UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XII – Número 46 – Junio

2016 http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex***.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 02-07

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos:

Este es el número 46 de la revista UNIÓN. Se compone de diez artículos, siendo que uno de ellos la firma invitada, dos de experiencia de aula, la revisión de un libro y la sección dedicada a la solución de problemas.

Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés son nuestros invitados cubanos, nos proporcionan el artículo llamado **"***Problematización histórica de temas matemáticos fértiles*"**,** sobre la renovación del discurso matemático tradicional. Aportan ideas desde su experiencia para compartirlas con el profesorado de bachillerato y cursos básicos. Estas ideas reflejan la orientación histórica, la metodología dialéctica y las técnicas de resolución de problemas, para lograr un discurso matemático más coherente con el pensamiento actual.

Rojas y Matas publican "*Autómatas celulares y aplicaciones*", un ejemplo didáctico de la aplicación de autómatas celulares para el cifrado de información y el cifrado de secretos como propuesta para su estudio por los estudiantes de Ingeniería Informática.

"*Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada*" es el artículo de González y Flores, que discute la concepción y la experimentación de una situación de aprendizaje para la enseñanza de derivada para estudiantes que se inician en la Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Rodríguez y Martínez**,** publican "*Reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas en un curso de formación continua*", en el que reflexionam sobre el proceso reflexivo de dos profesores de matemática participantes en un curso de capacitación realizado en Chile, a partir de un modelo de reflexión (Korthagen, 1985) y de unos niveles de reflexión (Hatton y Smith, 1993).

La génesis cognitiva de la demostración en geometría es el tema del artículo de Fonseca Pinto y Esquincalha cuyo título es "*Concepções de licenciandos em Matemática* *sobre demonstração em Geometria*". Los autores de este artículo abordam el tema a partir de una actividad realizada con alumnos de Matemáticas en Río de Janeiro.

"*¿Qué concepciones favorecen el desarrollo de propuestas en el enfoque sociocultural?: Una experiencia con estudiantes para profesor de la LEBEM*" es el título del artículo de Leal y Hernández. Este artículo es el resultado de un estudio sobre las concepciones de propuestas alternativas en Educación Matemática.

Fuentes, Acero, Casallas, Acosta y Diaz publican los resultados del grupo de investigación en Etnomatemática de la Universidad Francisco José de Caldas. Describen elementos teóricos que podrían ayudar a identificar algunas orientaciones o directrices, a partir de las opiniones de un grupo de profesores. El título de este artículo es **"***¿Cómo abordar la diversidad en el aula de matemáticas?: algunas necesidades de formación de un grupo de docentes del distrito capital, en Colombia*".

El siguiente artículo titulado **"***Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje*" ha sido escrito por Marin y Castro. Este estudio se centra en el análisis del desarrollo de la capacidad y la valoración de la magnitud del volumen en estudiantes de noveno grado de la Escuela Primaria Secundaria del sistema de educación colombiano. Los resultados muestran como los estudiantes evaluados han mejorado significativamente la capacidad para estimar cantidades en la medida del volumen.

Rosa, Silva, Passos y Seriani son los autores del artículo "*Professores de matemática no ensino superior: desafios vivenciados no início da carreira docente*". Los resultados de este artículo indican que los maestros del estudio, tienen conciencia de su condición de formadores, así como sus conocimientos y limitaciones para actuar como buenos profesionales; aunque día a día, se enfrentan con el desafío de repensar su práctica en el aula.

"*Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto de derivada en problemas de optimización*" es el título del artículo de Ibarra, Aguilar, Leyva y Lugo. El tema de este artículo es la enseñanza del cálculo que muestra una propuesta en la que utiliza una hoja de trabajo, un artefacto físico, así como un archivo de GeoGebra para resolver un problema de optimización de la vida cotidiana.

Este número 46 incluye dos trabajos para el aula: "*Jugueteando con Grafos*" de Santiago, Valdés, Hidalgo e Quirós y "*Mathematics Teachers' Constructions of Circle Theorems in a Dynamic Geometry Environment*" de Caglayan.

En el primero hay una serie de problemas de diferentes situaciones reales que se resuelven mediante técnicas de Teoría de Grafos. Y el segundo, se refiere a la atribución de significado de una variedad de teoremas que utilizan arcos de círculo, segmentos, cuerdas, tangentes y secantes construídos con GeoGebra.

En la sección de problemas, encontraremos las preciosas contribuciones de Uldarico Malaspina Jurado com el título *Patrones y generalizaciones a partir de un juego.*

Brito ha preparado una reseña sobre el libro:: "História da Matemática e suas (re)construções contextuais". El libro escrito por Fumikazu Saito es parte de la colección Historia de las Matemáticas para Profesores, publicado por la Editora Livraria da Física. Saito es doctorado y posdoctorado en Historia de la Ciencia, es profesor en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo y actúa como investigador en el Centro Simón Mathias de Estudios en la Historia de la Ciencia (CESIMA-PUC/SP). Su producción académica relevante emerge de la investigación que se desarrolla en la zona de interconexión entre la Historia de la Ciencia y la Educación Matemática.

Para terminar, quisieramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores.

Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar

Sonia Igliori

Editorial

Estimados colegas e amigos:

Este é o número 46 da Revista Unión. Ele é composto de dez artigos, sendo um da *firma invitada*, dois de experiências de sala de aula, a resenha de um livro, bem como a seção de resolução de problemas.

Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés são nossos convidados cubanos. Eles nos presenteiam com o artigo denominado **"***Problematización histórica de temas matemáticos fértiles*"**,** quando discutem a questão da renovação do discurso matemático tradicional. Aportam ideas desde una experiencia particular con la intención de compartir con los profesores de bachillerato y cursos básicos. Estas ideas reflejan la orientación histórica, la metodología dialéctica y técnicas de resolución de problemas, para dar el discurso matemático más coherente con el pensamiento actual.

Rojas e Matas trazem "*Autómatas celulares y aplicaciones*", com um exemplo didático da aplicação de autômatos celulares para a encriptação de informação e partilha de segredos, destinado à atividade acadêmica de estudantes de Engenharia Informática.

"*Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada*" é o artigo de González e Flores, no qual é discutida a concepção e a experimentação de uma situação de aprendizagem para o ensino de derivada para estudantes iniciantes universitários, inscritos na Universidade Autónoma de Guerrero, México. São tematizados: a variação e a transição entre os registros de representação**.**

Rodríguez e Martínez**,** com "*Reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas en un curso de formación continua*" refletem sobre o processo reflexivo de dois professores de matemática participantes de um curso de formação no Chile, a partir de um modelo de reflexão (Korthagen, 1985) e os níveis de reflexão (Hatton e Smith, 1993).

A gênese cognitiva da demonstração em Geometria é tratada no artigo de Fonseca Pinto e Esquincalha em "*Concepções de licenciandos em Matemática sobre demonstração em Geometria*". Os autores desse artigo tratam do tema a partir de uma atividade realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática no Rio de Janeiro.

"*¿Qué concepciones favorecen el desarrollo de propuestas en el enfoque sociocultural?: Una experiencia con estudiantes para profesor de la LEBEM*" é o título do artigo de Leal e Hernández**.** Nesse artigo está o resultado de um estudo sobre as concepções de propostas alternativas em Educação Matemática.

Fuentes, Acero, Casallas, Acosta e Diaz trazem resultados do grupo de pesquisa em Etnomatemática da Universidade Francisco José de Caldas**.** Buscaram elementos teóricos que pudessem ajudar a identificar algumas orientações ou diretrizes e foi proposto procurar os pontos de vista de um grupo de professores**.** Esse artigo intitulou-se**: "***¿Cómo abordar la diversidad en el aula de matemáticas?: algunas necesidades de formación de un grupo de docentes del distrito capital, en Colombia*"**.**

O sétimo artigo foi intitulado **"***Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje*" e escrito por Marin e Castro. Este estudo centra-se na análise do desenvolvimento da capacidade e estimativa da magnitude de volume de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental Secundário do sistema educacional colombiano. Os resultados mostram como os alunos avaliados melhoraram significativamente a capacidade de estimar grandezas contínuas em volume ocupado.

Rosa, Silva, Passos e Seriani são os autores do artigo "*Professores de matemática no ensino superior: desafios vivenciados no início da carreira docente*". Os resultados desse artigo indicam que os professores do estudo demonstraram ter consciência de sua condição de formadores, de seus saberes e limitações para atuar como bons profissionais; mas no dia a dia, deparam-se com o desafio de repensar sua prática em sala de aula.

"*Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización*" é o título do artigo de Ibarra, Aguilar, Leyva e Lugo. O tema desse artigo é o ensino do Cálculo apresentando a proposta de uma atividade com uma folha de trabalho, um manipulável físico, assim como um arquivo do GeoGebra para resolver um problema de otimização da vida quotidiana.

O número 46 traz dois trabalhos para a sala de aula: "*Jugueteando con Grafos*" de Santiago, Valdés, Hidalgo e Quirós e "*Mathematics Teachers' Constructions of Circle Theorems in a Dynamic Geometry Environment*" de Caglayan.

No primeiro há uma série de problemas provenientes de diferentes situações da vida real que são resolvidos através de técnicas próprias da Teoria dos Grafos. E o segundo trata da atribuição de significado de uma variedade de teoremas envolvendo arcos de círculo, segmentos, cordas, tangentes e secantes, utilizando GeoGebra.

Na seção de problemas encontraremos as contribuições preciosas de Uldarico Malaspina Jurado com o título *Patrones y generalizaciones a partir de un juego.*

Brito elaborou a resenha do livro: "*História da Matemática e suas (re)construções contextuais*". O livro é de autoria de Fumikazu Saito e é parte da coleção História da Matemática para Professores da Editora Livraria da Física. Saito possui doutorado e pós-doutorado em História da Ciência, é professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e atua como pesquisador no Centro Simão Mathias de Estudos em História da Ciência (CESIMA-PUC/SP). Sua relevante produção acadêmica emerge das pesquisas que desenvolve na área de interconexão entre História da Ciência e Educação Matemática

Finalmente queremos agradecer o trabalho dos revisores e dos demais colaboradores.

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar

Sonia Igliori

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 08

FIRMAS INVITADAS

Carlos Sánchez Fernández: Nació y vive en Cuba desde 1947. Es licenciado en Matemática por la Universidad de La Habana (1970) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad "Lomonosov" de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Colombia, Costa Rica, España, Francia, México, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana, Sudáfrica y Uruguay. Tiene más de 60 publicaciones, de éstas 7 textos en uso. Es miembro del Comité Asesor Internacional del CIAEM y del Consejo de Redacción de varias revistas. Profesor Principal de Historia y Metodología de la Matemática en Cuba. Tiene 50 años de experiencia docente.

Concepción Valdés Castro: Nació y vive en Cuba desde 1946. Es licenciada en Matemática por la Universidad de La Habana (1968) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad "Lomonosov" de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Costa Rica, España y Panamá. Tiene más de 40 publicaciones, de éstas 5 textos en uso. Es Profesora Principal de Análisis Matemático en Cuba y Profesora Consultante en la Universidad de La Habana. En el 2014 cumplió 50 años de exitosa experiencia docente.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 09-32

Problematización histórica de temas matemáticos fértiles

Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro

Resumen	Con este artículo pretendemos insistir en la necesaria renovación del discurso matemático tradicional. Las ideas que exponemos recogen una experiencia particular y quisiéramos compartirlas con profesores de enseñanza secundaria superior y de cursos universitarios básicos. La orientación histórica, la metodología dialéctica y las técnicas de resolución de problemas, nos han servido para darle al discurso matemático un estilo más coherente con el pensamiento actual. Ilustramos las ideas con dos propuestas para el tratamiento del tema de medida de magnitudes geométricas, un tema que consideramos adecuado y fértil para cultivar nuevas generaciones de jóvenes y de docentes. **Palabras claves:** Discurso matemático, historia de la matemática, medidas geométricas, problemas isoperimétricos.
Abstract	With this paper we intend to insist on the necessary renewal of traditional mathematical discourse. The ideas presented collect a particular experience and we would like to share this with teachers in higher secondary education and basic college courses. The historical orientation, the dialectic methodology and problem solving techniques, have helped us to give the mathematical discourse more consistent with current thinking style. We illustrate ideas with two proposals for addressing the issue of measurement of geometrical quantities, one theme that we considered adequate and fertile to cultivate new generations of young people and teachers. **Key Words:** Mathematical discourse, history of mathematics, measurement of geometrical quantities, isoperimetric problems.
Resumo	Com este artigo pretendemos insistir na renovação necessária do discurso matemático tradicional. As ideias apresentadas tratam de uma experiência particular e gostariamos de compartilhá-las com os professores do ensino secundário superior e cursos básicos universitários. A orientação histórica, a metodologia dialética e as técnicas de resolução de problemas, nos ajudaram para dar ao discurso matemático um estilo mais consistente com o pensamento atual. Ilustramos as ideias com duas propostas de como abordar a questão da medida de grandezas geométricas, um tema que consideramos apropriado e fértil para cultivar novas gerações de jovens e professores. **Palavras chaves:** Discurso matemático, historia da matemática, medição de grandezas geométricas, problemas isoperimétricos.

1. Sobre la urgente necesidad de renovar el discurso matemático tradicional

"*Si no cambiamos la manera de dar las clases,*
las matemáticas seguirán siendo aburridas, poco efectivas y
destinadas al fracaso de estudiantes desconectados, empleados
insatisfechos,
profesores frustrados y padres preocupados"
Conrad Wolfram
Recuperado de la versión digital del periódico "*El País*", 25/04/2016

1.1 Introducción.

Deseamos compartir ideas concebidas para dinamizar los modos de actuación dentro del escenario docente en esta sociedad digital que nos obliga a renovar la manera en que construimos conocimiento matemático junto con las generaciones actuales. En esta reflexión, no podemos dejar de tomar en cuenta las múltiples y crecientes formas de distracción, la forma encantadora en que "se vende" lo seudocientífico y hasta lo anticientífico. Antes, cuando éramos jóvenes, teníamos la *diversión* de la "telebasura", pero ahora, además, se usa y abusa de la absorbente red de redes sociales que conecta –y *desconecta*- hasta dentro de la sala de clases gracias al teléfono móvil "inteligente". Alguien ha dicho con razón: *La escuela ha perdido el monopolio de la trasmisión de saberes y la familia el monopolio de la trasmisión de valores*.

Para bien o para mal, *todo está cambiando*: los propios contenidos de la información que se trivializan; las formas y medios de transmisión: icónica, fragmentada, rápida, sin tiempo para la reflexión, con una carga efectista muy atractiva. Si compartimos el criterio de que el escenario es dinámico y manipulador de voluntades, que los cambios sociales, culturales, mediáticos, tecnológicos, tanto en la mentalidad como en los intereses, persisten y que cada vez se hace más difícil convencer y persuadir a los jóvenes- y a los menos jóvenes- del papel esencial de las prácticas y saberes matemáticos. Es que no hemos sabido mostrar que todas estas prácticas, que se manejan como una "caja negra", han sido posibles gracias al desarrollo de una tecnología que se sustenta de forma esencial en la matemática. Por tanto, debemos fortalecer la conciencia de que el mismo desarrollo tecnológico precisa de mayor cantidad de profesionales con una buena y adecuada preparación matemática. ¿No les parece que ha aumentado la necesidad de propagar con mayor perspicacia la cultura matemática, que incluye tanto prácticas y saberes, como goces deductivos y estéticos, de números y figuras? ¿Por qué no salir de la rutina y esforzarnos por hacer más activas las clases y más efectiva la comunicación de las bondades de nuestra ciencia?

Como a tantos otros educadores nos preocupa la forma en que se ha transformado la situación. No es que se hayan extinguido los jóvenes interesados en resolver problemas matemáticos ingeniosos y que no existan científicos, ingenieros y economistas, con avidez por ampliar su cultura matemática para hacer su labor social más útil. Pero, observamos con desasosiego que muchos de los que deciden formarse como profesionales (ingenieros, arquitectos, científicos, economistas, agrónomos y un largo etc.) simplemente quieren saber lo imprescindible para sacar exámenes y no sienten el menor interés por ampliar o actualizar su cultura matemática, es más, muchos asocian matemática solo con odiosos recuerdos de la infancia y juventud, por lo que tratan de olvidarla pronto.

El objetivo principal de este artículo es provocar una actitud crítica sobre el discurso matemático habitual que usamos en la sala de clases y/o en la redacción de libros de texto o de divulgación. No pretendemos generalizar experiencias particulares, ni con-vencer del encasillamiento en un "marco teórico" determinado y determinante. Consideramos que cualquier instrumento didáctico, por efectivo que fuese en un cierto contexto, deviene en freno intelectual si sugiere que *aprender a pensar la matemática* es algo que se consigue usando al pie de la letra una suerte de reglas, o principios incuestionables.

Son variadas las opciones que han surgido con el fin de ampliar la cultura matemática de las nuevas generaciones. Nosotros optamos por introducir la dimensión histórica en la estructura del discurso matemático, porque consideramos que con un enfoque historicista suficientemente amplio que contemple tanto los avances en las técnicas de resolución de problemas, como los aspectos socio-culturales del contexto matemático, se contribuye a contrarrestar estas insuficiencias en la formación integral. Ideas muy semejantes a las que desarrollamos aquí han sido planteadas de manera general, con mayor o menor profundidad, en muchos trabajos publicados en la última década (p. e. Furinghetti, 2007, Guzmán, 2007; Katz y Tzanakis, 2009). Nosotros las adaptamos, las desarrollamos a conveniencia y más adelante las aplicamos al caso particular del significativo tema de la medida de magnitudes geométricas.

1.2 La perspectiva historicista en la búsqueda de temas fértiles para cultivar a las nuevas generaciones.

Así es como yo entiendo el uso de la Historia de la Matemática y de las Ciencias en el aula
y así es como el bagaje intelectual de los maestros lo requieren:
***como un conocimiento integrado**.*
Integrado como saber familiar y cornucopia accesible siempre para la instrucción,
no escondido en gavetas que sólo se abren en momentos preestablecidos.
Hans Freudenthal, 1981, p. 31

La perspectiva historicista, presente hoy en día en varias de las tendencias pedagógicas más promisorias, se inspira, sobre todo, en la concepción de la Historia como conjunto de procesos que condicionan, de alguna manera y en algún grado, la situación en la cual se expresan los problemas generadores del conocimiento matemático significativo. Aprovecharse, sin abusos, de esta valiosa oportunidad, quiere decir explotar no sólo sus importantes funciones de *motivación y comunicación*, sino también sus funciones *heurística y humanista* en el proceso de aprendizaje.

Cuando se escarba en la Historia y se ponen en evidencia las raíces de los conceptos, se observan nítidamente las circunstancias que, originalmente, motivaron y promovieron el crecimiento de tales conceptos hacia su transformación en parte esencial de teorías coherentes y significativas. Aunque – es necesario subrayarlo – *no basta observar los hechos y reproducir exactamente la evolución de las ideas*, también es imprescindible una visión evaluadora y crítica, para *seleccionar y reconstruir* aquello que realmente puede ayudar al desarrollo de una actividad creativa.

Se trata de usar el conocimiento de la historia, sin menospreciar el valor de lo lógico del contenido y con atención cuidadosa del objetivo pedagógico, según las características del grupo de alumnos. El éxito de esta propuesta depende precisamente de una acertada combinación de *lo lógico, lo histórico y lo pedagógico* que se nos presenta en la preparación y ejecución de cada acto en el proceso docente. Sin embargo, estos tres factores no deben considerarse en forma simplemente aditiva, sino que su conjugación debe ser siguiendo la *metodología dialéctica*. Con el término *dialéctica* significamos que en la consideración de las partes no debemos perder de vista que todo está interconectado y que hay un proceso continuo de cambio en esta interrelación.

En el pensamiento clásico tradicional se establece una falsa oposición entre las dos categorías de lo histórico y lo lógico. Lo histórico se comprende como secuencia temporal de fenómenos, y la lógica como vinculación de conceptos y leyes del pensamiento. Se establece así una oposición metafísica entre el mundo de fenómenos singulares que transcurren en el tiempo y el mundo de lo necesario esencial, universal. De esta forma, se desconoce, por un lado, que la sucesión temporal de los fenómenos reales responde también a una lógica determinada, y por el otro, que las leyes o estructuras del pensamiento también se forman y se desarrollan históricamente.

El discurso analítico que preconiza el enfoque lógico-formal, apareció en el mundo occidental en la antigüedad clásica grecolatina como inherente al lenguaje matemático y ha evolucionado desmesuradamente de forma que actualmente está completamente "*enajenado*" del lenguaje ordinario. Después de tantas décadas de enseñanza tradicional formalista, es muy natural -y por tanto, bastante común- escuchar todavía a profesores de diferentes niveles de enseñanza decir: *¡Cómo voy a conseguir hablar de la historia o de otros aspectos culturales, si cada vez tengo más contenidos que explicar en un mismo tiempo!* Comúnmente los principales detractores del recurso didáctico de la historia plantean que con el enfoque historicista se pierde el rigor y el tiempo necesario para profundizar en lo que es verdaderamente importante: *los contenidos de los programas vigentes.* Pero, tal pensamiento está ligado con una muy obsoleta concepción del proceso docente que privilegia los contenidos y no da suficiente peso al verdadero sujeto de la actividad que es el estudiante, ni se preocupa por la *reconstrucción conjunta* de prácticas y saberes.

Nuestra propuesta es tender un puente entre la retórica humanista -más preocupada en usos de la imaginación y la consideración del plano afectivo- y el discurso matemático para que este se mantenga riguroso, pero su formalismo lógico sea más atemperado y coherente con la situación actual. Y, lo más importante, este viaducto lo articulamos con el recurso didáctico de la Historia de la Matemática. Se trata, por tanto, de usar la larga historia del desarrollo de prácticas y saberes acumulado, para potenciar la argumentación lógica asociada a un contenido matemático específico, con la promoción meticulosa de sus valores humanistas. Proponemos aumentar el *poder persuasivo* del discurso utilizando imaginativamente el entrañable encanto de la *heurística* -técnica del descubrimiento- y de la *reconstrucción del saber* matemático. Subrayemos que no pretendemos sustituir los contenidos matemáticos por otros contenidos histórico-matemáticos, se trata de darle una flexibilidad a la organización del discurso que incorpore coherentemente las bondades del pensamiento heurístico. Se trata de reconstruir racionalmente la historia, adaptándola a las características del grupo de oyentes o lectores correspondiente, pero sin desvirtuarla, sin traicionarla.

La necesidad de cambiar estereotipos en la comunidad de docentes de matemática y lograr que las actividades fueran más motivadoras nos ha llevado a considerar la búsqueda de *temas fértiles contextualizados con el recurso de la historia de la matemática.* Consideramos *fértiles* aquellos temas que nos permiten desarrollar en el aula varios asuntos que tienen amplia aplicación en la práctica matemática o en el enriquecimiento de la cultura matemática. Por regla general estos asuntos fértiles aparecen como problemas intelectuales en una época remota y muchas veces durante el largo y torcido cauce de su historia varían en la forma como se exponen y en el enfoque metodológico para su tratamiento y resolución. En definitiva se buscan temas que lleven implícito el misterio y la intriga de una aventura intelectual seductora para la juventud.

Estamos convencidos que profesores entusiastas por el quehacer matemático, y sin prejuicios para sumergirse en el universo fascinante de la historia de la matemática, encontrarán múltiples temas con estas características, p.e. los *tríos pitagóricos*, ligados tanto a la geometría de las edificaciones como a la aritmética de la descomposición en sumas de cuadrados, desde su concepción práctica por los babilonios hasta su ligación con el estudio de las formas cuadráticas; las *sumas infinitas* originadas en la resolución de cuadraturas de figuras geométricas, indispensables para el desarrollo del Cálculo Integral y posteriormente para enfrentar los desafíos de la representación de funciones; o las *irracionalidades numéricas* y sus intrincados vericuetos históricos ligados a las ideas fundamentales del álgebra, del cálculo y la teoría de funciones; todos estos temas, y muchos más, esperan para ser tratados con imaginación y emotividad en las salas de clases y los libros de texto de matemática. Por supuesto, si no se tratan de la forma tradicional con reglamentos burocráticos limitantes y prejuiciosos sobre la organización de los cursos y las clases.

En este artículo ilustraremos nuestras ideas con un tema muy fértil que por ser tan práctico y fascinante, lo hemos desarrollado con éxito en diferentes escenarios tanto con grupos de estudiantes novatos, como de docentes en formación posgraduada. No han sido concebidos para una clase ni para tres clases tradicionales, es para estimular el *pensar en la matemática,* siempre y cuando sea posible, en *reconstrucción conjunta* de todos los participantes bajo la batuta de un *maestro concertador.*

2. Ilustración con el tema fértil de la medida de magnitudes geométricas

No hay tema más esencial: la medida de magnitudes
es el punto de partida de todas las aplicaciones de la matemática
H. Lebesgue (1935) *La mesure des grandeurs,* p.3

2.1 Por qué, para qué y para quién escogimos el tema de la medida geométrica

Es imposible mostrar con claridad y eficacia las bondades de un método con el tratamiento de temas demasiado heterogéneos. Hemos decidido circunscribirnos al tema de la medida de magnitudes geométricas, que según nos consta, adolece de una fuerte carencia de *mesura* en su tratamiento: o se desarrolla formalmente reduciéndolo a fórmulas y enrevesadas proposiciones, o se enfoca superficialmente sin mencionar los nexos con las circunstancias prácticas que lo promovieron y sus incalculables aplicaciones.

Desarrollamos una serie de actividades relacionadas con dos asuntos básicos: las cuadraturas de figuras planas y la comparación de polígonos, enmarcados ambos en el tema general de la medida de magnitudes geométricas. Lo exponemos de forma que pueda ser útil para alumnos del nivel secundario superior, y también como un preámbulo a la introducción del concepto de integral y de las técnicas de optimización, en un primer curso de Cálculo de nivel universitario. Sin embargo, *lo que más importa no es el contenido en sí; el contenido sirve de pretexto para ilustrar una forma de actuar en la clase*. Pero la reconstrucción del contenido, por su riqueza y originalidad no acostumbrada en los libros de texto, se presta a la experimentación, discusión y análisis de diferentes estrategias de resolución de problemas, así como al propósito de provocar la reflexión profunda.

Para enseñar a *reconstruir* el conocimiento que satisfará ese deseo de comprender dinámicamente el tema de la medida, se precisa no solo de conocer las razones históricas de por qué y para qué medir, sino también desarrollar habilidades apropiadas de cálculo, estimación y resolución de problemas. Se precisa no sólo el desarrollo de las ideas de forma y tamaño, sino también el desarrollo del pensamiento algebraico, de la capacidad de argumentar y comunicar -en diseños, gráficos, tablas, fórmulas, resultados parciales y/o generales- esas ideas generadoras. Y aún más importante, se necesita de la comprensión de la esencia de los problemas, que permita *persuadir* de la verosimilitud de las respuestas.

Intercaladas en el texto que se desarrolla a continuación, se presentan algunas de las fuentes históricas; el lector puede ampliar su cultura matemática con la bibliografía señalada, que se relaciona al final. En letras cursivas se indican algunas de las diferentes estrategias de resolución de problemas que se utilizan. Para terminar este preámbulo vale citar a ese Maestro de la heurística que tanto nos ha inspirado (Polya, 1974, p. 9):

> *"[…]las matemáticas presentan dos caras: por un lado son la ciencia rigurosa de Euclides, pero también son algo más. Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana aparecen como una ciencia sistemática, deductiva; pero las matemáticas en vía de formación aparecen como una ciencia experimental, inductiva."*

2.2 Sobre la cuadratura de polígonos

En la Grecia Antigua existía una gran fascinación por la belleza, por la armonía, por lo simple. En la Ciencia de esa época puede observarse una tendencia a construir lo complejo a partir de lo elemental. Esto explica el por qué tenían gran interés en resolver los problemas de construcción geométrica utilizando solamente regla y compás, los dos instrumentos asociados a las figuras geométricas más sencillas: la recta y la circunferencia. Un tipo de problema que investigaban era la cuadratura de figuras planas.

Para los helenos *cuadrar una figura* era construir con regla y compás un cuadrado que tuviera la misma área que la figura plana original, de esta forma la simplicidad del cuadrado se impondría a la complejidad de la figura. Uno de los problemas que primero resolvieron fue el siguiente:

Problema I. Cuadrar un polígono.

Este problema es de carácter un poco general. Para comprenderlo mejor, para experimentar con él, es necesario *considerar casos particulares más sencillos* y tratar después de *utilizar el método o el resultado*. ¿Qué tipo de figura podemos intentar en primer lugar? El polígono más cercano al cuadrado en la forma es el rectángulo, luego es natural considerar en primer lugar este caso:

Subproblema Ia.*Construir un cuadrado que tenga la misma área que un rectángulo dado*.

Una técnica muy usada en la resolución de problemas matemáticos es *suponer el problema resuelto*. Denotemos por *a* la base *AB* del rectángulo y por *b* su altura *CD* (Fig.1) Supongamos que *c* es lado del cuadrado que tiene la misma área que el rectángulo, entonces *c* deberá cumplir la relación

$$c^2 = a \times b. \qquad (1)$$

o, en forma de proporción, $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, es decir, hemos convertido el problema de la cuadratura de un rectángulo en el de la construcción de un segmento cuya longitud sea la media proporcional entre dos segmentos de longitudes *a* y *b*.

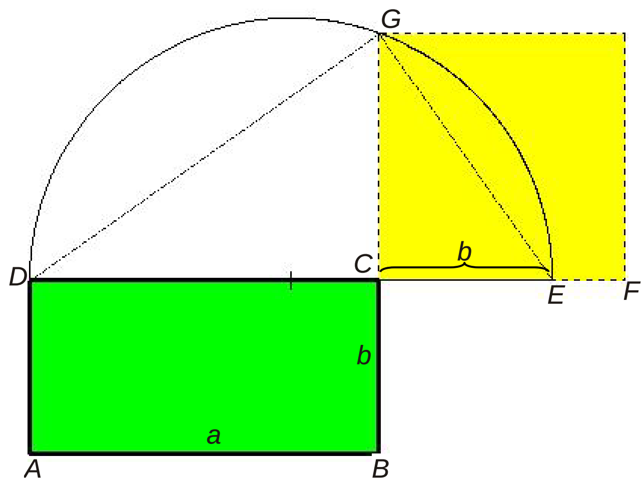


Fig.1 Cuadratura de un rectángulo

Caso que la experiencia de los alumnos sea pobre o nula, el profesor debe ser más sugestivo para lograr la comprensión de esta alternativa, los mismos griegos planteaban su receta para la construcción: Primero construimos el segmento suma $AE = a + b$, después trazamos el semicírculo de diámetro *AE* (ver Fig.1) y el lado *BC* del rectángulo se prolonga hasta intersecar al semicírculo en el punto *G*, entonces, el segmento buscado es *CG*.

Cuando escribimos la relación (1), hemos supuesto conocida la fórmula para el área de un rectángulo. En realidad en la matemática helena sucedía lo contrario, se referían a la operación de multiplicación mediante la construcción de un rectángulo.

¿Cuál puede ser el problema siguiente a ser resuelto? ¿Cómo podríamos *utilizar el resultado obtenido*? Las sugerencias pueden encaminarse por dos vías: intentar con

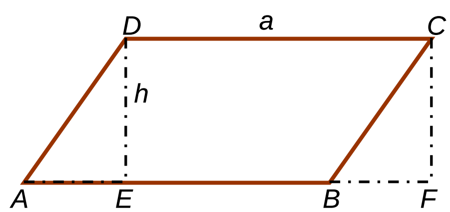


Fig.2 Cuadratura paralelogramo

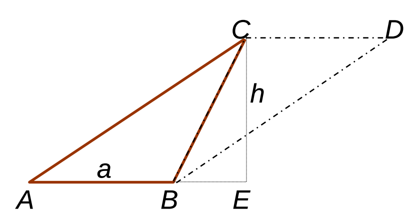


Fig.3 Cuadratura triángulo

otros cuadriláteros particulares o analizar el caso del triángulo.

El resultado anterior, permite cuadrar sin dificultad otros dos tipos de polígonos sencillo: el *paralelogramo* y el *triángulo*. En efecto, dado un paralelogramo *ABCD* trazamos los segmentos *DE* y *CF*, perpendiculares a *AB*, entonces los triángulos *AED* y *BFC* son iguales, luego el rectángulo *EFCD* tiene la misma área que el paralelogramo (Fig.2). Por tanto, la cuadratura del paralelogramo se reduce a la del rectángulo lo que, usando la simbología actual, significa que el área del paralelogramo es igual al producto $a \cdot h$.

Analicemos el polígono de menor número de lados, el triángulo.

Subproblema Ib: Cuadrar un triángulo de base b y altura h.

¿Podemos utilizar el resultado obtenido en el subproblema Ia? Vemos que la cuadratura de un triángulo *ABC* se resuelve a través de la cuadratura de un paralelogramo. Para ello basta trazar el segmento *CD* paralelo a la base *AB* y de igual longitud que ella y después completar el paralelogramo *ABDC* (Fig.3). Como los triángulos *ABC* y *BDC* son iguales, entonces su área será la mitad que la del paralelogramo. Este resultado no es otra cosa que la conocida fórmula para el área del triángulo:

$$A = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Es interesante comentar que en los *Elementos* esta fórmula se expresa en forma completamente geométrica:

Un triángulo es equivalente a la mitad del rectángulo que tiene las mismas base y altura.

El próximo paso puede, naturalmente, ser:

Subproblema Ic: Cuadrar un cuadrilátero arbitrario.

Basta darse cuenta que todo cuadrilátero se divide en dos triángulos. Es frecuente, que en este momento ya alguien nos adelante el procedimiento general para resolver el Problema I. Si no es así, motivamos la reflexión a través de este caso particular.

¿Cómo podríamos utilizar los resultados obtenidos? Un polígono arbitrario puede ser dividido mediante diagonales en un número finito de triángulos, para cada uno de los cuales podemos encontrar un cuadrado equivalente. Entonces la cuadratura de un polígono arbitrario se reduce a la construcción de un cuadrado que tenga por área la suma de las áreas de estos cuadrados. Por ejemplo, mediante la diagonal *AC* el cuadrilátero *ABCD* (Fig.4) queda dividido en los triángulos *ADC* y *ABC*. Para cada triángulo construimos los respectivos cuadrados equivalentes, cuyos lados

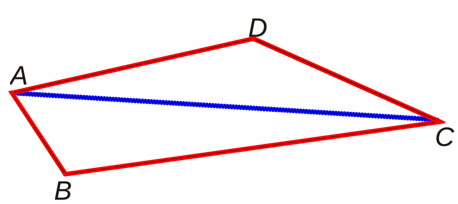


Fig.4 Cuadratura polígono

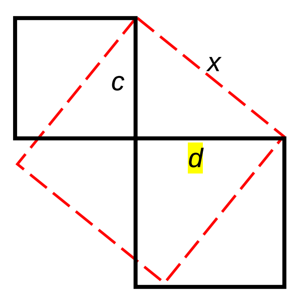


Fig.5 Cuadratura unión rectángulos

denotaremos por c y d.

Entonces para completar la solución del problema debemos resolver el siguiente:

Problema auxiliar. Cuadrar la figura formada por la unión de dos cuadrados.

¿*Cómo podemos reformular este problema*?

Reformulación: Si denotamos por x el lado del cuadrado buscado, entonces x debe satisfacer la relación pitagórica $x^2 = c^2 + d^2$, lo que sugiere inmediatamente la construcción mostrada en la figura Fig.5.

¿Cuál será el próximo paso? Si consideramos un pentágono, observamos que, por ejemplo, las diagonales lo dividen en 3 triángulos. Podemos entonces aplicar a cada uno de ellos la construcción del subproblema Ib, y mediante la doble aplicación, de la construcción del problema auxiliar podemos cuadrar el pentágono.

Para cuadrar un polígono de mayor número de lados, simplemente es necesario repetir el procedimiento anterior tantas veces como sea necesario. Por supuesto, ni los antiguos helenos, ni nosotros, nos preocupamos en mostrar que siempre es posible triangular un polígono arbitrario. Nótese que en este caso la estrategia utilizada es la de *reducir las "dimensiones" del problema de forma sucesiva,* argumento que convence de la certeza de la afirmación siguiente:

Resultado 1. Todo polígono es cuadrable.

2.3 Sobre la cuadratura del círculo

¿Será posible la cuadratura de figuras limitadas por otros tipos de líneas, no necesariamente rectas? Este es un problema realmente no elemental y cuyo análisis completo sólo puede conseguirse utilizando técnicas de integración. No obstante, sin perder de vista esta meta general, podemos tratar de lograr objetivos parciales mucho más modestos. Entre las figuras planas no limitadas por segmentos rectilíneos la más sencilla, sin duda alguna, es el círculo; al igual que los helenos, comenzamos con el siguiente:

Problema II. Cuadrar un círculo de radio r.

Cuando estamos en presencia de un problema complejo, una táctica recomendada es tratar de buscar, utilizando los datos del problema, algunas *propiedades o relaciones que puedan facilitar el posterior ataque del problema*. ¿Cuáles son los datos? Un círculo de radio r. ¿Qué queremos encontrar? El área. Entonces podemos investigar el problema:

Subproblema IIa. ¿Qué relación existe entre el área de un círculo y su radio?

Nótese que los círculos siempre tienen la misma forma (lo que no ocurre con los triángulos, rectángulos y polígonos en general) y que la única transformación que altera su área es su dilatación o contracción, dependiente del radio. En un plano podemos cambiar la escala cambiando la unidad de medida en dos direcciones mutuamente perpendiculares. Para conservar el círculo, estos dos cambios deben ser iguales. Así, supongamos que efectuamos una dilatación o contracción de r unidades en dos direcciones perpendiculares. Es claro geométricamente que un círculo de radio 1 pasará a tener radio r. ¿Qué ocurrirá con el área del círculo? Para analizar esta última pregunta podemos realizar otra: ¿qué ocurre en el caso que la figura sea un rectángulo, un triángulo u otro polígono?

Para un rectángulo y un triángulo la respuesta es obvia: la nueva área será r^2 veces la anterior. Para un polígono general también puede obtenerse esta misma respuesta con el método de triangulación. Es interesante observar que la posición relativa de las figuras y las direcciones de dilatación o contracción no ejercen ninguna influencia en el resultado. ¿Y para el círculo? Es natural esperar una respuesta dada por analogía: también la nueva área será r^2 veces la original. Pero ¿cómo podemos demostrar eso?

En este momento, con la guía acertada del profesor, pueden discutirse diferentes ideas que pueden conducir a enfoques diversos. Seleccionaremos el método de aproximar el círculo por polígonos inscritos y circunscritos -relacionado con el helénico *método de exhausción* muy utilizado por Arquímedes, p. e. en la cuadratura de la parábola y de la espira principal- que resulta también muy eficaz en otros problemas.

Denotemos por A_r el área del círculo de radio r y por P_r^n y Q_r^n los polígonos de n lados inscritos y circunscritos respectivamente en un círculo de radio r. Es claro que (ver Fig.6):

$$\text{Área}(P_r^n) \leq A_r \leq \text{Área}(Q_r^n) .$$

Por otra parte, para cualquier cantidad n de lados se tiene:

$$\text{Área}(P_r^n) = r^2 \text{Área}(P_1^n) \text{ y } \text{Área}(Q_r^n) = r^2 \text{Área}(Q_1^n) .$$

Así que:

$$r^2 \text{Área}(P_1^n) \leq A_r \leq r^2 \text{Área}(Q_1^n) .$$

Como tanto el área de P_1^n como la de Q_1^n se acercan cada vez más al área del círculo de radio unidad, se ve de forma intuitiva que:

$$A_r = r^2 A_1 .$$

Como consecuencia, obtenemos la relación que aparece en los elementos de Euclides:

$$\frac{A_r}{A_s} = \left(\frac{r}{s} \right)^2 . \qquad (3)$$

¿*Cómo podríamos utilizar este resultado*? Aquí puede plantearse a los alumnos el análisis de las áreas de algunas figuras limitadas por arcos de círculo, comparándolas con figuras de áreas conocidas. Ejemplos particularmente interesantes son las lúnulas estudiadas por Hipócrates de Quíos (s. V a. C.). Es posible, usando (3) y la propiedad aditiva del área, relacionar el área de la lúnula con la de otras figuras como triángulo, trapecio, semicírculos (ver, p. e. Dunham, 1993, pag.41)

Después de encontrar una relación entre el área de un círculo y su radio, es natural tratar de plantearse el siguiente.

Subproblema IIb Encontrar una relación entre la longitud de una circunferencia y su radio.

En forma análoga al subproblema IIa, Euclides demuestra que

Para dos círculos c y C con radios r y R respectivamente, si l y L denotan las longitudes de las circunferencias correspondientes a c y C, entonces

$$\frac{l}{L}=\frac{r}{R} \quad \text{o} \quad \frac{l}{r}=\frac{L}{R}.$$

La resolución del problema II y los subproblemas IIa y IIb nos brindan la posibilidad de afirmar que hay dos constantes k y k' tales que si A_r denota el área de un círculo de radio r y L_r la longitud de su circunferencia, entonces

$$A_r = kr^2 \quad \text{y} \quad L_r = k'r \ .$$

Notemos que las constantes k y k' coinciden respectivamente con el área y la longitud del círculo unidad ($r=1$). Esto significa que, si fuéramos capaces de cuadrar el círculo unidad, entonces podríamos cuadrar cualquier otro círculo. Además si pudiéramos construir un segmento de longitud igual a la circunferencia de radio uno, podríamos también construir un segmento con la longitud de una circunferencia dada. Este último problema se conoce como *rectificación de la circunferencia*.

Como ya comentamos, los resultados que aparecen en los *Elementos* permiten reducir la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia a la resolución de estos problemas en el caso particular cuando el radio es 1. Sin embargo, también en este caso particular ambos problemas se resistían a los esfuerzos realizados. Será el gran sabio de la antigüedad clásica, Arquímedes de Siracusa, quien ilumine el camino a seguir. Primero consideró un *problema afín* a ambos:

Subproblema IIc. Encontrar una relación entre el área del círculo y la longitud de su circunferencia.

Arquímedes utilizó un método análogo al descrito en la resolución del subproblema IIa: aproximó el área del círculo y la longitud de su circunferencia por las áreas y perímetros respectivos, de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

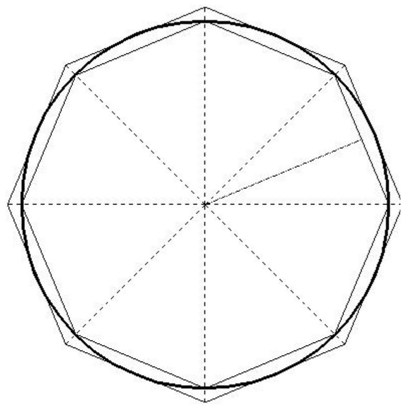


Fig.6 Polígonos inscrito y circunscrito

Dado un círculo de radio *r*, denotemos por Q_n^1, Q_n^2 los polígonos regulares de *n* lados inscritos y circunscritos a un círculo de radio *r* (ver Fig.6) y por $A(Q_n^i)$ y $P(Q_n^i)$, $i=1,2$ sus correspondientes áreas y perímetros. Como los polígonos son regulares, ya vimos que:

$$A(Q_n^1) = n \times \frac{b_n h_n}{2} = \frac{P(Q_n^1) h_n}{2}, \qquad (4)$$

donde h_n es la apotema de Q_n^1. Análogamente se comprueba que

$$A(Q_n^2) = \frac{r}{2} P(Q_n^2).$$

Por otra parte

$$A(Q_n^1) \leq A_r \leq A(Q_n^2) \quad \text{y} \quad P(Q_n^1) \leq L_r \leq P(Q_n^2),$$

donde A_r y L_r denotan respectivamente el área del círculo y la longitud de su circunferencia. Como consecuencia de las relaciones anteriores, obtenemos que

$$\frac{h_n}{r} P(Q_n^1) \leq \frac{2A_r}{r} \leq P(Q_n^2).$$

No es difícil observar que, cuando *n* se hace cada vez mayor los polígonos inscritos y circunscritos se aproximan cada vez más al círculo y, por tanto, $P(Q_n^1)$ y $P(Q_n^2)$ estarán tan próximo como se quiera a la longitud de la circunferencia. Además, en este proceso de aumento de la cantidad de lados de los polígonos inscritos, la apotema h_n se acercará cada vez más al radio *r* del círculo, por lo que el cociente h_n/r se acerca a uno. Los razonamientos heurísticos anteriores evidencian intuitivamente que las cantidades L_r y $2A_r/r$ deberán coincidir, de donde se obtiene la relación

$$A_r = L_r \times \frac{r}{2},$$

es decir, *el área del círculo coincide con el área de un triángulo cuya base tiene la longitud de su circunferencia y cuya altura es igual al radio* (Fig.7)

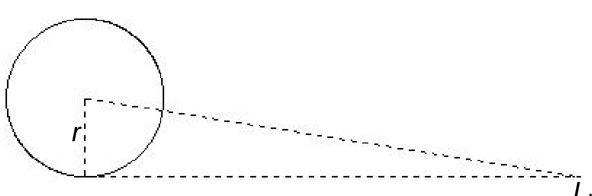


Fig.7 Área y perímetro de un círculo

Es importante notar que, aunque satisfacen completamente las exigencias de la intuición, las consideraciones anteriores no cumplían los cánones de rigor de la matemática helena -ni de la actual- y por tanto, para considerar completamente demostrada esta relación era necesario completar el razonamiento mediante el uso del método de exhausción, lo que aquí omitiremos porque consideramos excesivo para nuestros objetivos.

Hemos identificado el área del círculo con el área de una figura que puede ser cuadrada, el triángulo ¿significa esto que hemos logrado cuadrar el círculo? La respuesta sería afirmativa si fuéramos capaces de construir un segmento de longitud L_r, esto es si pudiéramos rectificar la circunferencia. Aunque Arquímedes no logró cuadrar el círculo, sí estableció una relación trascendental entre dos problemas geométricos teórica y prácticamente importantes: **la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia.** Esta relación redujo a solo una la constante de proporcionalidad que era necesario determinar. Mucho después, en el siglo XVIII, **Leonard Euler** popularizó el uso de la letra griega π para denotar el área del círculo de radio unidad, esto es la constante de proporcionalidad *k*, entonces $k' = 2\pi$ y obtenemos las fórmulas usuales:

$$A_r = \pi r^2 \text{ y } L_r = 2\pi r \,.$$

Una vez en posesión de este *resultado parcial*, Arquímedes se dio a la tarea de proporcionar un algoritmo que permitiera su aplicación en la práctica y para ello elaboró un método para el cálculo aproximado de la constante de proporcionalidad π.

Observemos que, en la medida que aumenta la cantidad *n* de lados, el área y el perímetro de los polígonos inscritos crecen y las correspondientes a los polígonos circunscritos decrecen. Por ello, estas magnitudes proporcionan estimaciones por exceso y por defecto de las cantidades A_r y L_r, estimaciones que pueden hacerse tan buenas como queramos. Arquímedes se las ingenió para, con los limitados recursos de cálculo de su época, hallar el perímetro de los polígonos de 96 lados inscritos y circunscritos a un círculo. De este modo encontró que la longitud de la circunferencia unidad, es decir, el número π, satisface la relación

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\,,$$

llevado a notación decimal, se escribe como

$$3{,}140845 < \pi < 3{,}142857\,,$$

estimación que tiene dos cifras decimales exactas.

El método de demostración utilizado tiene la ventaja de proporcionar la base de algoritmos para el cálculo aproximado del número π que es posible obtener de los alumnos mediante algunas actividades, que se pueden y deben realizar haciendo uso de softwares como el Mathematica, Maple, Derive u otros de propósitos similares

En definitiva, podemos encontrar en reconstrucción conjunta el siguiente

Resultado 2. Si, por convenio, consideramos $A_1 = \pi$, entonces:

$$A_r = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C_r = 2\pi r \text{ .}$$

Consideramos que éste es un momento propicio para transmitir a los estudiantes una idea del largo y tortuoso camino recorrido en la búsqueda de aproximaciones cada vez mejores de π, explicarles cómo esta necesidad sirvió de motor impulsor para el desarrollo de algoritmos de métodos aproximados, y que el conocimiento actual de más de 10 billones de cifras exactas no se debe solamente a una jactancia inútil de los matemáticos, sino que resulta un apreciado instrumento para validar la técnica computarizada más reciente. Incluso, es factible señalar problemas *que aún permanecen abiertos* en relación con este singular y fascinante número (ver, p.e. Borwein y Bailey, 2008, Capítulo 3, pag. 103).

Pero, quizás sea más atractivo pasar a considerar un tipo de problemas muy fértil, originado en la antigüedad y con amplia repercusión práctica en la época actual. Trataremos de no abusar de la atención del lector y lo reconstruiremos de forma más expedita.

2.4 Sobre los problemas isoperimétricos

El tema de las figuras isoperimétricas,es decir,
la comparación de las áreas de figuras con formas diferentes,
pero con el mismo perímetro,
fue uno de los que con mayor naturalidad
atrajo a los primeros matemáticos griegos
Sir Thomas Heath, 1981, p. 206

Los problemas de optimización de figuras con igual perímetro o isoperimétricos, por su importancia y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Por ejemplo, en las tabletas de arcilla de los babilonios aparecen resueltos problemas aritméticos que hacen pensar tuvieran tal procedencia. Pero según relata Proclo (s. V d. C.) la mayoría de los antiguos creía que a áreas mayores corresponden perímetros mayores por lo que esa mayoría no era muy versada en este tipo de problemas. Referencias documentadas ya existen desde los *Elementos* de Euclides (s. IV a. C.) donde se prueba que el triángulo equilátero contiene mayor área que cualquier otro triángulo del mismo perímetro y que entre los rectángulos con perímetro fijo el de mayor área es el cuadrado.

En este epígrafe vamos a limitarnos al llamado *problema isoperimétrico con polígonos* y comenzaremos con el planteamiento de una de sus variantes más sencillas:

Problema III. *Dado un conjunto de polígonos de n lados, todos con el mismo perímetro, encontrar aquel que encierra un área mayor.*

Este problema, así enunciado, tiene un carácter muy general y su dificultad va a depender fundamentalmente del conjunto de figuras considerado. Como todo problema de optimización, incluye relaciones de desigualdad; por tanto, podemos comenzar *experimentando* para encontrar relaciones de desigualdad entre las áreas y perímetros de polígonos sencillos. Por ejemplo, el análisis de rectángulos conduce a situaciones como las mostradas en la tabla, donde *a* y *b* denotan los lados del rectángulo y *A* y *P*, respectivamente, sus áreas y perímetros.

	a	**b**	**A**	**P**
R_1	1	4	4	10
R_2	2	3	6	10
R_3	3	5	15	16
R_4	2	7	14	18

Tabla 1. Área A y perímetro P

Observe que los rectángulos R_1 y R_2 tienen el mismo perímetro; no obstante, el área de R_1 es menor que la de R_2. Por otra parte, R_3 tiene mayor área que R_4 a pesar de tener un perímetro menor. Es decir, que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras del mismo género y de áreas diferentes. Entonces, para atacar este problema podemos utilizar la estrategia de *disminuir la dimensión*, en este caso podríamos comenzar con triángulos, que son los polígonos con menor número de lados.

Subproblema IIIa. Entre todos los triángulos con perímetro *P* fijo, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Podemos inducir a los estudiantes a *experimentar*. Puede observarse que, fijando un lado, como la altura respectiva es menor que cada uno de los otros dos lados, cuya suma es fija, para obtener una altura lo mayor posible deberán ser también lo mayor posible, simultáneamente, estos lados variables. Esto conduce a la idea intuitiva de que el área es mayor cuando los lados considerados variables son iguales. Como este razonamiento es independiente de cual lado sea el fijado, concluimos que el triángulo de perímetro *P* y área máxima debe ser el equilátero. Este es un razonamiento heurístico que conduce a un resultado. ¿Podríamos demostrar este resultado en forma euclidiana? ¿Será siempre el triángulo de área máxima el equilátero?. Podríamos *enfocar el problema desde una perspectiva diferente*:

¿Cuál será la posición del punto *C* (ver Fig. 8) si queremos conseguir triángulos de la misma área? Tracemos la recta *r,* paralela a *AB* por el punto *C*. Si *C* está sobre *r,* el área del triángulo será siempre la misma, mientras que $\overline{AC}+\overline{BC}$ aumentará con un movimiento hacia la derecha y disminuirá con uno hacia la izquierda. Es decir, la misma área puede ser conseguida con un perímetro menor; ¿cuál será esa posición de *C* donde se logra un triángulo *ABC* con la misma área inicial pero con perímetro lo menor posible? Estamos así ante el siguiente:

Problema auxiliar. Dado un triángulo *ABC* y fijos los puntos *A* y *B,* hallar una posición para *C* tal que conserve el área del triángulo y su perímetro sea lo menor posible, esto es, $\overline{AC}+\overline{BC}$ sea mínimo (ver Fig. 8).

¿Podría reformularse este problema en otro lenguaje? Note que $\overline{AC}+\overline{BC}$ puede interpretarse como una trayectoria recorrida si queremos ir de *A* a *B* visitando la recta *r.* Luego se quiere encontrar el punto *C* de "visita" a *r* tal que la distancia recorrida sea la menor posible. Estamos ante un problema que pide minimizar una distancia: *¿qué problema, con una solicitud semejante, sabemos resolver*? Es claro que la menor distancia entre los puntos *A* y *B* es la longitud del segmento de recta que los une, pero, en tal caso, no visitaríamos la recta *r*. ¿Y si colocamos *B* en una posición *B′* de modo que la visita a *r* sea obligatoria al pasar de *A* a *B′*? Es claro que *B′* debe estar en un semiplano de *r* contrario a *A*. La opción más sencilla es tomar a *B′* simétrico a *B* respecto de *r*. Entonces, la menor distancia entre *A* y *B′* sería la longitud del segmento $\overline{AB'}$, el cual corta a *r* en un punto *C′*. De la simetría de la figura resulta claro que $\overline{AC'}+\overline{BC'}=\overline{AC'}+\overline{C'B'}$, luego la posición buscada de *C* es, precisamente, *C′*. Así que el triángulo *ABC′* resuelve el problema auxiliar, es decir, los triángulos *ABC* y *ABC′* tienen la misma área y $\overline{AC'}+\overline{BC'}\leq\overline{AC'}+\overline{C'B'}$.

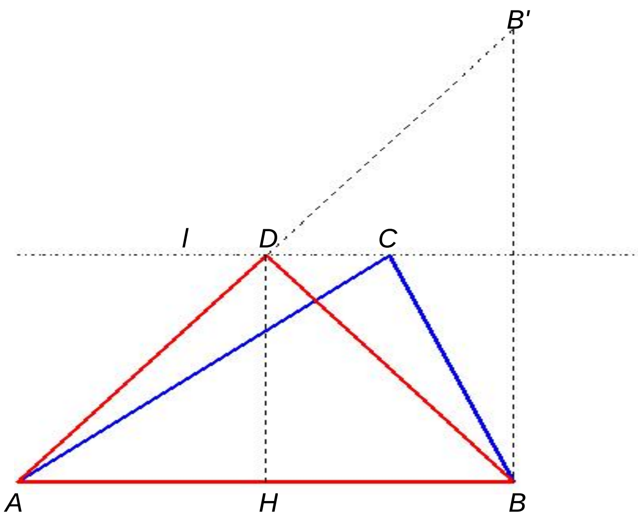


Fig.8 Igual área y perímetro mínimo

Entonces, ¿cómo construir un triángulo que tenga el mismo perímetro que el triángulo *ABC* y un área mayor? Es claro, que si movemos continuamente el punto *C′* a lo largo de la semirrecta *DC′* (origen *D*), conseguiremos aumentar el perímetro continuamente hasta obtener el valor prefijado y, simultáneamente, estamos aumentando la altura, por tanto, el área del triángulo original. Hemos conseguido entonces construir un triángulo *ABC″* con el mismo perímetro que *ABC* pero con un área mayor, lo que contradice la suposición de que *ABC* tenía el área mayor. Esto resuelve totalmente el subproblema IIIa y tenemos el siguiente:

Resultado Parcial 1: Entre todos los triángulos con el mismo perímetro, el de área máxima es el equilátero.

¿Cuál puede ser el próximo paso? Podemos trabajar con cuadriláteros. Si analizamos detalladamente el camino seguido en la resolución del problema para el triángulo, observamos que el mismo razonamiento puede ser repetido para un cuadrilátero con dos lados diferentes e, incluso, llegar a la conclusión de que los lados de un polígono de cualquier número de lados y con área máxima deben ser todos iguales. En otras palabras, hemos obtenido el siguiente:

Resultado Parcial 2: El polígono de *n* lados de mayor área, si existe, debe encontrarse entre aquellos que tienen todos los lados de igual longitud.

¿Resuelve este resultado totalmente el problema III? Limitémonos al caso particular de los cuadriláteros. Un cuadrilátero con sus 4 lados iguales es un rombo, luego hasta ahora sabemos que el cuadrilátero de mayor área con perímetro dado debe ser un rombo. Pero, ¿cuál?. Una construcción sencilla dejando una base fija y variando altura nos muestra que entre todos los rombos de lado dado el área máxima se consigue con el cuadrado. El problema para los cuadriláteros está totalmente resuelto y tenemos el resultado siguiente:

Resultado Parcial 3: De todos los cuadriláteros con perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado.

Zenodoro demostró que para polígonos de n lados con perímetro dado se obtiene mayor área con polígonos que tengan los ángulos iguales (ver p.e. Heath 1981, o Tikhomirov, 1990). Luego, teniendo en cuenta este resultado y lo demostrado respecto a los lados, podemos enunciar el siguiente:

Resultado 3. *De todos los polígonos de n lados con perímetro fijo, el regular es el que tiene área máxima.*

De tal manera queda totalmente resuelto el problema III, en este hemos fijado el número de lados y el perímetro y hemos encontrado que el polígono de área máxima es el polígono regular. Se impone, de forma casi obvia, el problema siguiente:

Problema IV. *Analizar el comportamiento de las áreas de polígonos regulares con perímetro fijo cuando el número n de lados varía.*

Podemos dejar que los alumnos experimenten con valores de n pequeños y simples para realizar los cálculos. Así, pueden encontrar que si denotamos por P el valor del perímetro y A_n el del área del polígono correspondiente a n lados:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2 \qquad , A_4 = \frac{P^2}{16}, \qquad A_6 = \frac{\sqrt{3}}{24}P^2 .$$

Fácilmente, se demuestra que $A_3 < A_4 < A_6$. En caso de haber desarrollado previamente el problema III podemos proponer:

Subproblema IVa: Determine una relación entre el área y el perímetro de un polígono regular.

El uso de la formula (4) permite escribir:

$$A_n = \frac{h_n}{2}P_n , \qquad (5)$$

donde A_n , P_n y h_n representan el área, el perímetro y la apotema, respectivamente, del polígono regular de n lados.

Para efectuar la comparación requerida sería útil tener una relación entre n, A_n y P_n. Esto puede conseguirse transformando (5), para ello podemos calcular h_n. Observemos que los ángulos interiores del polígono valen $\alpha_n = \frac{\pi}{n}$. Consideremos, como construcción auxiliar, la circunferencia circunscrita al polígono (el polígono es inscribible por ser regular) de radio R_n , que va a depender del numero de lados. Los triángulos en que se ha dividido el polígono son isósceles, luego puede verse fácilmente que:

$$h_n = R_n \cos\frac{\pi}{n} \quad \text{y} \quad P_n = 2nR_n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}.$$

Respuesta Parcial: Para un polígono regular de n lados (n>2) se cumple la relación

$$A_n = \frac{P^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}, \qquad (6)$$

ya que el perímetro es fijo, igual a P.

Experimento: Resulta instructivo realizar un experimento numérico para convencerse de la certeza del enunciado de Zenodoro para polígonos con mayor número de lados. Denotemos por A_n el área del polígono regular de n lados con perímetro P fijo, por ejemplo $P=2\pi$, en la tabla a continuación se indican los valores correspondientes de A_n, para algunos valores de n:

n	***A_n***	***n***	***A_n***
3	**1,899406252**	**1000**	**3.141582319**
7	**2.927777815**	**10000**	**3.141592550**
10	**3.037551898**	**100000**	**3.141592652**

Tabla 2: Áreas de polígonos con n lados y perímetro 2π

Estos resultados sugieren la hipótesis siguiente:

Conjetura: Cuando el número de lados n crece también crece el área A_n

¿Cómo podríamos demostrar esta hipótesis? Es claro que basta demostrar, para $m>n$, la desigualdad:

$$n\tan\frac{\pi}{n} > m\tan\frac{\pi}{m}.$$

En el caso general, la demostración de esta desigualdad resulta complicada si no se utilizan los recursos del cálculo diferencial. Si los alumnos poseyeran un mínimo de estos elementos (análisis de crecimiento de una función) podría conducírseles sin mucha dificultad por esa vía y se obtendría una aplicación, nada usual, de esta materia.

En otro caso, podemos analizar *un caso particular más asequible*,

Problema auxiliar: Demostrar que $A_{2n}>A_n$, o de forma equivalente que:

$$\tan\frac{\pi}{n} > 2\tan\frac{\pi}{2n}.$$

Esta desigualdad puede ser verificada fácilmente utilizando las conocidas fórmulas para el seno y coseno del ángulo duplo.

Esto demuestra, por ejemplo, que

$$A_3 < A_6 < A_{12} < \ldots \qquad \text{y} \qquad A_4 < A_8 < A_{16} < \ldots \text{ etc.}$$

De esta forma el problema IV queda total o parcialmente resuelto en dependencia de los conocimientos previos de los alumnos.

Resultado 4. *Entre los polígonos regulares con igual perímetro el de mayor área es el que tiene el mayor número de lados posible.*

Reconsideremos el problema isoperimétrico, teniendo como "conjunto de figuras" el conjunto de todas las figuras poligonales, es decir:

Problema V. *Entre todas las figuras poligonales con perímetro dado ¿cuál es la que tiene área máxima?*

Conjugando los resultados obtenidos en la solución a los problemas III y IV podemos concluir que el polígono debe ser regular y "con el mayor número de lados posibles". Si consideramos al círculo como *caso límite* de un polígono regular de infinitos lados, inferimos la solución encontrada por Zenodoro:

Resultado 5. *El círculo con perímetro P tiene área mayor que cualquier polígono con ese mismo perímetro.*

Este resultado puede ser demostrado de forma directa: en efecto, si A denota el área de un círculo y P su perímetro, se cumple la relación $A = \dfrac{P^2}{4\pi}$. Teniendo en cuenta, además, (6), se verifica:

$$A \geq A_n \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{\pi}{n} \geq \frac{\pi}{n}.$$

Esta desigualdad puede demostrarse de forma elemental mediante comparación de áreas de figuras relacionadas con el círculo trigonométrico[1].

[1] Es conveniente explicar a los alumnos que el círculo no sólo es la solución del problema isoperimétrico entre los polígonos, sino que también lo es cuando se consideran figuras limitadas por "curvas cerradas arbitrarias", pero que la demostración de este resultado requiere de conocimientos superiores de matemática. Una demostración rigurosa sólo pudo hallarse en el siglo XIX con los esfuerzos de varios geómetras (ver p.e. Tikhomirov, 1990).

Una manera digna de terminar el tema de los polígonos isoperimétricos es plantearse la posibilidad de una aplicación no muy complicada y bastante natural. Pappus (o tal vez las abejas) proporciona un ejemplo en el capítulo V de su Colección Matemática (s.III d.C.) que conjuga la simplicidad con la belleza:

Problema de Aplicación VI. *¿Por qué la forma de las celdas de los panales de abejas* (celdas hexagonales y sin intersticios entre ellas, ver Fig.9) *es la que permite almacenar la mayor cantidad de miel, utilizando una cantidad de cera dada para la elaboración del panal*?

n	3	4	5	6	7	8
k	6	4	*	3	*	*

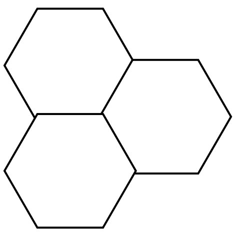


Fig. 9 Optimalidad de las celdas hexagonales

En primer lugar, el uso de polígonos es la mejor forma de no dejar intersticios y usar "paredes" comunes a varias celdas. Por otra parte, el resultado 3 indica que estos polígonos deben ser regulares. Entonces estamos ante el siguiente:

Problema Auxiliar. ¿Cuáles polígonos regulares pueden disponerse en torno de un vértice común sin que haya intersticios?

No es difícil calcular que los ángulos interiores de un polígono regular de n lados valen $\frac{n-2}{n}\pi$. Así que debemos disponer alrededor de un punto un número entero k de ángulos de esa magnitud. Como la suma de los ángulos alrededor de un punto es 2π, obtenemos que debe cumplirse la relación:

$$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=1, \qquad (7)$$

entonces debemos encontrar los valores enteros de k y n ($n \geq 3$) que hacen posible la relación anterior.

Experimento Un sencillo experimento con valores de n y k puede resumirse en la tabla que se muestra en Fig.9. Un análisis de los resultados obtenidos permite la siguiente

Conjetura Los únicos polígonos utilizables son: triángulos, cuadrados y hexágonos.

¿Cómo probar esto?

Por una parte, observemos que (7) puede ser escrito en la forma:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{k},$$

como n y k son enteros positivos, se obtiene que $k \geq 3$, y de (7):

$$1 = k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) \geq 3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}-\frac{3}{n},$$

de donde concluimos que $n \leq 6$. Así que nuestra conjetura es verdadera y obtenemos:

Resultado Parcial. En torno a un vértice los únicos polígonos regulares que pueden colocarse, sin que haya intersticios, son 6 triángulos o 4 cuadrados o 3 hexágonos.

La cantidad de miel será mayor si utilizamos celdas cuya sección plana tenga el área mayor, luego, teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos concluir:

Resultado 6. *La elección de los hexágonos, que hacen las abejas para la construcción de sus panales, es la óptima*[2].

3. En definitiva, ¿qué hemos propuesto?

La construcción de los conceptos
depende de la forma de proponer los problemas,
la cual varía a su vez con el contenido mismo de la civilización
Max Weber, 1965, p. 8

Nos ha interesado, sobre todo, estimular la necesaria concepción de una *retórica matemática* que potencie tanto la imaginación y el goce estético como la argumentación dialéctica y el rigor lógico, pero sin formalismo estéril, procurando hacer más apetitoso el discurso que usamos los docentes y autores de textos para comunicar el saber matemático. Ah, todo esto lo concebimos con un enfoque historicista y participativo, si se quiere siguiendo de cerca un enfoque heurístico constructivista –por favor, sin marco teórico dogmático ni doctrinas epistemológicas, sino con mucha *flexibilidad pedagógica*. Somos conscientes de que todavía nos queda mucho por precisar y aún más por transformar de nuestra práctica docente. Pretendemos que quienes nos lean se motiven y nos ayuden en este empeño.

La propuesta que ilustramos aquí a través de dos cuestiones significativas de medida geométrica: las cuadraturas y los problemas isoperimétricos, ambas limitados a figuras poligonales -incluyendo el círculo, por supuesto- tiene cierta originalidad en la forma presentada que hemos llamado *problematización histórica de temas fértiles*, pero no es novedosa en su concepción. En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, citemos, por ejemplo, el estudio ICMI (Fauvel y van Maanen, eds. 2000), el artículo (Furinghetti, 2007) en un número especial dedicado a la Historia de la

[2] El planteamiento más justo atendiendo a la disposición espacial en cilindros hexagonales puede encontrarse en textos especializados que tratan problemas en espacios tridimensionales: *de un conjunto de cuerpos espaciales con una superficie dada fija, encontrar aquel con el mayor volumen.* Aquí nos hemos limitado al caso isoperimétrico plano y en las modalidades tratadas por Pappus de Alejandría en su famosa, y todavía interesante, *Colección Matemática* (Heath, 1982) *.*

Matemática en la Educación Matemática de la prestigiosa revista *Educational Studies in Mathematics,* o todavía más reciente, la colección (Katz y Tzanakis, eds. 2009). Si el lector está interesado en obtener una base de conocimientos históricos, para implementar un enfoque historicista a sus clases, le recomendamos el texto compacto reciente (Grant y Kleiner, 2015). Nosotros, en base a una experiencia de 50 años de labor docente en diferentes escenarios y niveles, hemos elaborado algunas modestas ideas integradas en un proyecto de investigación encaminado a la *fertilización de la cultura matemática* tanto de estudiantes, como de docentes y las hemos expuesto en publicaciones como, por ejemplo, en Sánchez y Valdés (2000, 2004), Valdés y Sánchez (2011a y 2011b), como también en Sanchez Fernández (2013 y 2016).

BIBLIOGRAFÍA

Borwein, J.; Bailey, D. (2008) *Mathematics by Experiment. CRC Press Taylor & Francis Group.* Boca Ratón. FL.

Dunham, W. (1993) *Viaje a través de los genios.* Eds. Pirámide. Madrid.

Edwards, C.H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag. N. Y.

Fauvel y van Maanen (eds. 2000) *History in Mathematics Education* The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1981), *Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? For the Learning of Mathematics*, vol.2, nº1, 30-33

Furinghetti, F. (2007). *Teacher education through the history of mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 131–143.

Grant, H.; Kleiner, I. (2015) *Turning Points in the History of Mathematics*. Springer. Compact Texbooks in Mathematics. N. Y.

Guzmán, M. de (1991) *Para Pensar Mejor*, Ed. Labor, Madrid.

Guzmán, M. de (2007) *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. *Revista Iberoamericana de Educación* Nº43, pp. 19-58.

Hawkins, T**.** (1979), *Lebesgue's Theory of integration: Its Origins and Development,* Chelsea Publishing Company, N.Y.

Heath, T. (1981), *A History of Greek Mathematics,* vol. II, Dover, N. Y.

Jankvist, U. T. (2009) *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational Studies in Math*.71 (3), 235-261

Katz, V., Tzanakis, C. (eds. 2009) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education.* MAA. Notes Series Vol. 78. Washington DC.

Polya, G. (1974) *Cómo plantear y resolver problemas.* 4ª reimpresión. Editorial Trillas. México

Sánchez Fernández, C. (2013) *¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 8, #11, 225-236, San José, Costa Rica

Sánchez Fernández, C. (2016) *Temas Fértiles para la Cultura Matemática*. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 11, #15, 169-185, San José, Costa Rica

Sánchez, C.; Valdés, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida, en John A. Fossa (ed.) *Facetas do Diamante. Ensaios sobre Educação Matemática e Historia da Matemática.* Editora da SBHMAT. Rio Claro.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo* Ed. Nivola. Madrid

Tikhomirov, V. M. (1990), *Stories about Maxima and Minima,* Am. Math. Soc.-Math. Ass. Amer. Washington DC.

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011a). *Introducción al Análisis Matemático*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Valdés, C.; Sánchez, C. (2011b). *Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana Educ. Mat. Pesquisa*. Sao Paulo, v.13, n.3, 581-596

Weber, M. (1965) *Essai sur la théorie de la science,* Plon, Paris

**Sánchez Fernández, Carlos:** Nació y vive en Cuba desde 1947. Es licenciado en Matemática por la Universidad de La Habana (1970) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad “Lomonosov” de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Colombia, Costa Rica, España, Francia, México, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana, Sudáfrica y Uruguay. Tiene más de 60 publicaciones, de éstas 7 textos en uso. Es miembro del Comité Asesor Internacional del CIAEM y del Consejo de Redacción de varias revistas. Profesor Principal de Historia y Metodología de la Matemática en Cuba. Tiene 50 años de experiencia docente.

**Valdés Castro, Concepción**: Nació y vive en Cuba desde 1946. Es licenciada en Matemática por la Universidad de La Habana (1968) y Dr. en Ciencias Matemáticas por la Universidad “Lomonosov” de Moscú (1976). Ha sido conferencista en Brasil, Costa Rica, España y Panamá. Tiene más de 40 publicaciones, de éstas 5 textos en uso. Es Profesora Principal de Análisis Matemático en Cuba y Profesora Consultante en la Universidad de La Habana. En el 2014 cumplió 50 años de exitosa experiencia docente.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 33-48

Autómatas celulares y aplicaciones

Alberto Cano Rojas, Ángela Rojas Matas

Fecha de recepción: 24/08/2015
Fecha de aceptación: 22/03/2016

Resumen	Un autómata celular es un modelo matemático para un sistema dinámico que evoluciona en pasos discretos. Este trabajo presenta una aplicación de los autómatas celulares para el cifrado de información y el reparto de secretos. Se detalla un ejemplo didáctico de su aplicación para el cifrado de secretos empleando imágenes digitales. El desarrollo de este trabajo ha servido como actividad académica dirigida a alumnado de Ingeniería en Informática, para fomentar su interés en la criptografía mediante herramientas matemáticas estudiadas a lo largo de su carrera. **Palabras clave:** autómatas celulares, criptografía
Abstract	Cellular automata are mathematical models for a dynamic system that evolve in discrete steps. This paper presents an application of cellular automata for encrypting information and sharing secrets. It is shown a didactic example of its application for encrypting secrets using digital images. This work has served as an academic activity aimed at students of Computer Engineering, to encourage their interest in cryptography by means of the use of mathematical tools learned along university courses. **Keywords**: cellular automata, cryptography
Resumo	Um autômato celular é um modelo matemático para um sistema dinâmico que evolui em passos discretos. Este trabalho apresenta uma aplicação de autômatos celulares para a encriptação de informação e partilha de segredos. É apresentado um exemplo didático da sua aplicação para encriptar segredos usando imagens digitais. O desenvolvimento deste trabalho serviu como atividade acadêmica destinada a estudantes de Engenharia Informática, para incentivar o seu interesse na criptografia mediante a utilização de ferramentas matemáticas avançadas que estudaram durante os seus cursos. **Palavras-chave:** autômatos celulares, criptografia

1. Introducción

Un autómata celular es un modelo matemático para un sistema dinámico que evoluciona en pasos discretos. Es adecuado para modelar sistemas naturales o artificiales que puedan ser descritos como una colección de objetos simples que interactúan localmente unos con otros.

Se aplican con éxito en:

- En el estudio de evolución de ecosistemas en biología
- En detección de fuegos en los bosques

- Simulación del tráfico en las ciudades
- Inteligencia Artificial

La primera etapa en la historia de los autómatas celulares se sitúa en los años 50 del siglo XX, con John von Neumann, matemático que tuvo una participación decisiva en la construcción del primer ordenador (el ENIAC en 1946). La segunda etapa llega a finales de los años 60 cuando Martin Gardner divulga en su columna científica *Mathematical Games* de la revista *Scientific American* el autómata celular conocido como “El Juego de la Vida” (Gardner, 1970, pp. 120-123). Se puede encontrar en Internet gran cantidad de información sobre ello. La tercera etapa llega a mediados de los años 80 con Stephen Wolfram, un científico reconocido además por ser el autor del popular programa de ordenador Mathematica (Wolfram, 2002).

Los autómatas celulares tienen, como se ha dicho anteriormente, múltiples aplicaciones. En este trabajo se verá cómo se pueden emplear para el cifrado de información y para el reparto de secretos.

La criptografía es un tema de indudable interés en la actualidad. Empresas y particulares demandan métodos cada vez más seguros para mantener a salvo de intrusos información confidencial. En este trabajo se verá cómo se pueden usar autómatas celulares para cifrar un mensaje de texto. En ocasiones puede que nos interese mantener en secreto una imagen digital. Se verá que también se pueden emplear autómatas celulares para ello.

Por otro lado, los esquemas de reparto de secretos son procedimientos criptográficos para compartir un secreto entre un conjunto de participantes de tal modo que solamente algunos de estos participantes puedan recuperar el secreto. Por ejemplo, supongamos que el director de un banco no quiere que la clave secreta que abre la caja blindada del banco sea conocida por ningún empleado. Por el contrario, desea autorizar a cinco empleados del banco, pero de modo que sólo cuando se junten al menos dos de ellos sí que se pueda abrir la caja fuerte. Esto es un ejemplo de un esquema de reparto de secretos (2, 5). En este trabajo se mostrará cómo podemos usar autómatas celulares para hacer reparto de secretos.

Los automátas celulares en su versión más sencilla, como la tratada en este artículo, y sin entrar en complicaciones criptográficas, es un tema de indudable interés como herramienta docente. Puede ser abordado por alumnos de la titulación de Ingeniería Informática de forma autónoma. Por otro lado, basta buscar por Internet bibliografía relacionada con el tema de automátas celulares para comprobar que se siguen publicando una gran cantidad de artículos en la actualidad, prueba de que los autómatas celulares siguen interesando a los investigadores (Bhasin, Kumar & Kathuria, 2013, pp. 355-357; Yampolskiy, Rebolledo-Mendez & Hindi, 2014, pp. 57-67).

Los métodos criptográficos desarrollados en este trabajo fueron implementados en Matlab por alumnos de primer curso de la titulación de Ingeniería Informática.

2. Autómatas celulares 1D

Se considera un vector. Cada componente del vector se va a llamar célula. Se supone que cada célula sólo puede tomar dos estados: cero (blanco) o uno (negro). Este tipo de autómata se conoce como autómatas celulares unidimensionales (1D) elementales.

Se va a efectuar un proceso dinámico donde se partirá de una configuración inicial $C^{(0)}$ de cada una de las células (etapa 0) y en cada nueva etapa se calculará el estado de cada célula de acuerdo al estado de las células vecinas y de la propia célula en la etapa anterior. Se indicará por $s_i^{(t)}$ el estado de la célula i-ésima en la etapa t.

Se considerará, por simplicidad, una vecindad de radio 1. Eso quiere decir que para calcular el estado de la célula i-ésima en la etapa t, es decir para calcular $s_i^{(t)}$, se usará el estado de las células i-1, i, i+1 en la etapa anterior, es decir, se usará $s_{i-1}^{(t-1)}$, $s_i^{(t-1)}$ y $s_{i+1}^{(t-1)}$. Un esquema se representa en la figura 1:

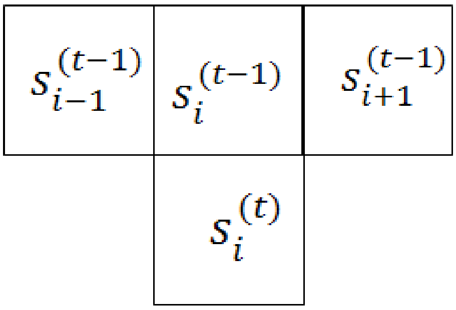


Figura 1: Esquema

La regla de evolución del autómata viene dada por el gráfico de la figura 2:

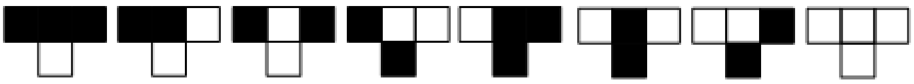


Figura 2. Regla de evolución del autómata

En este gráfico la fila superior indica el estado de la célula central (la célula i) y de sus dos células vecinas en una determinada etapa y, en la fila inferior, el estado de la célula central en la siguiente etapa. Por ejemplo, en el primer caso de la figura 2: si el estado de una célula en una determinada etapa es 1 (negro) y sus dos vecinas en esa misma etapa también están a 1 (negro) entonces el estado de la célula en la siguiente etapa será 0 (blanco). De la misma forma se interpretan el resto de los 7 casos.

Se considerará un autómata con *N* células que indicaremos por: s_0, s_1, … , s_{N-1}. Partiendo de una configuración inicial $C^{(0)}$ y con la regla de la figura 2 se podrá recalcular el estado en cada nueva etapa de las células s_1, … , s_{N-2}, pero se necesitan establecer unas condiciones en la frontera para poder recalcular s_0 y s_{N-1}. Es habitual considerar como condiciones en la frontera las establecidas en la figura 3 conocidas como *condiciones periódicas*.

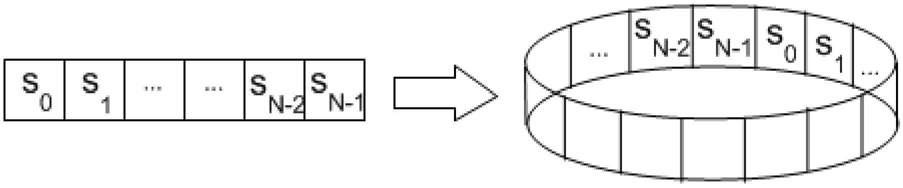


Figura 3: Condiciones periódicas en la frontera

Si el autómata se dibujara en una hoja de papel y se enrollara la hoja como se muestra en la figura 3, entonces, la vecindad a considerar para recalcular el estado de la primera célula s_0 en una nueva etapa será las células s_{N-1}, s_0, s_1 en la etapa anterior.

Análogamente el estado de la última célula s_{N-1} se recalculará teniendo en cuenta el estado de s_{N-2}, s_{N-1}, s_0 en la etapa anterior.

Por ejemplo, en la tabla 1 se considera un autómata con 4 células cuya configuración inicial fuera: $C^{(0)}$ ={1 1 1 0}. Aplicando la regla de la figura 2 con condiciones periódicas en la frontera se obtendrían los resultados de la tabla 1.

Etapa	$s_0^{(t)}$	$s_1^{(t)}$	$s_2^{(t)}$	$s_3^{(t)}$
0	1	1	1	0
1	1	0	0	0
2	1	1	0	1
…				

Tabla 1: Evolución de un autómata 1D con 4 células

Si indicamos por $Z_2 = \{0,1\}$, la regla de la figura 2 también se puede escribir como una aplicación $f : Z_2^3 \to Z_2$ tal que:

$$f(1,1,1) = 0$$
$$f(1,1,0) = 0$$
$$f(1,0,1) = 0$$
$$f(1,0,0) = 1$$
$$f(0,1,1) = 1$$
$$f(0,1,0) = 1$$
$$f(0,0,1) = 1$$
$$f(0,0,0) = 0$$

En una vecindad de radio 1, como es la considerada hasta ahora, hay 256 reglas posibles ya que hay 8 estados posibles de las tres células: {111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000} y a cada uno de estos estados se le pueden asociar un cero o un uno, con lo que el número total de casos posibles es $2^8 = 256$.

En el caso de la regla considerada hasta ahora en el ejemplo estos valores son: 00011110 que en decimal se corresponde con: $00011110_{\,2} = 30$. Por esta razón, la regla de evolución del autómata de la figura 2 se conoce como regla 30.

En la figura 4 se muestra la evolución de un autómata con la regla 30 y 43 células. En la configuración inicial todas las células están a cero salvo la célula 22 que está a 1. Se representan 21 etapas.

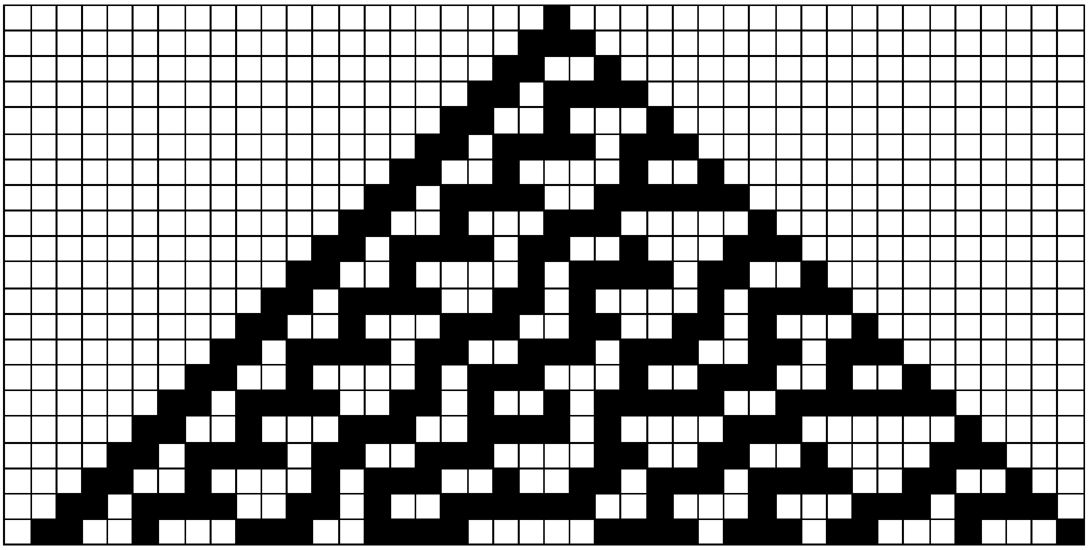


Figura 4: Evolución de la regla 30 con un autómata de 43 células

En la figura 5 se muestra la evolución de un autómata con la regla 30, donde el autómata tiene ahora 257 células y se muestran las 128 primeras etapas. La configuración inicial es: todas las células a cero salvo la central que está a uno que sería la primera fila (fila superior) de la figura 5.

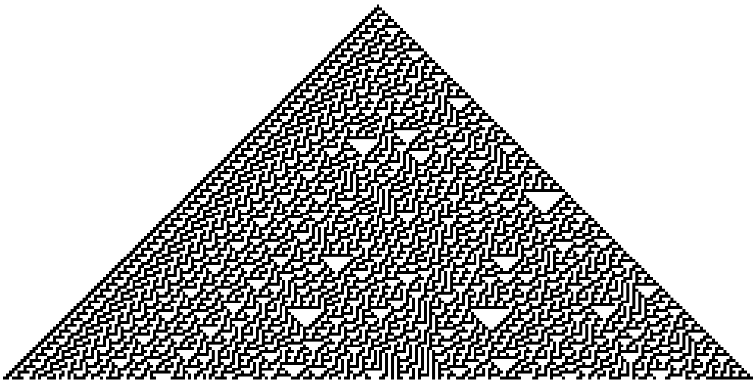


Figura 5: Regla 30 en un autómata de 257 células

En la figura 6 se muestra la similitud entre un detalle del caparazón de un caracol marino y un trozo de gráfico obtenido con la regla 30.

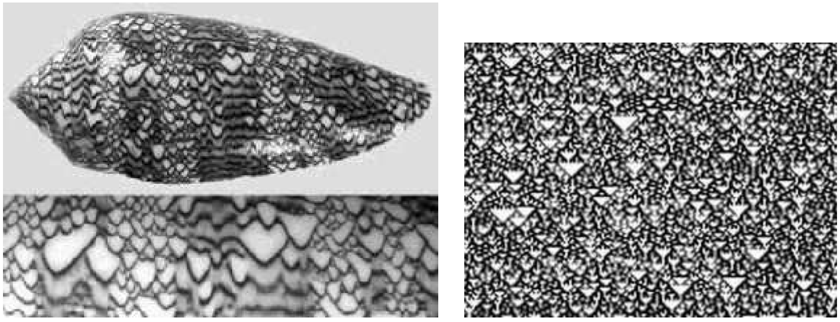


Figura 6: Caracol marino y regla 30

Los números pseudoaleatorios son muy importantes en Ciencias e Ingeniería. Stephen Wolfram (Wolfram, 1986a, pp. 123-169) fue el primero en proponer el autómata celular anterior como generador de números pseudoaleatorios. La idea sería partir de una configuración inicial del autómata, que sería la semilla del generador, efectuar unas cuantas iteraciones y quedarse con los bits generados por una determinada célula (por ejemplo, la central). De hecho, la orden "RandomInteger" del conocido programa Mathematica de Stephen Wolfram usa este autómata para la generación de números pseudoaleatorios.

En la figura 7, como curiosidad, se muestra la evolución del autómata celular correspondiente a la regla 90 en el que se parte de la misma configuración inicial que en el ejemplo anterior: todas las células a cero salvo la central que está a uno. Aparece el fractal conocido como triángulo de Sierpinski. Esta figura también se conoce como triángulo de Pascal módulo 2.

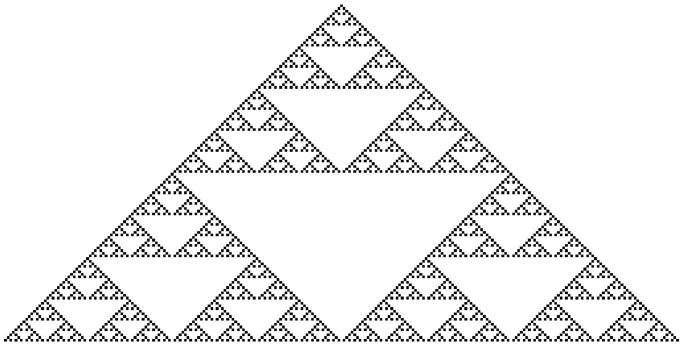


Figura 7: Autómata con la regla 90

Recordemos que el triángulo de Pascal se construía poniendo unos en los laterales del triángulo y un término del interior del triángulo se obtenía a partir de la suma de los dos que le precedían en la fila anterior, tal como se indica en la parte izquierda de la figura 8. A continuación tomamos módulo 2: los impares se ponen a 1 (negro) y los pares se ponen a 0 (blanco) tal y como se indica en la parte derecha de la figura 8.

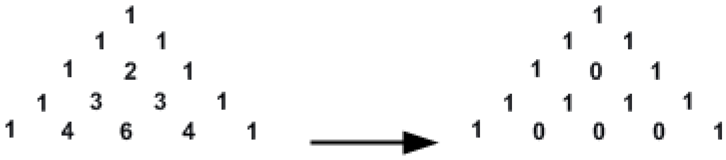


Figura 8: Triángulo de Pascal y triángulo de Pascal módulo 2

Si repetimos esta idea para las 128 primeras filas del triángulo se obtiene la imagen de la figura 7. La relación entre la regla 90 y el triángulo de Pascal queda patente cuando se comprueba que la regla 90 es equivalente a la siguiente expresión:

$$s_i^{(t+1)} = s_{i-1}^{(t)} + s_{i+1}^{(t)} \pmod 2$$

El estado de la célula i en la etapa $t+1$ consiste en sumar (módulo 2) los estados de las células $i-1$ e $i+1$ en la etapa anterior, es decir, en la etapa t.

3. Cifrado con autómatas celulares 1D: cifrado de Wolfram

S. Wolfram (Wolfram, 1986b, pp. 429-432) también propuso usar autómatas celulares para cifrar un mensaje de texto con un método muy sencillo que se describe a continuación.

Se usará, por ejemplo, el alfabeto de la Tabla 2. Este alfabeto está compuesto de 32 caracteres que son: el símbolo #, las 27 letras del abecedario (desde la A hasta la Z) y los números del 1 al 4. Se podría elegir otro alfabeto por supuesto.

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Tabla 2: Alfabeto de 32 caracteres

Por otro lado, un número entre 0 y 31 se escribe en binario con 5 bits: entre 00000 (correspondiente al 0) y 11111 (correspondiente al 31).

El mensaje que se quiere cifrar es, por ejemplo: “HOLA”.

Se convierte cada letra en número de acuerdo a la tabla anterior. Así, el mensaje da lugar a la secuencia: {8,16,12,1}.

Pasando a binario, con 5 bits cada uno, se obtendrá:

M={01000,10000,01100,00001}

es decir, una secuencia de 20 bits.

Se escoge una clave secreta de cifrado que será la configuración inicial $C^{(0)}$ del autómata. Por ejemplo, la clave podría ser la palabra: “CAMINO”.

La clave se convierte en la secuencia {3,1,13,9,14,16} de acuerdo al alfabeto empleado. Se pasa a continuación cada número a binario con 5 bits: {00011,00001,01101,01001,01110,10000}. Entonces:

$$C^{(0)} = \{s_0^{(0)}, s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \ldots, s_{N-1}^{(0)}\} = \{000110000101101010010111010000\}$$

Se aplica la regla 30 a un autómata que tiene $C^{(0)}$ como configuración inicial, efectuando un número determinado de iteraciones. Cuando se haya terminado el proceso, se elige una determinada célula y la secuencia de bits:

$$s_i^{(t)}, s_i^{(t+1)}, s_i^{(t+2)}, \ldots$$

Por ejemplo, se elige i=15 y t=25. Como el mensaje a cifrar tiene 20 bits, se obtendría la siguiente secuencia de 20 bits:

K=$\{s_{15}^{(25)}, s_{15}^{(26)}, \ldots, s_{15}^{(44)}\}$ = {10010011101010000100}

Resumiendo, lo que se ha hecho ha sido conseguir una lista K de 20 bits a partir de una clave secreta que era la palabra “CAMINO”. Se han obtenido los últimos 20 estados de la célula 15 (en este caso había 30 células y se numeraban de la forma 0, 1,…, 29).

A continuación, se va a ver cómo cifrar la secuencia de 20 bits correspondiente al mensaje original M con la clave K, que también tiene 20 bits. El método de cifrado elegido es el conocido como método de Vernam. El cifrado Vernam es un algoritmo de criptografía inventado por Gilbert Vernam, ingeniero de los laboratorios AT&T, en 1917 y fue utilizado durante la segunda guerra mundial (Aguirre, 2006). Se trata de un método muy sencillo que usa la operación XOR.

La suma módulo 2 o suma en $\mathbb{Z}_2$, reflejada en la tabla 3, también se llama suma XOR ya que coincide con la disyunción exclusiva usada en la lógica matemática (en inglés exclusive or), y es muy conocida por los informáticos.

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

Tabla 3: Suma módulo 2

Para cifrar el mensaje se hace una suma XOR bit a bit, que se indicará con el símbolo $\oplus$, o lo que es lo mismo, una *suma módulo 2 pero bit a bit*, entre las secuencias M y K, obteniendo:

$D=M\oplus K=00110101011111111101$

Cogiendo los bits de 5 en 5 de la secuencia D, pasando a decimal se obtiene {6,21,31,29} y, mirando el alfabeto, se convierte en: “FT42” que será definitivamente el mensaje cifrado.

Para descifrar se tendrán que deshacer los pasos anteriores.

Observar que si $D=M\oplus K \Rightarrow D\oplus K=M\oplus K\oplus K=M\oplus \theta=M$

Ya que la suma XOR de una secuencia de bits K con ella misma es siempre una secuencia de ceros que se ha indicado por θ. Después, la suma XOR de una secuencia de bits M con una secuencia de ceros, da como resultado, evidentemente, la propia M. En resumen, $M=D\oplus K$, propiedad que se utilizará para descifrar.

El receptor del mensaje cifrado que reciba “FT42”, lo convertirá en números obteniendo {6, 21, 31, 29} que pasará a binario con 5 bits cada uno obteniendo la secuencia D. Como será conocedor de la clave K, hará $M=D\oplus K$, obteniendo de esta forma los 20 bits del mensaje original. A partir de ellos, se deducirá el mensaje de texto.

Este método de cifrado es muy sencillo. Es el clásico método de Vernam con la única particularidad de que la secuencia de bits pseudoaleatoria con la que se va a hacer la suma XOR se obtiene a través del uso de un autómata celular. Posteriormente otros autores propusieron variaciones del método anterior (Seredynski, Bouvry & Zomaya, 2004, pp.753-766).

3. Cifrado de una imagen usando un autómata celular 1D

En esta sección se verá cómo cifrar una imagen digital en lugar de un mensaje de texto. Se podría usar una variación del método descrito en la sección anterior, pero se llevará a cabo otro método distinto también basado en autómatas celulares.

En este trabajo se verá un algoritmo para cifrar una imagen que emplea autómatas celulares 1D. Es una versión simplificada del método propuesto por Martín, Rodríguez & de la Villa (2007, pp. 571-578).

Se considera un autómata elemental 1-D con N células: s_0, s_1, ... , s_{N-1}. La vecindad va a ser de radio 1, por simplicidad (aunque los autores trabajan con un radio igual a 8).

Para actualizar en cada nueva etapa el estado de una célula se va a emplear una fórmula del tipo:

$$s_i^{(t)} = \sum_{p=-1}^{1} \lambda_p \, s_{i+p}^{(t-1)} + s_i^{(t-2)} = \lambda_{-1} \, s_{i-1}^{(t-1)} + \lambda_0 \, s_i^{(t-1)} + \lambda_1 \, s_{i+1}^{(t-1)} + s_i^{(t-2)} \pmod 2 \qquad (1)$$

Se trata de un autómata de orden 2, ya que el estado de una célula en la etapa t depende del estado del autómata en dos etapas anteriores: las etapas $t-1$ y $t-2$. El valor de cada parámetro λ_p puede ser cero o uno.

Ahora es necesario conocer la configuración del autómata en las dos primeras etapas: $C^{(0)}$ y $C^{(1)}$.

En la tabla 4 se muestra un ejemplo de la evolución de un autómata de 16 células donde se han elegido aleatoriamente las dos primeras configuraciones y donde se ha aplicado la fórmula (1) con: $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1 =$=101. Se han usado las condiciones periódicas de la figura 3.

Etapa	Configuración del autómata
0	0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0
1	1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
2	0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
3	0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0

Tabla 4: Autómata 1D de orden 2

La fórmula (1) permite averiguar la configuración del autómata en la etapa t, es decir $C^{(t)}$, en función de las configuraciones en las dos etapas anteriores $C^{(t-1)}$ y $C^{(t-2)}$.

Como sumar y restar en Z_2 es lo mismo, eso quiere decir que la fórmula (1) se puede escribir también de la forma:

$$s_i^{(t-2)} = \sum_{p=-1}^{1} \lambda_p \, s_{i+p}^{(t-1)} + s_i^{(t)} \pmod 2 \quad (2)$$

Esta fórmula indica que podemos dar marcha atrás y recuperar el valor de la configuración $C^{(t-2)}$, si se conocen las configuraciones $C^{(t-1)}$ y $C^{(t)}$. Por esta razón, este tipo de autómatas se llaman *autómatas reversibles*.

Esta es la idea que permitirá desarrollar un método de cifrado de una imagen digital. Se aplicará esta técnica a una imagen en escala de grises.

La imagen secreta que se va a cifrar se muestra en la figura 9. Es una imagen de tamaño 256×256 en escala de grises, aunque el método se puede adaptar fácilmente al caso de imágenes en color. Esta imagen tiene 256 niveles de gris posibles para cada píxel que van desde 0 correspondiente al negro hasta 255 correspondiente al blanco.

Una imagen en escala de grises no es más que una matriz de números donde cada número indica el nivel de gris del píxel: 0 (en binario con 8 bits es la secuencia 00000000) que se corresponde con el negro y 255 (en binario con 8 bits es la secuencia 11111111) que se corresponde con el blanco. Son necesarios 8 bits (1 byte) para almacenar el nivel de gris de un píxel de la imagen de la figura 9. Este rango de niveles de gris es muy habitual en las imágenes que circulan por Internet.

Figura 9: Imagen secreta

Cada fila tendrá 256 píxeles, lo que hace un total de 256×8=2048 bits. Se cogerán las filas de dos en dos. Pues bien, los 2048 bits de la primera fila serán el estado inicial $C^{(0)}$ de un autómata y análogamente los 2048 bits de la segunda fila serán el estado $C^{(1)}$. Después se efectúan una serie determinada de iteraciones T, obteniendo las sucesivas configuraciones del autómata $C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots, C^{(T-1)}, C^{(T)}$.

Pues bien $C^{(T-1)}$ y $C^{(T)}$ serán dos vectores con 2048 bits cada uno. Se pasa a decimal cada grupo de 8 bits y se obtendrán dos vectores de 256 componentes que serán las dos primeras filas de la imagen cifrada. De esta misma forma se van cogiendo de dos en dos las sucesivas filas de la imagen original.

La clave secreta será los números $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1$ y el número de iteraciones T. El resultado, con $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1 = 101$ y $T = 5$, se muestra en la figura 10.

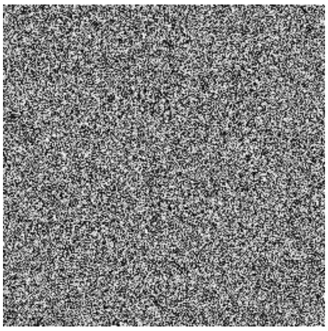


Figura 10: Imagen cifrada

La versión simplificada que se ha visto anteriormente tiene interés sólo desde el punto de vista docente. Para hacer el método más seguro se deberían usar claves distintas para cada par de filas de la imagen. También es aconsejable efectuar previamente una permutación aleatoria de los píxeles de la imagen.

Como el autómata es reversible, basta con dar marcha atrás para recuperar la imagen original para lo que hará falta saber, lógicamente, la clave secreta.

El mismo grupo de alumnos que implementó la técnica desarrollada en esta sección propuso una pequeña variación de la misma como técnica de cifrado. Teniendo en cuenta que en la asignatura de Matemática Discreta de la titulación habían trabajado el tema de aritmética modular, pensaron, y de hecho es así, que se podía simplificar aún más el método si:

- cada celda podía tomar valores entre 0 y 255
- se trabaja, lógicamente, con aritmética módulo 256 para que los niveles de gris permanezcan siempre confinados dentro del rango 0-255.

Efectivamente en este caso el paso de binario a decimal y al revés no es necesario, lo que simplifica considerablemente el código. Ahora bien, la fórmula (1) quedaría ahora de la siguiente forma:

$$s_i^{(t)} = \sum_{p=-1}^{1} \lambda_p \, s_{i+p}^{(t-1)} + s_i^{(t-2)} \pmod{256} \quad (3)$$

A la izquierda de la figura 11 se muestra la imagen original: se trata de una imagen de tamaño 136x136 con niveles de gris en el mismo rango de antes, es decir, entre 0 y 255. A la derecha de la figura 11 Se muestra la imagen cifrada obtenida para $\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1 = 25, 16, 134$ y $T = 5$.

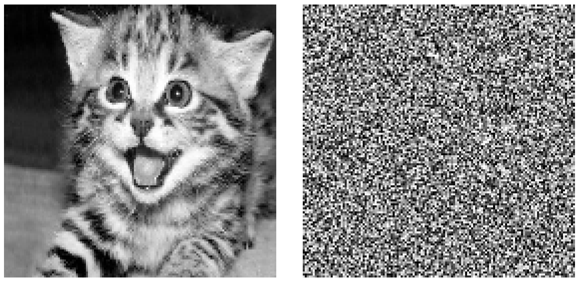
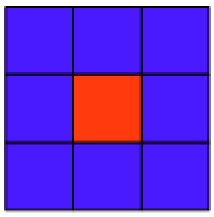


Figura 11: Imagen original a la izquierda e imagen cifrada a la derecha

5. Autómata celulares 2D y el reparto de secretos

Una idea similar se puede aplicar en dos dimensiones (Álvarez, Hernández & Martín, 2005, pp. 411-418).

En este caso el autómata es una matriz M×N donde cada elemento de la matriz es una célula con dos posibles estados: 0 y 1. En un autómata 2D una célula se indicará ahora de la forma $s_{(i,j)}^{(t)}$ donde i es la fila, j es la columna y t es la etapa. De nuevo, el estado de una célula en una etapa dependerá del estado de las células vecinas en etapas anteriores. Se pueden considerar distintos tipos de vecindades, por ejemplo, la que se indica en la figura 12:



$s_{(i-1,j-1)}^{(t)}$	$s_{(i-1,j)}^{(t)}$	$s_{(i-1,j+1)}^{(t)}$
$s_{(i,j-1)}^{(t)}$	$s_{(i,j)}^{(t)}$	$s_{(i,j+1)}^{(t)}$
$s_{(i+1,j-1)}^{(t)}$	$s_{(i+1,j)}^{(t)}$	$s_{(i+1,j+1)}^{(t)}$

Figura 12: Una célula en la posición (i,j) (en rojo) y sus 8-vecinas (en azul)

Los autómatas 2D también se pueden usar como generadores de números pseudoaleatorios y como herramientas de cifrado de una forma sencilla y similar a la explicada en los apartados anteriores. Sin embargo, se mostrará a continuación una sencilla aplicación a un protocolo criptográfico conocido como el *reparto de secretos* ya que se desea introducir a los alumnos en esta técnica criptográfica por su indudable interés.

El secreto será una imagen digital en escala de grises como la imagen de la figura 9. Se verá cómo funciona el esquema (2, 2) para esta imagen. En este caso, hay dos participantes en el proceso y solamente cuando se junten los dos podrán recuperar el secreto (la imagen digital de la figura 9). El proceso a seguir es muy sencillo y se explica a continuación.

Se pasa cada nivel de gris de un píxel a binario. De manera que la primera fila que tiene 256 píxeles se convertirá en una secuencia de 256x8=2048 bits. Como la imagen empleada tiene 256 filas, se obtendrá entonces una matriz de tamaño 256×2048 de ceros y unos. La matriz binaria anterior será la configuración inicial $C^{(0)}$ de un autómata 2D. Después se creará una matriz pseudoaleatoria de ceros y unos exactamente del mismo tamaño, es decir 256×2048, que será la configuración $C^{(1)}$. A continuación, se pone el autómata a trabajar usando la siguiente fórmula:

$$s_{(i,j)}^{(t)} = \sum_{k,p=-1}^{1} \lambda_{k,p}\, s_{(i+k,j+p)}^{(t-1)} + s_{(i,j)}^{(t-2)} \pmod 2 \qquad (4)$$

Hay 9 coeficientes $\lambda_{k,p}$ en la fórmula anterior. Cada uno puede ser un cero o un uno, por lo tanto, hay $2^9 = 512$ posibilidades. Se usarán condiciones periódicas tanto para las filas como para las columnas.

Entonces se efectúan una serie de iteraciones, por ejemplo, siete. Se seleccionan $C^{(6)}$ y $C^{(7)}$. Ambas son matrices binarias de tamaño 256×2048 que pasaremos a decimal agrupando los bits de 8 en 8. De esta forma se obtendrán dos matrices S_1 y S_2 de tamaño 256×256 cuyos elementos varían entre 0 y 255 que se podrán mostrar como imágenes en escala de grises. En la figura 13 se muestran las imágenes S_1 y S_2 obtenidas usando los valores de $\lambda_{k,p}$ de la Tabla 5.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \lambda_{-1,-1} & \lambda_{-1,0} & \lambda_{-1,1} \\ \hline \lambda_{0,-1} & \lambda_{0,0} & \lambda_{0,1} \\ \hline \lambda_{1,-1} & \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Tabla 5: Valores de $\lambda_{k,p}$ usados

Pues bien, al primer participante del esquema (2, 2) se le dará S_1 y al segundo participante se le dará S_2. Ninguno de ellos tendrá ninguna información sobre la imagen secreta ya que la información que cada uno posee es una imagen con aspecto aleatorio como se muestra en la figura 13. Sin embargo, cuando ambos se junten, como el autómata dado en la ecuación (4) es también reversible, podrán retroceder y calcular $C^{(0)}$, es decir, la imagen secreta original.

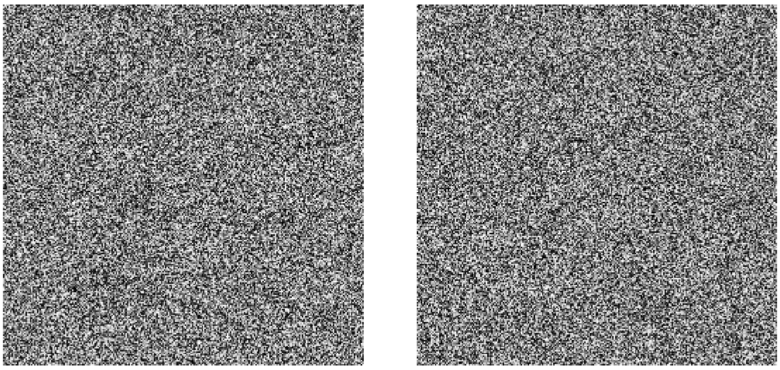


Figura 13: Imágenes de cada participante en el reparto de secretos (2,2)

Esta idea se puede generalizar para otros esquemas de reparto de secretos. Por ejemplo, si se desea hacer un esquema (2, 5): de nuevo la imagen original se haría coincidir con el estado inicial del autómata $C^{(0)}$, la configuración $C^{(1)}$ se escogería aleatoriamente y se harían un número determinado de iteraciones, por ejemplo, siete. Entonces las imágenes S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 se obtendrían a partir de las 5 últimas configuraciones $C^{(3)}, C^{(4)}, C^{(5)}, C^{(6)}$ y $C^{(7)}$,respectivamente. Si se juntan dos participantes con configuraciones consecutivas podrán dar marcha atrás y recuperar la imagen secreta.

En este método también se puede trabajar con congruencias módulo 256, lo que supone una simplificación muy notable del código.

6. Conclusiones

Los autómatas celulares son un tema de indudable interés para un futuro ingeniero informático debido a las interesantes aplicaciones que tienen. Se ha visto en este trabajo cómo se pueden aplicar para cifrar texto, para cifrar una imagen y también para un esquema de reparto de secretos donde el secreto es una imagen digital.

Las ideas han surgido de dos artículos de investigación (Álvarez et al., 2005, pp. 411-418 y Martín et al., 2007, pp. 571-578). Se propusieron a alumnos de la titulación de Ingeniería Informática una implementación de dichas ideas, aunque en versiones simplificadas. Se ha acercado así la investigación a la docencia universitaria.

Por otro lado, los alumnos han usado Matlab para implementar las técnicas aquí descritas. Esto les sirve de paso para conocer y afianzar el lenguaje de programación de Matlab que se está convirtiendo en una herramienta de gran utilidad para un ingeniero.

Los resultados fueron interesantes porque consiguieron una gran motivación en los alumnos que opcionalmente eligieron llevar a cabo esta experiencia.

Bibliografía

Álvarez, G., Hernández, L., Martín, A. (2005). *A new secret sharing scheme for images based on additive 2-Dimensional cellular automata*. Lecture Notes in Computer Science, 3522, 411-418.

Bhasin, H., Kumar, R., Kathuria, N. (2013). *Cryptography Using Cellular Automata*. International Journal of Computer Science and Information Technologies, 4 (2),355-357.

Aguirre, J.R. (2006). *Material de Seguridad Informática y Criptografía*. Recuperado el 22 de marzo de 2016, de http://www.deic.uab.es/material/26118-09CifraClasica.pdf

Gardner, M. (1970). *Mathematical Games – The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"*. Scientific American, 223, 120–123.

Martín, A., Rodríguez, G., de la Villa, A. (2007). *A protocol to cipher digital images based on cat maps and cellular automata*. Lecture Notes in Computer Science, 4477, 571-578.

Seredynski, F., Bouvry, P., Zomaya, P. (2004). *Cellular automata computations and secret key cryptography.* Parallel Computing, 30, 753-766.

Wolfram, S. (1986,a). *Random sequence generation by cellular automata*. Advances in Applied Mathematics, 7, 123-169.

Wolfram, S. (1986,b). Cryptography with cellular automata. Lecture Notes in Computer Science, 218, pp. 429-432.

Wolfram, S. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc., 2002.

Yampolskiy, R.V, Rebolledo-Mendez, J. D., Hindi, M.M. (2014). *Password Protected Visual Cryptography via Cellular Automaton Rule 30*. Transactions on Data Hiding and Multimedia Security IX, Lecture Notes in Computer Science, 8363, 57-67.

Autores:

Alberto Cano Rojas. Doctor en Informática por la Universidad de Granada, España. Actualmente es Assistant Professor en la Virginia Commonwealth University, EEUU. Su labor se centra en la investigación de Sistemas Inteligentes y Modelos Computacionales. Interesado en las Matemáticas recreativas y sus aplicaciones a la docencia universitaria en enseñanzas técnicas en ingeniería Informática. acano@vcu.edu

Ángela Rojas Matas. Licenciada en Matemáticas, Doctora en Informática. Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba, España. Durante muchos años ha impartido la asignatura Álgebra Lineal en el primer curso de la titulación universitaria de Ingeniería Informática. angela.rojas@uco.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 49-70

Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada

María del Socorro García González, Crisólogo Dolores Flores

Fecha de recepción: 08/06/2015
Fecha de aceptación: 26/03/2016

Resumen	Se exponen los elementos del diseño y puesta en escena de una Situación de Aprendizaje para la enseñanza de la derivada en estudiantes principiantes universitarios de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Este trabajo es motivado por la detección de un problema concreto en un curso de Cálculo Diferencial: una cantidad significativa de los estudiantes escasamente comprenden este concepto. Por tal razón, se propone como objetivo ayudarlos a mejorar su comprensión del concepto derivada. Para elaborar la Situación de Aprendizaje se han tomado como ejes directrices la variación y la transición entre registros de representación. **Palabras clave**: Derivada, Variación, Estudiantes universitarios
Abstract	We expose the design elements and staging of a Learning Situation for teaching of the derivative to beginner's students university of the Autonomous University of Guerrero, Mexico. This work is motivated by the detection of a specific problem in a course of differential calculus: a significant number of students barely understand this concept. For this reason, we decided to help them improve their understanding of derivative concept. To develop the Learning Situation are taken as guidelines axis: the variation and the transition between representation registers. **Keywords**: Derivative, Variation, University students
Resumo	Expomos a concepção e a experimentação de uma situação de aprendizagem para o ensino de derivada para estudantes iniciantes universitários, inscritos na Universidade Autónoma de Guerrero, México. Este trabalho é motivado pela detecção de um problema específico em um curso de cálculo diferencial: um número significativo de alunos raramente entende esse conceito. Por esta razão, decidimos ajudá-los a melhorar a sua compreensão do conceito derivada. Para desenvolver a situação de aprendizagem são tomados como diretrizes: a variação e a transição entre os registros de representação. **Palavras-chave:** Derivada, Variação, Estudantes universitários.

1. Introducción

Con base en la revisión de algunas investigaciones realizadas en Matemática Educativa a nivel bachillerato tocante a los conceptos límite y derivada, se concluye que la mayoría de los estudiantes sólo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo escasamente comprenden el significado de esos algoritmos que realizan (García y Navarro, 2010; Sánchez-Matamoros et al, 2008; Dolores, 2004; Dolores, 2007; Dolores y Zavaleta, 2010). A diferencia de estas investigaciones, nuestro propósito está dirigido al trabajo con estudiantes de Nivel Superior en específico estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas. Centramos la atención en el concepto: derivada.

Para obtener evidencia sobre lo que los estudiantes conocen acerca de la derivada, se realizó una encuesta a los 2 grupos que cursaban el primer año (45 estudiantes) de dicha licenciatura (con edades entre 17 y 25 años) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México; en ella se les pedía contestar la pregunta ¿qué es la derivada de una función? Los resultados obtenidos indicaron que gran parte de los estudiantes tenían ideas alejadas de lo que es la derivada de una función (la identifican como fórmula) y sólo el 15% da evidencia de tener una idea más cercana de la definición (la identifican con pendiente de la recta tangente, límite, razón de cambio).

Esta situación nos permitió identificar un problema concreto de aprendizaje vinculado a la práctica escolar en un escenario concreto, por tanto motivó nuestra investigación, a saber: la escasa comprensión del concepto derivada en estudiantes de primer año de licenciatura en matemáticas. Debemos aclarar que si bien emitimos este juicio a partir de la sola definición del concepto, la justificación se basa en que desde nuestro punto de vista conocer la definición de un concepto es una de las actividades fundamentales para comprender un concepto. En la sección 2 se abordará más a fondo esta cuestión.

Debido al problema detectado el objetivo de la investigación estuvo dirigido al diseño y puesta en práctica de una Situación de Aprendizaje (SA) que contribuyera a la mejora de la comprensión del mencionado concepto en los estudiantes en los que se detectó tal deficiencia. Por tanto esta investigación, a diferencia de otras, se sitúa en condiciones escolares concretas: con un grupo de estudiantes de licenciatura, en un curso de Cálculo Diferencial con validez curricular en donde la SA para el tratamiento del concepto en cuestión se insertó y ejecutó en las actividades oficiales del Programa de Estudios correspondiente.

La razón por la que abogamos a la comprensión del concepto es que creemos de acuerdo con Jungk (1986), que ésta es fundamental para poder aplicar lo aprendido de forma segura, al mismo tiempo que es esencial para poder comunicarlo. Debido a ello, se decidió usar lo menos posible el formalismo matemático y poner en el centro de atención al enfoque variacional y junto a ello la transición entre registros. Por tal razón para el diseño de la SA se usó como base el libro: La variación y la derivada, de Dolores (2013). En esta obra se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos de Cálculo en especial aquellos que tienen una relación estrecha con la derivada.

El sustento teórico que fundamenta este trabajo, es la Teoría de la Actividad (TA). Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM).

2. Elementos teóricos y Metodología

Debido a que nuestra intención fue proponer actividades que ayudaran a los alumnos a comprender el concepto derivada, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de la palabra comprender, a continuación lo hacemos.

En el contexto educativo Stone(1990) señala que comprender no es simplemente tener conocimientos, sino más bien tener la habilidad de pensar con eso que se sabe y además poder aplicarlo flexiblemente en el mundo, esto último es a lo que algunos autores llaman aplicación o uso de los conceptos. Sierpinska (1992) en el terreno de la Educación Matemática, plantea que se logra comprender algo de un concepto, cuando se han visto ejemplos y contraejemplos de él, cuando se puede decir lo que un concepto es y no es, cuando un sujeto puede darse cuenta de las relaciones de tal concepto con otros, cuando se perciben relaciones análogas con las que se están familiarizadas y cuando se ha entendido cuáles son las posibles aplicaciones de tal concepto.

Desde la perspectiva de la MEM (Jungk, 1986), un estudiante asimila un concepto cuando es capaz de realizar las siguientes actividades: Poder indicar ejemplos para el concepto tratado, conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto, poder nombrar propiedades del concepto, indicar contraejemplos, señalar casos especiales, señalar casos límite, conocer relaciones con los demás conceptos, conocer varias definiciones del concepto y conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado.

Las ideas expuestas por los autores anteriores, se complementan entre sí, por esta razón con base en ellas, asumimos que se comprende un concepto cuando el estudiante: sabe qué es y cómo se define ese concepto, cuando puede indicar ejemplos de él, cuando conoce y utiliza correctamente la denominación del concepto, cuando puede nombrar propiedades del concepto, indicar ejemplos y contraejemplos, dar varias definiciones de este, identificar casos especiales y casos límite del concepto, cuando conoce relaciones de este con otros conceptos y cuando pueda usar o aplicar el concepto en la resolución de problemas o situaciones. A estas actividades las hemos caracterizado como fundamentales para comprender un concepto.

Por otro lado, definimos una Situación de Aprendizaje, como el espacio de encuentro en el que los participantes (profesor y alumnos), coordinan acciones a través de un proceso de interpretación/comprensión mediante el cual logran construir significados que comparten. Las situaciones de aprendizaje se construyen de acuerdo a los conocimientos que el alumno debe aprender y a las características que estos saberes presentan y se realizan con un método óptimo. En la presente investigación el espacio de encuentro fue el salón de clases, y las acciones coordinadas por el profesor (en este caso la primera autora del artículo) y los alumnos, estuvieron encaminadas a la resolución de un conjunto de actividades (secuencias) mediante las cuales se pretendió aportar elementos que permitieran a los estudiantes mejorar la comprensión del concepto derivada.

2.1. La Teoría de la Actividad: Base para la orientación de la SA

La Teoría de la Actividad aporta elementos para orientar la actividad cognoscitiva, es el lugar de encuentro interdisciplinar donde se estudian las diferentes formas de las prácticas humanas tanto en el ámbito individual como social al mismo tiempo.

Leontiev (1981) describe que una actividad está compuesta por sujeto, objeto, acciones y operaciones. El sujeto es la persona (o grupo) comprometida con la actividad. El objeto (como objetivo), es mantenido por el sujeto y motiva la actividad, generando una determinada dirección de acción. Esta dirección puede cambiar a lo largo de la actividad. Las acciones son lo que se entiende normalmente por tareas. Las operaciones son acciones llevadas a cabo de forma automática, esta rutina se adquiere con la práctica y repetición de la misma acción en el tiempo. Las operaciones dependen de las condiciones bajo las que la acción se está llevando a cabo. A su vez, la actividad tiene 4 momentos principales en que transcurre: orientación, ejecución, control y corrección. Estos serán explicados a detalle en la sección dedicada a la estructura de la propuesta.

2.2. La Metodología de la Enseñanza de la Matemática

Para el diseño de la SA se adoptó como marco metodológico los fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos tal y como lo propone la MEM. Por tal motivo seguimos los lineamientos generales establecidos en ella para la estructuración total de la elaboración de conceptos y sus definiciones.

Bajo la perspectiva de la MEM (Ballester, Arango, y Rodríguez, 1992) se distinguen dos vías principales para formar un concepto, la vía inductiva y la vía deductiva. En la primera el concepto se desarrolla por medio de descripciones y explicaciones, hasta llegar a la definición. En la segunda, se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto. Para nuestros fines y de acuerdo a nuestro objetivo de investigación seguimos la vía inductiva. De esta forma, el proceso total de elaboración de conceptos por la vía inductiva se conformó en tres fases: Consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del concepto o fijación del concepto. Estas fases son explicadas más adelante.

2.3 Los registros de representación

En el diseño de la SA, se pretendió generalizar el concepto derivada aparecido en el plano físico, con el uso de otros registros de representación, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal. Siguiendo a Duval (1998), por registro de representación se entiende a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático (en este caso la derivada) y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Los registros a trabar fueron: el registro verbal, delimitado por el lenguaje matemático (oral), el registro algebraico, demarcado por el uso de la escritura mediante expresiones algebraicas, el registro numérico, enfatizado por el uso de sucesiones numéricas y el registro gráfico definido por el uso de imágenes o figuras.

La transición entre registros de la que se habla, se fundamenta en la idea de Duval (1998) de que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación del concepto, siendo suficiente con la coordinación de al menos dos registros de representación. Bajo esta idea creemos que la transición entre registros de representación es una parte fundamental para comprender un concepto.

3. Estructura de la Situación de Aprendizaje

En el plano del contenido matemático la SA se organizó en torno de la variación, misma que se constituyó como un eje directriz. En el plano cognitivo se organizó en torno del eje directriz tendiente a la transición entre registros (geométrico, numérico, algebraico y verbal). Respecto del primer eje, se trató de acercar a los estudiantes a tres nociones físicas fundamentales: la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación, ya que a través del estudio de este tipo de problemas queda al descubierto la verdadera esencia del concepto derivada.

Esto último debido a que en el desarrollo histórico del concepto derivada la introducción de la matemática del cambio fue decisiva, pero ésta a su vez fue introducida por la necesidad de resolver los problemas generados por el desarrollo de las fuerzas productivas alcanzando en los siglos XVI y XVII, de la solución de esos problemas surgieron las estrategias seguidas por los precursores e inventores del cálculo empeñados en darles explicaciones racionales al movimiento de un cuerpo impulsado, etc. De ahí nacieron las nociones de variable y función, se generó la necesidad de cuantificación de la rapidez de la variación y el concepto de razón de cambio instantánea, concepto que expresa la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante, esta es la idea física fundamental que subyace en el actual concepto de derivada (Dolores, 2013).

Por las razones expuestas, la SA contempla secuencias de actividades que respondan a las siguientes cuestiones: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿qué tan rápido cambia?, ¿cuál es la rapidez en un instante? y la generalización, en donde se trabaja con la definición del concepto de derivada en diversos registros.

Con el fin de percatarnos de la mejora en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes, se decidió valorar la SA diseñada por medio de un cuestionario, que fue aplicado antes y después de la puesta en escena de la SA. Este cuestionario contenía 22 preguntas basadas en las actividades que consideramos fundamentales para la comprensión del concepto derivada.

En la tabla 2 se describe grosso modo la estructura de la situación de aprendizaje.

Situación de Aprendizaje	
Prueba inicial Cuestionario de diagnóstico	Formado por 22 preguntas en donde son contempladas 10 actividades fundamentales para la comprensión del concepto derivada de acuerdo con la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas.

Momentos de la actividad	Fases en la elaboración de conceptos	Secuencias diseñadas	Contenido
Fase 1			
Control (regulación sistemática)	Consideraciones y ejercicios preparatorios	UNO: ¿Qué cambia? ¿Cuánto cambia? ¿Cómo cambia? Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido	1.1 La medición del cambio 1.2 Una notación operativa para cuantificar los cambios 1.3 ¿Cómo se comportan los cambios?
Fase 2			
Ejecución	Formación del concepto	DOS: ¿Qué tan rápido cambia? Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido	1.4 La rapidez media de la variación: ¿Qué tan rápido cambia un fenómeno? 1.5 ¿Cómo cambia la rapidez media?
Control (regulación sistemática)		TRES: ¿Cuál es la rapidez en un instante? Generalización y uso de registros: numérico, verbal y geométrico Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido	1.6 Los cambios infinitamente pequeños y la velocidad instantánea. 1.7 Interpretación geométrica de la velocidad instantánea.
		CUATRO: Generalización y uso de registros:, algebraico y verbal Sección de tareas, para ejercitar lo aprendido	1.8 Cálculo de velocidades instantáneas por medios algebraicos 1.9 Cálculo de las diferencias infinitamente pequeñas.
Fase 3			
Ejecución **Control (regulación sistemática)**	Asimilación del concepto	CINCO : Actividades para las asimilación	Actividades fundamentales para comprender un concepto: **A1**. Poder indicar ejemplos para el concepto tratado **A2**. Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto **A3**. Poder nombrar propiedades del concepto **A4**. Indicar contraejemplos **A5**. Señalar casos especiales **A6**. Señalar casos límite **A7**. Conocer relaciones con los demás conceptos **A8**. Conocer varias definiciones del concepto **A9**. Conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado **A10**. Uso y utilización del concepto

Prueba final Cuestionario de evaluación		Es igual al cuestionario aplicado para el diagnóstico.
Control (comprobación final de lo logrado)	**Confrontación entre los cuestionarios de diagnóstico y evaluación**	

Tabla 1. Estructura de la Situación de Aprendizaje

La intención de trabajar la SA con la estructura mostrada en la tabla anterior obedeció a que el concepto derivada no fuera presentado a los estudiantes como un tema más del Programa de Estudio por medio de la exposición magistral del profesor por el contrario, se pretendió proveer a los alumnos de las condiciones necesarias para que fueran ellos quienes "descubrieran" el concepto por medio de la solución de problemas.

Desde la Teoría de la Actividad (TA), que es el referente teórico del presente trabajo, el conocimiento se ubica en la práctica, es decir cuando el sujeto realiza una actividad, desde esta perspectiva teórica, se considera que la actividad está compuesta por cuatro momentos. La orientación del sujeto, la ejecución, el control y la corrección, de acuerdo a los intereses perseguidos por este trabajo, sólo serán tomados en cuenta los tres primeros momentos. Estos momentos junto con las fases propuestas por la MEM, son la clave para delimitar las tres fases de las que se compone la propuesta que tiene el objetivo de contribuir en la mejora de la comprensión del concepto derivada. A continuación explicamos a detalle cada una de las fases de que consta la propuesta diseñada.

3.1. Fase 1. Orientación: consideraciones y ejercicios preparatorios

La *orientación* del sujeto, desde la TA está basada en los esquemas referenciales de que dispone e incluye la planificación de las futuras acciones. Lo que requiere que el trabajo se inicie a partir de lo que el estudiante ya conoce, esto se corresponde con la fase de consideraciones y ejercicios preparatorios propuesta por la MEM. El momento de *control*, como la marca la TA es considerado en esta etapa, como regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante, lo que se enfatiza en la secuencia de actividades que se ha propuesto para llevar a cabo la fase 1.

Esta fase tiene el objetivo de preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno del cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada. Para desarrollarla es preciso de igual forma que los alumnos estén familiarizados con conceptos tales como; función, límite y continuidad, se requiere también el dominio sobre gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas (requerimiento mínimo). Para lograr el cumplimiento de este propósito, se realizó una entrevista informal al profesor a cargo del grupo con el que se trabajaría así como a algunos estudiantes del grupo, respecto a los temas que ya habían abordado en clase, además de una revisión de las notas de cuadernos de los alumnos más constantes en clase.

Una vez aplicada la entrevista y hecha la revisión de notas, se constató que los estudiantes ya tenían conocimientos sobre los conceptos requeridos: función, límite y continuidad (al menos habían sido abordados ya en clase); por otro lado debido a que la propuesta aboga por las ideas de variación, para esta primera etapa se elaboró una Secuencia de actividades (uno), con la que se pretendió contestar las interrogantes: ¿Qué cambia?, ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia?, para ello se trataron temas tales como: el cambio, su medición y comportamiento.

Con el desarrollo de los temas tratados en esta secuencia, se esperaba que los estudiantes se percataran que cuando ocurren cambios, estos se comportan de manera distinta dependiendo principalmente de la fórmula de la función que los describe. De igual forma se introdujo la simbología Δf para calcular cambios de manera más sencilla, aclarando que para que esta pueda usarse se requiere de un estado inicial: $f(x_i)$, y un estado final: $f(x_i+\Delta x)$. De esta forma la diferencia Δf (también llamada Δy, pues $y = f(x)$) queda determinada por la igualdad: $\Delta f = f(x_i+\Delta x) - f(x_i)$.

La notación introducida permite manipular y calcular los cambios que experimentan las variables en un proceso de variación, ésta es favorable debido a que involucra a las fórmulas que relacionan a las variables en juego. Así, cuando cambia la variable independiente es fácil determinar cuánto cambia la variable dependiente trabajando con la fórmula que las vincula. Con esta notación se facilita la obtención de diferencias y con ello la medición del cambio. El análisis del comportamiento de los cambios también fue tratado en esta primera secuencia, es de suma importancia para estudiar la variación, pues los movimientos están determinados por los cambios, y el comportamiento de los cambios (los que a su vez pueden variar también, o permanecer estables) son el aspecto esencial de la variación. Ejemplificamos esta situación con el siguiente problema:

Problema. Secuencia de actividades 1. ¿Cómo se comportan los cambios?

La ley que describe la caída libre de los cuerpos en la superficie terrestre está dada por $s(t) = 4.9t^2$*, en donde s es la distancia recorrida y t el tiempo. Halle una expresión que permita calcular la diferencia* Δs*, luego complete la siguiente tabla y analice cómo se comportan los cambios de la distancia que recorre un cuerpo en caída libre.*

Los cambios de distancia están dados por $s(t_i+\Delta t) - s(t_i)$, de tal forma que $\Delta s = 9.8t_i\Delta t + 4.9\Delta t^2$ con ésta fórmula puede completarse fácilmente la tabla 2.

t_i **a** $(t_i+\Delta t)$	$\Delta t = t_f - t_i$	**¿Cuánto cambia? (** Δs **)**
De 0 a 0+1	1	**Δ**s_1= 4.9 m
De 1 a 1+1	1	**Δ**s_2= 14.7 m
De 2 a 2+1	1	**Δ**s_3= 24.5 m
De 3 a 3+1	1	**Δ**s_4= 34.3 m
De 4 a 4+1	1	**Δ**s_5= 44.1 m
De 5 a 5+1	1	**Δ**s_6= 53.9 m

Tabla 2. Comportamiento de los cambios de distancia

Gracias a los resultados que arroja la tabla anterior, se sabe que las magnitudes de las distancias varían, lo anterior indica que un cuerpo que cae libremente recorre distancias cada vez más grandes por cada segundo que transcurre, y dichos cambios están dados por la fórmula $\Delta s = 9.8 t_i \Delta t + 4.9 \Delta t^2$.

El problema analizado permite responder a las cuestiones que motivan la primera secuencia: ¿Qué cambia?, la distancia con respecto al tiempo (*s* con respecto de *t*), ¿cuánto cambia?, para dar respuesta a esta pregunta pueden obtenerse las diferencias entre las Δs obtenidas.

3.2 Fase 2. Ejecución: formación del concepto

Esta etapa fue delimitada desde la MEM por la fase de formación del concepto constituyendo de esta forma el centro de la propuesta, ya que en ésta se pretendía arribar a la definición del concepto derivada con todo y sus características esenciales. Desde la TA se consideraron dos momentos, el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante llegue a la definición del concepto derivada en el contexto físico primeramente. El momento de *control* ha sido considerado en su acepción de regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante, lo que se acentúa en la secuencias de actividades que se han propuesto para desarrollar la fase, se diseñaron tres secuencias de actividades (2, 3 y 4).

La Secuencia de actividades 2 pretendió dar respuesta a la pregunta ¿qué tan rápido cambia? En el problema tratado en la Secuencia 1, se hacía referencia al cambio de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo. Ahora en cambio, se estudian dos fenómenos cercanos a la experiencia: la rapidez y la velocidad. La Secuencia de actividades 3, intentó dar respuesta a la interrogante ¿cuál es la rapidez en un instante? La Secuencia de actividades 4, como complemento de las secuencias 2 y 3 expone los temas del cálculo de velocidades instantáneas por medios numéricos y algebraicos, para posteriormente calcular diferencias infinitamente pequeñas. Cabe mencionar que en las secuencias 3 y 4, se busca la generalización del concepto derivada requiriendo para ello el uso de registros tales como el geométrico, el algebraico y el verbal.

La motivación para formar el concepto derivada como velocidad instantánea (contexto físico), la constituyó un problema en el que se tiene que calcular la velocidad de un cuerpo en un instante determinado, en este momento y resultado de las secuencias 1 y 2, los alumnos sólo conocen la fórmula para calcular velocidad media, precisamente es ésta limitante la que los conducirá a buscar una forma factible que les permita dar solución al problema planteado (Secuencia 3). A continuación se describe este problema a detalle.

Problema: Motivación

Un cuerpo se mueve de tal forma que la relación entre las distancias que recorre respecto del tiempo está dada por la fórmula $s(t) = 20t - 5t^2$ *¿cuál es la velocidad de este cuerpo exactamente en* $t = 1$ *segundo?*

Para la solución de este problema, se propone emplear la fórmula para el cálculo de la velocidad media, esto con el fin de que el alumno se percate de la imposibilidad de este método para emitir el resultado correcto.

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$… fórmula para calcular velocidad media

Al emplear la fórmula anterior y sustituir los datos en la expresión para calcular la velocidad media se obtiene:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left[20(1) - 5(1)^2\right] - \left[20(1) - 5(1)^2\right]}{1 - 1} = \frac{15 - 15}{0} = \frac{0}{0} \text{ ¡!}$$

De esta forma, al proceder por la vía sugerida se llega a un resultado de la forma 0/0, lo que parece ser un absurdo. Esto debido a que se está empleando una fórmula para calcular velocidad media a una situación en la que se pide calcular velocidad instantánea. Se esperaba que los alumnos se percaten de tal situación, y junto con ello respondan las cuestiones: ¿es imposible calcular la velocidad exactamente en $t = 1$?, ¿habrá una forma de calcular esta velocidad? Ante tales interrogantes planteadas pueden surgir varias opiniones, por ello como el problema es averiguar la velocidad exactamente en el primer segundo, parece razonable proponer utilizar variaciones de tiempo pequeñas de manera que se acerquen a $t = 1$ con el fin de investigar que está pasando con las velocidades *medias muy cerca* de 1 segundo.

Para sistematizar los procedimientos se hace que t_i sea fijo (en este caso $t_i = 1$), y t_f se hace variar, de modo que los cambios de tiempo Δt sean cada vez más pequeños Se aplican para ello acercamientos por la derecha y por la izquierda. Haciendo uso de la expresión: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t} = \frac{20\Delta t - 10 t_i \Delta t - 5\Delta t^2}{\Delta t}$.

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos de las velocidades medias.

Acercamiento por la izquierda								Acercamiento por la derecha				
t	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999	…➔	**1**	🡐…	1.0001	1.001	1.01	1.1	1.5
v	12.5	10.5	10.05	10.005	10.0005	…➔	**10**	🡐…	9.9995	9.995	9.95	9.5	7.5

Tabla 3. Acercamientos laterales (velocidades medias)

Con los datos de la tabla 3, se aprecia que las sucesiones de cocientes (aproximación por la derecha e izquierda) que representan a las velocidades medias, muy cerca de 1 segundo se comportan de modo que estas tienden a 10. Aunque los cálculos se hicieron un número finito de veces, es de esperar que si se continúan haciendo aproximaciones tanto por la derecha como por la izquierda, los cocientes no pasarían del valor 10, esto es, 10 es el límite del cual no pasan ambas sucesiones. Parece ser que con el análisis hecho se ha encontrado una solución al problema planteado, si Δt es un cambio infinitamente pequeño, esto es, infinitamente cercano a $t_i = 1$, entonces la velocidad del cuerpo en $t = 1$ es igual a 10 *m*/*s*. De esta forma en la velocidad que encontramos, el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño, esto es, $t \to 0$, en este caso se habla de la velocidad instantánea, la cual definiremos de la siguiente forma: $v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, si el límite existe.

En estas condiciones el cuerpo que se mueve de acuerdo con la fórmula $s(t) = 20t - 5t^2$, tiene una velocidad de 10 *m/s* exactamente en 1 segundo. Es necesario destacar que este método difiere de todos los que se utilizan en matemática elemental. La diferencia fundamental radica en que obliga necesariamente a la utilización de procesos que involucran al concepto de *infinito*. El uso de los procesos infinitos se manifiesta cuando se hacen que los cambios sean *infinitamente pequeños* (esto no quiere decir que sean cero) y cuando se analiza el comportamiento tendencial de la sucesión de velocidades medias. El análisis simultáneo del comportamiento tendencial de ambos procesos infinitos y su límite permite la obtención de la velocidad instantánea.

En resumen, puede decirse que la *velocidad instantánea* está dada por las *últimas razones* de cantidades que *se desvanecen*, cantidades que a su vez son medidas de cambios infinitamente pequeños. Se ha expuesto un método numérico para calcular velocidades instantáneas utilizando procesos que involucran al infinito (cambios *muy pequeños*) e introduciendo la idea de *límite.* Este es uno de los conceptos más importantes del Cálculo Diferencial. Con el problema planteado queda al descubierto la noción de derivada en el contexto físico, como la velocidad instantánea (derivada de la distancia respecto del tiempo).

Con el desarrollo de la fase de motivación, se resuelve el problema de la velocidad instantánea por medio de aproximaciones numéricas (se hace el uso del registro numérico), cómo se planteó en la estructura de la SA, se pretendía generalizar el concepto derivada aparecido en el contexto físico, con el uso de otros registros, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal.

Registro numérico

Los procedimientos numéricos que permiten obtener la sucesión de velocidades medias se resumen en lo siguiente*:*

1. El problema principal consiste en la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante o en un punto por medios aritméticos conocidos.

2. La estrategia central del método consiste, ya que se desconoce la velocidad en un punto, en explorar qué ocurre con la sucesión de velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose a éste tanto por la derecha como por la izquierda.

3. La velocidad instantánea es el límite, si existe, de tales velocidades medias

Registro gráfico

En el problema que motiva el surgimiento de la derivada, la velocidad instantánea es imposible de ser calculada aplicando la noción de velocidad media pues el hacerlo conduce a una indeterminación. Sin embargo la exploración de lo que sucede con las velocidades medias por medio de acercamientos a $t = 1$, tanto por la derecha como por la izquierda, proporciona una información muy valiosa.

Mostramos ahora una interpretación geométrica de esta situación. Cuando los cambios de tiempo se van haciendo cada vez más pequeños, los cambios en las distancias también se hacen cada vez más pequeños, pero la sucesión de velocidades medias a que da origen tiende a 10, tanto por la derecha como por la izquierda. Obsérvense las figuras 1 y 2.

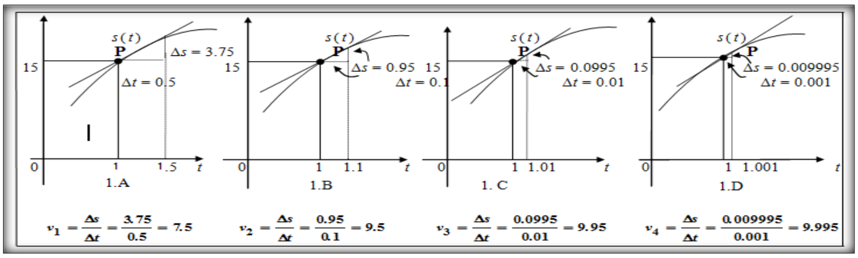


Figura 1. Acercamientos por la derecha.

Fuente: **García** (2011).

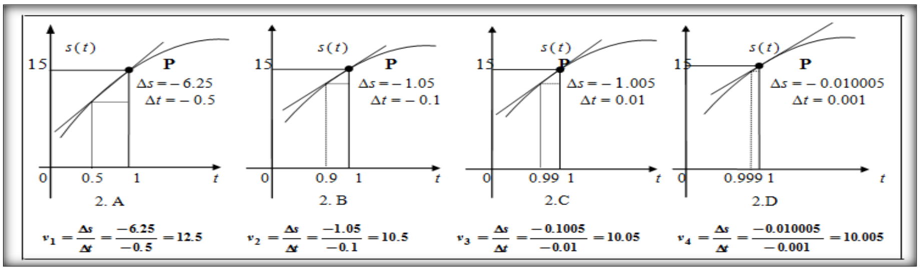


Figura 2. Acercamiento por la izquierda.

Fuente: **García** (2011).

Entonces la velocidad en $t=1$ es exactamente 10 *m/s*; las gráficas anteriores muestran los acercamientos a 10. Pero para ver *más de cerca* lo que sucede se propone la figura 3.

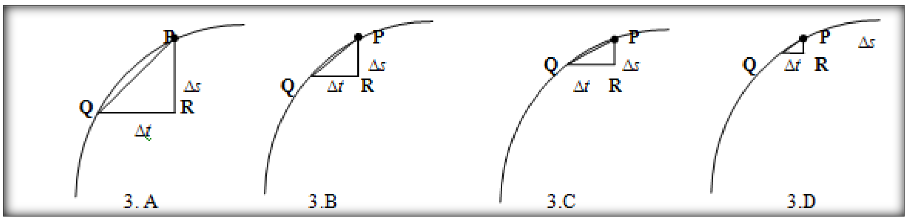


Figura 3. Acercamientos.

Fuente: García (2011).

El triángulo rectángulo PQR, tiene catetos Δs y Δt. A medida que Δs y Δt *se hacen* más pequeños, la hipotenusa $\overline{PQ}$ se hace también muy pequeña y *se asemeja mucho a la curva* en una zona muy cercana a *P*. La velocidad instantánea se obtiene cuando $\Delta t \to 0$, es decir si Δt es infinitamente pequeño. Cuando esto sucede el triángulo PQR es también de *tamaño infinitesimal*. Lo interesante sucede en una zona de la curva *muy cercana* a P. Imagínese una vecindad en torno a P. Para averiguar qué pasa con la curva, se hacen algunas amplificaciones véase figura 4.

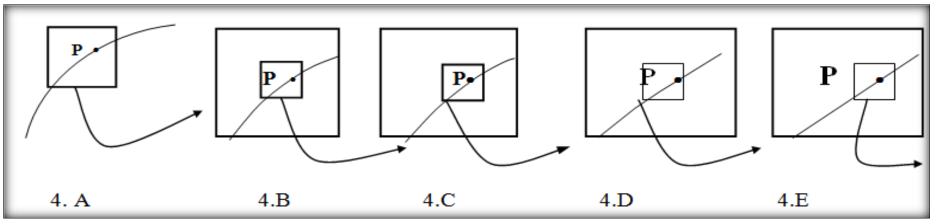


Figura 4. Ampliaciones sucesivas.

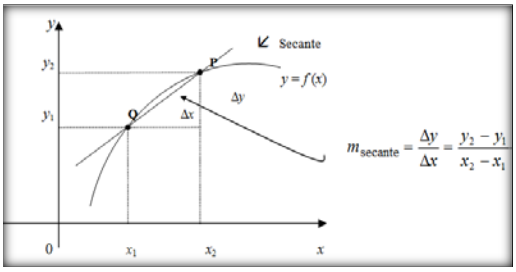
Fuente: García (2011).

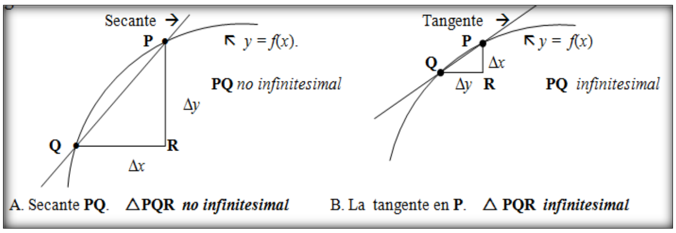
Al *agrandar* sucesivamente la región de la curva que rodea al punto P, la curva *se va pareciendo* a una recta; si se prosigue el proceso hasta llegar a una zona infinitesimal en torno a P, en ella la curva sería prácticamente una recta. Este es un argumento plausible para considerar a las curvas *bien comportadas* (que no tengan picos o zigzagueos bruscos), como formadas por segmentos de recta infinitamente pequeños (ver figura 5). La prolongación de cualquiera de estos segmentos infinitesimales sería una tangente. En el caso que nos ocupa, la prolongación del segmento infinitesimal PQ sería la tangente a la curva *s*(*t*) en el punto P.

Figura 5. Recta tangente.

Fuente: García (2011).

Ahora bien, la velocidad media del cuerpo en cuestión entre el punto P y Q, está dada por la expresión $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Si $v = m$ y $s(t) = f(x) = y$, entonces esta igualdad queda como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que es precisamente la expresión de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Si P_1 y P_2 son puntos de la curva $y = f(x)$, entonces la recta que pasa por esos puntos es una secante a dicha curva (figura 6). Por tanto, la velocidad media y la pendiente de la secante son nociones equivalentes. Pero interesa la velocidad instantánea y su interpretación geométrica. Sabemos que la velocidad instantánea se obtiene mediante la expresión: $v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
Si $v_{inst} = m$ y $s(t) = f(x) = y$, entonces la igualdad anterior queda como: $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$





Figuras 6. Rectas secante y tangente.

Fuente: García (2011).

Volviendo a las ideas consideradas antes, si Δx es un infinitesimal entonces desde el punto de vista geométrico la prolongación de la hipotenusa PQ es la tangente a la curva *y*=*f*(*x*) en P. Por tanto, así como la velocidad media equivale a la pendiente de la secante, la velocidad instantánea equivale a la pendiente de la tangente en el punto P. Ver figura 7. De manera que las fórmulas respectivas se corresponden como lo muestra la Tabla 4.

$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$m_{secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$m_{tangente} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tabla 4. Fórmulas correspondientes

Registro algebraico

El cálculo de velocidades instantáneas por la vía de las aproximaciones numéricas utilizando números muy pequeños es muy laborioso. Por ello se estudia un método que ahorra mucho trabajo, este es el *método algebraico*. Antes de entrar en él es necesario recalcar que, lo que hace posible la determinación de velocidades instantáneas es suponer cambios de tiempo infinitamente cercanos a t_i. Estos cambios se miden con diferencias: $t_f - t_i = \Delta t$, si t_f es infinitamente cercano a t_i, entonces $\Delta t \to 0$, es decir, se hace infinitamente pequeño. Pero a cambios infinitamente pequeños de t corresponden cambios de magnitud similar a la variable $s(t)$ y estos cambios son de la forma: $s(t_i + \Delta t) - s(t_i) = \Delta s$. Cuando $\Delta t \to 0$ también $\Delta s \to 0$, aunque no necesariamente con la misma rapidez con que Δt tiende a cero. Finalmente la velocidad instantánea se obtiene de: $v_{inst} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ … i)

El cálculo de velocidades instantáneas se reduce con ello a la obtención de las diferencias infinitamente pequeñas Δs y Δt. Para facilitar el manejo de éstas es necesario establecer un acuerdo en cuanto a su simbología: si $\Delta t \to 0$ entonces Δt se denota *dt*; análogamente si $\Delta s \to 0$ entonces se escribirá como *ds*. De este modo *ds* y *dt* son diferencias infinitamente pequeñas de *s* y de *t,* respectivamente. Bajo estas consideraciones la expresión i) queda como: $v_{inst} = \frac{ds}{dt}$ … ii)

Este procedimiento reduce enormemente el cálculo de las velocidades instantáneas, incluso se está en condiciones de plantear una sucesión de indicaciones algorítmicas que lo hagan más operativo:

1. Obténganse *ds* de la misma manera que como antes se obtenía Δs

2. Aplíquese la fórmula de la velocidad instantánea: $v_{inst} = \frac{ds}{dt}$

3. Elimínense los sumandos que contengan *dt* y sustitúyase *tᵢ* para obtener la velocidad deseada.

Supóngase una función $s(t)$ que relaciona a la distancia y el tiempo. A un cambio del tiempo corresponde un cambio de distancia; si t_i cambia a $t_i + \Delta t$ entonces $s(t)$ *cambia de* $s(t_i)$ *a* $s(t_i + \Delta t)$. Lo que cambia *s* se obtiene de $\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$. Si *t* cambia en una magnitud infinitamente pequeña, de t pasa $t + dt$, entonces $s(t)$ cambia a $s(t + dt)$; lo que cambia *s* está dado por $ds = s(t + dt) - s(t)$. En general, si *s* es cualquier función continua $y = f(x)$, a cambios infinitamente pequeños de x, se denotan dx, corresponden cambios infinitamente pequeños de y, se denotan dy. A dx y dy se les conoce como *diferenciales*. Una definición de diferencial queda en los siguientes términos:

La diferencial de la variable y*, se denota* dy*, es el cambio que experimenta* y *para cambios infinitamente pequeños de* x *(*dx*), se obtiene de:* $dy = f(x + dx) - f(x)$ *para calcular pues velocidades, razones de cambio instantáneas, o derivadas en general, se necesita medir cambios infinitamente pequeños y estos cambios son medidos por las diferenciales.*

En resumen, el concepto derivada aparece en el contexto físico como velocidad instantánea. Posteriormente son usados diferentes registros en donde han sido expuestas características comunes que definen a la derivada, tales como: cambios, límite, cociente, cantidades infinitamente pequeñas. Pero cabe aclarar que la noción de velocidad instantánea es propia del contexto físico, por ello conviene hablar de la definición de derivada en términos generales, por ello proponemos la siguiente definición:

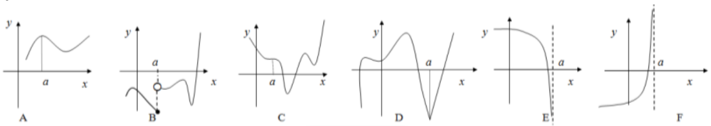
Definición de derivada

Sea f una función real definida en un intervalo I subconjunto de R. Sea $x_0 \in I$.

La derivada de f *en el punto* x_0, denotada $f'(x_0)$, es el $lím_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, si este límite existe.

3.3 Fase 3. Asimilación del concepto

Esta etapa ha sido delimitada desde la MEM por la fase de asimilación del concepto; desde la TA se han considerado dos momentos, el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante logre la asimilación del concepto derivada y el momento de *control*, regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante y que se acentúan en las 10 actividades consideradas como fundamentales para comprender un concepto. El objetivo que se persigue es que el estudiante desarrolle las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, y los repasos del concepto. Para llevar a cabo esta fase, se elaboró una secuencia con actividades consideradas por la MEM como fundamentales para asimilar los conceptos. La tabla 5, muestra algunos de los ejercicios y/o problemas que se trabajan.

Actividades (MEM)	Problemas/Ejercicios
A1: Poder indicar ejemplos para el concepto tratado. Los estudiantes deben identificar con la derivada objetos conocidos de su medio circundante o de su actividad.	Menciona algunos ejemplos particulares del concepto de derivada.
A2: Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto, es decir, la palabra o el símbolo correspondiente. Con el ejercicio planteado, se enfatiza en la escritura correcta de la definición de derivada.	Indica ¿en cuál de las siguientes expresiones se define correctamente la derivada de una función $y = f(x)$? Justifica tu respuesta. $a)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{h \approx 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $b)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{f=0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h}$ $c)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{x \approx 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $d)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
A3: Poder nombrar propiedades del concepto. Se espera que el estudiante pueda darse cuenta de las características que hacen diferente a la derivada de otros conceptos.	La siguiente expresión corresponde a la definición de Derivada de una función: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, sí el límite existe. ¿Cuáles son las características invariantes del concepto de derivada presentes en la expresión anterior? a) Es el límite de un cociente en donde el denominador *h* tiende a cero. b) Es el límite de un cociente de diferencias infinitamente pequeñas. c) Es el límite de un cociente donde el numerador y el denominador se hacen cero. d) Es el límite de los cambios de la función *f*(*x*).
A4: Estar en condiciones de indicar contraejemplos y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto. Se enfatiza en la definición analítica de la derivada, se espera que el estudiante pueda discriminar entre las opciones dadas aquellas que no conduzcan a la definición de la derivada y junto a ello justifique sus argumentos.	¿En qué casos el límite conduce a la derivada de una función diferenciable *f* ? Argumente. A) $\lim_{a \to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ B) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{a-x}$ C) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a)-f(x)}{x-a}$ D) $\lim_{h \to 0} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ E) $\lim_{x \to a} \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ F) $\lim_{a \to x} \frac{f(x)-f(a)}{a-x}$
A5: Poder señalar casos especiales. Se espera que el estudiante pueda identificar en las situaciones presentadas los casos en los que existe la derivada en un punto dado.	¿En cuál o cuáles de las gráficas siguientes se cumple que: $\frac{dy}{dx} = 0$ en *x* = *a*? 
A6: Poder señalar casos límite. Se espera que el estudiante	¿En cuál o cuáles de las gráficas siguientes la derivada en *x* = *a,* no existe?

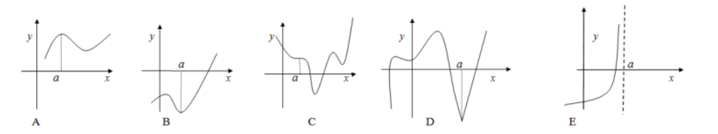
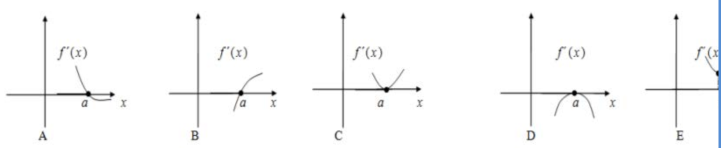
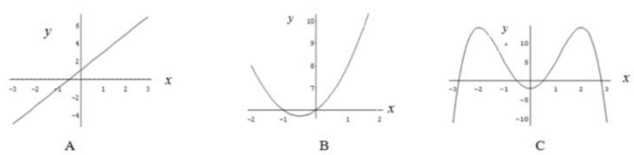
pueda identificar en las situaciones presentadas los casos en los que no es posible obtener la derivada	
A7: Conocer las relaciones de la derivada con los demás conceptos. Se espera que el estudiante pueda esbozar las gráficas de $f(x)$ a partir de las de $f'(x)$, involucrando los conceptos de función creciente, decreciente, cóncava y convexa.	Esboce la (s) gráficas de $f(x)$ cuyas derivadas en *a* se comportan de acuerdo a las gráficas de: 
A8: Conocer la definición del concepto, ocasionalmente también varias definiciones y comprender su equivalencia. Se espera que el estudiante pueda identificar la definición de derivada entre las proposiciones mostradas.	Identifica las definiciones correctas de derivada. P) Es la operación que se obtiene por medio de la regla de los cuatro pasos[1] y sirve para calcular tangentes. Q) Es el límite de la razón del incremento de la función, al incremento de la variable independiente cuando ambos tienden a cero. R) La derivada de f en x_0 existe, si y sólo si f tiene una recta tangente no vertical en $(x_{0,} f(x_0))$ además la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0)$. S) Es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste último tiende a cero.
A9: Conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de un concepto dado. Se espera que a través de la regla de los 4 pasos, el alumno identifique los incrementos de *x* e *y*, así como el cociente de estos y su límite para poder obtener la derivada.	Utilice la regla de los 4 pasos y obtenga la derivada de la función: $y = x^3$, en el punto P(1, 1) luego esboce la gráfica de la función y la de su derivada en el punto pedido.
A10: Uso y aplicación del concepto. Se espera que el estudiante utilice los conceptos de máximos, mínimos, monotonía, y concavidad para poder esbozar la gráfica de la función derivada (en ellos va implícita la derivada).	En la siguiente figura aparecen los gráficos de tres funciones, analícense cuidadosamente y esboce los gráficos de sus funciones derivadas. 

Tabla 5. Secuencia 5: Actividades para la asimilación del concepto derivada

---

[1] 1. Se da un incremento Δx a la variable independiente x 2. Se obtiene el incremento correspondiente a la función $f(x+\Delta x) - f(x)$ 3. Se obtiene el cociente de los incrementos. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 4. Se calcula el límite del cociente de incrementos $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

4. La puesta en práctica de la Situación de Aprendizaje

Participaron en la investigación uno de los dos grupos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero. Este grupo se encontraba cursando la asignatura de Cálculo I, y no habían abordado en clase el tema de derivada, sólo sabían de este, lo que en sus cursos de bachillerato abordaron. Se trabajó con ellos por un período de 3 semanas, con 6 sesiones de 50 minutos de clase por semana. Este grupo estaba formado por 22 estudiantes, de los cuales sólo 12 aceptaron participar voluntariamente en la puesta en escena de la SA, el resto no quiso hacerlo y por tanto no participó (no se les obligó a hacerlo).

Para llevar a cabo nuestro el trabajo, se les proporcionaron a todos los estudiantes participantes secuencias de actividades (5 en total), mismas que fueron resueltas mediante el trabajo en equipo. Los equipos fueron formados en un principio por afinidad, debido a que no se conocía al grupo, posteriormente, conforme se resolvían las diferentes secuencias, se volvían a integrar equipos, de tal forma que un alumno trabajara con todos sus compañeros. En todo momento el papel de la investigadora (primera autora del artículo) fue una especie de guía; los alumnos discutían los temas tratados en las secuencias y resolvían los problemas planteados, posteriormente los resultados obtenidos por cada equipo eran sometidos a revisión por todo el grupo, llegando de esta forma a un consenso que daba solución a dichos problemas.

La primera clase en la que se trabajó con los alumnos, se les pidió contestar el cuestionario correspondiente a la prueba inicial, se les dijo que la intención de este era percatarnos de los conocimientos que de derivada tenían como consecuencia de sus cursos de Cálculo del Bachillerato. Después de la puesta en escena de la propuesta, ésta se evaluó con una prueba final (que se conformó de un cuestionario igual al aplicado en la prueba inicial), la finalidad de esto fue constatar la mejora o no, de la comprensión de la derivada en los estudiantes participantes.

Durante el resto de las clases se resolvieron las secuencias que contemplaba la SA diseñada, en algunas de ellas se dejaban tareas a los estudiantes a manera de ejercitación. Aunque el trabajo realizado con la SA no se tomó en cuenta para la evaluación de la materia de Cálculo (la calificación del curso estaba a cargo del profesor), para nuestros fines se llevó un registro de quienes asistieron a las clases durante el tiempo que se desarrolló la SA, así como también de las participaciones de los estudiantes y de la entrega en las tareas encomendadas.

5. Resultados sobre la mejora de la comprensión de la derivada

Con el fin de percatarnos de la mejora en la comprensión de la derivada por parte de los estudiantes, se decidió valorar la SA diseñada por medio de un cuestionario con preguntas basadas en las 10 actividades que hemos mencionado anteriormente y que consideramos fundamentales para la comprensión del concepto derivada. Para cuantificar la mejora de la comprensión de la derivada en los participantes usamos una escala basada en la cantidad de respuestas correctas obtenidas en la prueba final respecto de las obtenidas en el inicial, tomando como el

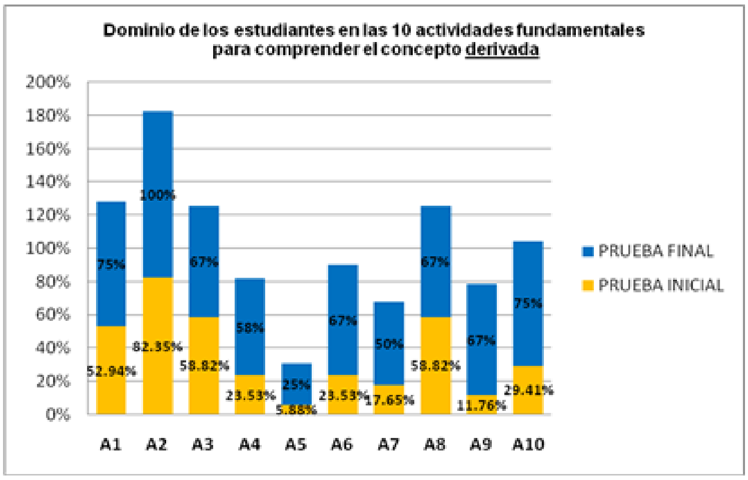
100% las 22 preguntas del cuestionario. Por ejemplo un estudiante en la prueba inicial contestó correctamente 6 preguntas de 22, y en la final contestó correctamente 12 preguntas de 22. Esto indica un incremento del 27.27% respecto de las preguntas totales. Nótese que al contestar el doble de respuestas no significa que hubo un incremento del 100% de preguntas correctas, pues consideramos el total de preguntas del cuestionario. La graduación a considerar fue: Menor o igual al 0% *no mejoró la comprensión;* de 1% a 30%, la *mejora de la comprensión es escasa*, de 31% a 60%, la *mejora de la comprensión es aceptable* y de 61% a 90% la *mejora de la comprensión es significativa*.

Una vez analizado los resultados de los cuestionarios observamos que no hubo mejoría significativa en los estudiantes participantes, pero si una comprensión aceptable en 2 estudiantes. Ellos realizaron aceptablemente todas las actividades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión de conceptos. 2 alumnos no mejoraron su comprensión. Y 8 estudiantes aún presentan una comprensión escasa del concepto en cuestión. La Tabla 6 muestra las actividades que hemos considerado como fundamentales para comprender la derivada.

	Actividades fundamentales para comprender el concepto derivada
A1	Poder indicar ejemplos para el concepto
A2	Conocer y utilizar correctamente la denominación del concepto
A3	Poder nombrar propiedades del concepto
A4	Estar en condiciones de indicar contraejemplos del concepto.
A5	Poder señalar casos especiales
A6	Poder señalar casos límite
A7	Conocer las relaciones con los demás conceptos
A8	Conocer varias definiciones
A9	Conocer una sucesión de indicaciones
A10	Uso y aplicación del concepto

Tabla 6. Actividades fundamentales para comprender la derivada

La gráfica 1 muestra los resultados del dominio de los estudiantes en las 10 actividades fundamentales para la comprensión del concepto derivada.



Gráfica 1. Porcentajes del dominio en las actividades fundamentales para comprender el concepto.

Como se aprecia en la gráfica anterior, al inicio de la puesta en escena de la SA diseñada, los estudiantes daban muestra de un escaso dominio en el trabajo con las actividades referentes a estar en condiciones de indicar contraejemplos y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto (A4); poder señalar casos especiales(A5), conocer las relaciones de la derivada con otros conceptos(A7) y conocer una sucesión de indicaciones para reconocer un representante de la derivada (A9). Cabe señalar que el porcentaje más bajo que ocupó la actividad A9, se debió a que fue la menos contestada por los alumnos. Se cree que fue debido a que los alumnos no podían trabajar con el tipo de problemas que cubría esta actividad.

Por el contrario, una vez que fue realizada la prueba final, se aprecia que el dominio en las actividades cambió favorablemente, esto se deja ver en los porcentajes obtenidos (gráfica 1), este cambio es claramente consecuencia del trabajo con la SA pues en ella se trató de desarrollar estas actividades en los participantes. El puntaje más bajo en la prueba inicial fue de 5.88 % en el grupo de actividades A5, que cambió a 25% en la prueba final, una diferencia de 19 puntos porcentuales. Así mismo, el porcentaje más alto en la prueba inicial se obtuvo en el grupo de actividades A2 y fue de 82.35%, mismo que subió casi 18% al ocupar un porcentaje del 100% en la prueba final. Es de destacarse que en todas las actividades se notó una mejora considerable. Sin embargo aún se percibe un escaso dominio en el grupo de actividades A5, encaminadas a poder señalar casos especiales del concepto.

6. Conclusiones

Ante el problema que representó la escasa comprensión del concepto derivada por parte de los alumnos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la UAGRo en este trabajo se planteó como objetivo el diseño y puesta en práctica de una Situación de Aprendizaje basada en la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas para el tratamiento de conceptos, con la que se pretendió proporcionar a los alumnos elementos que les ayudaran a comprender el concepto de derivada.

Diseñada la Situación de Aprendizaje se puso en práctica con un grupo voluntario de primer año de la Licenciatura en Matemáticas que cursaba la asignatura de Cálculo I. Contrastando las actividades que los estudiantes fueron capaces de realizar antes y después de la puesta en escena de la SA, se evidenció que sólo 2 alumnos de los 12 participantes mejoraron su comprensión de la derivada. Estos estudiantes realizaron aceptablemente todas las actividades propuestas mediante las cuales se contribuye al desarrollo de habilidades que hemos caracterizado como fundamentales para la compresión de conceptos matemáticos, en particular de la derivada. Una de las limitaciones de esta investigación es la cantidad de estudiantes con los que se desarrolló la SA, creemos que ésta debe ser aplicada más veces y con más participantes con fines de probar su funcionalidad y cumplir su objetivo, mejorar la comprensión de la derivada.

Si bien los resultados obtenidos no son muy alentadores el hecho de que al menos 2 estudiantes hayan mejorado su comprensión aceptablemente, nos motiva a creer en la factibilidad de la SA. Debemos destacar que los alumnos que lograron mejorar su comprensión fueron aquellos que estuvieron en todas las clases y en ellas intervenían constantemente, que discutían con sus compañeros y que realizaron todas las tareas que se les encomendaron; estos fueron factores que estamos seguros influyeron en sus resultados aunque no fueron contemplados en la cuantificación hecha para valorar la mejora de la comprensión de la derivada, pues solo se centró en los cuestionarios aplicados al final y al inicio de la SA. Por otro lado quienes no mostraron una mejora respecto de la comprensión del concepto, fueron aquellas personas que por motivos diferentes (económicos, familiares, etc.) no asistieron a todas las clases, que no realizaron tareas y que casi no participaban en el grupo. Por ello creemos que los factores ajenos al ambiente escolar influyen sobre manera en el desempeño de los alumnos en sus cursos.

En conclusión, la puesta en escena de la SA diseñada ha permitido confirmar en esta investigación que ante una de las tantas dificultades que puede haber en el aula de clases, en este caso, la escasa comprensión de un concepto, el trabajo del profesor como principal actor que busca en su labor aminorar estos inconvenientes en sus estudiantes va más allá de diseñar y proporcionar herramientas con las que los estudiantes puedan trabajar y como lo propugna el constructivismo vayan construyendo su "propio conocimiento", sino junto con las herramientas debe involucrárseles a los estudiantes para que sean ellos quienes en interacción con sus pares y el propio profesor se responsabilicen de su "propio conocimiento".

Bibliografía

Ballester, S., Arango, C. y Rodríguez, M. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática Tomo I*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Dolores, C. y Zavaleta, A. (2010). *Entre lo planeado y lo alcanzado en matemáticas, el caso del Bachillerato del Estado de Guerrero.* México: Díaz de Santos.

Dolores, C. (2004). La derivada y el Cálculo, una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa, algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 231-259. Díaz Santos: México.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Díaz de Santos.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed). Investigaciones en matemática educativa II, 173-201. México: Grupo editorial Iberoamérica.

García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números*, 75(1), 105-120.

García, M. S. (2011). *Una situación de aprendizaje para ayudar a mejorar la comprensión del concepto derivada*. Tesis de Maestría no publicada. Cimate-Universidad Autónoma de Guerrero.

Jungk, W. (1986). *Conferencias sobre la metodología de la enseñanza de la matemática 2*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación

Leontiev, A. (1981). *Actividad, Conciencia, personalidad*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (1992).On Understanding the Notion of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy*. 25-58. Mathematical Association of America: Washington, DC.

Stone Wiske, M. (1990). Diálogo en Buenos Aires con la pedagoga de Harvard. Recuperado el 20 de noviembre de 2010, de http://edant.clarin.com/diario/2007/05/27/sociedad/s-05401.htm

.

Autores:

García González María del Socorro**: Originaria de Oaxaca, México. Actualmente es estudiante del programa de doctorado en matemática Educativa, del Cinvestav, México. Ha escrito artículos sobre la didáctica del cálculo y el dominio afectivo, líneas de investigación en las que actualmente trabaja.**
Dirección postal: Calle veta grande 26, colonia valle Goméz. Cp. 15210, Cd. De México. México.
Email: mgargonza@gmail.com
Teléfono: 5514772385

Dolores Flores Crisólogo: **Originario de Guerrero, México. Profesor e investigador del posgrado de Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Trabaja en la línea de investigación relativa a los estudios sobre el pensamiento y lenguaje variacional. cdolores2@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 71-89

Reflexión sobre la práctica de profesores de matemáticas en un curso de formación continua[1]

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pablo Flores Martínez

Fecha de recepción: 25/02/2014
Fecha de aceptación: 02/042016

Resumen	Este trabajo describe el proceso reflexivo de dos profesoras de matemáticas participantes en un curso de formación en Chile. Seleccionamos un modelo de reflexión (Korthagen,2010) y niveles de reflexión (Smith y Hatton, 1993), para analizar las producciones escritas de las profesoras, quienes se plantearon un problema sobre la enseñanza del álgebra. Identificamos en el curso dos ciclos de reflexión, el primero sobre el problema de enseñanza y el segundo sobre el diseño e implementación de una clase para afrontar dicho problema. En ambos ciclos evidenciamos elementos en evolución y nivel de reflexión de las profesoras. **Palabras clave**: Formación de profesores, álgebra, reflexión
Abstract	This paper describes the reflective process two math teachers participating in a training course in Chile. We selected a model of reflection (Korthagen, 1985) and levels of reflection (Smith and Hatton, 1993), to analyze the written productions of the teachers, who raised an issue on the teaching of algebra. Identified during two cycles of reflection, the first on the problem of education and the second on the design and implementation of a class to deal with the problem. In both cycles and evolving elements we show reflection level of the teachers. **Keywords**: Teacher training, algebra, reflection
Resumo	Este artigo descreve o processo reflexivo de dois professores de matemática participantes de um curso de formação no Chile. Escolhemos um modelo de reflexão (Korthagen, 1985) e os níveis de reflexão (Hatton e Smith, 1993) para analisar as produções escritas dos professores, sobre um problema proposto no ensino de álgebra. Identificamos durante dois ciclos de reflexão, o primeiro sobre a questão do ensino e o segundo sobre a concepção e implementação de uma classe para resolver este problema. Em ambos os ciclos mostramos elementos em evolução e o nível de reflexão dos professores. **Palavras-chave:** Formação de professores, a álgebra, reflexão

1. Introducción

En el campo de la investigación sobre formación de profesores es frecuente la alusión a la reflexión, especialmente en estudios sobre desarrollo profesional. Ponte

---

[1] Trabajo financiado por una Beca del gobierno de Chile a través de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT y una Beca de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Además, forma parte del proyecto de investigación EDU2012-33030, Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Comercio e Innovación de España.

(2005), describe varios trabajos que examinan la reflexión del profesor sobre su práctica cuando tratan de articular la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo profesional. En el Handbook Internacional de Educación de Profesores del año 2008, Schöenfeld y Kilpatrick (2008) presentan y desarrollan un conjunto de competencias del profesor para la enseñanza de las matemáticas, entre las que incluyen la reflexión sistemática.

Este componente es también parte de las recomendaciones que Empson y Jacobs (2008) proponen para la formación de profesores. Llegando a convertirse la reflexión en un elemento importante dentro de los programas de formación inicial y continua (Cotic, 2008; Korthagen, Kessels, Koster, Lagerwerf y Wubbels, 2001; Mewborn, 1999; Ross, 1989; Stein y Smith, 1998). En particular, Korthagen (1985) expresa que promover la reflexión es un objetivo relevante de la formación para impulsar el desarrollo profesional.

El interés por la reflexión docente se ubica en la línea de investigación sobre el desarrollo profesional del profesor (Jaworski, 1993), fijando la atención en la naturaleza cambiante del papel profesional y en la importancia de que el docente vaya ganando autonomía y capacidad de juicio sobre su tarea (Alsina, Busquets, Esteve y Torra, 2006; Contreras, 1997). Por su parte, se espera que los programas de formación de profesores la consideren, ya que si se limitan a proponer procesos basados en transmitir conocimiento disciplinario o teorías didácticas (Pozo et al., 2010) con las que el profesor no se identifica, se desligarán de la intención de colaborar a desarrollar la identidad profesional del profesor, a menos que provoque vitalmente algunos de sus componente básicos (teorías, creencias, perspectivas) o que puedan ser incorporadas como instrumentos de análisis de los problemas prácticos (Pérez y Gimeno, 1988). Estas relaciones entre el conocimiento y la práctica son sin duda una de las asignaturas pendientes tanto para la investigación como para la intervención educativa.

Con estas premisas, llevamos a cabo un curso de formación permanente para profesores de matemáticas, en el que se ha dado un papel importante a la reflexión. Este artículo muestra un estudio (Ramos, 2010) en donde se describe cómo reflexionan (y con qué nivel) docentes de matemáticas que realizaron este curso. En este estudio, se considera tres objetivos específicos:

- articular el curso mediante las etapas del ciclo reflexivo,
- describir el proceso de reflexión realizado, y,
- caracterizar el nivel de reflexión de los docentes en cada etapa del ciclo y su evolución durante el curso.

Continuaremos indicando el marco teórico y los antecedentes relacionados con el tema; posteriormente describiendo la metodología de investigación, los resultados, las conclusiones y las proyecciones que surgen a la luz del análisis realizado.

2. Marco de referencia y antecedentes

Estudiar los procesos ligados a la formación de profesores es una línea de investigación ampliamente desarrollada dentro de la didáctica de las matemáticas (Jaworski, 1993; Ponte, 2005). Dentro de los trabajos que atienden al desarrollo profesional, una línea importante se ocupa de estudiar la reflexión del docente como un proceso que le ayuda a fundamentar su autonomía (Contreras, 1997; Shöenfeld y Kilpatrick, 2008), a la vez que les permite relacionar su actuación fuera de clases con su desempeño profesional en el aula (Schön, 1983). El desarrollo profesional expresa los cambios y afianzamientos que el profesor atraviesa, asumiendo el papel de protagonista de un proceso que se inicia en la formación inicial y que evoluciona a lo largo de su vida, tomando en cuenta los sucesos personales y los procesos formativos como factores que influyen en su desarrollo (Ponte y Chapman, 2008).

Inmerso en su desarrollo profesional, el profesor va alterando su visión de la responsabilidad profesional, lo que le lleva a adquirir protagonismo en su formación, empleando los problemas que detecta en su práctica como procesos que le exigen autoformación para darle fundamentación y afianzamiento. Para llevar a cabo con autonomía este proceso se requieren procesos de reflexión. La reflexión es una cualidad que contribuye al desarrollo profesional, por lo que se le presta atención en el ámbito docente desde hace varias décadas. Se considera que el término reflexión en educación se inspira en las ideas de John Dewey (1910), quien alude al pensamiento reflexivo, basándose en autores como Platón, Aristóteles, Confucio, Lao Tzu, Salomón y Buda. Sus ideas tienen gran repercusión en el ámbito educativo, de tal forma que la concepción de profesor reflexivo une la concepción humanística presentada por Dewey, con la epistemología en la práctica, que aporta Donald Schön (1983).

Schön (1983) destaca que la reflexión está íntimamente ligada a la acción del profesional práctico, quien pone en juego una práctica reflexiva para afrontar responsablemente sus problemas. Distingue así la práctica reflexiva de la racionalidad técnica, pues considera que la fundamentación de la actividad profesional no se reduce a usar conocimientos teóricos para resolver los problemas prácticos, sino que la actividad profesional se funda en un conocimiento práctico que se activa durante y a partir de la acción. Con ello señala la diferencia entre el conocimiento teórico y el práctico, y destaca en este la importancia de la reflexión durante la acción y sobre la acción como procesos necesarios en la mejora del desempeño práctico.

En educación matemática este interés aparece en estudios sobre desarrollo profesional (Alsina et al., 2006; Jaworski, 1993). Carrillo y Muñoz-Catalán (2011), estudian la reflexión de profesores en proyectos colaborativos. Trabajos sobre reflexión de docentes de matemáticas son presentados en los PME (Ubuz, 2011, entre otros), y en revistas y publicaciones especializadas, que muestran la reflexión dentro de cursos formativos (Korthagen et al., 2001; Mewborn, 1999; Olfos, Soto y Silva, 2007; Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2000).

Diversos autores han elaborado modelos para abordar la reflexión de manera sistemática. Observan que la reflexión se produce en procesos cíclicos (Jaworski, 1993; Smyth, 1989); exige momentos de distanciamiento de la práctica (Schön, 1983, reflexión sobre la práctica o sobre "la reflexión en la práctica") y requiere confrontar con aportaciones externas, para ampliar marcos de referencia. Todas estas cualidades constituyen nuestra idea de profesor reflexivo (Flores, 2007).

En el campo de la educación matemática el modelo de reflexión ALACT[2] de Korthagen (Korthagen et al., 2001; Korthagen, 2010), define un proceso cíclico en el que se pueden distinguir cinco etapas o fases. Este proceso cíclico se esquematiza a través del modelo que se ilustra en la figura 1.

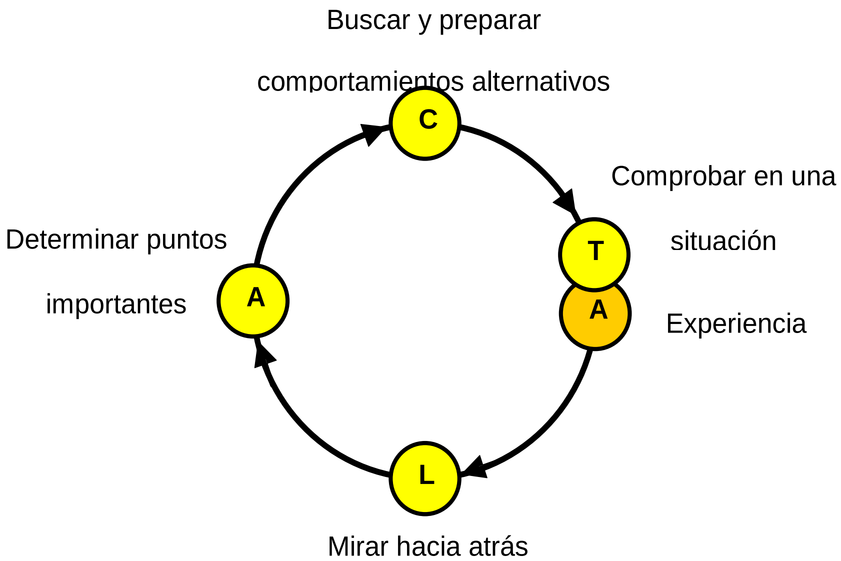


Figura 1. Modelo de reflexión ALACT (Korthagen et al., 2001)

La fase inicial (acción o experiencia), se conforma de una situación que da origen a la reflexión, definiéndose en ella la "problemática"[3] que la promueve. La segunda fase (mirar hacia atrás), consiste en esbozar una "imagen" de lo que fue la situación real. Determinar puntos importantes, corresponde a la tercera fase, en donde se toma conciencia de los aspectos fundamentales que dieron lugar a las respuestas de la fase anterior. Aquí pueden intervenir agentes externos (Flores, 2007) (en forma de lecturas de documentos, o consulta a expertos) que ayudan al profesor a examinar las teorías que subyacen al problema. En la fase cuarta, el profesor busca estrategias o soluciones para abordar posteriormente la(s) problemática(s), y aplicarlas en un nuevo evento escolar, aprovechando el descubrimiento de la etapa anterior. En la etapa final el profesor está en condiciones de estudiar una nueva situación contando con la experiencia y conocimiento práctico derivado de la reflexión realizada en el ciclo anterior, empezando un ciclo nuevo de reflexión, pero desde las apreciaciones anteriores (Esteve, Melief, Alsina, 2010).

La profundización que comporta la reflexión puede realizarse en diferentes niveles, según la amplitud de los problemas abordados y del grado de fundamentación de los mismos. Van Manen (1995) identifica niveles de reflexión

---

[2] La sigla ALACT abrevia a: Action, Looking back on the action, Awareness of essential aspects, Creating alternative methods of action y *T*rial.
[3] A modo de no confundir, en adelante llamaremos "problemática" al problema que el grupo detecta de su práctica, durante el ciclo de reflexión.

según la lógica con la que se plantean y resuelven los problemas, señalando tres grados: técnica, didáctica y crítica. A efectos de este trabajo, empleamos el marco de análisis de niveles de complejidad que proponen Smith y Hatton (1993), que se identifican a través de los escritos de los profesores, destacando cuatro tipos de escritura que dan una idea de niveles de reflexión. El escrito descriptivo se limita a describir acontecimientos. El de reflexión descriptiva muestra una mirada retrospectiva de la práctica y puede plantear opciones para la acción. En el de reflexión dialógica se produce un diálogo con uno mismo, al explorar posibles razones, añadiendo intentos de justificación, tratando de reconocer en aportes externos puntos de vista alternativos. El escrito de reflexión crítica, muestra conciencia de acciones y eventos, explica y justifica con referencia a múltiples perspectivas y contextos históricos, sociales y/o políticos.

En la literatura de investigación hemos encontrado trabajos similares que se centran en la reflexión en procesos de formación de profesores de matemáticas. Nos hemos centrado especialmente en los que afrontan la enseñanza del álgebra, dado que las profesoras objeto de nuestro estudio plantearon un problema profesional centrado en este contenido de las matemáticas escolares.

En relación a trabajos que estudian la reflexión de docentes, Petropoulou, Potari y Zachariades (2011) en la 35ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, centran su atención en las decisiones de enseñanza del profesor, sus acciones y reflexiones, y sobre la forma en que se relacionan con sus investigaciones y experiencias docentes. En la misma conferencia, Rowland, Thwaites y Pared (2011), abordan la relación teoría y práctica y, presentan y analizan ejemplos de la reflexión en la acción de algunos episodios de clases de docentes de matemáticas, en un momento de contingencia (es decir, un momento que exige al docente tomar decisiones en el aula), basándose en la noción de Schön de práctica reflexiva y de reflexión en la acción. Por otro lado, Turner (2011), sugiere que la reflexión centrada en la enseñanza del contenido matemático puede mejorar el desarrollo de conocimiento de los contenidos matemáticos para la enseñanza.

Otras investigaciones estudian la reflexión docente en programas de formación. En un estudio presentado en la 33ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Cavanagh y Prescott (2009) focalizan la atención en la relación entre teoría y práctica, abordando el pensamiento reflexivo de tres profesores durante un año en un programa de formación docente. Delgado y Ponte (2004), describen cómo tres futuros docentes de primer ciclo de educación básica reflexionan sobre las vivencias habidas durante sus prácticas de enseñanza de las matemáticas, apuntando a la necesidad de enriquecer la reflexión sobre las cuestiones más directamente relacionadas con la enseñanza de las matemáticas durante la época de la práctica docente de los futuros docentes.

Apreciamos, pues, que las investigaciones actuales a nivel internacional, muestran la importancia de abordar la reflexión docente, como objetivo específico de los cursos de formación de profesores, tanto inicial como permanente. En ellos se considera la importancia de la reflexión para articular la formación teórica con la preparación y actuación práctica, llegando incluso a apreciar el papel de la reflexión en la formación matemática de los profesores.

Con estos elementos teóricos de referencia afrontamos el estudio de la reflexión llevada a cabo por profesores de matemáticas implicados en un curso de formación continua. Continuamos especificando los elementos metodológicos empleados en el estudio.

3. Metodología

Con un enfoque cualitativo, diseñamos un estudio exploratorio de tipo no experimental, longitudinal de panel (Cohen, Manion y Morrison, 2007; Hernández, Fernández y Baptista, 2010; Martínez, 2006). Es longitudinal, ya que considera la recopilación de datos en varios momentos del programa de formación, y pretendemos ver la evolución de los profesores en su proceso reflexivo; es longitudinal de panel, ya que observamos la evolución en todos los tiempos o momentos del mismo grupo específico de sujetos.

El contexto de la investigación es un programa de formación de profesores celebrado entre los años 2008 a 2010, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile). Fue dirigido por una profesora-investigadora de la misma casa de estudio, y tenía como objetivo ayudar a los profesores en el desarrollo profesional como docentes de matemáticas. No tuvo un costo económico para los interesados y se impartía dos veces al mes con sesiones de 3 a 4 horas aproximadamente cada una.

Desde el año 2009 la metodología de trabajo del curso se basó en el Estudio de Clases japonés[4] (Isoda, Arcavi, Mena, 2007; Mena, 2009), planteándose como propósito fortalecer el desarrollo profesional de profesores de matemáticas, al enfrentarlos al diseño, realización y discusión de clases para mitigar alguna situación problemática surgida en sus prácticas. Se estimuló a que los participantes identificaran y definieran un problema derivado de su práctica. Posteriormente tuvieron que revisar literatura relacionada con el problema, plantear tareas de enseñanza para afrontarlo, diseñando para ello una clase que abordarlo. Durante el diseño tuvieron que analizar las tareas de enseñanza. Luego las implementaron y grabaron la clase, analizándola en grupo durante el curso formativo. Finalmente reformularon el problema y el diseño de la clase.

Los participantes fueron docentes de la quinta región (11 profesores) y región metropolitana de Chile (1 profesora), que imparten clases de matemáticas en los

---

[4] El *Lesson Study* o Estudio de Clases japonés es un medio de capacitar a los profesores para que desarrollen sus propias prácticas pedagógicas, basado en la investigación sobre su propia clase. Se vale de un trabajo colaborativo realizado por los profesores con objeto de mejorar su conocimiento de contenidos y metodologías de enseñanza, así como profundizar sobre los aprendizajes de los alumnos. Es un proceso cíclico compuesto de las siguientes etapas: preparación (identificación del problema y preparación de la clase), clase a investigar (implementación) y sesión de revisión (evaluación de la clase y revisión de resultados).

tres niveles educativos (primaria, secundaria y superior) y de los distintos ámbitos institucionales existentes en nuestro país (con y sin financiamiento del Estado), descritos en la tabla 1, quienes tienen en promedio, 12 años de experiencia.

Tipo de Institución	Primaria	Secundaria	Superior
Con financiamiento	1	5	3
Sin financiamiento	1	2	0

Tabla 1. Características de los participantes en el seminario

El curso agrupó a los profesores en parejas, de las que para este artículo hemos seccionado una pareja formada por dos profesoras de secundaria de la quinta región. Las profesoras plantearon como problema de enseñanza la dificultad que tienen los alumnos para realizar la simplificación de expresiones algebraicas. Una de las docentes trabaja en un establecimiento con financiamiento estatal y la otra en un establecimiento sin financiamiento estatal. Ambas tienen más de 15 años de experiencia laboral. Además, son profesoras mentoras, es decir, reciben en sus cursos a los futuros profesores de Matemáticas de la misma Universidad, colaborando y guiando sus prácticas docentes. Reconocen no tener una formación específica en didáctica de la matemática.

Nuestra selección de sujetos es intencional (Martínez, 2006), escogiéndola por la disposición de las docentes a que sus informes sean parte de este estudio, a que presentaron todos los informes pedidos (material de análisis que utilizaremos), y por no haber participado en ningún programa de formación que involucrara el Estudio de Clases y pese a haber participado en diversos programas de formación. Creemos que esta selección no probabilística es adecuada, debido a que nos sirve para describir la reflexión en el programa formativo y produce menos ruido que otros sujetos que si bien también iban de manera voluntaria, ya tenían experiencia o conocimientos con algunos de los componentes que articulaban el programa, lo cual puede ser un factor de sesgo para el estudio.

Para el proceso de recolección de datos empleamos los informes escritos grupalmente (tabla 2) presentados por las profesoras cuando la formadora[5] se los requería durante el transcurso del proceso formativo. Los datos, por tanto, son los comentarios, ideas y observaciones de las profesoras recogidas en dichos informes. Se realizó un análisis de contenido de los textos, fijando como unidades referenciales, los conjunto de párrafos que tienen alguna conexión o idea en común (Krippendorff, 1990).

Informe	Contenido
1	La problemática a abordar y la hipótesis planteada. Relación de artículos de literatura profesional y de investigación sobre la problemática

[5] Con propósito de no confundir, desde ahora y en adelante hablaremos de la formadora a la docente que estuvo a cargo del curso, y hablaremos de profesores refiriéndonos a los docentes participantes del curso.

	seleccionada por el grupo. Descripción de la situación con la que ejemplifican la problemática. Identificación de un instrumento exploratorio que les permita obtener evidencias que confirmen (o refuten) la problemática. Su aplicación en algún curso y un análisis breve de resultados.
2	Tareas de enseñanza redactadas en forma de problema, para emplear en una clase que afronte la problemática.
3	Diseño de la clase para afrontar la problemática.
4	Análisis a priori de las tareas de enseñanza.
5	Análisis grupal de la clase realizada.
6	Análisis en el Seminario de la clase. Reformulación de la problemática y del diseño de la clase en estudio. Informe final, recopilan aspectos de los otros informes reformulados.

Tabla 2. Documentos para recolección de datos

A efectos de la investigación, definimos dos dimensiones, de índole cualitativa, para cubrir los objetivos: los indicadores de la reflexión y el nivel de reflexión. La dimensión indicadores de la reflexión de un docente, hace alusión a los elementos que muestran que el profesor realiza el proceso reflexivo, es decir, que va cubriendo las etapas del ciclo de reflexión del modelo ALACT (Korthagen, 1989). Para la dimensión nivel de reflexión, nos referimos al grado en que se produce la reflexión, el tipo de preocupación que manifiesta en sus escritos, el grado de justificación de sus afirmaciones, etc., que evidencian el nivel de complejidad o profundidad al que ha llegado la reflexión, operativizados mediante los niveles de reflexión de Smith y Hatton (1993).

De acuerdo con la caracterización que hemos hecho de la reflexión (identificación de problemas profesionales, distanciamiento de la acción y uso de apoyos externos para profundizar en la problemática), para estudiar los indicadores de reflexión, consideramos tres elementos: la situación problema, la literatura relacionada y las tareas de enseñanza.

El proceso de reflexión se influencia por la amplitud y precisión con que las profesoras identifican la situación problema que lo origina, es decir, las cualidades de su problemática y el diseño e implementación de la clase en estudio. Durante el curso las profesoras tenían que buscar artículos del estado del arte sobre su problemática. Estos textos nos muestran lo que ha sido significativo para las profesoras en el proceso de reflexión sobre su problemática. Por último, los docentes debían plantear tareas de enseñanza, para el diseño y aplicación de una clase, en las cuales reflejaban tanto su problemática, como la forma en que han ido incorporando aportes suministrados durante el curso de formación, como el concepto de tarea, la forma de la misma, su naturaleza, especialmente si se trata de problemas o ejercicios (Pólya, 1945; Ponte, 2005). También examinamos de qué forma identificaban errores (y dificultades) y obstáculos en el tratamiento del tema (Gómez, 2007; Rico 1997a, 1997b). Errores, dificultades y obstáculos que hemos extraído del marco curricular de Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2009), de los textos de apoyo al docente de matemáticas en Chile (Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2011) y de estudios internacionales sobre la enseñanza del álgebra (Cervantes y Martínez, 2007; Filloy, 1999; Trigueros, 1999).

De los tres dominios señalados surgen las categorías para el análisis de contenido de la dimensión indicadores de reflexión. El esquema que se ilustra en la figura 2, muestra estas categorías, junto a las usadas para la dimensión nivel de reflexión, descritos por Smith y Hatton (1993).

Figura 2. Dimensiones de estudio y categorías para el análisis de contenido

4. Análisis de la información

El proceso se desarrolla en tres partes, de acuerdo a los objetivos específicos que persigue el estudio. Las dos primeras atienden al primer objetivo específico (articular curso con etapas de ciclo de reflexión), mientras que la última parte se enfoca en el segundo y tercer objetivo específico (poner de manifiesto la reflexión y caracterizar su nivel de profundidad).

4.1 Articulación del curso formativo con el ciclo reflexivo

Un elemento que nos transmite información sobre el proceso reflexivo es el tipo de situación problema que plantean los profesores como origen o móvil de sus trabajos en el curso de formación. El proceso reflexivo se refleja en la amplitud y precisión con que identifican la situación problema (Flores, 2007). Con esta perspectiva, como primera etapa del análisis identificamos en el curso de formación los momentos en que se formulan dos situaciones problemas, que emergen de dos tareas formativas grupales. Dichas situaciones están en constante evolución a raíz del proceso mismo de reflexión, tomando nuevas formas y permitiendo a los docentes adoptar una postura sistemática y fundamentada al respecto. Una de estas situaciones tiene que ver con la elección, por parte de las docentes el planteamiento y desarrollo de un problema al que hemos llamado problemática; la segunda situación problema tiene que ver con el diseño, aplicación y reformulación de una clase que aborde dicha problemática y que intenta seguir la metodología de Estudio de Clases japonés. Llamamos a esta última situación clase en estudio. Apreciando que los participantes se enfrentan a dos experiencias iniciales que constituyen el punto de inicio para dos procesos de reflexión (Korthagen et al., 2001): el ciclo relativo a la problemática, y el ciclo relacionado con la clase en estudio. Al identificar estos ciclos podemos examinar de qué forma los participantes se comportan en cada fase, apreciando cómo se produce la reflexión.

4.2 Identificación de las fases del ciclo reflexivo con el curso formativo

En la segunda etapa del análisis, identificamos las fases dentro de cada ciclo ALACT y su relación con el curso, partiendo de los momentos en que surge cada experiencia. Así, para la problemática, la fase 1 surge cuando las docentes se plantean el problema (reflejada en el informe 1). Para la clase en estudio, la fase 1 se centra en el diseño y realización de una clase relacionada con la problemática (informes 2, 3 y 4). El proceso completo se concreta en el esquema que se ilustra en la figura 3.

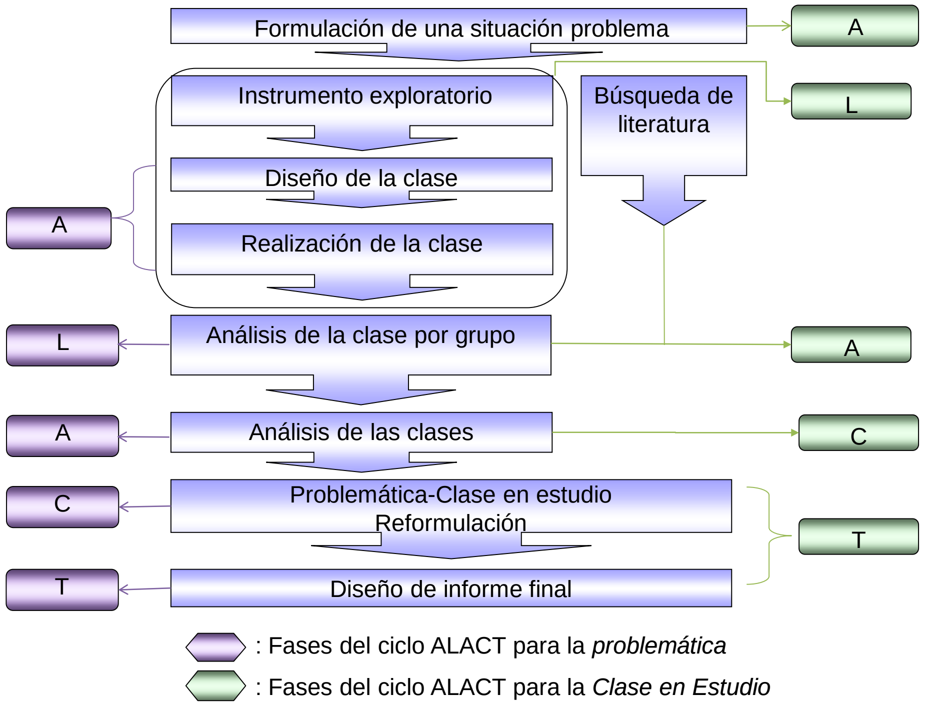


Figura 3. Identificación de etapas del curso con cada ciclo reflexivo

4.3 Caracterizar el grado de reflexión y su nivel de profundidad

Para la tercera etapa, procedimos a examinar los informes de las profesoras y clasificar sus aportes. Para ello apreciamos cómo se reflejan las variables consideradas, según el momento del ciclo (precisión, dificultad e interpretación de la definición de la problemática, o tipo y fuente de referencia, en los aportes del estado del arte, y tipo de tarea y consideración de los errores, en las tareas propuestas). La tabla 3, muestra un ejemplo del indicador y el nivel de reflexión de una unidad de análisis de los informes.

Unidad de análisis	Indicador de reflexión	Nivel de reflexión
"En una primera etapa diseñamos ejercicios relacionados con la geometría donde aplicarán el concepto de simplificación, pero nos dimos cuenta que no eran desafiantes para los alumnos dado que se resolvían directamente"	Tarea y Situación Problema (clase en estudio) Explican la elección del tipo de tarea de enseñanza para la clase en estudio. Muestran su preocupación por elegir un problema y no un ejercicio.	Reflexión dialógica Describen aspectos sobre elección de tareas de enseñanza, mediante un discurso con ellas mismas sobre si era problema o ejercicio.

Tabla 3. Ejemplificación sobre la una unidad de análisis y su categorización

Realizada la interpretación para todas las producciones de las profesoras, describimos qué aspectos de reflexión se han puesto en juego, así como el nivel de reflexión afrontado (objetivos específicos 2 y 3 del estudio). Presentamos a continuación las apreciaciones recogidas agrupadas en los dos ciclos, referentes a la problemática y a la clase en estudio.

4.3.1 Análisis para el ciclo reflexivo sobre la problemática

Se observa en los escritos que las profesoras van cubriendo las fases del ciclo de reflexión. Comienzan planteándose una cuestión relacionada con la dificultad que tienen los alumnos para la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. La definen con cierta ambigüedad, que ellas mismas detectan en la fase 2, al tener que buscar evidencias sobre dicha situación problema.

A través de la búsqueda del estado del arte y la puesta en común con sus pares y formadora (entrando en la fase 3), las profesoras formulan de manera más explícita el problema. Seleccionan documentos de páginas institucionales, lo que sugiere que aprovechan la facilidad de acceso y/o importancia que atribuyen a documentos del Ministerio de Educación de Chile. Se aprecia que focalizan su atención en herramientas para la clase, como las tareas de enseñanza. La puesta en común les lleva a hacer más explícito la dificultad que detectan en sus alumnos.

En el último informe se presentan comportamientos alternativos (fase 4). Las profesoras buscan otros documentos de apoyo más relacionados con el tema de estudio. Además, plantean nuevas formas de abordar la problemática, focalizándose en el contenido matemático y concretando los errores que estudiar, entre los que cometen los alumnos.

De esta forma, en la fase final las docentes están en disposición de iniciar un nuevo ciclo, planteando una nueva problemática.

En el proceso se aprecia una evolución en la forma de percibir y delimitar la problemática y adquirir nuevos dispositivos que la sustentan, apreciando una evolución en el tipo de afirmaciones. Por ejemplo, las frases que se refieren a la importancia del tema (tabla 4), pasaron de una afirmación de índole general, a concretarla y lanzar la hipótesis de que los errores derivan de que los estudiantes no ven sentido en las expresiones algebraicas.

Fase 2: mirar hacia atrás	**Fase 3: aclaración de puntos importantes**
La importancia del tema radica en que los alumnos no le encuentran sentido al momento de la simplificación de una fracción algebraica, lo cual genera un problema para el aprendizaje, ya que esta no presenta la mejor actitud para aprender (unidad 11, informe 1).	Según nuestra experiencia, la importancia del tema radica en que los alumnos no le encuentran sentido a una fracción algebraica al momento de simplificarla…, lo cual genera un problema para el aprendizaje de la operatoria de expresiones fraccionarias, la resolución de ecuaciones con denominadores fraccionarios, la resolución de problemas, etc. (unidad 8, informe 6).

Tabla 4. Evolución de la problemática a través de las fases

El nivel de reflexión identificado en los escritos es preponderantemente de tipo descriptivo, como el de la tabla 5, en el que se señalan errores de los alumnos con una mirada retrospectiva de la práctica.

Unidad de análisis
También existen errores de procedimientos operatorios, ya que los alumnos transfieren la forma de simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, a una simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios, saltándose las reglas de sumas y productos sin importar el orden prioritario de las operaciones de éstas.

Tabla 5. Escrito de tipo reflexión descriptiva (unidad 7, informe 1)

4.3.2 Análisis del ciclo reflexivo sobre la Clase en Estudio

Las profesoras cubren las fases del proceso reflexivo para esta cuestión. Intentan abordar en su clase la problemática, buscando estrategias para que los alumnos no cometan errores en la simplificación de expresiones algebraicas. A medida que se avanza en el curso, el objetivo de la clase toma otras aristas, incorporando más elementos matemáticos, como son las técnicas de factorización de expresiones más simples o llegar a identificar restricciones de validez de estas técnicas. La tarea de enseñanza y la evaluación final amplían el tipo de expresiones algebraicas consideradas en el objetivo de la clase.

Inician la propuesta con tareas de enseñanza de tipo ejercicio (por ejemplo, figura 4, unidad 2 del informe 2).

Completa la siguiente tabla dados los valores de a y b y contesta las siguientes preguntas

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	(a+b)	(a-b)	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2-b^2}{a-b}$
2	1						
3	2						
-2	4						
-1	0						

a) Compara las columnas (6) y (1) ¿Qué puedes decir?

b) Compara las columnas (7) y (2) Qué puedes decir?

c) ¿En qué columna se obtienen los mismos resultados que en (8)? ¿Por qué crees tú que sucede?

Figura 4. Una de las primeras tareas de enseñanza propuesta por las profesoras

Al mirar hacia atrás (fase 2), focalizan en las tareas de enseñanza el diseño y realización de la clase en las estrategias para aplicarlas y en las dificultades y errores en el estudio del tema, respondiendo a preguntas del tipo ¿cómo lo hice?, ¿cómo me sentí?, ¿qué pensaban, sentían o hacían mis alumnos? La escasa alusión al logro de objetivos durante la clase, o si ésta abordó la problemática como estaba previsto, nos sugiere que no hubo reacción a una pregunta clave ¿qué quería?, interrogante que forma parte de esta fase del ciclo reflexivo.

Al continuar en la fase 3, las docentes incorporan sugerencias sobre cómo abordar en una nueva ocasión las dificultades surgidas. Ya en la fase 4, sobre comportamientos alternativos, las docentes indican cambios para el diseño de clase, en especial sobre cómo van a poner en práctica las tareas de enseñanza, que definen de manera más precisa incluyendo uso de recursos.

La fase de iniciación de un nuevo ciclo reflexivo (fase 5), se plasmó con el diseño y aplicación de una nueva clase, reformulando la anterior, replanteando su objetivo. En este caso incorporaron nuevos elementos matemáticos, como la valoración numérica de las expresiones algebraicas para estudiar equivalencias.

De esta manera, apreciamos que las docentes llegan a realizar el ciclo de reflexión ALACT, poniendo de manifiesto que tienen dificultades para afrontar el objetivo previsto para la clase, pero también se aprecia un aumento de elementos fenomenológicos y matemáticos asociados a su problemática, que intervienen en la clase, y un progreso en las tareas de enseñanza y en la detección de dificultades.

Por ejemplo, las primeras tareas son ejercicios y al avanzar modifican una de ellas (figura 4) hasta obtener un problema (figura 5, unidad 21 del informe 6).

¿Se puede ahorrar cálculos?
En el segundo medio C, la profesora de Matemática escribió la siguiente tabla:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	$a+b$	$a-b$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2-b^2}{a-b}$
....	....						
....	....						
....	....						
....	....						

Luego, empezó a recitar algunos valores para a y b, y pide completar la tabla.
Al cabo de poco tiempo, Aldo, un alumno del curso, dice que ya terminó, el resto de compañeros se encuentran asombrados por la rapidez en los cálculos de su compañero.
La profesora le pregunta ¿Completaste todas las columnas? y el responde:
"Si completé todas las columnas, pero no fue necesario el cálculo en algunas"
¿A qué columna(s) crees que se refiere Aldo? Explica

Figura 5. Una de las últimas tareas de enseñanza propuesta por las profesoras

En este ciclo, los escritos abarcan niveles de reflexión dialógica y crítica (tabla 6). Dado que en la primera fase el nivel de reflexión era prioritariamente de tipo escrito descriptivo apreciamos un progreso en la profundidad del proceso reflexivo.

Unidad de análisis
La profesora lee el enunciado del problema y al observar que sus alumnos no entienden totalmente el enunciado, vuelve a explicarlo dando posibles estrategias. Se recomienda dar la palabra a los alumnos en relación a la lectura, sin intervención de la profesora, de modo de dar un mayor protagonismo al alumno en la comprensión de ésta. La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos, es importante que ellos tengan los tiempos necesarios para poner en práctica su experimentación.

Tabla 6. Escrito de tipo reflexión crítica (unidad 34, informe 6)

En el ejemplo, las profesoras dan importancia a elementos de índole social y afectiva, como el protagonismo de los alumnos en su aprendizaje y el tiempo requerido para desarrollar una tarea.

Algunas unidades de análisis presentadas en los informes sufren cambios y/o se reformulan en el informe final. Estos cambios manifiestan siempre una tendencia creciente en su nivel de reflexión. Por ejemplo (tabla 7), en la fase 2, las docentes manifiestan una reflexión descriptiva al presentar aspectos matemáticos de la clase relacionados con el planteamiento y resolución de tareas; luego, en la fase 3, justifican estos aspectos formando un diálogo con ellas mismas (reflexión dialógica) y destacando que hubo más de una estrategia de resolución.

	Fase 2: mirar hacia atrás (Unidad 3, informe 5)	**Fase 3: aclaración de puntos importantes (Unidad 35, informe 6)**
Unidades	En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria. Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relaciones en la tabla, muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas.	En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria, lo que puede provocar alguna interpretación errónea por el estudiante, esto corresponde a la expresión de la columna tres. El formato del problema, presenta dos tipos de letra, esto puede incidir en la comprensión por parte del estudiante, dado que en rigor no representa la misma variable, es necesario corregir esta situación para una próxima aplicación. La generación de conocimiento se da en forma espontánea cuando un estudiante afirma que las expresiones de las respectivas columnas son equivalentes a partir de simplificar una expresión fraccionaria. Los alumnos al valorizar la tabla, sólo contemplan números naturales, esto puede ocurrir por la facilidad del cálculo o por no considerar números negativos. La profesora considera para la evaluación formativa, ejercicios de otro tipo de factorización como, por ejemplo, $\frac{x^2-y^2}{2x-2y}$ a pesar de ello los alumnos son capaces de desarrollar el ejercicio. Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relación en la tabla, como, por ejemplo, en las columnas tres, cinco y siete se obtiene el mismo resultado y están muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas.
Nivel de reflexión	Reflexión descriptiva, al presentan aspectos matemáticos de la clase, con una mirada retrospectiva.	Reflexión dialógica, al describir la elección de la tarea de enseñanza y al atender a los aspectos didácticos observados en la clase, formando un discurso con ellas mismas.

Tabla 7. Cambios en el nivel de reflexión entre las fases

5. Consideraciones finales

A la luz de los resultados, podemos hacer algunas apreciaciones sobre cómo reflexionan y con qué nivel, docentes de matemáticas en un curso de formación. Las apreciaciones sobre cómo se manifiestan dos ciclos de reflexión en las docentes, durante la realización del curso, muestran los aspectos que constituyeron sus motores de reflexión y cómo se concretaron. Los elementos matemáticos aumentan su presencia, mejorando aspectos para incorporar en las tareas de enseñanza. Se percibe elementos didácticos que amplían la visión inicial, excesivamente técnica, para incorporar aspectos fenomenológicos del contenido matemático y aportes sobre cómo aprenden los estudiantes. Las docentes reflexionan de manera paralela sobre la problemática y su actuación en clases, en donde plantean y focalizan su atención en nuevas tareas de enseñanza más que en la profundización sobre aspectos relativos a la problemática, como el significado de los conceptos matemáticos y didácticos que involucra (formas de interpretar la simplificación, por ejemplo).

Consideramos que la modelización del proceso formativo en ciclos de reflexión se puede realizar con mayor claridad, si se parte del ciclo ALACT en el diseño del curso de formación, complementando los registros de información y las dimensiones para estudiar la reflexión, lo que supone una limitación del presente estudio.

Es por ello que estamos llevando a cabo una investigación doctoral, que involucra la realización de un curso de formación en Chile, en el que se ha cuidado que el papel de la reflexión cubra tres ámbitos: el proceso formativo (diseñado tomando en cuenta el modelo de reflexión ALACT), la finalidad del mismo (lograr un profesor reflexivo) y la investigación (examinar cómo reflexiona el profesor). Con ello, esperamos disponer de más elementos para precisar sobre el proceso reflexivo y el nivel de reflexión de profesores participantes en cursos formativos, planteado con la intención de generar hábitos de reflexión para y sobre la práctica.

Bibliografía

Alsina, Á., Busquets, O., Esteve, O. y Torra, M. (2006). La reflexió sobre la pròpia pràctica: una eina per progressar en l’ensenyament de les matemàtiques. *Biaix*, 25, 37-43.

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 77-98). SEIEM, Ciudad Real, España.

Cavanagh, M. y Prescott, A. (2009). The reflective thinking of three pre-service secondary mathematics teachers. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 273-280). PME, Tesalónica.

Cervantes, G. y Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima*, 8, 34-41.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge, Londres.

Contreras, J. (1997). *La autonomía del profesorado*. Morata, Madrid.

Cotic, N. S. (2008). Reflexiones sobre la Formación del Profesor en Matemática según el diseño curricular de la Provincia de Buenos Aires-Argentina. *Revista Unión*, 15, 89-103.

Delgado, C. y Ponte, J. P. (2004). A reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de três futuras professoras do 1º ciclo do ensino básico. *Quadrante, 13*(1), 31-61.

Dewey, J. D. (1910). *How we think*. Heath, Boston.

Empson, S. B. y Jacobs, V. R. (2008). Learning to listen to children’s mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 257–281). Sense Publishers. Rotterdam.

Esteve, O., Melief, K. y Alsina, Á. (Coord.) (2010). *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado*. Editorial Octaedro, Barcelona.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos en la investigación en álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamericana, México.
Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), 1*(A), 139-159.
Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.
Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill, Distrito Federal.
Isoda, A., Arcavi, A. y Mena, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Valparaíso.
Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers—the potential of critical reflection. *Journal of In-Service Education*, 19 (3), 37-42.
Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós, Barcelona.
Korthagen, F.A.J (1985). Reflective Teaching and Preservice Teacher Education in the Netherlands. *Journal of Teacher Education, 36* (5), 11-15.
Korthagen, F.A.J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 68(24), 83-101.
Korthagen, F.A.J., Kessels, J.P.A.M., Koster, B., Langerwerf, B. & Wubbels, T. (Eds.) (2001). *Linking theory and practice: The pedagogy of realistic teacher educatiion*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah.
Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas, México.
Mena, A. (2009). *El estudio de clases japonés en perspectiva*. Colección Digital Eudoxus, 18. Recuperado el 2 de junio de 2013 de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/issue/view/33/showToc.
Mewborn, D. S. (1999). Reflexive thinking among preservice elementary mathematics teachers. *Journal for Research Mathematics Education, 30* (3), 316-341.
Olfos, R., Soto, D. y Silva, H. (2007). Renovación de la enseñanza del álgebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Estudios Pedagógicos, 23* (2), 81-100.
Pérez, A. I. y Gimeno, J. (1988). El pensamiento y acción en el profesor: de los estudios sobre la planificación al pensamiento práctico. *Infancia y aprendizaje,* 42, 37-64.
Petropoulou, G., Potari, D. y Zachariades, T. (2011). Inquiring mathematics teaching at the university level. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 385-392). PME, Ankara.
Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, Nueva York: Princeton University Press.
Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM, Lisboa.
Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers´Knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225- 236). Routledge, NY.

Pozo, J. I., Martín, E., Pérez-Echeverría, M. P., Scheuer, N., Mateos, M. y De la Cruz, M. (2010). Ni contigo ni sin ti... Las relaciones entre cognición y acción en la práctica educativa. *Infancia y aprendizaje, 33* (2), 179-184.

Ramos, E. (2010). *Reflexión de docentes sobre la enseñanza del álgebra en un programa formativo*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada, Granada, España.

Ross, D. (1989). First steps in developing a reflective approach. *Journal of Teacher Education, 40*, 22-30.

Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Síntesis, Madrid.

Rico, L. (1997b). *La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.* Ice-Horsori, Barcelona.

Ross, D. D. (1989). First steps in developing a reflective approach. *Journal of Teacher Education*, 40 (2), 22-30.

Rowland, T., Thwaites, A. y Pared, J. (2011). Libby Triggers of contingency in mathematics teaching. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). PME, Ankara.

Schöenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in Mathematics Teachers Education. The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354) Sense Publisehrs, Rotterdan.

Schön, D. A. (1983). *The reflective Practitioner. How Professional Think in Action*. Temple Smith, Londres.

Smith, D. y Hatton, N. (1993). Reflection in teacher education: A study in progress. *Education Research and Perspectives, 20* (1), 13-23.

Smyth, J. (1989). Developing and Sustaining Critical Reflection in Teacher Education. *Journal of Teacher Education, 40* (2), 2-9.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3* (4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press, Nueva York,.

Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Turner, F. (2011). Mathematical content knowledge revealed through the foundation dimension of the Kq. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 281-288). PME, Ankara.

Ubuz, B. (Ed.) (2011). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME, Ankara.

Van Manen, M. (1995). On the Epistemology of Reflective Practice. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 1* (1), 33-50.

Zañartu, M., Darrigrandi, F. y Ramos, M. (2011). *Matemática para Segundo de Educación Media. Guía didáctica para el profesor*., Santillana, Santiago de Chile.

Elisabeth Ramos-Rodríguez

Dirección electrónica: elisabeth.ramos@pucv.cl

Dirección postal: Avenida Brasil, 2950, Valparaíso, Chile

Teléfono: (056)971037169

Doctora en Ciencias de la Educación, especialista en didáctica de la matemática. Profesora e investigadora del Instituto de Matemáticas de la Pontifica Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Su línea de investigación es la formación de profesores. Tiene diversos capítulos de libros y publicaciones, como en las revistas Reflective Practice y Bolema.

Pablo Flores Martínez

Dirección electrónica: pflores@ugr.es

Dirección postal: Cartuja s/n, Granada, 18011, Granada, España

Profesor del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Doctor en Matemáticas. Sus líneas de investigación son el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas y didáctica de la geometría.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 90-106

Concepções de licenciandos em Matemática sobre demonstração em Geometria

Gisela Maria da Fonseca Pinto, Agnaldo da Conceição Esquincalha

Fecha de recepción: 01/03/2016
Fecha de aceptación: 18/05/2016

Resumen	En pocas palabras, el texto presenta la génesis de la manifestación cognitiva en la geometria, de Balacheff, destacando sus principales conceptos. Entonces va a la cuenta de una actividad llevada a cabo con estudiantes de una licenciatura en Matemáticas en Río de Janeiro, con el fin de inferir sus puntos de vista con respecto a la demostración de algunos resultados geométricos que se exploran en la escuela primaria. **Palabras clave**: Demostración, Geometría, Licenciado en Matemáticas.
Abstract	Briefly, the text presents the genesis of cognitive demonstration in Geometry of Balacheff, highlighting its main concepts. Then it goes to the account of an activity carried out with students of a Bachelor's Degree in Mathematics in Rio de Janeiro, in order to infer their views regarding demonstration of some geometrical results that are explored in elementary school. **Keywords**: Demonstration, Geometry, Licentiate in Mathematics.
Resumo	O artigo discorre brevemente sobre a gênese cognitiva da demonstração em Geometria, de Balacheff, destacando seus principais conceitos. Em seguida, passa-se ao relato de uma atividade realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática no Rio de Janeiro, com o intuito de inferir sobre suas concepções a respeito de demonstração de alguns resultados geométricos que são explorados na escola básica. **Palavras-chave**: Demonstração, Geometria, Licenciandos em Matemática.

1. Introdução

Os processos ligados ao ensino e aprendizagem de Geometria são normalmente complexos e difíceis para professores e alunos. Questões culturais já impregnam estas relações, como, por exemplo, os tipos de abordagem e a concentração nos últimos capítulos dos livros didáticos brasileiros, o que tem sido superado pelos critérios qualidade estabelecidos pelo Plano Nacional do Livro Didático como parâmetro de avaliação de coleções publicadas no Brasil.

Tais dificuldades são muitas vezes inerentes à natureza do conhecimento geométrico. Quais as fronteiras entre o conteúdo e o conhecimento que o aluno traz para a escola? Até que ponto se deve ou não exigir a formalidade do aluno e a denominação correta de formas ou a descrição de propriedades? As definições devem ser informadas ou construídas? Até que ponto é necessário "algebrizar" e "numerizar" o ensino de Geometria?

Estas e muitas outras questões tornam as pesquisas em Geometria sempre muito relevantes para a Educação Matemática. Neste trabalho, vamos abordar algumas destas questões, investigando como alguns alunos da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública situada no Estado do Rio de Janeiro, Brasil, se posicionam frente à demonstração de proposições familiares a eles. Vamos nos debruçar especialmente sobre o problema das demonstrações em Geometria, na perspectiva de Nicolas Balacheff.

2. Aporte teórico

Os Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros (1998) apontam a importância do início do desenvolvimento da abstração em Matemática na escola, ainda que os processos de formalização apareçam de forma elementar, mas com especial atenção para a investigação e o levantamento de conjecturas, oportunizando que o aluno desenvolva a capacidade de argumentação matemática.

Almouloud (2007) traz uma leitura do trabalho de Balacheff (1982), distinguindo os conceitos de explicação, prova e demonstração. A explicação estaria no campo do sujeito locutor, que comunica a outro a verdade de uma asserção matemática. Se um grupo a considera convincente, é considerada uma prova para esse grupo, ainda que a proposição seja falsa. Se a prova se refere a uma asserção matemática, Almouloud (2007, p. 3) comenta que Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração. Nessa concepção, as explicações podem ser provas para um determinado grupo, mas não para outro. Já as demonstrações, seriam provas com as características a seguir:

> 1) são as únicas aceitas pelos matemáticos; 2) respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas; 3) trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (Almouloud, 2007, p.3)

Existem outras perspectivas sobre os conceitos de prova e demonstração em Matemática, discutidas pelo próprio Balacheff (2004), confrontando colocações de outros pesquisadores a respeito. Ainda que perspectivas distintas possam ser assumidas, neste trabalho fazemos uso exclusivamente do entendimento de Balacheff para esses conceitos, em particular, no que tange ao seu uso no campo da Geometria, como descrito a seguir.

Nicolas Balacheff (1987) lança reflexões sobre a gênese cognitiva da demonstração, indicando a importância de uma evolução no pensamento geométrico de forma a que se promova a compreensão do significado de uma demonstração em Geometria. O autor entende que somente a partir daí os estudantes serão capazes de realizar as suas próprias demonstrações neste campo do conhecimento matemático. Balacheff mapeia em duas categorias as provas que os alunos produzem: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. O tipo de prova apresentado pelo aluno pode dar indícios do grau de maturidade do conhecimento geométrico e das demonstrações apresentadas pelo aluno analisado.

As provas pragmáticas são explicações construídas a partir de algum tipo de ação direta do estudante sobre o objeto geométrico em tela: este analisa singularmente a proposição, em um caso particular que possa ser percebido pelo aprendiz como uma ação particular sua sobre o objeto, estendendo-se eventualmente a algum início de generalização, mas sem de fato alcança-la.

Por outro lado, as provas intelectuais são encontradas em situações em que se percebe claramente que o estudante não depende de uma ação, mas consegue refletir sobre elas por já estarem, tais ações, devidamente interiorizadas para o aluno, que também já é capaz de produzir um discurso lógico-dedutivo que encadeie de forma matematicamente coerente os objetos e suas relações.

A evolução nestas categorias depende de evolução nas formas de agir, formular e validar. Balacheff identifica quatro possíveis formas de validação neste processo de ascensão:

- Empirismo ingênuo: o estudante considera alguns poucos casos, particulares, considerando-os suficientes para validar a proposição. Não há questionamento quanto a particularidades. É uma validação imatura e rudimentar, normalmente inicial no processo de generalização e bastante resistente ao longo do desenvolvimento do pensamento geométrico. Como exemplo deste nível, Balacheff comenta sobre o problema da determinação do número de diagonais de um polígono, sugerindo que alunos que encontram-se neste nível teriam obtido experimentalmente a quantidade de 5 diagonais para o pentágono e observando que este número se mantém mesmo que se varie a forma do pentágono, e a partir daí concluindo peremptoriamente que o hexágono também tem 6 diagonais. Não observamos aqui nenhuma preocupação com a generalização ou com a extensão: o aluno crê que um exemplo basta para demonstrar a validade da proposição.
- Experiência crucial: o estudante pretende verificar a propriedade como um caso não tão particular, permitindo antever alguma generalização, muito incipiente ainda, porém. A “generalização” viria do fato de que “se funciona neste caso, então funciona sempre”. Percebemos então que o aluno já demonstra alguma preocupação em aludir à generalização, mas ainda parte de exemplos acessíveis a ele para chegar ao “sempre”. Retomando o exemplo de Balacheff sobre o número de diagonais de um polígono, o aluno faria um exemplo “crucial”, como determinar o número de diagonais de um polígono com muitos vértices, depreendendo um tipo de “generalização empírica” e concluindo que se vale para este caso atípico, então valeria para os demais.
- Exemplo genérico: neste nível, a validação consistiria em deixar claras as razões que validam uma propriedade. A verificação é construída sobre um exemplo, seguida de uma generalização, tomada então como uma demonstração particular que será válida para toda a classe representada. Balacheff retoma a determinação do número de diagonais de um polígono, indicando que o aluno

neste nível poderia tomar como exemplo um hexágono, mas ir generalizando as ideias, citando por exemplo que partem 3 diagonais de cada vértice uma vez que são 6 vértices menos o próprio vértice de origem e os vértices adjacentes a este, e que, portanto, teria ao todo 6 x 3 diagonais, mas como cada 2 vértices compartilham a mesma diagonal, então seria a metade deste resultado (9 diagonais). Note-se que apesar de ter se prendido ao caso do hexágono, o pensamento é generalizável a outros tipos de polígonos.

- Experiência mental: as validações neste nível independem de representantes particulares, de modo que a argumentação flui por meio de pensamentos que organizam e controlam logicamente a generalidade da situação. Voltando ao exemplo de Balacheff, o aluno neste nível comentaria genericamente que em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos, indicando ser necessário multiplicar este resultado diminuído do próprio vértice origem da diagonal pela quantidade de vértices, uma vez que o número de diagonais que parte de cada vértice é constante. A seguir, orienta sobre a necessidade da divisão por dois, considerando que cada diagonal é contada duas vezes neste processo.

O autor afirma ainda, que este último nível demarca a passagem da prova pragmática à prova intelectual, onde as ações passam a estar suficientemente interiorizadas e dirigidas à generalidade sem se preocupar com casos particulares. Se forem considerados os princípios de organização necessários à uma demonstração (conjunto institucionalizado de definições, teoremas e regras de dedução com validade socialmente compartilhada e que fundamenta o rigor matemático), podemos ter aí uma demonstração matemática. O nível exemplo genérico é como uma fase intermediária, ora podendo ser pensada como prova pragmática, ora como prova intelectual conforme a ação sobre o exemplo considerado dependa de concretização particular ou se esta usa a concretização somente como base para conseguir expressar um pensamento generalizador.

Balacheff destaca ainda que esta evolução, de provas pragmáticas para intelectuais, não depende somente das características da linguagem: a natureza e o status do conhecimento definem esta transição. As provas pragmáticas dependem de saberes práticos e de ações concretas; as provas intelectuais originam-se de reflexões e de debates sobre o conhecimento.

O significado das demonstrações, de que hipóteses levam a teses, ou seja, de que relações conhecidas entre objetos geométricos levam necessariamente a novas relações é um ponto de grande dificuldade para os alunos – e a categorização proposta por Balacheff deixa clara esta dificuldade.

3. Caracterização da pesquisa

O presente estudo foi conduzido com alunos 32 da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública situada no Estado do do Rio de Janeiro, todos integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, fomentado pelo Ministério da Educação da República Federativa do Brasil.

Inicialmente procedeu-se com a leitura e estudo mais aprofundado sobre as ideias propostas por Balacheff, sintetizadas na seção anterior, e publicadas em trabalhos acadêmicos do autor sobre a demonstração em Geometria feita por alunos na escola básica. No intuito de fazer um levantamento para analisar demonstrações dos sujeitos dessa pesquisa, elaborou-se uma pequena lista de atividades de demonstração em Geometria, que poderá ser vista a seguir. Os itens desta lista foram selecionados considerando-se: (a) a familiaridade do aluno com o conteúdo da proposição e (b) demonstrações curtas e que se relacionam a conteúdos ensinados na educação básica. As atividades não precisaram ser identificadas, o que permitiu que os alunos ficassem mais à vontade em responder aos itens. A seguir apresentamos ao leitor a folha de atividades.

Em que período você está?_________________

Você já concluiu o curso de Geometria Euclidiana Plana[1]?

( ) SIM   Há quanto tempo? ___________________

( ) NÃO

As questões a seguir referem-se à prova de situações provavelmente familiares a você. Procure resolvê-las com calma, lembrando que você não está sendo avaliado e que esta tarefa não vale nota. Não há necessidade de que se identifique, apenas de que procure resolver com calma e utilizando a argumentação que julgar mais adequada.

1) Considere um par de retas r e s concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Mostre que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

2) Mostre que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ao mostrar isso, você demonstrou o Teorema de Pitágoras?

3) Mostre que em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

4) Mostre que um triângulo é equilátero se e somente se ele é equiângulo.

5) Considere um trapézio ABCD cujos lados paralelos são AB e CD. Considere também os pontos médios M do lado AD e N do lado BC. Prove que o segmento MN é paralelo a AB e CD e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos de AB e CD.

Figura 1. Quadro com o conteúdo da folha de atividades.

[1] Geometria Euclidiana Plana é uma disciplina do quarto período da Licenciatura em Matemática na Universidade em que foi realizada a pesquisa.

Os licenciandos tiveram um período de 2h para resolver as questões, de forma individual e sem consultar nenhum material e nem aos pesquisadores, que estavam presentes e conduziram a aplicação das atividades. As perguntas iniciais sobre a disciplina de Geometria Euclidiana Plana têm o intuito de avaliar sua influência sobre o pensamento geométrico dos estudantes. Nessa disciplina, a Geometria Plana é apresentada de forma axiomática, com nível de abstração bem mais profundo do que o escolar.

A seguir são apresentadas as respostas esperadas. Nestes desenvolvimentos, está-se usando o símbolo pelo número, num abuso de notação que simplifica o registro escrito, como por exemplo a soma das medidas dos ângulos $A\hat{P}C \ e \ C\hat{P}B$ por $A\hat{P}C + C\hat{P}B$.

1) Considere um par de retas r e s concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Mostre que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Hipótese: r e s são retas concorrentes em um ponto P.

Tese: ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Demonstração:

Consideremos r contida em um plano α; r divide o plano em dois semiplanos, que por sua vez são redivididos por s que intercepta r em P em regiões limitadas por duas semirretas de mesma origem – ângulos, portanto. Como cada dois destes ângulos, se adjacentes, formam um semiplano, então eles são suplementares e então a soma das medidas desses ângulos é igual a 180º. Temos então, considerando a denominação indicada na figura:

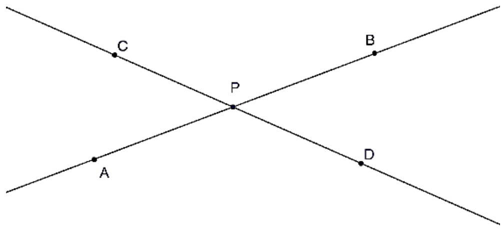


Figura 2. Retas r e s concorrentes em um ponto P.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{P}C + C\hat{P}B = 180^o \\ C\hat{P}B + B\hat{P}D = 180^o \end{array}\right\} A\hat{P}C + C\hat{P}B = C\hat{P}B + B\hat{P}D \therefore A\hat{P}C = B\hat{P}D.$$

Como os pares de ângulos adjacentes são suplementares, então o mesmo ocorre para os ângulos *APD* e *BPC*. Logo, podemos concluir que os ângulos que são opostos pelo vértice são congruentes.

Comentários: neste item, esperávamos que os alunos identificassem hipótese e tese, inicialmente. Além disso, alguma justificativa para a suplementaridade dos ângulos adjacentes seria algo necessário para que a demonstração seja consistente.

2) Mostre que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Ao mostrar isso, você demonstrou o Teorema de Pitágoras?

Hipótese: o triângulo é retângulo.

Tese: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração (possibilidade i):

Seja o triângulo ABC retângulo em A e AH a altura relativa à hipotenusa BC (H é o pé dessa altura). AH divide ABC em dois triângulos: ABH e ACH. Nesses três triângulos assim formados (o inicial e os dois gerados a partir do traçado da altura) temos a congruência dos ângulos retos e ainda de um dos ângulos agudos, visto que os ângulos agudos são complementares por serem ângulos internos de triângulos retângulos que compartilham pelo menos a medida de um ângulo agudo. Esta observação nos permite concluir que os três triângulos são semelhantes. Considerando-os dois a dois, temos:

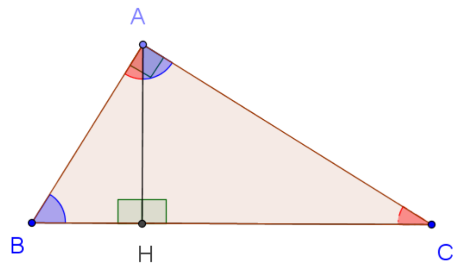


Figura 3. Triângulo ABC retângulo em A e altura AH relativa à hipotenusa BC.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

$$\Delta ABH \sim \Delta CBA \left(A\hat{H}B = C\hat{A}B = 90^o \; por\; hipótese, e\; A\hat{B}H = A\hat{B}C \; pela\; lei\; angular\; de\; Tales\right)$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC} \therefore (AB)^2 = BH \cdot BC \; (1)$$

$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \left(A\hat{H}C = C\hat{A}B = 90^o \; por\; hipótese, e\; A\hat{C}H = A\hat{C}B \; pela\; lei\; angular\; de\; Tales\right)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} \therefore (AC)^2 = CH \cdot BC \; (2)$$

$$Somando\ (1)\ e\ (2):$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = BC(BH + CH) = BC \cdot BC = (BC)^2$$

Demonstração (possibilidade ii):

Hipótese: triângulo AMN retângulo em A.

Tese: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Construímos um quadrado de lado AM + NA e sobre os lados desse quadrado segmentos consecutivos de medidas AM e NA, conforme pode ser visualizado na figura a seguir.

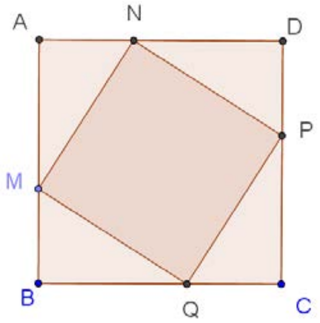


Figura 4. Quadrados.

Fonte: Imagem construída com o software GeoGebra.

Relacionando as áreas, encontramos:

$$(BM + MA)^2 = (MN)^2 + 4 \cdot \frac{BM \cdot MA}{2}$$
$$(BM)^2 + 2(BM \cdot MA) + (MA)^2 = (MN)^2 + 2(BM \cdot MA)$$
$$(\mathrm{BM})^2 + (AM)^2 = (MN)^2 \therefore (AN)^2 + (AM)^2 = (MN)^2$$

Então, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Comentários: neste item, espera-se que o aluno identifique corretamente hipótese e tese e que justifique as conclusões intermediárias, promovendo um encadeamento lógico-dedutivo.

3) Mostre que em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

Hipótese: existência do triângulo

Tese: soma dos ângulos internos igual a 180º

Demonstração:

Consideremos o triângulo ABC qualquer. Considere a reta s suporte do lado BC. Tracemos por A, a reta r paralela à s, determinando em A os ângulos determinados por r e AB e por r e AC. Estes dois ângulos e o ângulo no vértice A são adjacentes e consecutivos, estando todos contidos no mesmo semiplano e determinados pela reta que gera o semiplano – logo, a soma desses ângulos é 180º. Pelo Teorema das Paralelas, sabemos que o ângulo entre r e AB é congruente ao ângulo interno C desse triângulo e ainda que o ângulo entre r e AC é congruente ao ângulo interno B desse triângulo. Podemos então concluir que a soma dos ângulos internos desse triângulo é igual a 180º.

Comentários: espera-se que o aluno determine corretamente hipótese e tese e que justifique as conclusões intermediárias, como o Teorema das Paralelas para concluir pela congruência dos ângulos.

4) Mostre que um triângulo é equilátero se e somente se ele é equiângulo.

(⇒)

Hipótese: o triângulo é equilátero

Tese: o triângulo é equiângulo

Demonstração:

Seja ABC um triângulo equilátero – então temos AB = AC = BC e seja AM a mediana relativa ao lado BC.

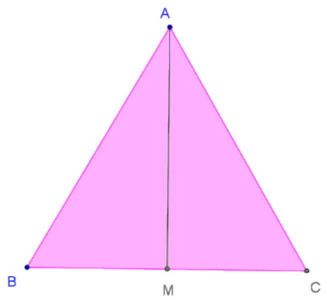


Figura 5. Triângulo ABC equilátero.

Fonte: Imagem gerada com o software GeoGebra.

Considerando os triângulos ABM e ACM, temos: AB = AC (por hipótese); BM = CM (por construção) e AM comum. Então pelo caso LLL da congruência de triângulos podemos concluir pela congruência entre esses dois triângulos, o que acarreta na congruência entre os ângulos B e C. Analogamente, reproduzindo esta construção tomando agora a mediana relativa ao lado AC, concluiremos pela congruência entre os ângulos A e C desse triângulo. Pela transitividade da igualdade, encontra-se a congruência entre A e B e consequentemente entre os três ângulos desse triângulo.

($\Leftarrow$)

Hipótese: o triângulo é equiângulo

Tese: o triângulo é equilátero

Demonstração:

Considere o triângulo equiângulo ABC. Traçando a bissetriz AM relativa ao ângulo A, obtém-se $B\hat{A}M = C\hat{A}M$ (por construção) e $\hat{B} = \hat{C}$ (por hipótese). Logo, pela Lei Angular de Tales, obtemos a congruência entre os ângulos $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C$, que além de congruentes são adjacentes e consecutivos, compartilhando uma mesma reta que origina o semiplano que contém o triângulo ABC, sendo então suplementares – o que implica em $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$. Observando os triângulos AMB e AMC, tem-se $A\widehat{M}B = A\widehat{M}C = 90^{\text{o}}$, AM comum e $B\hat{A}M = C\hat{A}M$ (por construção), o que permite que se conclua que esses triângulos são congruentes pelo caso ALA da congruência de triângulos e a partir daí pela congruência entre AB e AC. De modo análogo obtemos a congruência entre BC e AC, tomando a bissetriz relativa ao vértice B, e por transitividade a congruência entre AB e BC, permitindo a conclusão pela equilateralidade desse triângulo.

Comentários: espera-se que o aluno demonstre ida e volta, além de identificar corretamente hipótese e tese em cada caso e que construa logicamente as conexões dedutivas.

5) Considere um trapézio ABCD cujos lados paralelos são AB e CD. Considere também os pontos médios M do lado AD e N do lado BC. Prove que o segmento MN é paralelo a AB e CD e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos de AB e CD.

Hipótese: ABCD é trapézio; M é ponto médio de AD e N é ponto médio de BC.

Tese: MN // AB; MN // CD e $MN = \dfrac{AB+BC}{2}$.

Demonstração:

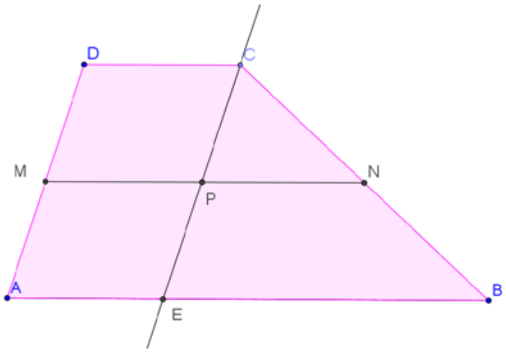


Figura 6: Trapézio.

Fonte: imagem gerada com o software GeoGebra

Seja ABCD um trapézio qualquer com AB//CD, e sejam M e N pontos médios de AD e BC, respectivamente. Traçando CE//AD, temos que AECD é um paralelogramo (quadrilátero com lados opostos paralelos), e então CD=AE e AD=CE. Seja P o ponto de encontro entre MN e CE. Vamos supor, por absurdo, que P não seja ponto médio de CE. Então os triângulos CNP e CBE não são semelhantes em razão ½ e então N não é ponto médio de BC, o que contraria a hipótese. Logo, P é ponto médio de CE pois está alinhado com M e N e, sendo assim, MD=PC e então MPCD é paralelogramo, o que implica em MN//AB//CD.

Além disso, observando os triângulos CPN e CEB, sabemos que são semelhantes em razão ½ (caso LAL da semelhança de triângulos), temos $BE = AB - AE = AB - CD$ e então $PN = \frac{AB - CD}{2}$.

Logo $MN = MP + \frac{AB - CD}{2} = CD + \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$.

Comentários: espera-se neste item que o aluno identifique corretamente hipótese e tese e que proceda o encadeamento lógico-dedutivo, justificando cada passo de sua demonstração.

4. Resultados e discussões

A distribuição por período letivo em que se encontram os participantes desse estudo pode ser visualizada na tabela a seguir.

Período letivo	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
Número de alunos	4	4	2	8	1	6	7

Tabela 1. Distribuição de alunos por período letivo.

A universidade onde estudam os sujeitos da pesquisa oferece a disciplina de Geometria Euclidiana Plana no 4º período do curso de Licenciatura em Matemática, cuja ementa é: retas, ângulos, círculos, semelhança e congruência; análise dos desdobramentos históricos de alguns conceitos específicos e suas implicações epistemológicas, entre eles, a independência do axioma das paralelas; introdução às Geometrias não–euclidianas: o modelo elíptico e o hiperbólico; caracterizações algébricas dos processos de construção por régua e compasso.

Apesar da ementa parecer satisfatória, a curta duração da disciplina, que dura apenas um período com quatro horas semanais, e as dificuldades em Geometria que os alunos apontam, podendo mesmo ser indicada como uma “falta de intimidade” com os conteúdos estudados pela Geometria que não sejam uma redução numérica ou algébrica de seus temas de estudo tornam o cumprimento desta ementa algo dificilmente atingido.

Portanto, o período letivo não determina necessariamente o contato do aluno com Geometria Euclidiana Plana. A tabela a seguir ilustra isso, mostrando há quanto tempo o aluno já cursou a referida disciplina.

Há quanto tempo concluiu a disciplina?	Ainda não cursou	Um Semestre	Um ano	Mais de um ano
Número de alunos	13	8	1	10
Desempenho no teste abaixo de 50%	10	7	1	7
Desempenho no teste acima de 50%	3	1	0	3

Tabela 2. Tempo de conclusão na disciplina versus desempenho no teste.

Podemos observar também que a correlação entre ter cursado a disciplina e ter um desempenho satisfatório no teste praticamente inexiste: dentre os 32 alunos que participaram deste estudo, em torno de 60% já tinham cursado a disciplina, sendo que os resultados estiveram abaixo dos 50% de aproveitamento para quase 80% desses estudantes.

Analisando as respostas dos alunos segundo a tipologia de Balacheff, encontramos o que pode ser resumido no quadro a seguir.

Questão	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental	Não foi possível determinar	Questão
1	0	0	2	21	9	**1**
2	0	2	0	10	20	**2**
3	0	0	2	16	14	**3**
4	0	0	0	2	30	**4**
5	0	0	1	0	31	**5**

Tabela 3. Distribuição da tipologia de Balacheff.

Esses números nos permitem inferir que os sujeitos da pesquisa apresentam algum conhecimento do significado de uma demonstração em Geometria – o fato de não termos encontrado nenhuma demonstração que pudesse ser enquadrada como empirismo ingênuo e praticamente nenhuma como experiência crucial denota isso. A maioria das demonstrações puderam ser consideradas como experiência mental – entretanto, foram bastante altos, mais frequentes que a experiência mental, exceto na questão 1, as situações em que não foi possível determinar. A impossibilidade de determinação do enquadramento da tipologia de Balacheff deve-se a erros ou ausência de resolução na questão. Destaque-se aqui as questões 4 e 5, em especial.

A primeira questão foi a que apresentou maior índice de demonstrações corretas pelos estudantes: 21 dentre os 32 estudantes apresentaram a demonstração correta, e outros 2 estudantes apresentaram uma validação para a proposição como um exemplo genérico, conforme pode ser visto na imagem que se segue.

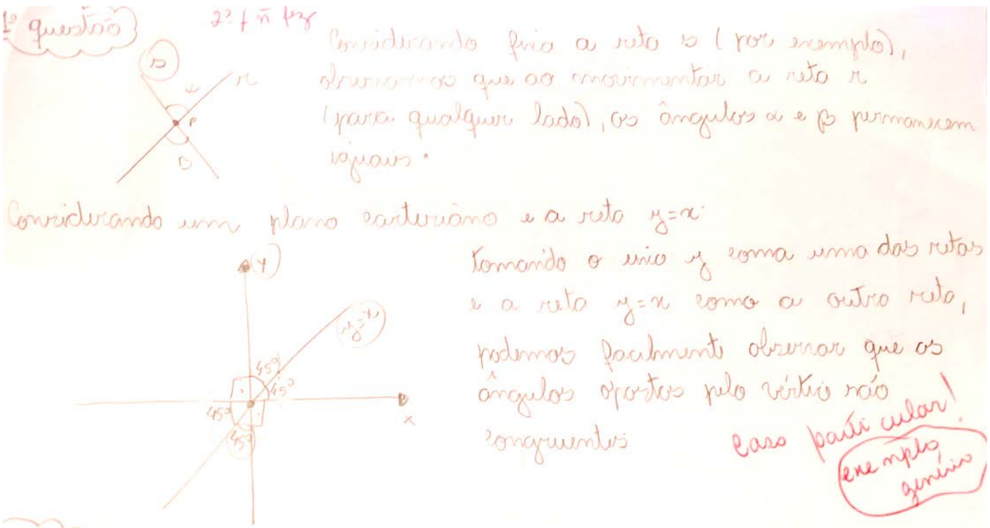


Figura 7: Exemplo de resposta para a questão 1.

O exemplo genérico fica claro nesta situação por apresentar toda a resolução uma linguagem que induz à generalização, mas que a fundamenta em um caso particular, tratando inclusive da equação desta reta numa mudança de quadro para a Geometria Analítica.

A questão 2, que tratava da ida do Teorema de Pitágoras, teve índices altos de erros ou abstenções também. Apenas 10 alunos demonstraram corretamente a proposição, usando a necessária generalização para a proposição. Destaca-se na sequência duas das validações que não podem se enquadrar como experiências mentais:

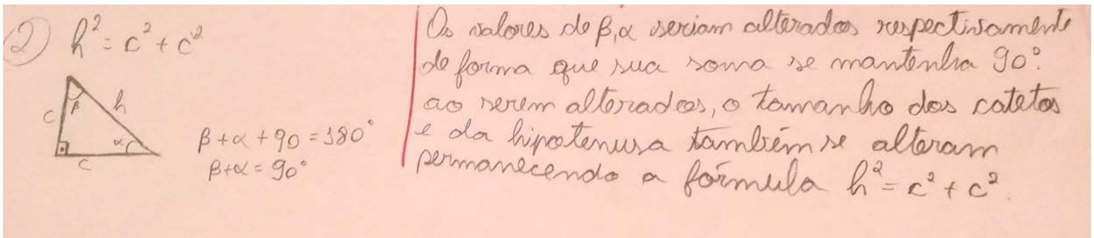


Figura 8: Exemplo de resposta para a questão 2.

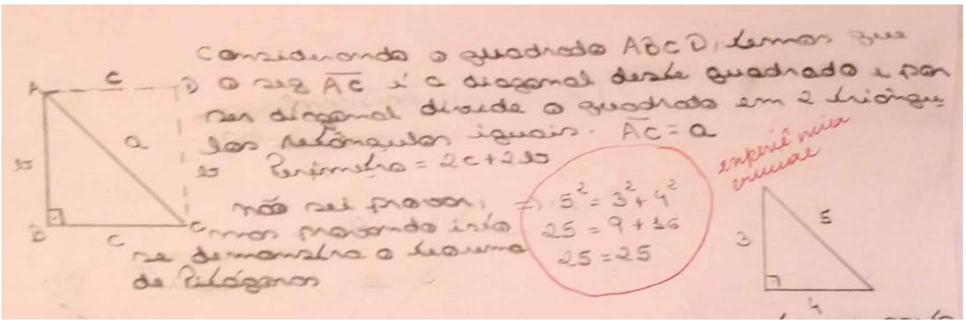


Figura 9: Exemplo de resposta para a questão 2.

Pode-se observar, na figura 8, que o aluno fundamenta-se em vivências provavelmente oriundas da geometria dinâmica, e que este direciona à generalização, entretanto sem ter formalização alguma. A resolução mostrada na figura 9 parte de um quadrado, ou seja, um caso extremamente particular, mas até então não numérico. O aluno reconhece que não sabe provar, mas mostra alguns casos em que sabe que a proposição vale, caracterizando novamente uma experiência crucial por conduzir a uma incipiência de generalização.

O item 3, apesar de frequentemente presente no cotidiano matemático de nossos alunos desde a educação básica, mostrou um perigoso equilíbrio entre as demonstrações corretas e as incorretas. Identificamos ainda duas tentativas de particularização, conforme podemos visualizar a seguir.

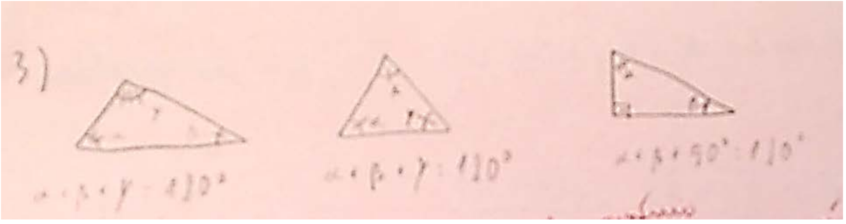


Figura 10. Exemplo de resposta para a questão 3.

É interessante observar que o aluno particularizou os tipos de triângulos, mas sem especificar medidas para os ângulos, apenas analisando as possíveis combinações entre os tipos de ângulos.

A questão 4 tratava da equivalência entre o caráter equilátero e equiângulo em um triângulo. Apesar de ser um assunto bastante familiar para os alunos, onde esta correspondência é facilmente tomada como hipótese, a demonstração não apresentou o mesmo grau de facilidade para os alunos. Os erros que podem ser destacados referem-se (a) à falta da demonstração da volta do teorema, ou seja, mostrar que se o triângulo é equiângulo, então ele é equilátero e (b) tentativas de algebrizar a demonstração que acabaram tomando a tese como hipótese, comprometendo o bom desenvolvimento da demonstração.

A questão 5 foi o que menos tentativas de resolução teve, não tendo também apresentado nenhum acerto integral. Houve uma tentativa de resolução considerando um caso particular do trapézio sendo isósceles:

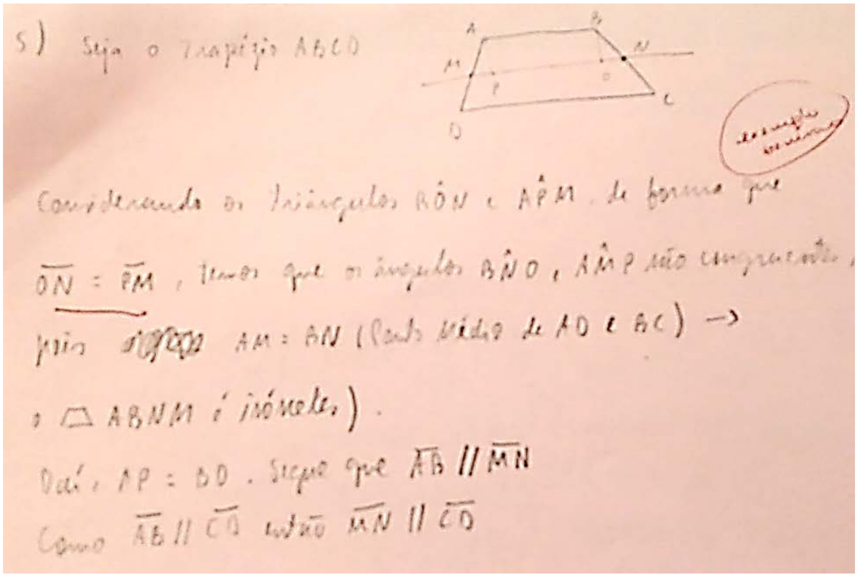


Figura 11. Exemplo de resposta para a questão 5.

Vemos aí uma clara tentativa de trazer a generalização para algum território que possa ser mais controlado pelo aluno, onde possam ser deduzidas propriedades de maneira mais fácil. Esse é um exemplo genérico por considerar um caso particular, mas fazer alusão ao caráter genérico da proposição.

5. Considerações finais

O desenvolvimento deste trabalho foi um momento bastante promissor no sentido de encarar o trabalho docente cotidiano em sala de aula com fonte de pesquisa para o professor. Especialmente no ensino de Geometria, este estudo torna-se particularmente interessante, posto que é uma área em que os alunos apresentam grande dificuldade desde a educação básica, dificuldades que muitas vezes os colocam, mesmo na Universidade, em mesmo nível que um aluno que esteja cursando ainda o Ensino Fundamental.

Uma possível percepção deste trabalho é que a superficialidade dos conhecimentos verdadeiramente geométricos e de pensamento geométrico dos alunos – brevemente professores de matemática da educação básica e, portanto, professores de Geometria – é pouco influenciada pela formação universitária inicial. Infelizmente, os resultados deste trabalho nos permitem inferir que a influência dos estudos matemáticos da Licenciatura para a Geometria, vão mais no sentido de corroborar a necessidade da demonstração, mas sem dar os fundamentos geométricos para isso.

Como demonstrar o Teorema de Pitágoras se os conhecimentos sobre semelhanças de triângulos são rasos? Como tratar da demonstração das propriedades relativas à base média de um trapézio se as ideias sobre quadriláteros, definições e propriedades são insuficientes? Como estabelecer a equivalência entre os triângulos equiláteros e equiângulos se a congruência de triângulos é uma ferramenta pouco conhecida e utilizada pelos alunos?

Conscientes da necessidade da demonstração mas sem aporte geométrico suficiente para isso, estes veem-se inibidos mesmo em tentativas de justificativas, inibindo a progressão aludida por Balacheff como necessária para que seja possível alcançar as provas intelectuais: empirismo ingênuo -> experiência crucial -> exemplo genérico -> experiência mental. É como nascer adulto sem ter aprendido a andar na infância. A ênfase das Análises e Álgebras nas demonstrações como técnica apenas, sem favorecer nem exigir conhecimentos consistentes podem ser bastante perigosas para a formação do futuro professor. O rigor matemático é necessário, lógico – afinal, formam-se matemáticos neste curso, mas a exclusividade para o rigor apresenta-se como um risco ao futuro do ensino de matemática.

Bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. *Anais*... 30ª. Reunião da ANPED. Recuperado el 29 de ebrero de 2016, de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf

Balacheff, N. (1982). *Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques*, 3(3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). *Processus de Preuve et Situations de Validation. Education Studies in Mathematics,*18 (2), 147-176.

Balacheff, N. (2004). *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 109.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Gisela Maria da Fonseca Pinto: Doutoranda em Ensino e História da Matemática e da Física pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. Professora do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Possui pesquisas nas áreas de Educação Matemática Inclusiva, Formação de Professores de Matemática e Tecnologias Digitais em Educação Matemática. E-mail: gmfpinto@gmail.com

Agnaldo da Conceição Esquincalha: Estágio Pós-Doutoral em Educação Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Professor do Mestrado Profissional em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Possui pesquisas nas áreas de Formação de Professores de Matemática, Educação Matemática no Ensino Superior e Tecnologias Digitais em Educação Matemática. E-mail: aesquincalha@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 107-124

¿Qué concepciones favorecen el desarrollo de propuestas en el enfoque sociocultural?: Una experiencia con estudiantes para profesor de la LEBEM[1]

Christian Camilo Fuentes Leal, Julián David Martínez Hernández

Fecha de recepción: 27/02/2015
Fecha de aceptación: 06/06/2016

Resumen	En las últimas décadas el enfoque sociocultural en educación matemática ha generado propuestas de reflexión y transformación de las prácticas pedagógicas. Por esta razón consideramos necesario investigar sobre las concepciones sobre propuestas alternativas en educación matemática, basadas en las características de este enfoque, para esta labor se consultó sobre las concepciones de un grupo de estudiantes para profesor de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital (LEBEM) por medio de una encuesta tipo Likert y la presentación de situaciones abiertas. Posteriormente se elaboró un análisis para buscar algunas interpretaciones y comprensiones sobre las respuestas propuestas por los estudiantes, por medio de esta investigación se pretende determinar el impacto y los aportes del enfoque en la formación de docentes en la licenciatura **Palabras clave**: Enfoque sociocultural; Estudiante para profesor; Concepciones; Actitudes; Encuesta tipo Likert.
Abstract	In the last decades the socio-cultural approach in mathematics education has produced a proposal for reflection and transformation of pedagogical practices, and for that reason we consider a need to research the conceptions alternative proposals in mathematics education that are based on the characteristics of this approach; for this job we consulted a group of undergraduate students in Mathematics at Distrital University (LEBEM) about these conceptions, using a Likert type test and showing open situations. After these tests we analyzed the student´s answers to interpret and understand the situation and through this research hope to determine the impact and contributions of approaches in teacher education at the undergraduate level **Keywords**: Sociocultural approach; Student teacher; Conceptions; Attitudes; Test type Likert
Resumo	Nas últimas décadas, a abordagem sociocultural à educação matemática tem gerado propostas para reflexão e transformação das práticas de ensino. Por esta razão, consideramos que é necessário investigar as

[1] Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

	concepções de propostas alternativas em educação matemática, com base nas características dessa abordagem para este trabalho foi consultado sobre as concepções de um grupo de professores de alunos para a Licenciatura em Educação Básica com ênfase em Matemática Distrito University (LEBEM) através de uma pesquisa do tipo Likert e apresentação de situações abertas. Posteriormente, foi feita uma análise para encontrar algumas interpretações e entendimentos sobre as respostas propostas pelos alunos, por meio desta pesquisa é determinar o impacto e as contribuições da abordagem na formação de professores na licenciatura **Palavras-chave:** abordagem sociocultural; Professor-aluno; Concepções; Atitudes; Levantamento Likert.

1. Introducción

El proyecto curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) pertenece a la facultad de ciencias y educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ésta pertenece a la alcaldía mayor de la ciudad de Bogotá y es de carácter público, el proyecto curricular cuenta con 168 créditos académicos y está enfocada en la formación de profesores de matemáticas que ejercerán la educación básica. La licenciatura y la universidad benefician a estudiantes de los sectores sociales de mayor riesgo socioeconómico de la capital de país, constituyéndose como una fuente de oportunidades y progreso a estudiantes entre 15 a los 25 años.

La licenciatura busca contribuir a la formación de un profesional de la educación matemática comprometido con la construcción y producción de conocimientos en la pedagogía como disciplina fundante, con los saberes disciplinares y de referencia, con el estudio, y con la transformación e innovación de las prácticas educativas y pedagógicas, en el marco de la participación en la construcción de sujetos sociales en las dimensiones del desarrollo humano construidas y validadas por la comunidad de educadores matemáticos, la sociedad y la cultura.

En LEBEM (1999) se presenta el proyecto curricular a partir de cuatro ejes de formación: eje de problemas y pensamiento matemático avanzado, eje de didáctica, eje de práctica docente y eje de contextos profesionales, los cuales responden a unas necesidades de formación integral de los docentes de matemáticas para la educación básica y media, y busca fortalecer los elementos:

- Conceptualización y construcción del conocimiento profesional del profesor de matemáticas
- Contribución a la proyección social y cultural de la profesión del profesor de matemáticas
- Conceptualización y transformación de las prácticas docentes en el área de matemáticas

- Vínculo de los procesos investigativos e innovadores a las prácticas profesionales del profesor de matemáticas.

Al reflexionar sobre los elementos planteados por la licenciatura surgió la propuesta de indagar ¿cómo la formación ofrecida por el proyecto curricular puede aportar a la comprensión del enfoque sociocultural en educación matemática? Para ello se realizó un estudio de las concepciones de un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas.

Se decidió optar por indagar sobre este enfoque pues, éste ha aportado significativamente a la comprensión de las dinámicas escolares y la investigación en educación matemática, trabajos de autores como Bishop (1999, 2005) evidencian algunas implicaciones de la enseñanza de la matemática desde ésta perspectiva, elementos como la presentación de las matemáticas como un elemento socialmente construido, la importancia del contexto sociocultural en el aprendizaje de las matemáticas y la existencia de diferentes manifestaciones del pensamiento matemático en diversos contextos. En este sentido se considera necesario relacionar el impacto del enfoque en los planteamientos mostrados por la licenciatura, con el fin de comprender y establecer relaciones entre éstas.

Se han presentado diferentes propuestas investigativas sobre el estudio de las concepciones de estudiantes para profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, algunos ejemplos están en Gil & Rico (2003) quienes elaboraron un cuestionario cerrado con escala de valoración sobre los juicios de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas, para realizar un estudio descriptivo de las valoraciones de los profesores estableciendo el grado de aceptación de cada una de las categorías establecidas.

Zapata, Blanco & Contreras (2008) realizó una investigación con estudiantes para profesor en Perú, en la cual buscaba identificar las concepciones sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje con el propósito de mejorar el desempeño profesional de los futuros profesores, para esta tarea los autores implementaron una metodología de tipo cualitativa, por medio de una clasificación a priori de las interacciones, aplicaron un cuestionario y una entrevista semiestructurada a un grupo de estudiantes para profesor. Flores (1998) realizó un estudio sobre las concepciones y creencias de estudiantes para profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en España, para esta labor el autor estudió y evaluó diferentes categorías con respecto a la gnoseología del conocimiento matemático, la psicología del acceso al conocimiento matemático y didáctico, los anteriores antecedentes aunque hicieran mayor énfasis en el aspecto cognitivo aportaron a la construcción de un marco de referencia.

Empero el único estudio encontrado sobre las concepciones y actitudes de estudiantes para profesor del enfoque sociocultural en educación matemática ha sido presentado por Blanco-Álvarez (2012), quien llevó a cabo un estudio de las actitudes hacia del enfoque sociocultural en educación matemática en maestros en formación inicial, realizada en el marco del Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona, para esta labor el autor elaboró un cuestionario tipo Likert y unas preguntas abiertas de acuerdo a las categorías establecidas, la metodología fue mixta: cualitativa y cuantitativa, y se analizaron las respuestas presentadas por el grupo de estudiantes.

2. Marco de referencia conceptual

Para la elaboración de un marco de referencia, es necesario presentar algunos elementos que caracterizan el enfoque sociocultural en educación matemática, pues éstos aportes ayudarán a construir las categorías de análisis de la encuesta y las situaciones abiertas, el primer elemento está relacionado con las creencias sobre las matemáticas, con respecto a éste autores como Gascon (2001) muestran que el modelo epistemológico que se tenga de las matemáticas incide sobre las prácticas docentes de los profesores de matemáticas. El enfoque sociocultural supera los planteamientos de escuelas epistemológicas cómo la platónica, logicista, el formalismo y el intuicionismo, y aboga por una perspectiva constructivista social, donde el sujeto es constructor del conocimiento y las matemáticas son un producto social y un constructo cultural. Para este enfoque el conocimiento es construido a partir de interacciones sociales. Esta comprensión, está asociada con teorías, como la del desarrollo, planteada por Vygotsky y Bruner, y la teoría cognitiva social de Albert Bandura. Es decir que esta perspectiva concibe las matemáticas como una actividad socialmente construida, y por lo tanto, práctica, falible y situada, además menciona que estos razonamientos matemáticos varían de acuerdo al lugar y al tiempo, pues diferentes culturas generan formas de validar y construir el conocimiento.

El segundo elemento característico del enfoque es el estudio de la matemática en contextos extraescolares, de acuerdo a los planteamientos de Cubero (2005), un elemento que caracteriza al enfoque sociocultural es la investigación del pensamiento matemático de diferentes comunidades, el cual es uno de los objetivos de la Etnomatemática, la cual se caracteriza como un campo de investigación que impulsa el respeto de la diferencia, a la solidaridad y la cooperación para que cada uno desde sus diferencias pueda apoyar en la construcción de un mundo más justo y más digno para todos, ésta contribuye a la construcción de un diálogo entre diferentes pueblos a través de un aprendizaje en ambos sentidos, además de desmitificar el carácter universal de la matemática, presentándola como una construcción cultural contextualizada.

Un tercer elemento de este enfoque está relacionado con una percepción de la matemática para la vida diaria y el estudio de las interacciones sociales en el aula, este enfoque presenta el aprendizaje de las matemáticas como una herramienta que puede fomentar actitudes reflexivas en los estudiantes y el análisis de diferentes problemáticas sociales Skovsmose (1999), además Planas & Iranzo (2009) muestran la importancia de las interacciones sociales en el aula de clase (el lenguaje, la metodología y la afectividad y género), como elementos significativos para la enseñanza de las matemáticas.

Otro elemento que debe ser presentado en este texto es la idea de concepción, pues éste es el centro de discusión de esta investigación, para autores como Ernest (2005) concepción se define como un sistema organizado de creencias, las cuales pueden transformarse continuamente de acuerdo a experiencias e interacciones. El autor al plantear el constructivismo social como una filosofía de las matemáticas lo cual concuerda con muchos planteamientos del enfoque sociocultural en educación matemática, entre ellos considerar la matemática es una construcción social, un producto cultural, y falible como cualquier otra rama del saber. Este punto de vista presenta los orígenes sociales o culturales de las matemáticas, además de presentar el conocimiento matemático a partir de un fundamento cuasi-empírico. Es decir, desde el enfoque sociocultural en educación matemática una concepción es un sistema de creencias producto de experiencias interacciones sociales la cual puede mudar y complejizarse constantemente.

3. Metodología

La presente propuesta consistió en la aplicación de una encuesta tipo Likert[2] y tres situaciones abiertas a 50 estudiantes activos en la LEBEM. Para seleccionar la muestra significativa se escogió a 5 estudiantes de cada semestre. Los estudiantes de cada semestre fueron escogidos de manera aleatoria y dieron su consentimiento para participar en la encuesta; la escala tipo Likert es una escala psicométrica utilizada en cuestionarios, en éste se presenta el nivel de acuerdo o desacuerdo con una frase.

Es importante mencionar que el instrumento implementado3 fue una adaptación de la propuesta hecha por Blanco-Álvarez (2012), en la cual se acoplaron las situaciones para el contexto social y cultural Colombiano, el instrumento inicial fue validado y piloteado por el autor; además cada una de las situaciones diseñadas estaban relacionadas con una característica del enfoque sociocultural, las categorías propuestas son: mediaciones e interacciones en el aula, creencias sobre las matemáticas, matemáticas en contextos extraescolares, matemáticas no occidentales, y matemática crítica las cuales serán caracterizadas posteriormente.

La adaptación del instrumento tipo Likert y las situaciones abiertas de igual forma fueron socializadas y validadas por diferentes pares académicos en Colombia quienes hicieron comentarios y precisiones a las situaciones propuestas. El instrumento constó de 22 frases diseñadas para medir el nivel de acuerdo o desacuerdo con las concepciones generales del enfoque sociocultural en educación matemática, a partir de cinco grandes categorías por las cuales se caracteriza el enfoque sociocultural en educación matemática, con base a las características del enfoque enunciadas en el marco teórico se establecieron las siguientes categorías de análisis.

---

[2]Véase el anexo del instrumento utilizado
[3] Véase anexo 2, en el cual se presenta el instrumento utilizado por el autor.

La primera categoría está relacionada con la importancia que le da el enfoque a aspectos como la afectividad, el lenguaje, el género y la metodología en el proceso de aprendizaje de las matemáticas (situaciones 13, 15, 16, 17,18), el enfoque concibe las matemáticas como más allá del racionalismo, cree que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es complejo en el cual intervienen la afectividad, el uso del lenguaje y las metodologías usadas por el docente.

La segunda categoría plantea que las matemáticas son un producto cultural y una construcción social (situaciones 1, 7, 8, 19, 22), esos elementos son planteamientos filosóficos que también son característicos del enfoque sociocultural. La tercera propone las matemáticas como un constructo que también existe en ambientes extraescolares (situaciones 2, 3, 4, 5, 10, 21), este elemento también diferencia el enfoque sociocultural de otros enfoques, pues valoriza las construcciones y aprendizajes tenidos por los sujetos en ambientes alternativos a la escuela.

La cuarta propone que los diferentes pueblos a lo largo de la historia han generado matemáticas propias (situaciones 6, 9, 11, 12), esta postura valida los conocimientos de otros pueblos además de aceptar y respetar misiones de mundo diferentes a la creada por occidente, elemento que diferencia este enfoque con otros en educación matemática.

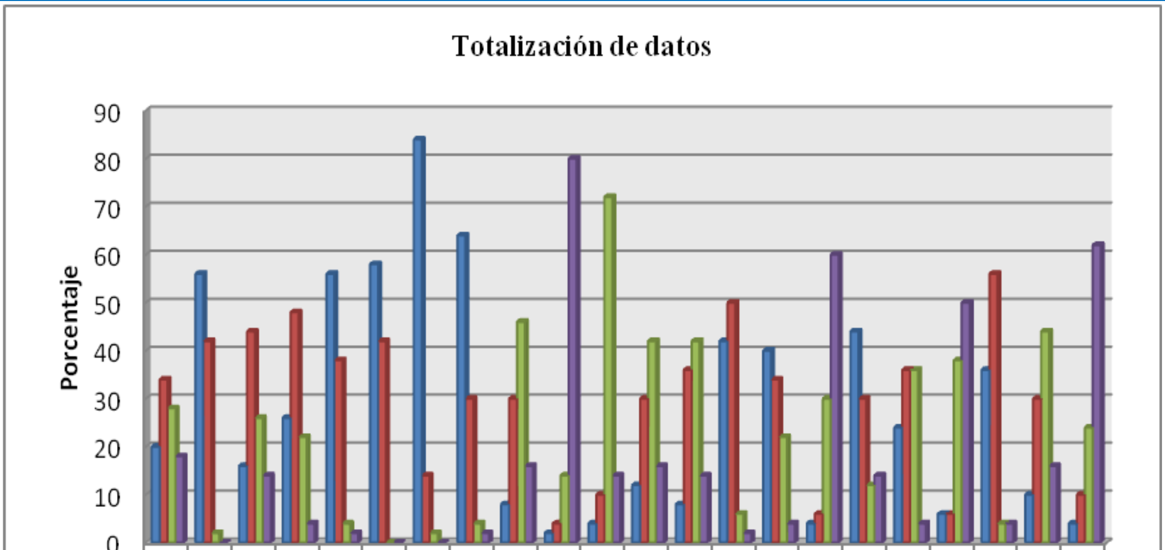
Finalmente la quinta categoría propone que las matemáticas pueden promover actitudes reflexivas sobre las problemáticas sociales (situaciones 14, 20), algunos enfoques presentan las matemáticas desde un punto de vista meramente tecnicista y mecánico, para el enfoque sociocultural es de vital importancia darle sentido y una función social y político al conocimiento, ya sea para reconstruir la historia de pueblos que han sido colonizados o aculturiozados o para generar conciencia en el cambio de realidades sociales, este elemento constituye otra característica a indagar sobre el enfoque.

De igual forma de la encuesta, se propusieron tres situaciones abiertas diseñadas para evaluar la acción de los estudiantes ante contextos en los cuales el enfoque sociocultural puede aportar en sus prácticas pedagógicas, éstas se pueden observar en los anexos del documento. La metodología de análisis de la información recolectada se caracterizó por la utilización de la información recolectada en la encuesta tipo Likert y las respuestas de las situaciones abiertas a 50 estudiantes activos de todos los 10 semestres de la LEBEM. En el primer instrumento se agrupó las preguntas en las categorías anteriormente mencionadas, para posteriormente ser interpretadas y analizadas. Con respecto al segundo instrumento se organizó una matriz de triangulación en la cual se presentaban las respuestas de los estudiantes ante las situaciones abiertas, teniendo en cuenta las categorías de análisis presentadas con anterioridad, dicho análisis es presentado en la tabla 2.

4. Análisis

A continuación se presentará la tabulación y representación gráfica de los datos recolectados en la encuesta tipo Likert de cada una de las 22 frases presentadas a los estudiantes para profesor de la LEBEM, cada uno de los colores representa una categoría de análisis diferente, el color azul representa la categoría creencias sobre las matemáticas, el color verde representa la categoría matemática crítica, el rosa simboliza la categoría mediaciones e interacciones en el aula, el rojo representa la categoría matemáticas en contextos extraescolares y el color blanco representa la categoría matemáticas no occidentales, las casillas marcadas con color amarillo representan la respuesta en la cual hubo mayor cantidad de selecciones.

Con base en la tabulación de estos datos se elaboró una gráfica de barras en la cual se puede observar porcentualmente los niveles de aceptación de cada una de las 22 frases presentadas a los estudiantes, la cual se presenta a continuación en la gráfica 1.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
TA	20	56	16	26	56	58	84	64	8	2	4	12	8	42	40	4	44	24	6	36	10	4
A	34	42	44	48	38	42	14	30	30	4	10	30	36	50	34	6	30	36	6	56	30	10
D	28	2	26	22	4	0	2	4	46	14	72	42	42	6	22	30	12	36	38	4	44	24
TD	18	0	14	4	2	0	0	2	16	80	14	16	14	2	4	60	14	4	50	4	16	62

Gráfica 1. Totalización de las 22 afirmaciones propuestas.

Una de las primeras características observadas en esta representación, son acuerdos en algunas concepciones de las matemáticas, por ejemplo el 84% de la población encuestada está totalmente de acuerdo con la creencia que las matemáticas, el lenguaje y la música forman parte de la cultura; el 80% de la población está en total desacuerdo que fuera de la escuela no se aprenden matemáticas. Sin embargo es necesario establecer un análisis por cada una de las categorías, por lo cual se presentará en la tabla 1 la totalidad de los datos en cada una de las categorías.

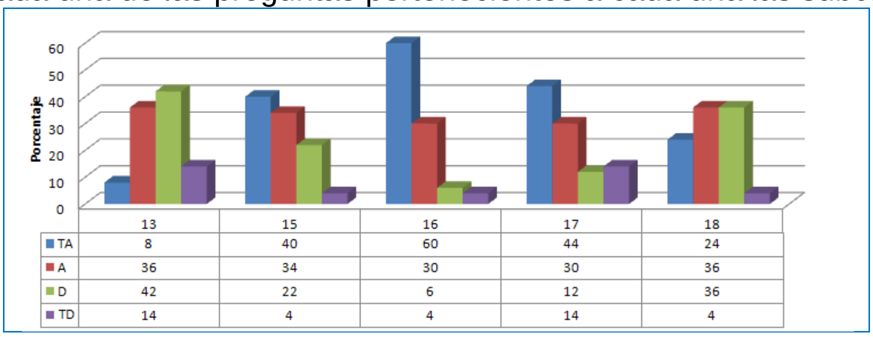
Categoría		Resultados (%)			
		TA	A	D	TD
1	Mediaciones e interacciones en el aula (frases 13, 15, 16,17,18)	35.2	33.2	23.6	8
2	Creencias sobre las matemáticas (frases 1,7,8,19,22)	56.5	27	11	6.4
3	Matemáticas en contextos extraescolares (frases 2,3,4,5,10,21)	40.7	36	17	6.3
4	Matemáticas no occidentales (frases 6,9,11,12)	26	51	18	6
5	Matemática crítica (frases 14,20)	39	53	5	3

Tabla 1. Categorización de los datos

En esta tabla se pueden identificar algunas tendencias de los estudiantes encuestados, sin embargo en necesario presentar e interpretar los resultados encontrados en las frases por cada categoría, a continuación se mostrarán los resultados encontrados.

4.1 Categoría1: Interacciones en el aula

Esta es una de las categorías más amplias del enfoque sociocultural, pues está integrada por diferentes subcategorías (género, afectividad, lenguaje y metodología), en aspectos generales se puede analizar que el 68% de la población cree que son importantes las interacciones en el aula de clase, sin embargo es necesario establecer una análisis por cada una de las subcategorías presentes en la encuesta tipo Likert, a continuación en la gráfica 2 se representará un diagrama de barras de cada una de las preguntas pertenecientes a cada una las subcategorías.



Grafica 2. Totalización de la categoría1

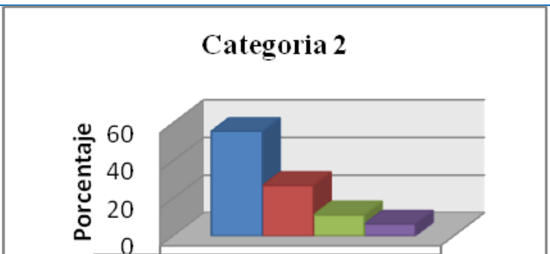
Con respecto a la subcategoría, Género, presente en la frase número 16 se destaca un 10% que cree que el género influye en el proceso de resolución de situaciones matemáticas, pues están de acuerdo o totalmente de acuerdo con esta frase; la categoría de Afectividad, presente en las frases 15 y 17 presenta un 74% de aceptación de la importancia y el condicionamiento de la afectividad en el aprendizaje de las matemáticas, en la subcategoría Lenguaje expuesta en la frase 13 se visualiza una polarización de las opiniones (44% vs 56%); sin embargo se puede inferir que el lenguaje como mediador en el aula es aceptado como un factor influyente en los procesos de aprendizaje.

Finalmente con respecto a la sub-categoría Metodología, presente en la frase 18, se presentó un empate en puntos medios (acuerdo - desacuerdo) de donde se puede inferir que para los estudiantes la metodología no es el principal factor determinante de los aprendizajes en matemáticas; por otro lado, en esa misma categoría la cuarta parte de los encuestados caracterizan a la metodología como el factor más importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta subcategorías muestra la complejidad con la que comprende el enfoque sociocultural en educación matemática la enseñanza de las matemáticas, pues concibe que en este proceso intervienen procesos de lingüísticos, culturales y afectivos, característica que lo diferencia de enfoques cognitivos, de acuerdo a los datos encontrados se pudo observar que la gran mayoría de estudiantes de LEBEM reconocen y están de acuerdo con los planteamientos del enfoque.

4.2 Categoría 2. Creencias sobre las matemáticas

En esta categoría está presente en las frases 1, 7, 8, 19, 22, en la cual se pudo identificar que el 83% de la población encuestada está de acuerdo con la idea que la matemática es un producto cultural y una construcción social, sin embargo es necesario mencionar que aunque la mayoría de estudiantes presentan concepciones afines con el enfoque, en la afirmación 1 se presenta polarización, en la cual se presenta la matemática como ciencia exacta, universal y descontextualizada. A continuación se presentará la gráfica 3 que representa la distribución de las respuestas en esta categoría.

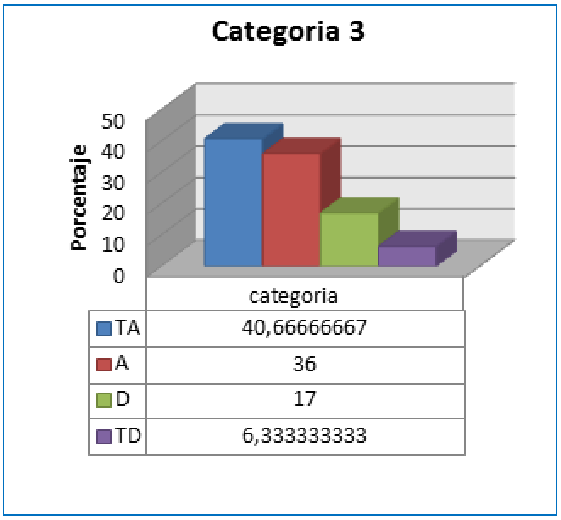


TA	55,6
A	26,8
D	11,2
TD	6,4

Gráfica 3. Totalización de la categoría 2

4.3 Categoría 3. Matemáticas en contextos extraescolares

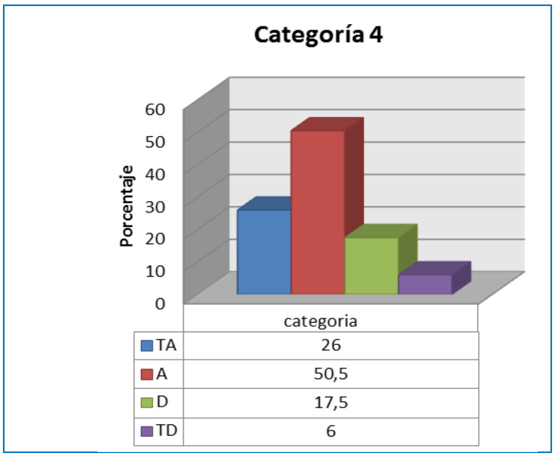
En esta categoría están presentes las frases 2, 3, 4, 5, 10, 21, en la gráfica 4 puede ser observada la totalidad de los datos recolectados. Se pudo concluir que el 76% de la población estudiada está de acuerdo con la idea que la matemática también existe en ambientes extraescolares, la mayoría de la población está de acuerdo que las matemáticas no se presentan únicamente en el contexto escolar, el cual es un elemento afín con los planteamientos del enfoque sociocultural.



Gráfica 4. Totalización de la categoría 3

4.4 Categoría 4. Matemáticas no occidentales

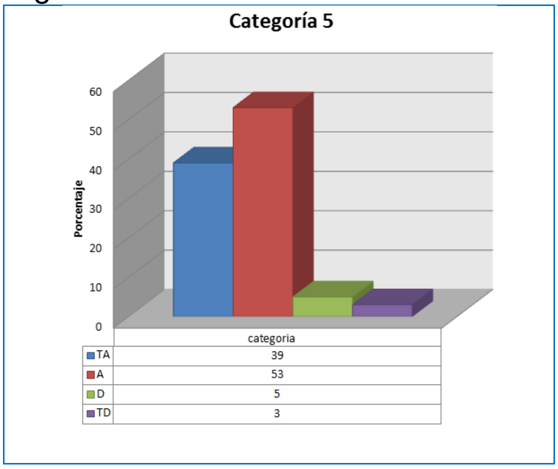
De acuerdo a la información recolectada se pudo evidenciar que el 77% de la población está de acuerdo con la idea de que diferentes pueblos a lo largo de la historia han generado matemáticas propias, al analizar esta categoría en específico, se encontró la necesidad de profundizar en términos que para los encuestados resultan ambiguos, como el caso de los conceptos de formalidad y validez en matemáticas, pues aun cuando no se solicitó ahondar en cada ítem, los encuestados solicitaron información adicional para poder expresar su nivel de acuerdo con dichas situaciones. A continuación en la gráfica 5 se presentará los resultados obtenidos de esta categoría a la cual pertenecen las frases 6, 9, 11 y 12 y predomina las opciones totalmente de acuerdo y de acuerdo.



Gráfica 5. Totalización de la categoría 4

4.5 Categoría 5. Matemática crítica

Esta categoría está inmersa en las frases 14 y 20, se pudo observar que el 92% de la población encuestada está de acuerdo con la idea que las matemáticas pueden promover actitudes reflexivas sobre las problemáticas sociales, las dos preguntas de esta categoría presentaban sólo una aproximación inicial del enfoque crítico, sin embargo la gran mayoría de la población siente afinidad sobre la perspectiva del análisis de situaciones cotidianas a través del pensamiento matemático. A continuación se presentará la gráfica 6 que representa la totalización de los datos en esta categoría.



Gráfica 6. Totalización de la categoría 5

Una vez caracterizados los resultados de cada una de las categorías de análisis por medio de la encuesta tipo Likert, es necesario confrontarlo y complementarlo con las propuestas de los estudiantes encuestados en las situaciones abiertas, estableciéndolas como una forma de validación de la información recolectada. A continuación se presentará la tabla 2 donde se presentan las respuestas de los estudiantes consultados ante las tres situaciones en cada uno de los diez semestres de la licenciatura.

Semestre	Situación abierta 1: Categorías 2, 3, 4, 5.	Situación abierta 2: Categorías 2, 3, 4.	Situación abierta 3: Categorías 1, 2, 3, 4.
1	Los estudiantes concuerdan en tener en cuenta los conocimientos previos, los recursos de la institución y mencionan la didáctica cómo articulador del currículo y sólo 2 estudiantes consideran necesarios elementos de la cultura como el idioma y el contexto social.	Todos los estudiantes están de acuerdo que los conocimientos extraescolares pueden ser un apoyo en el aprendizaje, pues refuerza elementos de la teoría.	La mayoría de los estudiantes piensan que las vivencias experimentadas son una parte fundamental de la acción en el aula, sin embargo un estudiante comentó que no estaba de acuerdo sin argumentar su respuesta.
2	Persiste la importancia de los recursos para un diseño curricular, se mencionan características geográficas y culturales que deberían incluirse en el currículo, un estudiante comenta la construcción de una lengua	Los estudiantes mencionan que la formación de los padres favorece la compresión de la realidad en los niños, pues sus oficios utilizan indirectamente la matemática.	En esta categoría los estudiantes consideran que las vivencias pueden expresarse en lenguaje matemático.

Semestre	Situación abierta 1: Categorías 2, 3, 4, 5.	Situación abierta 2: Categorías 2, 3, 4.	Situación abierta 3: Categorías 1, 2, 3, 4.
	matemática propia.		
3	En este espacio presentan la importancia de la ubicación geográfica, los recursos de la institución, las matemáticas de la cultura y las edades de los estudiantes de la institución.	Aceptan que en los oficios de los padres de familia hay matemática informal, las cuales ayudan a comprender la matemática en situaciones cotidianas.	Los estudiantes consideran que el relacionar las experiencias vividas con los conceptos matemáticos elementales, de estos elementos surgen un aprendizaje significativo.
4	Consideran importante la cultura, el medio que los rodea y la idiosincrasia, las políticas educativas del país (lineamientos y estándares curriculares), el lugar y las formas de desenvolverse en éste.	Los estudiantes consideran que los conocimientos extraescolares de los padres son una posible aplicación de los conceptos aprendidos en clase.	Creen que no estar escolariza no implica la existencia de un conocimiento matemático, sin embargo consideras que es necesario que existan procesos de formalización de los conceptos.
5	Referentes legales, teóricos, del contexto social, cultural y económico, recursos didácticos población y sus necesidades de las comunidades.	Los conocimientos de los padres influencian el aprendizaje de sus hijos, además reconocen en los padres la existencia de un conocimiento matemático que pueda ayudar a sus hijos.	Las vivencias en entornos extraescolares son insumos para la creación de situaciones problema que pueden generar aprendizajes.
6	Los estudiantes consideran elementos importantes para la construcción curricular la lengua, las creencias, el territorio, las necesidades, de la población, la concepción de educación.	Consideran la matemática extraescolar como una ejemplificación de la matemática aplicada.	Con respecto a estos elementos los estudiantes consideran que los niños en situación de analfabetismo pueden hacer matemáticas, sim embargo necesitan un lenguaje común que es adquirido en la escuela.
7	Consideras importantes tener en cuenta características como el idioma, priorizando la lengua materna, el entorno físico y las necesidades de las comunidades.	Consideran que el grado de apoyo de los padres al conocimiento de sus hijos, varía de acuerdo al nivel escolar, algunos mencionan que en este proceso puede generarse un proceso de transposición didáctica entre padre e hijo.	Invitan a la utilización de material manipulativo tangible, orientación del docente para superar las dificultades ante el desconocimiento de la lengua escrita.
8	Presentan como elementos significativos las interpretaciones de la matemática en esa cultura, el contexto político y social, necesidades del resguardo.	Existe una relación entre los conocimientos de los padres y lo enseñando en la escuela, además consideran que esta relación apoyo es mutua es decir desde saberes extraescolares hacia la escuela y viceversa.	Algunos estudiantes proponen escolarizarlos como un primer elemento, para posteriormente involucrar las vivencias del estudiante para el aprendizaje de las matemáticas.
	Algunos elementos presentados por los	Los conocimientos de los padres pueden ser un	La mayoría de los estudiantes de este nivel

Semestre	Situación abierta 1: Categorías 2, 3, 4, 5.	Situación abierta 2: Categorías 2, 3, 4.	Situación abierta 3: Categorías 1, 2, 3, 4.
9	estudiantes están relacionados con las actividades que hacen parte de la vida cotidiana del grupo, tradiciones, actividades económicas, propuesta curricular actual, aspectos culturales como lenguaje.	apoyo en el aprendizaje de las matemáticas escolares siempre y cuando exista una interacción constante entre los padres los niños y el docente, y el docente debe involucrar estos contextos extraescolares en el aula.	proponen que las experiencias vivida por los estudiantes pueden ser insumos para situaciones fundamentales, además una estudiante menciona que llevar esta propuesta pude ser conflictivo.
10	Presenta como elementos a tener en cuenta matemáticas propias, necesidades e intereses de la comunidad, enfoque curricular, tipo de población, contexto social y económico, recursos teóricos y didácticos, costumbre y prácticas sociales.	Consideran que los conocimientos de los padres son limitados con respecto a conceptos trabajados en la escuela, consideran que la educación so sólo se da en el aula de clase.	Considerar} que cada una de la experiencia de la vida proporción enseñanzas, la mayoría de estos casos deja una enseñanza matemática, en general los estudiantes están de acuerdo que si se podría realizar operaciones aritméticas personas desescolarizadas.

Tabla 2. Respuestas de situaciones abiertas dadas por los estudiantes de LEBEM y su relación con las categorías de análisis

En estas respuestas dadas por los estudiantes se pudo identificar algunos elementos relacionados con lo evidenciado en la encuesta tipo Likert, como la importancia de aspectos sociales y culturales (lengua, cultura, contexto social, las creencias, el territorio y necesidades de la población) para la elaboración de una propuesta curricular en matemáticas. De acuerdo a la información recolectada en la anterior tabla los estudiantes de la licenciatura aceptan la existencia de conocimientos matemáticos en espacios extraescolares y proponen que estos conocimientos sean complementarios y enriquezcan mutuamente la teoría vista en la escuela. De igual forma consideran que las vivencias experimentadas son una parte fundamental de la acción en el aula, por lo cual las vivencias en espacios extraescolares pueden enriquecer procesos de aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Sin embargo en los argumentos presentados por los estudiantes para profesor se observa el uso de conceptos como, situación fundamental y transposición didáctica, típicos de la propuesta de la didáctica francesa, la cual se presenta como una teoría de referencia para algunos estudiantes de la licenciatura.

La propuesta francesa se distancia en algunos elementos del enfoque sociocultural, por ejemplo el énfasis que se hace en las representaciones semióticas, la creencia de la neutralidad de las matemáticas y la creencia de la superioridad de la matemática académica sobre la matemática extraescolar son elementos que hacen que estas dos propuestas tomen distancia, en las respuestas de los estudiantes se pudo observar que aunque utilizan elementos del discurso de la didáctica francesa para justificar planteamientos del enfoque sociocultural.

5. Conclusiones

Con base en la relación entre la información recolectada en la encuesta tipo Likert y las situaciones abiertas se pudieron identificar los siguientes elementos:

- De acuerdo a los antecedentes y el marco teórico consultado se considera que las categorías planteadas en el análisis realmente recogen los fundamentos del enfoque sociocultural en educación matemática, por lo cual consideramos que el instrumento es una herramienta útil en la identificación de concepciones afines con el mismo, pues éste implicó este muestra las categorías conceptuales del enfoque sociocultural demás de presentar un contraste de información entre la encuesta tipo Likert y situaciones abiertas.

- Los estudiantes de la LEBEM presentaron tanto en la encuesta tipo Likert como en las situaciones abiertas concepciones afines en cada una de las cinco categorías de teóricas del enfoque sociocultural, aunque al proponer y argumentar soluciones a situaciones específicas recurren a planteamientos ajenos al enfoque.

- Consideramos que la estructura curricular de LEBEM (ejes de formación) y en general la formación de profesores de matemáticas brindada por el proyecto curricular, aportó y permitió que sus estudiantes reflejen concepciones favorables hacia el enfoque sociocultural en educación matemática, pues la gran mayoría de sus estudiantes hacían referencia a situaciones, temáticas y áreas de formación del proyecto curricular para justificar sus respuestas en las situaciones abiertas. De igual forma se considera que es necesario que los aportes del enfoque a la formación de docentes en LEBEM sea más evidente en la estructura con el fin de dotar de herramientas y argumentos teóricos y metodológicos a los estudiantes.

- Con respecto a la metodología se considera que la escala Likert complementada con situaciones abiertas puede ser un instrumento que aporta elementos significativos para la caracterización de las diversas concepciones de un grupo de estudiantes respecto al enfoque sociocultural; sin embargo es necesaria la implementación de otro tipo de instrumentos pueda realmente identificar y describir las actitudes del grupo de estudiantes con respecto al enfoque, pues éstas creencias sólo pueden formar parte del discurso del estudiante para profesor y no las podría utilizarlas en su práctica pedagógica en el aula de matemáticas.

- Consideramos que toda investigación debe establecer una metodología de validación de los instrumentos empleados, para ello acudimos a la socialización a diferentes pares académicos de las contextualizaciones geográficas y culturales, la estructura, las situaciones y las categorías presentadas en los instrumentos.

- El análisis de información recolectada en función de las categorías evidenció la necesidad de realizar un estudio que ahonde sobre las concepciones y las actitudes de profesores en formación con respecto a cómo estas se llevan o no al aula de clase; además de establecer como las interacciones sociales en el aula y las matemáticas en contextos extraescolares inciden en el aula de clase, pues en estas subcategorías se presentaron una mayor diversidad de opiniones presentadas en las situaciones abiertas.

Anexo 1- Instrumento aplicado a los estudiantes de LEBEM

El siguiente cuestionario un instrumento de análisis sobre características de profesores en formación, favor contestar las siguientes preguntas. La información aquí recolectada no será usada en ningún medio diferente del académico.

Nombre: **Edad:** **Email:**
Universidad: **Semestre:** **Proyecto Curricular:**

Para cada afirmación, marque con una x si usted está: Totalmente de acuerdo (TA); De acuerdo (A); En desacuerdo (D); Totalmente en desacuerdo (TD).

		TA	**A**	**D**	**TD**
1	Las matemáticas con una ciencia exacta, son las mismas en todo el mundo y preestablecidas				
2	Los objetos artesanales (cestos, vasijas, mantas, mochilas, sombreros) de departamentos colombianos como Boyacá, Córdoba, Amazonas y Guajira, presentan figuras como cuadrados, círculos, triángulos, y en estos se encuentran nociones de geometría.				
3	Para la elaboración de cestos, sobreros, mochilas y mantas en telares se necesitan nociones de geometría.				
4	Son adecuados los patrones de medida como el pie y el palmo que muchos albañiles y carpinteros utilizan en su trabajo.				
5	No es necesario que una persona sepa leer ni escribir, para que pueda realizar cálculos mentales como sumas y restas.				
6	Los incas en Sudamérica, los mayas en Centroamérica, los yoruba en África y los árabes en Irak crearon cada uno sus propios sistemas de numeración. De esta misma manera cualquier grupo cultural en el mundo puede desarrollar su propio sistema de numeración.				
7	Las matemáticas, el lenguaje, la música forman parte de la cultura.				
8	Las matemáticas son creadas por el hombre y éstas responden a las necesidades particulares de una sociedad a lo largo de su historia.				

9	Las tribus indígenas, los campesinos, artesanos y analfabetas carecen de nociones matemáticas formales.				
10	Fuera de la escuela no se aprenden matemáticas.				
11	Hay comunidades indígenas en la Amazonía brasilera que tienen palabras en su lengua local para contar solo hasta tres, después dicen muchos. Esto se debe a falta de educación escolar.				
12	Existen comunidades que relacionan el número cinco con la mano, entonces para decir diez, dicen dos manos. Esta es una forma muy precaria de simbolizar los números.				
13	Muchos estudiantes indígenas e inmigrantes tienen mal rendimiento en matemáticas porque tienen problemas para entender el español.				
14	Dominar e interpretar información estadística puede fomentar actitudes reflexivas en los estudiantes.				
15	Si mis compañeros de clase de matemáticas me dicen que soy bueno en esta materia, esto influye en mi rendimiento académico.				
16	El género influye en la resolución de situaciones en matemáticas.				
17	Las creencias y sentimientos sobre las matemáticas afectan el aprendizaje de éstas.				
18	Cuando hay una buena metodología por parte del profesor, se garantiza el aprendizaje de los estudiantes				
19	Las matemáticas y las ciencias sociales no se relacionan.				
20	Las matemáticas son una herramienta eficaz para analizar problemáticas sociales actuales.				
21	Los conocimientos escolares son más refinados y universales que los conocimientos populares o extraescolares.				
22	No es necesario conocer el contexto social de los estudiantes para enseñar matemáticas, las matemáticas siempre serán iguales en cualquier contexto.				

Situaciones abiertas

Situación A: Eres el profesor de matemáticas y te han contratado para elaborar el diseño curricular del área de matemáticas para un resguardo indígena en el departamento del Amazonas, ¿Qué elementos tendrías en cuenta para elaborar dicho diseño?, ¿por qué?

Situación B: Eres el profesor de un grupo de estudiantes que son hijos de obreros, costureras, artesanos y comerciantes ¿crees que los conocimientos de sus padres puedan ayudar a sus hijos para aprender las matemáticas?, en caso de ser afirmativa tu respuesta ¿cómo crees que los conocimientos de los padres podrían ayudar para la enseñanza de las matemáticas?

Situación C: Trabajas para en una fundación de rehabilitación de niños habitantes de la calle y niños trabajadores, teniendo en cuenta que éstas personas son analfabetas ¿crees que los niños podrían resolver problemas aritméticos?, en caso de ser afirmativa tu respuesta ¿las experiencias vividas por los niños podrían ser usados en la resolución de problemas matemáticos en la escuela?, ¿cómo utilizarías las experiencias vividas por los niños para enseñar las matemáticas?

Anexo 2 –Instrumento usado por Blanco-Álvarez (2012)

1	Las mujeres africanas que tejen figuras como cuadrados, círculos, triángulos, etc. en los cestos o en la ropa tienen nociones de geometría.	TA	A	D	TD
2	Son adecuados los patrones de medida como el pie y el palmo que muchos albañiles y carpinteros utilizan en su trabajo	TA	A	D	TD
3	No es necesario que una persona sepa leer ni escribir, para que pueda realizar cálculos mentales como sumas y restas.	TA	A	D	TD
4	Los incas en Sudamérica, los mayas en Centroamérica, los yoruba en África y los árabes en Irak crearon cada uno sus propios sistemas de numeración. De esta misma manera cualquier grupo cultural en el mundo puede desarrollar su propio sistema de numeración.	TA	A	D	TD
5	Las matemáticas, el lenguaje, la música, etc., forman parte de la cultura.	TA	A	D	TD
6	Las matemáticas son creadas por el hombre y responde a las necesidades particulares de una sociedad a lo largo de su historia.	TA	A	D	TD
7	Las tribus africanas carecen de nociones matemáticas.	TA	A	D	TD
8	Fuera de la escuela no se aprenden matemáticas	TA	A	D	TD
9	Hay comunidades indígenas en la Amazonía brasilera que tienen palabras en su lengua local para contar solo hasta tres, después dicen muchos. Esto se debe a falta de educación escolar.	TA	A	D	TD
10	Existen comunidades que relacionan el número cinco con la mano, entonces para decir diez, dicen dos manos. Esta es una forma muy precaria de simbolizar los números.	TA	A	D	TD
11	Muchos estudiantes pakistaníes, turcos, o marroquíes tienen mal rendimiento en matemáticas porque tienen problemas para entender el catalán.	TA	A	D	TD
12	Para formar estudiantes críticos es importante que los alumnos dominen la estadística	TA	A	D	TD
13	Si mis compañeros de clase de matemáticas me dicen que soy bueno en esta materia, esto influye en mi rendimiento académico.	TA	A	D	TD
14	No importa ser niña o niño para ser bueno en matemáticas.	TA	A	D	TD
15	Las creencias y sentimientos hacia las matemáticas afectan su aprendizaje.	TA	A	D	TD
16	El aprendizaje de las matemáticas se debe sólo a una buena metodología utilizada por el profesor.	TA	A	D	TD
17	Las matemáticas y las ciencias sociales no se relacionan.	TA	A	D	TD
18	Las matemáticas son una herramienta útil para entender los problemas sociales actuales.	TA	A	D	TD

Bibliografía

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática.* Barcelona: Paidós.

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Santiago de Cali: Universidad del valle.

Blanco-Alvarez, H. (2012). Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la educación matemática en maestros en formación inicial. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 1 (1), 57-78.

Cubero, R. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en psicología Latinoamericana, 23*, 43-61.

Ernest, P. (2005) *The impact of beliefs on the teaching of mathematics*. Recuperado de: http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Universidad de Granada: Comares.

Gil, F., & Rico, L. (2003). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. evolución durante las prácticas de enseñanza. *Revista enseñanza de las ciencias*, 21(1), 27-47.

Gascon, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista latinoamericana de investigación educativa,* 6 (2), 129-160.

Monguilod, C., & Martinez, L. (2004). Naturaleza y organización de las actitudes. En T. Ibañez (Ed), *Introducción a la psicología social*, 183-256. Barcelona, España: UOC.

LEBEM (1999) *Documentos de acreditación previa.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Planas, N., & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación. *Revista latinoamericana de investigación educativa,* 12 (2), 179-213.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Zapata, M.; Blanco, L., & Contreras, L. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. *REIFOP*, 12 (4), 109-122.

Fuentes Leal Christian Camilo**: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Coordinador por Colombia de la Red Latinoamericana de Etnomatemática, Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Magíster en Educación en la línea de Educación Matemática ccfuentesl@udistrital.edu.co**

Martínez Hernández Julián David: **Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas jdmartinezh@unal.edu.co**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 125-138

¿Cómo abordar la diversidad en el aula de matemáticas?: algunas necesidades de formación de un grupo de docentes del distrito capital, en Colombia.

Christian Camilo Fuentes, Aura Viviana Acero, Liceth Andrea Casallas, Claudia Patricia Acosta, Brianna Lorena Diaz

Fecha de recepción: 08/03/2016
Fecha de aceptación: 05/06/2016

Resumen	En el marco de las actividades del semillero de Etnomatemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, se propuso como tema de discusión e investigación el abordaje de la diversidad en el aula de matemáticas, en este proceso se buscaron marcos de referencia que pudieran ayudar a identificar algunas directrices o lineamientos, posteriormente se propuso buscar las concepciones de un grupo de profesores sobre esta temática, para esto se diseñaron, implementaron y analizaron, una encuesta tipo Likert y una entrevista semiestructurada a un grupo de profesores de dos colegios de carácter público de la ciudad de Bogotá. **Palabras clave**: Investigación cualitativa, Diversidad, Estudio de caso, Concepciones, Encuesta tipo Likert.
Abstract	As part of the activities of seedlings Ethnomathematics of the Distrital University Francisco José of Caldas, was proposed as a topic of discussion and research addressing diversity in the mathematics classroom, in this process frameworks were sought that could help identify some guidelines or guidelines subsequently proposed to seek the views of a group of teachers on this subject, for it is designed, implemented and analyzed a survey Likert and semiestured interview with a group of teachers from two schools of public character Bogotá. **Keywords**: Qualitative research, Diversity, Case Study, Conceptions, Likert Survey.
Resumo	Como parte das atividades do grupo de pesquisa em Etnomatemática da Universidade Francisco José de Caldas, foi proposto como tópico de discussão e pesquisa a abordagem da diversidade na aula de matemática. Neste processo foram procurados elementos teóricos que pudessem ajudar a identificar algumas orientações ou diretrizes, posteriormente foi proposto procurar os pontos de vista de um grupo de professores sobre o tópico e para isso foi concebido, aplicados e analisados, a partir de uma pesquisa tipo Likert e uma entrevista semi-estruturada a um grupo de professores de duas escolas de caráter público da cidade de Bogotá. **Palavras-chave:** Pesquisa Qualitativa, Diversidade, estudo de caso, as concepções, Inquérito Likert.

1. Introducción

El Semillero en Etnomatemática del proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, es una comunidad de reflexión, diálogo y aprendizaje conformada por estudiantes y egresados, que concibe la educación matemática como una acción social y cultural, cuyo ejercicio requiere de acciones, reflexiones, un saber, unas competencias específicas. En el año 2013 ha querido realizar un ejercicio de investigación que diagnostique e indagué por las necesidades de formación sobre políticas de interculturalidad en el aula y las concepciones sobre el enfoque sociocultural en educación matemática maestros de matemáticas del sector público de la ciudad de Bogotá, para esta tarea se utilizaron dos instrumentos (entrevista semiestructurada y encuesta tipo Likert), los cuales recolectó información sobre cinco categorías de análisis, (relaciones en el aula, matemática extraescolar, matemáticas como un producto social, matemática crítica).

. 2. Planteamiento del problema

La constitución política de Colombia presenta al país como un estado social de derecho pluriétnico y multicultural, la educación como un derecho y un servicio público con una función social que busca acercar el acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y los demás bienes de la cultura, se menciona que el estado, la sociedad y la familia son los responsables de velar por ésta, además será gratuita en todas las instituciones del estado, al considerar las directrices planteadas por la legislación Colombiana, consideramos que éstos elementos son elementos que orientarán a las instituciones educativas, y en este caso en el aula de matemáticas, pues autores como Bishop (1999) presentan las matemáticas como un constructo social, producido culturalmente por medio de las interacciones de los sujetos con el contexto en el cual están inmersos.

La ciudad de Bogotá, alberga más de 8 millones de habitantes, provenientes de todas las regiones del país, constituyéndose cómo una metrópolis caracterizada por una gran diversidad y pluralidad de grupos sociales y culturales, este ambiente también está presente en las instituciones educativas, elemento que consideramos que debería ser tenido en cuenta por los docentes y las comunidades educativas; esta situación puede generar espacios de indagación sobre las necesidades de formación sobre políticas de interculturalidad en el aula de docentes del área de matemáticas de dos instituciones de carácter público, el Instituto Técnico Industrial Piloto, ubicado al sur occidente de la ciudad y la Institución de Educación Distrital Juan del Corral, ubicada al noroccidente de Bogotá.

Contextualización de las instituciones:

Institución de Educación Distrital Juan del Corral

El colegio se encuentra ubicado al noroccidente de Bogotá (Engativá), en dos jornadas escolares (mañana y tarde) bajo los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media técnica, en ésta última se enfatiza los espacios de formación de diseño gráfico y contabilidad, esta institución cuenta con dos sedes una para preescolar y básica primaria y otra para básica secundaria y media técnica, la mayoría de la población estudiantil procede de los barrios aledaños, pertenecientes a estratos socioeconómicos 1, 2 y 3, algunos núcleos familiares se caracterizan por madres cabeza de familia y 2 o 3 hermanos, actualmente se han vinculado a la institución varios estudiantes de diferentes lugares del país, predominando estudiantes provenientes de la costa atlántica colombiana, constituyendo la institución como un espacio de diversidad cultural y étnica.

Instituto Técnico Industrial Piloto

El colegio se encuentra ubicado en al sur occidente de Bogotá (Tunjuelito), la institución es reconocida por du formación en énfasis técnica industrial, debido al gran impacto y acogida que tiene la institución, ésta acoge a estudiantes de diferentes localidades de la ciudad, y de diferentes zonas del país, mostrándola como un sitio de confluencia de diferentes costumbres y culturas, el nivel socioeconómico de las familias se ubica en los estratos 1, 2 y 3, algunas familias son monopaternales o compuestas por tíos o abuelos..

3. Marco de referencia

En este espacio del documento se presentará algunos autores e investigaciones previas que han propuesto algunos elementos de referencia a las necesidades de formación las necesidades de formación sobre políticas de interculturalidad en el aula de docentes del área de matemáticas, Oliveras (2006) menciona que la naturaleza del conocimiento matemático se ha transformado, en su origen se entendía únicamente desde la epistemología conceptual, posteriormente se ha tratado desde la epistemología genética donde se dan explicaciones a hechos donde se sitúa el conocimiento desde el sujeto que lo produce, por último este tratamiento evolucionó hacia la epistemología cultural, donde se explican los conocimientos teniendo en cuenta el significado dentro de un grupo sociocultural, el conocimiento se da como un constructo social. La autora presenta la matemática desde el escenario de la multiculturalidad, propone romper con la imposición cultural de la creencia de una sola matemática, e invita a pensar la matemática desde la interculturalidad, a partir de la de las formas de pensar las matemáticas, a partir del el intercambio de saberes, con el fin de desarrollar una cultura propia.

Por otra parte Schroeder (2001) Presenta la matemática como un proceso intercultural permanente, como un proceso de migración de ideas, conocimientos y procedimientos, para el autor las culturas matemáticas no son sistemas culturales encerrados en sí mismos, éstas son dinámicas y están abiertas a principios nuevos y ajenos, él asume las matemáticas como un producto cultural, social, político y económico, con base en lo anterior el autor propone llevar a los estudiantes a la posibilidad de reflexionar y discutir sobre un problema matemático y sus implicaciones sociales, para mostrar la matemática no sólo como un sistema lógico y formal sino como un medio de comunicación, intercultural y una herramienta de la reconstrucción cultural.

Estas ideas son complementadas por autores como Bishop (1999), quien presenta el enfoque sociocultural de enseñanza de las matemáticas a partir de algunos elementos curriculares a reflexionar como, la representatividad, formalismo, accesibilidad, poder explicativo y conceptos amplios elementales, los cuales están acompañados de componentes simbólicos mostrando la utilidad de las ideas y lo cultural, permitiendo reflexionar sobre la compresión de las matemáticas.

El autor aboga por una compresión de las matemáticas como un proceso de integración social desarrollando el conocimiento a partir de la enculturación, la cual se caracteriza por la participación e interacción entre cada persona y la representación de sus patrimonios culturales los cuales se han dado por medio de la evolución.

4. Metodología

La presente propuesta está relacionada con el enfoque de investigación cualitativa, pues ésta tiene relevancia específica para el estudio de las relaciones sociales, De acuerdo a Sagastizabal & Perlo (2002) la investigación cualitativa, parte del supuesto básico de la necesidad de compresión del sentido de las acciones sociales, en el contexto del mundo cotidiano y desde la visión de los participantes, a nivel epistemológico ésta privilegia la inducción, la interpretación, el planteamiento de cuestiones de significado, valores, ideas, prácticas culturales, cambio social, interacción social, y a nivel metodológico se basa en técnicas orientadas a vivenciar y a indagar mediante el trabajo de campo y la recolección de datos válidos y reales. Para las autoras el paradigma cualitativo se destaca por algunas creencias sobre los hechos sociales como, que los hechos sociales son un sistema de interacción con una gran cantidad de variables, además éstos son únicos e irrepetibles. Para este paradigma investigativo la interpretación es una herramienta para la construcción del conocimiento, y las problemáticas que se plantean deben estar vinculadas con prácticas culturales en búsqueda de un cambio social, en contextos escolares es implementa este paradigma a través diseños metodológicos como el etnográfico o la investigación acción, de igual forma las autoras presentan el siguiente cuadro de características de los diferentes paradigmas investigativos.

Teniendo en cuenta el enfoque de investigación cualitativa, se utilizaron dos instrumentos para la recolección de información, encuesta tipo Likert y encuentra semiestructurada, ésta primera fue una interpretación del instrumento utilizado por Blanco (2011) el cual constaba de 19 afirmaciones, cada una de estas estaba relacionada con una de las cinco categorías de análisis, éstas situaciones tenían cuatro opciones de respuesta, Totalmente de acuerdo (TA); De acuerdo (A); En desacuerdo (D); Totalmente en desacuerdo(TD).

Con respecto a la entrevista semiestructurada, se implementaron situaciones de aula en las cuales el docente debía responder que acciones haría ante la situación, en este instrumento también estaban las mismas tres categorías de análisis (creencias sobre las matemáticas, creencias sobre la multiculturalidad y relación entre la matemática y la multiculturalidad).

5. Análisis de la información

Una vez se aplicados los dos instrumentos a dos profesores de las instituciones educativas mencionadas anteriormente, se implementaron diferentes estrategias para el análisis de la información, entre ellas la triangulación de los datos recolectados con base a las categorías de análisis.

Para el análisis de la encuesta tipo Likert y la entrevista se tuvieron en cuenta las siguientes categorías:

- Categoría 1: La importancia de la afectividad, lenguaje, género y metodología.
- Categoría 2: Las matemáticas son un producto cultural y una construcción social.
- Categoría 3: Las matemáticas se pueden observar en actividades extraescolares.
- Categoría 4: Relacionan las matemáticas con la historia.
- Categoría 5: Las matemáticas en actividades reflexivas.

A continuación se presentarán los cuadros de tabulación de la información recolectada por medio de los dos instrumentos utilizados.

Categoría 1	TA	A	D	TD	Interpretación
Afirmación 4	2	3	0	0	La totalidad de los profesores encuestados considera que las creencias y las actitudes sobre las matemáticas afectan su aprendizaje
Afirmación 6	0	2	0	3	2 dos de los tres profesores encuestados consideran que el género influye en la resolución de situaciones en matemáticas
Afirmación 12	0	2	2	1	3 de los cinco profesores no consideran que la metodología será un único factos que garantice el aprendizaje de los estudiantes
Afirmación 13	1	2	2	0	3 profesores consideran que las matemáticas están relacionadas con el lenguaje
Categoría 2					
Afirmación 1	2	1	2	0	2 de los cinco profesores encuestados consideran que las matemáticas varían de acuerdo a la cultura y no están preestablecidas
Afirmación 7	2	2	1	0	Sólo 1 profesor está en desacuerdo que las matemáticas, el lenguaje, la música forman parte de la cultura.
Afirmación 15	0	0	2	3	La totalidad de los profesores encuestados consideran que existen espacios alternativos para el aprendizaje diferentes a los escolares.
Afirmación 16	1	1	2	1	2 de los profesores consideran que existen simbolizaciones matemáticas más o menos precarias.
Afirmación 19	1	1	1	2	2 de los profesores encuestados consideran que no es necesario conocer el contexto social de los estudiantes para enseñar matemáticas, las matemáticas
Categoría 3					

Afirmación 3	0	1	3	1	Sólo 1 profesor considera que poblaciones como tribus indígenas, los campesinos, artesanos y analfabetas carecen de nociones matemáticas formales
Afirmación 8	3	2	0	0	La totalidad de los profesores encuestados consideran que existe figuras geométricas en objetos artesanales
Afirmación 9	1	4	0	0	La totalidad de los profesores encuestados consideran que para la elaboración de artesanías se necesitan nociones geométricas
Afirmación 10	0	0	1	4	La totalidad de los profesores encuestados consideran se pueden aprender matemáticas en espacios diferentes a la escuela
Afirmación 14	1	3	1	0	Cuatro de los profesores encuestados consideran que no es necesario que una persona sepa leer ni escribir, para que pueda realizar cálculos mentales
Afirmación 17	0	3	1	1	Dos de los profesores creen que la utilización de patrones de medida antropométricos o son adecuados en procesos de medición de longitudes
Afirmación 18	1	3	1	0	Sólo 1 profesor de los 5 encuestados considera que los conocimientos populares o extraescolares son igualmente validos que los conocimientos universales.
Categoría 4					
Afirmación 2	2	2	1	0	4 de los profesores consideran que las matemáticas son creadas por el hombre y éstas responden a las necesidades particulares de una sociedad a lo largo de su historia
Afirmación 5	4	0	1	0	Sólo 1 de los profesores encuestados no cree que cualquier grupo cultural en el mundo puede desarrollar su propio sistema de numeración
Categoría 5					
Afirmación 11	3	2	0	0	La totalidad de la población encuestada considera que las matemáticas son una herramienta eficaz para analizar problemáticas sociales actuales

Tabla 1. Análisis de datos recolectados en la encuesta tipo Likert

Con respecto al análisis de la entrevista semi estructurada se optó por transcribirlas y relacionar lo comentado por los profesores con cada una de las categorías de análisis, a continuación se presentará lo comentado por los docentes entrevistado.

Con respecto a la formación de los dos docentes entrevistados se puede comentar que los dos son licenciados en matemáticas con cursos de postgrado en el área de educación matemática, la experiencia varía entre los cuatro y siete años, la vinculación de los dos docentes a las instituciones educativas estuvo mediada por concurso docente, con respecto a experiencias pedagógicas significativas los dos docentes hicieron alusiones a la ultimación de las tecnología en el aula de clase para la enseñanza de las matemáticas.

	Profesor 1	Profesor 2	Interpretación

Situación A	**como primera medida tomaría pues tendría que conocer la cultura para, digamos para mirar las nociones matemáticas o las matemáticas que desarrollan en, que desarrollan allá, para poder diseñar pues un currículo que sea, que esté relacionado con el contexto y que de pronto no valla a transgredir pues sus costumbres**	**tendría en cuenta las necesidades prácticas que tengas las comunidades habitantes del resguardo, y pensar en que matemáticas les serviría para lo que ellos hacen diariamente, para lo que ellos se proyectan en la vida, para así según yo supondría que es para seguir en el resguardo pues mirar que matemáticas les sirven para ellos, pues porque se supone que las matemáticas son unas repuestas a una prácticas sociales y la idea es que la utilicen como herramienta para la vida.**	**En esta situación se pretendía indagar sobre los elementos a tener en cuenta para el diseño curricular del área de matemáticas para un resguardo indígena, en las respuestas presentadas por los docentes se puede observar la necesidad de conocer el contexto social y cultural de la comunidad además de tener en cuenta sus necesidades y sus prácticas sociales, estos elementos constituyen algunos lineamientos para abordar la enseñanza de la matemática a partir de la diversidad.**
Situación B	**si claro, digamos que el contexto en donde están trabajando los papás permitiría que los estudiantes lograran relacionar los conocimientos o la clase de matemáticas con la realidad y de alguna forma al analizar pues las situaciones problema que se den en la clase los padres podrían ayudar a sus hijos pues por lo menos a la comprensión de las situaciones.**	**Sí nos centramos en que el objetivo sea que aprendan matemáticas formales los estudiantes no, porque los obreros, los costureros los artesanos pues saben unas matemáticas que no son formales, si no son matemáticas que resultan de la practica social de ellos y son correctas, yo como profesor usaría esto, porque estoy totalmente convencido que las matemáticas son una construcción social y en además que la cultura influye en lo que uno aprenda en matemáticas, y entonces la cultura del obrero del costurero, del artesano del comerciante influye directamente en las matemáticas que aprende el estudiante claro que si las utilizaría.**	**En esta situación se buscaba que los docentes consideraban que los conocimientos de los padres puedan ayudar a sus hijos para aprender las matemáticas, esta situación muestra la potencialidad de espacios extraescolares en el aprendizaje de las matemáticas, en este espacio los docentes comentaron estar de acuerdo con los aportes que pueden hacer los conocimientos de los padres a sus hijos, denotando la matemática como un constructo social influenciado por la cultura de cada comunidad.**
Situación C	**por supuesto, porque los niños independientemente que hayan estado en la escuela o no esta en contacto con las matemáticas, pues con nociones como**	**bueno la primera, que sí creo que los niños podrían resolver problemas aritméticos, claro si, porque estar alfabetizado no es condición necesaria para resolver problemas aritméticos, tengo un**	**En esta situación también se hacía por los conocimientos matemáticos construidos en espacios extraescolares, pues los docentes tenían que**

	cantidad y que de alguna forma esas nociones pueden ser utilizadas para desarrollar los conceptos.	ejemplo muy personal, claramente es que mi abuela es analfabeta pero mi abuela suma resta multiplica y divide las cosas básicas que ella necesita para hacer el mercado por ejemplo, entonces hay me doy cuenta que no es necesario, pues claro que si lo podrían hacer, en el caso de las experiencias vividas por los niños.	comentar sí consideraban que personas en condiciones de analfabetismo podrán resolver problemas aritméticos, ante esta situación los docentes comentaron estar de acuerdo con la existencia de pensamiento matemático en contextos extraescolares, sin embargo no precisaron sí consideraban que el conocimiento extraescolar tenga una categoría superior o inferior al conocimiento escolar.
Situación D	Bueno pues primero tendría que conocer las experiencias para de alguna manera utilizarlas en el diseño de actividades que sea significativas para ellos y que me permitan introducir nociones, procesos y conceptos de las matemáticas y la aritmética.	Claro, porque la medida en ultimas es hacer una comparación entre dos cosas, entre la unidad de medida y lo que se vaya a medir, entonces pues si ellos son muy buenos en eso, es esa unidad de medida, pues hay ya estaría el concepto implícito, ósea surgió culturalmente el concepto de medida.	En esta situación se presentaba la validez o no de la utilización de unidades de medida tradicionales, ante esta situación los docentes comentaron estar de acuerdo con la inclusión de estas unidades de medida al aula de clase, mostrando así las matemáticas como una construcción de diferentes grupos sociales.
Situación E	si claro, para mí las matemáticas están inmersas en la vida e toda persona independiente de las limitaciones que ella tenga ya sean digamos que por experiencias reales que la gente tenga o por influencias escolares, pero de alguna manera las matemáticas están presentes	claro que tienen un lenguaje propio, porque la manera de comunicarse de ellos es distinta a lo que tienen sus 5 sentidos completos, como lo integraría a la práctica, yo creo que en el caso de los no oyentes la manera en que ellos se comunican que es moviendo, su lenguaje de señas, moviendo, haciendo expresiones corporales, hay emergen, ósea en el salón de clase en las matemáticas uno podría darse cuenta de cómo están pensado sobre un concepto u otro, así no tengo ni idea, nunca he	Por medio de esta situación se le pregunta al docente sí consideraba que invidentes y no oyentes pueden poseer un lenguaje matemático propio y en caso de ser afirmativa la respuesta cómo la integrarían es sus práctica pedagógica, ante esta situación los docentes comentaron estar de acuerdo con esta afirmación, presentando a las matemáticas como un constructo a partir

		trabajado con no oyentes o invidentes.	de diferentes tipos de lenguajes, los cuales son construidos con base en las características de las poblaciones.
Pregunta 1	**Considero que la mayoría está completamente influenciada por digamos la cultura colombiana, pensaría más en la cultura indígena porque ellos si han resguardado más sus costumbres**	**mostrando evidencias de cómo han construido su matemática, este elemento podrá mostrar a la enseñanza tradicional de matemáticas que hay otra forma de aprender matemáticas y que no solo como está planteada actualmente.**	**En esta pregunta se hacía referencia a los aportes de la cultura afrocolombiana en la enseñanza de las matemáticas, a lo cual los docentes comentan que la investigación de este tipo de conocimientos ayudaría a hacer transformaciones en la enseñanza de las matemáticas.**
Pregunta 2	**No, por el momento no.**	**No he trabajado, pero en este momento estoy haciendo una recolección de datos para una tesis de maestría, y en el curso que estamos haciendo la recolección de datos hay dos estudiantes que son afrocolombianos, ese es único contacto que he tenido.**	**En esta pregunta los docentes deberían comentar sí había trabajado con poblaciones con necesidades educativas especiales, indígenas, afrocolombianos o ROM, ante lo cual comentaron que no habían trabajado en especial con estas comunidades, este elemento hace referencia a la población con la cual los docentes han trabajado, sin embargo en las situaciones anteriores hacen referencia a los elementos que tendrían en cuenta al trabajar con otras poblaciones.**
Pregunta 3	**No**	**Lo único que conozco es que hay un esfuerzo grande de las políticas educativas nacionales, por hacer una inclusión de este tipo de poblaciones hasta ahí. Sé que en las universidades hay un requisito en cuanto a porcentaje para recibir gente de esas comunidades, pero no conozco más.**	**En esta pregunta se indagaba sobre el conocimiento de las políticas educativas para poblaciones con necesidades educativas especiales, indígenas, afrocolombianos y ROM, ante lo cual se pudo evidenciar la necesidad de presentar y divulgar estas**

			políticas educativas y cómo estas pueden incidir en el aula de matemáticas.
Pregunta 4	**si, aunque digamos que de alguna forma uno al inicio de su proceso con cada uno de los grupos, intenta como tomar las experiencias y meter ahí digamos que buscar, generar los puntos en común para generar una cultura propia de la clase porque como te dije anteriormente es muy complejo trabajar con muchos estudiantes y considero que así como hay que tener en cuenta las experiencias y el contexto de todos los estudiantes se debe generar una cultura en la clase que favorezca a todas las personas pero que de alguna forma no diferencie a cada uno**	**Yo lo intento pero considero que la estructura curricular institucional es una contraposición para poder hacer eso, pues es una estructura burocrática y que busca homogeneizar.**	**En esta última pregunta se le mencionaba directamente al docente sí consideraba que tenía en cuenta el entorno sociocultural al momento de planear, ejecutar y evaluar, ante lo cual los docentes comentaron que aunque es un compromiso muy difícil, pues los grupos son muy numerosos hacen lo posible para incluir la cultura y el contexto de los estudiantes en su prácticas pedagógicas.**

Tabla 2. Análisis de datos recolectados en la entrevista semi estructurada.

5. Reflexiones finales

Con base en la información anteriormente recolectada y analizada se pudieron identificar varios elementos de reflexión sobre las prácticas pedagógicas en el aula de matemática desde la multiculturalidad, inicialmente se pudo evidenciar que los docentes desconocen o conocen muy poco las políticas educativas que se han planeado para abordar las prácticas pedagógicas, lo cual genera la necesidad de divulgarlas y socializarlas con la comunidad académica.

Se pudo observar que el desconocimiento de éstas políticas no implica el incumplimiento de éstas, pues los profesores que participaron en la encuesta tipo Likert y la entrevista semiestructurada se pudo identificar que los docentes tienen actitudes favorables con el enfoque sociocultural de la enseñanza de las matemáticas, pues consideran que las creencias y las actitudes sobre las matemáticas afectan su aprendizaje, que las matemáticas están relacionadas con el lenguaje, que ésta es una construcción social que puede variar de acuerdo a la cultura, además que están presentes en prácticas sociales y contextos extraescolares y que éstas pueden ser una herramienta eficaz para analizar problemáticas sociales actuales.

Consideramos que más allá de la identificación de algunos lineamientos políticos del aula desde una perspectiva multicultural es necesario romper con una estructura colonial y tradicional de la escuela, y presentar a ésta como un espacio de encuentro de la diversidad en la cual cada uno de los integrantes pueden aportar a sus compañeros basados en el dialogo desde la igualdad y la simetría.

Finalmente hacemos una invitación a entender la educación desde una perspectiva multicultural que vaya más allá de la inclusión del lenguaje propio de las comunidades al aula, consideramos que además de este elemento es importante incluir sus conocimientos y sus prácticas tradicionales.

5. Anexos

Formato de entrevista

Nombre

1. Solicitud de información relacionada con formación académica, experiencia docente y lugar de proveniencia.
2. Información relacionada con la vinculación con la institución en la cual labora y tiempo que lleva laborando.
3. Búsqueda de una experiencia pedagógica que le haya sido significativa.

Situaciones

Situación A: Eres el profesor de matemáticas y te han contratado para elaborar el diseño curricular del área de matemáticas para un resguardo indígena en el departamento del Amazonas, ¿Qué elementos tendrías en cuenta para elaborar dicho diseño?, ¿por qué?

Situación B: Eres el profesor de un grupo de estudiantes que son hijos de obreros, costureras, artesanos y comerciantes ¿crees que los conocimientos de sus padres puedan ayudar a sus hijos para aprender las matemáticas?, en caso de ser afirmativa tu respuesta ¿cómo crees que los conocimientos de los padres podrían ayudar para la enseñanza de las matemáticas?

Situación C: Trabajas para en una fundación de rehabilitación de niños habitantes de la calle y niños trabajadores, teniendo en cuenta que éstas personas son analfabetas ¿crees que los niños podrían resolver problemas aritméticos?, en caso de ser afirmativa tu respuesta ¿las experiencias vividas por los niños podrían ser usados en la resolución de problemas matemáticos en la escuela?, ¿cómo utilizarías las experiencias vividas por los niños para enseñar las matemáticas?

Situación D: Adrián es un niño pobremente de una tribu indígena de Cundinamarca; en la tribu como patrón de medida emplean una vara, que va desde la punta del pie hasta la rodilla de un adulto. ¿Usted como docente tendría este aspecto en cuenta para la enseñanza del sistema de medidas?

Situación E: considera que los invidentes y sordos poseen un lenguaje matemático propio. En caso de ser afirmativo ¿Cómo lo integraría a la práctica docente?

Preguntas abiertas

Pregunta 1: ¿Cómo la cultura afrocolombiana podría aportar a la enseñanza de las matemáticas?

Pregunta 2: ¿En algún momento ha trabajado con alguna de las siguientes poblaciones: NEES, indígenas, afrocolombianos, desplazados, ROM (gitanos) y en situación de extrema pobreza?

Pregunta 3: ¿Conoce usted las políticas educativas y sociales sobre las siguientes poblaciones: NEES, indígenas, afrocolombianos, desplazados, ROM (gitanos) y en situación de extrema pobreza?

Pregunta 4: ¿Tiene en cuenta el entorno sociocultural al momento de planear, ejecutar y evaluar?

Encuesta tipo Likert

Nombre:
Colegio:
Para cada afirmación, marque con una x si usted está: Totalmente de acuerdo (TA); De acuerdo (A); En desacuerdo (D); Totalmente en desacuerdo (TD).

		A			D
	Las matemáticas con una ciencia exacta, son las mismas en todo el mundo y preestablecidas				
	Las matemáticas son creadas por el hombre y éstas responden a las necesidades particulares de una sociedad a lo largo de su historia				
	Las tribus indígenas, los campesinos, artesanos y analfabetas carecen de nociones matemáticas formales.				
	Las creencias y actitudes sobre las matemáticas afectan el aprendizaje de éstas.				
	Los incas en Sudamérica, los mayas en Centroamérica, los yoruba en África y los árabes en Irak crearon cada uno sus propios sistemas de numeración. De esta misma manera cualquier grupo cultural en el mundo puede desarrollar su propio				

	sistema de numeración.				
	El género influye en la resolución de situaciones en matemáticas.				
	Las matemáticas, el lenguaje, la música forman parte de la cultura.				
	Los objetos artesanales (cestos, vasijas, mantas, mochilas, sombreros) de departamentos colombianos como Boyacá, Córdoba, Amazonas y Guajira, presentan figuras como cuadrados, círculos, triángulos, y en estos se encuentran nociones de geometría.				
	Para la elaboración de cestos, sobreros, mochilas y mantas en telares se necesitan nociones de geometría.				
0	Fuera de la escuela no se aprenden matemáticas.				
1	Las matemáticas son una herramienta eficaz para analizar problemáticas sociales actuales.				
2	Cuando hay una buena metodología por parte del profesor, se garantiza el aprendizaje de los estudiantes				
3	Muchos estudiantes indígenas e inmigrantes tienen mal rendimiento en matemáticas porque tienen problemas para entender el español.				
4	No es necesario que una persona sepa leer ni escribir, para que pueda realizar cálculos mentales como sumas y restas.				
5	Hay comunidades indígenas en la Amazonía brasilera que tienen palabras en su lengua local para contar solo hasta tres, después dicen muchos. Esto se debe a falta de educación escolar.				
6	Existen comunidades que relacionan el número cinco con la mano, entonces para decir diez, dicen dos manos. Esta es una forma muy precaria de simbolizar los números.				
7	Son adecuados los patrones de medida como el pie y el palmo que muchos albañiles y carpinteros utilizan en su trabajo.				
8	Los conocimientos escolares son más refinados y universales que los conocimientos populares o extraescolares.				
9	No es necesario conocer el contexto social de los estudiantes para enseñar matemáticas, las matemáticas siempre serán iguales en cualquier contexto.				

Bibliografía

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Blanco, H. (2011). *Estudio de las actitudes hacia una postura sociocultural y política de la educación matemática en maestros en formación inicial.* Barcelona: Universidad Autonoma

Sagastizabal, M., & Perlo, C. (2002). *La investigación acción como estrategia de cambio en las organizaciones.* Buenos aires: La crujía.

Schoeder, J. (2001) Hacia una didáctica intercultural de las matemáticas. En A. Lizarzaburu, G. Zapata (Comp.), *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina*. (pp. 192-214). Madrid: Morata.

Oliveras, M. (2006) Etnomatemáticas de la multiculturalidad al mestizaje. En Goñi, J. (Comp) *Matemáticas e interculturalidad*. (pp. 117-149) Barcelona: Grao

Christian Camilo Fuentes. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Coordinador por Colombia de la Red Latinoamericana de Etnomatemática, Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, Magíster en Educación en la línea de Educación Matemática ccfuentesl@udistrital.edu.co
Aura Viviana Acero. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. aura-nana@hotmail.com
Liceth Andrea Casallas Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. licethcasallas1208@gmail.com
Claudia Patricia Acosta Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. pat_9212@hotmail.com,
Brianna Lorena Diaz Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. lore-2820@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 139--158

Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje

Yaneth Milena Agudelo Marin, Ligia Inés García Castro

Fecha de recepción: 04/03/2015
Fecha de aceptación: 18/04/2016

Resumen	Este estudio se centra en el análisis del desarrollo de la capacidad estimativa en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9° de Educación Básica Secundaria del sistema educativo colombiano. En este trabajo se implementó la modelación como estrategia de Enseñanza desde los trabajos de Biembengut y Hein (2004) a partir de una secuencia didáctica que pretendió desarrollar la habilidad de estimar volúmenes ocupados. Los resultados muestran cómo las estudiantes evaluadas mejoraron ostensiblemente la habilidad de estimar magnitudes continuas en volumen ocupado, concretamente usando la estrategia de iteración y la de comparar un referente presente usando técnicas indirectas, estableciendo relaciones métricas más elaboradas. **Palabras clave**: Modelación, Estimación, Volumen, Medida.
Abstract	This study is focused on the analysis of the development of the capacity of estimation as it relates to volume with 9th grade students in a Columbian general education class. In this study the strategy of modeling to teach and learn was used in the context of a didactic sequence to facilitate a reflection on the impact on students' ability to estimate various volumes. The results show that the students evaluated apparently improved in their ability to continually estimate the magnitude of different concrete volumes using the strategy of process and/or comparing using a given reference (using an indirect technique) that establishes a metric relationship that is progressively more elaborate. **Keywords**: Modeling, Estimating, Volume, Measurement
Resumo	Este estudo centra-se na análise do desenvolvimento da capacidade e estimativa da magnitude de volume de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental Secundário do sistema educacional Colombiano. Neste trabalho de pesquisa foi implementado a modelagem como estratégia de Ensino com base nos trabalhos de Biembengut y Hein (2004) a partir de uma sequência didática que visou desenvolver a capacidade de estimar volumes ocupados. Os resultados mostram como os alunos avaliados melhoraram significativamente a capacidade de estimar grandezas contínuas em volume ocupado, especificamente usando estratégia de interação e de comparar um ponto de referência usando técnicas indiretas, estabelecendo assim relações métricas mais elaboradas. **Palavras-chave:** Modelagem, Estimativa, Volume, Medida.

1. Introducción

Actualmente para muchos profesores el objetivo de las prácticas usuales de enseñanza con respecto al dominio de la medida es la memorización de unidades y la conversión dentro un sistema de medidas, la aplicación de fórmulas y la realización de cálculos numéricos para entrenar a los estudiantes en la resolución de ejercicios, enseñándoles lo que se puede llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente (Chamorro, 1995, pp. 33). Así pues, en la práctica educativa se da escasa consideración a los aspectos cualitativos requeridos para la construcción de diferentes magnitudes: Identificación de atributos medibles, comparación de objetos atendiendo a una cierta magnitud, construcción del concepto de unidad de medida o manejo del error en las mediciones; además, desde lo cuantitativo, no se adjudica la suficiente importancia a actividades de medición directa y al uso de estimaciones, tal como lo sustenta ASOCOLME[1] (ASOCOLME, 2002, pp.31) al analizar la vinculación que puede tener este tratamiento didáctico con el desempeño de los estudiantes en los procesos de medición.

En consecuencia, corresponde a los profesores organizar y planificar actividades que potencien el desarrollo geométrico-métrico de los estudiantes, enmarcando estas nociones dentro de un contexto específico que les permita resolver situaciones cotidianas. De ahí la necesidad de permitir que los estudiantes realicen experiencias sensoriales (ver, tocar, oír, etc.), para pasar del espacio vivenciado (en su casa, en el patio, en el parque, etc.) a un espacio representado.

Teniendo en cuenta las reflexiones anteriores, en esta investigación se consideró que la implementación de la modelación como metodología de enseñanza sirve como herramienta didáctica que posibilita la visualización por parte del estudiante de la estrecha relación que hay entre el mundo real y la medición, debido a que como afirma Blomhøj (2004, pp. 45) las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a establecer raíces cognitivas sobre las cuales se pueden construir conceptos matemáticos en los que se incluye el uso consciente y autónomo de dichas herramientas.

De acuerdo con la situación expuesta, la pertinencia de esta investigación se manifestó en el tratamiento didáctico que se dio al proceso de modelación, al implementarlo como una metodología de enseñanza dirigida a potenciar la estimación en el ámbito del dominio de la medición de cantidades continuas. Siguiendo a Chamorro citada por Cañón (2009, pp. 1), el reto didáctico consistía en encontrar situaciones didácticas que permitieran la construcción de los conceptos esenciales de medida.

En este sentido, este trabajo amplió los espacios de reflexión sobre el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en volumen, al buscar una ruta coherente y precisa con la implementación de la modelación como método de enseñanza en el aula, esperando que:

> "Cuando los alumnos enfrenten situaciones problémicas de interés sean capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en

[1] Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

> esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se puedan canalizar hacia las matemáticas (medición) que se quiere enseñar" (Lehrer y Schauble y Lesh y English citados por Trigueros, 2009, p. 76)

2. Objetivos:

Reconocer la incidencia de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje sobre el desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en estudiantes de grado 9°.

Caracterizar cambios en la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen ocupado en estudiantes de grado 9°, a partir de la implementación de la modelación como metodología de enseñanza y aprendizaje.

3. Marco conceptual

Según Villa – Ochoa (2010), se pueden reconocer diversas maneras de implementar la modelación matemática en el aula, ellas son:

- El profesor como centro en el diseño de situaciones: Biembengut y Hein (2004); Basanezi(2002) y Villa – Ochoa (2007)
- El estudiante que elige el problema o fenómeno con ayuda del profesor: Borba, Meneghetti, y Hermini (1997); Borba y Villarreal (2005).

Para la presente investigación cuyo propósito era reconocer la modelación como metodología de enseñanza, se asume la perspectiva de Biembengut y Hein, entre otras cosas por la posibilidad de desarrollar los contenidos programáticos del área, a partir de modelos matemáticos que transversalicen otras áreas del conocimiento y proporciona pautas a los estudiantes para realizar un trabajo de modelaje. Además por la posibilidad de trabajarse en los diferentes niveles de escolaridad.

3.1. Modelación: La perspectiva de María Biembengut y Nelson Hein

La modelación es vista como una práctica de enseñanza que establece relaciones entre el mundo real y la matemática. Según Biembengut & Hein (2004, pp. 108), existen razones para defender el proceso de modelación en Educación Matemática desde la postura que enseña matemáticas usando el método de la modelación dado que con su implementación se busca: Integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento; fomentar el interés frente a su aplicabilidad, aprehensión de conceptos matemáticos; estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas; habilidad en el uso de la tecnología; capacidad para actuar en grupo y para redactar una investigación.

Después de varios años de investigación y atendiendo a variables como el currículo, horario de clases, cantidad de estudiantes por curso, disponibilidad de tiempo, entre otras, que afectan la enseñanza de las matemáticas, Biembengut y Hein presentaron a la comunidad dos tipos de abordajes que puede seguir el profesor en su implementación:

1. Método de enseñanza: Desarrollo del contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados.

2. Método de investigación: Orientación de los estudiantes para que hagan un trabajo de modelaje.

Su experiencia los llevó a proponer una serie de etapas a desarrollar en las clases de matemáticas para alcanzar cada uno de los abordajes mencionados, haciendo énfasis en que este trabajo puede realizarse paralelo al desarrollo del contenido programático.

3.2. La estimación en medida

En el marco de las dificultades que se presentan ante los aprendices para aprehender la medida (si no se permite el uso comparativo de patrones no convencionales, la prevalencia de mediciones solo para magnitudes perceptuales y el uso exclusivo de números naturales como cantidad de magnitud) surge otra discordancia entre la escuela y el mundo real: las estimaciones pocas veces hacen parte del currículo escolar, desaparecen con facilidad de los propósitos del aula y con ellas se aleja la posibilidad de encontrarle aplicación a lo que allí se trabaja sobre medida. Así pues, los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan generalmente para la estimación, y al contrario, sí lo hacen los aprendizajes no formales producto de la necesidad (Callís & Fiol (s.f), pp. 163).

La enseñanza intencional de la estimación no es un contenido que se limite única y exclusivamente al campo de la medida, por el contrario, es tan amplia su utilidad, que se extiende al campo de la numeración y las operaciones y de ahí su utilidad y su relación con el cálculo mental. De acuerdo con el Consejo Provincial de Educación, Provincia de Rio Negro (Argentina) encabezado por Bressan & Bogisic (1996, pp. 11) desarrollar la capacidad de estimación en los estudiantes es muy importante porque facilita: Predecir situaciones probables, proponer respuestas aproximadas de manera rápida, desarrollar pensamiento hipotético (conjeturar, resolver, valorar, modificar), utilizar comprensivamente los conceptos relacionados con los números y la medida, tolerar el error encontrándole sentido, reformular problemas en formas más manejables.

Ahora bien, con relación a la magnitud volumen, Kerslake citada en Dickson, Brown & Gibson (1991, pp. 143) sostiene que existe una confusión entre los conceptos de capacidad y de volumen tan arraigado en la población en general, que es necesario hacer claridad en ellos. Según esta autora, la capacidad es la facultad de los envases huecos para alojar algo y su patrón de medida está dado en litros, mientras que el volumen puede usarse en 2 sentidos:

- ✓ Volumen interno: es lo mismo que capacidad, aunque se espera que en este sentido las unidades de medida estén dadas en unidades cúbicas.
- ✓ Volumen externo: cantidad de espacio que un objeto toma para sí, es decir, volumen de espacio que ocupa.

Dickson (Ibíd, pp. 148-157) fue más allá, ampliando el concepto de volumen y diferenciando (con base en las investigaciones que Piaget e Inhelder adelantaron en 1974) cuatro tipos de volumen (volumen interno, volumen externo, volumen líquido y capacidad y volumen desplazado), posteriormente Sáiz (2003, pp. 471), estudió los significados que comúnmente son asociados al vocablo volumen destacando: Volumen interno., volumen ocupado, volumen como magnitud que se puede calcular, volumen encerrado y volumen desplazado.

Ante tanta ambigüedad, Kerslake citada en Dickson et al. (1991, pp. 143) sustenta que es necesario adelantar en el aula estrategias didácticas que conlleven a los estudiantes a superar las dificultades que se presentan con relación a la conservación de volumen y capacidad y que desencadenarían en la apreciación de los estudiantes de la naturaleza imprecisa de las magnitudes. Reconocer esta naturaleza imprecisa es lo que torna a la estimación como un aspecto operable, por cuanto el sujeto podrá reconocer e identificar cantidades cuya medida sea aproximadamente la de las unidades tomadas como referente.

Para los fines de esta investigación la magnitud volumen que se estudió, corresponde al tipo volumen ocupado, es decir, cantidad de espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos del entorno (Sáiz, s.f, pp. 8)

4. Metodología de la investigación

4.1 Tipo de estudio

El estudio obedece a un diseño cualitativo con alcance interpretativo, toda vez que se pretendía analizar las ideas, mecanismos y procedimientos matemáticos de un grupo de estudiantes confrontadas en situaciones de estimación de volumen ocupado; posteriormente se logró un ejercicio comprensivo al observar y auscultar el modo como interactuaban las estudiantes y la profesora buscando un conocimiento mayor de la realidad educativa que le permitiera transformarla (Axpe, s.f. citando a Bartolomé, pp. 18).

4.1.1 Procedimiento

El trabajo se implementó en un Colegio del nivel Básico Secundario de carácter privado y femenino; para la realización de la práctica, se determinó que el grado 9° (39 estudiantes con edades que oscilan entre 14 y 16 años) era el que más se ajustaba al objetivo de la investigación, debido a que el contenido programático de la asignatura de Matemáticas en el cuarto periodo académico, sugería el trabajo con volúmenes de cuerpos geométricos.

La preparación del trabajo de campo se inició fusionando las etapas de la modelación como metodología de enseñanza propuestas de Biembengut & Hein proporcionando sentido de funcionalidad en aras de dar coherencia a la propuesta metodológica.

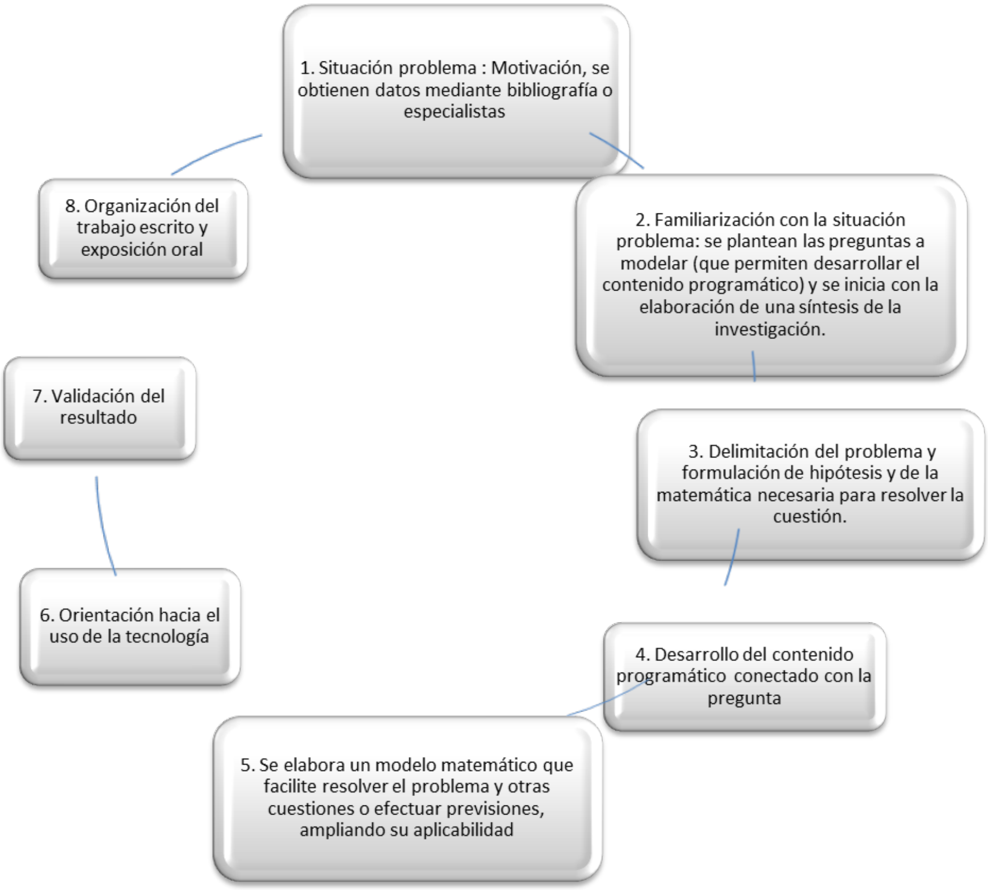


Fig. 1. Abordaje de la Modelación Matemática como método de enseñanza que fusiona el método de enseñanza y el método de investigación propuestos por Biembengut y Hein. Fuente: Elaboración propia

Para alcanzar los objetivos investigativos, se planificó una secuencia didáctica a través de cuatro fases que contienen las etapas para implementar la modelación como metodología de enseñanza que involucraron a su vez las técnicas de recolección de datos propias del método de investigación elegido para el estudio, facilitando al mismo tiempo los espacios para evaluar tanto el proceso como el aprendizaje. La figura 2 facilita la observación de la secuencia de actividades en la organización metodológica

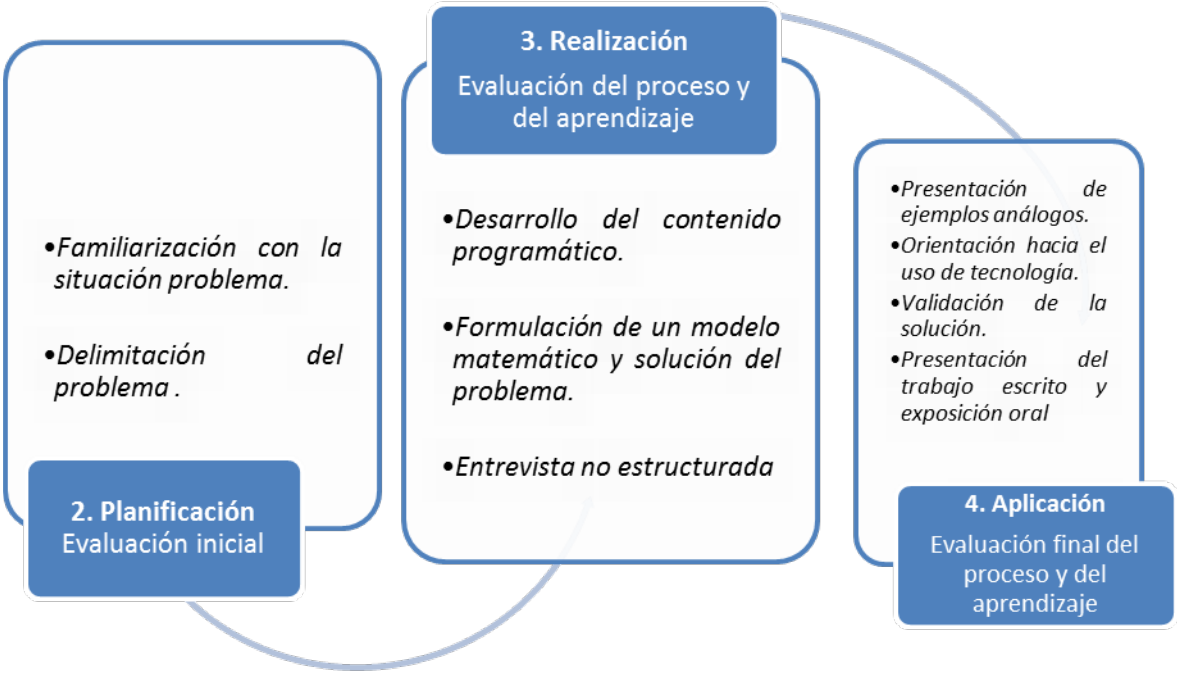


Fig. 2. Secuencia didáctica. Fuente: Elaboración propia.

Trabajo previo: Durante esta sesión de trabajo (tres sesiones, 135 minutos en total), las estudiantes se subdividieron en 8 equipos de trabajo y respondieron un cuestionario diagnóstico, el cual supuso por parte de las estudiantes la puesta en común de sus ideas previas, sometiendo sus conocimientos a cuestionamientos y revisiones que condujeron a que se interesaran verdaderamente por profundizar en la nueva temática que se les presentaba; y por parte de la investigadora abordar la comprensión que las estudiantes tenían sobre la estimación en la magnitud volumen ocupado y sobre cómo la aplicaban en su cotidianidad.

Planificación: El objetivo de esta segunda fase fue familiarizar a las estudiantes con la situación problema que para este caso correspondió a la construcción de empaques con un fin particular; durante esta fase se delimitó el problema al trabajo sólo con prismas. La fase de planificación requirió el uso de un diario de campo, el cual se siguió alimentando durante el trascurso de las diferentes fases de la secuencia didáctica.

Realización: En esta fase se desarrolló el contenido programático para la asignatura de Matemáticas en el grado 9° (área de superficies, cuerpos geométricos, magnitudes extensivas, unidades de medida para volumen, volumen de cuerpos geométricos, estimación indirecta de medidas), así como también se procedió a matematizar los resultados obtenidos hasta ese momento en las diferentes prácticas que buscaban la solución al problema planteado en la fase 2 con el fin de construir el modelo.

La posición de Biembengut & Hein ((s.f), pp. 1-9), frente a lo que es un modelo matemático, permeó la secuencia didáctica para darle coherencia y sustento: "sea cual sea el caso, la solución de un problema requiere de una formulación matemática detallada. Al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno o un problema realista, lo denominamos modelo matemático".

Así pues, se acompañó a las estudiantes en la búsqueda de estrategias para llegar a estimar el volumen ocupado de los distintos modelos de empaques que ellas mismas habían propuesto para solucionar la situación problema a través de sus modelos, coincidiendo con la postura de Córdoba (2011, pp. 96) quien sustenta que en el proceso de modelación en el aula, lo importante no es que el modelo encaje perfectamente en los datos, sino que las interacciones que surjan en la dinámica misma del proceso, favorezcan la emergencia de elementos que re-signifiquen el conocimiento matemático escolar.

Durante este acompañamiento tuvieron lugar algunas entrevistas no estructuradas (cuyas preguntas se adaptaron a las situaciones particulares de cada equipo de trabajo durante el desarrollo de la fase) dada la flexibilidad que brindaba esta técnica de recolección de datos.

Aplicación: En el marco de esta última fase, las estudiantes diligenciaron un nuevo cuestionario, en el que pusieron a prueba su habilidad para llegar a consensos y poner al servicio de las situaciones planteadas los modelos matemáticos formulados en situaciones anteriores con el fin de validarlos; se propusieron situaciones en las que fue necesario estimar volúmenes ocupados ya fuera en sus empaques o a través de modelos de prismas construidos con Cabri 3D.

Al concluir la secuencia, las estudiantes elaboraron un informe escrito en el que se resaltaron no solo los procedimientos matemáticos utilizados, sino también los avances, dificultades y fortalezas que caracterizaron el desempeño de cada equipo, evaluando así el proceso del cual habían sido protagonistas.

4.1.2 Análisis de datos

El análisis de las categorías y subcategorías que finalmente se destacaron en este estudio comprendió la revisión de los cuestionarios, registros de las estudiantes y notas del diario de campo implementado por la investigadora de modo que emergieran aspectos fundamentales que facilitaran el proceso de estudio; dicho análisis se llevó a cabo en su mayoría con apoyo en el software Atlas.ti

4.1.2.1 Exploración de ideas previas

Analizando la información recogida en el cuestionario diagnóstico se identificaron y analizaron cuatro categorías: Concepto de volumen, estimación en la magnitud volumen, uso y conversión entre unidades de medida y relación entre volumen y otras magnitudes y ocho subcategorías: el volumen como la medida del espacio que ocupa un cuerpo, sumergir para hallar volumen, relación volumen-tridimensionalidad, asociación volumen-capacidad, volumen-densidad, volumen-peso, volumen-superficie y los cuerpos sólidos son los únicos que tienen volumen (identificadas por su recurrencia) relacionadas con el concepto de volumen que de una u otra forma obstaculizaban la tarea de estimar en las estudiantes.

El análisis evidenció una contradicción entre lo que las estudiantes definían como volumen y lo que realmente comprendían cuando se les pedía que hallaran volúmenes o que interpreten una expresión que denota unidades de volumen. Por ejemplo, en respuesta a la pregunta ¿considera usted que el gorro para fiestas infantiles que está sobre la mesa tiene volumen? Las respuestas dejaron entrever en la mayoría de los casos que, para algunas estudiantes, sólo los cuerpos sólidos tienen volumen y por tanto objetos diseñados con materiales maleables o los líquidos y los gases no ocupan un lugar en el espacio.

no, porque no es compacto y flotaria pero si se impulsa hasta el fondo de un recipiente con agua entonces tendria un volumen

Al respecto, Sáiz (2003, pp. 469) considera que "la ausencia de una fórmula específica para hacer un cálculo, o bien la falta de imaginación para descomponer un objeto en partes o poca experiencia en transformaciones de romper y rehacer o para medir con instrumentos de precisión" son aspectos que pueden contribuir a formar la creencia de que no todos los objetos tienen volumen y que por tanto no son volumen-medibles.

Sanmiguel & Salinas (2011, pp. 543) destacan cómo la comprensión del concepto volumen y su conexión con la realidad da herramientas a los estudiantes para que entiendan su entorno; sin embargo, también destacan que las dificultades que presentan los estudiantes derivan en gran medida de las dificultades metodológicas que presentan los profesores al enseñar el concepto.

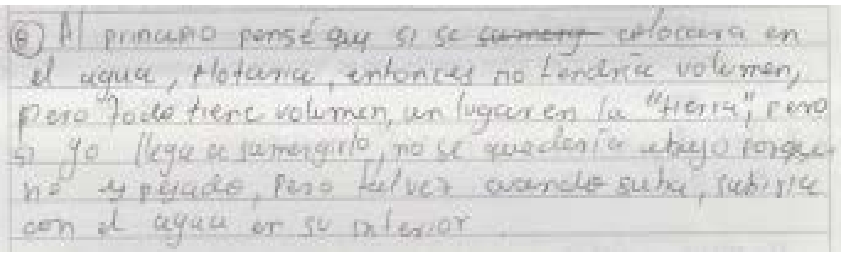
Una concepción que prevaleció fue considerar al principio de Arquímedes como "el método para hallar volumen". Esta idea persistía en casi todas las respuestas de las estudiantes ante situaciones en las que para determinar el volumen se pudieron usar estrategias diferentes a la inmersión; se pone por caso la pregunta: ¿cuánta cantidad de pegante cree que cabe en el tubo de pegante cilíndrico que hay sobre la mesa? A pesar de que pudieron hacer uso de la fórmula del volumen para los cilindros que ya era conocida por ellas, todas, sin excepción, implementaron la misma estrategia: inmersión del pegante en un recipiente graduado con agua, además, se evidenció confusión en la expresión de las cantidades de magnitud y sus unidades de medida. Con respecto a la estimación, el modelo de las estudiantes se sustenta en lo perceptual y dentro de esta lógica, la estimación no tiene mucha importancia porque para ellas siempre que un cuerpo se sumerja en un vaso graduado con agua, se obtendrán datos exactos. Dicho de otro modo, para ellas, estimar se reducía a realizar una operación matemática o a reemplazar en una fórmula los valores conocidos.

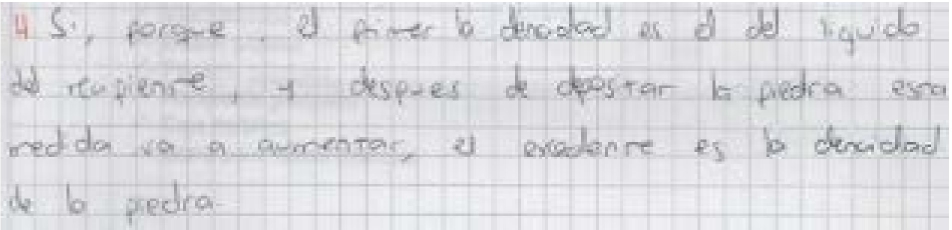
El uso del conjunto de los números naturales, se explica desde la falta de comprensión de los números racionales. Un buen número de investigaciones coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que se enseñan, las fracciones son un contenido que presenta dificultad tanto en el proceso de enseñanza como en el aprendizaje (Freudenthal, 1983, 2001; Kieren, 1985, 1998; Salazar, Martinic & Maz, 2011). En el marco de la habilidad de estimar el significado de número racional viene acompañado del constructo “medida”, sin embargo, lo cierto es que, en el tratamiento de las fracciones en la escuela, se privilegia de forma casi exclusiva la relación parte-todo impidiendo que los estudiantes construyan el concepto de fracción como un número racional; mientras tanto, los docentes piensan que el estudiante ya construyó el concepto y que hace relaciones y operaciones. Según los hallazgos de este estudio, las estudiantes no pudieron trasladar dicha comprensión al contexto de la medición de la magnitud volumen al utilizar la técnica de inmersión, a pesar de que ellas saben representar fracciones de forma numérica y con diagramas y resuelven operaciones entre fracciones en contextos numéricos.

Otro aspecto evidenciado, es el miedo que las estudiantes parecen tenerle al error que pueda generar el uso de números fraccionarios o el uso de los decimales al momento de dar una solución. Su preocupación por la exactitud deja al descubierto que estimar no es una tarea que tenga mucha importancia en las actividades académicas que se llevan a cabo en su currículo y por ende para ellas los datos “inexactos” generan dudas y se sienten incapacitadas para interpretarlos por lo que el uso de números naturales las hace sentir más cómodas. Este panorama viene a comprobar lo expuesto por Chamorro, C. & Belmonte, J. (1991, pp. 72) quienes sustentan que la estimación es imposible desarrollarla si no se realizan prácticas de medida, de manera que el error cometido disminuya poco a poco y por ende, disminuya el temor de quien realiza la tarea. Además, los autores también recomiendan practicar la estimación con cada una de las unidades de medida que conozcan los estudiantes, así se beneficiaría no solo la propia estimación, sino también el aprendizaje de qué unidades usar en cada medición.

Así pues, en esta investigación se consideró que la persistencia del procedimiento de inmersión como “el método para hallar volumen” en correspondencia a la definición “volumen: espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido” deriva en gran parte de una temprana introducción del lenguaje algebraico relacionado con el concepto de volumen y no es representativo de una noción clara en la que las estudiantes comprendan realmente el significado de “espacio desplazado”, pues de lo contrario no se daría confusión entre volumen-peso, volumen-densidad, volumen-capacidad y volumen-superficie.

A continuación, se muestran algunas de las expresiones de las estudiantes en las que se evidencia la no diferenciación de los conceptos de peso, superficie, capacidad, densidad y volumen. Cabe destacar que los conceptos aquí mencionados son básicos tanto en Física como en Geometría y Química, sin embargo, la no diferenciación entre ellos es una dificultad muy común en la mayoría de los estudiantes incluso en estudiantes universitarios (Manotas y Rojas 2008, Raviolo, Moscato & Schnersch, 2005 y Sáiz, 2003).


6 Al principio pensé que si se ~~sumerge~~ colocara en el agua, flotaría, entonces no tendría volumen, pero todo tiene volumen, un lugar en la "tierra", pero si yo llego a sumergirlo, no se quedaría abajo porque no es pesado, pero talvez cuando suba, subiría con el agua en su interior


4 Si, porque el primer lo densidad es el del liquido del recipiente, y despues de depositar la piedra esa medida va a aumentar, el excedente es la densidad de la piedra

Además de los obstáculos mencionados, también se detectaron dificultades en el uso y conversión entre unidades de medida, la comprensión de la dimensionalidad (bidimensionalidad y tridimensionalidad), el empleo de fórmulas (memorísticas) para solucionar problemas y en términos generales, un desarrollo pobre en los componentes de estimación. Así mismo, la mayoría carecían de una imagen mental clara de la unidad de medida que iban a usar para la tarea de estimación, por eso recurrieron al uso de su propio cuerpo (medidas antropomorfas).

4.1.2.2 Exploración final

Finalizada la intervención didáctica, se analizaron los datos obtenidos durante la última fase de la secuencia didáctica. La siguiente red semántica ilustra las principales categorías y subcategorías encontradas.

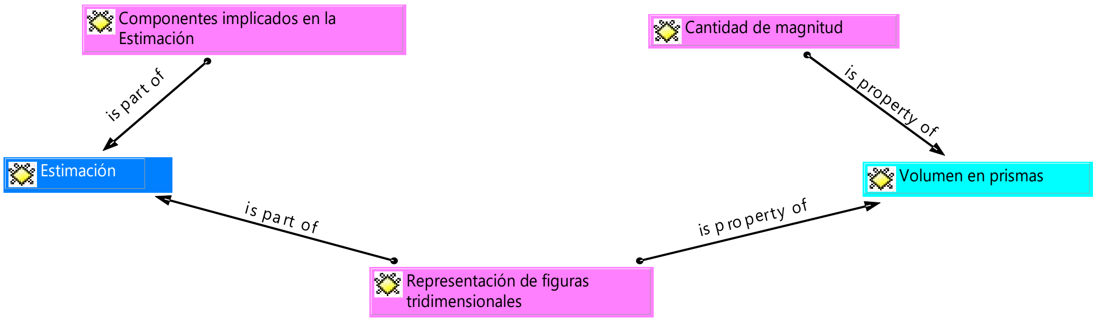


Fig. 3. Red semántica en la que se representan las principales categorías y subcategorías halladas durante el desarrollo del taller de validación.

El objeto mental volumen, entendido en esta investigación en el sentido que le da Freudenthal citado por Saucedo (2009, pp. 2) “todas las representaciones, ideas, relaciones, significados que el concepto evoca en la mente de la persona” experimentó un cambio sustancial en las estudiantes. Cuando se inició la investigación, para las estudiantes el concepto volumen solo hacía referencia al volumen desplazado; sin embargo, la inmersión para muchas medía el peso, el área, la capacidad o la densidad. Si bien es cierto, no se abordaron en este estudio todos los conceptos (fenomenológicos) físicos con los que ellas asociaban volumen, sí se logró hacer diferencia en tres aspectos:

- ✓ Capacidad no es lo mismo que volumen ocupado.
- ✓ El volumen puede hallarse usando diferentes técnicas.
- ✓ El volumen no es lo mismo que el área.

Este avance se logró gracias a que, en la intervención didáctica, las estudiantes debieron manipular y transformar elementos concretos que les facilitó observar cambios y diferencias.

Con respecto a la observancia de la aditividad del volumen, se logró anidar la noción de que es posible llenar un cuerpo con "cubos" cuyas aristas tienen longitud igual a 1 seguido de la unidad que se esté trabajando (m^3, cm^3) y de este modo estimar su volumen; sin embargo ellas mostraron resistencia a la idea y siempre volvían al uso de la fórmula, es posible que la decisión tomada en el diseño didáctico sobre limitar el trabajo al volumen de prismas, reforzara la idea de que el volumen se mide en tres dimensiones: largo, ancho y espesor, sin embargo, reconocieron la diferencia entre volumen desplazado y volumen ocupado y ya no hablaban de la inmersión como "el método" para hallar el volumen.

Después de la intervención didáctica, la exploración final deja al descubierto cambios en otros aspectos tales como:

- ✓ Concepción del significado de cantidad de magnitud. Las estudiantes se referían a las unidades de medida y las magnitudes tanto en forma oral como escrita y pocas veces obviaban su notación (como pasaba con frecuencia en la exploración de ideas previas), el trabajo práctico les permitió comparar cantidades y medir, procesos que son esenciales al cuantificar la realidad (Godino, Batanero & Roa, 2002, pp. 626).
- ✓ Representación de figuras tridimensionales. La imagen mental en tres dimensiones que en los primeros acercamientos de esta investigación tenían las estudiantes sobre los prismas, era la de un cubo, a pesar de que buscaron moldes y construyeron diferentes prismas para solucionar el problema de empacar sus productos, cuando hacían un gráfico para analizar una situación problema, siempre lo asociaban a esta forma. La interpretación de volumen como una magnitud física tridimensional, calculable como el producto de tres longitudes o el producto de una superficie por una longitud, sentó las bases para que el modelo de figura tridimensional, se fortaleciera desde la relación plano/espacio en cuyo caso el proceso de visualización del cuerpo en la mente se enriqueció.

Las situaciones que se dieron en la intervención didáctica forzaron el establecimiento de relaciones entre lo que se percibe en el espacio tridimensional y lo que aparece cuando este queda plasmado en el plano. Así las cosas, la relación entre el espacio tridimensional y el bidimensional se robusteció ofreciendo elementos de referencia para el estudio de los cuerpos, así como facilitando la visualización mental (si se producían cambios de posición o de tamaño), la estructuración, la capacidad de abstracción para reconocer aspectos propios de su condición (longitud, posición) y la preparación para imaginarse la figura en su totalidad, aunque solo se vea una parte.

Sin embargo, se quedó en deuda con la unidimensionalidad del volumen ya que el aspecto de medir y comparar en el conteo de unidades de volumen no se trabajó, en parte por la premura del tiempo y en parte porque el interiorizar la unidad de medida que necesitaban para hacer las estimaciones y las mediciones les volvió hábiles en la determinación de la unidad y por lo tanto no les fue necesario hacer conversiones. Este tratamiento en la metodología (el de no tratar la dimensionalidad del volumen como una unidad que tiene dos variantes) puede acarrear incomprensión, pues no se tuvo la oportunidad de abordar características propias del Sistema Métrico Decimal (SMD) necesarias para que la dimensionalidad del volumen se fijara en sus objetos mentales.

Ahora bien, con respecto a la estimación, el análisis de las estimaciones que llevaron a cabo las estudiantes en el taller de validación, muestran tendencia a la sobreestimación (estimar sobre el valor real). Los procesos utilizados por las estudiantes se relacionaron con el proceso de comparación de la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente presente (antropométrico para el caso de las longitudes de las aristas) y técnicas indirectas (empleo de fórmulas).

A pesar de esta tendencia, el hecho de que tanto en el concepto de volumen como en la capacidad de estimación se dieran avances que sugieren comprensión, se consideró un logro; dado que como se ilustró en la exploración de ideas previas, las estudiantes, sólo podían realizar algunos cálculos mentales con expresiones exactas, pues la no identificación de la magnitud volumen, la poca interiorización de referentes de medida y la misma concepción de que estimar no es un proceso matemático dada su "inexactitud" se los impedía.

Finalmente, se expone una clasificación de los componentes de la estimación en medida determinados por Castillo, Segovia, Castro & Molina (2011, pp. 166) que se vieron más beneficiados con la intervención didáctica, así como los desafíos que quedaron planteados, confirmando que la habilidad de estimar en situaciones de medida se regula progresivamente al interactuar con los demás y con el medio.

Avances	**Desafíos**
✓ Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.	✓ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar un referente ausente, acotar, descomponer, recomponer, reajustar
✓ Percibir lo que va a ser medido o estimado.	✓ Verificar la adecuación de la estimación.
✓ Comprender el concepto de unidad de medida.	✓ Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
✓ Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.	✓ Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.

- ✓ Usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones: iterar y/o comparar un referente presente y usar técnicas indirectas (empleo de fórmulas)

- ✓ Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.

Tabla 1. Avances y desafíos de los componentes de la estimación en medida.

4.1.2.3 Actuación de la modelación

“La modelación como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones que se quieren comprender…es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él” (Biembengut y Hein, citados por Biembengut & Hein, 2004, pp. 108) y tal como lo afirman los autores, en este estudio se pudo evidenciar que después de la intervención didáctica la comprensión se fijó en los modelos de trabajo de las estudiantes.

Para ilustrar la ruta que se siguió durante el proceso de implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, a continuación, se muestran las fases llevadas a cabo, resaltando la interacción entre las estudiantes y el problema. En ella se visualizan las variables que intervinieron en el proceso, las características distintivas en cada fase y la obtención de un modelo algebraico fruto de la relación entre las fórmulas, los cuerpos y la estimación comparativa con un múltiplo de un referente presente. Así, en esta experiencia se hicieron evidentes aspectos que facilitaron determinar la forma en la que las estudiantes mejoraron su capacidad estimativa, destacándose:

- ✓ El algoritmo se vinculó fuertemente con los modelos numéricos, los algebraicos y los geométricos-espaciales de las estudiantes, de ahí el uso frecuente de fórmulas para traducir la información que plantea el problema.

- ✓ El modelo facilitó que la experiencia de estimar pudiera llevarse a otros contextos para ser validada, como por ejemplo en el trabajo con el software geométrico Cabri 3D, en el que las estudiantes pudieron manipular el espacio tridimensional que ofrecen las herramientas del software y controlar las variables, de tal modo que los cambios de longitud o de superficie en los cuerpos no significaban un problema mayúsculo al ser estimados. Duval (2006, pp. 159) destaca el uso de software como una herramienta que ofrece una “percepción dinámica de la transformación de representación frente al soporte estático del papel” facilitando que los estudiantes cambien de una representación semiótica con intencionalidad y comprensión.

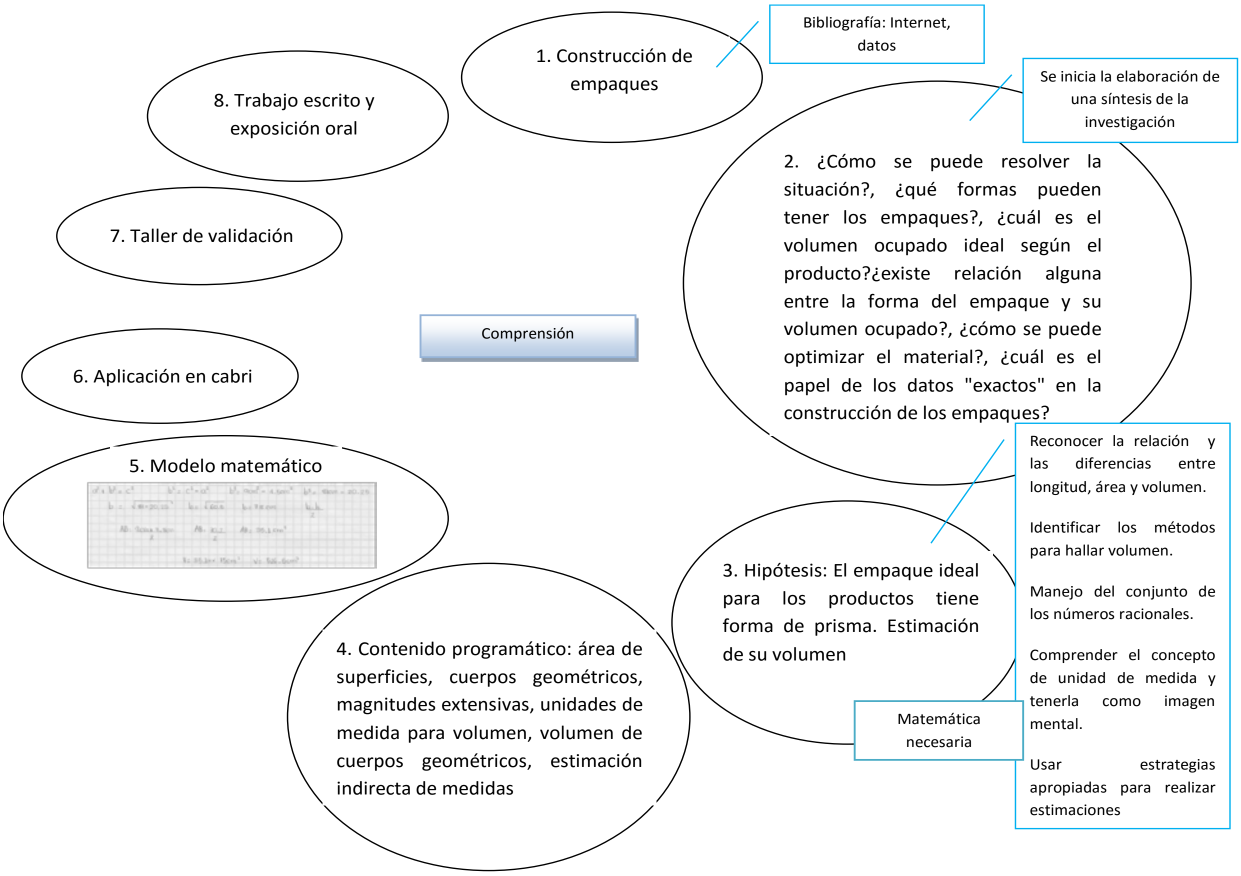


Fig. 4. Actuación de la modelación. Fuente: Elaboración propia

5 Conclusiones e implicaciones

Dada la importancia que tuvo la modelación como estrategia de enseñanza, es fundamental resaltar que el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica propia de la modelación facilitó la participación y la creación de un ambiente de auto-construcción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos.

La importancia de plantear una secuencia didáctica que facilitara el método de actuación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permitió reconocer que los recursos de aprendizaje puestos en marcha en la clase de matemáticas no pueden ser tareas aisladas o realizadas esporádicamente. A partir del proceso metodológico llevado a cabo a partir de la intervención desde la modelación, las estudiantes pudieron acomodar sus conocimientos a las nuevas construcciones mentales y teóricas que se tejieron sobre estimación; de hecho, la capacidad de pasar de “modelos de” a “modelos para” demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje permite la exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno y por ende al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Los resultados presentados evidencian que en las estudiantes hubo avances en la comprensión de la magnitud volumen, el uso de unidades de medida estandarizadas y no estandarizadas, la estimación, el reconocimiento y uso de la cantidad de magnitud y el uso de diferentes sistemas numéricos, tales avances se refieren según el Ministerio de Educación Nacional en los referentes curriculares de la Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas (1998) al desarrollo del pensamiento métrico.

Es fundamental resaltar que el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica -propia de la modelación- facilitó la participación y la creación de un ambiente de auto-construcción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos. Las estudiantes demostraron flexibilidad en sus raciocinios y en las estrategias para resolver problemas y movilizaron y transfirieron conocimientos de un contexto a otro demostrando autonomía, responsabilidad e interés a lo largo de todo el proceso.

Fue claro que algunas estudiantes consiguieron realizar estimaciones cercanas a la medida real, aunque lo hicieran utilizando su cuerpo como una extensión. No obstante, la estrategia de usar medidas antropométricas vino a convertirse en una forma de encarar el obstáculo que supone el uso excesivo del SMD, que con regularidad reduce el acto de medir a lo algorítmico y permite visualizar a la medida como una acción cotidiana y no como una cuestión aritmética. Con relación a los modelos de trabajo, se pudo concluir que los modelos que tenían las estudiantes sobre medición, espacio tridimensional, volumen y estimación al iniciar este estudio fueron evolucionando conceptualmente hasta estructurarse como elementos más elaborados, producto de la percepción, del discurso, de la interacción social y de la experiencia de cada una frente a lo que se vivía en el aula (Otero, & Banks-Leite, 2006, pp. 153), por lo que se espera que se sigan enriqueciéndose ahora que se han fortalecido sus bases. Sin embargo, el mayor alcance que tiene para las estudiantes la evolución de sus modelos es su funcionalidad y la posibilidad que les brinda de solucionar situaciones de medida en las que anticipar o juzgar un resultado pueda ser determinante.

Otro punto importante es que las estudiantes ampliaron su percepción del concepto de volumen pasando de considerarlo solo como volumen desplazado a considerarlo también como volumen ocupado; además, pudieron diferenciarlo de otros conceptos, por ejemplo, del de capacidad y del de superficie.

Considerando la relación que las estudiantes establecieron con la matemática durante la intervención didáctica, se puede decir que plantear una secuencia didáctica que facilitara el método de actuación de la modelación como estrategia de enseñanza fue una estrategia fundamental. Los recursos puestos en marcha por las estudiantes llevan a considerar que, en efecto, las tareas aisladas o realizadas esporádicamente no son la mejor propuesta para facilitar el aprendizaje. A lo largo de la implementación de la secuencia didáctica se verificó que bajo los parámetros de la modelación, las estudiantes pudieron acomodar sus conocimientos a las nuevas construcciones mentales y teóricas que se tejieron sobre estimación; de hecho, la capacidad de pasar de “modelos de” a “modelos para” (que la mayoría de las estudiantes envueltas en el estudio reveló), demuestra que la modelación como estrategia de enseñanza permite la exploración de diversas formas de acercarse a un fenómeno y por ende al proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con relación a la estimación se puede decir que, finalizado el estudio, las estudiantes comprenden algunas técnicas para llevar a cabo la tarea de estimar, entendiendo “comprenden” en el sentido que le da Godino (2002, pp.3): conocen porqué dichas técnicas son adecuadas, su ámbito de validez y las relaciones que presentan con otras técnicas. A pesar de esto, no se puede decir que las estudiantes son competentes estimando, porque como explica el mismo investigador, no dominan correctamente (con un margen de error mínimo) las técnicas para estimar, ni aplican técnicas variadas que permitan decir que conocen cómo hacer la tarea en cualquier situación.

No obstante, se considera que con la implementación de la modelación como estrategia metodológica de enseñanza sí se aportó al desarrollo de la estimación toda vez, que se fortalecieron aspectos como los notacionales, escritura alfanumérica, mejoramiento de las técnicas para medir y la utilización de instrumentos de medida, el cálculo aritmético, el uso de fórmulas, la interiorización de las unidades de medida de longitud, la cualidad que mide el volumen, la flexibilidad mental, entre otros, todos ellos relacionados directamente con la estimación de cantidades continuas en las estudiantes.

Se resalta por último el hecho de que la mayoría de las estudiantes adquirió la estructura multiplicativa del volumen sin dar muestras de que han adquirido la noción de “cubrir con capas”, este aspecto reviste importancia porque en investigaciones recientes de Sanmiguel & Salinas (2011, pp. 552) la tendencia era contraria: el uso de estrategias de recuento de cubitos desplazaba al uso de fórmulas o a la composición y descomposición de los cuerpos.

Bibliografía

Axpe, M. (s.f). *La investigación etnográfica en el campo de la educación. Una aproximación meta–analítica.* Tesis de Doctorado.

Biembengut, M. & Hein, N. (2004) *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación Matemática*, V. 16 (2), p.105-125.

Biembengut, M. & Hein, N. (s.f) *Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas*. Departamento de matemática – CCEN, Universidad Regional de Blumenau.
Recuperado de: http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf.

Blomhøj, M., (2004) *Mathematical modelling – a theory for practice. International perspectives on learning and teaching mathematics*. *National center for mathematics education. Suecia,* pp. 45-159.

Bressan, A. & Bogisic, B. (1996) La *estimación, una forma importante de pensar en matemática*. Biblioteca Nacional de Maestros. Recuperado de: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL000516.pdf.

Callís, J. & Fiol, L. (s.f) *Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal,* p. 161-169.

Cañón, M., (2009) *Orientaciones didácticas al tratamiento de la longitud en la escuela: del reconocimiento de atributos a la comprensión de los procesos de conservación*. En: ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. ASOCOLME. Memorias del 9° encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Cesar. p. 141-146.

Castillo, J., Segovia, I., Castro, E., & Molina, M. (2011) *Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie*. Trabajo presentado en el Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática, Granada, 17-19 febrero.

Chamorro, M., & Belmonte, J. (1991) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

Chamorro, M. (1995). *Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. UNO revista de Didáctica de las Matemáticas*, n° J, pp. 31-53.

Colección Cuadernos de Matemática Educativa, cuaderno no. 5 (2002) *Estándares curriculares - área matemáticas: aportes para el análisis*. Asociación colombiana de matemática educativa, ASOCOLME.

Córdoba, F. J. (2011) *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: editorial Labor, S.A.

Duval, R. (2006) *Un tema crucial en la Educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME*, V. 9.1, pp. 143 - 168.

Godino, J. (2002) *Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática.* XVI Convengo Nazionale: Incontri de la Matemática. Castel San Prieto Terme Bologna. Novembre.

Godino, J.; Batanero, C. & Roa, R. (2002) *Proyecto Edumat-Maestros.* Febrero. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Manotas, M., & Rojas, C., (2008) *Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios. Zona próxima*, No. 9, p. 60 - 69.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*. *Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Otero, M. & Banks-Leite, L. (2006) *Modelos mentales y modelos numéricos: Un estudio descriptivo en la enseñanza media. Relime*. V. 9, (1), p. 151-178.

Raviolo, A., Moscato, M., &Schnersch, A. (2005) *Enseñanza del concepto de densidad a través de un modelo analógico*. *Revista de Enseñanza de la Física*, vol. 18, N° 2. p. 93-103.

Sáiz, M. (2003) *Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. Revista mexicana de investigación educativa*, V. 8 (18), p. 447-478.

Sáiz, M. (s.f) *El volumen ¿por dónde empezar?* Recuperado de: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Sanmiguel, A. & Salinas, M. (2011) *Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2° de ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida.* En Marín, M; Fernández, G.; Blanco, L.; Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV.*543-554. Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Saucedo, G. (2009) *Hacia la construcción del concepto de volumen*. En Zapico, I., & Tajeyan, S. (Ed.), *Acta de la VII Conferencia Argentina de Educación Matemática*. República Argentina, ciudad de Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Trigueros, M., (2009). *El uso de La modelación en la enseñanza de las matemáticas. Revista Innovación educativa*, V. 9(46), p. 75-87.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. Tecno Lógicas. 19. 51-81

Primer autor: **Yaneth Milena Agudelo Marin**

Licenciada en Educación con especialidad en Matemáticas, Magíster en Enseñanza de las Ciencias y estudiante de Doctorado en Educación. He sido docente de matemáticas en instituciones públicas y privadas de la ciudad de Pereira; Colombia, actualmente me desempeño como docente-tutora de la maestría en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad Autónoma de Manizales. agudeloyanethmilena@gmail.com

Segundo autor: **Ligia Inés García Castro**

Licenciada en Orientación Escolar, Magister en Educación, docente de diferentes programas de maestría en el área de Cognición, didáctica de la matemática y Metodología de la investigación. Docente investigadora en el Centro de Estudios Avanzados en niñez y juventud en la línea de Cognición. Par evaluador de Colciencias en proyectos de investigación de diferentes universidades de Colombia. ligiaines.garcia@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 159-170

Professores de matemática no ensino superior: desafios vivenciados no início da carreira docente

Cibele Aparecida Santos Rosa, Dilma Antunes Silva, Laurizete Ferragut Passos, Raquel Seriani

Fecha de recepción:23/11/2015
Fecha de aceptación: 22/05/2016

Resumen	El texto aborda los desafíos experimentados por los profesores de Matemática al comienzo de la carrera frente a las dificultades de los estudiantes con rezago en domínio de contenidos matemáticos. Se trata de un estudio cualitativo, el cual adopta la utilización de entrevistas semiestructuradas como instrumento para la recolección de datos. Los sujetos del estudio fueron tres docentes de matemática que se desempeñan en el nivel superior, en diferentes instituciones. Los profesores señalaron varias dificultades e insatisfacciones, y el mayor desafío es hacer que los alumnos entiendan el contenido. Los resultados señalan que los profesores participantes en este estudio demostraron tener conciencia de su condición de formadores, de sus saberes y limitaciones para actuar como buenos profesionales, pero en el día a día, se enfrentan al desafío de repensar su práctica docente. **Palabras- clave**: Profesores principiantes. Dificultades. Matemática.
Abstract	The text addresses the challenges experienced by mathematics teachers in front early career to the difficulties of students with inadequate mathematical content. It is a qualitative study, in which we adopted the use of semi-structured interviews as a tool for data collection. The study subjects were three math teachers who work in higher education in different institutions. Teachers pointed out various difficulties and dissatisfactions, and the biggest challenge is to make students understand the content. The results show that the study showed teachers to be aware of their status as trainers, their knowledge and limitations to act as good professionals; but in everyday life, they are faced with the challenge to rethink their practice in the classroom . **Keywords:** Beginner teachers. Difficulties. Mathematics.
Resumo	O texto aborda os desafios vivenciados pelos professores de Matemática em início de carreira frente às dificuldades dos alunos com defasagem de conteúdos matemáticos. Trata-se de estudo qualitativo, no qual adotou-se entrevistas semiestruturadas como instrumento para a coleta de dados. Os sujeitos do estudo foram três docentes de matemática que atuam no nível superior, em instituições distintas. Os professores apontaram várias dificuldades e insatisfações, e o maior desafio é fazer com que os alunos entendam o conteúdo. Os resultados apontam que os professores do estudo demonstraram ter consciência de sua condição de formadores, de seus saberes e limitações para atuar como bons profissionais; mas no dia a dia, deparam-se com o desafio de repensar sua prática em sala de aula. **Palavras-chave:** Professores iniciantes. Dificuldades. Matemática.

1. Introdução

As recentes discussões sobre os desafios do trabalho do professor iniciante nos vários níveis de ensino revelam não só o crescimento das pesquisas sobre a temática, como também a necessidade de políticas de inserção desses iniciantes com vistas à melhoria da qualidade de ensino nos cursos de formação de professores (Passos; Silva; Marquesin, 2014).

É consensual o pensamento de que o início da carreira é uma fase marcante em qualquer profissão e com a docência não é diferente.

Bozu (2010, p.58) descreve o professor iniciante como "uma pessoa, geralmente, jovem, que se encontra em um momento de transição entre os conhecimentos, habilidades e destrezas".

A problemática relativa ao professor iniciante constitui-se como foco de interesse das pesquisas e intervenções. Alguns países já reconhecem que as consequências do não atendimento aos problemas específicos dos docentes iniciantes trazem sérios prejuízos e impacto ao sistema educativo.

Mas, no Brasil, ainda não existe uma efetiva preocupação por parte da maioria das universidades em pensar ações e estratégias para atender aos anseios dos professores iniciantes na carreira no ensino superior. No entanto, percebemos que essa temática vem chamando a atenção e ganhando espaços nos estudos da área. Assim, Zanchet; Fagundes e Facin (2012) citam que o início de uma profissão inclui o reconhecimento de sua cultura, de seu estatuto e das peculiaridades sociopolíticas que a caracterizam.

Nesse sentido, o período de iniciação à profissão docente representa o tempo em que deve acontecer a transmissão da cultura docente, dos conhecimentos, dos valores e dos símbolos da profissão, assim como deve ocorrer a adaptação do professor iniciante ao entorno social onde desenvolve sua atividade docente.

As experiências vivenciadas nos primeiros anos de carreira são as que mais impactam na vida profissional do professor. Trata-se de um período em que o docente procura aceitar a si mesmo e aos colegas e também tentar alcançar certo nível de segurança, no modo de lidar com os problemas e os desafios do dia a dia.

Nesse sentido, Garcia (1999) reforça que a iniciação à docência é um período de tensões e os professores iniciantes precisam adquirir conhecimento profissional, além de manterem certo equilíbrio emocional.

Assim, os primeiros anos de exercício profissional são vistos como importantes aos professores, pois fazem a transição de estudantes para professores e, em razão disso, aparecem dúvidas, tensões e ele precisam de maior conhecimento, como também de uma competência profissional adequada em pouco tempo.

Para Valli (1992 apud Garcia, 1999), os problemas que mais ameaçam os professores iniciantes são a imitação acrítica de condutas observadas em outros professores, o isolamento de seus colegas, a dificuldade de transferir o conhecimento adquirido em sua formação e o desenvolvimento de uma concepção técnica de ensino.

Refletir a respeito destas dificuldades dos professores iniciantes é importante para reforçar que o apoio recebido nessa fase e, os desafios encontrados e compartilhados, podem levar à superação e a um maior crescimento profissional.

Perrenoud (2002) cita que os professores devem dominar os saberes que serão ensinados, serem capazes de dar aulas, de administrar uma turma e avaliar.

Nesse sentido, a contribuição de D'Ambrósio (2003) é importante quando ele enfatiza que o professor de Matemática precisa possuir quatro características para desenvolver seu trabalho: visão do que é a aprendizagem Matemática, visão do que vem a ser Matemática, visão do que é um ambiente facilitador à atividade Matemática e visão do que é um ambiente facilitador à atividade.

Assim, o objetivo deste estudo foi investigar os desafios vivenciados pelos professores de Matemática em início de carreira no ensino superior.

Para tal, procuramos responder à questão: Quais desafios enfrenta o professor de Matemática em início de carreira no ensino superior?

2. Método

Trata-se de um estudo qualitativo, no qual adotamos a utilização de entrevistas semiestruturadas para a coleta de dados.

Ludke e André (1998) citam que a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados pelo contato direto do pesquisador com os sujeitos da pesquisa, prioriza o processo e não o produto e preocupa-se em retratar o ponto de vista dos participantes. Já, Baptista e Souza (2011, p.79) afirmam que "a entrevista é um método de recolher informações que consistem em conversas orais".

Nessa direção, a entrevista aplicada aos sujeitos deste estudo desenvolveu-se por meio de um roteiro semiestruturado, o que proporcionou ao entrevistador certa liberdade para fazer adaptações.

Os critérios adotados para a seleção dos sujeitos foram: a) ser formado em curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, b) atuar nos cursos de Licenciatura de Matemática ou Pedagogia, c) ter até 5 anos de atuação no ensino superior, independente da experiência anterior. O primeiro contato com os profissionais ocorreu por intermédio de outros professores (indicação de amigos), em seguida foi efetuado contato telefônico e também por e-mail.

Assim, após receberem o e-mail apresentando a pesquisadora, os objetivos da pesquisa e a importância deles para a investigação, foram selecionados três docentes de faculdades distintas, uma na zona leste de São Paulo e outra em Guarulhos, município de grande porte situado nas cercanias da capital paulista.

Os dados do quadro 1 apresentam as características dos professores sujeitos do estudo.

Nome	**Idade/ Tempo atuação**	**Pós- graduação**	**Curso leciona**

Wander	40/ 2 anos	Mestrado Ed. Matemática	Matemática
Regina	30/ 5 anos	Mestrado Ed. Matemática	Matemática e Pedagogia
Daniel	51/ 5 meses	Mestrado Ed. Matemática	Pedagogia

Quadro1: Características dos professores.

3. Resultados e discussões

Na tentativa de desvelar os desafios do docente iniciante no ensino superior, visualizamos a importância atribuída à motivação para a escolha da profissão.

Os professores escolheram a docência ou foram levados a ela por caminhos diversos. Essa opção vem sendo uma decisão acompanhada por motivos pessoais relativos à vida de cada um, suas experiências e expectativas (DIAS; ENGERS, 2005), além de carregar consigo componentes normativos, afetivos e cognitivos (VIEIRA, 1997).

Em relação à dimensão afetiva, Regina cita que o desejo de tornar-se professora vem desde muito jovem.

> [...] eu decidi ser professora desde os 14 anos. Aliás, quando eu era pequena eu já pensava em ser professora, aí passei por aquelas profissões em que toda criança pensa, jornalista, pediatra, mas, eu sempre pensei e sempre quis ser professora.

O depoimento de Regina parece indicar a ideia de vocação reforçada nas expressões “desde pequena”, “sempre pensei e sempre quis ser professora”, mostra um sentimento de determinismo pela escolha profissional, desde muito cedo.

As razões que levam professores a escolherem a profissão em que atuam, tendem a ser variadas e podem envolver desde a questão da vocação até a necessidade de trabalho para garantir o próprio sustento (Thurler; Perrenoud, 2006).

Com muita frequência, os professores atribuem a escolha pela carreira docente justificada pela sugestão de dom e vocação e, habitualmente, eles interpretam por uma escolha “divina” ou “natural” (Valle, 2006).

As falas dos professores Wander e Daniel, entretanto, revelam que o ingresso na carreira docente surgiu por razões diferenciadas, mas, as formas de ingresso foram semelhantes, ambos por convite.

A escolha de Wander foi um convite de uma prima que atuava na área da Educação como diretora de escola:

> [...] em 1995 eu fazia um curso de engenharia, e aí recebi um convite de uma prima minha que era diretora de uma escola estadual para lecionar à noite era regular. Comecei a lecionar e fazia concomitantemente o curso de engenharia.

.A fase de preparação contempla as experiências profissionais e vivências anteriores ao ingresso na docência superior. No caso do professor Wander essa preparação se deu a partir de sua experiência como professor no ensino médio.

Pode-se inferir que esta opção o tenha ajudado no início de sua atividade como docente no ensino superior.

Já o professor Daniel relatou que tinha o desejo de ser físico e que a docência surgiu por acaso em sua vida. Ele assim descreve: “Olha, foi um pouco assim, meio que, não foi por querer, eu não queria ser professor na realidade eu queria ser físico”. O professor ainda relata que o interesse pela docência surgiu por um convite de um dos profissionais da instituição onde estudava, pois queria ser físico, mas começou a trabalhar com curso técnico.

Embora a docência não tenha sido a primeira opção dos professores Daniel e Wander, eles revelaram-se felizes na profissão, porém não realizados profissionalmente. A esse respeito, Daniel comenta: “Eu estou gostando do ensino superior, mas ainda não está do jeito que eu gostaria. Eu me cobro muito”.

O professor Wander também revela gostar muito do que faz, mas aponta outro aspecto: a consciência da complexidade da profissão e indica a necessidade constante de atualização e que também é preciso acreditar no aluno.

> Eu gosto muito do que faço. Não sei, acho que nós, professores temos de estar sempre nos atualizando, gostar logicamente daquilo que a gente faz acreditar no aluno e sempre estar em constante aprimoramento (Wander).

É possível inferir que a construção de suas identidades profissionais como docentes no ensino superior tem como ponto de partida o ingresso da carreira no magistério. Nesse sentido, Pimenta e Ghedin (2002, p. 120) argumentam que a “identidade profissional se constrói a partir da revisão das tradições, mas também da reafirmação de práticas consagradas culturalmente e que permanecem significativas”.

Quanto à especificidade da docência em Matemática, esta parece estar intimamente relacionada à experiência que os participantes da pesquisa tiveram com essa ciência e, sobretudo, pela facilidade de aprendizado e por gostarem da disciplina. Nesse ponto, afirma Wander: “eu sempre gostei da área de exatas”. Para a professora Regina, os conteúdos relacionados às ciências exatas não eram problema. Visto que gostava muito, descobriu-se professora de Matemática quando cursava a “oitava série e, eu tinha Química e Física, eu ia bem, gostava muito. Quando aprendi equação do segundo grau, parece que abriu minha mente. Aqui eu já sabia que queria ser professora de Matemática”.

Daniel explicita que sua escolha pela docência em Matemática foi construída por meio de uma trajetória de erros e acertos. Sua primeira escolha foi Física, mas desistiu e trancou a matrícula. Esta decisão foi em razão da rotina desgastante de seu trabalho, pois: “Eu entrava muito cedo no trabalho, não dava tempo de ir para casa, fazia tudo na empresa, tomava banho, jantava e depois pegava o ônibus para a faculdade, isso foi me desgastando”.

Segundo Brito e Santos (2013), a iniciação à docência é um período marcado por sentimentos ambíguos. Como todo início de profissão, esses primeiros anos constituem uma etapa de profundas mudanças e aprendizagem sobre a profissão.

Assim, a licenciatura em Matemática surgiu na vida do professor Daniel por acaso. Um amigo que iria participar do processo seletivo, o incentivou para também prestar o vestibular. Ele aceitou o convite e, assim, começou a cursar Matemática.

Segundo Isaia e Bolzan (2011, p.190), em grande parte dos casos se dá mais em função de uma “oportunidade de trabalho que se apresenta” que de uma escolha “efetivamente buscada” para a condução da vida profissional. Esse caráter circunstancial se faz presente na fala do entrevistado.

Quanto ao ingresso na carreira docente, a fase de iniciação profissional docente é um momento de grande importância na constituição da carreira do professor. Esse momento vem sendo reconhecido por suas características próprias e configurado pela ocorrência das principais marcas da identidade que originam a profissionalidade docente.

Os primeiros anos de carreira formam e consolidam os hábitos e os conhecimentos para o exercício da docência, sendo a entrada na carreira docente um período que, para autores como Garcia (1999) e Tardif (2002), revela-se determinante para a vida profissional do docente.

Para o professor Wander, os desafios são muitos, e ele demonstra ter clareza dos desafios que envolvem a profissão docente. O professor procura sempre buscar informações que precisa com colegas. Em suas palavras: “Tem muitos desafios, muitas dificuldades, a gente não entra preparado para a docência, tem que correr atrás, tenho muitos amigos que eu corro atrás, pergunto coisas”.

O depoimento da professora Regina corrobora a fala do professor Wander sobre não estar preparado para a docência. Assim, ela expõe o mesmo sentimento: “acho que o professor nunca se sente preparado para lecionar no ensino superior, eu não me sinto preparada, é uma busca constante”.

É necessário que se compreenda a formação docente como “um processo que precisa de construção de estratégias sistematizadas que envolvam esforços pessoais e institucionais para a construção efetiva do desenvolvimento profissional docente” (Favarin, 2014 p.3).

Outro desafio apontado pelo professor Daniel tem relação com o saber fazer em sua disciplina. Isso porque a metodologia do ensino de Matemática está vinculada à educação básica, experiência esta que ele não possui.

> Olha as dificuldades que eu encontro são justamente por não ter experiência em formação de professores de primeiro ao quinto ano. Então, Metodologia do Ensino de Matemática, o problema é ensinar professores que vão ensinar Matemática para séries iniciais.

Constatamos que é na dinâmica do cotidiano que o saber fazer desses professores vai se constituindo, e é na experiência que vão se conscientizando de suas próprias fragilidades em relação a seu papel de formador de docentes.

A falta de experiência é reforçada na fala do professor Daniel, sobretudo, por se tornar um trabalho a princípio solitário, quando ele diz: “Bom, hoje estou como professor na faculdade há quase seis meses, e não tenho contato com outros professores, eu tenho que ir atrás das coisas sozinho”.

Ao se referir ao trabalho solitário dos professores Cunha (2012) destaca que os iniciantes, ao ingressarem na carreira, são "jogados ao léo", sem que haja uma preocupação com a construção de sua profissionalidade ou até mesmo, um acompanhamento de seu cotidiano no universo da sala de aula. A esse respeito, Perrenoud (2002, p.96) afirma que "podemos trabalhar vinte anos ao lado de um colega sem nunca ter falado com ele sobre questões pedagógicas e sem saber mais sobre as suas práticas do que simples rumores".

Para a maioria dos docentes, a inexistência de um bom trabalho didático não é notada até o momento em que se deparam com o mundo real. E só a partir desse momento que os agora professores notam as deficiências didáticas de seus cursos de graduação.

No depoimento do professor Daniel, a didática é um ponto fundamental para o bom desenvolvimento de seu trabalho. Ele parece ter clareza, de que há muito a melhorar. "Eu me cobro muito ainda em relação a minha prática e sei que algumas coisas precisam melhorar".

O professor universitário quando assume uma sala de aula passa por muitos desafios. Garcia (1999 p.28) conceitua como "o período de confrontação inicial do professor com as complexidades da situação profissional".

No caso da professora Regina, o desafio encontra-se em trabalhar com um público muito diferente e, ao mesmo tempo, com o "pânico" que a disciplina causa no aluno. A professora demonstra estar preocupada com esses futuros formadores que irão ensinar Matemática. "Desafio mesmo é fazer com que os alunos entendam a Matemática e consigam levar depois isso lá na frente".

Isaia e Bolzan (2010) citam que esse processo de inserção na docência superior envolve o enfrentamento constante de desafios que se complexificam, à medida que os profissionais tomam consciência de que a docência tem especificidades que precisam ser aprendidas.

Quanto aos desafios com os conteúdos de Matemática, observamos que os problemas referentes ao processo de ensino aprendizagem da Matemática em todos os níveis não são novos. Tal como em alguns professores e alunos. Mesmo com tal importância, a disciplina Matemática tem, às vezes, uma conotação negativa que influencia os alunos. Assim, cabe ao professor tentar mudar essa conotação negativa.

Para os sujeitos da presente pesquisa, o conteúdo vem se mostrando desafiador, sobretudo os atrelados aos cursos de Pedagogia.

No depoimento do professor Daniel, é nítida a preocupação em relação aos conteúdos e sua transmissão de forma didática, para que os alunos entendam a matéria. Assim, mais uma vez, podemos inferir a relação com o "saber fazer".

> Olha, primeiramente o conteúdo, você tem que saber o conteúdo, mas não só o conteúdo. Acho que é importante você saber o conteúdo e onde você vai usar esse conteúdo, como que você vai ensinar?

Para o professor Daniel, seu maior desafio é fazer com que os alunos entendam o conteúdo. "Está difícil. Um grande desafio para eu ensinar é convencêlas a aprender. Para elas também está difícil compreender o que eu estou dizendo" (Professora Daniel).

Nesse sentido, é importante salientar que cada aluno tem seu jeito e tempo para aprender. Hoje, os estudos mostram a dificuldade de se observar o modo peculiar e singular com que cada aluno aprende.

Na visão do professor Wander a atualização constante em relação aos conteúdos é fundamental. "Eu não sei, acho que nós professores temos que estar sempre nos atualizando em relação aos conteúdos" (Professor Wander).

A questão do gostar do que faz e a atualização mostram-se importantes no depoimento de Regina que corrobora a fala do professor Wander. "Eu acho que você tem que gostar do que você faz, precisa saber do conteúdo a ser ministrado, atualizar-se é o caminho".

Nessa perspectiva, sabemos que a condição do professor iniciante não é a mesma daquele que já possui uma vasta experiência docente, pois os problemas e necessidades são diferentes é, nesse sentido, que a formação continuada não deveria ser padronizada, mas, sim, reconhecer e atender às diferentes etapas da carreira.

Zabalza (2003 apud Favarin, 2014) cita que a formação continuada deve conter também a interação entre teoria e prática, defende as novas modalidades de formação que giram em torno da ideia de reflexão sobre a prática e a vinculação real entre a teoria e a prática profissional.

Assim, antes do compromisso com a disciplina, o compromisso do docente é com seus alunos, motivo pelo qual ele deve servir como facilitador, fazendo o que estiver o seu alcance, para que os alunos tenham acesso aos conteúdos e práticas da disciplina.

Quanto ao perfil do aluno do ensino superior e seu papel frente a dificuldade com o aprendizado de Matemática, observamos que a Matemática ainda é um enorme desafio, tanto para as crianças, jovens e, até mesmo para os professores que estão sendo formados nos cursos de Licenciaturas em Matemática e Pedagogia.

Gomes (2002) relata que muitas mudanças, atualmente, que vêm ocorrendo exigem de todos os professores constantes adaptações que, por sua vez, consistem em grandes desafios.

Em relação aos conteúdos de Matemática, a professora Regina revela preocupação pedagógica e destaca que os alunos trazem um bloqueio em relação à disciplina. E esse bloqueio pode dificultar a forma como os futuros professores irão ensinar Matemática.

Na maioria dos cursos de formação de professores, sobretudo os de Pedagogia, é evidente a resistência e a fobia em relação à Matemática (GOMES, 2002), pois os alunos apresentam lacunas no domínio dos conceitos Matemáticos fundamentais para o dia a dia.

O professor Daniel ao ser questionado sobre o trabalho no curso de Pedagogia, quanto aos conhecimentos Matemáticos considera que os discentes já deveriam saber esses conteúdos, e, essa questão trazida pelo professor Daniel é importante, pois se trata da formação inicial do aluno, ou seja, ele não aprendeu Matemática como deveria na educação básica.

Decorrentes dos problemas da formação dos professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos que, infelizmente, são, muitas vezes, de qualidade insatisfatória. Por sua vez, a implantação de uma formação profissional qualificada, não se ampara com a existência de concepções pedagógicas inadequadas e nas restrições ligadas às condições de trabalho (Brasil, 1997).

A professora Regina enfatiza que na Pedagogia existe mais angustias em relação aos conteúdos matemáticos.

> Só em relação aos alunos da Pedagogia, eles têm mais angústias em relação à aprendizagem dos conteúdos de Matemática; não é dificuldade e sim receio por não terem aprendido na escola e acharem que não vão mais aprender.

Sanchez (2004) destaca que as dificuldades de aprendizagem em Matemática podem se manifestar nos seguintes aspectos:

> Dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática. Questões de grande interesse e que com o tempo podem dar lugar ao fenômeno da ansiedade para com a matemática e que sintetiza o acúmulo de problemas que os alunos maiores experimentam diante do contato com a matemática. (p.174)

Observamos que a docência é uma atividade complexa que exige uma preparação para sua atuação. O professor Wander cita que o papel da atualização e da continuidade dos estudos que, nessa profissão, é marcada pela complexidade de situações e de sujeitos presentes na sala de aula, precisa ser cada vez mais constante.

> A gente procura sempre estar se atualizando. Porque a cada ano os alunos chegam diferentes. É lógico, isso é obvio, eles vão chegar diferentes e, a gente espera que eles cheguem diferentes. É até bom e as dificuldades estão aí.

Assim, conforme o professor Wander as diferentes características dos alunos são fatores importantes a serem avaliados e trabalhados em sala de aula. O professor demonstra ter clareza sobre os novos alunos do ensino superior e a importância de sanar as dificuldades trazidas por esse grupo.

É importante constatar que a trajetória escolar dos alunos que cursam licenciaturas nas instituições foi feita em escolas públicas e apresentam também diferenças culturais e ausência de conhecimentos específicos.

Se a formação básica não for de qualidade, futuramente as dificuldades ficarão ainda mais evidentes na vida do estudante.

É importante salientar ser de reponsabilidade das instituições de ensino modificar seus cursos, pois a formação vai se mostrando distante da realidade específica do contexto escolar, ficando assim reduzida à discussão das questões teóricas, sem ter como alicerce a relação teoria/prática.

4. Considerações Finais

Este estudo pretendeu discutir os desafios expressos pelos professores quando entram na carreira docente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Os achados da pesquisa revelaram que essa fase mostrou-se complexa para os iniciantes investigados, especialmente porque atuam em cursos que têm especificidade própria, ou seja, formam professores.

Se características específicas da função são exigidas de um professor formador já experiente, como e de que forma um formador iniciante pode adquirí-las? Como amenizar os desafios apontados pelos iniciantes da pesquisa em relação às dificuldades com o ensino da Matemática e com a ausência de repertórios básicos da área pelos alunos do curso? Como compartilhar esses desafios com os colegas e deles encontrar apoio?

Essas questões foram emergindo da análise dos dados e provocaram as autoras na busca de literatura que ajudasse a avançar na reflexão dos dados da pesquisa. Altet e colaboradores (2003) destacam que os formadores de outros professores normalmente são escolhidos para atuar nos cursos de formação com base em sua especialidade, embora evidenciem a diversidade de tarefas assumidas.

Os professores iniciantes pesquisados tiveram sua formação na área específica, mas os cursos em que atuavam eram variados. Saber o conteúdo de matemática era a primeira condição para ser professor dos cursos de Licenciatura em Matemática, mas não era a única. Um dos desafios por ele enfrentados era como ensinar esse conteúdo e como fazer o aluno do curso aprender esse conteúdo e aprender a ensiná-lo para os futuros alunos.

A necessidade de uma formação para essa tarefa foi se revelando como um dos desafios que emergiram da prática desses professores. A busca de especialização e outros cursos de formação mostrou-se como uma saída para enfrentar os desafios.

O principal desafio declarado pelos professores é como lidar com alunos que chegam à Licenciatura com defasagem dos conhecimentos básicos de Matemática. Ressaltam que estão buscando alternativas para sanar as defasagens dos discentes como: revisão dos conceitos do ensino básico e oferecimento de atendimento individual para tirar dúvidas.

Constatou-se, então, que esse desafio requer dos iniciantes uma atenção especial para a gestão pedagógica dos conteúdos para ensinar, ou seja, a necessidade de como saber ensinar conteúdos da área para alunos sem conhecimentos básicos de matemática.

É nesse sentido que os professores do estudo mostraram a consciência que têm de sua condição de formadores de professores, de seus saberes e limitações para atuar como bons profissionais, ou seja, no dia a dia, deparam-se com o desafio de repensar sua prática em sala de aula.

Outro dado constatado e relatado pelos professores iniciantes se refere ao apoio que colegas experientes poderiam dar nessa fase da carreira. Da mesma forma, constatou-se que não há preocupação das instituições em organizar um trabalho de acompanhamento e apoio a esses iniciantes para o enfrentamento dos desafios que foram por eles indicados.

Bibliografia

ALTET, M.; PAQUAY, L.; PERRENOUD, P. (2003). *A profissionalização dos formadores de professores: realidade emergente ou fantasia?* In ALTET, M.; PAQUAY, L.; PERRENOUD, P. A profissionalização dos formadores de professores. ArtMed, Porto Alegre: RS. Brasil.

Bozu, Z. (2010). *Los jóvenes profesores universitarios en el contexto actual de la enseñanza universitaria Claves y controversias. Revista Iberoamericana de Educación / Revista IBERO-AMERICANA DE EDUCAÇÃO,* 21-28.

Brito, E; Santos ,C. (2013) Prática pedagógica dos professores de matemática no início da experiência docente: ciclos de vida e saberes docentes. Disponível em: *http://www.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/eventos/evento2009/GT.1/1*

Brasil (1997). Secretaria de Educação Fundamental *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Cunnha, M.I. (2012). *O professor iniciante: o claro/escuro nas políticas e nas práticas de formação profissional***.** Anais do III Congresso Internacional sobre professorado principiante e inserción profesional a la docencia. Santiago de Chile.

D'ambrosio, U. (2003). *Educação matemática: da teoria à prática.* 10 ed. Papirus,Campinas. Brasil.

Dias, C. M. S.; Engers, M. E. A. (2005). *Tempos e memórias de professoras alfabetizadoras.* EDUCAÇÃO, 28, 505-523.

Garcia, M. O. (1999). *Formação de Professores para uma mudança educativa.* Porto Editora, Porto. Portugal.

Gomes, M. (2002) *Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos e o conhecimento matemático nos cursos de formação de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. Contrapontos,* 6, 363-376.

Favarini, E. (2014). *A formação de professores e os desafios encontrados na entrada da carreira docente*. X ANPED SUL, Florianópolis. Brasil.

Fiorentini, D; Lorenzato, S. (2007). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados, Campinas: SP. Brasil.

Flores, M. A.(2009). *La investigación sobre los primeros años de enseñanza: lecturas e implicaciones.* In: Garcia, C. M.(org.). *El profesorado principiante inserción a la docencia*. Ediciones Octaedro, 59-98. Barcelona. Espanha.

Isaia, S ;Bolzan, *D. O processo formativo do professor no ensino superior: em busca de uma ambiência (trans) formativa*. In: Isaia, S. M. A.; Bolzan, D. P. V.; A. M. R.(Org.) Pedagogia Universitária. Tecendo redes sobre a Educação Superior. Santa Maria: Editora UFSM, p.63-77, 2009.

Isaia; Bolzan, D. (2008).*Compreendendo os movimentos construtivos da docência superior: construções sobre pedagogia universitária.* LINHAS CRÍTICAS, 26, 43-59,

Lima, I; Galvão, A.(2012) *Escolha profissional na perspectiva de professores de Educação Infantil. Revista EDUCAÇÃO,* 37,321-336.

Lüdke, M.; André, M. E. D. A.(2008). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. EPU, São Paulo. Brasil.

Passos,L F.; Silva, S; Marques, D. (2014) *Desafios Pedagógicos e Institucionais de Professores Iniciantes no ensino superior e as implicações para os cursos de formação de professores*. *Revista EDUCAÇÃO,* 9, 447 – 457.

Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização e razão pedagógica.* Artmed, Porto Alegre. Brasil.

Perenoud, P. (2002). *Aprender a negociar a mudança em educação: novas estratégias de inovação.* Edições ASA, Porto. Portugal.

Pimenta, S.G; Ghedin, E. (2002). (Org) *Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito.* Cotez, São Paulo. Brasil.

Pires.C**.** *(2000). Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA,* 8,10 -15.

Sanchez, J. (2004). *Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica.* Artmed, Porto Alegre: RS. Brasil.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional.* Vozes, Petrópolis: RJ. Brasil.

Thurler, M. G.; Perrenoud, P.(2006). *Cooperação entre professores: a formação inicial deve preceder as práticas? CADERNOS DE PESQUISA,* 128, 357-375.

Valle, I. R. (2006). *Carreira do magistério: uma escolha profissional deliberada? REVISTA BRASILEIRA DE ESTUDOS PEDAGÓGICOS,* n. 216,178-187

Viera, E. C. (1997). *Socialização, opção profissional e representação na Educação Física***.** MOTRIZ, 3,44-49.

Zanchet, B; Fagundes,M; Facin, H. (2012) Motivações, primeiras experiências e desafios: o que expressam os docentes universitários iniciantes. Disponível em: http://formacaodocente.autenticaeditora.com.br

Rosa, Cibele Aparecida Santos. Pedagoga. Mestra em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Doutoranda no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUCSP. E-mail: cibelle@bol.com.br

Silva, Dilma Antunes. Pedagoga. Mestra em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Doutoranda em Educação (Psicologia da Educação)- PUCSP. Atualmente é Docente (EBTT) na Universidade Federal de São Paulo- UNIFESP. E-mail: antunes.silva@unifesp.br

Passos, Laurizete Ferragut. Possui Pós-doutorado pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Atualmente é Professora nos Programas de Estudos Pós- Graduados em Educação: Psicologia da Educação e Programa de Formação de Formadores (FORMEP) da PUCSP. E-mail: laurizetefer@gmail.com.

Seriani, Raquel. Graduada em Matemática e Pedagogia. Possui Mestrado em Educação (Psicologia da Educação) pela PUCSP. Atualmente é Doutoranda no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUCSP. Leciona nos níveis básico e superior. E-mail: raquel.seriani@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 171-187

Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización

Lizzeth Aurora Navarro Ibarra, Alan Daniel Robles Aguilar, Julio César Ansaldo Leyva, Felipe de Jesús Castro Lugo

Fecha de recepción: 18/08/2015
Fecha de aceptación: 27/05/2016

Resumen	La enseñanza del Cálculo basada en el dominio de la algoritmia genera que éste carezca de sentido para los estudiantes y que tengan conceptos pobres de los objetos matemáticos. Es por ello que en el presente trabajo bajo el enfoque cualitativo se plantea una actividad con hoja de trabajo, manipulable físico y archivo de GeoGebra para resolver un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana. Se considera como un primer acercamiento a la optimización en Cálculo Diferencial en Educación Superior. Al concluir el estudio se determinó que la actividad contribuyó a que los estudiantes identificaran las variables involucradas y la pendiente de la recta tangente igual a cero en un punto crítico. **Palabras clave**: Cálculo, optimización, GeoGebra
Abstract	The teaching of Calculus with only algorithms generates knowledge without meaning for students and poor concepts of mathematical objects. That is why this paper under the qualitative approach raises an activity with a worksheet, physical manipulative object and GeoGebra file to solve optimization everyday life problem. It is considers as a first approach to the topic of optimization in differential calculus in higher education. At the conclusion of the study was determined that the activity helped students identify the variables involved and the slope of the tangent line equal zero at a critical point. **Keywords**: Calculation, optimization, GeoGebra
Resumo	O ensino do Cálculo com base no domínio dos algoritmos faz com que o próprio Cálculo não tenha sentido para os estudantes e que eles adquiram conceitos superficiais sobre os objetos matemáticos. É por isso que neste trabalho sob o enfoque qualitativo apresenta a proposta de uma atividade com uma folha de trabalho, um manipulável físico, assim como um ficheiro de GeoGebra para resolver um problema de otimização da vida quotidiana. Considera-se uma primeira abordagem à otimização em Cálculo Diferencial em Educação Superior. Na conclusão foi determinado que a atividade ajudou aos estudantes na identificação das variáveis envolvidas e da inclinação da tangente zero num ponto crítico. **Palavras-chave: Cálculo, otimização, GeoGebra**

1. Introducción

El acceso masivo de los jóvenes a la universidad es un fenómeno característico del último cuarto del siglo XX, donde las competencias o conocimientos básicos son esencialmente los mismos desde hace 30 años sin embargo en ciencias como la Matemática, se requiere de una adaptación en los modos de enseñanza que hagan que éstas sean atractivas para todos los estudiantes (Rodríguez & Zuazua, 2002, p. 6).

La problemática surge a partir del hecho didáctico que demuestra que la enseñanza actual no produce aprendizaje, situación que se constata en la práctica cotidiana. La enseñanza tradicional de la Matemática en términos generales permite satisfacer el contrato didáctico, pero no parece lograr un verdadero aprendizaje entre los estudiantes (Cantoral, 2001, p. 13).

El llamado método matemático requiere una exigencia sistemática en términos de rigor, reflexión, jerarquización, deducción inductiva y globalización acumulativa, es decir, todo se relaciona, no hay partes independientes. Además todo confluye a concretizar en la aplicabilidad y a la generalización de lo aprendido (Hidalgo, Maroto & Palacios, 2004, p. 93).

Tradicionalmente la Matemática es de las materias que menos entusiasma a la mayoría de los estudiantes, causando rechazo por considerarla difícil y carente de uso posterior en la vida. El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática es afectado por la poca vinculación del contenido con situaciones cotidianas, así como por la falta de utilización de la Matemática en otras asignaturas pertenecientes a un mismo plan de estudio y la vinculación del contenido matemático a realidades ajenas a las de los estudiantes (Ruíz, 2008, p. 4).

Cantoral (2001, p. 6) señala que se ha considerado a la enseñanza de la Matemática como una suerte de arte bajo responsabilidad del profesor, quien evalúa el aprendizaje del estudiante con el buen comportamiento escolar, la aprobación o reprobación del curso y no se analiza qué sucede con el aprendizaje, originando que se confunda el aprendizaje con la acreditación.

Las investigaciones didácticas han encontrado que no es fácil para los estudiantes realizar el análisis de un concepto, cuando éste no se les presenta reducido a su parte algebraica (Artigue, 1998, p. 40). Los estudios realizados por Artigue (1995, p. 97) muestran que las dificultades encontradas por los estudiantes universitarios en el estudio del Cálculo es porque la enseñanza tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, y en evaluar las competencias adquiridas sobre estas habilidades.

La enseñanza del Cálculo basada en el dominio de la algoritmia genera que éste carezca de sentido para los estudiantes y que tengan conceptos pobres de los objetos matemáticos. Además esto provoca dificultad para resolver problemas no rutinarios, también, al intentar modelar problemas con situaciones de la vida cotidiana y más aún, al interpretar los resultados obtenidos según Dávila, Grijalva y Bravo (2012, p. 212). Es raro que un estudiante conciba a la Matemática como algo que le pueda ser útil más allá de tener alguna habilidad en la resolución de ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos (Zúñiga, 2007, p. 148).

Bajo esta circunstancia Camarena (2009, p. 23) menciona que la Matemática en contexto ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento, dando significado a la Matemática, reforzando el desarrollo de habilidades matemáticas al resolver problemas relacionados con los intereses del estudiante. De esta forma, al ser los estudiantes de Ingeniería en su vida profesional usuarios de la Matemática, requieren en su formación de situaciones que reflejen la utilidad de los conocimientos matemáticos en su área de especialidad (Zúñiga, 2007, p. 149).

Ante la situación descrita se propuso elaborar una secuencia didáctica para la construcción de significado del concepto de derivada a través de problemas de optimización de contexto de la vida cotidiana en estudiantes universitarios. Es por ello que en el presente trabajo se expone el diseño de una actividad donde el estudiante debe resolver un problema de optimización sin el uso de las derivadas y con apoyo de tecnología. Esto con el fin de que se utilice como un primer acercamiento a la temática de la optimización en un nivel de Educación Superior en la impartición de la asignatura de Cálculo Diferencial.

La actividad se desarrolla tomando como base un problema de contexto de la vida cotidiana donde los estudiantes manipulan materiales para buscar la solución al problema planteado. Posteriormente se utiliza la tecnología a través del software GeoGebra para abordar el problema mediante diversas representaciones. El propósito es crear las condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes, lo que significa que el estudiante se involucra en una actividad intelectual cuya consecuencia es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto (Cantoral, 2001, p. 6).

1.1 Objetivo

Diseñar una actividad didáctica apoyada en tecnología para la construcción de significado del concepto de derivada a través de un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana en estudiantes universitarios.

1.2 Justificación

En la vida diaria comúnmente se resuelven problemas de optimización, al momento de elegir un producto, cuando se busca el mejor camino para llegar a un lugar, cuando se planea un día de actividades, se busca optimizar el tiempo. En ninguna de estas situaciones se emplea Matemática formal para encontrar lo que se busca, sino que se resuelve la problemática utilizando la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente se llega a la solución óptima.

En la asignatura de Cálculo Diferencial a nivel universitario, se estudian problemas de optimización, donde se utiliza el concepto de derivada para encontrar los máximos y mínimos, situación que resuelven los estudiantes de forma automática, pero sin realmente concientizarse de las implicaciones del concepto de derivada porque no han desarrollado una actitud científica que involucre la intuición, la conjetura, la formalización y el rigor (Malaspina, 2007, p. 367).

Turégano (1995, pp. 240-241) menciona que solamente una construcción de conceptos que se apoya en la intuición y visualización hace que ésos sean accesibles para los estudiantes, permitiéndoles tener ideas claras con respecto a la diferenciación como método para evaluar pendientes y a la integración como método para evaluar áreas. La instrucción Matemática se debe centrar en el significado y en los conceptos, para que ese conocimiento inicial se procese con profundidad, generando una estructura cognitiva estable donde se pueda construir un desarrollo posterior de las habilidades (Heid, 1988, p. 3).

El uso de aprendizaje activo, tecnología, ideas importantes (ajuste, acumulación) y utilidad instrumental del conocimiento matemático son acciones que apoyan un aprendizaje viable en el aula según Salinas y Alanís (2009, p. 366). Es por ello que centrarse en la génesis histórica de los conceptos y hacer uso de la tecnología es lo que permitirá a los estudiantes enfocarse en los conceptos y los procesos más que en el desarrollo de habilidades algorítmicas según Turégano (1995, p. 230).

2. Marco Teórico

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son la base de estudio de la Matemática Educativa con la finalidad de mejorarlos. Para comprender estos procesos se requiere de un marco teórico que proporcione las herramientas conceptuales y metodológicas que guíen y fundamenten el análisis de los sucesos que se presentan en el aula.

Por lo anterior, en el análisis, interpretación, diseño y valoración de la actividad didáctica fue considerado el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), porque es un modelo teórico sobre la cognición y la instrucción Matemática integrado en un sistema conceptual lógicamente organizado que considera a la Matemática como una actividad de resolución de problemas, además como un lenguaje simbólico, que articula las facetas institucionales y personales del conocimiento. Este enfoque proporciona una serie de herramientas teóricas y metodológicas que permiten diseñar procesos de enseñanza, así como describir y explicar con diferentes grados de detalle lo que sucede durante el proceso, además de valorar la pertinencia y generar pautas para su mejoramiento. (Godino, Batanero & Font, 2009, p. 4).

3. Metodología

3.1 Participantes y contexto

El estudio se realizó bajo el análisis cualitativo con el fin de identificar la concepción que logran los estudiantes a través de la actividad didáctica diseñada para la comprensión del significado de la derivada en problemas de optimización. La actividad didáctica está dirigida a estudiantes de la asignatura Cálculo I y sus equivalentes para Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, donde el objetivo de esta asignatura según el Programa Analítico del Plan 2009 es “solucionar problemas relacionados con procesos y sucesos en fenómenos naturales o producidos por el ser humano, a través de la aplicación de principios, leyes y modelos de las ciencias básicas, formales y experimentales, con el propósito de desarrollar la capacidad de resolver problemas en Ingeniería” (Instituto Tecnológico de Sonora, s.f., p. 1).

Las Ingenierías a las cuales se dirige la asignatura Cálculo I son: Ingeniero Civil, Ingeniero Electromecánico, Ingeniero en Electrónica, Ingeniero Industrial y de Sistemas, Ingeniero en Mecatrónica, Ingeniero Químico, Ingeniero en Software, Ingeniero en Ciencias Ambientales e Ingeniero en Biosistemas, según el Programa Analítico 2009 (Instituto Tecnológico de Sonora, s.f., p. 1).

Se aplicó la actividad didáctica a un grupo de 20 estudiantes, de diferentes edades y sexo indistinto que cursaban la asignatura de Cálculo I en el semestre Enero-Mayo 2014 y se desarrolló durante el mes de Abril. Para ello se dispuso de un aula de cómputo donde cada estudiante tuvo una computadora con el software GeoGebra ya instalado, además de contar con proyector y mesas de trabajo.

3.2 Instrumento

El medio para recabar información sobre las interpretaciones y concepciones de los estudiantes fue una hoja de trabajo que se diseñó para este fin. El instrumento está integrado por 30 reactivos donde algunas son preguntas abiertas, y otros requieren hacer procedimientos matemáticos para obtener áreas y volúmenes. Los valores calculados de volúmenes a su vez el estudiante los refleja de forma tabular y gráfica. En la hoja de trabajo también se registraron las observaciones y conclusiones de los estudiantes al interactuar con el ambiente dinámico.

3.3 Diseño de la actividad didáctica

La actividad didáctica planteo el problema que enunciaba "*Construir un cilindro con el máximo volumen*", siendo la única frase que describía la temática que se iba abordar antes del primer reactivo. Al iniciar la actividad se indicó a los estudiantes que trabajaran en parejas y se les proporcionó una hoja tamaño carta, cinta adhesiva, una regla, tijeras, arroz crudo y una taza medidora. En la primera pregunta se les solicitó doblar la hoja tamaño carta y cortarla (ver figura 1).

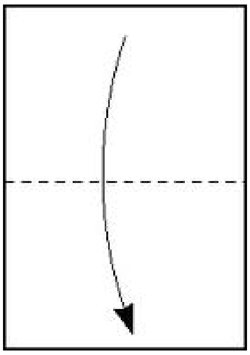


Figura 1. Esquema de una hoja tamaño carta e indicación del doblez que se debe realizar

Con cada mitad de hoja el estudiante construyó un cilindro al doblarla una por el costado largo y la otra por el costado corto. Los cilindros estuvieron formados por la misma área de papel y se cuestionó al estudiante si al colocar los cilindros en la mesa y llenarlos con arroz se necesitaba la misma cantidad de arroz. Después de contestar la pregunta en la hoja de trabajo de forma individual, procedieron los estudiantes a llenar de arroz cada cilindro y midieron la cantidad de arroz utilizado en cada cilindro con la taza medidora. Anotaron los datos de volumen medidos concluyendo de esta forma con la interacción con el manipulable físico y el trabajo en parejas.

Posteriormente se cuestionó al estudiante si existía un cilindro con otras dimensiones de radio y altura, pero con la misma área que tuviera un volumen mayor. A continuación se condujo al estudiante para que construyera la expresión del volumen del cilindro en función del radio de la base y completaron una tabla donde calculaban el volumen para diferentes radios dados con la expresión obtenida. Se les presentó además una tabla con segmentos de líneas que representaban inclinaciones de rectas tangentes, donde se les solicitó que encerraran en un círculo la recta tangente antes del volumen máximo, en el volumen máximo y después del volumen máximo (ver figura 2) para que concluyeran cuál es el volumen máximo y en qué se fundamentaron.

Pendiente de la recta tangente			
Antes del volumen máximo	/	\	—
En el volumen máximo	/	\	—
Después del volumen máximo	/	\	—

Figura 2. Imagen de la tabla para seleccionar inclinación de la recta tangente

En seguida se dio la instrucción de abrir el archivo de GeoGebra e iniciaron trabajando con tablas de radio contra volumen dando incrementos de radio de 0.25 cm, 0.1 cm y 0.01 cm, observaron a su vez los valores de la pendiente e identificaron los valores de radio entre los que se encuentra el volumen máximo para cada acercamiento. Después se solicitó activar la casilla de verificación *cilindro* para que trabajaran con el manipulable virtual y visualizaran el cambio de volumen y de las dimensiones de radio y de altura al mover un deslizador. En la siguientes preguntas se dio la indicación de activar casillas de verificación que mostraron la gráfica de radio contra volumen y la recta tangente sobre la gráfica en un punto R, el cual movió el estudiante a través del deslizador, observando simultáneamente las coordenadas y la pendiente de la recta tangente (ver figura 3).

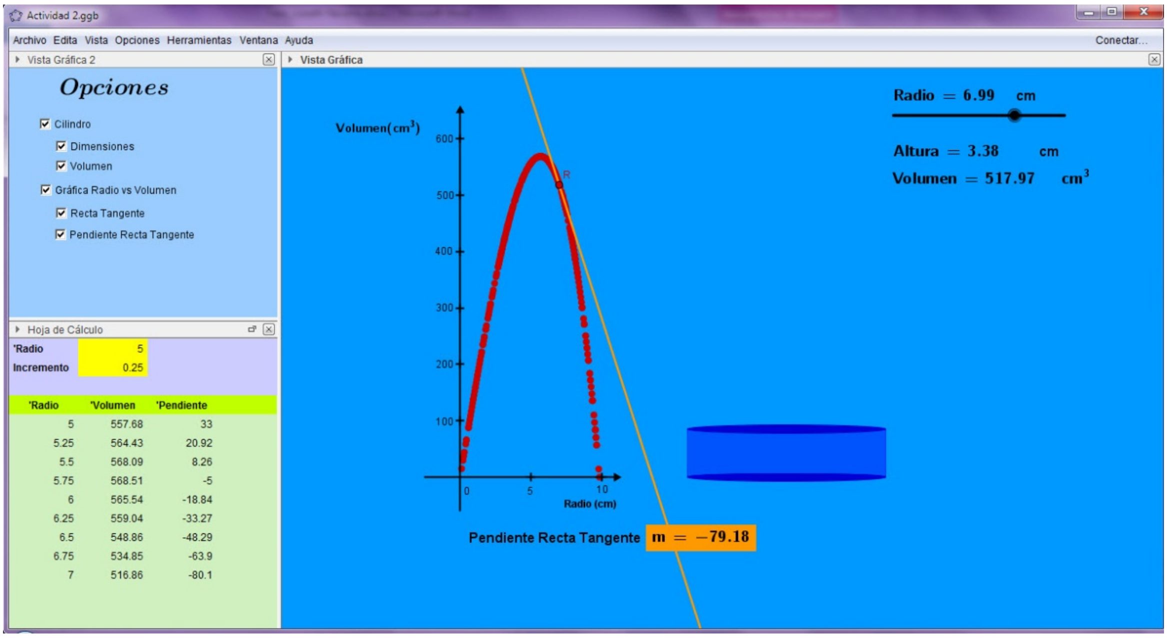


Figura 3. Gráfica de radio contra volumen y recta tangente

El cilindro virtual permaneció visible mientras se deslizó el punto R, por lo que se pudo observar el cambio de dimensiones que se presentaron en él. De igual forma, la pendiente de la recta tangente cambió según el desplazamiento del punto R dentro de la función, observando gráficamente la posición, así como el valor exacto de la pendiente registrada en esa localización. Concluyendo el estudiante al finalizar la actividad que el máximo se encuentra en la parte más alta de la gráfica y donde la recta tangente es horizontal.

3.4 Procedimiento

El proceso metodológico comprendió cuatro fases de acuerdo al alcance de este trabajo que se describen a continuación:

- *Diseño de la actividad didáctica.* La actividad didáctica se integró con una hoja de trabajo, un archivo de GeoGebra y material para la elaboración del manipulable físico.
- *Pilotaje de prueba*. La actividad se aplicó a cinco estudiantes de un grupo de Cálculo I para identificar limitaciones o errores en el diseño de la actividad. Posteriormente se realizaron cambios para mejorar la redacción de instrucciones y de algunas preguntas de las hojas de trabajo, así como también en los colores utilizados en el archivo de GeoGebra para una adecuada visualización.
- *Implementación de la actividad*. La puesta en práctica de la actividad se hizo con un grupo intacto de 20 estudiantes inscritos en la asignatura Cálculo I. Se llevó a cabo en un aula de cómputo de la universidad que proporcionó computadoras de escritorio para cada participante, así como espacio para construir el manipulable físico y contestar la hoja de trabajo. La duración de la actividad fue de 90 minutos en una sola sesión.
- *Organización de la información*. Con base a las evidencias recolectadas a través de la hoja de trabajo se elaboró una base de datos con las respuestas

aportadas para cada pregunta por los estudiantes y con ello identificar a los que integrarían el estudio de casos.

4. Análisis y resultados

El análisis didáctico de la actividad se realizó de acuerdo a las cinco fases que especifica el EOS, las cuales son: Análisis de las prácticas matemáticas, Análisis de objetos y procesos matemáticos, Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos, Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

4.1 Análisis de las prácticas matemáticas

En este nivel se identifican las prácticas matemáticas que surgen en la actividad didáctica a través de actuaciones, manifestaciones verbales o simbólicas, etc., que se realizan en la resolución de un problema matemático, todo ello para encontrar la solución del problema, comunicar dicha solución, validarla o generalizar los resultados obtenidos. En un análisis *a posteriori* del sistema de prácticas se determinó que las dificultades estuvieron en la construcción de la función y en algunos casos al evaluar la función para completar la tabla de valores que posteriormente se utiliza para graficar de forma manual. Con respecto al resto de las prácticas matemáticas, éstas surgieron como se esperaba.

4.2 Análisis de objetos y proceso matemáticos

En este nivel se examinan los procesos y objetos matemáticos que son activados con las prácticas matemáticas realizadas en la actividad propuesta. En un análisis a posteriori de los objetos y procesos matemáticos se detectó incertidumbre sobre el concepto de la recta tangente, una vez aclaradas las características que definen a la recta tangente, la actividad continuó sin contratiempo. También la construcción del modelo físico causó indecisiones pero se resolvieron al momento de observar cómo estaban elaborándolos otros equipos.

4.3 Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

En este nivel se registran cuáles y de qué tipo son las configuraciones didácticas en que se divide el proceso de instrucción, así como conocer cómo se articulan entre sí las configuraciones didácticas para formar la trayectoria didáctica. En la realización de un proceso instruccional, es decir, en cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático, se produce una trayectoria muestral del proceso, la cual describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha surgido a través del tiempo. Según Godino, Contreras y Font (2006, p. 4) se pueden identificar seis tipos de procesos con sus trayectorias muestrales correspondientes: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional.

En un análisis *a posteriori* de las trayectorias e interacciones didácticas se observó que surgieron como se planteó en el diseño de la actividad. Los estudiantes trabajaron en equipo al inicio de la actividad y prosiguieron de forma individual como se indicaba, solicitando aclaraciones del docente cuando lo requerían, pero esto sucedió en pocas ocasiones.

4.4 Análisis de normas y metanormas

En este nivel se estudian las normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio, tomando en cuenta los fenómenos de índole social que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Las interacciones entre profesor y estudiantes están regidas por normas no explícitas. Las normas sociales durante el desarrollo de una clase son convenciones que describen cómo comunicarse unos con otros, cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación. Existen aspectos normativos del discurso matemático que son específicos de la actividad matemática escolar y que regulan las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje.

En un análisis *a posteriori* de las normas y metanormas se agregó una norma adicional al profesor y a los estudiantes, ya que se indicó no borrar lo ya escrito en la hoja de trabajo para poder identificar el proceso de razonamiento que llevaron a cabo y los posibles conflictos que surgieron. Para cumplir con esta instrucción se solicitó utilizar únicamente pluma y cruzar con líneas cuando una respuesta ya no fuera válida o decidieran proporcionar un nuevo argumento a lo solicitado.

4.5 Valoración de la idoneidad didáctica

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas de una didáctica descriptiva-explicativa para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué?, sin embargo para mejorar el funcionamiento de los procesos de estudio es necesario recurrir a criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora según D'Amore, Font y Godino (2007, p. 50). Los criterios de idoneidad para las diferentes facetas implicadas en un proceso de estudio matemático son: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006, pp. 4-5).

4.5.1 Idoneidad epistémica

Esta faceta se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos) con respecto de un significado de referencia. En un análisis *a priori*, en el diseño de la actividad didáctica se propuso contribuir a dar significado al concepto de la derivada a través de un problema de contexto de la vida cotidiana para encontrar un máximo donde la pendiente de la recta tangente igual a cero sea un criterio que confirme que el valor es un máximo. En la actividad se implementó un sistema de prácticas que promueve en los estudiantes la construcción de significado del objeto matemático al enfrentarse a diferentes representaciones y de esta forma lograr una mejor aproximación al significado institucional de referencia, por ello se considera que la idoneidad epistémica es *alta*.

A posteriori: De acuerdo a las respuestas aportadas por los estudiantes en la hoja de trabajo, se determinó cómo se fueron incorporando los elementos pretendidos a través del desarrollo de la actividad (ver figura 4).

26.- Activa la casilla "Gráfica Radio vs Volumen". Se muestra en la pantalla un punto R ubicado en el valor de Radio y de Volumen que tiene actualmente el cilindro. Mueve el punto negro para cambiar el tamaño del radio y observa la trayectoria del punto R en la gráfica. Describe la forma de la gráfica dónde se encuentra el volumen más grande La grafica tiene forma de Parabola concaba hacia abajo

27.- Activa la casilla "Recta Tangente" y mueve el punto negro del tamaño del radio con el ratón, observa lo que sucede con la recta tangente, ¿cómo es la recta tangente en el punto de volumen más grande? esta un poco inclinada

Antes del volumen más grande la recta tangente tiene pendiente positiva

Después del volumen más grande la recta tangente tiene pendiente Negativa

29.- Mueve el punto negro y observa la gráfica, ¿dónde la recta tangente es horizontal?
En la parte arriba del punto maximo del volumen

30.- ¿Existe otra parte de la gráfica dónde la recta tangente es horizontal? No

¿Por qué? es una parabola y solo en un lugar es horizontal

Figura 4. Estudiante #1, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

En los reactivos del 26 al 30 otro estudiante llegó a conclusiones similares a las mostradas en la figura 4, utilizando argumentos diferentes para fundamentar que ha encontrado un máximo, como se observa en la figura 5. Como se manifestó en las respuestas de los estudiantes, se ha contribuido a la formación de significado de la pendiente de la recta tangente horizontal en el valor máximo de una función, así como el cambio de pendiente antes del valor óptimo y después del valor óptimo, por lo cual se determinó una idoneidad epistémica a posteriori *alta*.

26.- Activa la casilla "Gráfica Radio vs Volumen". Se muestra en la pantalla un punto R ubicado en el valor de Radio y de Volumen que tiene actualmente el cilindro. Mueve el punto negro para cambiar el tamaño del radio y observa la trayectoria del punto R en la gráfica. Describe la forma de la gráfica dónde se encuentra el volumen más grande el punto maximo, se marca muy bien ∩

27.- Activa la casilla "Recta Tangente" y mueve el punto negro del tamaño del radio con el ratón, observa lo que sucede con la recta tangente, ¿cómo es la recta tangente en el punto de volumen más grande? se pone horizontalmente la tangente al llegar al punto maximo

Antes del volumen más grande ¿qué signo tiene la recta tangente? /

Después del volumen más grande ¿qué signo tiene la recta tangente? \

29.- Mueve el punto negro y observa la gráfica, ¿en qué parte de la gráfica la recta tangente es horizontal? cuando llega al maximo punto

30.- ¿Existe otra parte de la gráfica dónde la recta tangente es horizontal? no

¿Por qué? solo cuando llega al punto maximo es horizontal, porque de otra forma estaria / y asi \ la tangente

Figura 5. Estudiante #2, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.2 Idoneidad cognitiva

Permite valorar a priori si lo que se pretende enseñar se puede considerar en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, y a posteriori, si el aprendizaje efectivamente logrado es consistente con el pretendido. En un análisis *a priori*, el sistema de prácticas estuvo dirigido al establecimiento de funciones semióticas en los estudiantes que promovieran la matematización de una situación problema que requirió determinar un valor máximo con una restricción, identificando la recta tangente horizontal en ese valor, considerando una idoneidad cognitiva *alta*.

A posteriori: Como resultado de la puesta en escena de la actividad didáctica, se pudo detectar que los conocimientos previos así como los sistemas de prácticas necesarios para resolver las actividades variaban en los estudiantes dependiendo si habían cursado o no la asignatura extracurricular Fundamentos de Matemáticas. Presentando un mejor desarrollo de la actividad los estudiantes que ya habían cursado dicha asignatura. En la figura 6 se puede observar las dificultades para expresar una función.

Los estudiantes que presentaron dificultad al construir la función, al llenar tablas numéricas, así como graficar manualmente sí lograron avanzar en la actividad al interactuar con el software GeoGebra, donde visualizaron la gráfica y los valores correspondientes a los puntos de interés para la situación problema, por lo antes expuesto se considera una idoneidad cognitiva a posteriori media *alta*.

7.- Toma la mitad de la hoja de papel, con una regla mide sus lados y determina su área,
$A =$ 301 cm^2

14x21.5

8.- Observa la base del cilindro, es un circulo y se formó al enrollar la hoja, entonces el perímetro del círculo ($2\pi r$) es un lado del rectángulo de papel. Si llamamos "h" a la altura del rectángulo, entonces podemos escribir el área del cilindro como la suma de las áreas del círculo y del rectángulo, quedando $A =$ $2\pi r$ + h

9.- Sustituye ahora el valor del área que encontraste anteriormente en la pregunta 7 es de:

$h = \frac{\pi r - 301}{2}$

301 $= \pi r^2 + 2\pi rh$, y despeja h, $h =$ $\frac{\pi r^2}{2\pi r}$

$\pi r^2 + 2\pi r h =$

$301 = \pi r^2 + 2\pi r h =$ $\boxed{h = \frac{301 - \pi r^2}{2\pi r}}$

$2\pi r h = \frac{\pi r^2 - 301}{2\pi r}$

10.- El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, sustituye el valor de h obtenido en la pregunta anterior en $V = \pi r^2 \left(\frac{\pi r - 301}{2\pi}\right)$, simplifica la expresión y escríbela de nuevo $V =$ $\frac{\pi r h}{2\pi r}$

$V = \pi r^2 \left(\frac{301 - \pi r^2}{2\pi r}\right)$

$V = \frac{301 \pi r^2 - \pi r^4}{2\pi r^3}$

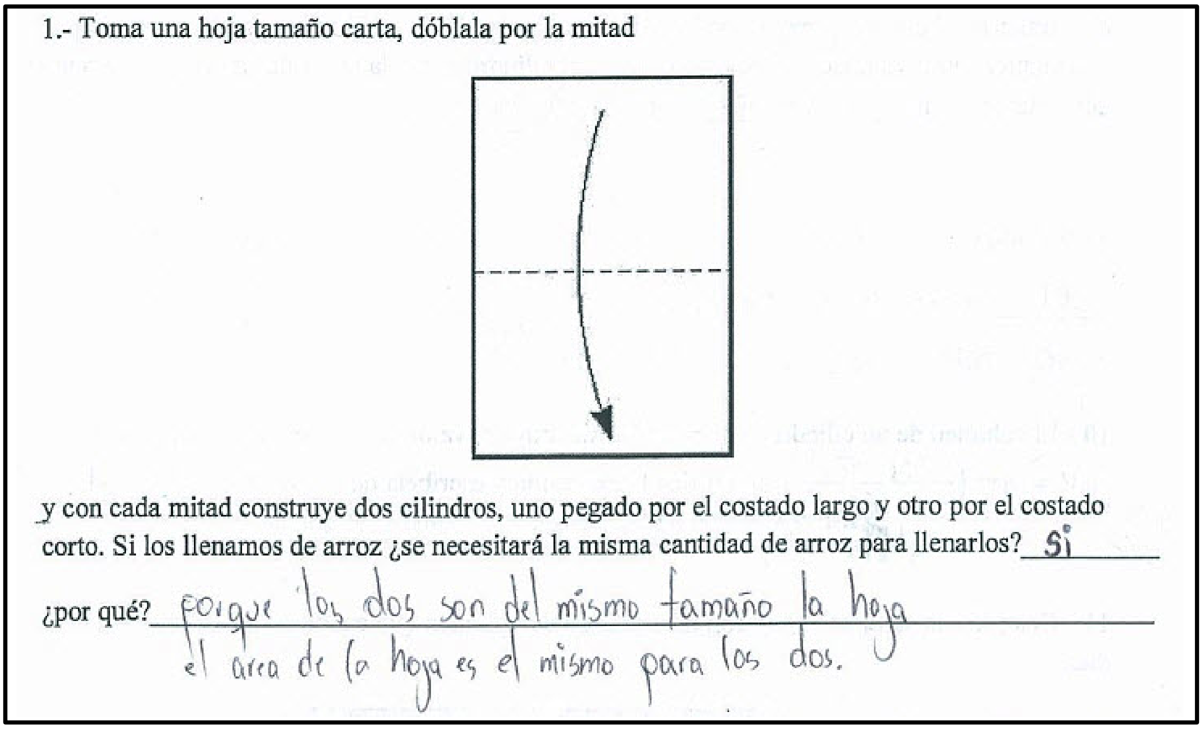
Figura 6. Estudiante #3, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.3 Idoneidad interaccional

Es el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados. En un análisis *a priori*, en el diseño de la actividad didáctica se buscó que tanto el material impreso, la construcción por parte de los estudiantes de los manipulables físicos, así como el archivo de GeoGebra, provocaran la emergencia de los objetos institucionales pretendidos para que los estudiantes se apropiaran de ellos.

La actividad estuvo diseñada para una mínima participación del profesor promoviendo tanto el trabajo individual como el colaborativo. La hoja de trabajo fue mejorada después del pilotaje por observar dificultades en la comprensión de algunas preguntas, además de agregar algunos esquemas que apoyaron las instrucciones dadas para una mejor comprensión. Tomando en cuenta lo anterior se consideró la idoneidad interaccional a priori como *alta*.

A posteriori: Se observó que la interacción con el software GeoGebra permitió superar las dificultades de algunos estudiantes en la construcción de una función al ir completando tablas y graficando los valores, logrando que se enfocasen en visualizar a la recta tangente y sus pendientes a través de la gráfica, así como el significado de la pendiente horizontal de la recta tangente en el máximo de una función (ver figuras 7 y 8), resultando en una idoneidad interaccional a posteriori *alta*.


1.- Toma una hoja tamaño carta, dóblala por la mitad

y con cada mitad construye dos cilindros, uno pegado por el costado largo y otro por el costado corto. Si los llenamos de arroz ¿se necesitará la misma cantidad de arroz para llenarlos? Sí

¿por qué? porque los dos son del mismo tamaño la hoja el área de la hoja es el mismo para los dos.

Figura 7. Ítem #1, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

3.- Rellena los cilindros con arroz y mide el volumen de arroz de cada cilindro con una taza medidora.

Cilindro	Volumen de arroz (ml)
Cilindro alto	265 ml aprox
Cilindro bajo	500 ml

4.- ¿Cuál cilindro es el que tiene mayor capacidad de almacenamiento?

el bajo

5.- ¿Qué características tienen diferentes los dos cilindros?

el radio, la altura, diametro, circunferencia.

Figura 8. Ítems #3 al #5, hoja de trabajo "Cilindro de mayor volumen"

4.5.4 Idoneidad mediacional

Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En un análisis *a priori*, en la actividad se requiere utilizar el software GeoGebra por lo cual es necesaria un aula con equipo de cómputo, situación que origina que se deba prever con tiempo el apartado de un espacio para esos fines.

El Instituto Tecnológico de Sonora sí tuvo disponibilidad de aula de cómputo donde cada estudiante pudo interactuar de forma individual con el software GeoGebra. Por lo que considerando el material impreso en la hoja de trabajo, el material básico para construir los manipulables físicos y el equipo de cómputo con el software GeoGebra con el que se trabajó, nos lleva a una idoneidad mediacional a priori *alta*.

A posteriori: Una vez finalizada la implementación de la actividad se confirmó que se pudo lograr tener un equipo de cómputo para cada estudiante, así como la hoja de trabajo y elementos físicos necesarios para la elaboración de los manipulables. De la misma forma el software GeoGebra estuvo instalado en cada equipo de cómputo, evitándose retrasos en el avance de la actividad y por ello se consideró una idoneidad mediacional a posteriori *alta*.

4.5.5 Idoneidad emocional

Es el grado de implicación, interés o motivación del alumnado en el proceso de estudio. En un análisis *a priori*, el tipo de situación problema planteado, así como iniciar con la construcción de un manipulable físico por parte de los estudiantes, además del manipulable virtual en el software GeoGebra favorece la participación dinámica de los estudiantes durante la actividad didáctica, por lo que se considera una idoneidad emocional a priori *alta*.

A posteriori: Una vez concluida la actividad didáctica se confirma que la situación problema seleccionada sí fue de interés para los estudiantes, así como el incluir la construcción de un manipulable físico y observar el comportamiento del manipulable virtual en el software GeoGebra. En la actividad uno de los estudiantes expresó que el volumen de dos cilindros construidos con la mitad de una hoja tamaño carta (en forma longitudinal y transversal) es el mismo, y después al comprobar la capacidad de cada cilindro determinando el contenido de arroz con una taza medidora, descubrió que tienen volúmenes diferentes, situación que le planteó una interrogante y una motivación para continuar con la actividad (ver figuras 7 y 8).

Al interactuar con el software y el manipulable virtual los estudiantes observaron las variaciones en las dimensiones y la gráfica de la función de forma instantánea, sin tener que construir otro manipulable físico, ni elaborar más tablas de aproximaciones que requieren el uso de calculadora, facilitando con ello identificar la solución en un menor tiempo, por lo cual se tiene una idoneidad emocional a posteriori *alta*.

4.5.6 Idoneidad ecológica

Es el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, entre otros. En un análisis *a priori*, la actividad didáctica permitió contribuir con el significado del concepto de derivada a través de la resolución de un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana por medio de la pendiente de la recta tangente en el valor crítico, permitiendo la emergencia de otros objetos matemáticos. Es por ello que se consideró la idoneidad ecológica a priori como *alta*.

A posteriori: La implementación de la actividad didáctica permitió que los estudiantes resolvieran el problema de optimización a través de aproximaciones en tablas, de forma gráfica y validando el resultado óptimo por medio de la recta tangente horizontal en el valor máximo, contribuyendo de esta forma a la construcción del concepto derivada. El tiempo para realizar la actividad fue superior al contemplado durante la planeación, llevando a algunos estudiantes hasta 30 minutos adicionales para completarla. Por lo anterior mencionado se considera una idoneidad ecológica a posteriori *media alta*.

5. Conclusiones

El análisis de resultados a través de las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos, las trayectorias e interacciones didácticas, las normas y metanormas así como la valoración de la idoneidad didáctica permiten expresar las conclusiones que se exponen a continuación.

La actividad didáctica generó las condiciones para que los estudiantes se involucraran en el problema a resolver. La selección de una situación problema de un aspecto de la vida diaria contribuyó positivamente en el interés de los participantes al tener dominio de los términos y características que describen el elemento a optimizar.

El iniciar la actividad con la construcción de un manipulable físico enfrentó a los estudiantes con el hecho de que una misma área de material no genera el mismo volumen cuando se fabrica un recipiente, sino que depende de las dimensiones con las que se decida usar el recurso disponible.

El software GeoGebra que se utilizó como apoyo facilitó la visualización de la gráfica de la función y la tabulación de los valores de la misma. A su vez el estudiante pudo interactuar con el software al desplazarse a través de la función al mismo tiempo que observó una representación gráfica del aspecto del cilindro que se construiría, así como sus dimensiones y capacidad.

El empleo de la recta tangente a la función antes del punto máximo, en el punto máximo y después del mismo permitió que el estudiante se concientizara del cambio de signo de la pendiente. El uso del software dinámico dio la posibilidad de que el estudiante observará los valores que tomaba la pendiente conforme movía el punto de tangencia, facilitando además que identificaran la pendiente igual a cero en el punto crítico.

Por lo anterior se puede afirmar que la actividad didáctica contribuyó a que el estudiante relacionara la pendiente de la recta tangente igual a cero en el punto crítico como un elemento que asegura que se ha encontrado el valor óptimo buscado. Es por ello que el objetivo de este trabajo se alcanzó al establecer las bases para la construcción del concepto de derivada por medio de la pendiente de la recta tangente con el apoyo de la tecnología.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140. México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 1(1), 40-55. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.clame.org.mx/acta.htm

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa* [en línea], 9(46), 15-25. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en la educación superior. *Revista Electrónica de Educación Sinéctica* [en línea], 19, 3-27. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=99817935002

Dávila, M. T., Grijalva, A. y Bravo, J. M. (2012). La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización con Apoyo de Geogebra. En Cortés, J. C., Ulloa, R. (Eds.), *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012. Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática,* 212-222. Guadalajara, México: AMIUTEM, A. C.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. *Paradigma* [en línea], 28(2), 49-77. Recuperado el 21 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado el 24 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. *Paradigma* [en línea], 27(2), 221-252. Recuperado el 22 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición Matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* [en línea], 26(1), 39-88. Recuperado el 22 de abril de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/godino_contreras_font.pdf

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education* [en línea], 19(1), 3-25. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.jstor.org/discover/10.2307/749108?sid=21105710277671&uid=2129&uid=70&uid=2&uid=4

Hidalgo, S., Maroto, A. y Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las Matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las Matemáticas. *Revista de Educación* [en línea], (334), 75-95. Recuperado el 7 de febrero de 2013, de http://www.revistaeducacion.educacion.es/re334/re334_06.pdf

Instituto Tecnológico de Sonora. (s.f.). *Programa Analítico Cálculo I Plan 2009.* Recuperado el 7 de febrero de 2013, de http://saeti.itson.mx/

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 10(3), 365-400. Recuperado el 3 de marzo de 2013, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000300004&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Rodríguez, R. y Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender Matemáticas: del Instituto a la Universidad. *Revista de Educación* [en línea], (329), 239-256. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://eprints.ucm.es/9538/

Ruíz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* [en línea], 3(47), 1-8. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.rieoei.org/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 12(3), 355-382. Recuperado el 21 de abril de 2014, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33511859004

Turégano, P. (1995). El currículum y las dificultades de aprendizaje del Cálculo Infinitesimal. Recuperado el 6 de febrero de 2013, de http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista10/10_19.pdf

Zúñiga, L. (2007). El Cálculo en carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea], 10(1), 145-175. Recuperado el 8 de febrero de 2013, de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500107

Autores:

Navarro Ibarra Lizzeth Aurora (Lizzeth.Navarro@gmail.com)
Vercelli 3236, Col. Montecarlo
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 9978639
Ingeniera Civil, Maestra en Ingeniería Administración de Recursos Hidráulicos, Maestra en Valuación Inmobiliaria y Maestra en Matemática Educativa. Actualmente cursando el Doctorado en Sistemas y Ambientes Educativos en el Instituto Tecnológico de Sonora.

Robles Aguilar Alan Daniel (alan.robles@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1707
Actuario-Matemático, Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Actualmente profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, coordinador de las academias de Estadística para las Ciencias Económico-Administrativas.

Ansaldo Leyva Julio César (julio.ansaldo@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1721
Líder del cuerpo académico de Ciencias Básicas en Ingeniería, Maestro en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias (Matemáticas). Profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, coordinador de las academias de matemáticas Económico-Administrativas e Ingeniería en Software.

Castro Lugo Felipe de Jesús (felipe.castro@itson.edu.mx)
Antonio Caso S/N, Col. Villa ITSON
Ciudad Obregón, Sonora, México
Instituto Tecnológico de Sonora
(644) 4109000 Ext. 1853
Maestro Interino del Departamento de Matemáticas, Maestro en Ciencias con especialidad en Matemáticas Educativas. Profesor investigador en el Instituto Tecnológico de Sonora, Apoyo las academias de Probabilidad y Estadística y Fundamentos de Matemáticas, para las carreras de Ingeniería.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 188-204

Jugueteando con Grafos

Rocío Núñez Santiago, Juan Núñez Valdés, Eduardo Paluzo Hidalgo, Elena Salguero Quirós

Fecha de recepción: 06/11/2015
Fecha de aceptación: 18/05/2016

Resumen	En este artículo se resuelven una serie de problemas extraídos de diferentes situaciones de la vida real con ayuda de técnicas propias de la Teoría de Grafos. Se pretende con ello dar a conocer al profesorado de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato una nueva forma de abordar con éxito problemas de esas características, consiguiendo con ello despertar el interés y la motivación de sus alumnos por esta disciplina. **Palabras clave**: Sugerencias para el aula; problemas de la vida real. Teoría de Grafos.
Abstract	In this article a number of problems drawn from different real-life situations are resolved using own Graph Theory techniques. It is thereby intended to provide Secondary School Mathematics teachers with a new method that allows them to successfully address problems of these characteristics, thus stimulating the interest and motivation of students. **Keywords**: Suggestions for the classroom; real life situations. Graph Theory.
Resumo	Este artigo apresenta uma série de problemas provenientes de diferentes situações da vida real que são resolvidos através de técnicas próprias da Teoria dos Grafos. O objectivo é apresentar aos professores do Ensino Básico e Secundário em Matemática sobre uma nova maneira de tratar com sucesso com os problemas dessas características, assegurando assim o interesse e a motivação dos alunos nesta disciplina. **Palavras-chave:** Sugestões para a sala de aula; problemas da vida real. Teoria dos Grafos.

1. Introducción

Este artículo continúa la senda de otro anterior, ya publicado por uno de los autores junto a otro colaborador en esta misma revista *(Canto y otros, 2007)*, en el que se mostraba la utilidad de la Teoría de Grafos para incentivar y despertar el interés y la motivación de los alumnos de Secundaria y Bachillerato en las clases de Matemáticas.

Al igual que aquel artículo, el objetivo principal de éste es mostrarle al profesorado de Matemáticas de esos niveles una nueva forma de abordar con éxito problemas de esas características, que por su sencillez resulta muy atractiva y asequible para los alumnos, al permitirles el tratamiento de problemas de la vida real, con los que a menudo se encuentran, sin saber qué conocimientos teóricos pueden utilizar para resolverlos. Entre estos problemas se encuentran los ya clásicos de amigos que se reúnen, itinerarios a realizar o simplemente búsqueda de horarios adecuados para visionar determinadas películas.

La Teoría de Grafos, como se verá, resulta ser una herramienta muy sencilla y adecuada para abordar todos estos problemas, que pueden ser propuestos por el profesor bien de una forma continuada en sus clases, o bien para romper determinados momentos de "aburrimiento" de los alumnos, períodos finales de trimestre con la teoría ya explicada o simplemente en cualquier otro momento que el profesor crea que le pueden servir para conseguir de nuevo la atención de los alumnos o para motivarlos a la hora de introducir nuevos conceptos teóricos del contenido habitual de la asignatura.

Por ello, en este artículo se trata de mostrar cómo unas simples nociones básicas y sencillas de la Teoría de Grafos, que se incluyen en la sección de Preliminares, permiten resolver una serie de situaciones que aparecen con mucha frecuencia en la vida real. Asimismo, también se pretende hacerles ver tanto a los profesores como a los propios alumnos cómo el conocimiento de esta teoría les puede permitir solucionar muchos otros problemas similares a los aquí propuestos.

Finalmente, y con referencia los nombres de los matemáticos y científicos que aparecen en este artículo, indicar que los autores nos hemos permitido una pequeña licencia, en forma de anacronismo, a la hora de incluirlos juntos en el enunciado de algunos de los problemas que se comentan. Esto se ha hecho solo para que resulte más atractivo y motivador el enunciado de esos problemas, al objeto de que el lector se interese por todos esos personajes y pueda investigar en sus biografías, lo cual, desde aquí aconsejamos.

2. Preliminares sobre teoría de grafos

Se muestran en esta sección aquellos conceptos de la Teoría de Grafos que van a ser tratados a lo largo del artículo. Para una mayor información sobre esta teoría, puede consultarse (Bollobás, 1985; Clarck y Helton, 1991).

El *Principio del Palomar Generalizado* (su versión original se debe al matemático francés Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859), se enuncia de la siguiente forma: "*Si se reparten n objetos en m cajas y existe un número entero positivo r tal que* $n > m \cdot r$ *, entonces existirá al menos una caja en la que haya al menos* $r+1$ *objetos.* Este principio será usado en la resolución de uno de los problemas que se proponen.

Un *grafo simple* se define como un par $G = (V(G), E(G))$ formado por dos conjuntos finitos: $V(G)$, denominado conjunto de los vértices del grafo, que es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices,* y $E(G)$, denominado conjunto de las aristas del grafo, que es un conjunto eventualmente no vacío de elementos llamados *aristas*, tal que cada arista e de $E(G)$ tiene asignado un par no ordenado de vértices

$\{u, v\}$, (u distinto de v), llamados extremos de e; se dice que la arista e une los vértices u y v.

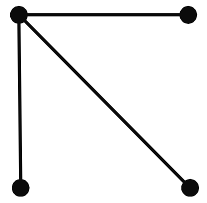


Figura 1. Grafo genérico

Gráficamente, cada vértice de un grafo simple se representa por un punto, mientras que cada arista corresponde a una línea que une el par de vértices que tiene asignados.

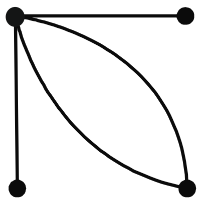


Figura 2. Grafo Multigrafo

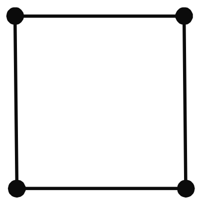


Figura 3. Grafo Cíclico

Cuando aparecen aristas repetidas, el grafo resultante se denomina multigrafo (Fig. 2).

Se dice que dos vértices de un grafo que definen una arista son adyacentes o vecinos; el conjunto de todos los vértices adyacentes a v se denota por $N(v)$ y, para un grafo simple, el grado de v es el número de vértices adyacentes a v.

Un resultado que se usará en uno de los problemas que siguen es el denominado *Primer Teorema de la Teoría de Grafos*, que afirma que para cualquier grafo simple, la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas. Un corolario inmediato de este resultado se conoce con el nombre de *Lema del Apretón de Manos* (Handshaking Lemma), que sostiene que en cualquier grafo simple o bien hay un número par de vértices de grado impar, o no hay ninguno.

Un *ciclo* (Fig. 3) es aquel grafo en el que todos sus vértices son de grado 2, asemejándose a un polígono regular con el mismo número de lados que vértices tiene el grafo. Si el polígono tiene n lados se representa por C_n.

Un grafo G de n vértices se dice *completo* si cada vértice es adyacente a los $n-1$ vértices restantes. Se denota por K_n.

El grafo *complementario* G' del grafo original G, está compuesto por todos los vértices de G y por las aristas que no están en G.

Un *árbol* es un grafo en el que cualquier par de vértices está conectados por exactamente un camino. Se puede definir la raíz del árbol como el vértice que se considera principal, el cual no tiene antecesores.

Se dice que el vértice raíz r está en el nivel 0 y que los vértice adyacentes a r están en el nivel 1. Para cada $k \geq 2$, el nivel k contiene los vértices adyacentes a los vértices del nivel $k-1$, salvo los que ya han sido asignados al nivel $k-2$. Se dice que el *nivel* de un vértice es el número de arcos que deben ser recorridos, partiendo de la raíz para llegar hasta él.

Un *isomorfismo* entre dos grafos G y H es una aplicación biyectiva entre el conjunto de sus vértices f: $V(G) \to V(H)$ tal que ella y su inversa conservan la adyacencia, es decir, si los vértices u y v son adyacentes en G entonces los vértices $f(u)$ y f(v) son adyacentes en H.

Se denomina grafo potencia enésima de un grafo dado al grafo que tiene los mismos vértices que el primero y tiene por aristas a aquellas posibles del primer grafo tales que cumplan que $d(u,v) \leq n$, donde d determina la distancia entre dos vértices.

Los números de Ramsey deben su nombre a Frank Plumpton Ramsey (1903- 1930), matemático y filósofo inglés cuyos estudios y actividad docente tuvieron lugar en la Universidad de Cambridge. Estos números se definen a partir del denominado Teorema de Ramsey, que afirma que: Para cualquier entero dado C , y dado los enteros $n_1, \ldots, n_C$, existe el número: $R(n_1, \ldots, n_C)$, llamado número de Ramsey, tal que si las aristas de un grafo completo de orden $R(n_1, \ldots, n_C)$ se colorean con C colores distintos, entonces para algún i entre 1 y C, ese grafo debe contener un subgrafo completo de orden n_I cuyas aristas están todas coloreadas con el color I (en particular, para $C = 2$, el teorema afirma que dado un par de enteros positivos (r,s), existe un menor entero positivo n = R(r, s), denominado número de Ramsey, tal que, si las aristas se colorean con rojo y azul, se puede extraer de ese K_n un subgrafo K_r completamente rojo o un subgrafo K_s completamente azul.

Tal como se verá en uno de los problemas que se tratan en este artículo, en el caso de 6 se personas, se muestra que $R(3,3) \leq 6$, y de hecho se cumple la igualdad $R(3,3) = 6$. También se sabe que $R(4,4) = 18$, por lo que para asegurar que haya un K_4 como queremos, necesitaríamos una reunión de 18 personas y no de 8.

3. Empieza el juego

Se tratan en esta sección una serie de problemas curiosos, extraídos todos ellos de la vida real, mediante la utilización de la Teoría de Grafos. Aunque el criterio seguido en su numeración es obviamente subjetivo, se ha procurado que los problemas aparezcan ordenados de menor a mayor nivel de dificultad.

3.1. El problema de Santiago

Hace más de mil años que se recorre el camino de Santiago como peregrinación hasta el santuario del apóstol Santiago el Mayor, ubicado en la ciudad de Santiago de Compostela en Galicia (España). Su tumba fue descubierta en el año 812 en el monte sagrado de Libredón, y desde entonces miles de peregrinos acuden a visitarla cada año. La peregrinación hacia Santiago se considera el acto cultural y religioso más destacado de la Edad Media, reconocido recientemente por el Parlamento Europeo como Primer Itinerario Cultural Europeo y por la UNESCO como patrimonio de la humanidad (Mielnikov, 2011).

Al respecto de este camino de Santiago, les surgió a dos científicos muy conocidos el siguiente problema:

Descartes (1596-1650) y Newton (1643-1727), matemático y físico, respectivamente, y ambos muy religiosos, deciden recorrer el camino de Santiago partiendo de Sevilla. Descartes propone hacer una ruta alternativa a la convencional y Newton, que es algo maniático, impone que sólo pasaría por determinadas ciudades (Córdoba (2), Ciudad Real (5) Madrid (12) y Valladolid (19)) y además quiere que la ruta sea lo más corta posible. Ante esto, Descartes se propone ver todos los caminos existentes entre las ciudades elegidas por su maniático compañero.

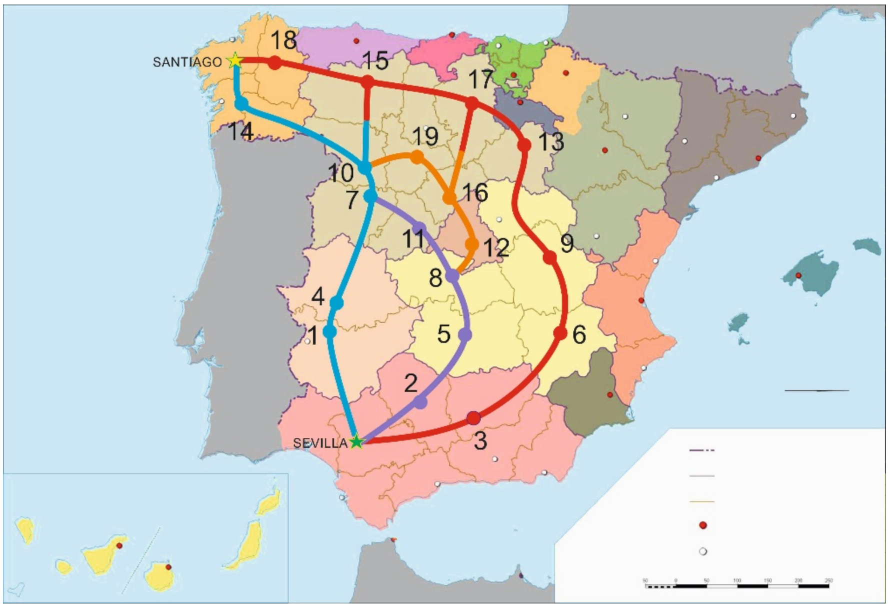


Figura 4

Vemos que a partir de las distintas ciudades se ha construido un multigrafo (Fig. 4). Si lo recorremos desde Sevilla a Santiago pasando una sola vez por cada vértice vamos construyendo un grafo árbol con todas las rutas posibles (Fig. 5)

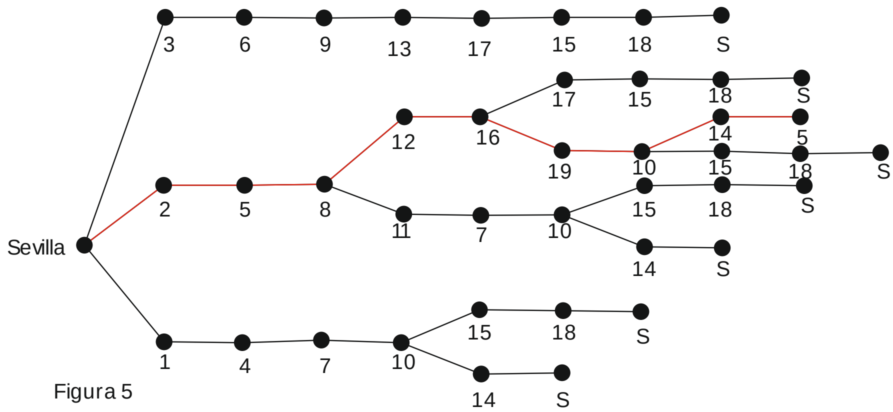


Figura 5

Cada una de las ramas del grafo árbol es una ruta y el número de vértices de dicha rama nos dice cuántas ciudades componen la ruta. Para resolver este problema debemos encontrar un camino en dicho grafo que contenga los vértices 2, 5,12 y 19. Además, dado que debe ser lo más corto posible, debemos elegir la rama del grafo árbol que menos vértices contenga. Concluimos con que el camino que deben escoger los peregrinos es el tercer camino (camino rojo Fig. 5) que llega a Santiago.

3.2. El problema de las personas que se conocen

Probar que en una reunión de 6 personas siempre hay 3 que se conocen entre sí o 3 que no se conocen entre sí.

Del conjunto de las 6 personas, elegimos al azar una de ellas. Llamemos P a esta persona. A continuación descomponemos el conjunto formado por las 5 personas restantes en dos subconjuntos disjuntos C1 y C2 (es decir, cada una de esas 5 personas sólo puede pertenecer a uno de esos dos subconjuntos). En el subconjunto C1 incluimos a las personas que conozcan a P y en C2 a aquéllas que no lo conozcan. Tenemos entonces:

C1 = {personas que conocen a P} y C2 = {personas que no conocen a P}.

Ahora aplicaremos a esta situación el Principio del Palomar Generalizado, comentado en los Preliminares. Para ello, como tenemos $n = 5$ personas a repartir en $m = 2$ subconjuntos, tenemos que buscar un “r” tal que $5 > 2 \cdot r$. Vemos que $r = 2$, lo cual significa que en uno de esos dos subconjuntos, C1 ó C2, hay al menos $r + 1 = 2 + 1 = 3$ personas.

Supongamos que esas 3 personas se encuentran en C1. Entonces podemos distinguir tres casos:

Caso 1: Que esas tres personas no se conocen entre sí. Entonces, ya tenemos al menos 3 personas que no se conocen y se cumple la hipótesis del problema.

Caso 2: Que dos de esas tres personas se conocen entre sí. En este caso, como esas dos personas conocen a su vez a P, ya tendríamos 3 personas que se conocen.

Caso 3: Que esas tres personas se conozcan entre sí. Entonces ya tenemos (incluso más de) 3 personas que se conocen (teniendo en cuenta a P).

En caso de que las 3 personas resultantes de la aplicación del Principio del Palomar Generalizado se encontrasen en el subconjunto C2, el razonamiento sería análogo, sin más que sustituir el concepto “conocer” por “no conocer”.

Veamos ahora mediante un contraejemplo, que en un grupo de 8 personas no se cumple un resultado parecido, es decir, que no tiene por qué haber 4 que se conozcan o 4 que no se conozcan:

Apolonio, Bolzano, Cantor, Descartes, Euclides, Fibonacci, Galois e Hipatia se encuentran en una habitación. Uniremos mediante el siguiente grafo a las personas que se conocen entre sí con color rojo (Fig. 6), y en el siguiente, a las que no se conocen entre sí, con color azul (Fig. 7), que equivale al grafo complementario:

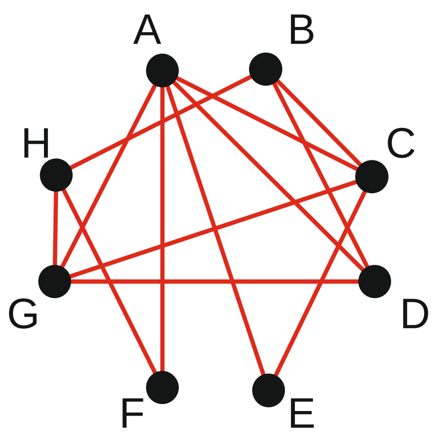


Figura 6

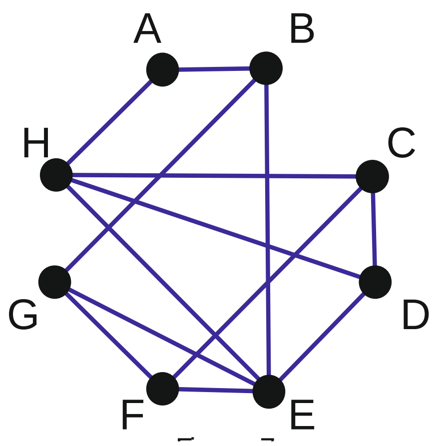


Figura 7

Para que cuatro personas se conozcan entre sí debe haber un K_4 en el primer grafo, ya que todas esas las personas deben estar unidas a las otras tres restantes. Como vemos no hay ningún K_4 en el grafo, por lo que no hay cuatro personas que se conozcan entre sí.

Por la misma razón, para que haya cuatro personas que no se conozcan entre sí debe haber otro K_4 en el segundo grafo, y como podemos observar, tampoco lo hay. Este contraejemplo prueba el aserto.

Dependiendo, finalmente, de que el nivel medio de la clase lo permita, se les puede explicar a los alumnos que el hecho de que el enunciado del problema se cumpla para seis personas y no para ocho se debe a que 6 es un número de Ramsey, mientras que 8 no lo es (ver la sección de Preliminares). En el caso de 6 se personas, se muestra que $R(3,3) \leq 6$, y de hecho se cumple la igualdad $R(3,3) = 6$. También se sabe que $R(4,4) = 18$, por lo que para asegurar que haya un K_4 como queremos, necesitaríamos una reunión de 18 personas y no de 8.

3.3. El problema de las cartas de los amigos

5 amigos salen de vacaciones al mismo tiempo y a diferentes lugares. Deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de los restantes. ¿Es posible que cada amigo reciba postales de precisamente los tres amigos a los que él les envió las suyas?

Este problema se puede resolver modelizándolo mediante un grafo, en el que cada vértice representará a uno de los amigos y las aristas representarán las cartas que se envían entre ellos. Cada vértice tendrá entonces tres aristas incidentes, ya que cada amigo envía tres cartas. Por lo tanto, de existir dicho grafo tendría que ser regular de grado 3, con 5 vértices.

Veamos a continuación que es imposible que este grafo exista dado que contradice el lema del apretón de manos.

Efectivamente, aplicando este lema a este problema de los amigos, al tener el grafo asociado 5 vértices, cada uno de ellos incidente a 3 aristas, habría un número impar de vértices de grado impar, lo cual sería una contradicción con el lema. Por tanto, ese grafo (y por consiguiente, la situación que modela) no puede existir.

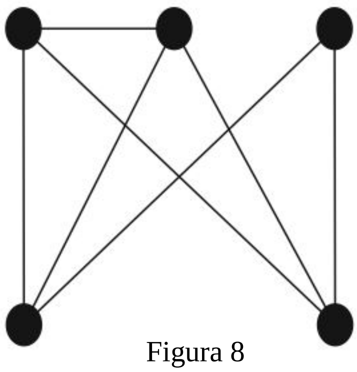


Figura 8

Este problema se podría ampliar preguntándonos qué habría sucedido si fueran 6 amigos en lugar de 5.

En este caso vemos que el grafo que modela la situación no contradice el lema del Apretón de Manos y que sí podemos encontrar tal grafo que cumpla lo requerido. La siguiente figura muestra dos de estos grafos posibles

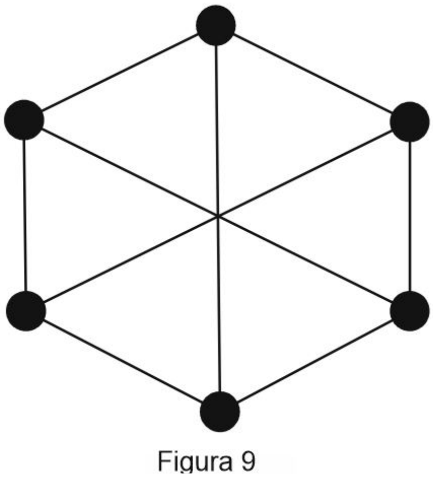


Figura 9

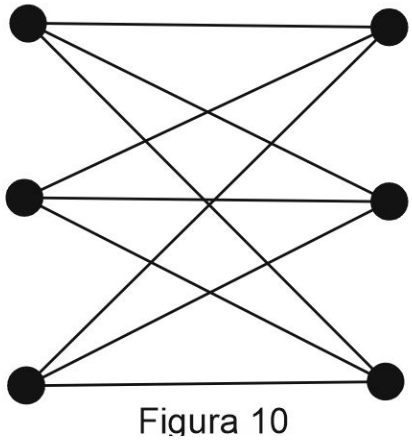


Figura 10

Ambos grafos son solución, y de hecho, ambos son isomorfos. Son dos representaciones distintas de un $K_{3,3}$.

3.4. El problema de la fiesta

Pierre y Marie Curie dan una fiesta en su casa e invitan a otras 4 parejas. Al llegar, cada persona abraza a todas las otras que conoce, aunque nadie abraza a su pareja y nadie abraza más de una vez a otra persona. Al final de la fiesta, Pierre pregunta a Marie y a cada uno de sus ocho invitados cuántos abrazos ha dado y obtiene nueve respuestas diferentes. ¿A cuántas personas abrazó Marie?

Dado que son 4 parejas invitadas y que hay que contar a Pierre y a Marie, tenemos 10 personas en la fiesta. Luego, procedemos a modelar el problema (aunque gramaticalmente es incorrecta en castellano la palabra “modelizar” con esta acepción, ésta se suele emplear habitualmente en estas situaciones más que la correcta “modelar”), es decir, a representar los datos del enunciado por medio de los grafos. En este caso, asignamos un vértice a cada una de las 10 personas y las aristas representarán los abrazos que da cada uno.

Sabemos que son 9 las respuestas distintas que recibe Pierre, que las denotaremos por $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,\}$. Vemos que entre las posibles respuestas descartamos el que una persona haya abrazado a 9 personas, pues eso implicaría que esa persona habría saludado también a su pareja. Representamos entonces los 10 asistentes a la fiesta mediante diez vértices $V(G) = \{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, Pierre\}$

que etiquetaremos de forma que el subíndice de cada uno de ellos coincida con el número de abrazos que ha dado. Se tiene entonces este grafo:

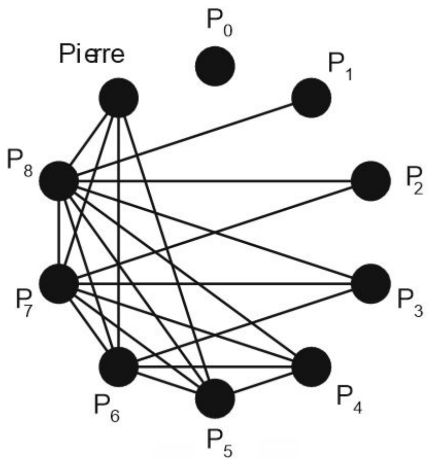


Figura 11

Ahora, viendo el grafo, nos centramos en la adyacencia de cada vértice, ya que una característica de cada pareja es que las dos personas que la forman no se abrazan entre sí, es decir, que los vértices correspondientes a cada una de ellas no son adyacentes. Expresaremos que dos personas son pareja mediante $P_i \sim P_j$ con $i \neq j$:

Vemos que P_8 abraza a 8 personas, luego el único vértice no adyacente con él (es decir, al único invitado al que quien dio 8 respuestas no ha abrazado) es P_0. Por tanto, $P_8 \sim P_0$.

P_7 abraza a 7 personas, luego ese vértice no es adyacente a P_0 (que no ha dado ningún abrazo), ni a P_1, que sólo ha dado uno y ese uno ha sido a P_8. Por tanto, P_7 es pareja de P_1.

Análogamente, P_6 sólo puede ser pareja de P_0, P_1 y P_2 y como los dos primeros ya están emparejados, resulta que P_6 es pareja de P_2.

Continuando con este razonamiento, deducimos que P_5 es la pareja de P_3 y que P_4 tiene que ser necesariamente Marie, la pareja de Pierre. Por tanto, Marie dio 4 abrazos.

3.5. El problema de la mesa redonda

Un grupo de 7 personas acuerdan cenar juntas en diferentes ocasiones. En cada ocasión se sientan alrededor de una mesa redonda de modo que cada persona tiene a sus dos lados comensales distintos en cenas diferentes. Si todos quieren sentarse junto a todos los demás, ¿Cuántos días deberán citarse para cenar?

Para modelizar este problema en teoría de grafos, identificaremos las personas con los vértices de un grafo y dos vértices serán adyacentes si esas dos personas se han sentado juntas en alguna ocasión.

Queremos conseguir que cada vértice sea adyacentes con todos los demás, es decir, conseguir un grafo completo K_7. Para ello, el primer día cada persona se sienta con las dos personas que tiene a distancia uno, obteniéndose así C_7.

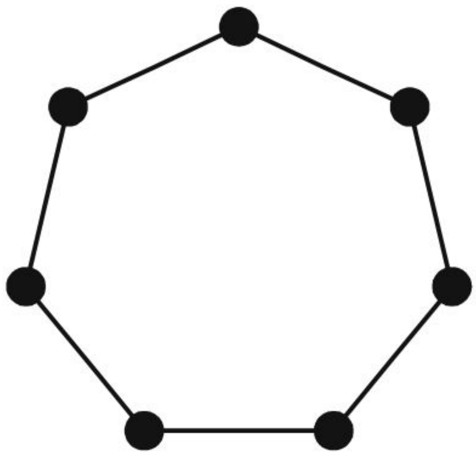


Figura 12

Figura 12

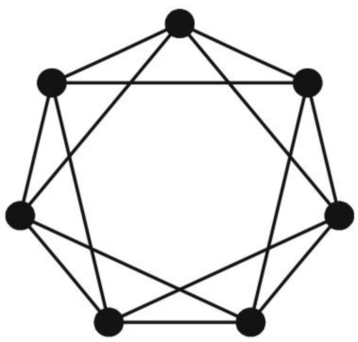


Figura 13

El segundo día cada persona se sentará con las que tiene a distancia dos, lo que equivale a elevar el ciclo anterior al cuadrado.

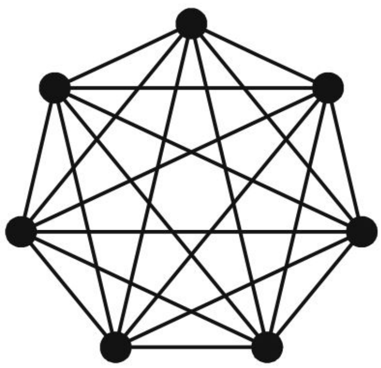


Figura 14

Finalmente, dado que la distancia máxima de dos personas en el ciclo de orden 7 es tres, al elevar el ciclo al cubo ya obtenemos un K_7, luego serán necesarios tres días para que todos se sienten con todos.

3.6. Cine y matemáticas

Vamos a tratar en esta sección con cine y Matemáticas. Para situar al lector, daremos en primer lugar una breve descripción de algunas de las películas de contenido matemático que se han estrenado en tiempos recientes.

1. *Una mente maravillosa* (2001): Drama sobre la vida del matemático John Forbes Nash, ganador del premio Nobel de Economía en 1994. Dirigida por Ron Howard y protagonizada por Russell Crowe.

2. *El indomable Will Hunting* (1997): Drama que trata sobre la vida de Will, un joven rebelde con una increíble inteligencia para las matemáticas, que es persuadido por su profesor para aprovechar sus cualidades. Dirigida por Gus Van Sant y protagonizada por Matt Damon y Robin Williams.

3. *Contact* (1997): Película de ciencia-ficción sobre la investigación por parte de un grupo de científicos de la posibilidad de existencia de inteligencia extraterrestre. Dirigida por Robert Zemeckis y protagonizada por Jodie Foster y Matthew McConaughey.

4. *Cube* (1997): Seis personas quedan encerradas en un laberinto de habitaciones cúbicas que esconden trampas mortales. Para sobrevivir deberán resolver enigmas matemáticos. Dirigida por Vincenzo Natali en 1997, obtuvo los Premios de mejor guión y mejor película en el Festival de Sitges (Barcelona), en 1998.

5. *Los crímenes de Oxford* (2008): Thriller protagonizado por un estudiante de Oxford que descubre el asesinato de una de las personas del equipo que descifró el Código Enigma de la Segunda Guerra Mundial y junto a su profesor de lógica investiga el caso utilizando códigos matemáticos. Dirigida por Alex de la Iglesia y protagonizada por Elijah Wood y John Hurt.

6. *La habitación de Fermat* (2007): Cuatro matemáticos, que no se conocen entre sí, son invitados por un misterioso anfitrión con el pretexto de resolver un gran enigma. Pronto descubren que se encuentran en una sala que empieza a menguar y que corren el riesgo de morir aplastados entre sus paredes. Tendrán entonces que averiguar qué relación hay entre ellos y por qué alguien quiere asesinarlos. Dirigida por Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña.

7. *Descifrando Enigma* (2014): Biografía sobre el matemático británico Alan Turing, famoso por haber descifrado los códigos secretos nazis contenidos en la máquina Enigma, lo cual determinó el devenir de la II Guerra Mundial en favor de los Aliados. Lejos de ser admirado como un héroe, Turing fue acusado y juzgado por su condición de homosexual en 1952. Dirigida por Morten Tyldum.

8. *Stand and deliver* (1988): Jaime Escalante es el nuevo profesor de matemáticas en un instituto para jóvenes de origen hispano en un barrio de Los Ángeles. Son alumnos difíciles que no esperan llegar a la universidad, y que aspiran tan sólo a algún trabajo que apenas les permita sobrevivir. Jaime tendrá que hacerles cambiar de opinión, y exigirles fuertes sacrificios. Dirigida por Ramón Menéndez.

9. *Pi* (1988): Max es un brillante matemático que está a punto de dar con el descubrimiento más importante de su vida: la decodificación del sistema numérico que rige el aparente caos del mercado bursátil. Pero primero ha de encontrar el valor del número “pi”. Mientras se acerca a la verdad, y afectado periódicamente por unas brutales jaquecas, Max es acosado por una agresiva firma de Wall Street y una secta judía que pretende descifrar los secretos ocultos tras los textos sagrados. Todos ansían apropiarse del inminente hallazgo de Max. Dirigida por Darren Aronofsky.

10. Flatland (1965): animación protagonizada por un joven hexágono cuyas aventuras traspasan dimensiones. Dirigida por Eric Martin.

El enunciado del problema que se trata es el siguiente:

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla se desea organizar un festival de cine matemático. Al no disponer del tiempo suficiente, algunas películas se exhibirán a la misma hora. A cada alumno se le pide que escriba las dos películas que desearía ver, resultando las siguientes parejas de películas: $(1,5),(1,6),(2,5),(2,8),(2,3),(3,4),(3,10),(4,7),(4,9),(6,7),(7,9)\,y\,(7,10).$ *¿Es posible diseñar un horario que satisfaga las peticiones de todos los alumnos de manera que el número de sesiones sea a lo sumo 4 y el número de salas necesarias como máximo 5? ¿Cuántas sesiones se necesitarán como mínimo?*

Este problema puede resolverse mediante coloración de grafos. Para ello creamos un grafo (Fig. 15) donde los vértices sean las películas. Dos vértices son adyacentes cuando existe un alumno que ha solicitado ver las dos películas que representan esos dos vértices.

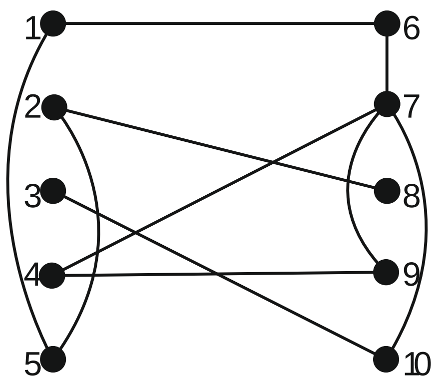


Figura 15

Tenemos que averiguar si existe una 4-coloración para este grafo, es decir, si podemos colorear sus vértices con 4 colores, de manera que vértices adyacentes tengan colores distintos. Los distintos colores representarán las sesiones necesarias. Las películas que tengan el mismo color pueden ser emitidas al mismo tiempo mientras que las que tengan distinto color deberán ser emitidas en diferentes sesiones.

Al colorear el grafo encontramos una 3-coloración, luego existe un horario en el que son necesarias tan solo 3 sesiones. Además el número de salas necesarias son 5, ya que éste es el máximo número de vértices del mismo color, luego es posible encontrar un horario como el que se nos pide.

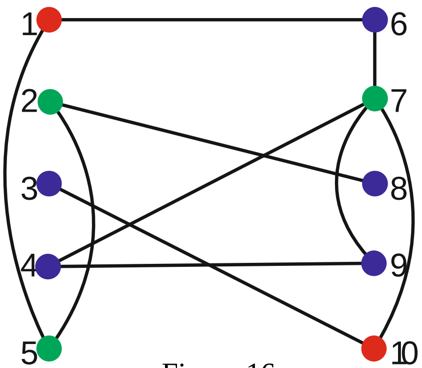


Figura 16

Por último, vemos que el número mínimo de colores necesarios para colorear este grafo es 3 (Fig. 16), ya que contiene un K_3 formado por los vértices 4, 7 y 9, por lo que la coloración obtenida es óptima.

3.7. Consideraciones finales

En este artículo los autores han presentado una serie de problemas extraídos de la vida real (si bien permitiéndose algunas licencias espacio-temporales en sus enunciados, al objeto de conseguir un mayor interés y curiosidad en los alumnos), que se han resuelto mediante la utilización de conceptos propios de la Teoría de Grafos, en principio desconocida para los alumnos de los niveles de Secundaria y/o Bachillerato. Como ya se indicó, el objetivo principal del mismo es mostrar una nueva forma de abordar con éxito la resolución de problemas de esas características, tratando de procurar con ello una mayor motivación de los alumnos por las Matemáticas.

Como reflexiones personales de los autores una vez elaborado el artículo, podemos citar las siguientes:

1.- Los autores pensamos que aunque la Teoría de Grafos no aparece en el currículo de los alumnos de nivel escolar, debería ser enseñada, o al menos utilizada a este nivel, dado que posee unas características muy notables, que la hacen ser muy apropiada para ello. Estas características importantes son las siguientes:

a) Su sencillez en cuanto a los elementos que utiliza: puntos y líneas. Eso permite que cualquier persona que no tenga conocimientos matemáticos, cuanto más los alumnos, pueda entender fácilmente qué es un grafo.

b) Es muy intuitiva. Se puede intuir la solución de muchos problemas de grafos, independientemente de que sea complicado o no llegar a ella.

c) Al ser una parte de la Matemática Discreta, está muy relacionada con las técnicas de contar elementos en conjuntos finitos y con el conjunto de los números naturales, base de las primeras operaciones que empiezan a realizar los alumnos al principio de su formación. De hecho, ya se les puede hablar de grafos a alumnos incluso de primaria cuando se les introducen los primeros ejercicios de coloreado o de conexión. Ejemplo de esto, la utilización que se hace del Principio del Palomar en el problema 3.2.

d) Facilita procedimientos algorítmicos que los alumnos pueden entender fácilmente, como los algoritmos de búsqueda de objetos o los de encontrar caminos a través de ciudades y carreteras prefijadas.

f) Unifica diversas áreas de las Matemáticas muy conocidas por los alumnos de Secundaria y/o Bachillerato, como la combinatoria, el álgebra, la probabilidad, la geometría y la aritmética, entre otras.

e) Y finalmente, aunque se podrían enumerar muchas otras propiedades básicas más de esta teoría, una de las propiedades más importantes de la misma es su gran aplicabilidad a otras disciplinas, tanto científicas, como de la salud, humanas o sociales. Hoy en día es rara la disciplina científica o humanística que no utiliza la teoría de grafos como herramienta.

2. A raíz de todo lo comentado anteriormente, los autores sugieren en el artículo cómo usar esta teoría para resolver algunos problemas de la vida real que en principio y a partir de sus enunciados, nada parece que tengan que ver (al menos, algunos de ellos) con cuestiones matemáticas. Son problemas que los alumnos pretenden resolver de una manera no sistemática, bien tratando de encontrar la solución buscada probando todas las soluciones o bien empleando el procedimiento conocido vulgarmente como la “cuenta de la vieja”.

Con referencia a este último procedimiento, que suele ser muy conocido por los alumnos, decir que según el D.R.A.E (Diccionario de la Real Academia Española), la expresión “*cuenta de la vieja*” significa, coloquialmente “*cuenta que se hace con los dedos o con otro procedimiento semejante*”. Como anécdota histórica, indicar que la “vieja” a la que se refiere la expresión no es ni más ni menos que María Josefa de Borbón, hija de Carlos III (1716-1788, Rey de Nápoles (1734-1759) y rey de España (1759-1788)) y hermana mayor de Carlos IV, junto a quien fue retratada por Goya en un famoso lienzo. Era famosa ya en la época su mala relación con su cuñada María Luisa de Parma, esposa de Carlos IV. Cuando el rey recibía altos cargos oficiales que le daban detalles del reino, María Luisa de Parma se esforzaba por elaborar complicados cálculos delante de su marido para que su fama de estadista se extendiera por el país, pero en muchas ocasiones era María Josefa la que presentaba las cuentas a su hermano de la forma más sencilla, la mayoría de las veces haciendo sumas y restas con las manos, algo que el monarca, que no era muy ducho con las matemáticas, agradecía enormemente. Como los veloces cálculos de María Josefa se demostraban acertados casi siempre comenzó a circular entre los altos funcionarios, para indignación de la reina, la expresión "*hacer la cuenta de la vieja*", tan escueta como certera. Por descontado que esta anécdota también se les puede contar a los alumnos, que seguro que la agradecerán (para más detalles, véase la web (Emitologías)).

3.- Como conclusión final, y dado que no cabe la menor duda de que en la actualidad la mayoría de los alumnos suele mostrar un gran desinterés y falta de atención por sus clases, los autores pensamos que cualquier procedimiento que se utilice en el aula que logre disminuir ese desinterés y esa apatía tiene que ser bienvenido. Así, en nuestra opinión, tanto la utilización de la Teoría de Grafos en las clases, que sugerimos totalmente convencidos, como la de cualesquiera otras técnicas y recursos que se consideren adecuados, siempre debe ser una aspiración a utilizar por los profesores de cualquier disciplina, tanto actuales como futuros. Esperemos, por tanto, que queden convencidos de las bondades de la utilización de la Teoría de Grafos en sus clases de Matemáticas tras la lectura de esta publicación.

Bibliografía

Bollobás,B., (1985) *Graph Theory*. Springer-Verlag, New Cork.

Canto Martín, F. Núñez Valdés J. y Ruiz Cabello, S. (2007) ¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos? .Revista UNIÓN **10**, 37-51.

Clark J., Derek A. Holton. (1991) *A first look at Graph Theory*. World Scientific. New Zealand

Mielnikov O.I. (2011) *Teoría de grafos en problemas recreativos resueltos.* URSS. Bielorrusia.

Emitologías: La cuenta de la vieja. Recuperado el 13 de mayo de 2016, de https://emitologias.com/2014/01/09/la-cuenta-de-la-vieja-jese/

Historia de la peregrinación a Santiago. Recuperado el 13 de mayo de 2016, de http://www.santiagoturismo.com/historia

Núñez Santiago, Rocío: nacida el 25 de septiembre de 1995 en Gines (Sevilla). Actualmente es alumna de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido una excelente calificación en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **rocions95@hotmail.com**

Núñez Valdés, Juan: nacido en Sevilla en 1952, es Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla, en la que trabaja actualmente como Profesor Titular del Dpto. de Geometría y Topología, con sede en la Facultad de Matemáticas. Su principal línea de investigación son los grupos y álgebras de Lie, habiendo publicado varios artículos de investigación sobre los mismos en diferentes revistas de impacto. Pertenece como vocal a la Junta Directiva de la Delegación Provincial de Sevilla de la S.A.E.M. THALES, siendo autor de varias publicaciones sobre Matemáticas Recreativas y Divulgativas, así como también sobre Historia de las Matemáticas. Dirección: Dpto de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla. Calle Tarfia s/n. 41012-Sevilla (España). E-mail: jnvaldes@us.es

Eduardo Paluzo Hidalgo: nacido el 18 de febrero de 1995 en Sevilla. Actualmente es alumno de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido una excelente calificación en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **epaluzohidalgo@gmail.com**

Salguero Quirós, Elena: nacida el 25 de noviembre de 1995 en Sevilla. Actualmente es alumna de tercer curso del Grado de Matemáticas en la Universidad de Sevilla, habiendo obtenido Matrícula de Honor en la asignatura de Matemática Discreta, en la que se trata la Teoría de Grafos. E-mail: **esalqui@gmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 205-219

Mathematics Teachers' Constructions of Circle Theorems in a Dynamic Geometry Environment

Gunhan Caglayan

Fecha de recepción: 08/11/2015
Fecha de aceptación: 18/05/2016

Resumen	Este artículo destaca los detalles de un estudio de desarrollo profesional continuo en el área de la formación del profesorado de matemáticas; con especial atención a las construcciones de los profesores de matemáticas y de construcción de sentido de una variedad de teoremas que involucran arcos de círculo, segmentos, acordes, tangentes y secantes utilizando GeoGebra. Una de las principales conclusiones es que los profesores de matemáticas visualizaron los teoremas de círculo a través de construcciones sobre todo de buen comportamiento naturaleza (apropiadamente limitada), aunque hubo instancias de construcciones prematuros a veces. Mientras que los profesores tuvieron éxito en demostrar y justificar las pruebas visuales de teoremas círculo en el software de geometría dinámica, la confirmación de estas visualizaciones a través de enfoques analíticos demostró ser un reto. **Palabras clave**: la educación matemática, desarrollo profesional, el software de geometría dinámica, teoremas círculo, visualización
Abstract	This article highlights the details of an ongoing professional development study in the area of mathematics teacher education; with particular attention to mathematics teachers' constructions and sense-making of a variety of circle theorems involving arcs, segments, chords, tangents, and secants using GeoGebra dynamic geometry software. One of the main findings is that mathematics teachers visualized the circle theorems via constructions mostly of well-behaved (appropriately constrained) nature, although there were instantiations of premature constructions at times. Whereas teachers were successful in demonstrating and justifying the visual proofs of circle theorems on the dynamic geometry software, confirmation of these visualizations via analytical approaches proved challenging. **Keywords**: mathematics teacher education, professional development, dynamic geometry software, circle theorems, visualization
Resumo	Este artigo destaca os detalhes de um estudo de desenvolvimento profissional contínuo na área da formação de professores de matemática; com especial atenção para construções de professores de Matemática e de tomada de sentido de uma variedade de teoremas envolvendo arcos de círculo, segmentos, acordes, tangentes e secantes, utilizando GeoGebra. Uma das principais conclusões é que os professores de matemática visualizaram os teoremas sobre círculo através de construções principalmente de (apropriadamente restrita) natureza bem-comportado, embora às vezes houvesse instâncias de construções prematuras. Enquanto que os professores foram bem

sucedidos em demonstrar e justificar as provas visuais de teoremas sobre círculo no software de geometria dinâmica, a confirmação destas visualizações através de abordagens analíticas provou ser desafiador.
Palavras-chave: educação matemática de professores, desenvolvimento profissional, software de geometria dinâmica, teoremas círculo, visualização

1. Appropriately Constrained Constructions in a Dynamic Geometry Software

As sketched on a piece of paper along with its components such as its sides, vertices, and angles; the drawn figure may be taken for granted to be a square perhaps because congruent marks are used to indicate that all four sides are congruent and the right angle symbol is used to denote the right-ness of the angles; or simply because the figure looks like a square. In a dynamic geometry software (DGS), however, even though we think what we draw is a square, our figure may still not be classified as a well-behaved square. “Students want to end up with a construction, not merely a drawing” (Finzer & Bennett, 1995, p.428). In a dynamic geometry environment, a figure falls into one of the four categories: a drawing, an underconstrained, an overconstrained, or an appropriately constrained (well behaved) figure (p.430). A drawing is what most beginner students and teachers would obtain. Fig.1a shows a kite, which, eventually can be shown to be a drawing when one (fig.1b) or more of its vertices are dragged (fig.1c).

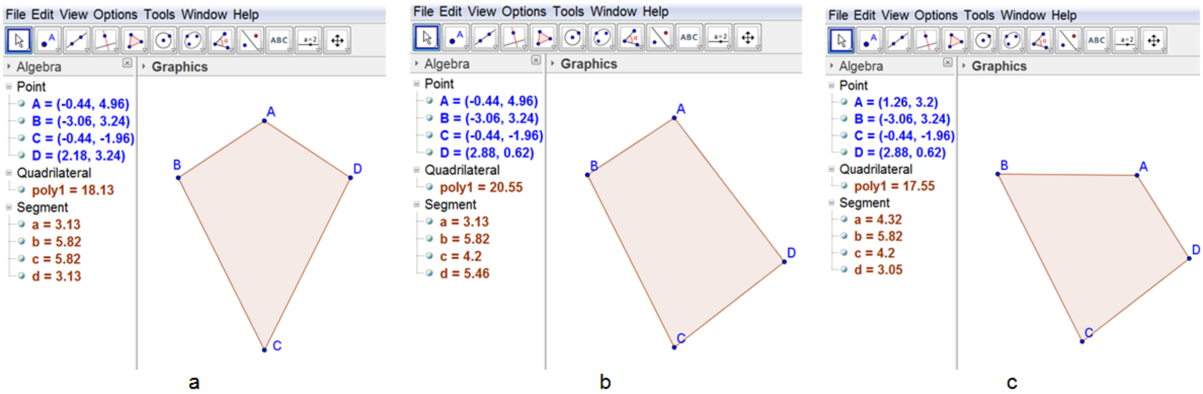


Figura 1. Kite as a Drawing.

An underconstrained figure is a geometric object that possesses one or more of the properties of the geometric figure that is intended to be constructed. Such a figure can be shown to be incorrect by dragging one or more of its vertices. Fig.2a shows an underconstrained kite produced via the two perpendicular lines on which its intersecting diagonals are contained. When Point C is dragged up and down, the display may give the impression that it is always a kite (fig.2b), however, when some other points are dragged; yet the figure ceases to be a kite (fig.2c), it still possesses some of the properties of a kite (e.g., it is still a quadrilateral with perpendicular diagonals).

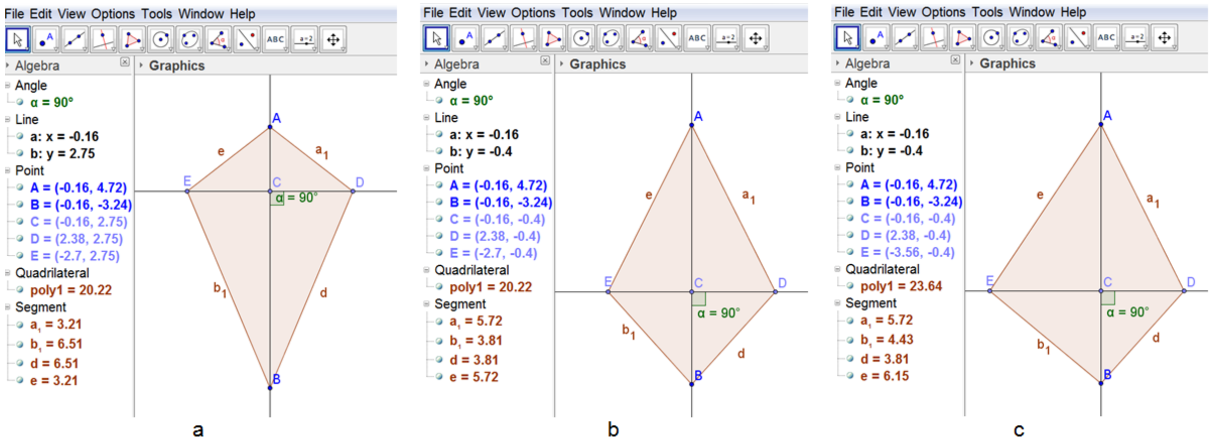


Figura 2. An underconstrained kite.

In an overconstrained figure, the constructor is so picky about imposing excessive constraints on the figure that the figure cannot be explored at all: however the vertices are dragged, the components of the figure (e.g., sides, angles) do not vary and the figure becomes unmanageable. Fig.3a shows an overconstrained kite that is produced as follows. Line segment AB with fixed length 6 units is drawn. Circles centered at A and B with fixed respective lengths 3 and 5 are drawn. The intersection points C and D of the circles are formed. Finally kite ACBD is formed (fig.3a). The figure, when one or more of its vertices are dragged, remains not only a kite, but also a kite that is always congruent to the original one (fig.3b).

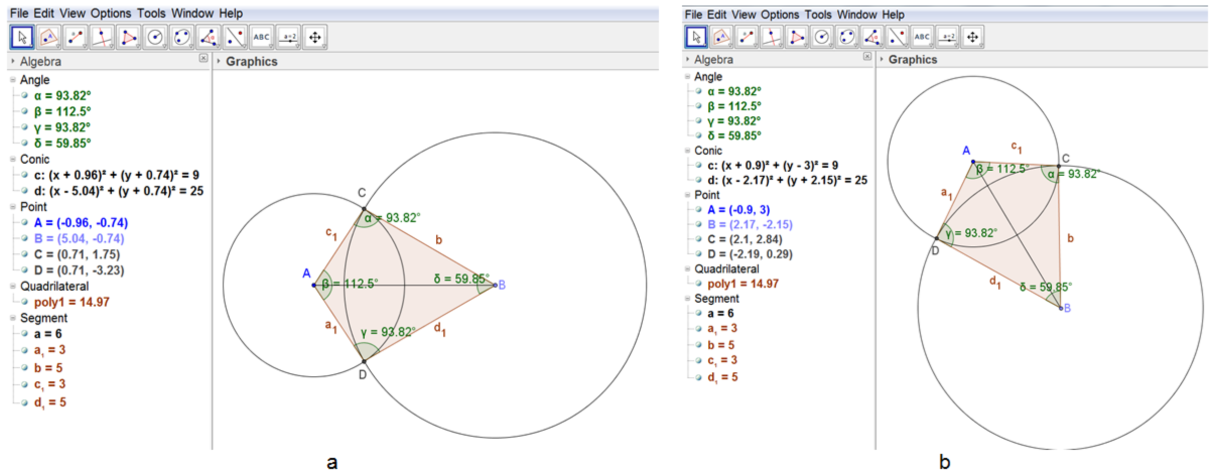


Figura 3. An overconstrained kite.

An appropriately constrained (well-behaved) kite could be formed by intersecting the radius and a chord of a circle that is perpendicular to the radius of the circle (fig.4a). It is worth noting that if the diameter is used instead of the radius, one would still obtain a kite, but a particular one, namely one in which the congruent pair of opposite interior angles are right angles (fig.4b).

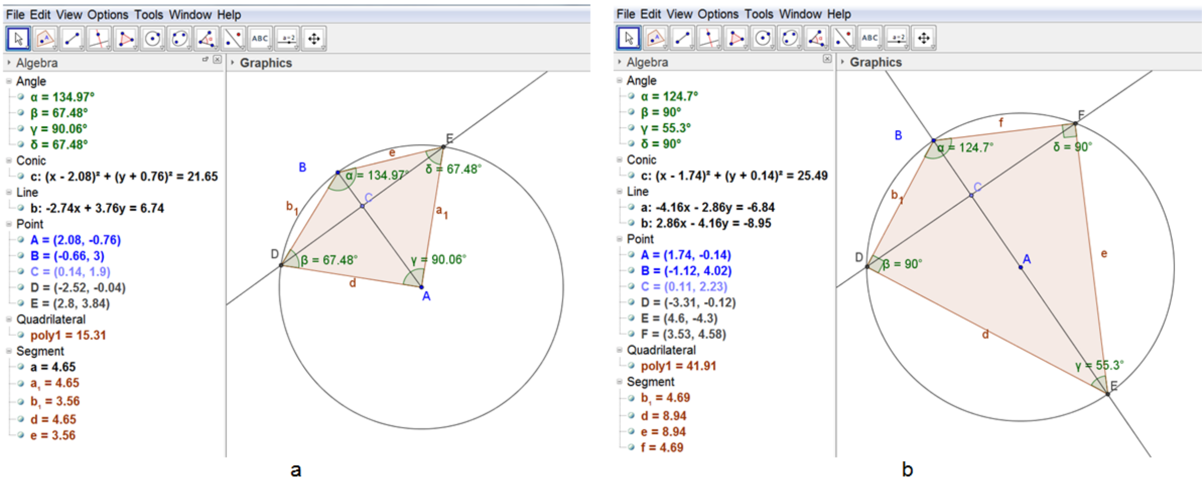


Figura 4. A well-behaved kite.

2. Context and Methodology

Qualitative interview data (Patton, 2002) were collected over two years in a U.S. university as part of a professional development research project titled *Mathematics Teachers' Geometry Connections via Physical Manipulatives, Interactive Applets, and Dynamic Geometry Software*. The connections project was designed to enhance in-service mathematics teachers' content knowledge of mathematics, with particular focus on geometry and connections with geometry using technology (properties of polygons—including triangles, quadrilaterals, and regular polygons; discovering traditional and alternative area formulas; circle theorems; congruence and size transformations; geometric representations of complex numbers; fraction operations with pattern blocks). All professional development sessions were videotaped using one camera, with primary focus on teachers' constructions and interactions with physical and virtual manipulatives along with gestures and inscriptions.

2.1. Rationale for the Study

The categorization suggested by Finzer and Bennett (1995) seems to apply not solely to quadrilaterals, but to various mathematical objects that can be constructed and visualized on a dynamic geometry environment, as this present study attempts to demonstrate. Circle theorems are at the core of the domain of geometry, which constitutes an essential field in the high school mathematics curriculum (Common Core State Standards Initiative, 2010; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Geometric objects such as plane figures seem to be categorized as drawings, underconstrained, overconstrained, or appropriately constrained figures in a dynamic geometry environment; however, we do not know about the significance of geometric objects when they are utilized to investigate and explore circle theorems and connections, which will be the main contribution of the present report. The present study also suggests a framework on mathematics teachers' knowledge of an important domain of geometry, with particular attention to the geometric objects helping understand various properties of arcs, segments, chords, radii, tangents, and secants.

2.2. Participants and Procedure

Doerr and Pratt (2008) distinguished between exploratory models (those made by an expert) and expressive models (those made by the learner). In a similar line of thinking, Zbiek, Heid, Blume and Dick (2007) postulated that “when students are given a procedure to carry out, they are engaging in exploratory activity; however, when students decide which procedures to use they are engaging in expressive activity” [6]. The data for the analysis of circle theorems, which is the focus of the present report, came from the videotapes of four sets of two-hour interview sessions in a computer lab that included five secondary mathematics teacher volunteers, who worked on the expressive activities in two groups. In the present report, Group A denotes the group of teachers T1, T2, T3 who shared a computer; Group B denotes teachers T4, T5 who shared a computer. The participants were only provided with the statement of each circle theorem from the geometry textbook by Michael Serra (2008); it was up to them to decide which procedures to follow, making all activities to be of expressive type. The qualitative interviews were based on a semi-structured interview model (Bernard, 1994); participants demonstrated their solutions for each problem with the GeoGebra dynamic software. The interview tasks were designed taking into account the construction of circle theorems involving (i) central angles and inscribed angles, (ii) chords and perpendicular lines, (iii) secants and tangents, (iv) triangle centers and cyclic quadrilaterals. All interviews were transcribed; the analyses of the interviews are based on thematic analysis (Boyatzis, 1998) and constant comparison methodology (Glaser & Strauss, 1967).

3. Results and Analysis

The results are presented in four main categories: Theorems involving (i) central and inscribed angles; (ii) chords and perpendicular lines; (iii) tangents and secants; (iv) triangle centers and cyclic quadrilaterals.

3.1. Theorems Involving Central and Inscribed Angles

3.1.1. Inscribed Angle Theorem

The illustration of the Inscribed Angle Theorem **[The measure of an angle inscribed in a circle is one-half the measure of the central angle intercepting the same arc]** involved multiple parts. In the first part, both groups of teachers came up with appropriately constrained (well-behaved) constructions illustrating the inscribed and the central angles intercepting the same arc. All teachers measured the inscribed and the central angles, however, Group A teachers were contented that the measure of the central angle seemed to appear twice the measure of the inscribed angle, without further calculations. Group B teachers used the input bar to actually calculate the ratio of the measure of the central angle to the measure of the inscribed angle (by typing β / α, which appeared as f = 2 in the Algebra View), as illustrated in fig.5a. Upon performing the drag test, T4 emphasized the multiple ways that the inscribed angle theorem can be visualized (fig.5b) while stating “Oh that is what I am used to seeing a lot in textbooks” (fig.5c). T5 remarked that the drag test was successful for the geometric construction **in coordination with** the ratio that was constant at all times.

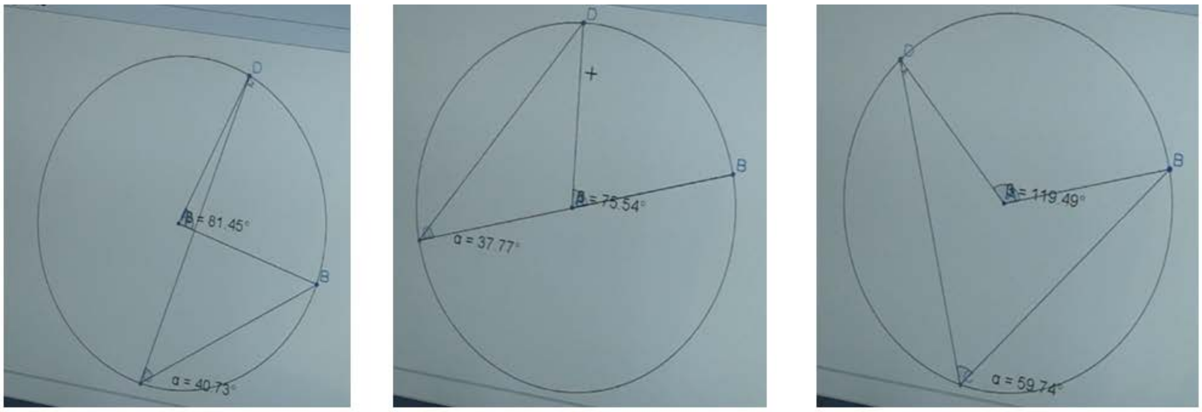


Figura 5. Visualizing the inscribed angle theorem.

3.1.2. Inscribed Angles Intercepting Congruent Arcs Theorem

Inscribed Angles Intercepting Congruent Arcs Theorem **[Inscribed angles that intercept the same arc are congruent]** was also a straightforward one to visualize. What surprised the author of this report was the fact that both groups of teachers constructed two inscribed angles that intercept the same arc (instead of just constructing one inscribed angle and using the software’s drag feature). Group A teachers came up with the construction illustrated in fig.6a and used the drag test with both inscribed angles to show the well-behaved character of their construction. Upon the interviewer’s probing why they were dragging the vertex of the inscribed angle, T1 responded “We're testing to see if it's actually true that any angle at the circumference are equal, so not just those specific angles, but any angle at the circumference will be equal.” T3 contributed to the illustration by suggesting drawing the intercepted arc in a different color (using the *Circular Arc with Center between Two Points* Tool) that was shared by the two inscribed angles (fig.6b). T2 noted the theorem’s connection with the Inscribed Angle Theorem **[The measure of an angle inscribed in a circle is one-half the measure of the central angle]** and suggested measuring the central angle as well. Yet they did not construct the intercepted arc (fig.6c), Group B teachers still recognized the theorem’s connection with the Inscribed Angle Theorem by typing β / α, which appeared as f = 2 in the Algebra Sidebar.

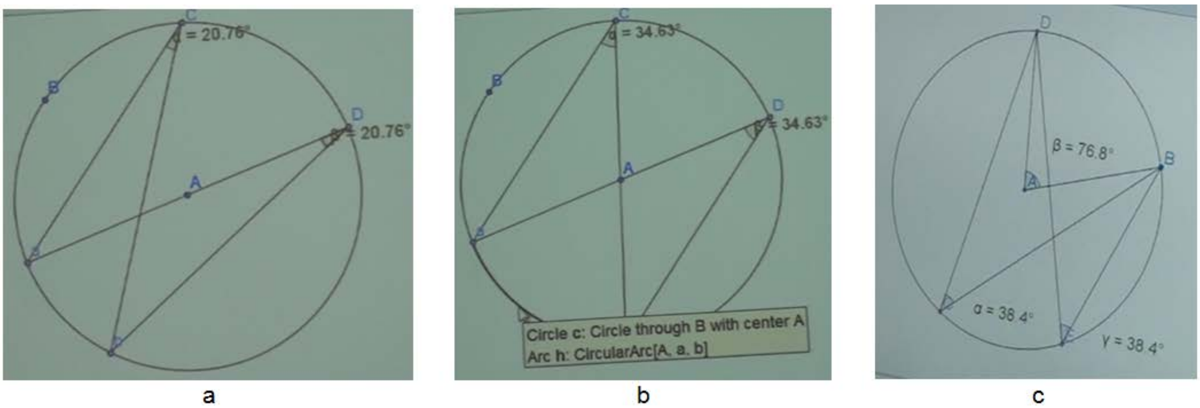


Figura 6. Visualizing the inscribed angles intercepting congruent arcs theorem.

3.2. Theorems Involving Chords and Perpendicular Lines

3.2.1. Thales Theorem

The visualization of the Thales Theorem **[Angles inscribed in a semicircle are right angles]** was one of the easiest constructions for all participating teachers. All teachers came up with well-behaved constructions, however, the procedures they followed differed. Upon suggestion by T1, Group A teachers started with a circle, followed by the construction of a line passing through the center of the circle. They then constructed two chords forming the inscribed angle; measured the angle between the chords as 90° as illustrated in fig.7a. When T2 dragged the vertex of the inscribed angle to the other semicircle, the angle measurement indicated 270° (fig.7b), which did not surprise the teachers as they agreed that **the angle of interest** still measured 90°. Group B teachers started their construction in a totally different way, by building on their construction from the Inscribed Angles Intercepting Arcs theorem. T5 emphasized that Thales Theorem would stand for a particular case of the Inscribed Angles Intercepting Arcs theorem. In agreement with T5, T4 commented "if the central angle is a straight angle then that means that the two inscribed angles have to be 90 degrees" (fig.7c).

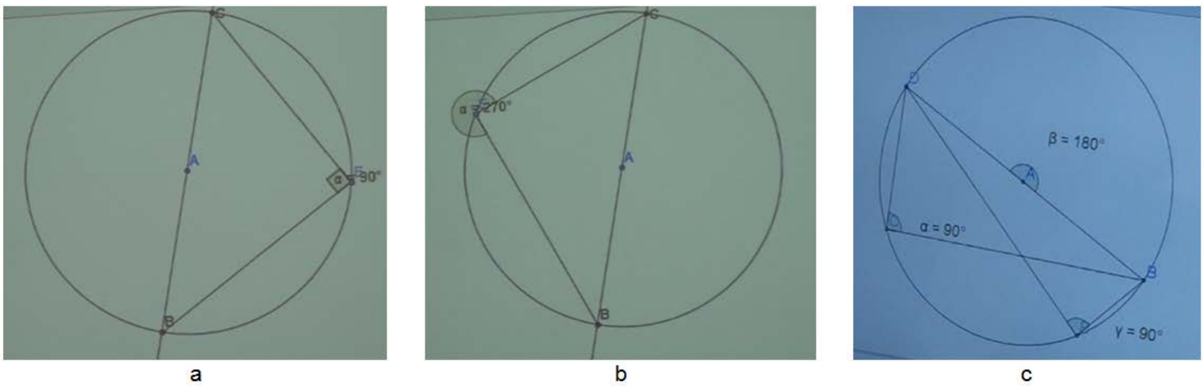
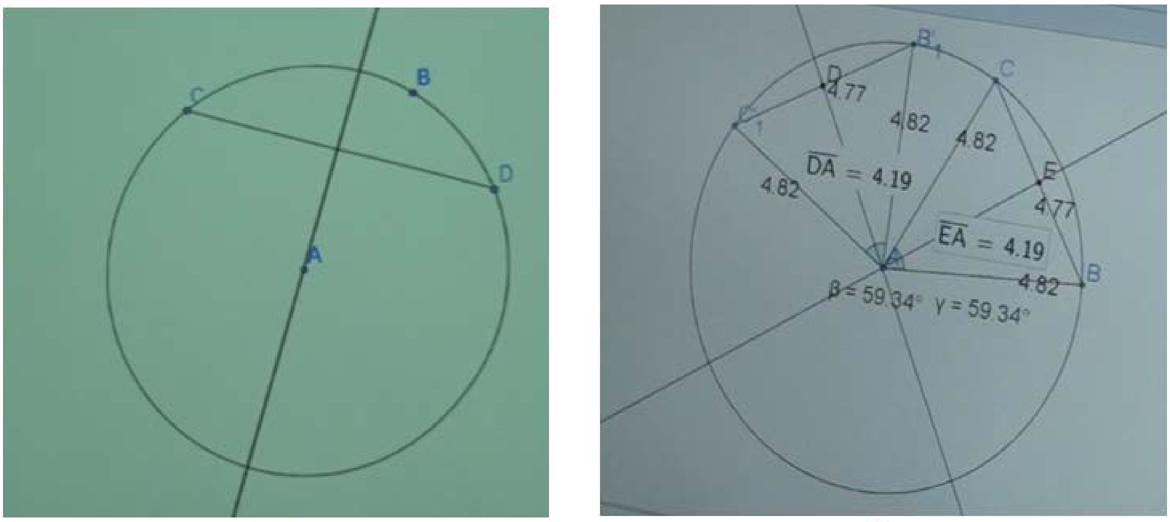


Figura 7. Visualizing Thales theorem.

3.2.2. Perpendicular Bisector of a Chord Theorem

In the visualization of Perpendicular Bisector of a Chord Theorem **[The perpendicular bisector of a chord passes through the center of the circle]**, Group A teachers started their construction with a circle, followed by an arbitrary chord on the circle using the *Line Segment* Tool. They completed their construction via the built-in *Perpendicular Bisector* Tool; they remarked that the line would always contain the center of the circle wherever the chord is dragged (fig.8a). T1 further commented: “if we did this construction on the paper using a compass, two congruent arcs centered at the endpoints of the chord would intersect at two points… above and below the chord… and when we draw the line it would go through the center of the circle.” Group B teachers’ visualization was rich in ideas in the sense that it illustrated more than just the Perpendicular Bisector of a Chord Theorem. They started by constructing two congruent chords (two chords that appeared congruent – these were in fact underconstrained figures); followed by the construction of two perpendicular bisectors. Both teachers indicated that it was an obvious observation that the perpendicular bisectors would contain the center of the circle. They further remarked that the chords would (i) trace out congruent central angles **[Chord Central Angle Theorem: If two chords in a circle are congruent, then they determine two central angles that are congruent]**; (ii) intercept congruent arcs **[Chord Arcs Theorem: If two chords in a circle are congruent, then they determine two central angles that are congruent]**; (iii) be equidistant from the center of the circle **[Chord Distance to Center Theorem: Two congruent chords in a circle are equidistant from the center of the circle]** (fig.8b).



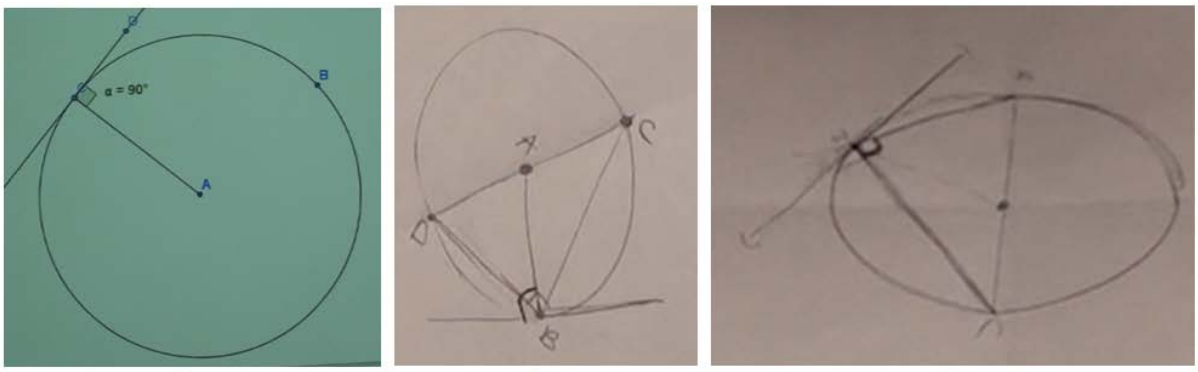
a b

Figura 8. Visualizing the Perpendicular Bisector of a Chord Theorem.

3.3. Theorems Involving Tangents and Secants

3.3.1. Tangents Theorem

Tangents Theorem **[A tangent to a circle is perpendicular to the radius drawn to the point of tangency]** probably was the easiest construction among all circle theorems for all the teachers. This theorem stood as rich in context in terms of triggering Group A teachers' reflective reasoning. After constructing a circle and one radius, Group A teachers visualized this theorem by constructing the tangent line using GeoGebra's buit-in *Tangents* Tool (fig.9a). T2 and T3 remarked that this theorem could somehow be related with Thales Theorem they previously explored. In an attempt to justify their thinking, teachers decided to work it out analytically. T1 and T2 came up with drawings relating the two theorems, however, none of them could do the finishing touch (fig.9b-c). Upon T1's drawing (fig.9b), T3 commented that line segments AD, AB, and AC would be congruent and suggested labeling the congruent angles of the isosceles triangles and that would lead to the proof of the theorem.



a b c

Figura 9. Group A Teachers' Visualization of Tangents Theorem.

3.3.2. Tangent Segments Theorem

Tangent Segments Theorem **[Tangent segments from a point to a circle are congruent]** was another easy construction that followed the Tangents Theorem. Both groups of teachers followed totally different approaches in their visualizations. Group A teachers started by constructing the two tangent lines drawn to two arbitrary points on the circle. Upon forming the intersection of the tangent lines, T2 suggested constructing the line segments connecting the point of intersection to the points of tangency. T1 remarked that the tangent segments would be equal, once their numerical values d and e appeared on the Algebra Sidebar (fig.10a). Upon the interviewer's probing why the tangent segments are equal, T2 remarked that by drawing the two radii she would obtain a kite; she suggested drawing the diagonals and measuring the angle between the diagonals while she commented "Now just two diagonals CD and AE they should be… if it's a kite, they will be perpendicular" (fig. 10b). T3 remarked that the non-congruent angles of the kite would be supplementary, without realizing that this was actually another theorem about tangent segments, that is, the angles version of the Intersecting Tangents Theorem **[The angle formed by two tangents and the central angle corresponding to the smaller intercepted arc are supplementary angles]**. Group B teachers used the Intersecting Secants Theorem to deduce the Intersecting Tangents theorem, as described in the following section.

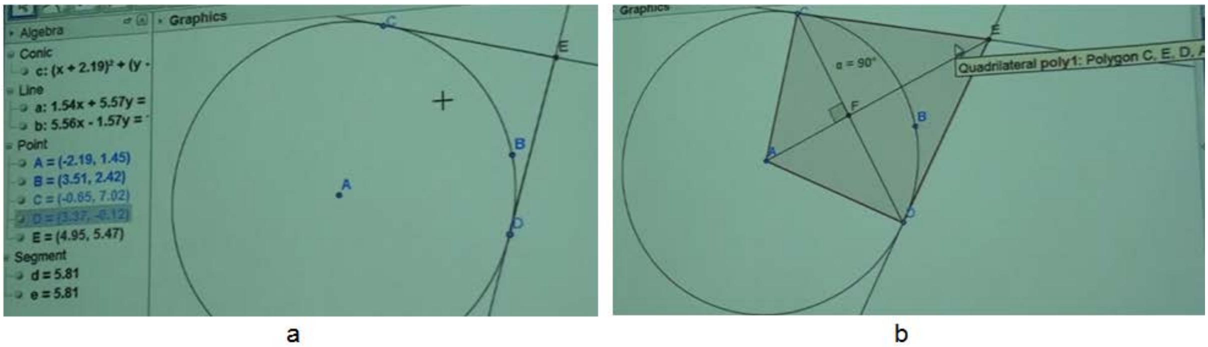


Figura 10. Visualizing Tangent Segments Theorem.

3.3.3. Intersecting Secants (Power of Exterior Point) Theorem

Power of Exterior Point Theorem applies when two secants intersect outside a circle. Group B teachers not only came up with a well-behaved construction illustrating this theorem (fig.11a), but they also used this theorem to deduce the Intersecting Tangents Theorem via a limiting strategy. In fig.11a, the variables d and e in the Algebra View stand for the products CE by CD, and CF by CB, respectively. When T4 was dragging Point C to test whether d and e would equal all the time, she was surprised to see that the equality would hold even when Point C was in the interior of the circle (fig.11b). What T4 discovered was actually the Intersecting Chords (Power of Interior Point) Theorem **[If two chords intersect in a circle, then the product of the segment lengths on one chord is equal to the product of the segment lengths on the other chord]**. T5 later obtained the Intersecting Tangents Theorem by applying a limiting strategy that was not used by any other teacher: He dragged Point E in such a way that Points E and D at the top coincided (fig.11c), thus verifying the Intersecting Secant-Tangent Theorem. Finally, he dragged Point F such that Points F and B at the bottom coincided, respectively.

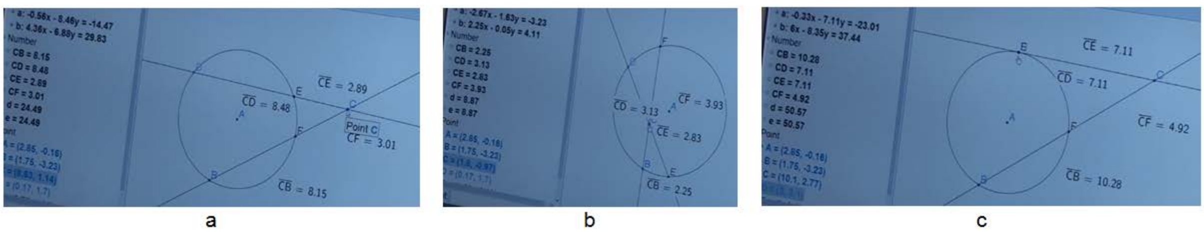
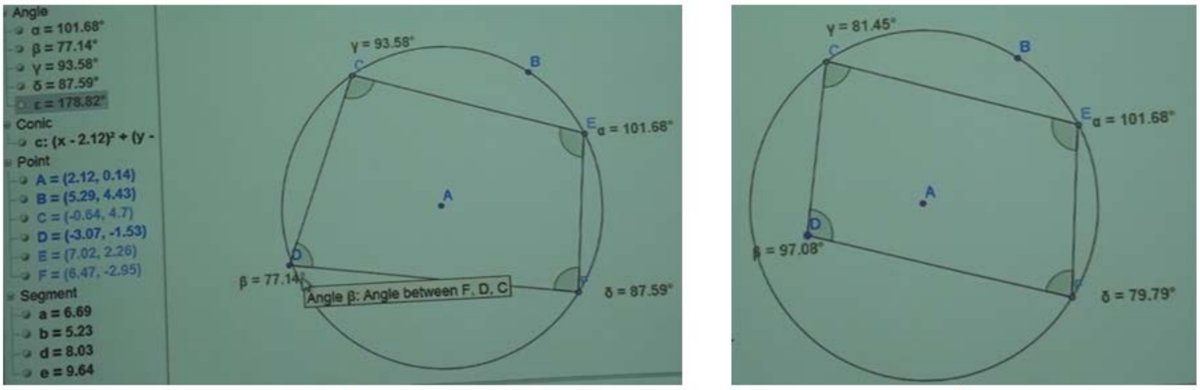


Figura 11. Group B Teachers' Visualization of Intersecting Secants Theorem.

3.4. Theorems Involving Triangle Centers and Cyclic Quadrilaterals

3.4.1. Cyclic Quadrilateral Theorem

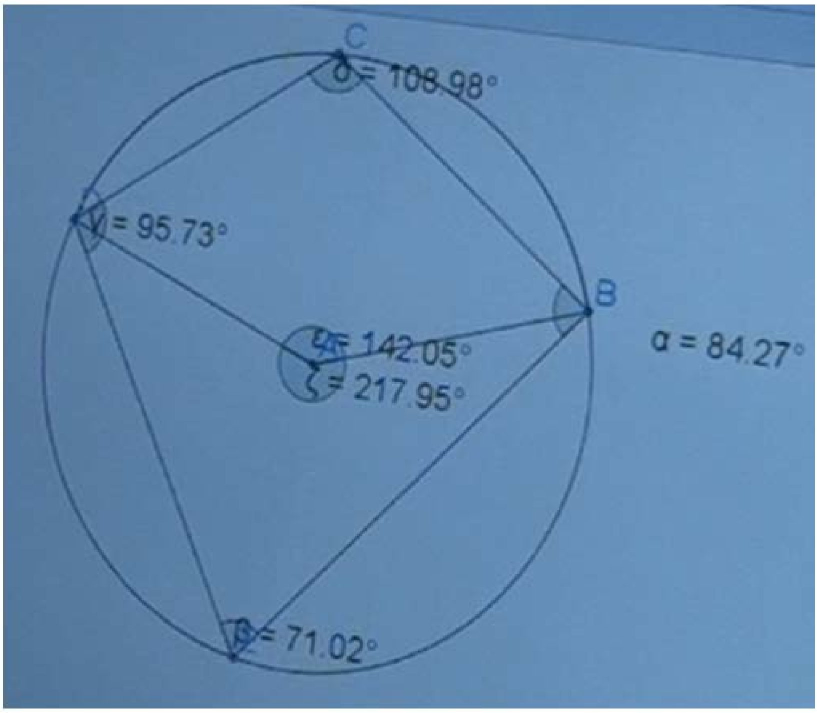
Cyclic Quadrilateral Theorem **[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary]** stood as an important construction for the Group A teachers in the sense that for the first time, they made use of the input bar to actually verify the statement of a circle theorem. They started with a circle and obtained their quadrilateral by placing four arbitrary points on the circle and connecting them via line segments. T2 then measured the angles; T1 suggested using the input bar by actually typing the sum of the opposite angles (She typed α + β, which appeared as ε = 178.82° in the Algebra View). This approach helped the teachers realize that their cyclic quadrilateral construction was incorrect (fig.12a); T1 commented that Point D was not on the circle by dragging it in an out of the circle (fig.12b). Upon fixing the cyclic quadrilateral construction, teachers redid the calculations and verified that their construction was correct. While performing the drag test, T2 remarked that the opposite angles were always supplementary. T1 further observed: “So there’re two angles that are not changing, while the other two are changing. So, the two that are changing are always changing such that they add up to 180.” This activity seemed to trigger a lot of enthusiasm in both groups of teachers.



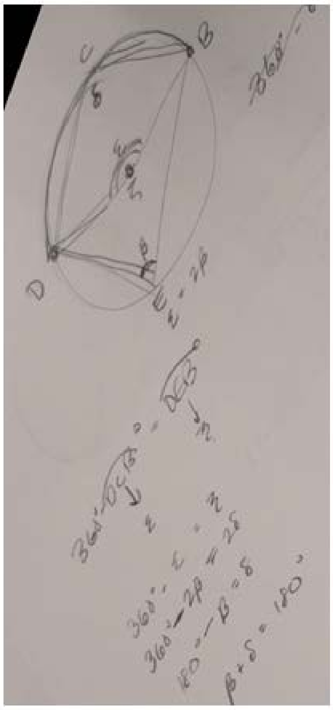
a b

Figura 12. Group A Teachers’ Visualization of Cyclic Quadrilateral Theorem.

Although Group B teachers did not use the input bar to verify the Cyclic Quadrilateral Theorem, their visualization seemed to be at a more advanced level than Group A teachers’ construction for two main reasons. First, Group B teachers thought about this theorem in connection with the previous theorems involving inscribed and central angles. Both teachers recognized this connection, and they made use of it by actually constructing not only the required cyclic quadrilateral, but also two of the relevant central angles as well (fig.13a). Second, this activity triggered teachers’ reflective reasoning in a manner that led T4 to want to analytically prove this theorem. Among all circle theorem explorations, this is the only occurrence in which a teacher algebraically proved a circle theorem (fig.13b).



a

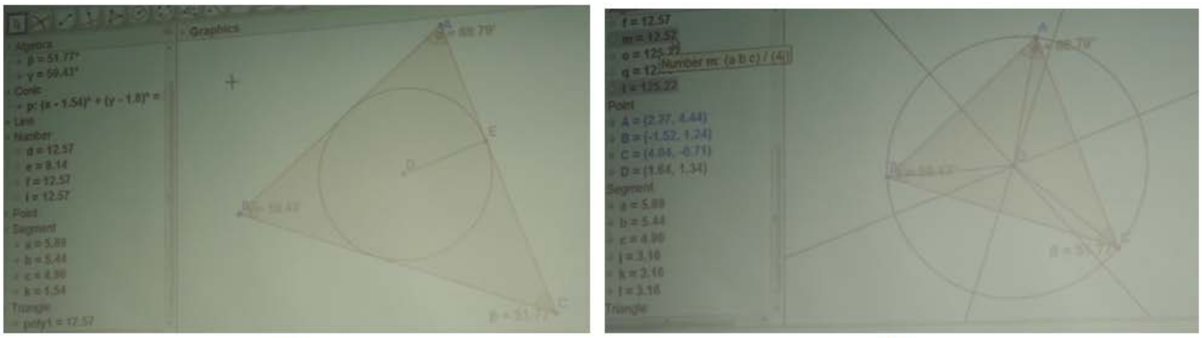


b

Figura 13. Group B Teachers' Visualization of Cyclic Quadrilateral Theorem.

3.4.2. Circle Theorems Involving Inradius, Circumradius, Semi-Perimeter

Formula based theorems stood as challenging for both groups of teachers as they were required to pay attention to well-behaved character of their constructions along with the formulas appearing on the Algebra Sidebar. Visualizing triangle area formula A = s·r (here s denotes the semi-perimeter of the triangle and r denotes the radius of the inscribed circle) was the most challenging one in that teachers had hard time figuring out how to construct the inradius r of the triangle; it was necessary to see its connection with the Tangents Theorem they previously explored (fig.14a). Among all formulas, A = abc/4R (here a, b, c denote the lengths of sides of the triangle and R denotes the radius of the circumscribed circle) offered a variety of visualizations as teachers came up with the circumscribed circle construction in multiple ways: (i) via the traditional intersecting the perpendicular bisectors approach; (ii) via the built-in *Circle through Three Points* Tool. Group A teachers emphasized the importance of using the parentheses syntax appropriately when typing the expression abc/4R in the input bar (fig.14b).

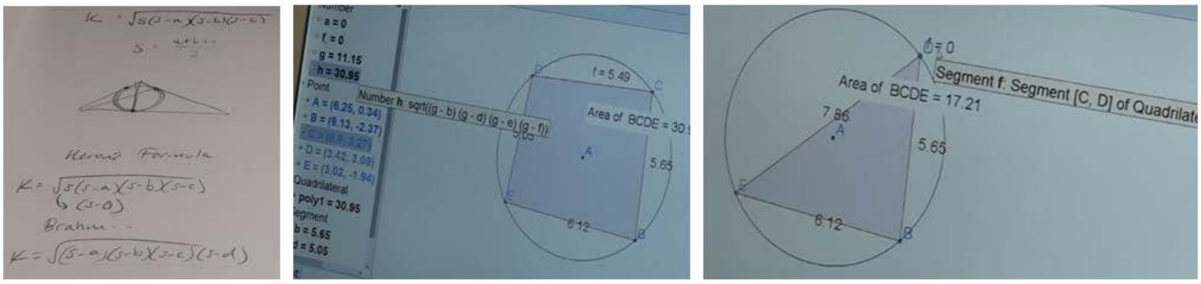


a b

Figura 14. Group A Teachers' Visualization of Triangle Area Formulas.

3.4.3. Heron and Brahmagupta's Formulas

Prior to the constructions of the formula based circle theorems on the software, Group B teachers often made sketches on the paper (fig.15a). As was the case with Group A teachers, Group B teachers initially thought that the inscribed circle would be tangent to the triangle through the intersection of the three angle bisectors with the three sides (fig.15a). Teachers in both groups were able test and falsify this conjecture using the DGS. All teachers realized how Heron's formula $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (here *a*, *b*, *c* denote the lengths of sides of the triangle and *s* denotes the semi-perimeter) and Brahmagupta's formula $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (here *a*, *b*, *c, d* denote the lengths of sides of the cyclic quadrilateral and *s* denotes the semi-perimeter) were connected by using a limiting process. Fig.15b illustrates Group B teachers' illustration of Brahmagupta's formula. Upon the interviewer's probing how they would deduce Heron's formula, T4 indicated that Heron's formula would be a special case of Brahmagupta's formula by stating "you would essentially have to take off a side like this… There it goes. You are going from a quadrilateral to a triangle and I just shifted it over. So now the length of f is zero" (fig.15c). T5 further tested Heron's formula for the "triangle" they obtained in fig.15c by entering the formula in the input bar and obtained the same area value 17.21 that appeared in the Algebra View.



a b c

Figura 15. Group B Teachers' Visualization of Heron and Brahmagupta's Formulas.

4. Discussion and Conclusion

Through expressive activities, the mathematics teacher participants came up with multiple ways that circle theorems could be visualized in a dynamic geometry environment. DGS certainly stood as a helpful asset in the professional development of the participating teachers. At times, some circle theorems were so obvious that teachers sufficed with verbal justification. Although they were not asked – nor required – to do so, they occasionally felt the need to provide analytic justification in coordination with the theorems they represented with the DGS. As presented in this report, visualization of the circle theorems via expressive activities seemed to offer multiple ways by which the DGS triggered teachers' reflective and intuitive reasoning along with a desire for further discoveries and connections among circle theorems within the geometry strand. Framed in the view of experimental mathematics (Borwein & Bailey, 2003; Borwein, 2005; Sinclair, 2008), all five teacher participants can be considered to use the DGS primarily for verifying the circle theorems, "gaining insight and intuition, discovering new patterns and relationships, and graphing to expose math principles" (Borwein, 2005, p.76). In the formula-based circle theorems, and when a circle theorem could be deduced using another circle theorem, teachers seemed to use the DGS for "testing and falsifying conjectures, and discovering new patterns and relationships" (p.76); a few rich-in-context instantiations illustrated teachers' utilization of the DGS for "exploring a possible result to see if it merits formal proof, and for suggesting approaches for formal proof" (p.76).

Bibliografía

Bernard, H. (1994). *Research methods in anthropology* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Borwein, J. M. & Bailey, D. H. (2003). *Mathematics by experiment: Plausible reasoning in the 21st century*. AK Peters Ltd.

Borwein, J. M. (2005). The experimental mathematician: The pleasure of discovery and the role of proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 75–108.

Boyatzis, R. (1998). *Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards Initiative. Retrieved from http://www.corestandards.org/

Doerr, H. M., & Pratt, D. (2008). The learning of mathematics and mathematical modeling. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology in the teaching and learning of mathematics: Vol. 1. Research syntheses* (pp.259–285). Charlotte, NC: Information Age.

Finzer, B. & Bennett, D. (1995). From drawing to construction with the Geometer's Sketchpad. *Mathematics Teacher*, 88, 428–431.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Serra, M. (2008). *Discovering Geometry : An Investigative Approach* (2nd ed.). Key Curriculum Press.

Sinclair, N. (2008). Computer-based technologies and plausible reasoning. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 233-244). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Zbiek, R.M., Heid, M.K., Blume, G.W., & Dick, T.P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Autor:

Gunhan Caglayan, New Jersey City University, Mathematics Department, 2039 Kennedy Blvd. NJ 07305 USA**.**

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 220-226

El rincón de los problemas
Patrones y generalizaciones a partir de un juego

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Juegan dos personas, diciendo alternadamente números naturales. El que inicia el juego puede hacerlo diciendo 1, 2, 3 o 4. El otro jugador debe decir un número mayor que el que dijo su competidor, pero a lo más mayor por cuatro unidades, y así sucesivamente. Gana el jugador que en su turno dice 38.
¿Siempre gana el que empieza el juego? ¿Existe una estrategia ganadora?

El juego es fácil de practicarlo. Recomiendo al lector vivir la experiencia de jugarlo con un colega, amigo, familiar o con un niño, por lo menos dos veces. No importa si gana o pierde; lo importante es familiarizarse con el juego y entenderlo bien, practicándolo, y asumir el reto de encontrar una estrategia ganadora. Por las grandes potencialidades matemáticas y didácticas que tiene este juego, yo lo he usado varias veces para iniciar un curso, taller o una conferencia, unas veces con profesores, otras con estudiantes de diversos niveles educativos. Comentaré las experiencias con este juego.

Una fase inicial es presentar más claramente las reglas del juego:

1. *Juegan dos personas, diciendo números naturales del 1 al 38.*
2. *Para empezar el juego, uno de los jugadores dice un número natural entre 1 y 4 (inclusive).*
3. *El juego continúa de la siguiente manera:*

   Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por 4 unidades.
4. *Gana el jugador que en su turno dice* ***38.***

Y así, animar a que alguno de los participantes se decida a jugar conmigo, destacando la importancia de familiarizarse con las reglas del juego y quitando importancia inicial a ganar o perder.

Ciertamente, el reto es que me ganen y esto facilita inducir al auditorio a descubrir una estrategia ganadora. Pronto se dan cuenta que el jugador que empieza el juego no necesariamente es el que gana. También advierten fácilmente que si yo digo 33, ya es prácticamente imposible que mi competidor gane, pues solo tiene las alternativas 34, 35, 36 y 37 y con cualquiera de ellas ya puedo decir 38 y ganar.

La observación anterior es una buena ocasión para invitarlos a pensar cómo evitar que yo diga 33. Valoro el *ensayo y error* al resolver el problema, pero recomiendo hacer *tanteos inteligentes* y buscar patrones. Recomiendo hacer anotaciones, pues suele ocurrir que muchos no las hacen. Luego de jugar con varios participantes, advierten que si digo 28, ya es imposible evitar que diga 33. Celebro este avance y los invito a continuar observando y razonando en esa línea, para descubrir "números clave". Obviamente yo conozco la estrategia ganadora y en los juegos sucesivos me cuido de usar los números de la estrategia para ganar; sin embargo en los primeros juegos me arriesgo y no uso todos los números de la estrategia ganadora desde el inicio. Esto dificulta un poco descubrir la secuencia de números de la estrategia ganadora, pero hace más retador el juego.

Es realmente satisfactorio cuando alguno(a) de los(as) participantes, con gran decisión y mirando sus anotaciones, me reta a jugar, me pide ser él o ella quien inicie el juego y me gana. ¡Todos felices! Evidentemente yo también, pues ese era el objetivo al hacerlos jugar: *que me ganen, descubriendo la secuencia de números de la estrategia ganadora*.

¿Cuál es esa secuencia de números? ¿La encontró usted amigo lector? ¡No se pierda la oportunidad de tener la satisfacción de encontrarla! Puede hacer una pausa en la lectura de este artículo.

Bien, como ya habíamos comentado antes, se encuentra fácilmente un número de la secuencia: el *33* (el jugador que lo dice podrá decir 38, cualquiera que sea el número que diga el otro jugador); otro número de la secuencia es el *28*, pues quien lo dice ya aseguró decir 33; con el mismo razonamiento se encuentran los otros números de la secuencia ganadora: *23* (para asegurar decir el 28); *18* (para asegurar decir el 23); *13* (para asegurar decir el 18); *8* (para poder decir el 13); y *3* (para poder decir el 8). Así, la secuencia ganadora completa es

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38.

Evidentemente, el que empieza el juego diciendo 3, puede decir cada uno de los números de la secuencia y llegar inevitablemente al 38.

Nuevos retos

Aparentemente, al tener ya la estrategia ganadora, "el juego terminó", pero no es así. Es el momento de plantearnos nuevas preguntas y de usar una muy importante al resolver y crear problemas: *¿Qué pasaría si…?*

Entonces, ¿Qué pasaría si cambiamos un poco las reglas del juego y, en lugar de llegar al número 38, ahora proponemos que el ganador será el que llegue al número **39**? ¿La estrategia ganadora será la misma? Luego de cierto asombro, los participantes concluyen que la secuencia de números de la nueva estrategia ganadora es

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39.

¿Y ahora?

¿Qué pasaría si en lugar de llegar al 39, el ganador debe llegar a otro número cualquiera, por ejemplo al **51**? ¿Cuál sería la estrategia ganadora? Con la experiencia ganada, un camino para encontrar la secuencia de números de la estrategia ganadora, es empezar por el final y armar la secuencia ganadora restando 5 unidades cada vez. Así, tal secuencia, en orden descendiente, es

51, 46, 41, 36, 31, 26, 21, 16, 11, 6, 1.

Con estos ejemplos ya se tiene descubierto el patrón que caracteriza a la secuencia de la estrategia ganadora, empezando por el final; sin embargo es muy importante saber cuál es el primer número de la secuencia de la estrategia ganadora; es decir, el número por el cual se empieza.

¿Será indispensable conocer todos los números de la secuencia para conocer cuál debe ser el primero?

A estas alturas resulta interesante preguntarse:

¿Qué operaciones matemáticas están involucradas en este juego y en su estrategia ganadora?

Obviamente están involucradas la adición y la sustracción de números naturales. Pero… ¿solo estas operaciones? Recordemos que hacemos sustracciones repetidas, lo cual nos hace pensar en la división.

Volvamos a la primera pregunta y veamos:

para llegar a 38 se empieza por 3;

para llegar a 39 se empieza por 4;

para llegar a 51 se empieza por 1.

Como se partió del final y se fue haciendo restas sucesivas de 5, resulta claro que el primer elemento de la secuencia es el número natural al cual ya no se le puede restar 5 unidades; es decir, el residuo de dividir el número objetivo entre 5; así,

$$38 = 5 \times 7 + 3$$

$$39 = 5 \times 7 + 4$$

$$51 = 5 \times 10 + 1$$

Una generalización

En general, si el número objetivo es $\boldsymbol{M}$, el primer número de la secuencia creciente de la estrategia ganadora, será el residuo de dividir $\boldsymbol{M}$ entre 5. Así, si $M = 5k + p$, donde k y p son números naturales y $0 \leq p < 5$, entonces los números de la secuencia ganadora son

$$p,\ p + 5,\ p + 2\text{x}5,\ p + 3\text{x}5,\ \ldots,\ p + k\text{x}5 = M$$

Cabe aclarar que si el número *M* es múltiplo de 5, el residuo *p* será 0 y como este número no está entre los posibles números de partida, entonces el jugador que NO empieza es el que "se apropia" de la estrategias ganadora, desde el 5.

Hacia otra generalización

La generalización anterior provino de ir cambiando el número objetivo (inicialmente fue 38, luego se cambió a 39, a 51 y finalmente se consideró el número objetivo *M*). También podríamos mantener el número objetivo del juego inicial y cambiar el "número tope". Así estamos llamando al número que se debe sumar al número que diga cada jugador en su turno. En el juego inicial, el "número tope" es 4, pues en la regla 3 se especifica que "Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por 4 unidades". Entonces,

¿Qué pasaría si…? Modificamos el juego inicial y en lugar de que sea 4 el número tope, establecido en la regla 3, solo cambiamos esta regla y establecemos que:

3. *Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por **7** unidades.*

¿Cuál es ahora la secuencia de números de la estrategia ganadora?

Por analogía con lo ya experimentado, construimos tal secuencia decreciente, comenzando por 38 y restando sucesivamente 8 unidades (***7*** + 1)

38, 30, 22, 14, 6.

Es claro que se puede construir esta secuencia en forma creciente, determinando el primer número (que sería el que tiene que decir el primer jugador para ganar en el juego). Tal número es, por razonamiento análogo al hecho cuando el número tope era 4, el residuo de dividir 38 entre 8. Tal residuo es 6, pues

$$38 = 8x4 + 6 ,$$

Entonces, el primer número de la secuencia ascendente de la estrategia ganadora es 6 y los siguientes se obtienen sumando 8 sucesivamente, hasta llegar a 38.

Ahora bien, si el "número tope" es n (obviamente $n < 38$), entonces para armar la secuencia creciente de números de la estrategia ganadora se parte del número p, que es el residuo de dividir 38 entre n+1 y se le va añadiendo, sucesivamente, n +1 unidades, hasta llegar al número objetivo 38. Así,

$38 = k(n+1) + p$, donde k y p son números naturales y $0 \leq p < n + 1$;

por consiguiente, la secuencia creciente de la estrategia ganadora es

$$p$$

$$p + (n+1)$$

$$p + 2(n + 1)$$

$$p + 3(n + 1)$$

$$\ldots.$$

$$p + k(n + 1) = 38$$

Generalizando aún más:

Podemos plantear el juego de una manera más general, con las siguientes reglas:

1. Juegan dos personas, diciendo números naturales del 1 al ***M***.
2. Para empezar el juego, uno de los jugadores dice un número natural entre 1 y ***n*** (inclusive).
3. El juego continúa de la siguiente manera:

   Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por ***n*** unidades.
4. Gana el jugador que en su turno dice ***M.***

En tal caso, la secuencia de la estrategia ganadora se puede construir, en forma decreciente, siguiendo un patrón similar al del juego inicial y que se repitió en las variaciones hechas:

Partiendo del número objetivo M y restando sucesivamente $n + 1$ unidades, hasta que esta resta sea imposible entre números naturales.

Tener en cuenta que $n + 1$ en este caso es la generalización correspondiente a $n = 4$ en el juego inicial, pues en él las restas sucesivas se hicieron de 5 en 5

Como en la generalización anterior, la secuencia ganadora se puede construir también a partir del primer número de la secuencia creciente, siendo este el residuo p de dividir M entre $n + 1$. Consideremos $M = k(n + 1) + p$, donde k y p son números naturales y $0 \leq p < 5$. Así, la secuencia ganadora es

$$p$$

$$p + (n + 1)$$

$$p + 2(n + 1)$$

$$p + 3(n + 1)$$

$$\ldots$$

$$p + k(n + 1) = M$$

Comentarios

1. Un caso particular de la generalización que acabamos de ver, es el juego "La carrera al 20" (basta considerar M = 20 y n = 2). Brousseau lo muestra como ejemplo de una modelización de una situación matemática. De hecho, el conocimiento matemático asociado a "La carrera al 20" es la división euclídea.

2. Una manera de caracterizar el patrón de los números de la secuencia correspondiente a la estrategia ganadora es observando que todos son números que tienen el mismo residuo que se obtiene al dividir el número objetivo M, por n + 1, siendo n el "número tope". Así, en el juego inicial, el residuo de dividir 38 entre 5 es 3 y los números 3, 8, 13, 18, 23, 28 y 33 tienen, todos, residuo 3 si se les divide por 5.

   Otra manera de enunciar esta propiedad es usando un concepto de la aritmética modular; así, decimos que estos números naturales son menores o iguales que 38 y congruentes con 38, módulo 5.

3. Hemos podido ver la riqueza de estos juegos para estimular el pensamiento matemático, pues permite identificar patrones, hacer razonamientos inductivos y deductivos, razonamientos por analogía y generalizaciones. También, identificar los diversos conceptos matemáticos involucrados en el juego. En particular, la división euclidea, que suele no identificarse en las primeras reflexiones.

4. Un reto interesante, desde el punto de vista didáctico, es imaginar una situación particular y presentarla con material concreto a niños que solo conocen números naturales, por ejemplo del 1 al 20 y saben hacer sumas y restas "pequeñas". El juego, además de atractivo debe mantener el reto de encontrar una estrategia ganadora. A continuación mostramos las fotografías del material concreto preparado por tres grupos de profesoras de primaria de un colegio de Lima, luego de un taller desarrollado con ellas y en el que trabajamos con este juego. Cada tablero tiene su propia historia y sus propias reglas (similares a las del juego inicial) para llegar al objetivo.

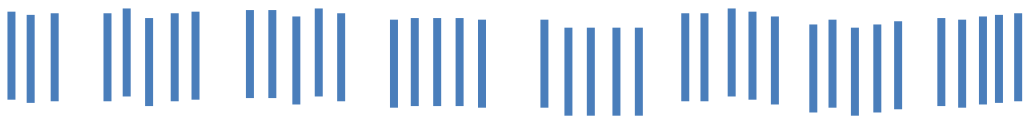


5. Lo hecho por las profesoras muestra una vez más las capacidades creativas de nuestros docentes. Ellos pueden crear "juegos matemáticos" y

problemas cuando son incentivados para ello y se les da los elementos básicos. Los lectores quedan invitados a crear sus propios juegos para diversos niveles educativos, inspirados en lo expuesto.

6. Otra idea interesante para trabajar con material concreto, es disponer, por ejemplo, 38 palitos en la mesa y poner como regla, para dos jugadores, retirar por turnos a lo más 4 palitos. Gana el que retira el último palito. En esta perspectiva, una manera de inducir la división euclídea es acomodar los palitos en 8 grupos: el primero de tres palitos y los otros 7 de 5 palitos cada uno. Se mantiene la regla anterior, pero se añade que

Los palitos que saque cada jugador en su turno deben pertenecer a un mismo grupo.



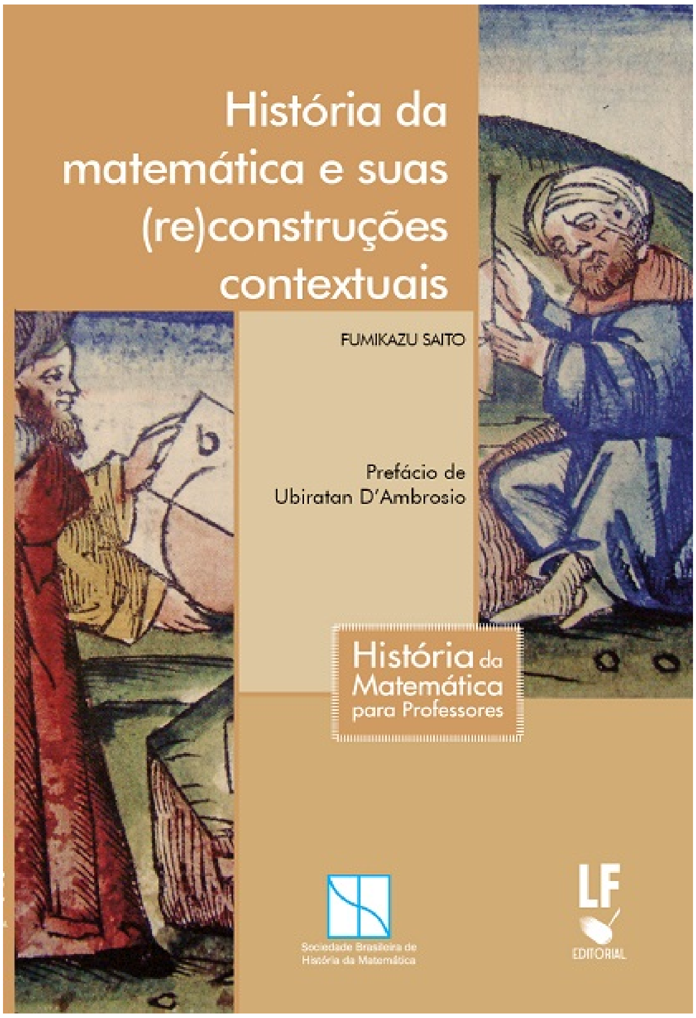
Dejamos para entretenimiento del lector, encontrar la estrategia ganadora retirando palitos, ubicados en los ocho grupos descritos, respetando las reglas dadas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 227-232

Resenha do livro: História da Matemática e suas (re)construções contextuais.

Arlete Jesus Brito



O livro

História da Matemática e suas (re)construções contextuais (2015, 259 páginas) faz parte da coleção História da Matemática para Professores da editora Livraria da Física. Seu autor, Fumikazu Saito, possui doutorado e pós-doutorado em História da Ciência, é professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e atua como pesquisador no Centro Simão Mathias de Estudos em História da Ciência (CESIMA-PUC/SP). Sua relevante produção acadêmica emerge das pesquisas que desenvolve na área de interconexão entre História da Ciência e Educação Matemática.

Tal interconexão é explicitada na *Introdução* da obra, quando o autor afirma que busca:

> privilegiar os contextos de elaboração, transformação e transmissão (bem como de apropriação) do "conhecimento matemático". Partimos do pressuposto de que a compreensão de tais contextos, em que o "conhecimento matemático" estabeleceu diferentes relações com outros seguimentos do conhecimento, bem como com diferentes modelos de "fazer ciência" em diferentes épocas, pode, posteriormente, dar uma ideia mais completa do processo de construção e elaboração de cada conceito matemático. (Saito, 2015, p. 11-12)

Conforme ressaltado no livro, atualmente vários estudos destacam tais conexões, entretanto, muitas vezes, seus resultados ficam restritos ao meio acadêmico, o que dificulta seu acesso por parte de professores de matemática – atuantes ou em formação. A publicação dessa obra enseja uma oportunidade para que os docentes conheçam uma perspectiva histórica que contribui para que reflitam sobre o porquê ensinar, o que ensinar e para que ensinar matemática.

Após a *Introdução*, o livro apresenta seis capítulos. O primeiro deles é dedicado a questões historiográficas. Nele, ressalta-se que a história da matemática tem sido valorizada no ensino porque pode propiciar maior criticidade aos alunos no que se refere à elaboração do conhecimento matemático e aos usos que dele são feitos na sociedade.

Além disso, esse capítulo merece destaque por abordar um tema que tem sido negligenciado na Educação Matemática, qual seja, o papel da história da matemática na constituição do conhecimento matemático no decorrer do tempo. Segundo o autor, ela, em diferentes momentos, impulsionou o desenvolvimento das ciências em geral e das matemáticas em particular. Tal tema é retomado nos capítulos quatro e seis.

Segundo o texto, a história pode sempre ser reinterpretada, o que gera novos modos de se compreender a matemática e suas relações com outros discursos. As diferentes interpretações históricas são propiciadas pelos tipos de documentos históricos utilizados, pelas perguntas que o historiador faz a esses documentos, pelas abordagens metodológicas que fundamentam a pesquisa, enfim, pela perspectiva historiográfica adotada pelo pesquisador. Nesse sentido, o autor vai ao encontro de Bloch que afirma:

> A partir do momento em que não nos resignamos mais a registrar [pura e] simplesmente as palavras de nossas testemunhas, a partir do momento em que tencionamos fazê-las falar [mesmo a contragosto], mais do que nunca impõem-se um questionário. Esta é, com efeito, a primeira necessidade de qualquer pesquisa histórica bem conduzida. (Bloch, 2001, p. 78)

Saito (2015) categoriza em duas a grande gama de correntes historiográficas existentes e as denomina de "tradicional" e "crítica". Segundo ele, na primeira delas, o conhecimento matemático seria compreendido como uma sucessão linear e progressiva de descobertas. Na segunda perspectiva, que é adotada no livro, a pesquisa considera documentos de diferentes tipos, como por exemplo, escritos, imagéticos, arquitetônicos e, portanto, de diversos campos do saber. Tais documentos são analisados a partir da problemática escolhida pelo historiador que não busca elos lineares de um pretenso progresso do conhecimento. Nessa vertente "crítica", os questionamentos que guiam a elaboração histórica estão no presente, mas este não é utilizado para julgar o conhecimento produzido no passado que é devolvido à sua malha histórica tecida, no livro, pelo fio da linearidade temporal, desde a Antiguidade Clássica até o século XX.

Os saberes matemáticos na Antiguidade Clássica são o tema do segundo capítulo. Para facilitar a compreensão do leitor, o autor divide esse período nas fases grega, helenística e romana. Na primeira delas, quatro ciências eram consideradas matemáticas: aritmética, geometria, astronomia e música. Após realizar uma breve, porém esclarecedora exposição sobre as filosofias de Platão (c. sec. IV a. E. C.) e as de Aristóteles (sec. IV a.E.C.), Saito (2015) tece uma síntese comparativa entre elas no que se refere ao objeto das matemáticas e ao papel que os filósofos destinavam a elas na formação do cidadão grego. Enquanto para

Platão, os números e as figuras seriam ideias (*eidos*) independentes do ser humano e deveriam ser ensinadas aos futuros governantes por serem propedêuticas ao exercício da dialética, isto é, à arte do diálogo que daria rigor à investigação filosófica, para Aristóteles os objetos matemáticos seriam criação da inteligência a partir do mundo sensível e deveriam ser ensinados porque junto com a Metafísica e a Física tinham por objetivo contemplar a verdade. Observamos que esse debate sobre o que seriam os objetos da matemática se colocou em vários outros momentos históricos, inclusive no início do século XX com as filosofias da matemática de então. Apesar de destacar a matemática como um conhecimento especulativo entre os gregos, o texto também disserta sobre sua utilização prática como, por exemplo, na logística que era a prática de realizar cálculos para resolver problemas do cotidiano.

Na fase helenística (sec. III ao II a. E. C.), as matemáticas foram muito valorizadas por serem úteis à arte militar e à administração política e econômica. Seu ensino era incentivado, mas apenas para membros da elite alexandrina. Desse período, o autor discorre sobre obras de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Os trabalhos matemáticos de Arquimedes podem ser agrupados em: 1) que buscam provar teoremas sobre áreas e volumes; 2) que conduzem à análise geométrica de problemas estáticos e hidrostáticos; e 3) que tratam de temas em que a geometria e a aritmética teriam aplicações, como, por exemplo, na óptica e em relógios de água. Apolônio teria estudado com os sucessores de Euclides em Alexandria, onde escreveu textos sobre as cônicas. Euclides escreveu vários tratados dedicados à música, à óptica, à astronomia, mas seu trabalho mais conhecido e influente são os *Elementos* que se supõem ser uma compilação, realizada muito tempo depois da morte de Euclides, dos livros de geometria escritos por esse pensador. Teria sido também no período helenístico que se escreveram histórias e lendas sobre Pitágoras e seus seguidores.

Em linhas gerais, entre os romanos, as matemáticas dividiam-se em puras (aritmética e geometria) e práticas (mecânica, astronomia, óptica, geodésia, lógica, logística). Essas últimas interessavam aos romanos por seus usos na arte militar, na construção de estradas, aquedutos, fortificações, além de estarem presentes na administração de bens e em transações comerciais. Eram transmitidas por aqueles que exerciam a arte militar, pelos contadores, construtores, arquitetos e agrimensores denominados na época de “gromáticos”. Porém, tal matemática não era estudada nem praticada pelos membros da aristocracia romana que quando precisavam delas, contratavam alguém que tivesse o conhecimento necessário ou, o que era comum na época, deixavam o problema a ser resolvido a cargo de seus servos e escravos. Nesse período, longe de Roma, estudiosos dedicavam-se a especulações matemáticas teóricas, dentre os quais, estavam Ptolomeu (? – 168), Diofanto de Alexandria (c. 200 – c. 284), Nicômaco de Gerasa (60 – 120) e Pappo de Alexandria (c. 290 – c. 350).

O autor justifica que sua escolha por iniciar sua exposição histórica pela Antiguidade Clássica deveu-se ao resgate da matemática desse período, no Renascimento. Além disso, a organização das áreas do conhecimento debatida entre gregos reverberou no modo de considerar a matemática a partir do século XVII. Mas, antes de discutir o que ocorreu na Idade Moderna, o livro apresenta as matemáticas na Idade Média.

No terceiro capítulo, o autor segue a divisão canônica da Idade Média em Alta e Baixa e discorre sobre as matemáticas desenvolvidas e utilizadas no ocidente latino, no Império Bizantino e entre os árabes. Salienta que no primeiro deles, o *quadrivium* – a aritmética, geometria, música e astronomia – foi retomado com o enfoque da espiritualidade cristã, por meio de discussões metafísicas que, durante a Alta Idade Média (sec. V – XI), tinham como pano de fundo a filosofia de Platão. São desse período obras como as de Boécio (c. 480 – 524) e Agostinho (354 – 430) que consideram o número uma chave para compreender a natureza da criação. Foi nessa época também que começaram a surgir imagens simbolizando Deus como um arquiteto com compasso na mão, gerando o mundo a partir do caos.

No Império Bizantino da Alta Idade Média, a tônica dos estudos estava na preservação dos textos gregos. Seu espírito enciclopédico fez com que pensadores como Proclo (412 – 485) e Simplício (490 – 560) buscassem recensear, inventariar e compilar os escritos antigos. Esse trabalho de conservação e de elaboração de comentários sobre o conhecimento matemático da Antiguidade Clássica colaborou para que o Renascimento tivesse acesso a ele. Os árabes também tiveram papel importante na disseminação das matemáticas, pois além de estudá-las, traduzi-las e comentá-las, produziram a álgebra e novos conhecimentos em outros campos como, por exemplo, na óptica. Seus métodos de investigação surgiram principalmente devido aos problemas práticos que se lhes apresentavam em relação ao cálculo da esmola legal, à divisão de heranças e à repartição de impostos.

A contribuição inovadora desse capítulo recai sobre a discussão que é feita acerca dos modos de classificação do conhecimento que ocorreram a partir do final da Alta Idade Média. Os medievais seguiram, basicamente, duas tradições para classificar as ciências: a platônica e a aristotélica. No entanto, adotaram outros critérios, pois acreditavam que os nomes refletiam a essência de cada ciência. A partir de uma discussão das classificações presentes em textos da Baixa Idade Média (sec. XII – XV), tais como os de Hugo de Saint Victor (sec. XII), Roger Bacon (1214 – 1294), Roberto Grosseteste (1175 – 1253) e Tomás de Aquino (1225 – 1274), se indica o caminho pelo qual o conhecimento foi reorganizado de modo a se criar uma área denominada de “matemáticas mistas” que “aplicavam os princípios das matemáticas puras às coisas naturais de matéria sensível” e que tiveram papel primordial para o desenvolvimento da matemática a partir do Renascimento.

As matemáticas nos séculos XV e XVI é o título do capítulo quatro. Nele, o autor destaca a relação íntima entre o mágico, o místico, a experimentação e a abstração matemática do período:

> De um lado, antigos conhecimentos, que estavam de alguma maneira perdidos ou tinham sido ignorados, tornaram-se acessíveis aos estudiosos daquela época. Assim, a recuperação de antigas doutrinas pitagóricas, platônicas, neoplatônicas, herméticas, entre outras, juntamente com os conhecimentos das artes em geral, que eram transmitidos oralmente, deu margens a diferentes debates acerca das novas formas de investigar a natureza. (Saito, 2015, p 165).

O texto localiza tais mudanças do saber nas transformações sociais, políticas e econômicas que ocorreram a partir do Renascimento europeu e que conduziram os “praticantes das matemáticas” – tais como os navegadores, agrimensores, entre outros – a aplicar, influenciados pela álgebra, os conhecimentos sobre os números às formas. Nesse contexto, os instrumentos matemáticos utilizados por aqueles praticantes tiveram importante papel na construção de novos saberes. A história da matemática tornou-se um vetor nessa construção porque deixou de ser uma narrativa de acontecimentos para tornar-se um modo de justificar os argumentos a favor do progresso da ciência que se formava e que veio a se tornar o que hoje denominamos por “ciência moderna”.

O quinto capítulo discorre sobre as matemáticas do século XVII. Segundo o livro, naquele século, além das alterações nos modelos sociais e econômicos, um certo ceticismo em relação ao conhecimento (já que os pensadores daquele século tiveram contato com os saberes de várias civilizações antigas e o questionamento sobre qual deles seria o correto veio à tona) ocasionou uma busca pelos fundamentos do método científico. Tais fundamentos se assentavam em bases metafísicas, notadamente cristãs. Havia uma grande gama de variações teóricas entre os que afirmavam que aquele método deveria ser o experimental e os que defendiam que ele deveria estar embasado na matemática.

Em uma época de guerras e de disputas religiosas entre católicos e protestantes, vários estudiosos passaram a se encontrar em academias e sociedades eruditas que tinham por uma das metas desenvolver conhecimentos que conduzissem os povos à paz. Assim, pode-se afirmar que a ciência do século XVII nasceu de um esforço conjunto de professores, médicos, teólogos e artesãos. Na matemática surgiram novos objetos de investigação, como, por exemplo, a perspectiva. Nesse ponto, o livro opta por seguir um caminho diferente da maioria dos que tratam da história da matemática, porque enquanto estes, ao discorrer sobre a matemática moderna, abordam prioritariamente os desdobramentos da álgebra, Saito (2015) aprofunda-se no desenvolvimento da geometria projetiva e mostra como foi ocorrendo a especialização do conhecimento com a criação de novas áreas do saber.

A caminho da especialização moderna é o título do último capítulo do livro. Nele, o autor nos esclarece que entre os inícios dos séculos XVIII e XX surgiram vários novos campos de investigação, dentre os quais, a “ciência moral”. Narra sobre a institucionalização da matemática a partir do século XVIII que levou a criação do “matemático” como o entendemos atualmente. Descreve o papel reservado à matemática na classificação positivista da ciência e esclarece como a história da matemática foi cedendo lugar para a filosofia da ciência que passou a impulsionar novos modos de entender e lidar com o conhecimento. Por fim, comenta o ressurgimento da discussão sobre a importância da história da matemática dentro de instituições formadoras de futuros professores.

Ao chegar ao fim do livro, percebemos que, ao contrário de outros disponíveis sobre o assunto, esse não pretende destilar a história da matemática retirando-lhe as relações com a religião, o misticismo, as artes mecânicas e os aspectos de ordem política e econômica. Além disso, o conhecimento da matemática prática, bem como dos instrumentos associados à sua utilização social são valorizados tanto quanto o desenvolvimento da matemática abstrata. Outro aspecto notável que o distingue é que a contextualização das diferentes épocas faz com que o leitor reconheça a importância do conhecimento desenvolvido em diferentes momentos históricos, de modo a não depreciar nenhum em detrimento de outros.

O texto é redigido com uma linguagem clara, argumentos muito bem elaborados e grande erudição. Por vezes, coloca-se em tom de diálogo com o leitor, como, por exemplo, na página 44 em que o início de um parágrafo é "Note que, para Platão [...]". Além de tais marcas de diálogo, o leitor também é convocado por meio de pequenas caixas com esclarecimentos sobre verbetes que facilitam a compreensão das discussões por parte daqueles que não estão habituados com o vocabulário utilizado.

A partir das características elencadas aqui, não podemos deixar de concordar com D'Ambrósio que no prefácio da obra afirma:

> Fumikazu Saito responde a uma crescente demanda na educação, que é a inclusão da História da Matemática nos cursos de formação de professores. Os cursos de Licenciatura de Matemática dão muita ênfase aos conteúdos e métodos de ensino. Mas carecem de uma visão global da Matemática, de como essa disciplina evoluiu ao longo da história da humanidade. (D'Ambrósio, 2015, prefácio)

A nosso ver, não apenas os professores atuantes e em formação serão beneficiados com a leitura de *História da Matemática e suas (re)construções contextuais*, mas também os formadores desses professores e todos os envolvidos com pesquisas cujos temas estão na interface entre História da Ciência e Educação.

Bibliografía

BLOCH, M. (2001) *Apologia da história ou o ofício de historiador.* Zahar Editora. Rio de Janeiro.

D'Ambrósio, U. Prefácio. In SAITO, F. (2015) *História da Matemática e suas (re)construções contextuais* . SBHMat/Livraria da Física. São Paulo.

SAITO, F. (2015) *História da Matemática e suas (re)construções contextuais* . SBHMat/Livraria da Física. São Paulo.

Autor:

Arlete Jesus Brito- Professora livre-docente da UNESP, campus Rio Claro, SP, Brasil. Doutorado em Educação pela UNICAMP e pós-doutorado pela Universidade de Bielefeld, Alemanha.
arlete@rc.unesp.br