacción profesor – alumno con el fin de facilitar el aprendizaje. El texto escolar de matemática suele ser el principal recurso del profesor al momento de plantear actividades para los estudiantes, por lo que analizar las actividades que contienen los textos escolares parece una forma adecuada de aproximarse al tipo de actividades que pueden plantear los profesores en el aula.

Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000) proponen un modelo para clasificar las actividades propuestas al estudiante en matemática. El modelo centra su atención en la *demanda cognitiva*, se entiende por esta el nivel de pensamiento que la actividad exige al estudiante para desarrollarla y resolverla con éxito. Los autores definen cuatro niveles de demanda cognitiva de las actividades; sin embargo, para su aplicación al presente trabajo, se han realizado algunos ajustes en el modelo para circunscribirlo al caso de la estadística:

Tareas de memorización. Actividades para reproducir reglas, definiciones, fórmulas sin que implique la comprensión de los conceptos estadísticos involucrados. Resolver la actividad solo necesita del recuerdo de un conocimiento estadístico previamente estudiado, no la comprensión de un procedimiento o de los conceptos. La interpretación de gráficos se remite a la lectura literal del gráfico: dónde hay más, dónde hay menos. No se trata de una real interpretación. La actividad es diáfana y directa, no hay duda en lo que se debe realizar y cómo hacerlo.

Tareas de procedimiento sin conexión. Son actividades algorítmicas, buscan el uso de procesos rutinarios. La utilización del procedimiento estadístico es evidente, descrito por la instrucción de la actividad, no hay duda sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo. Exige una limitada demanda cognitiva para completar con éxito la actividad. Se utilizan los instrumentos de la estadística sin mayor comprensión de los conceptos. Aunque utilice el lenguaje estadístico, no lo hace con propiedad; no hay conexión con los conceptos estadísticos o significados que subyacen en el procedimiento. No se necesitan explicaciones sobre el procedimiento que se utiliza para dar respuesta a la actividad. Se centran en la producción de respuestas correctas en lugar del desarrollo de la comprensión de los conceptos estadísticos. En la interpretación de gráficos, se compara los datos presentes en el gráfico y elabora conclusiones simples, directas.

Tareas de procedimiento con conexión. Exigen la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de la comprensión de ideas y conceptos estadísticos. Los enunciados sugieren, explícita o implícitamente, el procedimiento a seguir, pero son procedimientos generales que requiere cerrar las conexiones con los conceptos estadísticos. El estudiante debe utilizar las ideas y conceptos estadísticos para determinar cuál procedimiento se ajusta mejor a la situación. Por lo general, están representados en varias formas, como diagramas, procedimientos, símbolos y situaciones problemáticas, ya que se considera que las conexiones entre varias representaciones ayudan a desarrollar el significado. Requieren de cierto grado de esfuerzo cognitivo. Las actividades se enmarcan en un contexto particular donde el estudiante debe utilizar las ideas estadísticas y desarrollar la comprensión. La interpretación de gráficos exige la extracción de información a partir de los datos en su contexto.

Tareas para hacer estadística. Son actividades que requieren de un pensamiento complejo y no algorítmico. La actividad exige comprender los conceptos, los procedimientos y las relaciones estadísticas. Las instrucciones de la actividad no sugieren explícitamente la vía por la cual se puede encontrar la solución, por lo cual exige del estudiante explorar y comprender la naturaleza de los conceptos estadísticos, procesos o relaciones. Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. En el trabajo con gráficos, el estudiante debe hacer inferencia, a partir de los datos y el contexto, y analizarlo de forma crítica.

Stein y Smith (1998) sostienen que las actividades que realiza el estudiante en su aprendizaje de la matemática no sólo determinan lo qué aprenden, sino también cómo lo aprende, pero además influye en cómo llegan a pensar, desarrollar, utilizar y dar sentido a la matemática. Esto sugiere que las actividades planteadas al estudiante tienen influencia en el aprendizaje que pueden lograr de la estadística; en consecuencia, tiene influencia en el tipo de formación estadística que se desea para el ciudadano. De allí la importancia de examinar la demanda cognitiva de esas actividades, particularmente, las que se encuentran en los textos escolares.

3. La investigación

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que se realizan sobre los textos escolares de matemática. En este caso, se presenta un estudio de tipo exploratorio, el cual permite una aproximación al problema del análisis textos escolares de matemática y, en particular, de las actividades de estadística propuestas para los estudiantes de primaria en los textos de la Colección Bicentenario (CB) del Ministerio del Poder Popular para la Educación. Se trabaja el tema de estadística por ser considerado actualmente uno contenidos más importantes en la escuela primaria, por su aplicabilidad y contribución para que los ciudadanos sean capaces de razonar de manera efectiva con la evidencia presentada como números (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008). La escogencia de los textos escolares de la Colección Bicentenario se debe a que, después de mucho tiempo, en 2011, el Estado venezolano decidió producir, publicar y distribuir, de forma gratuita, textos escolares para los estudiantes de educación primaria y media.

Se consideraron todas las secciones de los textos que podrían contener actividades propuestas para los estudiantes en los seis libros de educación primaria de la CB y se realizaron tres clasificaciones. La primera, para establecer la vinculación de las actividades con los contenidos de estadística estudiados en las unidades donde estas se encuentran, su vinculación con la estadística. Esto se debe a que la revisión inicial develó la presencia de actividades o información que no se relacionaban con el tema que se trata en la unidad. Se establecieron dos categorías:

a) Relacionadas, aquí se encuentran aquellas actividades que están vinculadas con los contenidos de estadística estudiados en la unidad. También se incluyen actividades vinculadas con estadística que se hayan estudiado en años anteriores. Por ejemplo: *¿Puedes hacer una actividad como las desarrolladas en clase en donde preguntes a tus compañeros de primer grado cuál es su comida favorita? Ordena y representa la información que obtuviste.* Esta actividad se encuentra en segundo grado, página 157, donde se trata la construcción de gráficos.

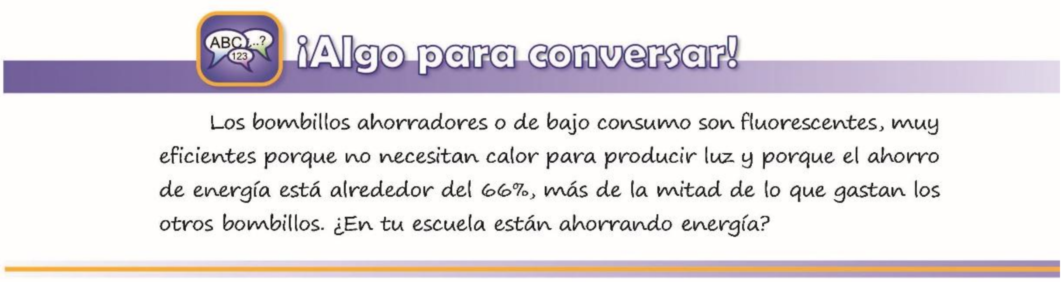
b) No relacionadas, son aquellas actividades que no tienen ninguna vinculación con contenidos estadísticos estudiados en la unidad o en grados anteriores. Por ejemplo, en la página 163 de cuarto grado se indica: *Escribe un cuento donde los personajes están cuidando la naturaleza y sus recursos naturales no solo para el presente, sino también para el futuro. No olvides colocarles imágenes y un consejo para quien lo lea.* Si bien se trata de una actividad que estimula la creatividad del niño y lo anima a escribir, no se trata de una actividad relacionada con temas de estadística.

La segunda clasificación se realizó para identificar si las actividades que deberían ser desarrolladas por el estudiante o constituían información relacionada con el tema estudiado. La tercera clasificación se efectuó exclusivamente con las actividades relacionadas con el contenido estadístico, con el propósito de conocer su nivel de exigencia cognitiva. Para realizar esta clasificación, se utilizó el modelo de tareas de matemática propuesto por Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), con algunos ajustes para adaptarlo a la estadística. Cada actividad fue clasificada de forma individual según el modelo seleccionado, pero con aquellas que tenían una instrucción base y varias preguntas se procedió de forma distinta. En principio se le consideraban por separado, estableciendo el nivel de exigencia cognitiva para cada subparte, pero al final se le colocaba un único nivel de demanda cognitiva, el correspondiente a la actividad de mayor exigencia.

Para realizar la clasificación de las actividades, se les proporcionó a tres profesores de estadística las 46 actividades propuestas para los estudiantes, una copia del libro y las definiciones utilizadas para la clasificación. Los profesores colaboradores trabajan en la asignatura *Estadística aplicada a la educación*, con una experiencia mínima de 5 años dictando la asignatura para la formación de futuros maestros de primaria. Los docentes colaboradores realizaron de forma individual su propia clasificación de las actividades, luego se compararon las clasificaciones. En relación con la "vinculación de las actividades con el contenido", se encontró que 33 actividades fueron clasificadas de forma semejante por los tres docentes colaboradores y en las 13 restantes hubo acuerdo en dos de los tres docentes. Respecto al "nivel de exigencia cognitiva", los tres docentes colaboradores clasificaron de la misma forma a 31 actividades y en las 15 restantes hubo acuerdo entre dos de los docentes. Aunque se consideraba que la información recolectada permitía generar una única clasificación (nunca hubo desacuerdo de los tres docentes en ninguna de las actividades), se realizó una reunión con los profesores colaboradores para discutir las divergencias y lograr acuerdos para la clasificación definitiva.

4. Resultados y discusión

Se examinaron las seis unidades dedicadas a la estadística en los seis textos escolares de matemática de la CB, una unidad para cada grado. Los textos escolares no tienen introducción o presentación, así como tampoco tienen sugerencias para los maestros, por tanto, se puede suponer que se trata de un libro para uso del estudiante. El número de páginas por unidad varía de 6 a 10. Las unidades siempre están identificadas con un nombre, el cual está asociado a un tema donde se enmarcan las explicaciones de los contenidos matemáticos, como un recurso para darle un contexto a ese contenido. Por ejemplo, la unidad de Estadística de cuarto grado se denomina *¡No agotemos los recursos naturales!,* las explicaciones y actividades se enmarcan en temas como los recursos naturales, el desarrollo sostenible y el ahorro de energía, tal como se puede apreciar en el siguiente ilustración.



¡Algo para conversar!

Los bombillos ahorradores o de bajo consumo son fluorescentes, muy eficientes porque no necesitan calor para producir luz y porque el ahorro de energía está alrededor del 66%, más de la mitad de lo que gastan los otros bombillos. ¿En tu escuela están ahorrando energía?

Figura 1. Uso bombillos ahorradores (4to grado, pág. 161)

Los textos escolares de matemática de la CB presentan a los estudiantes cuatro secciones identificadas con un nombre: *¡Algo para conversar!*, *¡Algo para pensar!*, *¡Algo para investigar!*, *¡Algo para conocer!* La sección *¡Algo para conversar!* promueve el compartir y la reflexión grupal; *¡Algo para pensar!* propicia la reflexión personal; *¡Algo para investigar!* intenta guiar a los estudiantes hacia la búsqueda del conocimiento; y *¡Algo para conocer!* relaciona a los estudiantes con hechos importantes de Venezuela y Latinoamérica (MPPE, 2011). En este trabajo, las secciones antes nombradas se denominan *Actividades Complementarias*, como una forma de identificarlas de manera global. En los libros, también se encuentran actividades identificadas con el dibujo de un lápiz; son ejercicios, en el sentido clásico de los libros de matemática; tareas, que debe realizar el estudiante sobre la base de lo estudiado en la unidad. Para efectos de este trabajo, las actividades de esa sección se denominarán *Ejercicios*, única y exclusivamente para hacer más fácil su identificación.

En total se examinó el contenido de todas las secciones que pertenecen a las unidades de estadística, el siguiente cuadro muestra su distribución por sección. Aunque por su definición, la sección *¡Algo para conocer!* se supone que no contiene actividades para el estudiante, fue incluida en el cuadro para dar una mejor visión del contenido y la estructuración del libro.

Sección	Frecuencia
¡Algo para conversar!	10

¡Algo para pensar!	2
¡Algo para investigar!	8
¡Algo para conocer!	17
Ejercicios	9
Total	46

Tabla 1. Actividades de estadística para estudiantes clasificadas por sección

Llama la atención el número de ejercicios (9) que se encuentran en las seis unidades de estadística de toda la primaria. En promedio, se encontrarían menos de dos ejercicios por unidad, lo cual puede considerarse un número bajo, desde la perspectiva clásica de los libros de matemática, donde las actividades para los estudiantes ocupan un lugar preponderante y se valora la realización de una alta cantidad de ejercicios. Ese promedio aumenta a casi ocho ejercicios por unidad al considerar las 37 *Actividades Complementarias*, el cual es un número de actividades por unidad que da mayores oportunidades para que el estudiante pueda poner a prueba los contenidos estudiados y profundizar en el conocimiento. Puede suponerse que los autores optaron por colocar mayor énfasis en esas secciones al momento de colocar las actividades de los estudiantes. No obstante, es necesario examinar la relación de esas actividades con el contenido estudiado y determinar si son actividades propiamente dichas o si solo contienen información.

Las *Actividades Complementarias* que conforman las secciones *¡Algo para conversar!, ¡Algo para pensar!, ¡Algo para investigar!, ¡Algo para conocer!* se clasificaron de acuerdo con su vinculación con los temas o contenidos matemáticos, estudiados o no, en las unidades que conforman el libro. El siguiente cuadro muestra los resultados de esa clasificación:

Sección	Relacionada	No relacionada
¡Algo para conversar!	4	6
¡Algo para pensar!	1	1
¡Algo para investigar!	6	2
¡Algo para conocer!	13	4
Total	24	13

Tabla 2. Actividades clasificadas según su vinculación con los contenidos de estadística estudiados

La mayoría de la *Actividades Complementarias* fueron calificadas como relacionadas con el tema de estadística; no obstante, se tiene un número significativo de Actividades Complementarias que no tiene vinculación con la estadística, que no favorecen el estudio directo de los contenidos de la asignatura y que en su mayoría ofrece información sobre actividades que desarrolla el gobierno venezolano. Ejemplos de las actividades clasificadas son:

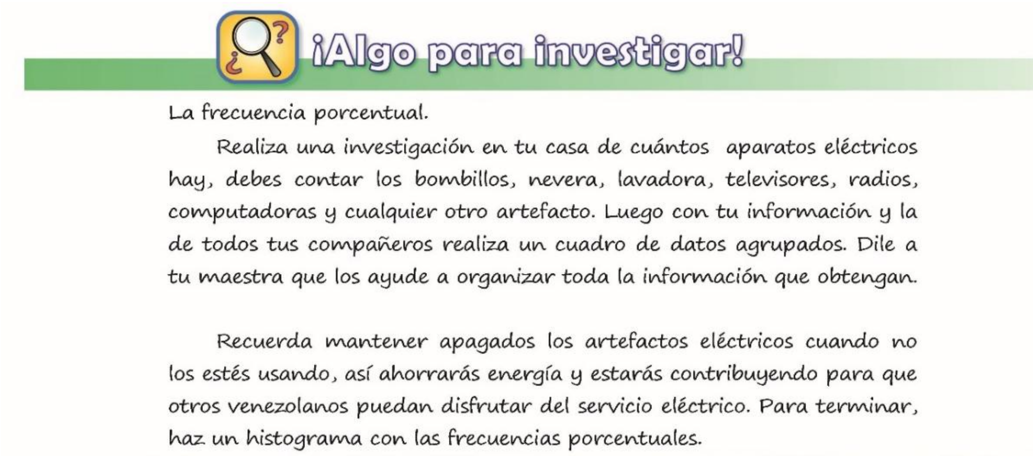


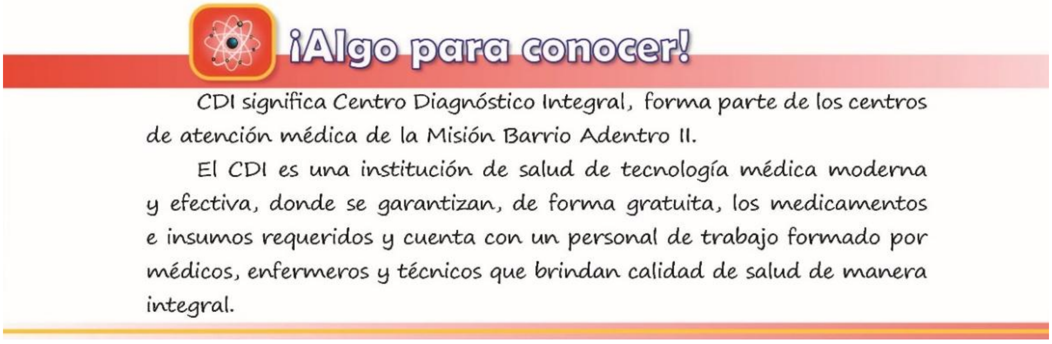
Figura 2. Ejemplo de actividad relacionada con el tema de estadística (5to grado, pág. 165)

Figura 3. Ejemplo de actividad no relacionada con el tema de estadística. (3er grado, pág. 165)

Al examinar la sección *¡Algo para conocer!* se encontró que una de ellas no se corresponde con la definición de la sección, información de hechos sobre Venezuela y Latinoamérica, sino que presentan indicaciones para que el estudiante desarrolle un trabajo. Por ser considerada una actividad para el estudiante, se incluyó en el análisis.

Figura 4. Actividad relacionada con el tema de estadística ubicada en la sección ¡Algo para conocer! (5to grado, pág. 165)

Obsérvese que no se presenta una información, sino se le indica al niño que discuta con sus compañeros de clase y su maestra el orden correcto de realizar las operaciones aritméticas que involucra el cálculo de la frecuencia relativa. Si bien el contenido principal de esta actividad está relacionado con el orden de prioridad de las operaciones de aritmética, también es cierto, que ese orden es fundamental para realizar el cálculo correcto de la frecuencia relativa. Lo usual es que en el contenido de esta sección se dedique información relacionada con el tema de la unidad o a la promoción de actividades que realiza el gobierno venezolano como por ejemplo:



¡Algo para conocer!

CDI significa Centro Diagnóstico Integral, forma parte de los centros de atención médica de la Misión Barrio Adentro II.

El CDI es una institución de salud de tecnología médica moderna y efectiva, donde se garantizan, de forma gratuita, los medicamentos e insumos requeridos y cuenta con un personal de trabajo formado por médicos, enfermeros y técnicos que brindan calidad de salud de manera integral.

Figura 5. Ejemplo del contenido no relacionado con el tema de estadística de la sección ¡Algo para conocer! (5to grado, pág. 161)

A continuación se presenta la distribución, por grado, de las 21 actividades planteadas para el estudiante que quedaron luego de eliminar las no relacionadas con el tema de estadística y las que solo presentaban información.

Sección	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	Total
¡Algo para conversar!	0	1	0	1	0	2	4
¡Algo para pensar!	0	0	0	0	0	1	1
¡Algo para investigar!	1	1	0	2	1	1	6
¡Algo para conocer!	0	0	0	0	1	0	1
Ejercicios	6	0	1	1	0	1	9
Total	7	2	1	4	2	5	21

Tabla 3. Número de actividades de estadística para estudiantes, clasificadas por sección y grado

Lo primero que se debe destacar es que el mayor número de actividades se encuentra en primer grado con siete, seguido por sexto grado con cinco. El programa vigente indica que el objetivo general de estadística en primer grado es: *Recolecta y representa datos obtenidos en experiencias y encuestas simples*. El niño debe utilizar de forma adecuada la palabra *frecuencia* y los términos *más frecuente* y *menos frecuente*, además, de elaborar tablas y gráficos sencillos. Las actividades planteadas en el texto escolar se corresponden con esas metas y su número podría ser apropiado para un primer acercamiento con la estadística, aunque sin duda, demanda del docente un conjunto de actividades que permitan al estudiante consolidar lo estudiado en el texto.

En sexto grado, los estudiantes continúan con el trabajo de la recolección, organización y análisis de datos: utilizan, además de tablas y gráficos, las medidas de tendencia central y elaborando interpretaciones y conclusiones. En el texto escolar, no se trabaja con las medidas de tendencia central y solo se utilizan gráficos de barras; aun cuando en el programa se indica que también se debe trabajar con gráficos de líneas, de sectores circulares e histogramas. Esto, en parte, puede explicar el bajo número de actividades propuestas en ese grado. Algo similar ocurre en los otros grados donde el número de actividades varía entre 1 y 4. El bajo número de actividades, que presenta el texto escolar de matemática de la CB, plantea a los docentes una mayor exigencia en cuanto a las actividades que debe realizar en el aula para que el estudiante logre los aprendizajes deseados.

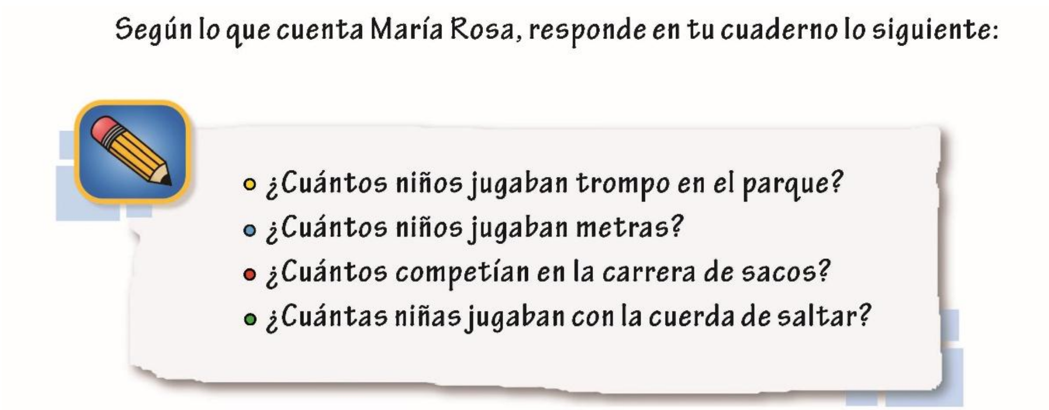
A continuación se examinarán los niveles de demanda cognitiva de las actividades vinculadas con los contenidos estadísticos previstos para ese grado, según las secciones donde se encuentran en el texto escolar.

Sección	Tareas de memorización	Tareas de procedimiento sin conexión	Tareas de procedimiento con conexión	Total
¡Algo para conversar!	1	1	2	4
¡Algo para pensar!	0	0	1	1
¡Algo para investigar!	1	5	0	6
¡Algo para conocer!	0	1	0	1
Ejercicios	6	2	1	9
Total	8	9	4	21

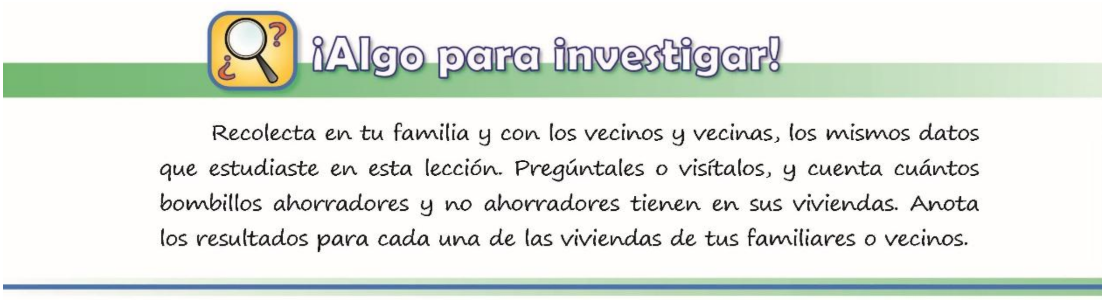
Tabla 4. Actividades de estadística clasificadas según el nivel de demanda cognitiva

En la sección *Ejercicios* del texto escolar se encuentra que 8 de las 9 actividades pertenecen a los dos niveles iniciales del modelo ajustado de Stein et al. (2000), eso significa que son actividades de baja demanda cognitiva. En cuanto al número de actividades, le sigue la sección *¡Algo para investigar!*, con 6 actividades, 5 de las cuales son *Tareas de procedimiento sin conexión*. Esta sección, por su definición, parece prestarse para actividades de más alto nivel, ya que sugiere que el estudiante debe realizar indagaciones sistemáticas. De las 4 actividades ubicadas en la categoría *Tareas de procedimiento con conexión*, 2 se encuentren en la sección *¡Algo para conversar!*, que por su definición implica trabajo en equipo. El trabajo en equipo es importante y más aún cuando la actividad es de elevada exigencia; entonces, podría suponerse que los autores optaron por colocar una parte de las actividades de mayor exigencia cognitiva para que el estudiante las realice en equipo.

En cuanto a las exigencias cognitivas, se nota un mayor número de actividades de baja demanda, 17 de las 21 actividades se ubican en los niveles de *Tareas de memorización* y *Tareas de procedimiento sin conexión*. En la categoría *Tareas de memorización*, se ubican actividades que requiere que el estudiante evoque información tratada en el libro o realice actividades sencillas, sin conexión con los conceptos estudiados. Por ejemplo:



1er grado, pág. 163


¡Algo para investigar!

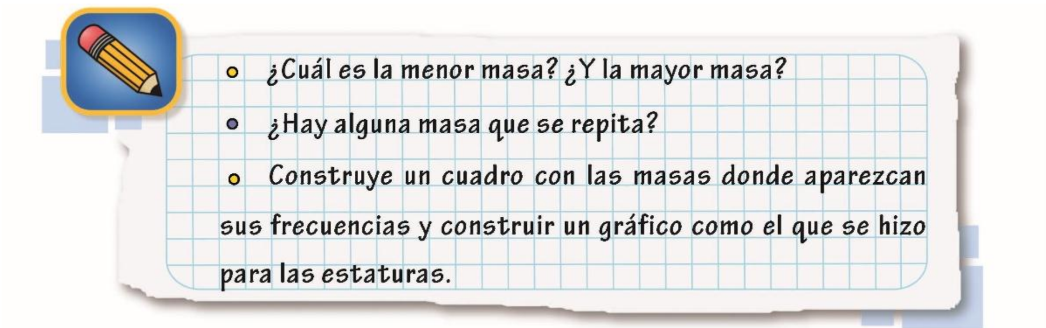
Recolecta en tu familia y con los vecinos y vecinas, los mismos datos que estudiaste en esta lección. Pregúntales o visítalos, y cuenta cuántos bombillos ahorradores y no ahorradores tienen en sus viviendas. Anota los resultados para cada una de las viviendas de tus familiares o vecinos.

4to grado, pág. 165

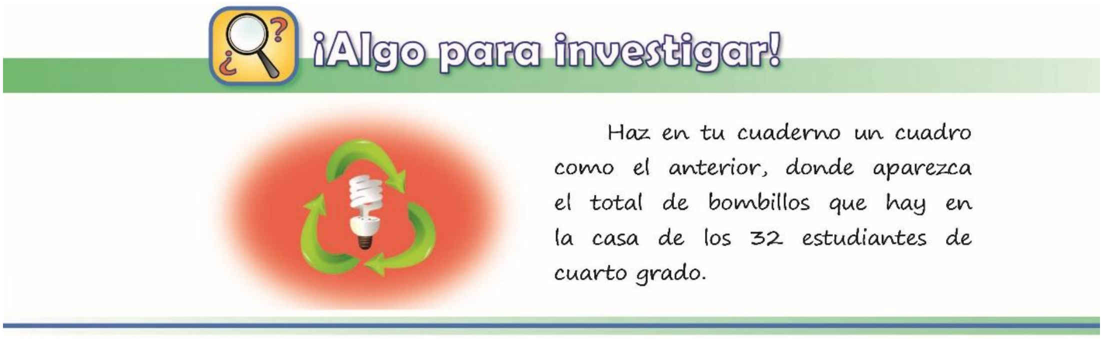
Figura 6. Ejemplos de *Tareas de memorización*

En el primer ejemplo, para responder los estudiantes deben contar los niños que se encuentran en un dibujo que precede a la actividad. Los cuatro juegos, a los que se refieren las preguntas, se encuentran diferenciados en una cuadrícula. El estudiante solo debe identificar el juego y contar cuántos niños participan en cada juego. Es una actividad sencilla, donde el conteo se utiliza para la introducción del concepto de frecuencia. En el segundo ejemplo, deben recordar una actividad tratada previamente en el texto y realizar una recolección de datos. Sobre la base de esa información deben reportar el número de bombillos ahorradores y no ahorradores que tienen las viviendas visitadas. Se les solicita presentar los datos recolectados, pero al parecer no tienen que hacer uso de tablas o gráficos estadísticos, se trata de una actividad sencilla de conteo, similar a una explicada previamente en el texto, por lo cual se le considera que es una actividad de reproducción de conocimiento, una *Tarea de memorización.*

En la categoría *Tareas de procedimiento sin conexión* se ubican 9 de las 21 actividades propuestas a los estudiantes. A continuación dos ejemplos de las actividades ubicada en esta categoría:


- ¿Cuál es la menor masa? ¿Y la mayor masa?
- ¿Hay alguna masa que se repita?
- Construye un cuadro con las masas donde aparezcan sus frecuencias y construir un gráfico como el que se hizo para las estaturas.

3er grado pág. 163



4to grado, pág. 161

Figura 7. Ejemplos de Tareas de procedimiento sin conexión

Las actividades de esta categoría se caracterizan por ser algorítmicas, el procedimiento a utilizar fue estudiado previamente en la unidad o se hace evidente a partir de la instrucción de la actividad. En el primer ejemplo (3er grado, p.163), se solicita identificar la menor y la mayor masa, además se pregunta si algún valor se repite, esta constituye *Tareas de Memorización;* pero, en la tercera viñeta se le pide al estudiante elaborar una tabla y un gráfico, esta es una actividad de *Procedimiento sin conexión*. Esa última actividad requiere que el estudiante utilice un procedimiento conocido, explicado previamente en el texto para el caso de la variable estaturas, solo debe seguir los pasos antes explicados. Entonces, el estudiante debe reproducir un conjunto de pasos y con ello debería lograr la respuesta esperada por los autores. Para resolver la actividad, no necesariamente se requiere de la utilización de la conexión entre los conceptos o significados que subyacen en el procedimiento a utilizar, basta con reproducir los pasos presentados en el ejemplo de las estaturas; por ello, a esa tercera viñeta se le considera *Tareas de procedimiento sin conexión*. Obsérvese que ese último ejercicio es lo que permite clasificar a la actividad en general en la categoría de *Tareas de procedimiento sin conexión,* a pesar de que las preguntas iniciales eran *Tareas de Memorización*.

El segundo ejemplo es similar, solo se le pide al estudiante que haga "*un cuadro como el anterior*"; por lo tanto, debe reproducir un procedimiento ya conocido. Es importante destacar que tanto las *Tareas de Memorización* como las *de procedimiento sin conexión* son necesarias para que el estudiante logre conocimientos y desarrolle destrezas, pero es importante tener claro que son actividades que exigen una baja demanda cognitiva para completarlas con éxito.

Solo cuatro de las 21 actividades tienen un mayor nivel de exigencia cognitiva y se ubicaron en la categoría *Tareas de procedimiento con conexión*, por ejemplo:

Actividades

Organiza y presenta esos datos para compartirlos, conversarlos y colocarlos en la cartelera de tu salón.

a) ¿Tu familia está contribuyendo con el ahorro energético de su comunidad y del país?
b) ¿Tu comunidad estará ayudando a utilizar conscientemente los recursos naturales del país y del planeta?
c) ¿Qué otras formas de ahorro de energía eléctrica existen?
d) ¿Qué otros recursos naturales podemos cuidar desde la escuela, tu hogar y tu comunidad?

4to grado, pág. 165

¡Algo para conversar!

Date cuenta de que no todos los niveles educativos tienen la misma cantidad de personas o frecuencias simples. Algunos tienen mayor cantidad de personas que estudian, como el caso de Primaria, y otros tienen menor cantidad de personas, como la Universidad. ¿A qué crees que se deba esta diferencia?

6to grado, pág. 155

Figura 8. Ejemplos de Tareas de procedimiento con conexión

En el primer ejemplo (4to grado, pág. 165), luego de organizar y presentar datos recolectados previamente, el estudiante debe responder un conjunto de preguntas. Las respuestas a esas preguntas no se basan en la memorización, tampoco implican seguir un procedimiento conocido, se le solicita conclusiones que puede extraer al analizar los datos. Previamente, en la unidad donde se ubica la actividad, se le ha proporcionado al estudiante información que le puede ayudar a dar respuesta a las preguntas, pero no hay un algoritmo conocido que le permita dar una respuesta. Se trata de analizar e interpretar los datos, para luego dar una respuesta a cada pregunta. Es importante destacar que las dos últimas preguntas de esta actividad se consideran no relacionadas con el tema de estadística; no obstante, las dos primeras preguntas son las que definen la categoría donde se ubica la actividad completa. Otro aspecto a destacar en esta actividad es la posible carga emocional y ética que involucra. Los estudiantes, niños entre 9 y 10 años de edad, deben indicar si su familia contribuye al ahorro energético de la comunidad y del país. ¿Qué pasa si su respuesta es no? ¿Eso no podría generar un cierto acoso por parte de sus compañeros? ¿Es posible que algunos niños, para evitar la posible burla de sus compañeros, opten por contestar que su familia sí colabora con el ahorro energético, aunque no lo haga?

En el segundo ejemplo, al estudiante se le solicita otra conclusión, pero en esta ocasión a modo de reflexión sobre las posibles causas de una situación estudiada en el texto. Son actividades que requieren algo más que el conocimiento, se requiere la comprensión de los conceptos estadísticos y lograr conexiones entre ellos y la información particular que se presenta. Que se lograran identificar actividades para la categoría *Tareas de procedimiento con conexión*, indica que sí se puede ir más allá de las actividades de baja demanda cognitiva, pero al parecer los autores optaron por colocar un bajo número de ellas.

La siguiente tabla muestra la distribución de las actividades clasificadas según el nivel de demanda cognitiva y grado al que pertenecen.

Tareas	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	Total
De memorización	6	0	0	2	0	0	8
De procedimiento sin conexión	1	2	1	1	2	2	9
De procedimiento con conexión	0	0	0	1	0	3	4
Total	7	2	1	4	2	5	21

Tabla 5. Actividades de estadística clasificadas según el nivel de demanda cognitiva y grado

Las ocho actividades ubicadas en la categoría de *Tareas de Memorización* se encuentran en dos grados, 1ro y 4to; mientras que las *Tareas de procedimiento sin conexión* se encuentran en todos los grados. Por su parte, las *Tareas de procedimiento con conexión* se hallan solo en 4to y 6to grado. Se podría pensar que las *Tareas de Memorización* deberían encontrarse en todos los grados o solo en los grados iniciales; no obstante, su presencia es casi exclusiva del primer grado. Así mismo, se podría esperar que las *Tareas de procedimiento con conexión* debieran hallarse en mayor número en los grados finales de la primaria.

El currículo de matemática de la educación primaria venezolana es de tipo espiral, por lo cual, un mismo contenido es tratado en varios grados, aumenta el nivel de profundidad con que se estudia a medida que el estudiante avanza en la primaria. Por ello, podría esperarse que el nivel de exigencia cognitiva de las actividades propuestas a los estudiantes aumente de forma gradual desde el primer grado. Los datos del cuadro sugieren que los autores no ubicaron las actividades de tal manera que el nivel de exigencia cognitiva aumentara a medida que el estudiante avanzara en la primaria. En el análisis de los textos escolares, no se encontraron actividades que pudieran ser clasificadas de cómo de *hacer estadística*, es probable que los autores consideraran que es un nivel de exigencia elevado para la educación primaria.

La poca presencia de actividades para el estudiante en los textos escolares analizados, así como el sesgo hacia los niveles de baja demanda, colocan una mayor exigencia al trabajo de los docentes. Ellos deberán formular actividades que complementen las que se encuentran en los textos y que permitan la comprensión de los conceptos estadísticos y el cumplimiento de los objetivos planteados. Un problema que se puede presentar es que las actividades de los libros generalmente son tomadas como referencia, en cuanto a demanda cognitiva, por los docentes. Investigaciones indican (por ejemplo, Stein, Grover, y Henningsen, 1996) que con frecuencia los docentes utilizan en sus clases las actividades que encuentran en los materiales curriculares y las planteadas por ellos son de un nivel de demanda cognitiva igual o con un nivel menor a las que se hallan en esos materiales. Considerando además que los libros analizados no tienen una versión para el docente (con sugerencias didácticas), ni se encontraron materiales complementarios dirigidos al maestro, es probable que en el aula ellos planteen actividades semejantes a las aquí analizadas. Este material complementario para el docente puede ser fundamental en el caso de la estadística, por cuanto las investigaciones señalan que los maestros tienen problemas de formación en esta área, tanto en el contenido como en su didáctica (Zapata-Cardona y Rocha, 2013; Sanoja y Ortiz, 2013).

Alsina (2012) señala que para aprender a usar la matemática es necesario partir de un currículo que contemple dos tipos de conocimiento: los contenidos matemáticos y los procesos matemáticos. Con estos últimos, hace referencia a la resolución de problemas; el razonamiento y la demostración; la comunicación; las conexiones; y la representación. Ello implica un cambio en la enseñanza de la matemática, pasar del énfasis en la adquisición de conocimientos a la construcción del conocimiento para el desarrollo de competencias. Para ello, se hace necesario bajar el peso que tradicionalmente tienen en la matemática las actividades de cálculo básico y la práctica de las tareas de rutina, para pasar a hacer un equilibrio entre la comprensión conceptual y cálculos necesarios, todo ello con miras a la construcción activa del conocimiento. Este tipo de cambios no parece estar presente en las actividades de los libros analizados, por cuanto la casi totalidad de ellas fueron clasificadas como de baja demanda cognitiva, con lo cual, se favorece menos la comprensión conceptual de las ideas estadísticas.

En el caso de la estadística, Franklin, Horton, Kader, Moreno, Murphy, Snider y Starnes (2005) plantean que la resolución de problemas es un proceso de investigación que involucra cuatro componentes: (a) la formulación de una pregunta, (b) la recolección de datos, (c) el análisis de los datos y (d) la interpretación de los resultados. Estos componentes deben trabajarse en todos los niveles previos a la educación universitaria para así lograr el fin último que es la formación estadística del ciudadano. También destacan que la variabilidad es un punto fundamental y debe estar presente en cada uno de los componentes antes mencionados. De acuerdo con el análisis realizado, en las actividades propuestas para los estudiantes, no parecieran considerar los cuatro componentes recomendados por Franklin et al. (2005), ya que la mayoría de las actividades son de tipo de memorización y de práctica de tareas algorítmicas.

5. A manera de cierre

El análisis realizado sugiere que los textos escolares de matemática de la Colección Bicentenario presenta un bajo número de actividades para los estudiantes, en lo que respecta al contenido estadístico. Además un número importante de actividades fueron consideradas como no relacionadas con el contenido estadístico estudiado. Todo esto podría limitar el uso de esos textos en el aula y en el hogar al estudiar los temas de estadística, y coloca en los docentes una mayor responsabilidad en cuanto al planteamiento de actividades que se propongan generar el aprendizaje y comenzar el proceso de formación estadística del ciudadano, que debe ser una de las metas en la educación primaria.

En relación con la demanda cognitiva de las actividades de estadística presentes en los libros, predominan las de bajo nivel de exigencia. Esto significa que las actividades demandan que el estudiante muestre qué sabe, en algunos casos indicando que recuerda definiciones y fórmulas y en otros que puede reproducir procedimientos explicados en el texto. Se exige que el estudiante evidencie que tiene los conocimientos básicos de la estadística, pero sin que muestre la comprensión de ellos. Considerando que los libros analizados corresponden a la educación primaria, parece adecuado que buena parte de las actividades busque el incremento del conocimiento. No obstante, la distribución de las actividades a lo largo de los grados no pareciera responder a una serie de textos escolares planificados para seguir un currículo en espiral, como es el caso venezolano. Las actividades de *memorización* aparecen casi exclusivamente en primer grado, mientras que las de *procedimiento con conexión* en 6to grado. Se podría esperar una distribución más gradual de las actividades en los seis grados, ya que, de acuerdo con el programa vigente, se debe estudiar los mismos contenidos con distintos niveles de profundidad. Por otro lado, la poca presencia de actividades de *procedimiento con conexión*, sugiere que se dan escasas posibilidades de que el estudiante profundice en el conocimiento estadístico. El bajo nivel cognitivo de las actividades presentes en los libros compromete las posibilidades del desarrollo de la formación estadística del ciudadano venezolano.

Las actividades para el estudiante, en los textos escolares, pueden ser de mucha ayuda para desarrollar una clase dinámica y que estimule el desarrollo del pensamiento estadístico. Se pueden formular actividades donde los estudiantes tengan oportunidad de confirmar conocimientos y procedimientos, pero también se pueden formular actividades que lo lleven a comprender la naturaleza de los conceptos estadísticos y sus relaciones. Las actividades pueden ayudar a sentar las bases para el desarrollo del pensamiento crítico, la toma de decisiones y la resolución de problemas, acordes con el nivel de educación primaria. Todo ello puede colaborar a que el estudiante se forme una visión de la estadística como un área útil para comprender el mundo y resolver situaciones problemáticas; sentar las bases para lograr la formación de un ciudadano que pueda utilizar la estadística en su vida cotidiana. De acuerdo con los resultados pareciera pertinente la revisión de las actividades de estadística propuestas para los estudiantes en los textos escolares de matemática de la Colección Bicentenario. Es recomendable desarrollar versiones de los textos escolares para el maestro, en los que se encuentren sugerencias didácticas para tratar cada tema y actividades completarías para el estudiante.

AGRADECIMIENTOS

Investigación financiada por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela bajo el número PI-07-8667-20131.

Nuestro agradecimiento a los profesores que colaboraron en la clasificación de las actividades. Agradecemos también a los profesores Amalio Sarco Lira, Ramón Uzcátegui P. y María de los Ángeles Martín H., por sus sugerencias a la versión inicial de este trabajo.

Bibliografía

Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. En: *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Schaeffer, R. (2005), A Curriculum Framework for pre K-12 Statistics Education. Disponible en: http://www.amstat.org/education/gaise/.

Grouws, D. A., Smith, M. S., y Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. Mathematics teachers: Grades 4 and 8. En P. Kloosterman y F. Lester (Eds.), *The 1990 through 2000 mathematics assessments of the National Assessment of Educational Progress: Results and interpretations.* 221 – 269. Reston, VA: NCTM.

Henningsen, M., y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 534-549.
Hsu, Wei-Min (2013). Examining the Types of Mathematical Tasks Used to Explore the Mathematics Instruction by Elementary School Teachers. *Creative Education*, 4 (6), 396 – 404.
Ministerio del Poder Popular para la Educación – MPPE (2011). *Orientaciones educativas en el marco de los textos escolares de la colección bicentenario*. Caracas: El autor.
Monterrubio, M.C., Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, 358. Mayo-agosto 2012, pp. 471 – 496.
Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). *Mapping New Statistical Literacies and Iliteracies*. Trabajo presentado en el *11th International Conference on Mathematics Education*, Monterrey, México.
Sanoja, J. E., y Ortiz, J. (2013). El conocimiento didáctico del contenido estadístico del maestro. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* 153 – 166. Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela. Disponible en: http://saber.ucv.ve/jspui/handle/123456789/4666
Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), pp. 455 – 488.
Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., y Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.
Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, pp. 268 – 275.
Zapata-Cardona, L., y Rocha, P. (2013). La clase de estadística más allá del currículo: un estudio de caso en la escuela primaria colombiana. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* 153 – 166. Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela. Disponible en: http://saber.ucv.ve/jspui/handle/123456789/4666

Anexo: Textos escolares utilizados en el análisis

Duarte C., A., Moya R., A., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Reaño O., N., Mendoza G., O., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *La patria buena. Matemática Quinto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Duarte C., A., Moya R., A., Silva A., D., Vásquez S., F., Torrealba M., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Márquez, M.Y., Serrano G., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Triángulos, rectángulos y algo más. Matemática Segundo Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Moya R., A., Silva A., D., Vásquez S., F., Bustamante P., K., Gracia A., M., Márquez, M.Y., Serrano G., R., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Aventuras de patacalientes. Matemática Tercer Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Moya R., A., Torrealba M., H., Márquez, M.Y., Becerra H., R., Serrano G., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Contemos ... 1,2,3 y 4. Matematica Primer Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Rojas O. A., Duarte C., A., Moya R., A., Torres S., C., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Fernández, L.R., Gracia A., M., Reaño O., N., Becerra H., R., Rodríguez D., V. y Millán B., Z. (2011). *Contando con los recursos. Matemática Cuarto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Rojas O. A., Duarte C., A., Moya R., A., Torres S., C., Silva A., D., Gil G., D., Vásquez H., E., Vásquez S., F., Paredes A., H., Bustamante P., K., Gracia A., M., Reaño O., N., Mendoza G., O., Becerra H., R., Rodríguez D., V., Serrano G., W. y Millán B., Z. (2011). *Hecho en Venezuela. Matemática Sexto Grado.* Caracas: Ministerio del Poder Popular para la Educación.

Audy Salcedo. Profesor Titular de la Cátedra de Métodos Cuantitativos de la Escuela de Educación de la Universidad Central de Venezuela. **audy.salcedo@ucv.ve / audy.salcedo@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 88-111

Os cursos de Cálculo difundidos pela USP e as preocupações didáticas presentes em livros adotados e em práticas docentes

Benedito Antonio da Silva, Gabriel Loureiro de Lima

Fecha de recepción: 02/12/2014
Fecha de aceptación: 29/11/2015

Resumen

Este artículo destaca las preocupaciones didácticas observadas en los libros y en las prácticas de los maestros que enseñaron los cursos de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de São Paulo entre los años 1930 y 1990. Los datos fueron obtenidos en la investigación doctoral de uno de los autores, que buscó presentar una visión general de los modelos de tales cursos durante ese período. Son preocupaciones em relación, especificamente, a la forma de definir los conceptos, la llamada, en primer lugar, a las definiciones provisórias y a la necesidad de diferenciar la definición de un objeto matemático de uma aplicación del mismo. Se observó que, poco a poco, el curso inicial de Cálculo se ha vuelto más adecuado a la madurez matemática de los ingresantes universitários pero, que, al mismo tiempo, las cuestiones fundamentales relacionadas a los conceptos perdieron espacio en los textos.
Palabras clave: Educación superior. Cálculo diferencial e Integral. Preocupaciones didácticas. Textos didácticos.

Abstract

This paper highlights didactic preocupations observed in adopted books and practices of teachers who worked in course of Calculus Differential and Integral at University of São Paulo between the 1930 and 1990. Data were obtained on the doctoral research of one authors, aimed to present an overview of models of such courses during this period. That are preocupations that concerns specifically athow to define concepts, the lokinf of in the first place, the working provisories definitions and the need to differentiate the definition of a mathematical object of an application. It was observed that, step by step, the initial course of Calculus has become more appropriete to mathematical maturity of freshmen in higher education, but at the same time, fundamental questions concerning the concepts lost space in textbooks.
Keywords: Higher education. Differential and Integral Calculus. Educational concerns. Textbook

Resumo

Este artigo destaca preocupações didáticas observadas em livros adotados e nas práticas de docentes que atuaram em cursos de Cálculo Diferencial e Integral da Universidade de São Paulo entre as décadas de 1930 e 1990. Os dados foram obtidos na investigação de doutorado de um dos autores, que buscou apresentar um panorama dos modelos de tais cursos nesse período. São preocupações que dizem respeito especialmente à forma de definir conceitos, ao apelo, em primeiro lugar, às definições provisórias e à necessidade de se diferenciar a definição

de em um objeto matemático de uma aplicação do mesmo. Observou-se que, pouco a pouco, o curso inicial de Cálculo se tornou mais adequado à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior, mas que, ao mesmo tempo, questões fundamentais referentes aos conceitos perderam espaço nos livros didáticos.
Palavras-Chave: Ensino superior. Cálculo Diferencial e Integral. Preocupações didáticas. Livros Didáticos.

1. Introdução

São muitas as dificuldades dos estudantes dos cursos de Exatas, quanto à aprendizagem dos conteúdos envolvidos na disciplina Cálculo Diferencial e Integral; daí resultando o alto índice de reprovação que pode levar à desistência de cursos inicialmente escolhidos de diferentes áreas, em que a disciplina compõe a grade curricular.

De modo geral a transição do ensino básico para o superior não ocorre de modo natural e sem rupturas e renegociações de parâmetros de ensino e de aprendizagem. Quando ingressam no curso superior, os estudantes trazem expectativas e apreensões; por um lado as boas avaliações em matemática geram a expectativa de que o curso de Cálculo não represente problemas para seu aprendizado. De outro lado, ao se deparar com questões globais envolvendo temas anteriormente estudados, quase sempre de modo compartimentalizado, e também com novas questões impactantes, como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, quase sempre veem frustradas suas expectativas iniciais.

Por seu turno, os professores de Cálculo também têm suas expectativas quanto ao nível de desempenho de seus novos alunos, muitas vezes esperando que eles tragam uma bagagem suficiente para compreender suas explicações e construir seu próprio saber matemático. Também os professores do ensino secundário esperam que a matemática ensinada por eles seja suficiente para que os alunos sigam sem dificuldades o de Cálculo na universidade.

Com frequência essas expectativas dos três segmentos de alguma forma envolvidos no curso de Cálculo são frustradas, fato que indica ser oportuno investigar e refletir sobre essa realidade, uma vez que quanto mais se conhecem os fatos sobre ela, mais instrumentalizado se está para examiná-la e questioná-la, para melhor determinar os elementos que a compõem, a fim de tentar conscientizar-se dos problemas que ela comporta.

Outra componente, que numa hierarquia talvez viesse em primeiro lugar, reside na própria natureza dos conteúdos matemáticos envolvidos no Cálculo Diferencial e Integral, isto sem considerar os aspectos de ordem pedagógica inerentes à transição entre esses diferentes níveis de ensino.

Para Gascón (1997) na transição da educação básica para a superior ocorre uma mudança profunda no contrato didático: Nesse nível de ensino passa a vigorar um novo contrato que transfere ao estudante uma parte importante da responsabilidade didático-matemática que na educação básica era exclusiva do professor.

Segundo o autor, o aluno da educação básica, para cumprir o contrato vigente, deve simplesmente acompanhar as aulas e resolver alguns exercícios para complementar os assuntos tratados nelas. Cabe ao professor explicar com toda clareza o que o aluno deve fazer para aprender, além de controlar constantemente suas atividades. Já na universidade o processo de aprendizagem da matemática não se restringe às aulas; agora fica explícito que o estudante é o responsável pelo processo de seu próprio estudo. É de sua responsabilidade decidir como buscar materiais de apoio, quais livros consultar e como estudar e utilizar as aulas de teoria e de exercícios para melhorar seu aprendizado. É também de sua responsabilidade entender a matemática, estabelecer relações, interpretar, justificar e globalizar conhecimentos, atividades muito diferentes do caráter algébrico presente fortemente no ensino secundário. Para Gascón (2009), no ensino superior, inevitavelmente o aluno precisará resolver questões não resolvidas em sala de aula pelo professor, o que implica em não ter um raciocínio pronto para "imitar". Além disso, nas avaliações a que será submetido nos cursos universitários, ao contrário do que normalmente ocorre nos ensinos fundamental e médio, o aluno usualmente deverá, além de demonstrar uma interpretação global do conteúdo trabalhado, resolver questões diferentes daquelas discutidas em sala de aula.

Há também descontinuidades entre à própria organização escolar das questões matemáticas que se estudam na educação básica e na universidade. A este respeito, Lima (2012, pp. 244 -245) fundamentado em Gascón (2009, pp. 292 – 296), destaca que, enquanto na educação básica a grande rigidez na atividade matemática acaba fazendo com que alguns alunos identifiquem ou até mesmo confundam determinado objeto matemático com a simbologia que lhe dá suporte, no ensino superior as nomenclaturas dos objetos que estão sendo estudados são consideradas irrelevantes e qualquer modificação nas notações empregadas, visando facilitar a aplicação de determinada técnica, não representa, do ponto de vista matemático, nenhuma alteração importante à mesma. Além disso, enquanto na educação básica, em geral, não se exige que o aluno interprete o resultado obtido ao aplicar determinada técnica matemática, na universidade a necessidade de tal interpretação já é tida como subentendida. Outro aspecto a ser considerado é que, no ensino básico, usualmente não se explora a reversão das técnicas matemáticas e quando há duas tarefas inversas entre si, em geral, as técnicas de resolução de ambas são apresentadas aos alunos como se fossem independentes, enquanto que, no ensino superior, os mesmos precisarão ser capazes de estabelecer relações entre as operações e suas respectivas inversas. Outro aspecto relevante é que:

> No ensino superior ocorre uma mudança radical em relação ao papel das definições matemáticas. Enquanto que no ensino secundário elas têm um papel essencialmente descritivo, com a finalidade de explicitar de maneira precisa as características de objetos já supostamente conhecidos, na universidade servem para construir objetos novos. [...] As funções das demonstrações também mudam completamente no ensino superior. Enquanto que no secundário elas têm um papel meramente "decorativo", já que as propriedades e os resultados podem ser percebidos, de maneira intuitiva, por meio de exemplos, ilustrações, etc, na universidade tais argumentações ostensivas, por meio de exemplos particulares ilustrando uma propriedade, perdem seu valor demonstrativo. É preciso que se façam demonstrações, de fato. (LIMA, 2014, pp.244-245).

É preciso que se leve em consideração também algumas características específicas do Cálculo que se tornam bastante evidentes neste processo de transição da educação básica para o ensino superior. Enquanto que na educação básica se estudam as relações internas de uma função específica, na universidade é necessário as transformações de funções e as características de toda uma família de funções.

Ainda é nesse momento que se evidenciam diferenças entre os procedimentos para se resolver problemas de Álgebra e de Cálculo. Por exemplo, em Álgebra, para provar que dois conjuntos A e B são iguais, deve-se mostrar que eles contêm os mesmos elementos. Já no Cálculo, muitas vezes, para se provar que dois números A e B são iguais, deve-se mostrar que para todo número real positivo ε, tem-se que $|A - B| < \epsilon$. Esse procedimento, corriqueiro no tratamento de limites, pode representar um enorme obstáculo para o aprendizado de tal conceito e de sua manipulação em diferentes situações em que esse conteúdo é aplicado. Tal ruptura de procedimentos, dolorosa para o estudante, às vezes, não é percebida pelo professor.

Junte-se a isso a necessidade de se relacionar diferentes conhecimentos, anteriormente estudados de forma pontual e que agora exigem procedimentos globais, para se verificar a existência da enorme barreira que representa a transição da escola básica para o curso superior e, em particular, a dimensão do obstáculo que se apresenta ao estudante no início de seus estudos de Cálculo.

Assim, observa-se que são muitos e variados os fatores que concorrem para que o ensino e aprendizagem da Matemática na universidade e do Cálculo, em particular, represente fonte de dificuldades ao estudante ingressante no ensino superior. Para Lucas et al. (2014),

> [...] o problema vai muito mais além da qualidade da “bagagem” de conhecimentos que o aluno transporta do ensino secundário para o ensino superior universitário. Mais do que o saber científico, o aluno deverá ter aprendido no ensino secundário a adaptar-se a novos desafios/tarefas que possam surgir na universidade, a responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, a ampliar as situações problemáticas, a questionar e a estabelecer conjecturas que lhe permitam solucionar um determinado problema proposto. Para tal, cremos que é necessário que o aluno trabalhe, já no ensino secundário, com uma matemática mais flexível, aberta, articulada e mais justificada do que a que vive atualmente nesta instituição escolar. (p.2)

A Comunidade Científica desde há muito vem dando sinais de que está atenta às questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Já em 1908, o Congresso da União Internacional de Matemática, em Roma, constituiu a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), exatamente com a finalidade de se debruçarem sobre tais questões; em 1914 a Comissão contava com adesão de vinte e oito países e já havia recebido inúmeros relatórios provenientes de vinte e oito países, sendo que os das Ilhas Britânicas foram organizados em dois volumes de Relatórios Especiais, publicados pelo Conselho da Educação em 1912. (Silva, 2011).

Com o advento da primeira guerra mundial, a Comissão permaneceu praticamente inativa até que em 1928, em Bolonha, decidiu-se reativá-la e esse ano tem sido visto como sendo o do reinício de suas atividades, que culminou com duas sessões durante o Congresso de Matemáticos de Zurique. Nesse encontro, o Professor Hadammard, de Paris, foi indicado para suceder o Professor D. E. Smith, de Nova York, que vinha presidindo a Comissão desde a morte de Felix Klein (1925). Desde 1969 a Comissão vem promovendo, a cada quatro anos um Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME), em que são discutidas as questões chaves e as tendências das pesquisas na Área.

A Educação Matemática, área do conhecimento de característica multidisciplinar, vem se ocupando há décadas com problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Os resultados de pesquisas nessa área, respaldadas em teorias sobre o desenvolvimento cognitivo, bem como a formação do pensamento, incluindo aí o pensamento matemático, foram sendo aceitos pela comunidade científica internacional. Essas teorias, em geral referem-se ao desenvolvimento cognitivo e/ou formação do pensamento de jovens nas faixas etárias dos alunos da educação básica. Essa é uma das razões pela qual a atenção principal dos educadores matemáticos inicialmente estivesse voltada a esse nível de ensino. Outra população que tem sido alvo de investigação no que tange ao processo do ensino e da aprendizagem da Matemática é aquela formada por professores e futuros professores do Ensino Básico.

Daí a inserir estudantes e professores do Ensino Superior foi um passo. Mogens Niss, na conferência do ICMI9 (2000), traça um panorama das questões chaves e tendências identificadas nas pesquisas em Educação Matemática, no qual situa a questão da inserção dos diversos níveis de ensino como problemas de pesquisa em Educação Matemática, assim como a evolução da área. Salienta o referido autor que no princípio as pesquisas realizadas focavam os objetos e fenômenos de estudo fundamentalmente relacionados à Matemática escolar, sendo que a escola primária marca presença nas pesquisas durante todo o século XX e a escola secundária, a partir dos anos 60. No entanto, são agregados alguns aspectos da educação superior, a partir dos anos 80 e, como ressaltam Marcolini e Perales (2005, p. 25), é preciso que se perceba que as dificuldades na aprendizagem de Matemática enfrentadas pelos alunos das universidades não se devem somente a aspectos pedagógicos, técnicos ou àqueles inerentes aos próprios conceitos a serem ensinados; muitas destas são oriundas da maneira como se seleciona, articula e organiza o saber matemático com fins didáticos.

Conforme salienta Lima (2014, p. 235), as investigações a respeito da Didática do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática se tornaram cada vez mais frequentes a partir de 1985, ano que marca a constituição, durante um dos congressos do PME (*Psychology of Mathematics Education*), de um grupo de trabalho tendo como objetivo estudar o *Pensamento Matemático Avançado* e, mais especificamente, aprofundar as investigações cognitivas a respeito dos processos de ensino e aprendizagem do Cálculo. Para Cantoral (1993, p. 8), por meio de tais estudos, passa-se a buscar o maior número possível de dados empíricos a respeito de aspectos específicos do processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo com o objetivo de localizar as dificuldades dos estudantes em relação a este conteúdo, entender as causas das mesmas e explorar possíveis 'tratamentos' para elas.

Principalmente a partir dos anos 90, as pesquisas sobre o ensino superior de Matemática, e em particular do Cálculo, vem mostrando um crescimento tanto quantitativo quanto qualitativo bastante considerável. Em 1997 a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) decidiu organizar um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no nível universitário e, em 2001, Derek Holton publica o trabalho *The Teaching and Learning of mathematics at University Level* (Holton, 2001), em que apresenta reflexões pessoais a partir de tal estudo. Segundo o autor ensino e pesquisa são inseparáveis para a acumulação de conhecimento, o progresso da ciência, da tecnologia e da civilização; e a disseminação de resultados de pesquisas e de estratégias de ensino podem trazer muitas contribuições para tal progresso. Ainda nesta década foi criada a *International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICMT), procurando atender a demanda por mais pesquisas específicas ao nível superior de ensino. A

ICMT encoraja a comunicação entre matemáticos e educadores matemáticos e promove fóruns entre diferentes culturas. Essas conferências acontecem sempre de quatro em quatro anos e são de grande interesse tanto para professores de matemática quanto para aqueles que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de matemática do nível universitário. Já foram realizadas Já foram realizadas três reuniões e como destaque, salientamos que na segunda delas, ocorrida em 2002, Holton coordenou o painel de discussões intitulado *Teaching undergraduate mathematics, based on the corresponding ICMI study*; e que a terceira, reuniu um grande número de professores universitários de cinquenta e dois diferentes países, recebendo seiscentas propostas de trabalhos a serem apresentados das quais, após analisadas pelo Comitê Internacional, trezentos e cinquenta figuram nos anais do evento.

A atuação do grupo de trabalho *As dificuldades dos estudantes em Cálculo*, constituído no sétimo Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) realizado em 1992, também contribuiu para o aumento de investigações referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Este grupo de trabalho, que reuniu pesquisadores e docentes de diversos países, se constituiu com o objetivo de buscar respostas para questões como: Quais os principais objetivos de um curso de Cálculo? Como devem ser relacionar os procedimentos algorítmicos e as reflexões conceituais em um curso de Cálculo? Quais as dificuldades específicas encontradas no ensino e na aprendizagem de cada um dos conteúdos do Cálculo e quais as razões para tais dificuldades?Quais as concepções do Cálculo e de seu ensino que têm fundamentado as diferentes experiências que vêm sendo realizadas nas salas de aula?

Como destaca Lima (2014) com base em Giménez e Machín (2003), a maioria dessas perguntas não foram totalmente respondidas e têm guiado as investigações que vêm sendo realizadas neste ramo e que, segundo Artigue (1998) têm agrupado as dificuldades relativas ao processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática em três categorias principais, sendo elas: (i) as dificuldades ligadas a complexidade matemática dos objetos básicos deste campo conceitual; ii) as dificuldades ligadas à conceitualização da noção de limite e iii) as dificuldades ligadas a necessário ruptura com modos característicos do pensamento algébrico. Há também, de acordo com Giménez e Machín (2003), dificuldades com os processos envolvendo infinito, presentes nos conceitos básicos de derivada e integral, além de outras questões referentes ao estudo de funções, ao conceito de infinito e aos diversos tipos de representações semióticas inevitavelmente presentes na abordagem destas áreas da Matemática.

No Brasil, conforme relata Lima (2012), um importante passo para a consolidação deste tipo de investigação, foi dado em novembro de 2000, com a criação do Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (G4), da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Convém salientar que apesar do crescimento que se tem observado em relação às investigações referentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática, e especificamente de Cálculo, nos cursos universitários, ainda é muito pequena a parcela de professores que tenham sua prática em sala de aula alterada em função dos resultados obtidos por essas investigações e para isso concorre uma gama muito grande de motivos, que não cabe aqui ser abordada.

Ao ouvir inúmeras vezes de professores universitários que os estudantes são reprovados em Cálculo porque, atualmente não estudam efetivamente essa disciplina, que da maneira como este assunto era ensinado na época em que eles eram estudantes esses problemas observados atualmente não aconteciam ou ainda que os livros adotados anteriormente faziam com que os alunos aprendessem de verdade, um dos autores deste artigo desenvolveu a pesquisa de doutorado *A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994*, procurando investigar qual era, afinal, o Cálculo ensinado antigamente e que hoje em dia não se ensina mais. No que tais cursos diferiam dos atuais? No conteúdo? No nível de rigor simbólico-formal? Nos tipos de preocupações didáticas dos professores? Nos livros-textos adotados? Mas, se essa forma de trabalhar com tal conteúdo dava bons resultados, por que foi substituída? Por que os professores passaram a buscar maneiras diferenciadas de trabalhar com este assunto se a maneira como faziam antigamente funcionava tão bem? A partir de que momento seu processo de ensino e de aprendizagem se tornou tão complicado e por que razão isto ocorreu? Para as considerações neste artigo, tomam-se por base, na maioria das vezes, dados presentes em Lima (2012).

Para o estudo realizado, o autor optou por analisar a trajetória do curso inicial de Cálculo ministrado aos graduandos em Matemática na Universidade de São Paulo por ter sido nesta instituição que foi implantado, em 1934, o primeiro curso superior do país destinado à formação de matemáticos e também porque, durante muito tempo, aquilo que era posto em prática por tal universidade servia de modelo para outras instituições de ensino superior e para outros cursos que passaram a funcionar no Brasil. Assim, o objetivo principal da investigação não foi "analisar como era o Cálculo na USP entre 1934 e 1994 e sim perceber como era o Cálculo que se ensinava neste período. O curso da USP não é somente característico daquela instituição; é um curso de uma universidade que, em certa época, foi referência e parâmetro para outras. O ano de partida do estudo, 1934, se justifica por ter se dado neste ano, na USP, a implantação do primeiro curso superior de Matemática do país. Já o ano de 1994 foi escolhido como ponto final para a investigação por ter sido nesta data que, oficialmente, a primeira disciplina de Cálculo (conhecida, normalmente, como Cálculo I) cursada pelos alunos da Licenciatura em Matemática se tornou diferenciada daquela oferecida aos alunos do Bacharelado, tornando explícita uma diferenciação entre o curso inicial de Cálculo que se julgava necessário para formar o professor daquele considerado adequado para formar o bacharel**.**

Com base nos dados obtidos por meio da referida investigação, se pode afirmar que, ao contrário do que pensavam e afirmavam alguns dos professores ouvidos por Lima antes do início de seu estudo, a maneira como o Cálculo era ensinado antigamente não era 'perfeita'.

> Mesmo quando ainda nem se ensinava efetivamente esta disciplina, e sim Análise Matemática, os estudantes já enfrentavam problemas no curso em que viam pela primeira vez os conceitos de limite, derivada e integral, problemas estes oriundos, predominantemente, da abordagem extremamente formal e rigorosa dada aos conteúdos. A própria disciplina de Cálculo surgiu no curso de Matemática da USP como uma tentativa de amenizar estas dificuldades enfrentadas pelos estudantes, demonstrando que, mesmo antes de existir, de fato, na graduação em Matemática, o ensino de tal disciplina já inspirava cuidados. [...] Não há como afirmar, portanto, que os problemas observados atualmente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo sejam decorrentes do fato de não se abordar este conteúdo da forma como isto era feito antigamente [...]. Ao contrário; as mudanças observadas, ainda que em

> muitos casos possam não ter sido bem sucedidas, tiveram como objetivo exatamente tentar minimizar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes; foi por esta razão que novas orientações foram dadas à disciplina e novas metodologias de ensino foram testadas (LIMA, 2012, p. 421).

Com relação aos manuais adotados como referências nos cursos de Cálculo analisados, embora estes também não conseguissem garantir total sucesso no processo de ensino e de aprendizagem dos conceitos fundamentais desta disciplina, realmente traziam alguns tipos de preocupações didáticas ligadas a aspectos importantes para o desenvolvimento do campo de conhecimento em questão e que na maioria dos livros atuais são deixados de lado ou não recebem o merecido destaque.

É exatamente este viés que será destacado nesse artigo. Serão discutidos alguns cuidados de caráter didático manifestados pelos autores das apostilas, notas de aula e livros adotados como referência nos cursos analisados e que se consideram fundamentais de serem levados em conta pelo professor que irá ministrar uma disciplina introdutória de Cálculo para os estudantes universitários. Antes de tratar-se especificamente dessas preocupações didáticas, apresentam-se algumas considerações a respeito dos modelos de ensino de tal disciplina observados durante o período analisado por Lima (2012) e também a respeito dos contextos que levaram os professores a adotarem tais livros como referência.

2. Os modelos de cursos de Cálculo difundidos pela USP entre as décadas de 1930 e 1990 e os livros adotados como referência

O processo de aritmetização da Análise ocorrido durante o século XIX e guiado por uma busca pelos fundamentos daquela área de conhecimento que se conhecia como Cálculo exerceu grande influência tanto no desenvolvimento da Matemática como ciência quanto no ensino, especialmente o universitário. Conforme salienta Lima (2014, p. 133), “a partir desse processo, a maneira considerada como sendo a mais adequada, e também a que estava em maior consonância com o rigor exigido pela Matemática, para se apresentar as noções fundamentais do Cálculo passou a ser por meio da definição weierstrassiana de limite”. Era de se esperar, portanto, que ao ser contratado, em 1934, para atuar no processo de implantação da graduação em Matemática na recém-fundada Universidade de São Paulo, o analista italiano Luigi Fantappiè (1901-1956) introduzisse na instituição um curso com esta orientação. Assim como nas universidades europeias, em que, conforme a Análise Matemática foi se constituindo como uma nova área da Matemática deixou-se de oferecer uma disciplina efetivamente de Cálculo, ensinando-se aos alunos apenas a Análise, trabalhada por meio dos refinamentos introduzidos por Weierstrass (1815-1897) à teoria dos limites desenvolvida por Cauchy (1789-1857), na USP também se adotou, inicialmente, essa ideia que foi sendo difundida também por universidades fundadas posteriormente e pelas escolas politécnicas que já existiam antes da fundação da Universidade de São Paulo e que ensinavam Cálculo segundo a concepção de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), dando ênfase aos infinitésimos e à noção intuitiva de limite.

Em seus cursos na USP, Fantappiè adotava um manual coerente com esta orientação proposta para a disciplina: o livro *Lezioni di Analisi* de Francesco Severi, publicado em 1933 e que adota, em um texto bastante formal, a concepção weierstrassiana de limite para fundamentar o conteúdo apresentado. O docente, durante sua atuação na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo, também produziu, com o auxílio de seu assistente Omar Catunda (1906-1986), notas de aula datilografadas relativas aos seus cursos de Análise Matemática. Esse material certamente não reflete de maneira exata a forma como os conteúdos eram apresentados em aula por Fantappiè, uma vez que apostilas, notas de aula e livros didáticos redigidos ou adotados por um docente não dizem exatamente como este atua em sala de aula; dão apenas indicações. De qualquer forma, a análise das notas do curso de Fantappiè, evidencia que, de fato, “o matemático trouxe aos cursos de Cálculo, ministrados em São Paulo, o que estava em voga na escola matemática italiana, considerada na época avançada e bem conceituada” (Lima, 2012, p. 125). É, possivelmente, nas notas de aula do curso de Fantappiè que aparecem, pela primeira vez em um material redigido no Brasil, o conceito de função de acordo com a formulação proposta por Dirichlet (1805-1859) e também o tratamento da noção de limite segundo a concepção weierstrassiana. Foi Fantappiè, de acordo com Táboas (2005, p. 54), quem “apresentou a Análise Matemática aos jovens universitários de São Paulo” e foi o responsável pela reorientação do ensino do Cálculo no Brasil. Segundo destaca Lima (2006, p.81) “em algumas escolas de nível superior, mesmo sob o nome de Cálculo [e não Análise Matemática], o ensino dessa disciplina passou a seguir os padrões impostos pela comunidade italiana aqui instalada a partir de 1934”.

Essa reorientação dos cursos de Cálculo, que valorizou, desde o primeiro contato dos estudantes com as noções de função, limite, derivada e integral um tratamento analítico caracterizado por um alto nível de rigor simbólico-formal, acabou dificultando que o aluno pudesse vivenciar um aprendizado progressivo e continuado até que atingisse um grau de amadurecimento matemático que o permitisse efetivamente compreender uma abordagem tão formal daquilo que estava sendo trabalhado.

Após o regresso de Fantappiè para a Itália em 1939, alguns docentes da FFCL da Universidade de São Paulo, cientes das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao cursarem, logo ao ingressar no ensino superior, um curso de Análise Matemática segundo os moldes das universidades europeias, pouco a pouco, passaram a questionar esse modelo e a propor uma reorientação para a disciplina. Neste processo, duas figuras centrais foram Omar Catunda, que assumiu a cátedra de Análise Matemática com a saída de Fantappiè, e sua assistente, a professora Elza Furtado Gomide (1925-2013). Na entrevista concedida a Lima (2012), Gomide afirmou que, desde que começou a ministrar aulas teóricas de Análise, ainda na função de auxiliar de Catunda, passou a refletir, com o apoio do catedrático, sobre a possibilidade de dar um direcionamento diferente à disciplina e permitir com que os alunos, ao ingressarem na universidade, assistissem, primeiramente, um curso de Cálculo Diferencial e Integral para somente depois cursarem Análise Matemática. Segundo ela, a Análise é a crítica, a justificativa do Cálculo e, portanto, não fazia sentido esperar que os alunos compreendessem diretamente a crítica de algo que ainda nem conheciam.

Essa ideia já estava sendo colocado em prática pelas universidades norte-americanas, que, ao contrário do que ocorria na Europa, ofereciam ao estudante, em um primeiro momento, um curso denominado Cálculo no qual se “trabalhava de maneira mais manipulativa com os conceitos, com ênfase em seus significados, nos procedimentos algorítmicos envolvendo tais conceitos e na maneira como os mesmos poderiam ser utilizados na resolução de alguns problemas matemáticos" (Lima, 2014, p. 136), para, posteriormente, em uma disciplina denominada Cálculo Avançado, retomar os conteúdos já estudos, mas agora "de maneira analítica, com um nível mais elevado de rigor simbólico-formal, em uma abordagem semelhante àquela presente na disciplina Análise Matemática do modelo europeu" (p. 136). Gomide se tornou, de fato, professora das turmas de primeiro ano em que Catunda foi aos Estados Unidos aperfeiçoar sua formação e, quando o catedrático retornou ao Brasil e a docente apresentou a ele sua sugestão de primeiramente ensinar Cálculo para depois ensinar Análise, como propunha o modelo norte-americano, ele que havia acabado de presenciar o mesmo funcionando, encampou a ideia.

Ao começar a lecionar, Gomide passou a adotar o livro *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy que, segundo ela, "entrava mais diretamente no Cálculo". Este manual, apesar de adotar um nível de rigor bastante alto, assim como acontecia nos textos de Fantappiè, trabalha com os conteúdos, utilizando predominantemente a linguagem natural e estabelecendo uma conversa com o leitor, deixando a impressão de que, talvez, a 'transmissão das informações', com o auxílio de tal livro, pudesse ocorrer de maneira mais eficiente do que se apelando a manuais excessivamente formais. Além disso, no prefácio da obra, Hardy destaca que a mesma foi concebida para ser utilizada, essencialmente, por alunos do primeiro ano da universidade, o que dá indícios de que, ao concebê-la, o autor levou em consideração a maturidade matemática dos seus leitores em potencial e procurou adotar um nível de rigor adequado para iniciantes no ensino superior.

Segundo D´Ambrosio, em relação às aulas ministradas por Fantappiè e posteriormente por Catunda antes desta reorientação da disciplina, o curso dado por Gomide "era rigoroso, mas com um rigor que hoje eu classificaria como moderado. [...] Neste curso, toda a parte do que hoje é chamado Cálculo era coberta e já tínhamos uma introdução à Análise, que começava de fato, e aí era pesada, no segundo ano" (D´Ambrosio, entrevista, 2009).

Conforme já destacado, Catunda, que permanecia como chefe da cátedra de Análise na FFCL da USP também era favorável a esta nova orientação para a disciplina ministrada aos alunos ingressantes e nas apostilas de Análise Matemática escritas por ele e que começaram a ser editadas em 1952, percebe-se, pela primeira vez, de maneira explícita, um esforço em redirecionar a abordagem dos conteúdos trabalhados na disciplina, em aproximá-la, de fato, do Cálculo, de um tratamento, inicialmente, mais manipulativo e menos abstrato. "O redirecionamento na forma de apresentar aos alunos do primeiro ano os conceitos fundamentais do Cálculo se deu de forma lenta e gradual e, neste processo, talvez a redação das apostilas de Catunda tenha sido um dos primeiros frutos das reflexões iniciadas por Gomide" (Lima, 2012, p. 143). Tais apostilas deram origem, em 1962, ao livro *Curso de Análise Matemática*, que fez de Catunda pioneiro na publicação de um manual brasileiro de Análise Matemática em conformidade com o rigor imposto na Matemática a partir do século XIX. Esses materiais de Análise escritos por Catunda exerceram, durante muito tempo grande influência no ensino superior brasileiro; eram, inicialmente, as únicas opções de bibliografia em português referente a este assunto.

Este processo de redirecionamento na disciplina de Análise ministrada aos alunos do primeiro ano, que se iniciou na década de 1950 com as reflexões de Gomide e Catunda, foi lento e gradual e culminou com a introdução, em 1964, no currículo do curso de Matemática da USP, de uma disciplina de Cálculo precedendo a de Análise. Convém salientar, no entanto, conforme explicita Lima (2014), que a introdução de tal disciplina não foi consequência apenas das reflexões dos docentes supracitados com base nas dificuldades enfrentadas pelos estudantes que, ao ingressarem na universidade, estudavam diretamente Análise: O que se passava na USP era reflexo de algo que ocorria mundialmente: o modelo europeu, predominante até então, perdia espaço para norte-americano que passou a ser amplamente divulgado por meio de livros didáticos que, pouco a pouco, foram adotados em diversos países.

Embora tenha havido uma mudança de nomenclatura na disciplina que o aluno cursava ao ingressar na universidade, na prática, durante muito tempo, os programas das disciplinas continuavam sendo muito mais próximos a um curso de Análise ou, pelo menos, de um curso voltado para a Análise e não para o Cálculo; ainda demorou até que sua estrutura se tornasse próxima da que se conhece atualmente.

Em 1964, pela primeira vez, um manual efetivamente de Cálculo foi adotado como referência para a disciplina ministrada aos alunos ingressantes; trata-se do livro *Calculus with Analytic Geometry* de Murray H. Protter e Charles B. Morrey Jr. A adoção de tal obra é mais um indício a ratificar a já destacada influência exercida, a partir do início da década de 1960, nas reformulações dos cursos brasileiros de Cálculo e de Análise, pelo modelo de ensino de Cálculo em vigor nos Estados Unidos e pelos manuais norte-americanos que, a partir daquele momento, se tornaram cada vez mais populares no país. Conforme os autores destacam no prefácio da obra, na época, as universidades norte-americanas ofereciam dois cursos de Cálculo, um para alunos iniciantes e outro para alunos que já possuíam conhecimentos sobre o assunto e o referido manual havia sido pensado para auxiliar na condução de cursos do primeiro tipo e que, por esta razão, os tópicos apresentados foram escolhidos levando em consideração o que a maioria dos estudantes do primeiro ano de um curso universitário precisaria saber de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria Analítica, o que estava em concordância com o que Gomide propôs para o ensino da disciplina no início da década de 1950:

A partir do momento em que, de fato, começou a existir uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral destinada aos alunos ingressantes do curso de Matemática da USP, alguns livros soviéticos se tornaram populares, especialmente durante a década de 1960 e início de 1970, entre estudantes e professores. Dois deles foram *Calcul Différentiel et Integral* de Piskunov (1969) e *Problems in Mathematical Analysis* de Demidovitch (1977), utilizados predominantemente durante as aulas de exercícios. A utilização de tais manuais se ampliou na mesma medida em que, numa interpretação equivocada do que propuseram, por exemplo, Catunda e Gomide com base nas dificuldades enfrentadas pelos alunos e no modelo norte-americano, pouco a pouco, o curso inicial de Cálculo passou a enfatizar, ao menos nos exercícios e nas avaliações, cada vez mais, os procedimentos algorítmicos, as técnicas de cálculo de limites, derivadas e integrais. Começa-se, a partir de meados dos anos 1960, se evidenciar aquilo que Rezende (2003) denomina de *conflito pedagógico entre o que se faz e o que se pede*: enquanto nas aulas prevalecia a sistematização do conteúdo com base em elevado nível de rigor simbólico-formal, nos exercícios e nas avaliações o foco eram as técnicas de cálculo. Esta prática pode acarretar que o aluno não valorize os conceitos e seus significados, mas sim os procedimentos operatórios associados a eles cobrados nas avaliações.

No início da década de 1970, outro livro que passou a ser utilizado como referência foi *Cálculo: um curso universitário* de Edwin Moise, que propunha uma maneira diferenciada de trabalhar com os conteúdos da disciplina: uma apresentação em espiral, na qual cada conceito é trabalhado, desde o início do manual, em diversos momentos e, a cada vez que o assunto é retomado, sua abordagem vai sendo aprofundada e novos detalhes e novos aspectos vão sendo incorporados às ideias anteriormente apresentadas. Conforme destaca o autor no prefácio da obra, os objetos matemáticos vão sendo introduzidos por meio de “uma série de formas diferentes, em ordem crescente de dificuldade, generalidade e exatidão” (Moise, 1972 – prefácio). Além disso, também no prefácio, Moise justifica esta sua opção pela abordagem em espiral argumentando que ela pode permitir com que os alunos percebam “os processos pelos quais ideias especiais são generalizadas e ideias heurísticas se tornam concretas e exatas” (idem), já que, é preciso se levar em consideração que os conceitos centrais do Cálculo são profundos e que, portanto, o professor não deve esperar que eles “possam ser aprendidos todos de uma vez, nas formas pelas quais um matemático moderno pensa a respeito deles” (Ibid.).

Também no início da década de 1970, conforme salienta Lima (2014) com base em Pimenta e Anastasiou (2002) e Fisher (2009), quando a concepção de conhecimento como um acúmulo de informações que poderiam ser transmitidas de um sujeito que sabe (professor) para outro que aprender (aluno) começou a ser questionada e gradativamente substituída pela ideia de que se deveria levar em consideração a relação, mediada pelo professor, entre o aluno e o conteúdo a ser conhecido, as aulas na universidade passaram a, pouco a pouco, enfatizar a parceira entre professores e estudantes na busca pelo conhecimento. E, nesse contexto, passou-se a valorizar os processos de ensino e de aprendizagem baseados na construção do conhecimento pelo próprio estudante, conduzida, sobretudo por discussões e trabalhos em grupos. No ensino do Cálculo na Universidade de São Paulo, também é possível perceber os reflexos dessas idéias na experiência posta em prática por uma equipe de professores que adotou uma metodologia de ensino baseada no trabalho em grupo mediado por roteiros de estudos, discussões e debates e, finalmente, a institucionalização do objeto matemático estudado.

Essa experiência com os roteiros, embora tenha sido bem vista por muitos estudantes, conforme atestam os dados presentes em Lima (2012), durou apenas três anos, de 1975 a 1978, e chegou ao fim quando os professores nela envolvidos passaram a se dedicar a outros projetos e a nova equipe responsável pelo ensino de Cálculo optou, provavelmente pelo grande volume de trabalho ocasionado por esta metodologia alternativa, por retomar a forma tradicional de ensino, baseada predominantemente em aulas expositivas.

Durante a década de 1980, orientações diferentes de condução da disciplina inicial de Cálculo passaram a coexistir, sendo algumas mais próximas efetivamente desta área, outras mais próximas da Análise e outras ainda equilibrando aspectos destas duas tendências. Nesta década, alguns livros utilizados como referência foram: *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold, as apostilas de Cálculo do professor Guidorizzi, que, posteriormente, foram reformuladas e deram origem ao seu livro *Um Curso de Cálculo*, que também foi indicado como referência em muitas ocasiões e o manual *Cálculo Diferencial e Integral* de Roberto Romano. Apesar da convivência quase que simultânea de disciplinas de Cálculo conduzidas com orientações tão diferentes, para alguns professores, conforme evidencia Lima (2012, pp. 195-196), “durante a década de 1980, tal curso começou a perder muito do rigor que o havia caracterizado até então e este fato não os agradava”. Visando tentar reverter essa situação, um grupo de docentes optou por utilizar como referência básica na disciplina inicial de Cálculo o livro *Cálculo Infinitesimal* de Michael Spivak que enfatiza a fundamentação dos principais resultados da Análise e não os procedimentos algorítmicos.

Essa experiência de ensinar Cálculo utilizando como referência o manual de Spivak durou aproximadamente dois anos, tendo chegado ao fim logo no início da década de 1990, uma vez que, ao que indicam os dados analisados, a grande maioria dos estudantes envolvidos em tal experiência não conseguia acompanhar um curso como aquele que estava sendo proposto. Mas o problema não foi o livro adotado, já que o mesmo apresenta uma abordagem bastante cuidadosa para o conteúdo e traz diversos tipos de cuidados do ponto de vista didático. A questão é como o texto foi utilizado em tal experiência: tentou-se, em sala de aula, reproduzir a apresentação proposta pelo manual e essa, por si só, embora matematicamente interessante, não basta “já que adota um nível de rigor e formalismo que possivelmente não é adequado à maturidade matemática da maioria dos ingressantes no ensino superior” (Lima, 2012, p. 387).

Nos anos 1990, os cursos iniciais de Cálculo ministrados aos alunos da Matemática da USP foram tornando-se, pouco a pouco, cada vez mais semelhantes aos atuais, sendo que há alguns nos quais se enfatiza exclusivamente as técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais e outros nos quais, embora a apresentação dos conteúdos segundo elevado nível de rigor simbólico-formal também esteja presente, são os procedimentos algorítmicos que são cobrados e, portanto, passam a ser valorizados pelos estudantes. A partir de 1994, o curso de Cálculo I ministrado aos alunos da Licenciatura passou a ser diferente daquele ministrado aos alunos do Bacharelado e enquanto na disciplina destinada aos futuros professores passou a haver uma preocupação em sanar algumas deficiências relativas a conteúdos matemáticos da educação básica para, posteriormente, enfatizar, dentre os diversos conceitos do Cálculo, aqueles mais importantes para a formação do professor, a disciplina ministrada aos alunos do Bacharelado não sofreu nenhuma grande mudança.

Na sequência, apresentam-se algumas preocupações didáticas presentes nos manuais que foram adotados como referências nos cursos ministrados na USP entre as décadas de 1930 e 1990 e que, em geral, não são observadas nos livros utilizados atualmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

3. Preocupações didáticas presentes em livros adotados nos cursos investigados

Conforme o exposto na introdução deste artigo, as investigações referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática estão intimamente relacionadas às pesquisas a respeito do *Pensamento Matemático Avançado*, que Dreyfus (1991) e Tall (1991) consideram como sendo o tipo de pensamento, que pode se manifestar em diferentes níveis educacionais e que está envolvido no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos complexos. Giménez e Machín (2003, p. 136) salientam que os processos cognitivos presentes no Pensamento Matemático Avançado englobam uma série de processos matemáticos, dentre os quais, destaca-se a abstração, a análise, a categorização, o estabelecimento de conjecturas, a generalização, a síntese, a definição, a demonstração e a formalização. Para Tall (1991), que faz a distinção entre o nível elementar e o nível avançado de Matemática, na transição do nível elementar para o nível avançado, os processos de definir, demonstrar e formalizar, embora estejam também presentes no pensamento matemático elementar, se tornam ainda mais importantes. Segundo este autor, a mudança do nível elementar da Matemática para o avançado passa a exigir que o aluno não mais descreva os objetos matemáticos, mas sim que os defina. Como pontua Henriques:

> Pode considerar-se que no centro da transição da Matemática elementar para a avançada está a ideia de construir conceitos a partir da definição em vez de encontrar propriedades a partir de conceitos já existentes. [...] Na Matemática elementar a descrição é construída a partir de experiências sobre o objeto, enquanto na Matemática avançada as propriedades dos objetos são construídas a partir da definição. (HENRIQUES, 2010, pp. 17-18).

Conforme destacam Giménez e Machín (2003, p. 141), a apresentação de uma definição por parte dos professores ou dos livros didáticos e a memorização desta, por parte do aluno não garante a ele, de forma alguma, a compreensão dos significados de tal definição. Os pesquisadores salientam que, apesar dos autores de livros didáticos e de muitos professores suporem que a aprendizagem dos conceitos matemáticos se dá por meio das definições dos mesmos e que, durante a resolução de problemas são tais definições que são ativadas nas mentes dos estudantes e controlam o processo, as investigações mostram que a compreensão dos objetos matemáticos, por parte dos alunos, se dá por meio de suas experiências com situações diversas envolvendo tais objetos. Assim, Giménez e Machín (2003) destacam que é preciso então que: “se eduque progressivamente os hábitos dos estudantes, sobretudo daqueles que vão realizar estudos de Matemática não elementar, de forma que as definições façam parte de suas experiências e, portanto, de seus esquemas conceituais” (pp. 141-142).

Considerando-se a importância que as definições matemáticas adquirem nas aulas do ensino superior, destacam-se, nesta seção, algumas preocupações didáticas diretamente relacionadas às definições de alguns objetos matemáticos fundamentais do Cálculo observadas naqueles manuais utilizados em cursos ministrados aos graduandos em Matemática na Universidade de São Paulo entre as décadas de 1930 e 1990 e que, em livros didáticos atuais nem sempre estão presentes.

O manual *A Course of Pure Mathematics* de G. H. Hardy, adotado por Gomide no curso de Análise que esta docente ministrava para os alunos do primeiro ano em meados da década de 1950, evidencia, em alguns momentos, o cuidado do autor em explicitar aos leitores quais são aqueles elementos de fato essenciais para a caracterização de um determinado objeto matemático e que, portando, devem constar na definição do mesmo. Por exemplo, a representação de uma função por meio de uma expressão analítica é algo obrigatório e que deve fazer parte da definição de função? A este respeito, Hardy destaca que, embora muitas funções importantes tenham como característica especial o fato da relação entre a variável independente x e a variável dependente y poder ser “expressa por meio de uma *fórmula analítica*, a partir da qual o valor de y correspondente a um determinado valor de x pode ser calculado pela substituição direta do último" (Hardy, 1955, pp. 40-41 – tradução nossa), tal característica não é essencial à noção de função e, portanto, não deve estar presente na definição de tal objeto matemático. Hardy considera então, para exemplificar, a relação que associa a cada número natural x seu maior fator primo, denotado por y. Embora exista, neste caso, uma relação funcional, não há uma fórmula analítica que possibilite, a partir de um dado valor de x, obter, por meio de substituição direta em tal fórmula, o valor de y correspondente.

O livro *O Cálculo com Geometria Analítica* de Louis Leithold, utilizado em cursos ministrados na USP durante a década de 1980, traz preocupações a este respeito e o autor também volta sua atenção, em determinado momento, para este fato da existência de uma fórmula relacionando as variáveis independentes e dependentes de uma função não ser algo essencial a este conceito matemático. O autor afirma que: "intuitivamente, consideramos que uma quantidade y é uma função de outra quantidade x se existir alguma regra por meio da qual é designado um único valor para y para cada valor correspondente de x" (Leithold, 1977, p. 50), mas ao contrário do que indica a intuição, para existir uma relação funcional entre x e y, não é necessário que tais variáveis estejam relacionadas por meio de uma expressão analítica. A relação pode ser apresentada, por exemplo, segundo o autor, por meio de uma tabela. E então Leithold destaca que uma das finalidades das definições matemáticas é exatamente estabelecer o que, de fato, caracteriza determinado conceito, diferenciando aquilo que efetivamente é próprio do objeto matemático em questão daquilo que se pode observar em exemplos ou casos particulares a ele relacionados.

Calculus, de Michael Spivak, livro adotado em cursos ministrados na USP na década de 1990, também traz considerações a este respeito e, assim como na obra de Leithold, há a preocupação de esclarecer ao leitor que a definição formal de determinado objeto matemático não pode levar em consideração as imprecisões provenientes da noção intuitiva do mesmo. Em relação também ao conceito de função, Spivak inicia sua abordagem afirmando que irá definir, provisoriamente, função real de uma variável real como sendo "uma regra que associa a cada um de certos números reais um número real" (Spivak, 1975, p. 47 – tradução nossa). Em seguida, após apresentar diversos exemplos, destaca que o leitor deve perceber que:

> Uma função é uma *regra qualquer* que faça corresponder números a certos outros números, não necessariamente uma regra que pode ser expressa mediante uma fórmula algébrica, nem sequer mediante uma condição uniforme aplicável a todo número; nem é necessariamente uma regra que tenha alguma aplicação na prática. Mais ainda, a regra pode prescindir de alguns números e pode, inclusive, não estar totalmente claro a que números a função pode ser aplicada. (SPIVAK, 1975, pp. 48-49 – tradução nossa).

O autor salienta então que, embora tenha definido provisoriamente função como uma regra, o que isto quer dizer não está totalmente claro, mas, na verdade,

> O que realmente importa perguntar a respeito de uma função não é "o que é uma regra?" ou "o que é uma associação?" e sim "o que nos falta saber a respeito de uma função para que saibamos tudo sobre ela?". A resposta a última

> questão é fácil: para todo número x falta saber qual é o número $f(x)$ correspondente. (Idem, p. 57 – tradução nossa).

E então, por meio de um exemplo envolvendo pares ordenados e uma tabela de valores, Spivak finalmente apresenta a definição de função:

> Uma **função** é uma coleção de pares de números com a seguinte propriedade: se (a,b) e (a,c) pertencem ambos a coleção, então $b = c$; em outras palavras, a coleção não deve conter dois pares distintos com o mesmo primeiro elemento. (Ibid., pp. 57-58 – tradução nossa – grifo do autor).

Um aspecto bastante importante do ponto de vista conceitual e que, na medida em que a disciplina ministrada aos ingressantes no ensino superior passou a e se aproximar do Cálculo e se afastar da Análise e a adotar, consequentemente, manuais também de acordo com esta nova orientação, pouco a pouco foi sendo deixado de lado, diz respeito à necessidade de, para fazer sentido definir $\lim_{x \to a} f(x)$, a precisar ser um ponto de acumulação do domínio da função f. Até meados da década de 1960, essa questão era trabalhada pelos autores dos livros adotados como referências nos cursos ministrados; está presente nas notas de aula de Fantappiè, nas apostilas e nos livros de Catunda e no manual de Hardy. Por sua vez, tal discussão não aparece explicitamente nos livros de Protter e Morrey (1962), Moise, Piskunov, Leithold e nem mesmo no manual de Spivak que, conforme já foi destacado, foi utilizado, durante a década de 1990, em uma tentativa de, segundo o grupo de docentes envolvidos em tal experiência, retomar o rigor que havia caracterizado o curso de Cálculo da USP inicialmente e que estava, pouco a pouco, se perdendo. Na obra de Guidorizzi, essa questão merecia destaque nas apostilas que foram bastante utilizadas nos cursos de Cálculo ministrados em meados da década de 1970 e início da década de 1980, mas, deixou de ser discutida no primeiro volume do livro a que tais apostilas deram origem e que, desde então, tem sido constantemente adotado como referência nas disciplinas de Cálculo de diversas universidades brasileiras.

Refletindo o progressivo estabelecimento do modelo que preconizava inicialmente se ensinar Cálculo, sem, em um primeiro momento, se preocupar tanto com a formalização dos conceitos, os manuais que passaram a ser escritos com esta orientação optaram por, no curso destinado a alunos ingressantes, trabalhar apenas com funções de uma variável real, opção esta que, em geral, é informada aos leitores, de maneira bastante breve, nos inícios das obras. Desta forma, como em um intervalo da reta real todo ponto é de acumulação, não é necessário explicitar, ao definir $\lim_{x \to a} f(x)$, que a é um ponto de acumulação do domínio, pois tal condição é automaticamente satisfeita. E então, observa-se que, se o aluno não prestar a devida atenção à informação dada pelo autor de que no contexto da obra trabalhar-se-á apenas com funções de uma variável real e principalmente se não for auxiliado a perceber quais as implicações trazidas por tal observação, possivelmente poderá cometer enganos como dizer que, sendo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, então $\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{5}{2}$, ao invés de perceber que, em tal situação, sequer faz sentido fazer referência a $\lim_{x \to 3} f(x)$, uma vez que 3 não é ponto de acumulação do domínio da função considerada.

Ao apresentarem-se considerações a este respeito, não se está, de forma alguma, afirmando que é necessário trabalhar com o conceito de ponto de acumulação de um conjunto, em um curso inicial de Cálculo, da mesma forma como se trabalha com esta ideia, usualmente, em uma disciplina de Análise. Em um contato inicial do estudante com o conceito, ele pode ser apresentado intuitivamente, da mesma forma como aparece, por exemplo, nas apostilas escritas por Guidorizzi durante a década de 1970. Neste material o autor apresenta, por meio da linguagem natural, a ideia de ponto de acumulação de um conjunto A afirmando que: "grosso modo, dizer que p é ponto de acumulação de A significa dizer que é possível encontrar pontos de A, *diferentes* de p, que estão tão próximos de p quanto se queira" (Guidorizzi, 1979, p. 46)". Em seguida, define, formalmente, o que é ponto de acumulação de um subconjunto dos números reais e, então, após apresentar exemplos e exercícios nos quais se discute como determinar os pontos de acumulação de um dado conjunto, o autor dá início a introdução da noção de limite, inicialmente por meio de exemplos geométricos, para, após algumas discussões formalizá-la e relacioná-la ao conceito de ponto de acumulação:

> Seja f uma função e p um ponto de acumulação do domínio de f. Dizemos que f *tem limite l em p* se para todo $\varepsilon > 0$ dado existir um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$, $0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Tal número l quando existe é único e será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ (lê-se limite de $f(x)$ quando x tende a p). (GUIDORIZZI, 1979, pp. 48-49).

Outro tipo de preocupação didática que está presente em três dos manuais analisados é evidenciar a diferença entre a definição de determinado objeto matemático e uma aplicação para a mesma. No livro de Hardy, por exemplo, antes da apresentação da definição da derivada, encontra-se o seguinte comentário:

> Apresentamos a noção de derivada ou coeficiente diferencial por meio de considerações geométricas. Mas, no conceito propriamente dito, não há nada geométrico. A derivada $\phi'(x)$ de uma função $\phi(x)$ pode ser definida, sem referência a qualquer tipo de representação geométrica de $\phi(x)$, pela equação
>
> $$\phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h};$$
>
> e $\phi(x)$ tem ou não derivada, para um valor qualquer de x, de acordo com a existência ou não desse limite. A geometria das curvas é apenas uma das muitas áreas da matemática na qual a idéia de derivada encontra aplicação. (HARDY, 1955, p. 213).

No manual de Moise também se detecta uma observação que evidencia preocupações a este respeito. Ao introduzir a ideia de integral definida por meio do limite de somas, o autor destaca:

> Até agora nesse livro, definimos a integral definida em termos de área, sendo as áreas acima do eixo x contadas positivamente e as abaixo, negativamente. Uma pequena dificuldade com esse esquema é que ele se baseia num conceito intuitivo (de área) e não numa teoria exata. Assim temos, no mínimo, algo inacabado. Mas existe uma objeção muito mais importante ao conceito de

> integral como área: ele é muito especial e dá ênfase às ideias erradas. Na maior parte do tempo quando calculamos uma integral definida, fazemos isso não para achar a área de uma região plana, mas sim para achar o limite de uma soma amostral. (MOISE, 1972, p. 303).

Spivak (1975), ao trabalhar com o conceito de integral, também evidencia uma preocupação desse mesmo tipo: visando evitar que, em razão da motivação geométrica adotada por ele ao apresentar as noções de somas superiores e de somas inferiores, o aluno, erroneamente, interiorize a ideia de que a noção de área é fundamental para a definição de tais somas, o autor salienta que se deve observar que, apesar da motivação geométrica adotada no manual, a definição formal de somas superiores e de somas inferiores não faz qualquer menção ao conceito de área.

Preocupações como essas manifestadas por Hardy (1955), Moise (1972) e Spivak (1975) em suas obras são pertinentes do ponto de vista didático, uma vez que, conforme salienta Lima, é comum, nos cursos de Cálculo, os alunos confundirem uma aplicação com a definição de determinado ente matemático ou até mesmo tomarem a aplicação como sendo a própria definição do objeto em questão. Observa-se, por exemplo, que muitos alunos tomam como definição de derivada de uma função em um determinado ponto o coeficiente angular da reta que, no ponto considerado, é tangente ao gráfico dessa função, quando, na realidade, essa é uma interpretação geométrica e não uma definição de tal ente matemático. Da mesma forma, muitos alunos definem integral como área quando, na realidade, o cálculo de áreas é somente uma das diversas aplicações do conceito de integral definida.

Reflexões destacando que ao se calcular a derivada de uma função não necessariamente busca-se o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico da função em determinado ponto (pode-se estar buscando, por exemplo, a velocidade de uma partícula da qual se conhece a função horária da posição) ou também que ao integrar uma função não necessariamente está sendo determinada a medida da área de uma região (pode-se, por exemplo, estar sendo calculado o trabalho realizado por uma força variável) poderiam estar presentes, explicitamente e de maneira enfática, em toda disciplina inicial de Cálculo e nos livros adotados como referências para as mesmas.

Outro exemplo de preocupação didática a ser destacada está presente no manual de Spivak (1975), na abordagem de diversos conteúdos, mas com maior ênfase na apresentação das noções de função e de limite. Inicialmente o autor apresenta uma definição provisória que, em seguida, é detalhadamente discutida e criticada, deixando explícita ao leitor, em razão das limitações detectadas na definição provisória, a necessidade de se introduzir uma definição matemática formal do objeto que está sendo discutido. Para esse autor, é importante que o leitor perceba que partir de uma definição provisória e chegar àquilo que, de fato, é a definição formal de determinado ente matemático, não é um trabalho que consiste apenas em encontrar sinônimos para termos que trazem dificuldades; essa transição deve servir para que fique evidente “como as ideias intuitivas podem ser incorporadas à matemática rigorosa” (Spivak, 1975, p. 57). Nessa preocupação evidenciada por Spivak, manifesta-se a necessidade da existência de uma relação dialética entre intuição e rigor nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo ou de qualquer outro conteúdo matemático. O estabelecimento de uma definição formal para determinado objeto não deve ser visto como um momento a partir do qual o aluno irá deixar de lado as características e as conjecturas levantadas, por meio de uma abordagem mais intuitiva, relativas ao ente matemático em questão. A definição formal não é uma substituição da noção intuitiva, mas sim uma forma precisa, do ponto de vista da linguagem e do rigor da Matemática, de expressar a ideia central nela presente e, por essa razão, o estudante pode (e deve) continuar levando em consideração aquilo que compreendeu recorrendo à intuição.

Esse processo de transição de uma definição provisória para a definição formal pode ser ilustrado por meio do procedimento adotado por Spivak (1975) ao trabalhar com a noção de limite. Depois de utilizar, em diversos exemplos, a definição provisória anteriormente apresentada, passa a destacar os problemas existentes na mesma, e após uma argumentação por meio da qual começa a fornecer aos leitores pistas relativas aos aspectos que deverão ser levados em consideração para a formalização da noção que está sendo estudada, constrói, passo a passo, a definição formal de limite de uma função. A descrição detalhada de tal procedimento encontra-se nas páginas 109 e 110 do manual supracitado.

Destaca-se que um dos professores envolvidos na experiência adotada na USP de ministrar Cálculo tomando-se como referência o manual de Spivak adotava em suas aulas uma estratégia bastante semelhante à do autor, mas, ao invés de recorrer às definições provisórias, lançava mão de demonstrações provisórias ou de "rascunhos" de demonstrações, como ele mesmo as denominava. Lima (2012), durante a coleta de dados para sua tese de doutorado, teve acesso ao caderno de um aluno desse professor e pôde observar, por exemplo, como o docente demonstrava que, sendo $f(x) = x^2$, então $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$:

Rascunho:

Sei que $|x-2| < \delta$. Quero $|x^2-4| < \varepsilon$

$|(x-2).(x+2)| = |x-2|.|x+2| < \varepsilon$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$$

Não pode ser, pois δ não pode ser dado em função de x. Portanto, faz-se:

Seja δ tal que $|x+2| < M$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$|x+2| = |x-2+4| \leq |x-2| + 4$$

Se $|x-2| < 1$, então $|x+2| < 5$. Quero $|x-2| < \delta$. Portanto $\delta < 1$ e $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. Se $0 < |x-2| < \delta$, temos:

$$|f(x)-4| = |x^2-4| = |(x-2).(x+2)| = |x-2|.|x+2| =$$

$$= |x-2|.|x-2+4| \leq |x-2|.(|x-2|+4) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{5}.(1+4) = \frac{\varepsilon}{5}.5 = \varepsilon.$$

Observa-se que, do ponto de vista didático, esse processo detalhado de construção de uma definição formal a partir de uma definição provisória ou mesmo de uma demonstração a partir de um rascunho parece favorecer ao estudante a compreensão do papel de cada um dos elementos e símbolos presentes na mesma. Esse tipo de abordagem evidencia a possibilidade de, de maneira exequível, se apresentar o Cálculo por meio de um tratamento que considere o rigor simbólico-formal da Matemática, mas nem por isso seja incompreensível para o aluno.

4. Considerações finais

Conforme destacado na introdução desse trabalho, não se confirma a ideia manifestada por alguns professores de um dos autores desse artigo de que, atualmente, os alunos enfrentam dificuldades nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral devido à forma com que esse conteúdo é trabalhado e aos livros que, hoje em dia, são indicados como referências. É comum observar pessoas que construíram sua formação já há algum tempo e que vivenciaram experiências educacionais bastante diferentes das observadas no presente momento supervalorizarem tais experiências, sem qualquer tipo de análise crítica aprofundada a respeito das mesmas. De maneira análoga, observa-se que muitas pessoas que estão se formando nos dias atuais têm a tendência de rechaçar, também sem antes analisá-las criticamente, práticas adotadas em contextos educacionais anteriores àqueles que estão vivenciando. É preciso ponderação de ambas as partes para que, na busca por práticas que possam efetivamente garantir a aprendizagem dos alunos do mais diversos níveis educacionais, possa-se levar em consideração não somente os erros do passado, mas também seus acertos, e não somente os avanços trazidos pelas tendências em vigor no momento, mas também suas limitações e retrocessos em relação àquilo que já havia sido posto em prática em algum momento.

No caso específico do processo de ensino do Cálculo Diferencial e Integral, se, por um lado, pode-se perceber, analisando a implantação e o desenvolvimento dessa disciplina no ensino superior brasileiro, que realmente em um primeiro contato dos alunos com tal conteúdo deve-se valorizar a construção, por parte dos mesmos, de significados para os conceitos centrais desse campo de conhecimento e também a manipulação dos mesmos, por outro se pode notar que, pouco a pouco, interpretações equivocadas dessa ideia acabaram ocasionando a transformação de muitos cursos iniciais de Cálculo ministrados no país segundo duas orientações distintas; (i) transformar tais cursos em coletâneas de técnicas, esvaziando-os daquelas discussões conceituais que são centrais mesmo em um contato inicial do estudante com a disciplina ou (ii) transformar tais cursos em uma série de teoremas seguidos de suas demonstrações sem dar ao aluno qualquer possibilidade de compreensão efetiva daquilo que está sendo apresentado e, contraditoriamente, cobrando do mesmo apenas o domínio de técnicas de cálculos de limites, derivadas e integrais. Da mesma forma, observa-se que, paulatinamente, grande parte dos livros de Cálculo que foram sendo produzidos por autores nacionais e internacionais e que passaram a ser adotados como referências nas universidades brasileiras, visando adequar à apresentação do conteúdo a um nível de rigor mais compatível à maturidade matemática dos ingressantes no ensino superior, acabaram deixando de lado preocupações didáticas importantes, dentre as quais aquelas explicitadas nesse artigo e presentes em textos utilizados como referências em cursos de diferentes épocas.

É importante salientar que a busca contínua por estratégias que possam minimizar os problemas observados nos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, não necessita nem de uma supervalorização e nem de uma subvalorização das experiências e práticas já adotadas e/ou vivenciadas em diferentes épocas, bem como dos manuais utilizados como referências durante as mesmas. É preciso que se tome consciência de que, conforme pontua Rezende (2003) e complementa Lima (2012), a disciplina inicial de Cálculo necessita, no Brasil especificamente desde a implantação do curso de Análise Matemática na USP em 1934, de uma identidade.

A construção de tal identidade é urgente e pode ser beneficiada tanto por preocupações, especialmente do ponto de vista didático-pedagógicas, observadas em experiências e manuais adotados em cursos do passado, quanto em resultados de pesquisas recentes, livros atuais e práticas em vigor que têm se mostrado eficientes para que o aluno, de fato, tenha condições de construir conhecimentos relativos ao Cálculo. É preciso, dentre outros fatores importantes, que o curso inicial de Cálculo permita que o rigor e a intuição estabeleçam uma relação dialética, que a aprendizagem relacional da Matemática seja valorizada pelo docente e perseguida pelo aluno e que se busquem, tanto nas aulas quanto nos textos que servem de referência para as mesmas, maneiras adequadas de contextualizar aquilo que está sendo trabalhado, isto é, formas de possibilitar uma abordagem na qual os conceitos estudados sejam efetivamente compreendidos pelo aluno em seu ambiente de origem, que é o ambiente matemático, e na qual estejam vinculados a outros conhecimentos de forma articulada, mostrando-se, assim, efetivamente necessários ao contexto matemático e não como algoritmos isolados.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los câmbios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), vol. 1, n. 1, 40 – 55. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf

CANTORAL, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo baseada en La cognición. *Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matematica Educativa*, Universidad de Panamá, Panamá. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf

D´AMBROSIO, U. (2009). *Entrevista concedida a Gabriel Loureiro de Lima*. São Paulo, 18 de fevereiro.

DEMIDOVITCH, B. (1977). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática* . Editora Mir, Moscou.

DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

FISCHER, B. T. D. (2009). Docência no ensino superior: questões e alternativas. *Educação*, vol. 32, n. 3, 311 – 315. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/5778/4199

GASCÓN, J. (1997). *Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad. Revista SUMA*, 26, 11-21.

______. (2009). El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 11, n. 2, 273 – 302. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2184/1805

GIMÉNEZ, C. A; MACHÍN, M. C (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. X, n. 2.

GUIDORIZZI, H. L. (1979). *Um Curso de Cálculo (capítulos 2 e 3).* São Paulo.

HARDY, G. H. (1955). *A Course of Pure Mathematics*. University Press: Cambridge, Tenth Edition.

HENRIQUES, A. C. C. B. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. Tese de doutorado. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Acesso em 21 de novembro de 2014 em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/2465/1/ulsd059643_td_Ana_Henriques.pdf

HOLTON, D. (2001). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series*: Vol.7.

LEITHOLD, L. (1977). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução de Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques e Sebastião Antonio José Filho. Editora Harper & Row do Brasil Ltda, São Paulo.

LIMA, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento de 1934 a 1994.* Tese de doutorado. Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática – PUC-SP. São Paulo.

______. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de Cálculo na graduação em Matemática da USP. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 16, n.1, 125-149. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16741/pdf

LUCAS, C. O.; FONSECA BOM, C.; GASCÓN, J.; CASAS, J. M. (2014). Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário. *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 16, n. 3.

MARCOLINI, M. e PERALES, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para La educación universitária. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), vol. 8, n. 1, 25 – 68. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://www.clame.org.mx/relime/200502a.pdf

MOISE, E. E. (1972). *Cálculo: um curso universitário – volume 1* – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. das G. C. (2002). *Docência no Ensino Superior*. Editora Cortez (coleção Docência em Formação v. 1), São Paulo.

PISKUNOV, N. (1969). *Cálculo Diferencial e Integral – tomo 1*. Editora Mir, Moscou.

PROTTER, M. H. e MORREY JR, C. B. (1962). *Calculus with Analytic Geometry: a first course*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

REZENDE, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* Tese de doutorado. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SILVA, B. A. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, vol.13, n. 3, 393 - 413. Acesso em 21 de novembro de 2014 em http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7101/5993

SPIVAK, M. (1975). *Cálculo Infinitesimal*. Reverte, Barcelona.

TALL, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

TÁBOAS, P. Z. (2005). *Luigi Fantappiè: influências na Matemática brasileira. Um estudo de História como contribuição para a Educação Matemática*. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo.

Benedito Antonio da Silva
beantonio.silva@gmail.com
Rua Dr. Diogo de Faria, 561 - Ap. 62 - Vila Clementino, São Paulo – SP, Brasil.
CEP: 04037-003
Tel (11) 5575.1943.
CV: graduado, mestre e doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, com experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente em investigações sobre o processo de ensino e aprendizagem das noções do Cálculo, sob o ponto de vista das componentes: saber, aluno e professor dos diferentes níveis de ensino. Orientou as teses premiadas com Menções Honrosas na área de Ensino no Prêmio Capes de Teses 2013 e Prêmio Capes de Teses 2014.

Gabriel Loureiro de Lima
gllima@pucsp.br
Rua Bragança Paulista, 41 – Jardim Pacaembu, Jundiaí-SP, Brasil.
CEP: 13218-250
Tel (11) 4533-8330 ou (11) 9-9507-4935.
CV: bacharel, licenciado e mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas, doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do Departamento de Matemática da PUC-SP e coordenador do Curso de Matemática-Licenciatura, da mesma instituição. Tem como principal área de interesse o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, com ênfase no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Sua investigação de doutorado, orientada pelo Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, recebeu menção honrosa na área de Ensino no Prêmio Capes de Teses 2013.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 43. Diciembre 2015
Páginas 112-115

A MATEMÁTICA NOS PROGRAMAS DO ENSINO NÃO-SUPERIOR (1835-1974)

António José Almeida
José Manuel Matos
Coordenadores

UIED – Coleção Educação e Desenvolvimento
APM — Associação de Professores de Matemática

A matemática nos programas do ensino não-superior (1835-1974)

1ª edição: Maio 2014

ISBN: 978-989-97487-5-0

Depósito: 378267/14

Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento
Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
2829–516 Caparica, Portugal
Tel: +351 212948383
e-mail: uied.secretariado@fct.unl.pt, http://www.uied.fct.unl.pt

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel: +351 21 716 36 90
e-mail: geral@apm.pt

Este trabalho é financiado por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto «PEst–OE/CED/UI2861/2014» e do Projeto PTDC/CPE-CED/121774/2010

Capa e arte gráfica: Luís Barreira

Impressão e acabamento:
Várzea da Rainha Impressores SA.
Estrada Nacional 8, nº 6
2510– 082 Óbidos, Portugal
Tel: +351 262098008

Resenha

Manuel Joaquim Saraiva

Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal

manuels@ubi.pt

Este livro e o suporte digital associado oferecem uma compilação e uma análise dos programas de matemática do ensino não-superior publicados em Portugal entre 1835 e 1974. Com a sua divulgação, os autores pretendem proporcionar uma fonte de dados e de reflexões aos investigadores interessados na história do ensino da matemática.

Estudar os programas, segundo os autores, ajuda-nos a compreender algumas das dimensões que, segundo eles, constituem a matemática escolar contemporânea, designadamente: i) a matemática escolar, ii) os temas, iii) o tipo de conhecimento matemático desejado, iv) os métodos e v) as tecnologias materiais.

Conhecer o passado, e segundo José Manuel Matos, "é ir para além de visões simplistas e redutoras que tanto o glorificam como "o tempo do antigamente é que era bom", como o desprezam como "ensino tradicional". Contrariando a glorificação das escolas do passado, sabemos que durante a maior parte do antigamente apenas uma pequena minoria tinha acesso à escola e que, mesmo para essa, o abandono e o insucesso eram muito elevados. Quanto aos métodos, muito provavelmente, tal como nos dias de hoje, a prática escolar recorria essencialmente ao ensino expositivo. Mas ao percorrer os programas não podemos deixar de notar que as aspirações dos legisladores, muitas vezes eles próprios professores profundamente empenhados numa prática de melhoria do ensino,

são bem mais complexas, contrariando também a sua condenação como "ensino tradicional". Se em determinadas épocas (anos 1930 e 40) se pretendeu um abaixamento geral da qualidade da formação escolar, reduzindo programas e exaltando apenas a memorização e a repetição de procedimentos, noutras, em particular no ensino pós-primário, pretendeu-se levar aos que frequentavam as escolas uma matemática de qualidade integrando uma formação humana integral.”

Neste livro é feita uma clarificação dos conceitos de Programa, de Matemática e de Ensino Não-Superior.

No livro, a análise dos programas está estruturada segundo o grau de ensino. Ao capítulo de Introdução, com o enquadramento histórico do ensino da matemática no ensino não-superior, segue-se o capítulo 2, onde é analisado o ensino primário e algumas das suas extensões. O capítulo 3 apresenta a evolução da matemática nos liceus. Por fim, o capítulo 4 trabalha a evolução da matemática nas escolas profissionais.

O livro termina com o Apêndice “Investigações sobre a história do ensino da matemática em Portugal”, o qual inclui uma indicação de trabalhos de investigação que contribuem para a compreensão da história do ensino da matemática em Portugal.

Este livro é, sem dúvida, um precioso elemento para os investigadores da história do ensino da matemática, para os educadores matemáticos e para os professores de matemática.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 42. Diciembre 2015
Páginas 116-123

www.fisem.org/web/union

El rincón de los problemas

Actividades lúdicas y creación de problemas (1)

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

*Sobre una mesa se tiene **n** cartas de una baraja y un recipiente con cierta cantidad de granos de maíz. Los granos de maíz se ponen sobre las cartas, de modo que quedan dos granos sobre cada una de **p** cartas, siendo **p** < **n**. Si ya no quedan más granos de maíz en el recipiente, ¿es verdad que, considerando los totales, hay **(n – 2p)** cartas más que granos de maíz?*

Este problema es una versión generalizada de un problema propuesto por Abril, una niña de 6 años, de educación inicial, mientras jugaba conmigo, su abuelo, con cartas de una baraja incompleta que ella encontró. El marco en el que se desarrollan las actividades es completamente doméstico y espontáneo. Es una muestra que la actividad creativa de problemas se enriquece con las interacciones entre el profesor y el alumno, desde los niveles educativos más elementales. La capacidad creativa y la imaginación de los niños es enorme y es tarea fundamental de los profesores saber estimularlas y orientarlas adecuadamente. Si el profesor tiene experiencia creando problemas, puede ir creándolos mientras juega con los niños y estimular a que ellos creen sus propios problemas. Luego, reflexionando las ideas de ellos, crear nuevos problemas o hacer algunas generalizaciones, para niveles educativos más avanzados.

Narraré la secuencia de juegos con Abril, basados en las preguntas que ella hacía y en las inquietudes que manifestaba cuando encontró la baraja incompleta.

> Niña: ¿Qué es esto, abuelo?
>
> Abuelo: Son unas tarjetas que se llaman cartas y sirven para jugar
>
> Niña: (Con entusiasmo) ¿Para jugar? ¿Y cómo se juega?
>
> Abuelo: Hay varias formas, pero lo más lindo es que se puede inventar juegos.
>
> Niña: ¡Inventemos un juego!
>
> Abuelo: ¡Inventemos! Quizás es bueno observar primero cómo son las cartas…¿son todas iguales?
>
> Niña: (Observando) Por un lado son todas iguales pero por el otro lado tienen figuritas de color rojo o de color negro.

La niña había estado jugando antes con sus peluches preferidos: Preciosa y Lucerito.

Niña: Pero yo quiero que jueguen también Preciosa y Lucerito…

Abuelo: Bueno, entonces … ¿qué te parece si repartimos las tarjetas?. Unas para Preciosa y otras para Lucerito.

Niña: ¡Ya! Las rojas para Preciosa y las negras para Lucerito.

Abuelo: ¡Buena idea!

Niña: (Luego de hacer correctamente el reparto, en dos montones) Ya. ¿Y ahora?

Abuelo: Ahora necesitamos saber quién tiene más cartas ¿Lucerito o Preciosa? Pero el juego consiste en saber esto **sin contar las cartas**

Niña: ¿Sin contarlas? No se va a poder….

Abuelo: Así es el juego… Pensemos un poco cómo hacerlo… tenemos que comparar estas cantidades… No es necesario contar.

Niña: (Luego de pensar un rato, acomodó los dos montoncitos de cartas, los puso uno al lado de otro y comparó las alturas) Ya sé: Preciosa tiene más.

Abuelo:¿Por qué dices que Preciosa tiene más cartas que Lucerito?

Niña: Porque este montoncito es más alto que el de Lucerito.

Abuelo: ¡Qué buena idea! Ahora el juego consiste en saber **cuántas cartas más que Lucerito tiene Preciosa.**

Niña: Ahora sí tenemos que contar…

Abuelo: Puede ser… pero no vale contar todas las cartas. Puedes contar algunas.

Niña: (Luego de pensar un rato) No puedo …

Abuelo: ¡Claro que sí puedes! Seguramente puedes hacer algo con las cartas que están en los montoncitos…

La idea del abuelo es orientar a la niña a que ponga las cartas de cada montoncito sobre la mesa para establecer una correspondencia entre ellas, que obviamente no va a ser biunívoca y así obtener la diferencia.

Niña: (Luego de seguir pensando, saca algunas cartas del montoncito de Preciosa para que sea de la misma altura que el montoncito de Lucerito. Mira a su abuelo y con una sonrisa le enseña las 5 cartas que sacó.)

Abuelo: ¡Muy bien! Has hecho algo que a mí no se me habría ocurrido… ¿Entonces podemos decir que Lucerito tiene 5 cartas más que Preciosa?

Niña: ¡Sí!

Abuelo: Tú has hecho esto mirando las alturas de los montoncitos, pero quizás no son exactamente de la misma altura…

Niña: Sí son

Abuelo: A ver, saca una carta del montoncito de Preciosa.

Niña: (Saca una carta)

Abuelo: ¿No te parece que los dos montoncitos, de Lucerito y de Preciosa, siguen siendo de la misma altura?

Niña: Si…parece….

Abuelo: Entonces no podemos estar seguros si Preciosa tiene 5 cartas más que Lucerito o 6 cartas más que Lucerito…

Niña: Humm…

Abuelo: El juego consiste en saber exactamente cuántas cartas más que Lucerito tiene Preciosa. Yo creo que 5. ¿Tú que crees?

Niña: Yo creo que 6

Abuelo: ¿Cómo podemos saber exactamente?

Niña: Contando

Abuelo: Pero la regla del juego es que no se puede contar todas las cartas.

Niña: No sé…

Abuelo: A ver. Vuelve las 6 cartas al montoncito de Preciosa. No te gustaría saber cuáles son las cartas que le tocó a Lucerito y cuáles las cartas que le tocó a Preciosa?

Niña: ¡Sí!

Abuelo: ¿Qué hacemos?

Niña: Miramos.

Abuelo: Pero para poder verlas a todas…

Niña: (Comienza a poner las cartas de cada montoncito sobre la mesa, con las figuras hacia arriba.)

Abuelo: ¡Qué buena idea!

Observando las dos distribuciones de cartas, se hacen algunos comentarios sobre las figuras en las cartas de Lucerito y en las cartas de Preciosa y el abuelo retoma la idea de saber cuántas cartas más tiene Preciosa.

Abuelo: Y ahora creo es más fácil saber cuántas cartas más que Lucerito tiene Preciosa….

Niña: ¿Ya las podemos contar?

Abuelo: Sí, pero como te dije, no todas las cartas.

Niña: (Silencio… observación…)

Parece que la niña no se imagina la posibilidad de establecer una correspondencia entre ambos conjuntos.

Abuelo: A ver, cómo sería si Preciosa y Lucerito tuvieran menos cartas… (Aparta cartas de cada conjunto y deja 2 en el que corresponde a Lucerito y 3 en el que corresponde a Preciosa) En este caso, ¿cuántas cartas más que Lucerito tiene Preciosa?

Niña: ¡Una carta más!

Abuelo: Pero creo que has contado ¿eh?

Niña: No, no he contado, he visto nomás.

Abuelo: ¿Podemos decir que cada carta de Lucerito tiene una “carta amiga” de las cartas de Preciosa?

Niña: ¿Cómo carta amiga…?

Abuelo: Una carta con la que haga una pareja…

Niña: Ah sí: Esta con esta, y esta con esta (señalando las “cartas amigas” con su dedo índice derecho)

Abuelo: Alguna carta se quedó sin “carta amiga”?

Niña: Sí, esta (señala la tercera carta de Preciosa)

Abuelo: Eso es porque Preciosa tiene …..

Niña: Tiene una carta más que Lucerito!

Abuelo: ¡Claro! ¡Y no has contado!

Se nota la cara de felicidad de la niña

Abuelo: Entonces podemos hacer algo parecido con más cartas. ¿Qué te parece?

Niña: Ya

Abuelo: (Repone algunas cartas adicionales en los conjuntos de Preciosa y Lucerito. 5 en el de Lucerito y 2 en el de Preciosa. Asi, totaliza 7 cartas para Lucerito y 5 cartas para Preciosa) En este caso, ¿quién tiene más cartas?

Niña: (Luego de observar) ¡Lucerito!

Abuelo: ¿Cuántas más? ¡Sin contar, eh!

Niña: ¿Hago lo de las cartas amigas?

Abuelo: Ya funcionó ese juego antes, claro que puedes hacerlo

Niña: A ver: esta con esta, esta con esta, esta con esta, esta con esta y esta con esta (poniendo su dedo índice derecho primero en una carta de Preciosa y luego en una carta de Lucerito)

Abuelo: ¿Y? todas las cartas de Preciosa tienen amigas?

Niña: Sí, pero estas se quedaron sin amigas (señalando 2 cartas de Lucerito)

Abuelo: Entonces ¿quién tiene más? ¿Preciosa o Lucerito?

Niña: ¡Lucerito!

Abuelo: ¿Cuántas cartas más?

Niña: 2 cartas más que Preciosa.

Abuelo: ¡Muy bien! Ahora creo que ya podemos jugar con todas las cartas de Preciosa y con todas las cartas de Lucerito (repone todas las cartas a cada conjunto)

Niña: Pero ahora me voy a confundir con las amigas…

Abuelo: Intenta formar las parejas de cartas amigas de otra forma.

Niña: (Empieza a usar las dos manos simultáneamente, señalando parejas de cartas amigas) Creo que quedan estas cartas de Preciosa sin amigas… (muestra varias cartas de Preciosa)

Abuelo: ¡Lo has hecho muy bien! Entonces, podemos contar estas cartas y así tenemos que son 9 cartas más que Lucerito las que tiene Preciosa ¿verdad?

Niña: ¡Si!

Abuelo: Y antes dijimos que eran 5 o 6… ¿No habrá alguna falla en lo que has hecho, encontrando cartas amigas con tus dos manos?

Niña: Lo hace otra vez y ahora le quedan 8 cartas sin amigas…(Carita de sorprendida)

Abuelo: Mmmm… Lo que pasa es que con ambas manos es fácil confundirse. Veamos otra forma más segura… Quizás juntando a las cartas amigas…

Niña: ¡Sí! (Lleva cada carta del conjunto de Preciosa y la pone encima de cada carta del conjunto de Lucerito. Al terminar esta asociación, le quedan varias cartas de Preciosa sin amigas. Las cuenta y son 9) ¡9 cartas sin amigas!

Abuelo: O sea, ¿cuántas cartas más que Lucerito tiene Preciosa?

Niña: ¡9 pues!

Abuelo: ¡Muy bien Abrilcita! ¡Super bien! Ahora sí estamos seguros que Preciosa tiene 9 cartas más y los dos nos habíamos equivocado enantes, pues yo pensaba que Preciosa tenía 5 cartas más que Lucerito y tú dijiste que tenía 6 más…

Abril se distrae y se pone a jugar saliendo de la mesa y llevándose a Preciosa.

El abuelo ha quedado encantado con la sesión de juego y matemática que surgió espontáneamente. Desea seguir, pero respeta la inquietud de la niña. Sin embargo, busca en la casa algo con qué complementar el juego de las cartas y reforzar el descubrimiento de Abril de la asociación uno a uno de elementos de un conjunto con los elementos de otro, para saber cuál tiene más elementos; y, para saber cuántos elementos más tiene un conjunto respecto al otro, contar los que no tienen pareja. El abuelo encuentra un recipiente con granos de maíz, toma un puñado, los pone en un recipiente más pequeño y espera un momento oportuno para seguir jugando con Abril. Se presenta la ocasión y la invita a Abril a seguir jugando.

Abuelo: Abril, mira lo que encontré (le muestra los granos de maíz)

Niña: ¿Qué es? ¡Ah! Maíz…

Abuelo: Sí. ¿Sabes lo que se me ha ocurrido? Seguir jugando con las cartas, pero ahora también con el maíz.

Niña: ¿Cómo?

Abuelo: ¿Qué habrá más? ¿Cartas o granos de maíz?

Niña: Y seguramente sin contar…

Abuelo: ¡Adivinaste! Bueno, juntemos las cartas de Lucerito y de Preciosa y veamos qué hay más.

Niña: Pero ya no podemos formar cartas amigas…

Abuelo: Pero podemos formar amigos entre granos de maíz y cartas …

Niña: ¡Ah! Ya sé cómo (pone las cartas sobre la mesa y empieza a poner un grano de maíz sobre cada carta. Se le acaban los granos de maíz y quedan cartas sin grano de maíz. Cuenta las cartas) ¡Ya! Hay 7 cartas más que maíz.

Abuelo: ¡Super bien Abrilcita! Ahora voy a cambiar un poco la situación y tú me dices si hay más granos de maíz o cartas. (Deja varias cartas con sus granos de maíz, retira las otras cartas y pone en la mesa unos granos de maíz, solos)

Niña: (Observa) Ahora sobran granos de maíz.

Abuelo: Recuerda que mi pregunta es ¿Qué hay más, cartas o granos de maíz?

Niña: ¡Granos de maíz, pues!

Abuelo: ¿Cuántos granos de maíz más?

Niña: (Cuenta los granos que no están sobre cartas) 7 granos de maíz más.

Abuelo: Ahora te toca a ti. Te toca inventarte un juego. Pon un poco más de maíz, agrega algunas cartas y acomoda las cartas y granos de maíz para que yo mire y te diga si hay más granos de maíz o cartas y cuánto más.

Abril: Ya, pero no mires hasta que yo te diga.

La niña hace sus arreglos y luego me muestra la siguiente configuración y me pregunta **¿qué hay más? ¿cartas o granos de maíz?**

Abuelo: ¡Ups! Me la pusiste difícil ¿eh? (En verdad, el abuelo queda sorprendido y contento. La niña ha puesto dos granos de maíz en algunas de las cartas) ¿Qué puedo hacer? A ver, como hay dos granos de maíz en estas cartas, saco un grano de maíz y lo pongo en las cartas que no tienen maíz…

Niña: ¡NO!. Eso no vale porque ese juego ya lo hemos hecho antes. No vale mover el maíz.

Abuelo: ¡Me la pones más difícil! (Pensaba lo interesante que resultó este problema propuesto por la niña. Era realmente un problema, pues el camino conocido no me lo permitía la niña. Tenía que pensar en una solución diferente…) ¡Ya sé! Entonces muevo las cartas y pongo una debajo de cada carta que tiene dos granos de maíz. Así tengo montoncitos de dos cartas y dos granos de maíz.

Procedí como lo dicho y me quedaron 8 cartas sin granos de maíz.

Abuelo: ¡Ya está! Hay más cartas que granos de maíz y son 8 cartas más. ¿Te das cuenta por qué?

Niña: Es que hasta aquí hay dos cartas con sus dos amigos de maíz y solo quedan estas cartas sin amigos (señalando las 8 sin granos de maíz).

Abuelo: ¡Perfecto Abrilcita!

Niña: Pero ya quiero jugar con mi lego…

Abuelo: Anda Abrilcita. ¡Gracias! ¡Nos hemos divertido y hemos aprendido matemáticas!

Los comentarios de esta experiencia lúdica y didáctica, así como la solución del problema propuesto, se harán en el próximo número de UNIÓN.

Si me envían comentarios, les agradeceré y ¡serán bienvenidos!