REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XII – Número 48 – Diciembre 2016 http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

PROPUESTAS PARA AULA

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex*** y ***CAPES***

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre, 2016
Página 02-09

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos,

Acabamos de publicar el número 48 de UNIÓN. Esta revista ha demostrado tener una fuerza que nos hace sentirnos muy felices. En esta edición, nos complace contar como firma invitada con Manuel de León (1953, Zamora), profesor de Investigación del Consejo Superior de Investigaciones (CSIC), ha trabajado principalmente en el campo de la Geometría Diferencial y sus aplicaciones a la Mecánica y a la Física Mecánica. Además, es director del Instituto de Ciencias Matemáticas un centro de investigación mixto del CSIC junto con tres universidades madrileñas: la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), la Universidad Carlos III de Madrid (UC3M), y la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Mantiene el puesto desde la creación del centro en 2007 y es el investigador principal del proyecto presentado al Programa Severo Ochoa que, desde 2011, distingue al ICMAT como uno de los mejores centros de toda España. Nos presenta el resultado de su investigación “ACERCAR LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA A LAS AULAS”. En ella el autor muestra como la investigación matemática debe contribuir para que las matemáticas puedan presentarse a los alumnos y a los futuros ciudadanos como una ciencia con aplicaciones en la vida diaria. El Proyecto Klein de IMU e ICMI, quiere recordar las ideas de principios del siglo XX del matemático alemán Félix Klein, va en esa dirección. Se presentan dos ejemplos posibles en las que, partiendo de resultados elementales que se enseñan en las escuelas, podemos llegar a las últimas aplicaciones y desarrollos sofisticados de la matemática actual.

En el número 48 encontrarán siete artículos sobre los diversos temas, tres propuestas de aula, un problema y la reseña de dos libros. A continuación, presentamos la información sobre el contenido de este número.

El primer artículo titulado **“INCLUINDO TECNOLOGIAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA: PLANEJANDO AULAS COM O RECURSO DOS TABLETS”** de la autoría de Homa e Groenwald se presenta la discusión enfocada en los conceptos fundamentales en el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la Educación Básica. Se realizó un experimento con los profesores de matemáticas en educación continua, con construcciones con GeoGebra para tabletas, abordando conceptos de geometría y coordenadas polares con el Tangram. El objetivo general fue investigar las posibilidades de utilizar las tabletas como recurso didáctico en la construcción del conocimiento matemático. Los resultados indican que el uso de tabletas es una alternativa metodológica para la inclusión de las TIC en la Educación Matemática, que supone un cambio de la planificación habitual.

Alsina y Ortiz en el artículo “**DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA EN EL AULA: ELEMENTOS PARA SU CARACTERIZACIÓN Y DESARROLLO”** ofrecen orientaciones al profesorado de Educación Infantil y Primaria para fomentar la competencia probabilística de los alumnos. En la primera parte se describe la competencia matemática en general y la competencia probabilística en particular, que se concibe como la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real; su desarrollo se aborda a partir de dos aspectos interrelacionados: los contextos de enseñanza-aprendizaje y las conexiones entre los conocimientos matemáticos. En la segunda parte se describen diversas tareas, actividades que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable, para desarrollar la alfabetización probabilística en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

"LA EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS: ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ESCRITAS QUE SE REALIZAN EN SECUNDARIA" es el tercer artículo de este número. Sus autores son Lizarazo, Blanco Nieto y García. Según su investigación, los profesores de matemáticas siguen considerando las pruebas escritas como el principal referente de su evaluación. En ellas se proponen diferentes tipos de tareas con la intención de contrastar los aprendizajes de los estudiantes. Estas tareas son el foco de aprendizaje, trabajo y esfuerzo de los estudiantes para poder aprobar. En busca de identificar el tipo de aprendizajes que se potencian con las pruebas escritas, fueron analizadas 124 pruebas escritas, elaboradas por 84 profesores de secundaria de la ciudad de Bogotá. Esas pruebas contenían 2483 tareas, de las cuales, 999 eran consideradas problemas por los profesores que las proponían. En ellas se constata que las demandas cognitivas en su mayoría son de un nivel bajo o medio.

En el artículo de Mántica e Carbó titulado **"ESTUDIO DE PROCESOS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN INTERACCIÓN CON PARES**" se presenta el análisis de lo realizado por un grupo de estudiantes de una escuela secundaria, al formular una conjetura y validarla. Conscientes que cuando se conoce el proceso de producción de la demostración se puede tomar una decisión acerca de su validez efectiva y de su nivel, realiza el estudio utilizando registros etnográficos, audios, escritos y vídeos de lo producido durante la resolución de la tarea. Se realizan clasificaciones de los niveles de prueba alcanzados y se observa cómo actúan los estudiantes al producir soluciones comunes.

"COLABORACIÓN INTERNACIONAL EN CURSOS DE MAESTRÍA: EL CASO BRASIL-COLOMBIA" es el artículo de Borba, Almeida, Lopez e Vega. En el analiza la colaboración de dos grupos de investigación, quienes ofertaron un curso totalmente a distancia para dos programas de maestría de diferente nacionalidad. El curso fue parte de un proyecto de colaboración entre Brasil y Colombia entre los años 2014 y 2016. Utiliza una investigación cualitativa y de manera más específica el estudio de caso, como abordaje metodológico. Destacamos que este tipo de acciones pueden constituir una manera en la que los estudiantes de los programas de maestría, tengan un componente internacional en su formación.

Oliveira Filho, Santos y Abar refleten sobre **"IMPLICAÇÕES DAS EXPERIÊNCIAS PESSOAIS NA CONSTITUIÇÃO DA IDENTIDADE PROFISSIONAL DOCENTE"** en base a resultados de una investigación cualitativa, tiene por objeto de investigación profesores de la escuela primaria de Brasil. Para recoger los datos se utilizaron cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y paneles descriptivos. Para el análisis de datos se utilizó a ATD (Análisis Textual Discursiva), en cuatro etapas: organización del corpus, unitarización de los elementos de significado, definición de las categorías y producción de metatexto. Los resultados mostraron que las experiencias de los profesores son continuas, permitiendo una reflexión y revisión de posiciones, y el consiguiente refuerzo de la identidad profesional a través del tiempo.

El artículo séptimo del número 48 tiene por título **“UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DE UM ESTUDO COM PROFESSORES**”, y sus autores son Santos e Barbosa**.** En este estudio fue desarrollado un modelo teórico de Matemáticas para la Enseñanza del Concepto de Función, utilizando como aporte teórico las reglas de reconocimiento y realización de la teoría del sociólogo Basil Bernstein, y como herramienta metodológica la estructura organizacional del Estudio del Concepto. Los datos fueron recolectados en una investigación empírica con un grupo de profesores. El modelo puede ser empleado como cuadro teórico en investigaciones sobre Matemáticas para la Enseñanza, así como para analizar y generar una amplia gama de formas de realización del concepto de función en la enseñanza.

A continuación, presentamos las tres propuestas de aula.

La primera, de Escalona, es **“UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE SUMA Y RESTA EN ESCOLARES DE TRES, CUATRO Y CINCO AÑOS**” en la que se estudia la construcción de las operaciones aritméticas de suma y resta en un esquema lógico–matemático subyacente al de transformaciones y se propone un plan de actuación en el aula mediante un tratamiento sistemático de dichas operaciones.

Polo nos presenta la propuesta “**GEOMETRÍA EN EL AULA A PARTIR DE UN TRATADO ESPAÑOL DE FORTIFICACIÓN DEL SIGLO XVI**”, guiada por la suposición de que la introducción de la historia de las matemáticas en el aula ordinaria es muy beneficiosa para el desarrollo y el proceso de aprendizaje. Aquí se presenta una secuencia didáctica donde la geometría, las TIC y el trabajo cooperativo se ven complementadas con un tratado de fortificación español del siglo XVI: los estudiantes aprenderán a tomar medidas indirectas a partir de las instrucciones de la *Teoría y práctica de fortificación* (1598) de Cristóbal de Rojas. La experiencia es exitosa, donde la historia de las matemáticas se hace imprescindible para contextualizar un problema determinado.

Para finalizar se presenta una situación real y concreta con la cual puede enfrentarse un alumno de la carrera de Ingeniería Agronómica de universidades de Argentina, tanto en la situación de estudiante como posteriormente de profesional, se pretende hacer uso de tres temáticas diferentes, Errores, Trigonometría y Vectores, incluidas en el plan de estudios e íntimamente relacionadas, con el objeto de poder resolver una problemática donde se integren los conocimientos que se dictan en las asignaturas como también utilizar dos temas inherentes a la matemática como alternativa a la solución del mismo. Es el contenido de “**ERRORES, TRIGONOMETRÍA Y VECTORES: APLICACIONES MATEMÁTICAS SOBRE EL MISMO OBJETO DE ESTUDIO”** propuesto por Cañibano, Vázquez y D´Andrea.

En la sección de resolución de problemas, Uldarico Malaspina Jurado nos trae reflexiones sobre: "**UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES, EN CONTEXTO COTIDIANO Y CON PUNTOS DE DISCONTINUIDAD".**

Armando Traldi, preparó la revisión de dos libros: **"DESAFIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA: FORMAÇÃO DE PROFESSORES"** cuyos organizadores son MANRIQUE, Ana Lucía; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque y MOREIRA, Geraldo Eustaquio. En esta revisión Traldi, afirma que la obra presenta de manera cuidadosa la educación especial pues propone estudios basados en la literatura actual y con la sensibilidad necesaria para tratar el tema, con el uso de términos técnicos recomendados por expertos en el campo de la educación especial. Por lo tanto, el trabajo aporta contribuciones significativas y pertinentes a la comunidad científica, pero destaca las contribuciones relacionadas con la formación de profesores que trabajan en educación especial.

Para terminar, quisiéramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos,

O número 48 da UNIÓN acaba de sair. Esta Revista tem demonstrado muito vigor o que nos deixa muito satisfeitos. Neste número, temos o prazer de trazer para vocês, na condição de invitado, Manuel de León (1953, Zamora), professor de Investigação do Conselho Superior da Investigações (CSIC) e que tem trabalhado principalmente no campo da Geometria Diferencial e suas aplicações à Mecânica e à Física Mecânica. Também é diretor do Instituto de Ciências Matemáticas, um centro de pesquisa do CSIC e três universidades de Madrid: a Universidade Autónoma de Madrid (UAM), a Universidade Carlos III de Madrid (UC3M) e a Universidade Complutense de Madrid (UCM). Mantém o posto desde a criação do centro em 2007 e é o principal pesquisador do projeto apresentado ao Programa Severo Ochoa que, desde 2011, distingue o ICMAT como um dos melhores centros de toda a Espanha. Professor Manuel de León nos apresenta o resultado da sua investigação **“ACERCAR LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA A LAS AULAS**”. Nele o pesquisador mostra como a pesquisa matemática deve contribuir para que a matemática seja apresentada aos estudantes e futuros cidadãos como uma ciência que tem aplicações na vida cotidiana. O Projeto Klein de IMU e ICMI, que quer recuperar as ideias do início do século XX do matemático alemão Félix Klein, vai nessa direção. São apresentados dois exemplos possíveis nos quais, a partir de resultados elementares que é ensinado nas escolas, podemos chegar às mais recentes aplicações e desenvolvimentos sofisticados da Matemática atual.

O número 48 acolheu 7 artigos sobre as diversas temáticas de nossa área, 3 propostas de aulas, um problema e a resenha de dois livros. No que segue apresentamos indicações sobre o material deste número com votos que ele traga contribuições à pesquisa e a prática profissional de nossos leitores.

O primeiro artigo tem por título "**INCLUINDO TECNOLOGIAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA: PLANEJANDO AULAS COM O RECURSO DOS TABLETS**" de autoria de Homa e Groenwald que apresenta a discussão centrada nos conceitos fundamentais no uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação Básica. Foi realizado um experimento com professores de matemática na educação continuada, com construções com o GeoGebra para tablets, abordando os conceitos de geometria e coordenadas polares com o Tangram. O objetivo geral foi investigar as possibilidades de uso dos tablets como recurso didático na construção do conhecimento matemático. Os resultados indicam que o uso dos tablets é uma alternativa metodológica da inclusão das TIC na Educação Matemática para mudar o planejamento habitual das aulas.

Alsina e Ortiz em "**DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA EN EL AULA: ELEMENTOS PARA SU CARACTERIZACIÓN Y DESARROLLO** " oferecem orientações para professores de ensino Pré-escolar e Primária com uma proposta para fomentar a competência probabilística dos estudantes por meio de tarefas autênticas. Na primeira parte se caracterizaa competência matemática geral e a competencia probabilística em particular, que coincide com a capacidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar informações e ideias relacionadas com a probabilidade, a fim de participar e gerir eficazmente as demandas das funções e tarefas que envolvem incertezas e riscos no mundo real; seu desenvolvimento é abordado sob dois aspectos inter-relacionados: conexões entre o conhecimento matemático e contextos de ensino/aprendizagem. A segunda parte descreve várias tarefas autênticas, ou seja, atividades que simulam a vida real em um sentido razoável, para desenvolver a alfabetização probabilística nas salas de aula do Ensino pré-escolar e Primário.

"LA EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS: ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ESCRITAS QUE SE REALIZAN EN LA SECUNDARIA" é o terceiro artigo deste número. Seus autores são Lizarazo, Blanco Nieto e García. Segundo suas investigações os professores de matemática continuam considerando as provas escritas como principal referência de sua avaliação. Nelas são propostas diferentes tipos de tarefas com a intenção de comparar o aprendizado dos alunos. Essas tarefas tem como foco a aprendizagem, trabalho e esforço dos alunos para poder aprovar. Em busca de identificar o tipo de aprendizagem que se evidencia com os testes escritos, foram analisados 124 testes escritos, elaborados por 84 professores de secundário da cidade de Bogotá. Estes testes contêm 2483 tarefas, dos quais 999 foram considerados problemas pelos professores que os propuseram. Neles se constata que as demandas cognitivas são, na sua maioria, de nível baixo ou médio.

No artigo de Mántica e Carbó intitulado **"ESTUDIO DE PROCESOS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN INTERACCIÓN CON PARES"** é apresentada a análise do resultado de um grupo de estudantes de uma escola secundária, ao formular uma conjectura e validá-la. Ciente de que quando o processo de produção da demonstração é conhecido pode ser tomada uma decisão sobre sua validade efetiva e de seu nível, foi desenvolvido o estudo usando registros etnográficos, artefatos escritos, áudio e vídeos, produzidos durante a resolução de tarefas. Foram realizadas classificações dos níveis de provas alcançados. Se observou como atuam os estudantes para produzir soluções comuns.

"**COLABORACIÓN INTERNACIONAL EN CURSOS DE MAESTRÍA: EL CASO BRASIL-COLOMBIA**" é o artigo de Borba, Almeida, Lopez e Vega. Nele é analisado a colaboração de dois grupos de pesquisa em um curso inteiramente a distância para dois programas de mestrados de diferentes nacionalidades. O curso foi parte de um projeto colaborativo entre Brasil e Colômbia entre 2014 e 2016. Empregou-se de uma pesquisa qualitativa e, de maneira mais específica, o estudo de caso como metodologia de abordagem. Salientamos que este tipo de ação pode ser uma maneira como estudantes, de programas de mestrado, têm uma componente internacional na sua formação.

Oliveira Filho, Santos e Abar refletem sobre **"IMPLICAÇÕES DAS EXPERIÊNCIAS PESSOAIS NA CONSTITUIÇÃO DA IDENTIDADE PROFISSIONAL DOCENTE"** tendo por base resultados de uma investigação qualitativa cujos sujeitos de pesquisa são profesores da escola primária no Brasil. Para coletar os dados foram usados questionários, entrevistas semiestruturadas e painéis descritivos. Para a análise dos dados se utilizou a ATD (Análise Textual Discursiva), em quatro etapas: organização do corpus, unitarização dos elementos de significado, a definição das categorias e produção do metatexto. Os resultados mostraram que as experiências dos profesores se sucedem, permitindo uma reflexão e revisão de posições e o consequente reforço da identidade profissional através do tempo.

O sétimo artigo do número 48 tem título **"UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DE UM ESTUDO COM PROFESSORES**", e seus autores são Santos e Barbosa. Neste estudo, foi desenvolvido um modelo teórico de Matemática para o ensino do conceito de função, utilizando como aporte teórico as regras de reconhecimento e percepção da teoria do sociólogo Basil Bernstein e como ferramenta metodológica a estrutura organizacional do Estudo do Conceito. Os dados foram coletados em uma pesquisa empírica comum de grupo de professores. O modelo pode ser usado como quadro teórico em pesquisas da Educação Matemática, bem como para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realização do conceito em função do ensino.

No que segue apresentamos as trêspropostas de aulas:

A primeira, de Escalona é **"UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE SUMA Y RESTA EN ESCOLARES DE TRES, CUATRO Y CINCO AÑOS**" Nessa proposta é estudada a construção das operações aritmética de soma e subtração em um esquema lógico-matemático subjacente de transformações e se propõe um plano de ação em sala de aula mediante um tratamento sistemático dessas operações.

Polo nos apresenta a proposta "**GEOMETRÍA EN EL AULA A PARTIR DE UN TRATADO ESPAÑOL DE FORTIFICACIÓN DEL SIGLO XVI**", norteando-se pelo pressuposto de que a introdução da história da matemática em sala de aula comum é muito benéfica para o desenvolvimento e o processo de aprendizagem. Aqui é apresentada uma sequência didática onde a Geometria, as TIC e o trabalho cooperativo são complementados com um tratado de fortificação espanhol do século XVI: os alunos vão aprender a tomar medidas indiretas a partir das instruções da *Teórica y práctica de fortificación* (1598), de Cristóbal de Rojas. A experiência é bem sucedida onde a história da matemática é essencial para contextualizar um problema determinado.

Para finalizar apresenta-se a partir uma situação real e concreta com a qual pode enfrentar um estudante da carreira de Engenharia Agronômica de universidades da Argentina, ambos na situação de estudante como posteriormente como profissional. Pretende-se fazer uso de três temáticas diferentes: erros, trigonometria e vetores, incluídas em um plano de estudos e intimamente relacionadas, como objetivo de poder resolver uma problemática onde se integram os conhecimentos como também utilizam dois temas inherentes à Matemática como uma alternativa para a solução do mesmo. É o que consta em "**ERRORES, TRIGONOMETRÍA Y VECTORES: APLICACIONES MATEMÁTICAS SOBRE EL MISMO OBJETO DE ESTUDIO"** proposto por Cañibano, Vázquez e D´Andrea

Na seção de Resolução de Problemas Uldarico Malaspina Jurado nos traz reflexões sobre **“UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES, EN CONTEXTO COTIDIANO Y CON PUNTOS DE DISCONTINUIDAD”.**

Armando Traldi elaborou a resenha dos livros: “**DESAFIOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA: FORMAÇÃO DE PROFESSORES”** cujos organizadores são MANRIQUE, Ana Lúcia; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque e MOREIRA, Geraldo Eustáquio. Nessa resenha Traldi afirma que as obras apresentam um cuidado merecido com a temática Educação Especial, propondo estudos fundamentados em literaturas atuais e com a sensibilidade necessária para tratar do tema, com a utilização dos termos técnicos recomendados por especialistas da área da Educação Especial. Sendo assim, a obra traz contribuições significativas e relevantes à comunidade cientifica, mas destaca-se pelas contribuições relacionadas a formação dos professores que atuam na Educação Especial.

Finalmente, gostaríamos de agradecer o trabalho dos revisores e outros colaboradores que tornaram possível este número.

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Página 10-11

FIRMA INVITADA

Manuel de León Rodríguez

Manuel de León (1953, Zamora) es Profesor de Investigación del Consejo Superior de Investigaciones (CSIC) y ha trabajado principalmente en el campo de la Geometría Diferencial y sus aplicaciones a la Mecánica y a la Física Mecánica. Además, es director del Instituto de Ciencias Matemáticas un centro de investigación mixto del CSIC y tres universidades madrileñas: la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), la Universidad Carlos III de Madrid (UC3M), y la Universidad Complutense de Madrid (UCM). Mantiene el puesto desde la creación del centro en 2007 y es el investigador principal del proyecto presentado al Programa Severo Ochoa que, desde 2011, distingue al ICMAT como uno de los mejores centros de toda España.

Los objetivos del ICMAT enmarcan acertadamente a De León, cuya carrera se ha dedicado en gran parte a promover la matemática española en todo el mundo. En este sentido, ha sido el primer –y hasta el momento, único-, español miembro del Consejo Directivo de la Unión Matemática Internacional (IMU).También fue refundador y vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), director de La Gaceta de la RSME (de 1998-2004), coordinador del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000) y presidente del Comité Español de Matemáticas (de 2004 a 2007

Manuel de León se licenció en la Universidad de Santiago de Compostela, donde también obtuvo su doctorado. En esta facultad fue profesor ayudante desde su último año de carrera, en 1975, y permaneció hasta 1986, cuando dejó su plaza de Profesor Titular de Geometría y Topología para incorporarse como Investigador Científico en el CSIC.

Ya en el Consejo, fue vicedirector del Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (CSIC), de 1992-1998 y director del Departamento de Matemáticas del CSIC de 2000-2007. A lo largo de su extensa carrera académica, De León ha publicado alrededor de 200 artículos en revistas de matemáticas y física y 3 libros o monográficos científicos y ha dirigido nueve tesis doctorales y ha codirigido un par más.

Su labor de gestión científica es de gran envergadura: miembro de la Comisión de Area de Ciencias Físicas y Tecnologías Físicas, CSIC (2001-2008); Coordinador de Matemáticas, ANEP (2003-2005); Miembro de la Comisión Asesora de Evaluación y Prospectiva, MEC (2005-2010); Miembro del Core Group del PESC Committee, European Science Foundation (2006-2012); Experto de ANECA; Presidente del Comité para Ciencias Experimentales de UNIBASQ (2012-

2015). Además, participa con frecuencia en diferentes comisiones de evaluaciones autonómicas, nacionales e internacionales.

Actualmente es miembro de varios consejos editoriales y comités científicos; en particular es editor jefe de la revista 'Journal of Geometric Mechanics' del Instituto Americano de Ciencias Matemáticas (AIMS, por sus siglas en inglés).

Asimismo, se ha preocupado por llevar las matemáticas a diversos sectores de la sociedad fuera de la academia: en ámbitos políticos, como asesor de asuntos científicos e invitado al Senado, en áreas educativas, participando activamente en la Comisión Internacional para la Educación Matemática (ICMI-IMU), y ante audiencias generales; ha escrito numerosos artículos en prensa generalista, ha participado en radio y televisión, ha firmado cuatro libros de divulgación y ha impartido más de 40 conferencias divulgativas.

Manuel de León - mdeleon@icmat.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 12-21

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ACERCAR LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA A LAS AULAS

Manuel de León Rodríguez
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Real Academia de Ciencias

Resumen

En este artículo mostramos como la investigación matemática no puede mantenerse alejada de las aulas a riesgo de presentarse a los alumnos y futuros ciudadanos como una ciencia obsoleta y sin aplicaciones en la vida diaria. El Proyecto Klein de IMU e ICMI, que quiere recordar las ideas de principios del siglo XX del matemático alemán Félix Klein, va en esa dirección. Presentamos dos ejemplos posibles en las que, partiendo de resultados elementales que se enseñan en las escuelas, podemos llegar a las últimas aplicaciones y desarrollos sofisticados de la matemática actual.

1. Acercando la investigación matemática a las aulas

La investigación matemática ha conocido en el último siglo un desarrollo espectacular. A pesar de la crisis de los fundamentos sufrida a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, que culmina con la demostración de Kurt Gödel en 1931 de que cualquier sistema formal consistente que permita describir la aritmética será necesariamente incompleto, es decir, siempre habrá afirmaciones que se puedan expresar en el lenguaje del sistema cuya veracidad o falsedad no se puedan demostrar en ese sistema, las matemáticas han sabido reponerse y han alcanzado cotas extraordinarias.

Desde ese momento, ya podremos ver de la misma manera aquella afirmación de David Hilbert, *"Wir müssen wissen, wir werden wissen" ("Debemos saber, sabremos"),* hecha casi simultáneamente con el anuncio del teorema de incompletitud de Gödel, pero debemos siempre recordar un clásico artículo del Premio Nobel de Física de 1963, Eugene Paul Wigner, titulado “La efectividad irrazonable de la matemática en las ciencias naturales“, en la que afirma:

“The first point is that the enormous usefulness of mathematics in the natural sciences is something bordering on the mysterious and that there is no rational explanation for it”.

Aunque Wigner tenía un concepto formalista de las matemáticas: *“mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose”,* durante los últimos cincuenta años, y muy especialmente desde el advenimiento de los ordenadores, esta disciplina se ha convertido en una pieza indispensable para el desarrollo tecnológico y el mantenimiento de la sociedad del bienestar. Esto sin olvidar su papel clave en el desarrollo de otras ciencias, no solo de la Física, sino también (más recientemente) de la Biología o la Medicina.

Sin embargo, mucha de la importancia de las matemáticas en la educación se desvanece ya que sus últimos avances y sus aplicaciones no llegan a las aulas o, sí lo hacen, no con la suficiente fuerza para causar un impacto en la enseñanza. Pareciera que enseñamos unas matemáticas rígidas, elaboradas hace siglos, de manera que la impresión para muchos alumnos es la de saberes obsoletos e inútiles.

Por otra parte, las matemáticas, como toda ciencia, como toda invención humana, van acompañadas de las historias personales de las mujeres y hombres que las desarrollaron; y de los contextos históricos y científicos que propiciaron esos desarrollos, bien por necesidad o bien por encontrarse a mano el instrumento que precisaban y que los matemáticos, a veces no guiados por el interés práctico, habían elaborado previamente. Es paradigmático el caso de Godfrey Harold Hardy, quién en su Apología de un matemático (1940), afirmaba cosas como esta: "*ninguna persona ha descubierto ya una aplicación militar para las teorías de números o relatividad, y parece improbable que esto ocurra por muchos años".* Hoy en día, la Teoría de Números y los resultados en curvas elípticas se han mostrado esenciales para el desarrollo de la criptografía moderna y permiten transacciones comerciales por internet impensables en los tiempos de Hardy.

Estamos pues convencidos que una aproximación de la investigación matemática a las aulas, acompañada del contexto histórico-científico correspondiente, serviría para formar a nuestros estudiantes de una manera mas integral, a la vez que podría contribuir a una mayor motivación, al percibir que las matemáticas han sido y lo continúan siendo, una ciencia viva; me atrevería a decir, que mas viva que nunca.

Se trataría de presentar un tema que hiciera un recorrido desde sus inicios mas elementales (que habitualmente son los presentados en el aula) hasta los tiempos actuales, viendo como se han producido variaciones y aplicaciones, algunas de ellas insospechadas. A la vez, se vería como existen derivaciones transversales, y esos temas han conducido en muchos casos a la interacción directa con otras ciencias y a desarrollos tecnológicos.

Esta propuesta no es diferente a la en su día propuesta por Félix Klein, catedrático de la Universidad de Gotinga, contenida en su libro de 1908 “Matemática elemental desde un punto de vista superior”. En su aproximación a la enseñanza, Klein precisamente ponía encima de la mesa como las matemáticas que se enseñaban en las facultades no llegaban a las aulas de secundaria. Su preocupación era que llegaran a los profesores que luego las iban a impartir. Pero podemos ser mas ambiciosos y tratar de que lleguen a profesores y alumnos, aun cuando son los profesores los que pueden remachar la tarea con su contacto continuado en el día a día.

Esta propuesta de Félix Klein fue muy notable, ya que se trataba de un investigador de primera línea, autor del llamado Programa de Erlangen que clasificaba las geometrías por sus grupos de transformaciones y que supuso una revolución en la geometría y en las matemáticas en general. Y debe también señalarse una faceta a veces menos conocida de Klein, y fue su impulso a las matemáticas aplicadas a la industria.

La idea de Félix Klein ha sido retomadapor la International Mathematical Union (IMU) y la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en sendas sesiones de sus comités ejecutivos de marzo y abril de 2008, donde tomaron la decisión de proponer un proyecto conjunto que, bajo la dirección del profesor W. Barton (del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Auckland, Nueva Zelanda), pusiera en marcha una actualización –en cierto sentido y con todos los matices—de la obra de Klein.

Así, además de una serie de congresos y talleres en diferentes lugares del mundo, se ha puesto en marcha el Blog Proyecto Klein http://blog.kleinproject.org/?lang=es, precisamente con la idea de diseñar viñetas en esa dirección. Según se apunta en el blog, "*el objetivo de las viñetas es dar a los profesores una sensación de conexión entre las matemáticas del mundo del profesor y la investigación y aplicaciones contemporáneas de las ciencias matemáticas. Es por eso que comienzan con algo familiar para el profesor y progresan hacia un mayor entendimiento del tema a través de un pedazo interesante de matemáticas. Al final, ilustran un principio clave de matemáticas. La viñeta ha de estar escrita de manera que se complete este viaje. Una viñeta es un trozo independiente y corto de matemáticas escritas para profesores de secundaria de clases con los alumnos más mayores (PSCAMMs). No se trata de pedagogía, pero inspiran una docencia mejor. No se trata de currículum, pero retan a los profesores a reconsiderar lo que enseñan. No son recursos para usar en clase, sino una fuente de inspiración de la que pueden beber los profesores. El objetivo es refrescar y enriquecer el conocimiento matemático de los profesores.*"

3. Dos ejemplos

En este breve artículo quisiera dar algunas pinceladas de cómo podría hacerse esta aproximación, buscando algunos ejemplos de temas que son parte del currículo de secundaria o bachillerato y que pueden ser utilizados para estos fines, y partiendo del principio de que la mejor manera de mostrar una propuesta teórica es a través de algunos ejemplos ilustrativos. Esperamos con ello complementar en alguna medida las ideas contenidas en el proyecto Klein.

3.1 Kepler, cristales de nieve y los caprichos rudolfinos

No hace falta irse a los últimos avances de la disciplina para encontrar motivos con los que cumplir el objetivo de acercar la investigación a las aulas. Un ejemplo que puede utilizarse con múltiples finalidades es el de Johannes Kepler.

Johannes Kepler es un personaje habitual en la enseñanza secundaria y el bachillerato por sus tres famosas leyes que establecieron los fundamentos del movimiento de los cuerpos que conforman en Sistema Solar. Recordemos aquí estas tres leyes, que se recogieron en la obra de Kepler, *Astronomia Nova*, publicada en Praga en 1609:

1ª) Los planetas recorren órbitas elípticas y el sol se sitúa en uno de los focos de la elipse;

2ª) El área barrida por la recta imaginaria que une sol-planeta sobre la superficie de la elipse, es la misma en intervalos de tiempo iguales;

3ª) El cuadrado del período de la órbita de un planeta alrededor del sol, es proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse. Esta es la denominada ley armónica.

Estas leyes surgieron de las observaciones y las cavilaciones teóricas. Recordemos que todavía no existía el cálculo diferencial y que las observaciones eran todavía muy rudimentarias, aunque comenzaban a ser más precisas. Así que Kepler fue a Praga en 1600 contratado por Tycho Brahe, danés que ejercía entonces como astrónomo real de Rodolfo II. Brahe es considerado como el "mejor observador del cielo" antes del telescopio, gracias a los ingeniosos aparatos de medición que él mismo construía. Brahe, impresionado por los resultados teóricos de Kepler, estaba dispuesto a darle acceso a sus datos, lo que era una oportunidad que Kepler no podía desaprovechar. De esta manera unieron esfuerzos dos personas con conocimientos complementarios: el observador de los cielos que aprovecha su situación social privilegiada, con el estudioso de la teoría que anhela datos que corroboren sus intuiciones matemáticas.

Hasta entonces, Kepler, había errado por aquella Europa convulsionada por las guerras religiosas, había sido expulsado de Graz, Austria, donde había querido echar raíces, por su negativa a convertirse al catolicismo. Una vez en Praga, Kepler comienza su trabajo, que incluye el escribir un tratado en contra del archienemigo de Brahe, el también astrónomo Ursus. Inicia también una colaboración con Brahe para elaborar unas nuevas tablas astronómicas, las denominados posteriormente Tablas Rudolfinas, en honor de Rodolfo II. En septiembre de 1601, Brahe muere repentinamente, y unos días después Kepler es nombrado astrónomo real en su sustitución.

Ser astrónomo real en aquella época era un buen empleo, pero exigía realizar trabajos astrológicos para el monarca, y no está claro que esto fuera algo que le gustase. Así y todo, esta época praguense es quizás la más pacífica en su agitada vida. Publicó más de treinta trabajos, entre ellos la *Astronomia Nova*, y dos trabajos importantes de óptica, en uno de los cuáles sugirió el telescopio que hoy lleva su nombre. ¡Hasta tuvo la oportunidad de observar una supernova en octubre de 1604! Sin embargo, la muerte de Rodolfo II, las tensiones religiosas crecientes, la muerte de su esposa Bárbara y de su hijo Friedrich de seis años, obligaron a Kepler a trasladarse de nuevo, esta vez a Linz, Austria.

¿Por qué la forma hexagonal?

En el ambiente de tranquilidad praguense es cuando Kepler escribe *“Strena seu de nive sexángula*”. El análisis de Kepler es profundo, y deduce que la forma particular de los copos de nieve debe ser consecuencia de la manera en la que se empaquetan las partículas que los constituyen. Kepler unifica así dos conceptos: el mundo geométricamente ordenado y creado por un Dios matemático, con una ciencia que trata de explicar los fenómenos naturales buscando las causas y leyes que los producen.

Esta obrita de Klepler se la dedica a su amigo y protector Johannes Matthäus Wäckher von Wackenfelds. En la introducción Kepler escribe a su amigo:

“Sí, sé bien que tan aficionado es usted a la nada; de seguro no tanto por su mínimo valor, sino por el juego divertido y delicioso que uno puede tener con ella, cual si fuera un gorrión feliz. Por tanto, me imagino que para usted un regalo debe ser mejor, y mejor recibido, cuando más se acerque a la nada”.

Kepler ironiza aquí con su situación en Praga, siempre pendiente de los pagos a destiempo y recortados de Rodolfo II, en cuya corte trabajaba Kepler de astrónomo, porque ¿qué mejor regalo que dar nada para quién nada recibe? Por otra parte, Kepler hace un juego de palabras con nix (latín) que significa nieve, y nichts (alemán), que significa nada. Kepler piensa además que no habrá mejor regalo en esas fechas que reflexionar sobre algo que cae del cielo. Recordemos que Rodolfo II era un gran aficionado al arte y empelaba ingentes cantidades de dinero en la compra de cuadros y esculturas, descuidando los pagos a los funcionarios y las inversiones públicas, contrayendo deudas ingentes.

Se puede pensar en esas partículas como glóbulos, que se apilan ocupando el mínimo espacio posible, y el empaquetamiento hexagonal es el mejor. Basta ver las colmenas de las abejas, o las teselaciones de un plano, que pueden ser de triángulos, cuadrados o hexágonos.

En éste mismo ensayo, Kepler planteó su famosa conjetura de empaquetamiento, resuelta 300 años despues por Thomas Hales. Años antes, Kepler había compartido correspondencia con el astrónomo y matemático inglés Thomas Harriot, acerca de la manera óptima de apilar balas de cañón en la cubierta de un buque. Sir Walter Raleigh, de quién Harriot fue ayudante, le había planteado la cuestión cuando estaban planificando una expedición en 1585 rumbo a Virginia, a fin de establecer allí la primera colonia británica.

La conjetura de Kepler establece que la mejor manera es la que usan los fruteros para las naranjas, poniendo cada naranja de la siguiente capa apoyada en el hueco de las cuatro naranjas que estrán justo debajo en la primera capa. Este método minimiza el espacio dejado por los huecos entre las naranjas.

Durante siglos, trataron de demostrarla numerosos matemáticos como Gauss, que la probó en el caso regular. En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, fue incluida por David Hilbert entre su lista de los 23 problemas más importantes para el siglo XX (el problema número 18). Pero el asunto no tuvo mayores avances hasta que el matemático húngaro Laszlo Fejes Toth redujo el problema a un número finito pero enorme de cálculos. Thomas Hales fue capaz de realizar las cuentas en los años 90, ayudado por la potencia del ordenador. El resultando se publicó en Annals of Mathematics, y con ello la conjetura quedó resuelta. Aunque todavía hoy en día no todos los matemáticos aceptan que esto pueda considerarse una auténtica prueba.

Lo que hoy sabemos de la nieve

Kepler no tenía el conocimiento actual de cómo está constituida la materia. No sabía que una molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, formando un ángulo de 104,5 grados. Estas moléculas de agua están ligadas con enlaces con sus vecinas, formando tetraedros. Cuando la temperatura baja, se acercan más entre sí y forman esas estructuras de seis lados.

Uso en el aula

Contexto histórico

Permite examinar el convulso escenario histórico de la época, en la que Europa estaba inmersa en una guerra de religiones y poder.

Desde el punto de vista científico, se puede conectar con las diferentes teorías sobre el Sistema Solar, llegando a la revolución copernicanica desde la visión heliocéntrica de Ptolomeo.

El problema de los empaquetamientos se puede conectar con la biología, bien en la optimización de las colmenas de abejas, bien con el problema a resolver con el de las proteínas. En particular, la conjetura de Kepler nos permitirá debatir sobre si una prueba por ordenador tiene matemáticamente la validez o no de una parueba tradicional.

El estudio de los cristales de nieve permite además la conexión con las teselaciones y la teoría de grupos cristalográficos; en particular, la aventura de encontrar los 17 grupos en La Alhambra ya que los artesanos árabes los conocían.

Transversalidad

Los estudiantes pueden conectar las matemáticas con la astronomía. También con la tecnología necesaria para construir instrumentos de observación, como los telescopios.

El profesor puede utilizar noticias de periódicos, especialmente digitales, para conectar estos resultados con las misiones astronómicas (la nave Philae de la misión Roseta, la Estación Espacial Internacional) que hacen sus cálculos siguiendo las leyes de Kerpler y las posteriores de Isaac Newton.

Tareas

Los estudiantes pueden construir los diferentes tipos de cónicas, usando por ejemplo Geogebra.

3.2 La geometría: de Euclides al Big Bang

La geometría ha perdido peso en la enseñanza de la Secundaria, de manera que estudiantes de 14 o 15 años, en muchos centros, tienen unas vagas nociones de lo que es el perímetro de un polígono, de la relación de la longitud de la circunferencia con su diámetro, o sobre los cálculos más elementales de áreas o volúmenes. La geometría tiene un valor formativo enorme en la enseñanza de las matemáticas, por su carácter visual. Está muy bien que nuestros alumnos sepan resolver sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, pero sería deseable que supieran asociar una ecuación lineal a una recta, o una de segundo grado a una parábola.

Una de las más apasionantes historias de las matemáticas se remonta a Euclides de Alejandría, el más relevante matemático de la antigüedad. Euclides es conocido por su obra *Los Elementos* (el segundo libro más editado tras la Biblia).

Apenas existen datos fiables de su vida. Así, Euclides, deviene con el tiempo en un personaje de historias y leyendas. Según Estobeo, cuando uno de sus oyentes, nada más escuchar la demostración de un teorema, le había preguntado por la ganancia que cabía obtener de cosas de este género, Euclides, volviéndose hacia un sirviente, había ordenado: «Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende».

En otra ocasión, al preguntarle el rey Tolomeo I por una vía de acceso a los conocimientos geométricos más fácil y simple que las demostraciones de los Elementos, Euclides había respondido: «No hay camino de reyes en geometría»

Los Elementos constan de trece libros, clasificados así:

· Libros I a VI: Geometría Plana

· Libros VII a IX: Teoría de Números

· Libro X: Números irracionales

· Libros XI a XIII: geometría del espacio

Es notable su claridad (Einstein los leyó de niño y quedó fascinado por el libro).

Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que Euclides llamó postulados. Los famosos cinco postulados de Euclides son:

I.- Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.

II.- Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.

III.- Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.

IV.- Todos los ángulos rectos son iguales.

V.- Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

El Quinto Postulado se puede escribir de una forma más familiar como:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Esta formulación alternativa es debida a Proclo, quien nació en 411 en Constantinopla (Estambul), y murió en 485 en Atenas, Grecia. Proclo dirigió la Academia de Platón y comentó los Elementos de Euclides. El resultado de Proclo se atribuyó erróneamente durante muchos años a John Playfair (1748 – 1819), geómetra, geólogo y físico, y se conoció como Axioma de Playfair.

Se sucedieron muchos intentos históricos para probar que el quinto axioma se deducía de los otros cuatro (muchas pruebas falsas), por matemáticos como Wallis, 1663; Girolano Sacheri (supuso que era falso y quiso llegar a una contradicción); Legendre (con 40 años de trabajo sobre el tema, fue el que probó que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos de triángulo es de 180º); o Johann Heinrich Lambert, que calculó el defecto de ángulo en un triángulo en una superficie hiperbólica.

Estos repetidos fracasos llevaron a D’ Alembert a calificar este problema en 1767 como el escándalo de la geometría elemental.

Gauss fue el primero en entender el problema. Comenzó a trabajar en él con 15 años en 1782. En 1817 llegó al convencimiento que el quinto axioma era independiente de los otros cuatro. Trataba de idear una geometría en la cuál se podía trazar más de una paralela por un punto externo, pero Gauss nunca publicó su trabajo.

Gauss discutió este tema con su amigo, el matemático Farkas Bolyai, quién había sido autor de varias pruebas falsas. Su hijo, el matemático János Bolyai, a pesar de que su padre le advirtió que no malgastara su tiempo en esto, trabajó en el problema. En 1823 Bolyai escribió a su padre: “He descubierto cosas tan maravillosas que estoy asombrado … de la nada he creado un nuevo mundo.” (Ver [carta bolyai].)

Dos años después escribió sus resultados como un apéndice en el libro de su padre. Gauss quedó muy impresionado, pero Bolyai no había construido la nueva geometría, solo había probado que era posible.

Ni Bolyai ni Gauss conocían el trabajo de Lobachevsky publicado en 1829. Este fue publicado en ruso en una revista local (Kazan Messenger), trabajo que había sido rechazado por Ostrogradski. Lobachevsky publicó sus Geometrical investigations on the theory of parallels en 1840 (61 páginas). Un resumen en francés en el Journal de Crelle le dio difusión, pero los matemáticos no aceptaron sus ideas revolucionarias.

Lobachevsky reemplazó el quinto postulado de Euclides por este:

Existen dos rectas paralelas a una dada por un punto externo a la recta.

Otro importante actor en esta historia es Riemann, cuya tesis doctoral dirigió Gauss, y que impartió el 10 de junio de 1854 una conferencia para conseguir su habilitación en la Universidad de Gotinga, en la que reformuló el concepto de geometría. Geometría era, para Riemann, espacio más una estructura (la métrica) que permitía medir. Su trabajo se publicó en 1868, dos años después de morir.

Riemann trabajó en una geometría en la que las paralelas no son posibles, la geometría esférica. Estas geometrías no eran diferentes de la geometría euclídea en el sentido que no había contradicciones.

El primero en colocar la geometría de Bolyai-Lobachevsky al mismo nivel que la euclídea, fue Eugeni Beltrami (1835-1900). En 1868 escribió *Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry* y dio un modelo en dimensión 2 en un espacio euclídeo de dimensión 3, la seudo-esfera. En este modelo, los cuatro primeros axiomas se cumplían, pero no el quinto.

El modelo lo completó Klein en 1871 quién dio además modelos de otras geometrías no-euclideas, como la de Riemann. Klein demostró que hay tres tipos de geometrías:

- Hiperbólica (Bolyai – Lobachevsky)
- Esférica (Riemann)
- Euclídea.

Estas nuevas geometrías son las que aparecen cuando queremos estudiar nuestro universo (son sus posibles formas).

Esta es la nueva visión del universo en el que vivimos tras la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein, que incorpora el tiempo al espacio. Muchos otros nombres de físicos y matemáticos están ligados a estos avances durante el siglo XX. La historia continúa.

Uso en el aula

Contexto histórico-científico

Permite examinar el cambio de contexto histórico desde la Grecia Clásica hasta nuestros días, pasando por las diferentes épocas, y mostrando como un cambio de paradigma científico acompaña a cambios cruciales en la sociedad.

También se puede debatir sobre la consistencia de las matemáticas, y sobre el método deductivo que Euclides puso en marcha.

Transversalidad

Los estudiantes pueden conectar las matemáticas, en particular la geometría, con las ciencias físicas y con el mundo físico.

El profesor puede utilizar noticias de periódicos, especialmente digitales, para conectar estos resultados con las diferentes teorías sobre nuestro universo: nociones como materia oscura, energía oscura, agujeros negros, ondas gravitacionales, están presentes en los medios continuamente.

Tareas

Los estudiantes pueden tratar de construir modelos reales en dos dimensiones de las diferentes geometrías, y ver si se cumple o no el quinto postulado. Pueden también utilizar el software matemático desarrollado en los últimos años, cumpliendo por tanto la clase una doble función.

BIBLIOGRAFÍA

[carta bolyai] Carta de Janos Bolyai a su padre: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Extras/Bolyai_letter.html

[MdL] Manuel de León: La geometría del Universo, Colección ¿Qué sabemos de?, CSIC y La Catarata. Madrid, 2012

[MdLAT] Manuel de León y Ágata Timón: Las matemáticas de los cristales. Colección ¿Qué sabemos de?, CSIC y La Catarata. Madrid, 2015.

[Klein] Félix Klein: Matemática elemental desde un punto de vista superior. S.L. NIVOLA Madrid, 2006

[TR] Tomás Recio: El proyecto Klein: una perspectiva estimulante sobre unas matemáticas vivas, para los profesores de Secundaria. Publicado en Matemáticas y sus fronteras.
http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2009/06/03/119444

[BR] Bernhard Riemann: Riemanniana selecta. Editado por José Ferreiros Domínguez. Clásicos del pensamiento. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid, 2000.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 22-40

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

INCLUINDO TECNOLOGIAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA: PLANEJANDO AULAS COM O RECURSO DOS TABLETS

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Fecha de recepción: 20/06/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	En este artículo se presenta la discusión enfocada en los conceptos fundamentales en el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en la Educación Básica. Se realizó un experimento con los profesores de matemáticas en educación continua, con construcciones con GeoGebra para tabletas, abordando conceptos de geometría y coordenadas polares con el Tangram. El objetivo general fue investigar las posibilidades de utilizar las tabletas como recurso didáctico en la construcción del conocimiento matemático. Los resultados indican que el uso de tabletas es una alternativa metodológica para la inclusión de las TIC en la Educación Matemática, con lo cambio de la planificación de costumbre. **Palabras clave**: Las tecnologías digitales. Tabletas. GeoGebra. Tangram
Abstract	The present study presents a discussion focused on lesson planning using Information and Communication Technologies (ICT) in Elementary Education. An experiment was carried out with Mathematics teachers taking a continuous education course. The experiment was based on activities using GeoGebra for tablets, and the topics addressed included concepts of geometry and polar coordinates using Tangram. The main objective was to investigate the possibility to use tablets as a teaching resource in the construction of mathematical knowledge. The results indicate that tables may be a methodological alternative in the use of ICT in mathematical education, in what is a change in the usual lesson planning methods. **Keywords**: Digital technologies. GeoGebra. Tablets. Tagram.
Resumo	O presente artigo apresenta a discussão centrada no planejamento de aulas com a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para a Educação Básica. Foi realizado um experimento com professores de Matemática, em formação continuada, realizando construções com o GeoGebra para *tablets*, abordando conceitos de geometria e coordenadas polares utilizando o Tangram. O objetivo geral foi investigar possibilidades do uso de *tablets* como um recurso didático na construção do conhecimento matemático. Os resultados apontam que o uso de *tablets* é uma alternativa metodológica para a inserção das TIC na Educação Matemática, mudando o planejamento usual. **Palavras-chave**: Tecnologias digitais. *Tablets*. GeoGebra. Tangram.

1 Introdução

As tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia. Neste período de informatização massiva, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a Educação, e a Educação Matemática, também necessitam adequar-se a essa realidade. Com os avanços tecnológicos, a redução dos custos envolvidos tem facilitado o acesso à tecnologia; contudo, além do acesso, é preciso o conhecimento para utilizá-la em todo o seu potencial.

> Inserir-se na sociedade da informação não quer dizer apenas ter acesso à tecnologia de informação e comunicação - TIC, mas principalmente saber utilizar essa tecnologia para a busca e a seleção de informações que permita a cada pessoa resolver os problemas do cotidiano, compreender o mundo e atuar na transformação de seu contexto (Almeida, 2008).

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996), a Educação Nacional tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Deste modo, a Educação e a inserção na sociedade digital implicam em uma adequação da sala de aula à realidade tecnológica, cujo uso da tecnologia pelos docentes é condição necessária para essa adequação.

Embora o Ministério da Educação (Brasil, 2013) considere importante a utilização de tecnologias de qualidade objetivando a melhoria da Educação, o mesmo adverte que o uso de recurso tecnológico, de forma isolada e desalinhada com a proposta pedagógica da escola, não garante a qualidade da Educação. Ao utilizar as tecnologias para proporcionar condições favoráveis à aprendizagem, o professor deve, antes de tudo, definir o objetivo instrucional desejado para então organizar as ações e recursos para atingir seus objetivos. E, para isto, é fundamental conhecer as possibilidades que as tecnologias oferecem e quais tecnologias são adequadas aos estudantes, ao conteúdo a ser desenvolvido e ao nível de ensino a que se destina.

Neste sentido este artigo apresenta uma discussão sobre as mudanças no planejamento do professor de Matemática, da Educação Básica, quando utiliza *tablets*, apontando possibilidades que este recurso oferece para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica[1], com foco nas séries finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º, 9º anos) e Ensino Médio.

2 Objetivos

Este trabalho teve como objetivo geral investigar possibilidades do uso de *tablets* como um recurso didático na construção do conhecimento matemático.

Os objetivos específicos, delineados para alcançar o objetivo geral, foram: desenvolver o planejamento didático de aulas para a Educação Básica com o uso de *tablets*; investigar atividades que possam fornecer subsídios, aos professores de Matemática da Educação Básica, para o planejamento de aulas com o uso de *tablets*.

[1] Educação Básica, no Brasil, engloba os níveis de Ensino Fundamental (alunos de 5 anos a 13 anos) e Ensino Médio (alunos de 14 anos a 16 anos).

3 Metodologia de pesquisa

A pesquisa está fundamentada no método qualitativo, uma vez que os propósitos fundamentais são a compreensão, a explanação e a interpretação do fenômeno estudado, interessando mais o processo do que os resultados (Bogdan & Biklen, 1994).

As ações de pesquisa foram desenvolvidas em dois grupos: O GECEM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática), compostos pelo grupo de pesquisadores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) composto por 4 professores pesquisadores em Educação Matemática, e o Grupo de Formação Continuada composto por 10 professores de Matemática do município de Canoas, do estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Salienta-se que os dois grupos realizaram suas atividades concomitantemente, e as reuniões e reflexões ocorridas levaram a um fluxo contínuo de discussão, análise e replanejamento, o que qualificou os resultados obtidos.

A pesquisa seguiu as seguintes atividades investigativas:

- reuniões semanais de estudos com o grupo de Investigação GECEM para discussão e reflexão sobre as possibilidade do uso do recurso de *tablets* na Educação Matemática, bem como, com o planejamento inicial de atividades didáticas com este recurso;
- reuniões mensais com o grupo de formação continuada com os professores de Matemática, com análise das atividades planejadas e as possibilidades de uso das mesmas com estudantes da Educação Básica;
- aplicação das atividades com os professores componentes do grupo de formação continuada;
- análise dos resultados através das observações realizadas nos dois grupos de trabalho, bem como, do replanejamento das atividades propostas ao grupo de professores incorporando suas sugestões e reflexões sobre o uso das mesmas.

O Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática planejou e desenvolveu as atividades da sequência didática e, o grupo de formação continuada de professores de Matemática avaliou a relevância sobre o uso das mesmas com seus estudantes. Após os professores de Matemática, em formação, refletirem sobre as atividades, o grupo GECEM reformulou e adaptou as atividades conforme as necessidades apontadas.

4 Uso de tecnologias na Educação Básica

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re)organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das TIC no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade dessa inclusão no planejamento escolar.

Perrenoud (2000), com base no pensamento de Tardif, salienta que as TIC demandam e, ao mesmo tempo, oportunizam uma mudança de paradigma, em relação às aprendizagens e não às tecnologias. Para o autor as TIC contribuem com os trabalhos pedagógicos e didáticos porque permitem criar situações de aprendizagem diversificadas.

Segundo o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) (2014) para uma aprendizagem significativa da Matemática, as ferramentas e a tecnologia devem ser consideradas como características indispensáveis para a sala de aula. Consideram que os Computadores, os *tablets*, podem ser utilizados para reunir dados, fazer pesquisas na sala de aula e para utilizar aplicações que façam cálculos, simulações, assim como para fomentar a visualização, permitindo que os alunos se envolvam com jogos que exijam habilidades para resolução de problemas. Os Computadores, *tablets*, *smartphones* e calculadoras, segundo o NCTM, tornam acessíveis uma gama de aplicações que auxiliam aos usuários a explorar Matemática, dando sentido aos conceitos e procedimentos, envolvendo-os com o raciocínio matemático (NCTM, 2014).

Considera-se, portanto, que as TIC se constituem em importantes recursos que auxiliam o professor em seu trabalho docente, colaborando com mudanças significativas na educação.

Nas tecnologias têm-se os dispositivos dedicados, que são aparatos tecnológicos com uma função específica e destinados a uma única finalidade, como o DVD, e os dispositivos informáticos multifuncionais, como os computadores e afins, que em conjunto com um determinado *software* de aplicação, ou aplicativo, adquire as características e funcionalidades específicas para atender a uma determinada finalidade.

Atualmente, para a escolha de um aplicativo, considera-se importante a verificação da característica de multiplaforma, ou seja, que esteja disponível para as diversas plataformas de dispositivos informáticos, como o *Android, iOS* e *Windows Mobile* para dispositivos móveis, e *Windows*, *Linux* e *OS X* para os computadores pessoais, possibilitando o uso do mesmo em diversos ambientes tecnológicos.

O GeoGebra atende a característica de multiplataforma, além de estar em constante atualização por ser um *software open source* com uma comunidade de desenvolvimento bem ativa. Optou-se pelo uso do GeoGebra em dispositivos *touchscreen*, pois segundo Bairral (2013) a tecnologia *touchscreen* possibilita um contato e uma apropriação diferenciada por parte dos usuários. Realizar uma manipulação *touchscreen* não é o mesmo que clicar em um mouse, são novas configurações cognitivas e espacialidades com os movimentos e os toques na tela (Park, Lee, & Kim, 2011;Tang, Pahud, Carpendale, & Buxton, 2010). Bairral (2013) evidencia que, ao contrário dos cliques, a manipulação na interface *touchscreen* implica em continuidade de ação, a espacialidade na tela, simultaneidade, combinação de movimentos.

Para Moran (2012) as próximas mudanças na educação, estarão interligadas à mobilidade, flexibilidade e facilidade de uso que os *tablets* e outros dispositivos móveis oferecem, dado que a tela sensível ao toque permite uma navegação mais intuitiva e fácil em comparação com o uso do mouse.

Considera-se que os *tablets* possuem vantagem sobre os *smartphones* pelo tamanho de sua tela, possibilitando melhor interação com os objetos envolvidos. Nesse sentido, optou-se pela aplicação da sequência didática utilizando *tablets.*

A seguir apresentam-se as possibilidades do uso dos *tablets* em conjunto com *softwares* de aplicação Matemática, que auxiliem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, em específico o *software* GeoGebra.

4.1 O *software* GeoGebra

O GeoGebra é um programa *opensource*, sob o GNU (*General Public License*) e disponível em www.GeoGebra.org. Ele agrega as funcionalidades de um Sistema de Geometria Dinâmica (*DGS-Dynamic Geometry System*) e de um Sistema de Computação Algébrica (*CAS-Computer Algebric System*), sendo então denominado como um Programa de Matemática Dinâmica (*DMS-Dynamic Mathematics Software*) para Geometria, Álgebra e Cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007). Hohenwater e Fuchs (2004) completam:

> "GeoGebra é um *software* de Geometria interativa que também fornece possibilidades algébricas como entrar diretamente com equações. Ele é direcionado aos estudantes (10 a 18 anos) e professores do Ensino Médio. O *software* incentiva os estudantes a abordarem a Matemática de maneira experimental" (tradução livre).

Para o ensino de Geometria, o GeoGebra torna-se uma poderosa ferramenta de aprendizagem, desde que as atividades estejam organizadas em uma sequência, de acordo com os objetivos estabelecidos.

Em um Sistema de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, as coordenadas, dimensões, ângulos e demais atributos de objetos geométricos podem ser modificados, através de comandos interativos, permitindo que o estudante explore as transformações dos objetos geométricos, proporcionando a aprendizagem através da experimentação, discussão, reflexão e generalização de conceitos. Observa-se que objetos geométricos construídos com lápis e papel são objetos com atributos estáticos, pois as dimensões e ângulos não podem ser alterados, sendo necessárias novas construções com novos atributos.

Para que as experimentações ocorram de maneira adequada, os objetos geométricos devem ser construídos e não desenhados. No Sistema de Geometria Dinâmica, ao se traçar objetos sem nenhuma relação entre eles de modo que, ao modificar algum atributo, perdem-se as relações que deveriam existir entre eles, denomina-se *desenhar*. No entanto, *construir* é quando as relações estabelecidas entre os objetos se mantêm mesmo ao se modificar os atributos iniciais (Albornoz Torres, 2010).

5 Atividades para o Ensino Fundamental

A temática escolhida para ser apresentada nesse artigo foi o estudo do Tangram, com uso de *tablets*. O objetivo é que os estudantes do Ensino Fundamental desenvolvam conceitos de Geometria (mediatriz, ponto, etc.) e os estudantes do Ensino Médio estudem as representações espaciais em coordenadas polares.

Salienta-se que em um planejamento as atividades devem ser organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo, etapa por etapa, constituindo-se em uma sequência didática. Essa organização é realizada de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem dos alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (Dolz & Schneuwly, 2004). A ideia é que as sequências didáticas possibilitem explorar situações, testar ideias, formular hipóteses, revisar conceitos, proporcionando um ambiente de interatividade.

A sequência, aqui proposta, está composta de atividades abertas para explorar e despertar o interesse pelo Tangram e atividades fechadas com a execução orientada da construção de um quebra-cabeça com o Tangram, apresentando aos estudantes os conceitos geométricos básicos. As atividades desenvolvidas, organizadas em uma sequência didática, estão explanadas a seguir.

5.1 Usando o aplicativo Tangram

O aplicativo TANGRAN HD, da *Pocket Storm*, disponível para Android, possibilita que os estudantes montem figuras utilizando as peças disponíveis na tela de interação. A atividade pode ser realizada em qualquer plataforma com aplicativos semelhantes.

Sugere-se que cada aluno monte, no mínimo cinco figuras, usando o modo *play* regular, onde é visualizada a sombra das figuras a serem montadas.

Após, sugere-se usar o aplicativo no modo *play masters*, onde os alunos visualizam apenas a figura, devendo montá-la utilizando as peças do Tangram. Apresentam-se exemplos na Figura 1.

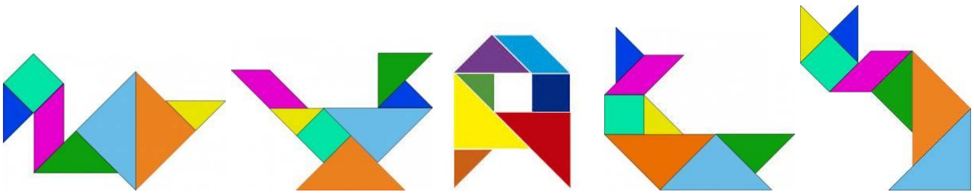


Figura 1 – Figuras construídas no *Tangram* em *tablets*
Fonte: a pesquisa.

5.2 Quebra-cabeça com o Tangram

Para introduzir o Tangram, depois que os estudantes montaram figuras no aplicativo, sugere-se a construção de um quebra-cabeça com as mesmas utilizadas nas figuras, no *software GeoGebra* disponível para *tablets*.

A atividade se constitui na construção das figuras que compõem o Tangram e a solução do problema da disposição das peças construídas em um quadrado fixo, também construído pelos estudantes.

Para a construção das peças, que compõem o Tangram, recomenda-se que o professor oriente as ações necessárias. A seguir, descreve-se a construção das peças do Tangram e do quadrado fixo que servirá como tabuleiro para ser montado o quebra-cabeça, com lados de dimensões 4 unidades.

As ações indicadas, para a construção dos polígonos a seguir, estão propostas para estudantes do Ensino Fundamental e, por isso, as dimensões utilizadas são números inteiros, tomando-se o cuidado para não trabalhar com números irracionais. Por exemplo, na construção do quadrado com lado $\sqrt{2}$ unidades, optou-se pela construção pelas diagonais do quadrado, facilitando a construção com estudantes do Ensino Fundamental.

5.2.1 Construindo um quadrado pelas diagonais, com comprimento 2 unidades (a construção do quadrado pelas diagonais justifica-se porque o lado do quadrado possui dimensão $\sqrt{2}$ unidades):

- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*
- marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou centro*;
- defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*;
- defina um círculo de raio 2 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*;
- marque a intersecção entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
- defina o quadrado utilizando os pontos das intersecções e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*;
- Deixe aparente apenas o quadrado e os pontos do segmento inicial.

5.2.2 Construindo dois triângulos retângulos isósceles, com hipotenusa de comprimento 2 unidades de comprimento e altura 1 unidade de comprimento:

- defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*
- marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou centro*;
- defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*;
- defina um círculo de raio 1 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*;
- marque uma das intersecções entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
- defina o triângulo utilizando o ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*;
- deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial;
- selecione a ferramenta polígono rígido e de um clique obre o triângulo recém criado para duplicá-lo.

5.2.3 Construindo dois triângulos retângulos isósceles com hipotenusa de comprimento 4 unidades e altura 2 unidades;

- defina um segmento de comprimento 4 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*

• marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou centro*;
• defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*;
• defina um círculo de raio 2 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*;
• marque uma das intersecções entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
• defina o triângulo utilizando o ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*;
• deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial;
• selecione a ferramenta polígono rígido e de um clique obre o triângulo recém criado para duplicá-lo.

5.2.4 Construindo um triângulo retângulo isósceles com catetos de comprimento 2 unidades;

• defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*
• defina um reta perpendicular entre o segmento e um dos extremos com a ferramenta *reta perpendicular*;
• defina um círculo de raio 2 e centro na intersecção entre o segmento e a reta perpendicular com a ferramenta *círculo dado centro e raio*;
• marque a intersecção entre a reta perpendicular e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
• defina o triângulo utilizando o ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*;
• deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial;

5.2.5 Construindo um paralelogramo com catetos de comprimento 2 unidades;

• defina um segmento de comprimento 2 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*
• marque o ponto médio entre os extremos do segmento com a ferramenta *ponto médio ou centro*;
• defina a mediatriz entre os extremos do segmento com a ferramenta *mediatriz*;
• defina um círculo de raio 1 e centro no ponto médio com a ferramenta *círculo dado centro e raio*;
• marque uma das intersecções entre a mediatriz e o círculo com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
• defina uma reta paralela utilizando o ponto de intersecção e o segmento construído com a ferramenta *reta paralela*;
• defina uma reta entre a origem do segmento construído e o ponto de intersecção;
• defina uma reta paralela utilizando a reta construída e o extremo do segmento inicial com a ferramenta *reta paralela*;
• marque a intersecção entre as retas construídas com a ferramenta *intersecção de dois objetos*;
• defina o paralelogramo utilizando os ponto de intersecção e os pontos do segmento inicial com a ferramenta *polígono*;

• deixe aparente apenas o paralelogramo e os pontos do segmento inicial;

5.2.6 Construindo o tabuleiro na forma de um quadrado fixo com lados de comprimento 4 unidades:

• defina um segmento de comprimento 4 com a ferramenta *segmento com comprimento fixo;*
• defina o quadrado utilizando os extremos do segmento com a ferramenta *polígono regular*;
• Entre em propriedades do polígono e marque o box *fixar objeto*;
• Entre em propriedades do polígono e marque o box *fixar objeto*;

Utilize o quadrado fixo, que é a peça maior, como tabuleiro e organize as peças de maneira que nenhuma peça fique fora do tabuleiro e que não fiquem sobrepostas.

Apresenta-se, na Figura 2, as peças construídas e o Tangram montado.

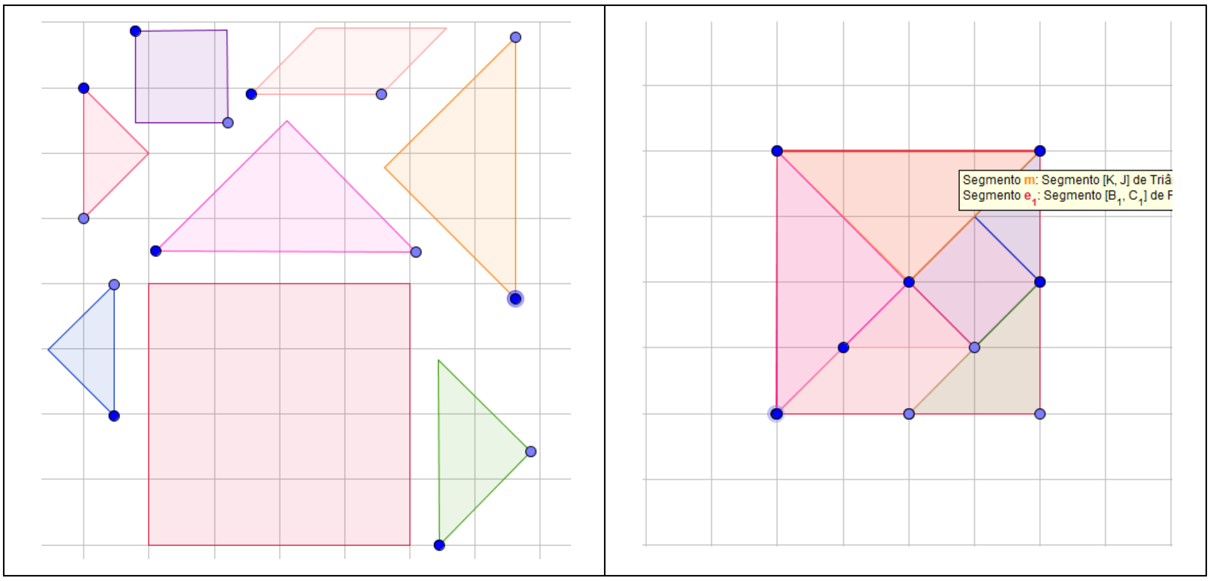


Figura 2 – Quebra-cabeça com o Tangram construído no GeoGebra
Fonte: a pesquisa.

Sugere-se que o professor explore os conhecimentos da construção realizada perguntando aos estudantes sobre os objetos e propriedades utilizadas na construção e informações pertinentes ao Tangram, tais como:

• Quantas peças têm o quebra cabeça? (7 peças).
• Quais peças? (2 triângulos grandes isósceles, 2 triângulos pequenos isósceles, 1 triângulo médio isósceles, 1 paralelogramo; 1 quadrado)
• Quais triângulos são semelhantes? Por quê? (os quatro triângulos, pois todos são triângulos retângulos isósceles);
• Quais triângulos são congruentes? (os 2 triângulos grandes e 2 triângulos pequenos);
• Quanto representa os 2 triângulos grandes em relação ao quadrado todo? ($\frac{1}{4}$ cada um, os dois juntos representam: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ do quadrado).

5.3 História do Tangram

A próxima atividade, depois da construção do quebra-cabeça, consiste em solicitar, aos estudantes, uma pesquisa sobre a história e a origem do Tangram.

Em um planejamento de aulas, sem o uso das tecnologias, a história do Tangram é apresentada através de leitura ou de uma exposição sobre o tema realizado pelo professor. A proposta de pesquisa com o uso de tecnologias em sala de aula diferencia-se de uma pesquisa usual, porque possibilita a interação entre os estudantes, durante a busca pelas informações sobre o tema. Uma atividade de pesquisa em sala de aula inclui o planejamento de ações para orientar as pesquisas e fomentar a discussão sobre as diferentes histórias sobre a origem e a etimologia da palavra Tangram. As discussões realizadas simultaneamente, com a pesquisa realizada, tornam a atividade dinâmica devendo ser planejada de maneira a fomentar a busca por diferentes informações que resultarão em um texto construído, com o resultado das interações sociais realizadas. Ressalta-se, ainda, que nas pesquisas realizadas como tema de casa, há a possibilidade de aparecerem textos iguais o que não fomenta uma discussão para enriquecimento do tema.

5.4 O Tangram e as frações

O professor pode solicitar aos alunos respondam perguntas, analisando as peças construídas. A seguir apresentam-se exemplos de possíveis perguntas.

- Quantas vezes o triângulo grande cabe sobre o Tangram? R: 4 triângulos.
- Qual a fração que o triângulo grande representa, em relação ao Tangram? R: $\frac{1}{4}$.
- Quantas vezes o triângulo médio cabe sobre o triângulo grande? R: 2.
- Quantas vezes o triângulo médio cabe sobre o Tangram? R: 8.
- Qual a fração que o triângulo médio representa, em relação ao Tangram? R: $\frac{1}{8}$.
- Quantas vezes o triângulo pequeno cabe no triângulo médio? R: 2.
- Quantas vezes o triângulo pequeno cabe no quadrado? R: 16.
- Qual a fração que o triângulo pequeno representa, em relação ao Tangram? R: $\frac{1}{16}$.
- Quantas vezes o triângulo pequeno cabe no paralelogramo? R: 2.
- Quantas vezes o triângulo pequeno cabe no quadrado? R: 2.
- Quantas vezes o triângulo pequeno cabe no triângulo grande? R: 4.
- O triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo possuem a mesma área? R: Sim, porque em todas as peças referidas cabem dois triângulos pequenos.
- Que fração representa, em relação ao Tangram:

a) Os dois triângulos pequenos? R: $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

b) O triângulo médio e o quadrado junto? $\frac{1}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Conclusões possíveis com as atividades:

- o triângulo pequeno compõe todas as peças; 16 triângulos pequenos montam todo o Tangram; o triângulo pequeno = $\frac{1}{16}$ do quadrado maior; o triângulo grande = $\frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$; o paralelogramo = $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$; o quadrado = $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$; o triângulo médio = $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

5.5 Atividades envolvendo área de figuras planas construídas com as peças do Tangram.

O professor pode propor aos estudantes, atividades de construção de figuras geométricas com as peças construídas, por exemplo: Com duas peças se constrói quais polígonos regulares? Com três peças se constrói quais polígonos? Com mais de duas peças é possível construir quantos triângulos? Qual a área das peças construídas?

O uso das peças do Tangram, construídas no GeoGebra com o plano quadriculado, possibilitam que o aluno visualize as áreas, fato que pode ser explorado pelo professor para a formalização das fórmulas do cálculo da área dos polígonos.

A disposição das peças no plano quadriculado permite a visualização, o que gera discussão e reflexão entre os estudantes. A Figura 5 apresenta alguns exemplos que podem ser construídos com os polígonos construídos.

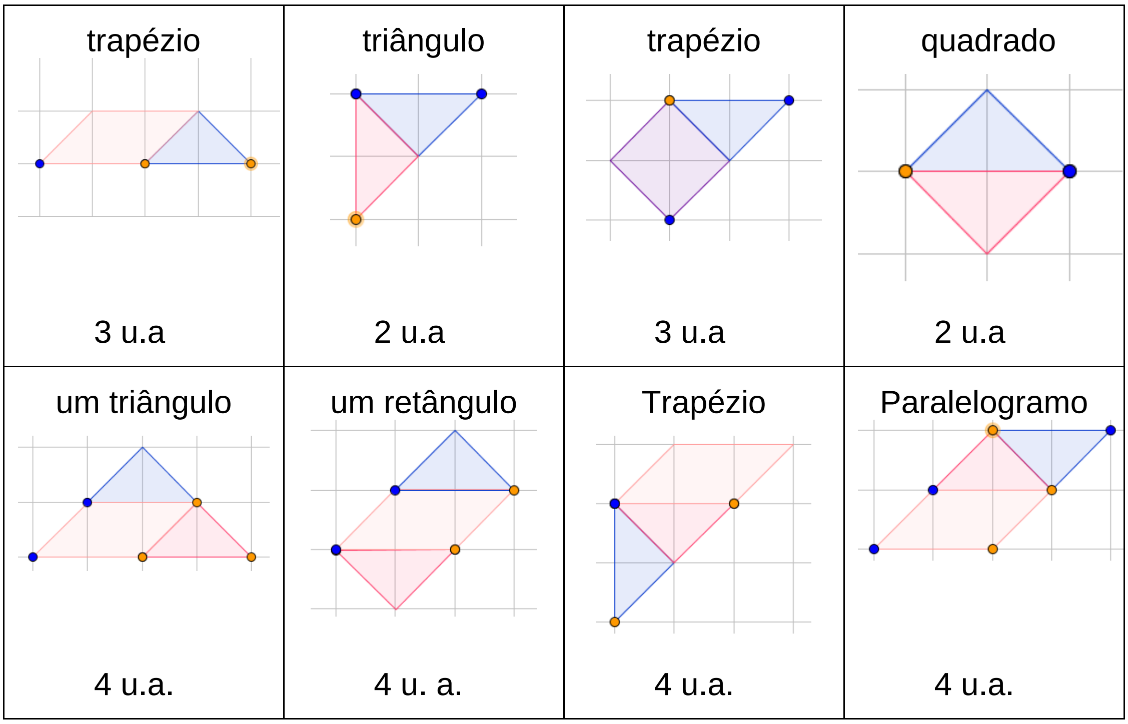


Figura 3 – Polígonos construídos no Tangram
Fonte: a pesquisa.

6 Atividades para o Ensino Médio com o Tangram

No Ensino Médio é possível trabalhar com a construção de objetos geométricos, construídos na forma retangular e na forma polar. Entende-se que no Ensino Médio a forma polar não necessita ser trabalhada de forma explícita. Nas atividades, propostas a seguir, os objetos são construídos com a definição dos vértices dado por uma distância relativa a um vértice de referência e um ângulo em relação a um dos lados.

Para montar o Tangram o aluno deve compreender as ações de rotação e translação associadas às peças. Discussões sobre como proceder com as construções, haja vista que os vértices utilizam como parâmetro um comprimento e um ângulo, devem ser realizadas para que o estudante compreenda as relações entre os vértices e que as mesmas devem ser mantidas com a manipulação dos vértices.

6.1 Construção das peças do Tangram

Os alunos do Ensino Médio estão familiarizados com o plano cartesiano e estão capacitados a desenhar as figuras geométricas definindo os vértices através das coordenadas retangulares. Tais figuras geométricas, por terem sido desenhadas, perdem suas características caso seja realizada a ação de translação de um dos vértices, pois os demais vértices não têm suas coordenadas definidas em relação ao ponto transladado.

Para as atividades o professor deve discutir sobre a necessidade de se estabelecer a relação entre os vértices, de maneira que, se algum vértice for transladado ou rotacionado em relação a um ponto, os demais vértices mudam suas coordenadas de modo a preservar a figura geométrica inicial.

Uma das abordagens, no estabelecimento das relações entre os vértices, possível de ser realizada é através de discussões sobre os atributos da figura geométrica que se mantém quando é realizada a ação de translação ou rotação da figura. A figura 4 apresenta a sequência de operações realizadas em um quadrado sobre um plano cartesiano que auxilia a visualização das características que se preservam. O ponto A é o ponto livre que permite a translação do quadrado e é a referência para a construção dos demais; o ponto B é definido com uma distância fixa de uma unidade em relação ao ponto A, sendo possível movimentá-lo em torno de A, rotacionando o quadrado. Os pontos C e D são definidos em relação a A com uma distância fixa e, também são rotacionados em torno de A, conforme B é rotacionado.

Através de atividade interativa os estudantes estabelecem as relações entre os vértices possibilitando a construção de figuras geométricas utilizando como referência a distância e o ângulo, apresentando de maneira informal as coordenadas polares.

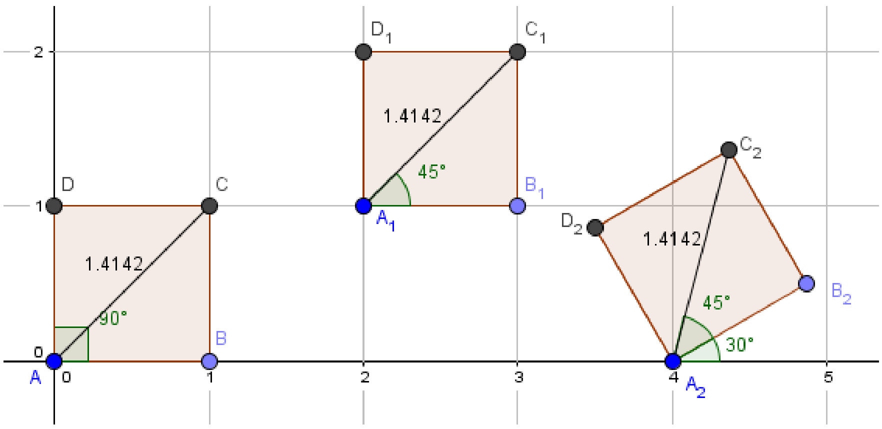


Figura 4: Sequência de transformações do quadrado com um dos vértices na origem

Fonte: a pesquisa.

A sequência de comandos, para a construção de objetos com a definição dos vértices na forma polar, sempre inicia com a construção de um segmento com comprimento fixo, com a dimensão de um dos lados da figura geométrica a ser construída. A seguir é definido uma reta auxiliar, paralela ao eixo das abscissas, que será utilizada para a medida do ângulo de rotação do segmento inicial.

Os demais vértices serão definidos pela distância e o ângulo de rotação, em relação ao segmento inicial. Ressalta-se que, para a ação de rotação, é realizada a movimentação do extremo do segmento original, formando um ângulo em relação a reta horizontal traçada. Essa medida de ângulo deve ser adicionada ao ângulo utilizado para definir os vértices na forma polar.

A seguir apresentam-se os comandos, no *software* GeoGebra, para construção dos polígonos do Tangram, utilizando a representação de coordenadas polares.

6.1.1 Construindo um quadrado com lado de $\sqrt{2}$ unidades:

• defina um segmento de comprimento $\sqrt{2}$ unidades, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*, utilize como comprimento do segmento *sqrt*(2) (sqrt é o comando para raiz quadrada);
• defina a reta paralela ao eixo das abscissas, com a ferramenta *reta paralela* e passando pela origem do segmento definido;
• defina o ângulo entre o segmento inicial e a reta auxiliar, com a ferramenta *ângulo*; para auxiliar na seleção do segmento, movimente o extremo do segmento para que o mesmo não fique coincidente com a reta auxiliar;
• considerando como "A" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial, utilize o comando $A + (2\,; 45° + \alpha)$ para definir o terceiro vértice. Sendo 2 unidades a distância do vértice em relação a A, e 45° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.
• considerando como "A" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial, utiliza-se o comando $A + (sqrt(2); 90° + \alpha)$ para definir o quarto vértice. Sendo $sqrt(2)$ a distância do vértice em relação a *A*, e 90° o ângulo entre o quarto lado e o lado referência do quadrado.
• Defina o quadrado, utilizando os pontos definidos, com a ferramenta *polígono*;
• Deixe aparente apenas o quadrado e os pontos do segmento inicial.

6.1.2 Construindo o triângulo retângulo isósceles com lado maior 2 unidades:

• defina um segmento de comprimento 2 unidades, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*;
• defina a reta paralela ao eixo dos abscissas com a ferramenta *reta paralela,* passando pela origem do segmento definido;
• defina o ângulo entre o segmento inicial e a reta auxiliar, com a ferramenta *ângulo*; para auxiliar na seleção do segmento, movimente o extremo do segmento para que o mesmo não fique coincidente com a reta auxiliar;
• considerando como "E" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial, utilize o comando $E + (1\,; 45° + \alpha)$, para definir o terceiro vértice. Sendo 1 unidade a distância do vértice em relação a E, e 45° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.
• Defina o triângulo utilizando os pontos definidos, com a ferramenta *polígono*;

• Deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial.

6.1.3 Construindo o triângulo retângulo isósceles com lado menor de 2 unidades:

• defina um segmento de comprimento 2 unidades, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*;
• defina a reta paralela ao eixo dos abscissas, com a ferramenta *reta paralela* e passando pela origem do segmento definido;
• defina o ângulo entre o segmento inicial e a reta auxiliar, com a ferramenta *ângulo*; para auxiliar na seleção do segmento, movimente o extremo do segmento para que o mesmo não fique coincidente com a reta auxiliar;
• considerando como "H" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial utilize o comando $H + (2\,; 90° + \alpha)$ para definir o terceiro vértice. Sendo 2 a distância do vértice em relação a EH, e 90° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.
• Defina o triângulo utilizando os pontos definidos, com a ferramenta *polígono*;
• Deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial.

6.1.4 Construindo o triângulo retângulo isósceles com lado maior de 4 unidades:

• defina um segmento de comprimento 4 unidades, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*;
• defina a reta paralela ao eixo dos abscissas com a ferramenta *reta paralela* e passando pela origem do segmento definido;
• defina o ângulo entre o segmento inicial e a reta auxiliar, com a ferramenta *ângulo*; para auxiliar na seleção do segmento, movimente o extremo do segmento para que o mesmo não fique coincidente com a reta auxiliar;
• considerando como "K" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial utilize o comando $K + (2sqrt(2)\,; 45° + \alpha)$ para definir o terceiro vértice. Sendo $2\sqrt{2}$ unidades a distância do vértice em relação a K, e 45° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.
• Defina o triângulo utilizando os pontos definidos com a ferramenta *polígono*;
• Deixe aparente apenas o triângulo e os pontos do segmento inicial.

6.1.5 Construindo o paralelogramo com lado maior de 2 unidades:

• defina um segmento de comprimento 2 unidades, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*;
• defina a reta paralela ao eixo dos abscissas, com a ferramenta *reta paralela* e passando pela origem do segmento definido;
• defina o ângulo entre o segmento inicial e a reta auxiliar, com a ferramenta *ângulo*; para auxiliar na seleção do segmento, movimente o extremo do segmento para que o mesmo não fique coincidente com a reta auxiliar;
• considerando como "N" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial utilize o comando $N + (1\,; 45° + \alpha)$ para definir o terceiro vértice. Sendo 1 unidade a distância do vértice em relação a N, e 45° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.

• considerando como "N" a origem do segmento inicial e "α" o ângulo formado entre a reta e o segmento inicial utilize o comando $N + (sqrt(10)\,; 22{,}5° + \alpha)$ para definir o terceiro vértice. Sendo $\sqrt{10}$ unidade a distância do vértice em relação a N, e 22,5° o ângulo entre a diagonal e o lado referência do quadrado.
• Defina o paralelogramo utilizando os pontos definidos, com a ferramenta *polígono*;
• Deixe aparente apenas o paralelogramo e os pontos do segmento inicial.

Salienta-se que após a construção do quadrado, as demais construções podem ser realizadas como atividades abertas, sem a apresentação da sequência de comandos, gerando uma discussão sobre como realizar as atividades. As construções dos triângulos retângulos isósceles, em particular, podem ser realizadas tomando como referência o lado maior ou um dos lados menores, o que muda pouco a construção.

Nestas atividades é possível revisitar o *Teorema de Pitágoras* e seu uso para realizar o cálculo das dimensões das arestas dos triângulos e do paralelogramo.

7 Experimento realizado com professores do grupo de formação continuada

A sequência didática, desenvolvida pelos pesquisadores do grupo GECEM, foi apresentada, discutida e pormenorizada com o grupo de professores de Matemática em formação continuada, em conjunto com os pesquisadores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da ULBRA. Foram observadas as interações realizadas pelos professores utilizando a tecnologia e as discussões sobre a mudança de planejamento das aulas, quando se utiliza dispositivos digitais como os *tablets*.

Os dez professores, participantes do experimento, consideraram viável a aplicação das mesmas com estudantes do Ensino Fundamental. Salienta-se que os professores da rede pública de Canoas têm disponível *tablets* em suas escolas, o que gerou a necessidade da inserção desse recurso no planejamento escolar desses professores.

A seguir, na Figura 5, apresentam-se algumas das construções realizadas pelos professores.

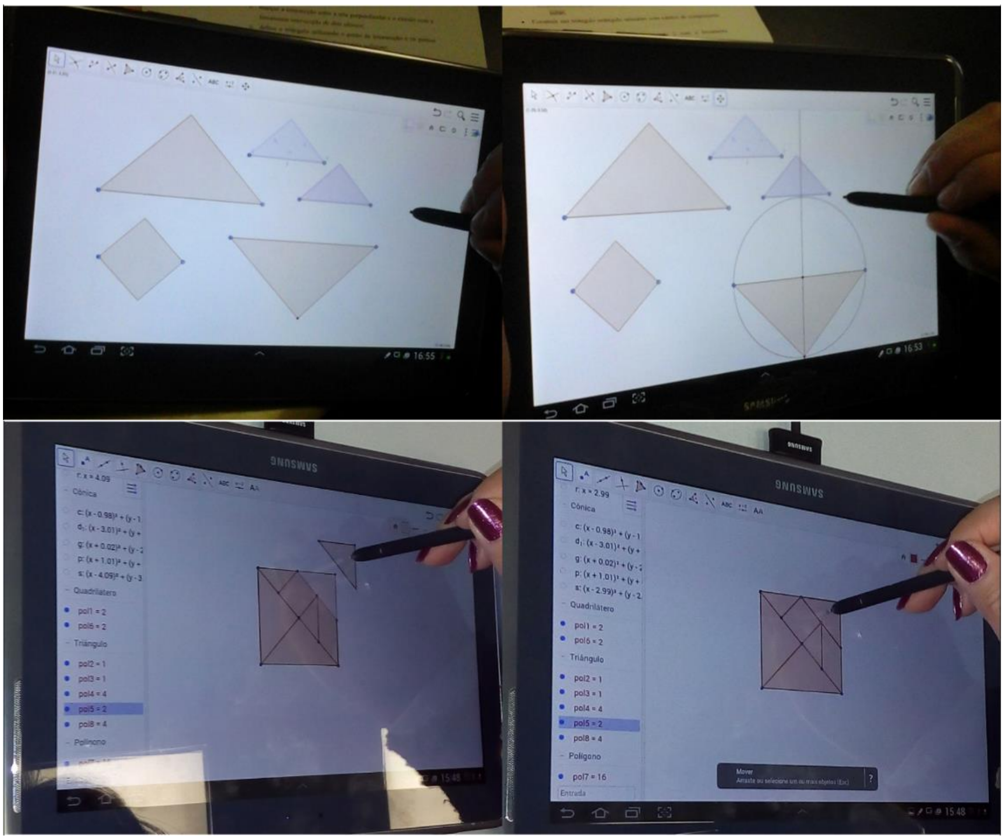


Figura 5 – Construções realizadas pelos professores do grupo de formação continuada
Fonte: a pesquisa.

Os professores, participantes do experimento, afirmaram que o uso de tecnologias, no caso os *tablets*, podem ajudar os estudantes a visualizarem e compreenderem os conceitos matemáticos, sendo possível explorar as ideias matemáticas utilizadas nas construções das figuras.

Afirmaram, também, que as tecnologias mudam a maneira de ensinar e possibilitam planejamentos que permitem aos estudantes formularem os conceitos matemáticos. Porém, os professores se sentem inseguros na utilização de tais recursos, necessitando de formações para aprenderem a utilizá-las com eficácia.

Um obstáculo, apontado pelos professores, participantes do experimento, é a conexão de internet, que em muitos casos não permitem que se utilizem os recursos com a eficiência necessária. Salienta-se a necessidade de investimentos nesta área, nas escolas municipais de Canoas, para que se viabilize o uso destes recursos na sua plenitude.

8 Conclusão

O uso de tecnologias pode ser observado sob duas abordagens, em uma delas os estudantes se deslocam da sala de aula para o ambiente tecnológico, como os laboratórios de informática; a outra é o ambiente tecnológico que vai para a sala de aula, com os dispositivos móveis, como *tablets, smartphones* e *notebooks*. A primeira situação está vinculada aos laboratórios de informática, com o estudante vinculado ao computador, dificultando a movimentação, interação e a troca de ideias, na segunda situação o aluno se encontra em seu ambiente, em sua zona de conforto, e pela característica dos dispositivos móveis fica viável o trabalho de grupos, a interação e a troca de ideias enquanto os estudantes realizam as atividades. Ressalta-se que na segunda possibilidade o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática possibilita maior interação entre os estudantes.

A vantagem que se observa no uso de dispositivos móveis, em particular os *tablets,* é a possibilidade de planejamento de atividades que explorem a colaboração para a construção do conhecimento matemático.

O planejamento do professor sofre alterações quando são utilizados recursos tecnológicos, como os *tablets*, observa-se que as atividades apresentam ordem diferente de quando se trabalha com lápis e papel. Sem o recurso tecnológico, no planejamento para uso do recurso Tangram, o professor inicia com a história do Tangram, passando para a construção do mesmo com papel e, a partir daí, monta figuras com os polígonos construídos. Com o recurso tecnológico, no caso os *tablets*, o professor inicia trabalhando com o Tangram pronto e disponível em um aplicativo, caracterizado como sendo uma atividade aberta, pois o aluno tem disponível uma grande quantidade de desenhos, que proporciona uma diversidade de opções para a construção de figuras em relação à atividade com objetos concretos. Depois, é possível explorar a atividade de construção do Tangram no GeoGebra, explorando as propriedades dos polígonos construídos, e após, solicita-se ao estudante uma pesquisa histórica do mesmo, proporcionando uma situação colaborativa com a discussão sobre a melhor organização de um texto, que contemple as informações pesquisadas.

Na pesquisa histórica, com a proposta de construção de um texto em conjunto, os estudantes acessam a informação, discutindo sobre as origens do Tangram, viabiliza a discussão e a construção colaborativa do conhecimento.

Outro ponto positivo a ressaltar é que o *software* GeoGebra está disponível para diversas plataformas, a vantagem do uso do mesmo em plataformas móveis, é a mobilidade dentro da sala de aula, característica não presente em atividades utilizando computadores de mesa que precisam de um espaço próprio com tomadas elétricas e mesas adequadas, em particular os *tablets* que tem a tela maior permitindo o uso compartilhado e propostas de atividades colaborativas/cooperativas.

Em uma atividade com material concreto o Tangram é construído no papel através de uma sequência de dobras e cortes com o professor mostrando, posteriormente, os atributos, as características e propriedades dos objetos em relação aos seus ângulos e lados. A construção com o GeoGebra é realizada com a definição das dimensões dos lados e características dos objetos, antes da construção do mesmo, fazendo uso de comandos (botões) que apresentam, simultaneamente, o nome da propriedade que é representada de forma gráfica como um desenho no ícone do botão de comando que possibilita a associação das propriedades pelos alunos do Ensino Fundamental.

A ideia de rotação e medida de ângulos nos objetos digitais é mais aparente que nos objetos concretos, pois o objeto rotaciona em relação a um dos vértices enquanto que no objeto concreto, por não ter um ponto de referência para a rotação, isso não é tão evidente.

O uso dos objetos digitais sobre o plano quadriculado permite a visualização das relações entre as áreas dos objetos em relação à unidade de área (um quadriculado) sendo possível determinar a área pela contagem das unidades de área, com a visualização das figuras geométricas.

Na construção dos objetos pelos alunos do Ensino Médio, sobre o plano quadriculado, permite determinar as dimensões das arestas e os ângulos somente pela visualização das figuras geométricas, permitindo que o aluno trabalhe com a representação polar sem a apresentação formal dos conceitos.

Os resultados apontam que atividades com o uso de *tablets* é uma alternativa metodológica para a inserção das TIC na Educação Básica. Acredita-se que o professor de Matemática pode incluir no planejamento do processo de ensino e aprendizagem em Matemática aulas que utilizem como recurso os *tablets*.

Bibliografía

Albornoz Torres, A. C. de. (2010). GeoGebra . Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *23*, 201–210.

Almeida, M. E. B. de. (2008). Tecnologia na escola: criação de redes de conhecimentos. In *Tecnologias na Escola* (pp. 71–73).

Bairral, M. A. (2013). Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. *36ª Reunião Nacional Da Associação Nacional de Pós-Graduação E Pesquisa Em Educação*. Retrieved from http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19_2867_texto.pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto Codex: Porto Editora Ltda.

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. http://doi.org/10.1002/job

Brasil. Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território (2013). Retrieved from http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018&Itemid=948

Dolz, J., & Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado das Letras.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry , algebra and calculus in the software system GeoGebra. Retrieved June 4, 2014, from http://www.GeoGebra.org/publications/pecs_2004.pdf

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*. Retrieved from http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Moran, J. M. (2012). tablets e netbooks na educação. Retrieved February 12, 2013, from http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/tablets.pdf

NCTM. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical sucess for all*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nóvoa, A. (2007). Desafios do Trabalho do Professor no Mundo Contemporâneo. *Palestra de António Nóvoa*, 1–24.

Park, D., Lee, J.-H., & Kim, S. (2011). Investigating the affective quality of interactivity by motion feedback in mobile touchscreen user interfaces. *International Journal of Human-Computer Studies*, *69*(12), 839–853. Retrieved from http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1071581911000784

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Tang, A., Pahud, M., Carpendale, S., & Buxton, B. (2010). VisTACO: Visualizing Tabletop Collaboration. *ACM International Conference on Interactive Tabletops and Surfaces*, 29–38.

Autores:

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo PPGECIM, Universidade Luterana do Brasil, professor do curso de Matemática Licenciatura. Os interesses de pesquisa centram-se no uso das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação.
Email: iaqchan@hotmail.com

Claudia Lisete Oliveira Groenwald: Doutora em Ciências da Educação pela Pontifícia de Salamanca na Espanha, professora do curso de Matemática Licenciatura e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil. Os interesses de pesquisa centram-se no uso das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação e na formação de profesores de Matemática.
Email: claudiag1959@yahoo.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 41-58

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A LA ALFABETIZACIÓN PROBABILÍSTICA EN EL AULA: ELEMENTOS PARA SU CARACTERIZACIÓN Y DESARROLLO

Ángel Alsina, Claudia Vásquez Ortiz

Fecha de recepción: 28/06/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	Este artículo ofrece orientaciones al profesorado de Educación Infantil y Primaria para fomentar la competencia probabilística de los alumnos a través de tareas auténticas. En la primera parte se caracteriza la competencia matemática en general y la competencia probabilística en particular, que se concibe como la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real; su desarrollo se aborda a partir de dos aspectos interrelacionados: los contextos de enseñanza-aprendizaje y las conexiones entre los conocimientos matemáticos. En la segunda parte se describen diversas tareas auténticas, es decir, actividades que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable, para desarrollar la alfabetización probabilística en las aulas de Educación Infantil y Primaria. **Palabras clave**: Alfabetización probabilística, competencia matemática, tarea auténtica, Educación Infantil, Educación Primaria
Abstract	This article offers guidelines for Preschool and Primary teachers to help them promote their pupils' probabilistic competence through authentic tasks. The first part defines mathematical competence in general and probabilistic competence in particular, which is conceived as the capacity to access, use, interpret and communicate information and ideas related to probability, in order to carry out and deal effectively with the demands of functions and tasks involving uncertainty and risk in the real world. The competence is treated and developed on the basis of two interrelated aspects: teaching/learning contexts and connections between mathematical knowledge. The second part describes different authentic tasks; i.e. activities that simulate real life situations in a realistic and rational way, in order to develop probabilistic literacy in Preschool and Primary school classrooms. **Keywords**: Probabilistic literacy, mathematical competence, authentic tasks, Preschool Education, Primary Education
Resumo	Este artigo oferece orientações aos professores da Educação Infantil e

Ensino Fundamental sobre o ensino da competência probabilística utilizando tarefas autênticas. Na primeira parte do trabalho caracteriza-se a competência matemática geral e logo, em específico, a competência probabilística. Essa última é concebida como a capacidade de acessar, utilizar, interpretar e comunicar informações e ideias relacionadas com a probabilidade, a fim de participar e gerir com eficiência as tarefas e funções que envolvem incertezas e riscos no mundo real; seu desenvolvimento é abordado a partir de dois aspectos inter-relacionados: os contextos de ensino-aprendizagem e as conexões entre os conhecimentos matemáticos. A segunda parte descreve várias tarefas autênticas, ou seja, atividades que simulam um contexto de uso real da probabilidade promovendo a alfabetização probabilística nas salas de aula da Educação Infantil e Educação Primária.
Palavras-chave: alfabetização probabilística, competência matemática, tarefa autêntica, Educação Infantil, ensino fundamental

1. Introducción

- "Estoy seguro que mañana lloverá"
- "Si el primer semáforo está en rojo, estoy casi seguro que los restantes también estarán en rojo"
- "La probabilidad de ganar la lotería es bajísima, sin embargo es muy probable que alguien la gane"
- "Es probable que lo que dice sea verdad"
- "Ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Así que ahora estoy más seguro que en la próxima partida ganaré"

Los ejemplos anteriores ilustran situaciones en las que a diario nos vemos enfrentados al azar y en las que la incertidumbre se hace presente. En muchas ocasiones, nos dejamos confundir fácilmente ante estas situaciones debido a una escasa y errónea comprensión de los fenómenos inciertos. En este sentido, se pone de manifiesto que hace falta una educación para la incertidumbre. La probabilidad es la disciplina que puede dar respuesta a esta educación, que debería iniciarse en la etapa de Educación Infantil y proseguir durante toda la escolaridad. Por esta razón, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000) ha manifestado la conveniencia de que todos los alumnos accedan a estos conocimientos desde el nivel Pre-K-2 (3 años aproximadamente) hasta la etapa 9-12 (18 años aproximadamente). Aunque otros planteamientos americanos retrasan su incorporación hasta el final de la etapa de Educación Primaria (CCSSI, 2010), en nuestro trabajo se asume la visión del NCTM.

En este artículo, pues, vamos a focalizarnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad en Educación Infantil y Primaria, al ser las etapas en las que se ha incorporado más recientemente en el currículo. Asimismo, es donde se han detectado mayores dificultades para enseñar conocimientos probabilísticos que puedan ser usados de forma comprensiva y eficaz para poder hacer frente a una amplia gama de situaciones del entorno que implican la interpretación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones. Estos déficits en la enseñanza de la probabilidad se deben a varios factores, entre los que destacan la escasa formación del profesorado de estas etapas y, en consecuencia, su débil conocimiento didáctico y disciplinar (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Vásquez y Alsina, 2015). Una de las principales consecuencias de estas carencias ha sido que, cuando se han enseñado conocimientos probabilísticos en estas primeras etapas de escolarización, el método predominante ha sido la instrucción a través de un libro de texto (Stylianides, 2009), a pesar de que en su mayoría dejan de lado aspectos claves, como por ejemplo el uso adecuado del lenguaje probabilístico (Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras, 2013). Estos trabajos han puesto en evidencia que los libros de texto no resultan ser el recurso más adecuado para una enseñanza eficaz de la probabilidad, por lo que se precisa una metodología que ofrezca herramientas a los alumnos para que puedan desenvolverse en las situaciones de incertidumbre que plantea constantemente el mundo contemporáneo. Es necesario, pues, avanzar hacia la alfabetización o competencia probabilística (Gal, 2005) a través de tareas auténticas, entendidas como aquellas que simulan un acercamiento a la vida real en un sentido razonable (Palm, 2008), más allá de saber resolver de forma mecánica ejercicios descontextualizados, a través de "fórmulas" que se aplican pero no se comprenden, lo que en muchas ocasiones comporta que, al intentar enseñar probabilidad, se termine sólo aprendiendo aritmética.

Desde este prisma, nuestra finalidad es ofrecer algunas ayudas al profesorado de las etapas de Educación Infantil y Primaria que les permita fomentar la competencia probabilística de sus alumnos a través de tareas auténticas, en el sentido descrito. Para ello, en primer lugar se va a caracterizar la competencia matemática en general y la competencia probabilística en particular, y en la segunda parte se van a ofrecer diversas orientaciones para favorecer su desarrollo en las aulas de Educación Infantil y Primaria.

2. De la competencia matemática a la competencia probabilística

Puesto que el principal objetivo de este trabajo es proporcionar algunas ayudas al profesorado de las primeras edades para fomentar la competencia probabilística en el aula, se considera necesario abordar dicha finalidad desde dos perspectivas interrelacionadas que otorgan el fundamento teórico para el diseño de tareas auténticas: a) la caracterización de la competencia matemática y su desarrollo en las etapas de Educación Infantil y Primaria; b) la posterior caracterización y desarrollo de la competencia probabilística en estas etapas educativas.

2.1. Caracterización de la competencia matemática y su desarrollo en las primeras edades

Existe abundante literatura que aborda la caracterización de la competencia matemática y su desarrollo, probablemente como consecuencia del énfasis que en su momento otorgó a este enfoque curricular el Proyecto DeSeCo (Definición y Selección de Competencias Clave) de la Red Eurydice de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo, que puso de manifiesto la necesidad de substituir paulatinamente un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un currículo orientado a la adquisición de competencias clave para la vida (Rychen y Salganik, 2004). En síntesis, con este nuevo enfoque curricular se busca que la escuela garantice la alfabetización, en el sentido que los alumnos tienen que comprender el conocimiento y saberlo aplicar en diferentes contextos cuando este conocimiento es necesario.

Alsina (2015) ha realizado recientemente una revisión de las principales aportaciones sobre la noción de "competencia matemática" de varios autores y organismos de reconocido prestigio en el campo de la educación matemática (NCTM, 2000; Niss, 2002; OECD, 2004; entre otros). A partir del análisis de estas aportaciones, concluye que para aprender matemáticas desde este enfoque social es imprescindible fomentar los siguientes aspectos en el aula:

- Pensar matemáticamente: construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones en las que tengan sentido, experimentar, intuir, relacionar conceptos y realizar abstracciones.
- Razonar matemáticamente: realizar deducciones e inducciones, particularizar y generalizar; argumentar las decisiones tomadas, así como la lección de los procesos seguidos y de las técnicas usadas.
- Plantearse y resolver problemas: leer y entender el enunciado, generar preguntas relacionadas con una situación problemática, planificar y desarrollar estrategias de resolución y verificar la validez de las soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar las técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras y TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos con palabras, dibujos, símbolos, números y materiales.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático. (Alsina, 2015, pp. 12-13).

En relación a la pregunta ¿cómo desarrollar la competencia matemática?, este autor indica que se va adquiriendo de forma progresiva a través de un proceso de enseñanza-aprendizaje que es complejo debido a que, en su esencia, requiere poder aplicar de forma comprensiva y eficaz el conocimiento aprendido en la escuela en todas las situaciones en las que estos conocimientos son necesarios. Por esta razón, considera que para fomentar el desarrollo de la competencia matemática en las aulas de Educación Infantil y Primaria es necesario considerar dos aspectos que se complementan: a) los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; b) las conexiones entre los conocimientos matemáticos.

Sobre los contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, Alsina (2010) plantea que para favorecer el desarrollo de la competencia matemática es preciso partir de contextos de enseñanza-aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos de las primeras edades para aprender matemáticas.

Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, propone la “Pirámide de la Educación Matemática” en la que se indican distintos contextos para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable:

> En la base de este organigrama piramidal están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente para desarrollar la competencia matemática. Ahí están las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto (matematización del entorno); la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios con un contenido matemático o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los libros de texto. (Alsina, 2010, p. 13-14).

Bajo esta mirada es necesario poner especial atención al proceso de enseñanza-aprendizaje y a las diversas interacciones que se dan en el interior del aula, pues no hay que olvidar que el éxito de dicho proceso “depende fundamentalmente de lo que acontece dentro de la clase, en función de cómo interactúan los docentes y los educandos con el currículo” (Ball y Forzani 2011, p. 17). Por tanto, es recomendable centrar los procesos de enseñanza-aprendizaje en situaciones cotidianas que potencien la matematización del entorno. Sin embargo, como se ha indicado en la introducción, el libro de texto sigue teniendo un papel protagonista en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, sobre todo cuando se trata de conocimientos que el maestro no domina. Parece necesario, pues, repensar la práctica docente para fomentar el desarrollo de la competencia matemática. En este sentido, en el manual De los Principios a la Acción (NCTM, 2015) se mencionan ocho prácticas basadas en investigaciones: 1) establecer metas matemáticas basadas en el aprendizaje; 2) implementar tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas; 3) usar y vincular las representaciones matemáticas; 4) favorecer el discurso matemático significativo; 5) plantear preguntas deliberadas; 6) elaborar la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual; 7) favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas; 8) obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes.

El NCTM considera que estas ocho prácticas constituyen “un conjunto de acciones muy recomendables para todo el profesorado, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes políticos y responsables de políticas” (NCTM, 2015, p. 4).

Con base en estos planteamientos, Alsina (2015) añade otro aspecto para fomentar el desarrollo de la competencia matemática: el trabajo de los contenidos matemáticos a través de los procesos matemáticos.

	Resolución de problemas	Razonamiento y prueba	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Estadística y probabilidad					

Figura 1. Conexiones entre contenidos y procesos matemáticos
Fuente: Alsina (2015)

La combinación de contenidos y procesos matemáticos favorece nuevas miradas que enfatizan no sólo el contenido y el proceso, sino -y especialmente- las relaciones que se establecen entre ellos. Partir de este enfoque competencial ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, es especialmente significativo, dado que cuando los niños usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

2.2. Caracterización de la alfabetización probabilística y su desarrollo en las primeras edades

El punto de partida imprescindible para abordar la alfabetización probabilística es poner de relieve que la enseñanza de la probabilidad es esencial para ayudar a preparar a los alumnos para la vida en general, y para los eventos aleatorios y fenómenos casuales de su vida cotidiana en particular (Bennett, 1998; Beltrami, 1999; Everitt, 1999). Es por esta razón que, como se ha indicado, la prestigiosa asociación norteamericana de profesores de matemáticas ha incorporado con fuerza la probabilidad en el currículo de matemáticas, caracterizándose por presentar un enfoque más experimental que permita proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde las primeras edades.

La probabilidad se refiere a la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de hechos, por lo que debe interpretarse como una medida. No es pues una característica tangible, sino más bien una percepción que puede expresarse a través de medios informales o a través de notaciones matemáticas formales (Gal, 2005), de ahí que coexistan diversos significados de la probabilidad que se complementan (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) y que han dado lugar a la teoría de la probabilidad.

Desde esta visión, Gal (2005) caracteriza la alfabetización probabilística vinculándola a la alfabetización estadística, que concibe como la habilidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que permean la vida cotidiana, y para apreciar las contribuciones de la estadística en las decisiones públicas y privadas, profesionales y personales. De forma más concreta, Gal (2002) indica que la alfabetización estadística se refiere a la capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos. Gal argumenta, además, que el comportamiento estadísticamente alfabetizado requiere la activación conjunta de componentes cognitivos y de disposición. Los componentes cognitivos implican cinco bases de conocimiento: habilidades de alfabetización, conocimientos estadísticos (incluyendo también algún conocimiento probabilístico, incluso informal), conocimiento matemático, contextual o del mundo del conocimiento, y que se plantee el conocimiento de cuestiones críticas. El componente referente a la disposición se refiere a la presencia de una posición crítica, es decir, la voluntad de adoptar actitudes cuestionando ciertas creencias, como la creencia en el poder de los procesos estadísticos, la creencia en sí mismo como persona capaz de pensar estadísticamente y la creencia en la legitimidad de la adopción de una perspectiva crítica sobre información recibida de fuentes "oficiales" o de expertos.

Desde este prisma, Gal (2002, 2005) describe cinco elementos cognitivos (conocimientos) y tres elementos sobre la disposición (actitudes) que se proponen como los componentes básicos de la alfabetización probabilística. Estos elementos, que figuran en las Tablas 1 y 2, siguen la lógica utilizada por Gal (2002) para describir la construcción de la alfabetización estadística.

Elementos cognitivos	Conocimientos
1. Las grandes ideas: variación, aleatoriedad, independencia, previsibilidad/incertidumbre.	**La alfabetización probabilística es una construcción dinámica y relativa.** **La aleatoriedad es una construcción resbaladiza que ha sido debatida por muchos estadísticos (un posible punto de vista es que el azar es una propiedad de un resultado).** **La independencia implica que los eventos son inconexos y un evento no se puede predecir de otro.** **La previsibilidad y la incertidumbre se relacionan con nuestro conocimiento general acerca de la probabilidad de un determinado evento.**
2. Cómo calcular las probabilidades: formas de encontrar o estimar la probabilidad de eventos.	Para el cálculo de probabilidades, los alumnos deben estar familiarizados con la manera de determinar la incertidumbre de eventos, tanto para poder entender los estados probabilísticos realizados por otros como para realizar estimaciones sobre la probabilidad de eventos y

	comunicarlo a los demás. Aquí es donde los puntos de vista de la probabilidad clásica, frecuentista y subjetiva son útiles.
3. Lenguaje: los términos y los métodos utilizados para comunicar acerca de la oportunidad.	Los alumnos deben entender el "lenguaje de la oportunidad", es decir, las diversas formas que se utilizan para representar y comunicar acerca del azar y la probabilidad. La probabilidad de eventos se puede representar cuantitativamente por múltiples sistemas, como en una escala de 0-1, fracciones (por ejemplo, 50/50), porcentajes, probabilidades, proporciones, etc., así como gráficamente. Por lo tanto, una expectativa básica es que los alumnos entiendan el significado de diferentes representaciones y se sientan cómodos moviéndose entre ellas.
4. Contexto: la comprensión del papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y mensajes en diferentes contextos y en el discurso personal y público.	Los conocimientos relativos al contexto son necesarios tanto desde el punto de vista funcional como educativo. La comprensión de que el azar y la aleatoriedad no afectarán a los acontecimientos y procesos del mundo real permite a las personas prever que ciertos eventos serán más predecibles, mientras que otros no tanto.
5. Preguntas críticas: cuestiones para reflexionar cuando se trata de probabilidades.	Los alumnos deben saber qué preguntas críticas realizar cuando se encuentran con una declaración de probabilidad o certeza, o cuando tienen que generar una estimación probabilística. Las preguntas deberían referirse a 5 elementos: el contexto (¿en qué medida implica aleatoriedad?); la fuente (¿quién hace una demanda probabilística?); el proceso (¿qué tipo de análisis se usa?); el significado del mensaje (¿qué indica la afirmación probabilística?); y la interpretación reflexiva (¿qué cuestiona el mensaje y cómo se interpreta?

Tabla 1. Elementos cognitivos de la alfabetización probabilística (Gal, 2005)

Elementos sobre la disposición	Actitudes
1. Postura crítica.	Los mensajes cuantitativos que pueden ser engañosos, unilaterales, sesgados o incompletos (ya sea intencionalmente o no) deberían generar una actitud de cuestionamiento. Es, pues, necesario aprender progresivamente a invocar de forma espontánea la lista de preguntas que generan incertidumbre frente a argumentos que pretenden basarse en datos, informes de resultados, conclusiones de encuestas u otras investigaciones empíricas.
2. Creencias y actitudes.	Se distinguen tres constructos distintos dentro del dominio afectivo en educación matemática: emociones, actitudes y creencias. Es, pues, necesario desarrollar progresivamente una visión

	positiva de sí mismo como individuo capaz de realizar razonamientos probabilísticos en situaciones de incertidumbre que sean relevantes, más que partir de datos anecdóticos o de experiencias personales.
3. Los sentimientos personales en relación a la incertidumbre y el riesgo (por ejemplo, la aversión al riesgo).	El grado de incertidumbre o previsibilidad experimentado puede ser la base de la propia percepción y capacidad para evaluar el riesgo asociado con los eventos o resultados de relevancia para la vida.

Tabla 2. Elementos referentes a la disposición de la alfabetización probabilística (Gal, 2002)

Sobre los componentes de la alfabetización probabilística expuestos, Gal aclara que a pesar de presentarlos por separado, todos interactúan entre sí de manera compleja durante el aprendizaje real. Esto significa que una instrucción que se centre sólo en uno o dos de los elementos no será suficiente para desarrollar un "comportamiento alfabetizado de probabilidad".

Considerando, pues, estos diferentes componentes, Gal (2012, p. 4) define la alfabetización probabilística como: "la capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real”.

Desde este punto de vista, ¿cómo se puede fomentar el desarrollo de la competencia probabilística en las aulas de infantil y primaria? De forma paralela a la respuesta que se ha aportado en relación al desarrollo de la competencia matemática, el abordaje de esta cuestión compleja requiere considerar también dos aspectos interrelacionados: a) los contextos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad; b) las conexiones entre los conocimientos matemáticos, puesto que la probabilidad “proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales” (Godino, Batanero y Cañizares, 1987, p. 12).

En relación a los contextos de enseñanza-aprendizaje, para poder plantear tareas auténticas que fomenten la alfabetización probabilística deberían considerarse -además de las aportaciones genéricas expuestas en la sección anterior- las orientaciones específicas de Batanero y Godino (2004, p. 429):

1. Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
2. Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
3. Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

4. Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
5. Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Todavía desde la perspectiva de los contextos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, otros autores (Langrall y Mooney, 2005; Bryant y Nunes, 2012; Nunes, Bryant, Evans, Gottardis y Terlektsi, 2015) y organismos de reconocido prestigio (NCTM, 2000; Sheffield et al., 2002; Chapin, Koziol, MacPherson y Rezba, 2002) han realizado también aportaciones en beneficio del desarrollo de la alfabetización probabilística de los alumnos. Así, por ejemplo, y por lo que respecta a alumnos de 3 a 8 años, el NCTM (2000, p. 113) hace alusión a las situaciones de la vida cotidiana de los alumnos y los juegos: "Las ideas sobre la probabilidad en estos niveles deberían ser informales, y centrarse en juicios que emiten los alumnos con base en sus propias experiencias. Deberían realizarse actividades en las que subyazcan probabilidades experimentales, como lanzar dados".

Bryant y Nunes (2012) y Nunes et al. (2015), en concordancia con Fischbein (1975), subrayan también la importancia de que el aprendizaje de la probabilidad en las primeras edades pasa necesariamente por interpretar y resolver adecuadamente situaciones problemáticas de la vida cotidiana, usar materiales manipulativos, etc.

En relación al segundo aspecto imprescindible para poder abordar el desarrollo de la alfabetización probabilística, que hace referencia como se ha indicado a las conexiones entre los conocimientos matemáticos, nos parece fundamental abordarlo desde las relaciones existentes principalmente entre los conocimientos numéricos, estadísticos y probabilísticos, además del planteamiento genérico de Alsina (2015) de trabajar de forma sistemática los contenidos de probabilidad a través de los distintos procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, para fomentar el desarrollo de la alfabetización probabilística es necesario considerar sus distintas fases de adquisición, en las que se entrelazan conocimientos matemáticos de distinta naturaleza. En sintonía con los planteamientos del NCTM (2000), el aprendizaje de la probabilidad en las primeras edades pasa por los siguientes estadios: a) se inicia de manera informal en las primeras edades, introduciendo el vocabulario vinculado a las nociones de probabilidad por medio de actividades centradas en los juicios que emiten los alumnos en base a sus propias experiencias, llevándoles a responder preguntas sobre la posibilidad de ocurrencia de sucesos, cuyas respuestas consideren el empleo de términos tales como: seguro, probable o imposible; b) sigue con la realización de experimentos aleatorios con material concreto como bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. y de este modo comenzar a aprender cómo cuantificar la posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso, además de empezar a comprender que la probabilidad de un suceso imposible se designa por medio del 0 y la de un suceso seguro por medio del 1, vinculando así a los alumnos con la asignación numérica de la probabilidad a la ocurrencia de ciertos sucesos; y c) se finaliza la Educación Primaria con el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos sencillos, dejando para etapas posteriores el cálculo de la probabilidad de sucesos dependientes e independientes, así como conceptos de mayor complejidad.

3. Tareas auténticas para fomentar la alfabetización probabilística en Educación Infantil y Primaria

De acuerdo con los aspectos descritos hasta ahora, en este apartado se presentan diversas tareas auténticas que buscan ofrecer algunas directrices para responder a la pregunta ¿cómo enseñar probabilidad para fomentar el desarrollo de la alfabetización probabilística? Para el diseño de estas tareas auténticas se ha considerado el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2002, 2005), así como los planteamientos de Godino, Batanero y Cañizares (1987) para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje del azar y probabilidad en el currículo escolar.

3.1. Aprendizaje de las primeras nociones probabilísticas

Niveles: 3-6 años

Finalidad: aprender lenguaje probabilístico elemental (imposible, probable, seguro) a partir de situaciones de la vida cotidiana, fomentando que los alumnos emitan juicios sobre la posibilidad de ocurrencia de ciertos sucesos.

Contenidos implícitos: grados de posibilidad de un determinado suceso, utilización de lenguaje probabilístico (posible, imposible, poco posible, etc.).

Contextos de aprendizaje: situaciones de la vida cotidiana de los alumnos, materiales manipulativos y juegos, acordes a su edad, que muestren situaciones en que la incertidumbre se hace presente.

Desarrollo: se presenta la situación a los alumnos y se establece un diálogo con ellos que invite a usar vocabulario probabilístico, a clasificar situaciones según si son posibles de ocurrir o no, etc. Por ejemplo, observando el comportamiento del tiempo atmosférico, predecir el tiempo que hará el día siguiente (figura 2); estimar qué número es posible que salga al lanzar un dado; dada una bolsa con bolitas, responder qué bolita tiene más posibilidades de salir, etc. Así, por medio de la realización de experimentos aleatorios con bolitas, fichas de colores, monedas, ruletas, etc. (figura 3), los alumnos irán incorporando de forma gradual el lenguaje probabilístico.

Figuras 2 y 3. Situaciones de incertidumbre para fomentar la adquisición de lenguaje probabilístico elemental

3.2. Cuantificación de la incerteza. Un primer paso: los grados de posibilidad

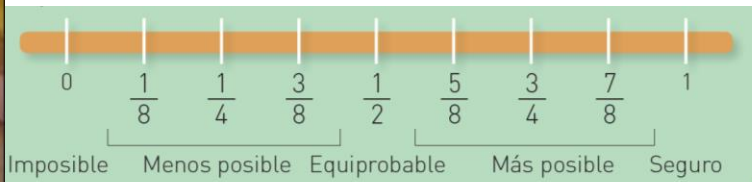
Niveles: 6-8 años

Finalidad: fomentar la expresión de predicciones sobre el comportamiento de ciertos fenómenos y sus resultados.

Contenidos implícitos: grados de posibilidad de ocurrencia de un suceso (imposible, casi imposible, poco posible, posible, bastante posible, casi seguro y seguro).

Contextos de aprendizaje: situaciones de vida cotidiana y materiales manipulativos (imágenes, etc.).

Desarrollo: Se organizan los alumnos en grupos de 4 ó 5 y se entrega a cada grupo un conjunto de situaciones que deben clasificar según el grado de posibilidad de que ocurra cierto resultado (figura 4). Posteriormente, mediante el planteamiento de buenas preguntas, se fomenta que los alumnos comprendan que las situaciones catalogadas como “imposibles” tienen probabilidad de ocurrencia 0, mientras que las situaciones clasificadas como “seguras” tienen probabilidad de ocurrencia 1, vinculando así a los alumnos con la asignación numérica de probabilidad a la ocurrencia de ciertos sucesos. Desde esta perspectiva, otra terea auténtica consiste en plantear a los alumnos que expresen situaciones y las sitúen en la recta numérica que se muestra en la figura 5.



Figuras 4 y 5. Situaciones de incertidumbre para fomentar la cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un hecho

3.3. Experimentación y probabilidad de ocurrencia

Niveles: 8-10 años

Finalidad: organizar la recogida de datos de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

Contenidos implícitos: espacio muestral, suceso o evento, experimento aleatorio, probabilidad de ocurrencia, comparación de probabilidades.

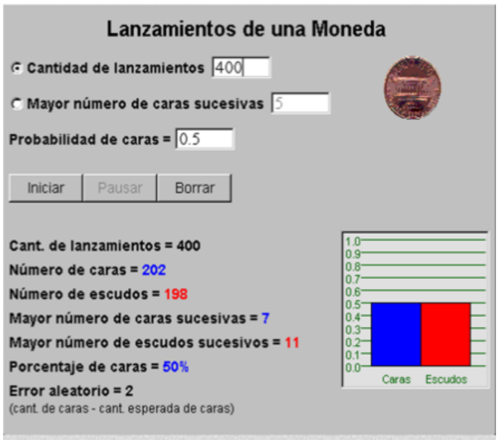
Contextos de aprendizaje: materiales manipulativos (por ejemplo, bolsas con bolitas de colores) y recursos tecnológicos *(applets)*.

Desarrollo: se organiza a los alumnos en grupos de 4 ó 5 y se entregan 3 bolsas con 8 bolitas rojas y amarillas en cada una, distribuidas en distinta proporción (figura 6). Se plantea el experimento de extraer, sin mirar, una bolita amarilla de cada bolsa, acompañado de la realización física del experimento, repetida en múltiples ocasiones, ya que así se dará una justificación práctica a las respuestas que se intuyan a partir del concepto primario de probabilidad al que se puede llegar en estas edades. Se plantean preguntas para que los alumnos discutan sus intuiciones probabilísticas y por medio de la experimentación logren contrastar sus predicciones:

- si tienes que sacar una bola amarilla para ganar un premio, sin mirar dentro de la bolsa, ¿cuál elegirías para hacer la extracción?
- ¿en qué bolsa hay más probabilidades de obtener una bola roja?
- ¿cuántas bolas hay que añadir a cada bolsa y de qué color para que en las tres bolsas exista la misma probabilidad de sacar una bola amarilla?
- Siguiendo este mismo planteamiento, se pueden llevar a cabo experimentos con lanzamientos de monedas, planteando preguntas como por ejemplo:
- ¿si lanzas una moneda diez veces, qué es más probable, que salga más veces cara o más veces cruz?

- ¿y si la lanzas 100 veces?, ¿y 400?

Dado que este tipo de experimentos requiere muchos ensayos, se aconseja el uso de *applets* (por ejemplo, “lanzamiento de monedas” de la Utah State University: http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_305_g_4_t_5.html?from=category_g_4_t_5.ht). Estos recursos permiten a los alumnos, a partir de entornos virtuales, ver el comportamiento de una moneda al ser lanzado, por ejemplo, 400 veces al aire.

Figuras 6 y 7. Situaciones de incertidumbre para trabajar la experimentación y probabilidad de ocurrencia

3.4. Equiprobabilidad, conteo y principio multiplicativo

Niveles: 10-12 años

Finalidad: identificar la equiprobabilidad de los resultados de un experimento aleatorio, a partir de la utilización del principio multiplicativo como regla que simplifica el proceso de conteo.

Contenidos implícitos: equiprobabilidad, conteo del número de resultados de un suceso, espacio muestral, principio multiplicativo (combinatoria), noción intuitiva de la regla de Laplace.

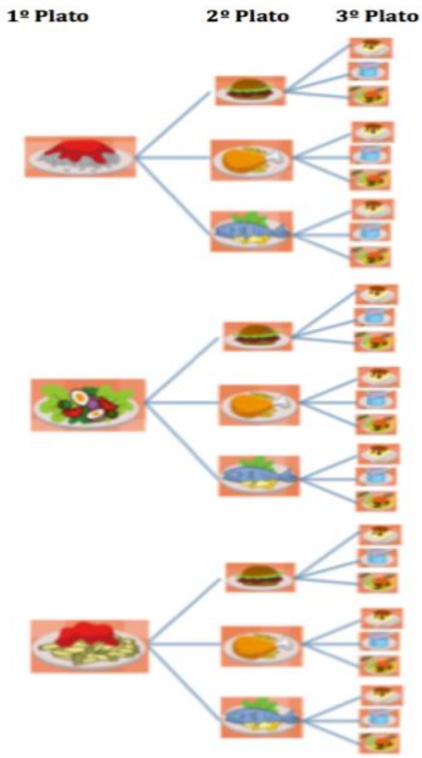
Contextos de aprendizaje: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, etc.

Desarrollo: se plantea a los alumnos una situación que consiste en determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso equiprobable, como por ejemplo elegir un determinado menú en una carta de un restaurante con tres primeros platos, tres segundos platos y tres postres (figura 8). Para ayudar a los alumnos a visualizar y contar las combinaciones posibles, es aconsejable usar como soporte imágenes (tarjetas) con los diferentes platos. A continuación se plantean preguntas del tipo:

- ¿cuántos menús distintos puedes elegir?

- realiza un diagrama para representar los menús.
- si ya has elegido el primer plato y el segundo plato, ¿cuántos menús distintos puedes hacer?

Como se ha indicado, el uso de material concreto en estas situaciones (por ejemplo, tarjetas con los distintos platos), puede facilitar la representación por medio de un diagrama de árbol así como la determinación del espacio muestral para el posterior cálculo de probabilidades de sucesos equiprobables.



Figuras 8 y 9. Situación de incertidumbre para trabajar la equiprobabilidad, el conteo y el principio multiplicativo (combinatoria)

4. Consideraciones finales

En este trabajo se ha puesto de manifiesto la necesidad de fomentar de manera sistemática la alfabetización probabilística desde la etapa de Educación Infantil y durante toda la etapa de Educación Primaria, con el propósito principal de que los alumnos adquieran herramientas que les permitan interpretar adecuadamente situaciones en las que la incertidumbre se hace presente y tomar decisiones al respecto.

A lo largo del artículo se ha puesto de manifiesto que la enseñanza de la probabilidad en las etapas de Educación Infantil y Primaria dista todavía de ser una enseñanza eficaz, en el sentido planteado por el NCTM (2000): “una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien" (p. 17). La falta de una enseñanza eficaz de la probabilidad implica, como se ha indicado, que los alumnos no tengan acceso a conocimientos imprescindibles para poder usarlos de manera comprensiva en las situaciones de su vida cotidiana que implican la interpretación de mensajes probabilísticos y la toma de decisiones. Se ha hecho alusión a que la principal razón que se atribuye a una enseñanza deficitaria de la probabilidad en las primeras etapas educativas es, principalmente, la escasa o nula formación del profesorado y, en consecuencia, su débil conocimiento didáctico y disciplinar (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007; Alsina y Vásquez, 2015). Debe considerarse también que, como consecuencia directa de esta falta de conocimiento didáctico y disciplinar sobre la probabilidad, a menudo la enseñanza de la probabilidad se reduce a la mera instrucción a través de un libro de texto (Stylianides, 2009), sin ofrecer oportunidades a los alumnos para que tengan una verdadera experiencia estocástica.

De ello se desprende que es necesario un mayor desarrollo profesional del profesorado que contribuya a fomentar la alfabetización probabilística en el aula. Y muchos maestros que se sienten responsables del aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos, conscientes de su falta de conocimiento en este ámbito, están pidiendo a voces aportaciones que contribuyan a su propio avance profesional: "los maestros de matemáticas reconocen que su propio aprendizaje nunca termina y buscan siempre mejorar y perfeccionar su conocimiento matemático para la enseñanza, de la educación matemática y su cognición de los alumnos en cuanto aprendices de matemáticas" (NCTM, 2015, p. 99). Siguiendo los planteamientos de autores que, en el contexto de la didáctica de la probabilidad, llevan muchos años realizando aportaciones que contribuyan a esta finalidad (Gal, 2002, 2005, 2012; Batanero y Godino, 2004; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Batanero, Ortiz y Serrano, 2007), nuestro trabajo pretende aportar un grano de arena más para fomentar la enseñanza sistemática de la probabilidad en las aulas. Y de forma más concreta, procurar romper con la instrucción probabilística a partir de situaciones de enseñanza descontextualizadas para avanzar hacia el desarrollo de la alfabetización probabilística a través de tareas auténticas.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN Nº 11150412 financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Bibliografía

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2015). *Cómo fomentar el aprendizaje de las matemáticas en el aula. Ideas clave para la Educación Primaria.* Barcelona: Editorial Casals.

Ball, D. y, Forzani, F. (2011). Building a Common Core for Learning to Teach and Connecting Professional Learning to Practice. *American Educator, 35*, 17–21.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). VI. Estocástica: estadística y probabilidad. En J.D. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 405-455). Departamento de Didáctica de las Matemáticas: Universidad de Granada.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.

Batanero, C., Ortiz, J.J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 44,* 7-16.

Beltrami, E. (1999). *What is random? Chance and order in mathematics and life.* Nueva York: Copemicus/Springer-Verlag.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Chilndren's understanding of probability.* Londres: Nuffield Foundation.

Chapin, S., Koziol, A., MacPherson, J. y Rezba, C. (2002). *Navigating trought Data Analysis and Probability in Grades 3-5*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

CCSSI (2010). Common Core State Standars for Mathematics. Recuperado de: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics.* Nueva York: Copemicus/Springer-Verlag.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children.* Dordrech: Reidel.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Nueva York: Springer.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7) [en línea]. Recuperado de: http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/2088.pdf.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares.* Madrid: Editorial Síntesis.

Langrall, C.W. y Mooney, E.S. (2005). Characteristics of elementary school students's probabilistic thinking. En G. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-120). Nueva York: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L. y Terlektsi, M.E. (2015). *Teaching mathematical reasoning: Probability and problem solving in Primary School.* Oxford: University of Oxford.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* París: OECD.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 37–58.

Rychen, D.S. y Salganik, L.H. (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida.* México: Fondo de Cultura Económica.

Sheffield, L.J., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C.R., Greenes, C. y Small, M. (2002). *Navigating trought Data Analysis and Probability in Prekindergarten-Grade 2.* Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11*(4), 258-288.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48.

Autores:

Alsina, Ángel: **Profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado numerosos artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo múltiples actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina.**
Email: angel.alsina@udg.edu

Vásquez Ortiz, Claudia: **Profesora de Matemática y Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación son la didáctica de la matemática, la didáctica de la probabilidad y la formación del profesorado de primaria.**
Email: cavasque@uc.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 59-78

LA EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS: ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ESCRITAS QUE SE REALIZAN EN LA SECUNDARIA

Janeth Amparo Cárdenas Lizarazo, Lorenzo J. Blanco Nieto,

María José Cáceres García

Fecha de recepción: 28/07/2016
Fecha de aceptación: 19/09/2016

Resumen	Los profesores de matemáticas siguen considerando las pruebas escritas como el principal referente de su evaluación. En ellas se proponen diferentes tipos de tareas con la intención de contrastar los aprendizajes de los estudiantes. Estas tareas son el foco de aprendizaje, trabajo y esfuerzo de los estudiantes para poder aprobar. En busca de identificar el tipo de aprendizajes que se potencian a través de las pruebas escritas, hemos analizado 124 pruebas escritas, elaboradas por 84 profesores de secundaria de la ciudad de Bogotá. Estas pruebas contenían 2483 tareas, de las cuales, 999 eran consideradas problemas por los profesores que las proponían. En ellas se constata que las demandas cognitivas en su mayoría son de un nivel bajo o medio. **Palabras clave**: Exámenes, Matemáticas, Evaluación, Secundaria, Demanda cognitiva.
Abstract	Math teachers still consider the written tests as the main reference of the evaluation. Different types of tasks are proposed in them intended to contrast the students learning experiences. These tasks are the focus of learning, work and effort for students to get pass. Seeking to identify the type of learning enhanced through the written tests, we have analyzed 124 written tests, drawn up by 84 secondary teachers from Bogotá city. These tests contained 2483 tasks, of which 999 were considered problems by teachers that proposed them. In them it is found that cognitive demands are mostly of low or medium level. **Keywords**: Testing, mathematics, assessment, secondary, cognitive demand
Resumo	Professores de matemática continuam considerando as provas escritas como a principal referência de sua avaliação. Nelas se propõem diferentes tipos de tarefas com a intenção de contrastar as experiências de aprendizagem dos estudantes. Essas tarefas tornam-se o foco de aprendizagem, trabalho e esforço dos estudantes para poderem ser aprovados. Em busca de identificar o tipo de aprendizagem que se potenciam por esas provas escritas, analisamos 124 provas escritas, elaborados por 84 professores do Ensino Fundamental II da cidade de Bogotá. Essas provas continham 2483 tarefas, de quais 999 eram consideradas problemas para os professores que as propuseram. Nelas

	se constata que as demandas cognitivas, em sua maioria, são de um nível baixo ou médio.
Palavras-chave: Testes, Matemática, Avaliação, Ensino Fundamental II, demanda cognitiva

1. Introducción

La evaluación aparece en el currículo como una parte integrante del proceso de enseñanza/aprendizaje (E/A), sugiriendo la necesidad de nuevos criterios e instrumentos de evaluación que se adapten a las competencias exigidas para el desarrollo de los estudiantes y a los objetivos, contenidos y metodología específicos de cada materia y nivel. Además, se sugiere que la evaluación tenga en cuenta los nuevos recursos incorporados al sistema educativo.

A su vez, a través de la evaluación los profesores dotan de importancia al contenido matemático y determinan los elementos que consideran primordiales del proceso de E/A (Acevedo, Pérez, Montañez, Huertas, y Vega, 2005) y el papel que juega la evaluación (Prieto y Contreras, 2008). Esto se debe a que el profesor, en el aula, pone un mayor énfasis en el contenido que evaluará con el fin de obtener mejores resultados en las pruebas (Álvarez y Blanco, 2015), y los estudiantes le dan mayor relevancia a los aspectos que los profesores enfatizan y evalúan con regularidad (Lester y Kroll, 1991) centrando en ellos sus esfuerzos.

Así, la evaluación se convierte en un medio de comunicación entre el profesor y el alumno, que determina el qué, el cómo y el cuándo los alumnos estudian/aprenden, ya que ellos seleccionan sus formas de estudiar/aprender para acomodarse a la forma en que serán evaluados (Harlen, 2012). Por lo que, si el profesor no evalúa a sus alumnos alguno de los objetivos de aprendizaje éstos difícilmente lo conseguirán, ya que ellos desplazan su atención y esfuerzo hacia los objetivos que son objeto de evaluación (Abraira, 1993).

2. La evaluación en Matemáticas

Actualmente, en la mayoría de los currículos de matemáticas se considera como objeto de evaluación las competencias. En el caso de Colombia, se considera necesaria la evaluación de los procesos generales para el desarrollo de pensamiento, tales como el razonamiento, la comunicación, la modelación y, elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos y la resolución de problemas, siendo este último asumido también como una competencia. Además, se pone de manifiesto la importancia de evaluar los conocimientos de tipo conceptual y procedimental que se engloban en los estándares básicos de competencias específicas en cada tipo de pensamiento matemático[1] y nivel educativo[2] (MEN, 2006).

La evaluación debería permitir que los estudiantes tengan la oportunidad de mostrar si han integrado el conocimiento y si son capaces de aplicar lo aprendido en diferentes contextos, dónde emplearíamos la resolución de problemas como medio para evaluar. Lo que se hace necesario que el profesorado proponga tareas de un alto nivel de complejidad, que supongan un reto, y que exija a los estudiantes poner en juego su nivel máximo de capacidad (NCTM, 1991). El papel del profesor en la elección de tareas y problemas matemáticos es crucial (NCTM, 2003, p. 56).

En diversas investigaciones los profesores asumen un problema en matemáticas como una actividad que se propone a partir de un enunciado, normalmente escrito, con una estructura cerrada y cuya resolución supone la aplicación inmediata de unos conocimientos (usualmente algorítmicos específicos) previamente adquiridos (Pino y Blanco, 2015, p.81). No obstante, cuando distingue un problema de un ejercicio se debe asociar el problema al uso del pensamiento productivo y el ejercicio al pensamiento reproductivo. Esto hace que un problema cumpla con características diferentes a las que socialmente han sido asumidas: un problema no asume una estructura totalmente cerrada, puede permitir más de una respuesta o admite el uso de diferentes estrategias de solución (Lampert, 1990))

Los problemas pueden ser empleados como un medio a través del cual se evalúa la aplicación contenidos matemáticos. No obstante, en la mayoría de casos, la evaluación de estos contenidos se limita al uso de algoritmos trabajados en clase omitiendo la evaluación de heurísticos o actuaciones propias de la resolución de problemas (Cárdenas, 2014). La selección de contextos y situaciones puede recrear las matemáticas en el mundo real, pero además debería generar la necesidad de hacer uso de aspectos propios de la resolución de problemas, convirtiendo a estos en contenido y objeto de evaluación. De hecho, en el currículo, la resolución de problemas se considera un proceso general que incluye el resto de procesos generales, además de ser considerado como una competencia matemática. En Colombia se presenta como objeto de evaluación.

Evaluar la adquisición de un concepto requiere valorar la asociación de ciertos significados que designan el concepto: imágenes y representaciones externas e internas; propiedades y procedimientos; ejemplos; experiencias asociadas al concepto y relación con otros conceptos (Blanco y Contreras, 2012). Consecuentemente, la evaluación de conceptos y procedimientos no debe basarse en actividades de memoria o de aplicación de procedimientos rutinarios (Brihuega,

---

[1] En el currículo de matemáticas de Colombia, se distinguen cinco tipos de pensamiento matemático: pensamiento numérico, pensamiento algebraico o variacional, pensamiento geométrico, pensamiento métrico y pensamiento estadístico y aleatorio (MEN, 1999, 2006).

[2] La educación de los niños está dada por 11 grados académicos escolares, distribuidos en 5 niveles educativos. En el nivel 1 están los grados de 1º a 3º (de 5 a 8 años), en el 2 están los de 4º y 5º (de 8 a 10), en el 3 están los de 6º y 7º (de 11 a 13), en el 4 los de 8º y 9º (de 13 a 15 años); y, en el nivel 5 los de 10º y 11º (de 15 a 17 años).

2003) que simplifican el aprendizaje matemático. Las matemáticas tienen sentido cuando los estudiantes asimilan sus conceptos y entienden sus significados e interpretaciones, y ello debe ser objeto de evaluación. En esta línea, la evaluación del conocimiento procedimental debe considerar la capacidad de los estudiantes para determinar cuándo y cómo aplicar un algoritmo, así como saber los conceptos y la lógica que los sustentan.

La diferente naturaleza de estas referencias nos sugiere la necesidad de utilizar diversos criterios e instrumentos de evaluación que, además, incorporen el uso de nuevos recursos para la E/A y, específicamente, las tecnologías de la información y comunicación o las tecnologías del aprendizaje y del conocimiento (TIC/TAC).

Además, no debemos olvidar que el aprendizaje de las matemáticas viene influido por diferentes descriptores del dominio afectivo que son considerados explícitamente en el currículo, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación (MEN, 1999). La evaluación del conocimiento matemático debiera incluir una valoración de estos indicadores y del reconocimiento que haga el alumno del papel de las matemáticas (Brihuega, 2003). La investigación en educación matemática muestra que la recogida de información sobre aspectos del dominio afectivo, no suele ir acompañada de registros, siendo poco sistemática y estructurada (Graça, 1995; Rafael, 1998) y poco considerada en la evaluación final.

La consideración de los anteriores aspectos exigiría considerar que “la evaluación no es simplemente un instrumento de control sino un instrumento de perfeccionamiento, dinámico y multidimensional de forma que tenga presente la interacción entre lo cognitivo, la motivación, la autoestima y el aprendizaje” (Cáceres, 2010, p. 94).

2.1. Tipos de contenidos evaluados en matemáticas

La evaluación de las matemáticas incluye la valoración de diversos aspectos al igual que ocurre cuando se habla de la evaluación de la resolución de problemas (Cárdenas, Blanco, Guerrero y Caballero, 2016). Los contenidos que se evalúan a través de las pruebas escritas han de ser similares a los que se enseñan, ya que a través de la evaluación se constatan los aprendizajes de los alumnos, por lo que estos contenidos son de tipo conceptual y procedimental.

Una forma de valorar dichos contenidos podría ser mediante la actualización de la Taxonomía de Bloom hecha por Krathwohl (2002), que se equipara a los rangos de habilidades a evaluar en los estudiantes propuesta por Fortuny (2000). Estos autores establecen una escala de niveles por exigencia o demanda cognitiva (Tabla 1), donde se asume que un nivel superior implica la adquisición de niveles inferiores; así mismo, que un contenido procedimental implica un contenido conceptual (Remesal, 2004). De este modo, las tareas que evalúan el delimitar y concretizar la formulación del problema o utilizar estrategias o heurísticos para su resolución, requiere de otros contenidos de menor nivel, ya sean procedimentales o conceptuales.

Nivel de demanda cognitiva	Las tareas que evalúan contenidos **conceptuales** requieren…	Las tareas que evalúan contenidos **procedimentales** requieren…
Bajo	…recordar información factual, y llegar a identificar y ejemplificar conceptos.	…aplicar de manera directa de algoritmos o técnicas e interpretar o traducir entre lenguajes o formas de representación.
Medio	…establecer relaciones entre conceptos para llegar solucionar dichas tareas.	…identificar el algoritmo o algoritmos a aplicar.
Alto	…explicar o modelar un fenómeno complejo mediante el uso integrado de una red de conceptos interrelacionados.	…delimitar y concretizar la formulación del problema o utilizar estrategias o heurísticos para su resolución.

Tabla 1. Niveles de demanda cognitiva en las tareas de evaluación en matemáticas

En el nivel bajo encontramos las tareas que tienen como objetivo el evaluar la habilidad y eficacia de los alumnos para recordar hechos básicos, definiciones y reglas. Mientras que las actividades que están en el nivel medio evalúan la exactitud de los estudiantes al resolver problemas rutinarios, donde las actividades están centradas en el uso de procedimientos. En el nivel alto se ubican las tareas que evalúan el hecho de hacer matemáticas al tener que hacer uso de formas de razonamiento más complejas.

Es así, como el nivel de demanda cognitiva describe el grado de interconexión entre conceptos y estructuras y, a su vez, indica el grado de complejidad de las operaciones mentales que implican una actividad matemática. A mayor nivel, hay una mayor exigencia en la cantidad de conceptos que se entrelazan en la red conceptual que da respuesta a la tarea propuesta.

2.2. Los profesores ante la evaluación en matemáticas

Entre los miembros de la comunidad educativa se asume que se han desarrollado cambios en la práctica de las matemáticas en el aula y que la evaluación sigue siendo muy tradicional, desvinculando la evaluación del proceso de E/A en tiempos y en espacios (Grupo de Investigación en Evaluación[3], 2008; Cárdenas, Blanco, Gómez, y Guerrero, 2013). Una clave del cambio en la acción didáctica es la evolución de la concepción de la evaluación, y no parece posible un progreso en la docencia si no hay un profundo cambio y desarrollo de ésta idea (Cáceres, 2010).

Es claro que el currículo debiera servir como fuente primaria para la preparación de las clases, la selección de la metodología de enseñanza así como de la evaluación, el profesor será quien decida cuáles son los elementos del currículo que va a incluir en su programación y cómo los desarrollará en pro del aprendizaje de sus alumnos; esta selección la realizará tomando como referencia los criterios que ha adquirido a

[3] El Grupo de Investigación en Evaluación de la Universidad Nacional de Colombia se constituyó en el año 1998, a partir del proyecto de extensión: *Evaluación Censal de Competencias en la Educación Básica en Bogotá*. A partir de ese año trabajó en dos líneas de investigación: la evaluación externa nacional (pruebas SABER, ECAES y de ingreso a la universidad) y la internacional (PISA, TIMMS, LLECE, PIRLS), y la evaluación y la formación docente en educación básica y media.

través de su experiencia o de su formación (Goñi, 2011). Sin embargo, la evaluación la diseñará casi exclusivamente a partir de su experiencia, ya que no suele ser objeto de formación en la formación del profesorado (Cárdenas, 2014).

Los diferentes instrumentos de evaluación que se han empleado a nivel general en la educación, evalúan lo que el alumno dice, hace y escribe (Cárdenas, 2010), pero son usados mayoritariamente los instrumentos que recogen el registro escrito del alumno, ya que además de permitir su implementación de manera masiva en un mismo momento, se puede dejar registro directo de su valoración. Entre ellos se encuentran las guías y los talleres de clase que se implementan durante las sesiones de clase y en las que los alumnos desarrollan diferentes tareas de manera autónoma y en grupo, aunque pueden preguntar las dudas a su profesor, en las guías se hace una breve explicación antes o después de las actividades que se proponen a los alumnos, mientras que en los talleres no se presenta ningún tipo de explicación; y por otro lado, los que se aplican en momentos específicos de evaluación, como los exámenes parciales (quizzes) y exámenes finales que los alumnos han de desarrollar de manera individual y sin el apoyo del profesor.

3. Problema de investigación

En el currículo de Colombia desde 1999 se destaca la necesidad de incidir en el aprendizaje de la resolución de problemas como contenido, y se reitera en el 2006 con los estándares curriculares. Por ello se asume la incorporación de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en las aulas de clase. No obstante, los bajos resultados que se vienen obteniendo en las pruebas PISA dejan esto en entredicho (Tabla 2), ya que el 70% de esta población “solo pueden resolver problemas muy simples en situaciones conocidas, utilizando el ensayo y el error para elegir la mejor alternativa de un grupo de opciones predeterminadas” (OCDE, 2014). Es decir, parece que un gran número de estudiantes colombianos tienen como única herramienta de resolución de problemas el ensayo y error.

Año	Promedio	NIVEL DE LOGRO		
		5 y 6	2, 3 y 4	<2
2006	370	0,4%	18,2%	71,9%
2009	381	0,1%	20,3%	70,4%
2012	376	0,3%	17,8%	73,8%

Tabla 2. Nivel de desenvolvimiento demostrado en las pruebas de matemáticas (PISA).

Ante esta evidencia, nos preguntamos qué conocimientos adquieren los estudiantes colombianos sobre la resolución de problemas de matemáticas durante la enseñanza secundaria.

Si identificamos la evaluación como medio para constatar los aprendizajes adquiridos por los alumnos en las aulas, es posible hacer uso de ésta como mecanismo para detectar aquellos conocimientos que se ponen en juego.

4. Instrumento de investigación, población de estudio y metodología

Reconocemos que a través de la evaluación se dota de importancia el conocimiento matemático y se informa al alumno las matemáticas que él considerará importante aprender. Además, las pruebas escritas son ampliamente empleadas al momento de evaluar, a tal punto que al hablar de la evaluación a los alumnos la primera imagen que se evoca es la del examen. Por ello, para comprobar el aprendizaje de los estudiantes sobre la resolución de problemas en matemáticas vamos a analizar las tareas propuestas en las pruebas de evaluación realizadas por alumnos colombianos de educación secundaria.

Concretamente, revisamos 124 instrumentos de evaluación, en los que se proponen actividades de las que se derivan una o más tareas que el alumno debe responder (Rochera et al., 2001, Cárdenas, Blanco, Caballero y Guerrero, 2015). La unidad de análisis para esta investigación es cada “tarea”, entendida como aquella parte del enunciado que invita al alumno a realizar alguna acción o a dar alguna respuesta, En total revisamos 2483 tareas, de las cuales 999 habían sido propuestas en enunciados “problema” por parte de los profesores.

Para el análisis de los instrumentos de evaluación utilizados se consideraron 4 categorías: Instrumento facilitado, número de actividades a desarrollar, tipo de actividad propuesta, y relación entre las tareas (Tabla 3).

1.Instrumento facilitado	Examen	Opción múltiple con procedimiento (si, no)
		De desarrollo
	Taller	
	Recuperación	
	Olimpiadas	
2.N° de acciones a desarrollar	Nº de actividades	
	Nº de tareas por actividad	
3.Relaciones entre las tareas que forman la prueba	Desde lo superficial	Desconexión formal
		Conexión formal
	Desde el contenido	Tareas independientes
		Tareas dependientes
		Tareas intradependientes
4.Tipo de actividad propuesta	Ejercicio	
	Problema	

Tabla 3. Categorías y subcategorias para el análisis de los instrumentos de evaluación.

Y otras cuatro categorías fueron empleadas para el estudio de las tareas: tipo de actividad propuesta, nivel y demanda cognitiva, soporte comunicativo empleado y el implicado y naturaleza de la tarea (Tabla 4).

	Conceptual	Recuerdo directo de información factual
		Identificación y ejemplificación entre conceptos
		Establecimiento de relaciones entre conceptos

5.Tipos de contenido evaluado/ Exigencia cognitiva en la tarea		Explicación/modelización de un fenómeno complejo mediante el uso integrado de una red de conceptos interrelacionados	
	Procedimental	Aplicación directa algoritmos o técnicas	
		Interpretación/traducción entre lenguajes o formas de representación/conversión	
		Identificación de algoritmo a aplicar y aplicación del mismo	
		Identificación y aplicación encadenada de algoritmos a aplicar	
		Delimitación y concreción de la formulación del problema y/o utilización de estrategias o heurísticos para su resolución	
	Metacognitivo	Verificación de capacidades, habilidades, dificultades…	
		Autoevaluación de capacidades, habilidades, dificultades…	
6.Soporte comunicativo utilizado. 7.Soporte comunicativo implicado	Verbal		
	Numérico		
	Tabla		
	Imagen		
	Gráfico		
	Recurso manipulativo		
8.Naturaleza de la tarea	Contexto en que se inscribe la tarea	Real	
		Realístico	
		Ficticio	Situación no real
			Matemáticamente no describe la situación
		Intramatemático	Matemático
			Recreativo
	Definición del punto de partida de la tarea. Datos e informaciones que se ofrecen	Datos necesarios y suficientes	
		Datos irrelevantes o redundante	
		Datos insuficientes	
	Demanda explicita de emplear más de un proceso en la resolución de la tarea		
	Demanda explicita de obtener más de una solución/producto como resultado de la tarea		
	Demanda explicita de justificación en la respuesta		

Tabla 4. Categorías y subcategorias para el análisis de las tareas de evaluación.

Para el diseño de los instrumentos de análisis se partió del trabajo de Rochera et al. (2001), si bien ha sido necesario ampliar algunas subcategorías en busca de caracterizar todos los tipos de tareas. Por ejemplo, para las demandas cognitivas, hemos tenido que ampliar la subcategoría a contenidos metacognitivos y establecer en ellos dos subniveles: la autoverificación y la autovaloración. En esta última no solo es necesario reconocer si se cuenta con las capacidades solicitadas (autoverificación) sino que además se debe ser capaz de definir el nivel de facilidad o de dificultad (autovaloración).

5. Resultados y discusión

Con el fin de identificar el tipo de aprendizajes que se potencian a través de las pruebas escritas en este apartado presentamos describimos el tipo de prueba escrita que los profesores consideran más representativo a la hora de evaluar la resolución de problemas, así como la estructura que estas tienen, los contenidos temáticos y el nivel de exigencia de la demanda cognitiva y hacemos una breve discusión partiendo de los resultados que se han encontrado en investigaciones similares desarrolladas en España, Portugal y Colombia.

5.1. Tipos de instrumentos de evaluación empleados

Los instrumentos de evaluación aportados por los docentes han sido diversos a diferencia de lo que sucede en el nivel universitario, donde sólo se suele hacer entrega de exámenes (Jarero, Aparicio y Sosa, 2013; Álvarez y Blanco, 2015), aunque el porcentaje de representatividad de los exámenes es bastante alto 71,7%; el resto son talleres o guías de clase.

Si bien el examen no es el único instrumento de evaluación que utilizan, investigaciones previas reflejan que los profesores consideran éste como la actividad de evaluación más objetiva, segura, rigurosa y fiable (Rafael, 1998; Rochera, Colomina, y Barberá, 2001), de fácil aplicación a todos los alumnos simultáneamente permitiendo medir/mostrar/valorar sus conocimientos y habilidades (González, 2012).

Al igual que en otras investigaciones desarrolladas en Colombia sobre la evaluación (Grupo de Investigación en Evaluación, 2008) encontramos que todos los exámenes siguen el mismo esquema de los exámenes estatales y que se aplican solamente al finalizar cada nivel escolar. En ellos, los alumnos se limitan a seleccionar su respuesta entre cuatro opciones y no requiere que pongan en evidencia una justificación o el procedimiento seguido para llegar a la solución.

5.2. Estructura y proporción entre las actividades y tareas

En la mayoría de las actividades propuestas en los diversos instrumentos de evaluación se advierte una falta conexión formal entre las tareas que las componen, dado a que estas no se desglosan de un mismo contexto. Dicha situación ocurre en un 89% de las actividades de evaluación, siendo ésta una característica fundamental en todos los exámenes y, en menor número, en las guías y talleres.

A su vez, las tareas propuestas en los exámenes son tareas totalmente independientes entre ellas, ninguna pregunta depende de la respuesta de otra pregunta, y en muchas ocasiones no se refieren a un único contenido. Mientras que en las guías y talleres sucede todo lo contrario. Esto se puede deber a que estos instrumentos persiguen objetivos diferentes, con las guías y los talleres se busca la apropiación de contenidos y con los exámenes se buscan evaluar diferentes objetivos, aunque en ambos casos las producciones de los alumnos son calificadas.

En cuanto a la cantidad de tareas propuestas en los exámenes vemos que es menor que en el resto de actividades de evaluación. En promedio se proponen 10 tareas en los exámenes, mientras que las guías y talleres contienen en promedio 25 tareas. Esta diferencia no es directamente proporcional con el porcentaje correspondiente en la nota definitiva, al igual que en el estudio de Jarero et al. (2013), el examen tiene un mayor peso en la calificación final.

Las tareas que se proponen en los exámenes se presentan haciendo uso de diferentes formatos, sin ser excluyentes entre sí, lo que dota de claridad al enunciado y facilita la tarea propuesta. Entre las tareas que los profesores consideraban problema, estos se proponen haciendo uso de 4 formas de representación, donde el lenguaje verbal y el numérico son los que se emplean por excelencia, esto es un 94% de las tareas emplea el lenguaje verbal, un 75% el numérico, un 27% el gráfico y un 24% el tabular.

Estos resultados son similares a los encontrados en el estudio hecho por Remesal (2006), quien afirma que esto se debe a que los profesores tienen asumida como definición de problema todas aquellas tareas presentadas con una consigna textual narrativa. Esta percepción es coincidente con la idea de problema que manifiestan profesores en formación (Blanco, Guerrero, y Caballero, 2013). Este predominio en el uso de lenguaje verbal-numérico se da también en los estudios realizados sobre tareas propuestas en libros de texto, donde el uso de tablas, gráficas e imágenes es escaso (Pino y Blanco, 2009).

En cuanto al uso de las gráficas en las tareas consideradas problemas por los profesores, encontramos que un 8% de ellos son imágenes que no dan información relevante, y que en términos de Pino y Blanco (2009) son empleadas como el elemento que dota de “vistosidad” al material de trabajo.

El Contexto recreado en las tareas problema en su mayoría contienen contextos realísticos (39%) e intramatemáticos (35%). También encontramos tareas que se recrean en contextos ficticios (19%), siendo estos enunciados en los que el uso de las matemáticas, que se requieren pierden sentido dada la forma en que se establece la pregunta o al uso de contextos inadecuados o sin sentido (Cárdenas, 2014). El uso exclusivo de contextos intramatemáticos y ficticios no favorece a las conexiones que se pueden hacer entre las matemáticas escolares y la realidad, ya que pueden limitar el sentido y el significado de las actividades y de las matemáticas (Schoenfeld, 1988, Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen y Doorman, 2015).

5.3. Contenidos y nivel de exigencia de las demandas cognitivas evaluadas

5.3.1. Contenidos curriculares

En relación con el tipo de contenidos evaluados (conceptuales, procedimentales y metacognitivos), y la exigencia cognitiva en las tareas, retomamos los cinco tipos de contenidos que los profesores afirman evaluar y que están descritos en los estándares curriculares en matemáticas (MEN, 1998, 2006), la resolución de problemas, como contenido específico por ser objeto de estudio, además de la lógica y los conjuntos que han sido contenidos encontrados en los instrumentos de evaluación facilitados por los docentes.

Al igual que la investigación hecha por Remesal (2006), esta clasificación no es disjunta, ya que una misma actividad evalúa más de un contenido curricular. Esto también lo afirman los profesores, por ejemplo, el profesor 0515AM04 señala que con el enunciado que se presenta en la Figura 1, "él evalúa la comprensión (…) como un proceso importante de la resolución de problemas y la definición de número natural como parte del pensamiento numérico".

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar so las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de cantidades. Entre los números naturales están definidas las operaciones de adición y multiplicación. Además, el resultado de sumar o de multiplicar dos números naturales es también un número natural, por lo que se dice que son operaciones internas.

1. Los números naturales son:
   A. los que representan las letras
   B. Los primeros que surgen en las distintas civilizaciones
   C. Los que cuentan y ordenan las cosas
   D. Números que sirven para sumar y multiplicar

Figura 1: Tarea en la que se evalúa más de un contenido.

En la Tabla 2 es posible observar que la evaluación de la resolución de problemas es la que aparece en primer lugar en el porcentaje global (75,8%). Esto puede ser consecuencia de la relación que llega a establecer el profesor entre sus prácticas de evaluación y nuestro objeto de estudio, provocando en ellos cierta respuesta de deseabilidad social a la hora de detallar el material facilitado, tal y como se intuye en la investigación de Remesal (2006). Sin embargo, cabe destacar que la evaluación de la resolución de problemas en los ciclos 3 y 4 es alta, y se hace menor en el ciclo 5. Al entrar en detalle, se puede observar que en el nivel que menos se evalúa la resolución de problemas es en grado 11 (44,4%).

	Ciclo 3	6	7	**Ciclo 4**	8	9	**Ciclo 5**	10	11	**Total global**
Resolución de problemas	35	19	16	38	20	18	21	13	8	94
	79,5%	76%	84,2%	80,9%	74,1%	90%	63,6%	86,7%	44,4%	75,8%
Numérico	38	21	17	31	18	13	16	6	10	85
	86,4%	84%	89,5%	66,0%	66,7%	65%	48,5%	40%	55,6%	68,5%
Espacial	14	9	5	22	8	14	16	12	4	52
	31,8%	36%	26,3%	46,8%	29,6%	70%	48,5%	80%	22,2%	41,9%
Métrico	7	6	1	4	1	3	1	1		12
	15,9%	24%	5,26%	8,5%	3,7%	15%	3,0%	6,67%		9,7%
Variacional	13	10	3	38	20	18	32	15	17	83
	29,5%	40%	15,8%	80,9%	74,1%	90%	97,0%	100%	94,4%	66,9%
Aleatorio	1	1		2		2	3	2	1	6
	2,3%	4%		4,3%		10%	9,1%	13,3%	5,6%	4,8%

	5	3	2	4	1	3	5	3	2	14
Estadístico	11,4%	12%	10,5%	8,5%	3,7%	15%	15,2%	20%	11,1%	11,3%
	3	2	1	4		4	6	3	3	13
Lógica	6,8%	8%	5,26%	8,5%		20%	18,2%	20%	16,7%	10,5%
	2	2		2	2		4		4	8
Conjuntos	4,5%	8%		4,3%	7,41%		12,1%		22,2%	6,5%

Tabla 2. Número y porcentaje de instrumentos que evalúan alguno de los contenidos matemáticos enunciados por los profesores

Otras cuestiones que se evalúan mayoritariamente en secundaria refieren al pensamiento numérico y sistemas numéricos con el 68,5%, y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos con el 66,9%. Sin embargo, el porcentaje de la evaluación de estos, varía considerablemente según el ciclo. En ciclo 3 el énfasis se pone mucho más en lo numérico que en lo variacional; mientras que en ciclo 4 y 5, sucede lo contrario. Estos resultados van muy de la mano con las exigencias dadas en los estándares curriculares (ver MEN, 2006).

Lo que menos se evalúa en matemáticas son las cuestiones sujetas al pensamiento métrico y los sistemas de medidas (9,7%), al pensamiento aleatorio y los sistemas de datos (4,8% y 11,3% respectivamente), la lógica (10,5%) y la teoría de conjuntos (6,5%). Acá destacamos que la lógica proposicional y la teoría de conjuntos, son aspectos que no se mencionan en el currículo como tópicos o temas a ser tratados. Y su porcentaje de evaluación es similar al porcentaje de evaluación de los pensamientos métrico y aleatorio, y los sistemas de medida y de recolección de datos, los cuales sí son enunciados en el currículo.

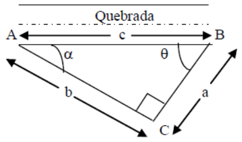
5.3.2. Tipo de contenido y exigencia cognitiva evaluada

En esta investigación encontramos que los profesores presentan interés por evaluar tres tipos de contenidos: conceptuales, procedimentales y metacognitivos con un predominio muy marcado sobre la evaluación de lo procedimental. En cuanto a las exigencias cognitivas, al clasificarlos por niveles (Tabla 1), en los contenidos de carácter conceptual se visualiza que hay un énfasis marcado sobre la certificación de aprendizajes de tipo memorístico y en las de tipo procedimental se llega a la identificación del algoritmo a aplicar (nivel medio).

De entre las 2483 tareas propuestas, los profesores señalaron que 999 tareas son específicamente problema. Resaltamos que al revisar las tareas que los profesores manifiestan que son actividades tipo problema, podríamos encuadrarlas dentro de lo que Schoenfeld (1985) define como ejercicio.

Solo 81 de las 999 tareas que se consideran problema evalúan lo conceptual. De ellas, la mayoría (59%) recurren al recuerdo de información de memoria. El 43% de las tareas piden ejemplificar algún concepto; y un 14,6% exigen el recuerdo de información factual, aspectos que se corresponden con la demanda de un nivel cognitivo bajo. A continuación se muestra un ejemplo de problema conceptual que demanda un nivel cognitivo bajo (Figura 2).

Don Julián es un humilde trabajador del corregimiento de San Cristóbal, hereda una parcela, después de un litigio con sus hermanos, un topógrafo le entrega el siguiente plano de la parcela con los siguientes datos:



b=4 Km, a=3 Km, α=41°, Por c pasa una quebrada. Don Julián consulta al profesor Omar López sobre los detalles entregado por el topógrafo, el profesor hábilmente les formula a las estudiantes del grado décimo las siguientes preguntas:

6. El triangulo ABC es:
a. Acutángulo
b. Equilátero
c. Isósceles
d. Rectángulo

Figura 2: Tarea de nivel cognitivo bajo.

En el nivel cognitivo medio, se encuentra la tarea de establecer relaciones entre conceptos, y es escasamente evaluada (27%). Estas tareas se pueden resolver a partir del recuerdo de información, pero también se puede llegar a la respuesta a partir del establecimiento de relaciones entre los conceptos puestos en juego (Figura 3).

3. Uno de los siguientes triángulos cumple con la razón trigonométrica csc β = 15/12

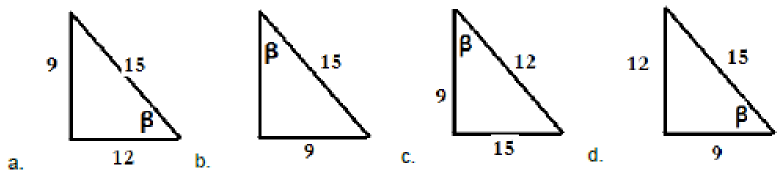


Figura 3: Tarea de nivel cognitivo medio.

En cuanto a la tarea que requiere un alto nivel cognitivo, explicar o modelar mediante una red integrada de conceptos un fenómeno no se encontró ninguna en los exámenes, si bien cabe destacar que este nivel es demandado en el 15% de las tareas propuestas y todas ellas fueron planteadas en las guías o talleres (Figura 4).

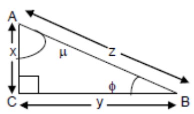
Elabora una descripción de cómo aumenta el número de bacterias a medida que varia la temperatura

Figura 4: Tarea de nivel cognitivo alto: uso de una red integrada de conceptos para explicar un fenómeno

La mayoría de las tareas problema evalúan contenidos procedimentales (porcentaje) y habitualmente demandan a los estudiantes el ser capaz de identificar el algoritmo con el cual se puede resolver la tarea propuesta.

Entre las demandas de nivel cognitivo bajo está la aplicación directa de un algoritmo o técnica, esta demanda se ejemplifica en la Figura 5; y la interpretación-traducción entre lenguajes o formas de representación (Figura 6).

DADO EL TRIANGULO ABC CON ϕ = 29° Y y = 5 cm



14. Cot ϕ en el triangulo ABC es:
a. 2.06 cm
b. 0.48 cm
c. 0.55 cm
d. 1.80 cm

Figura 5: Tarea de nivel cognitivo bajo. Tipo 1.

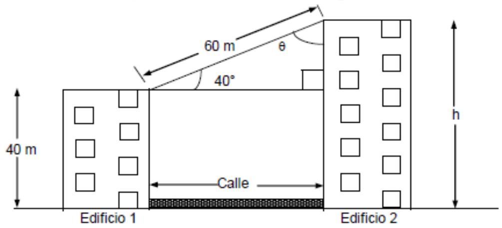
1. Elija la equivalencia que es correcta:

a. 1 π radian equivale a 90 grados
b. 0,16 revoluciones equivalen a 1/3 π radianes
c. 60 grados equivalen a 1/6 π radianes
d. 35 grados equivalen a 0,1 revoluciones

Figura 6: Tarea de nivel cognitivo bajo. Tipo 2.

En cuanto a las tareas que implican un nivel cognitivo medio (67%), vemos que la mayoría de las tareas propuestas son las que refieren a la identificación y aplicación de un algoritmo (54,3%), y en menor medida se dan en las que se tienen que emplear varios algoritmos (12,7%) para resolver la tarea solicitada; en la Figura 7 se ejemplifican este tipo de actividades.

RESPONDA LAS PREGUNTAS 1 Y 2 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN: La distancia entre 2 edificios de techo plano es 60 m. Desde la azotea del menor de los edificios, cuya altura es 40 m, se observa la azotea del otro con un ángulo de elevación de 40°, como se muestra en la figura:



1. El ancho de la calle es igual a:
a. 4,59 m
b. 45,96 m
c. 459,62 m
d. No es posible calcular la distancia de la calle con los datos suministrados

2. La altura h del edificio 2 es igual a:
a. 78,57 m
b. 85,96 m
c. 45,96 m
d. 84,52 m

Figura 7: Tarea de nivel cognitivo medio. Tipo 1 (ítem 1); Tipo 2 (ítem 2)

En la Figura 8 se ejemplifica una tarea de nivel cognitivo alto. En este nivel se pide la delimitación y la concreción de la formulación de un problema o la utilización de heurísticos para su resolución. Este tipo de tareas son las que menos se evalúan (8%).

2. Una ardilla tiene su madriguera en un árbol y realiza los siguientes desplazamientos: baja 2m, sube 5m, baja 4m. Para determinar el sitio del árbol en que se encuentra la ardilla al finalizar el recorrido, debemos:
A. Conocer la altura del árbol y la altura de la madriguera.
B. realizar un gráfico de los desplazamientos que hizo la ardilla.
C. Hallar el número total de los metros que subió y bajó la ardilla.
D. restarle a los metros que subió la ardilla los metros que esta bajó.

Figura 8: Tarea de nivel cognitivo alto.

Por último, en los exámenes no hemos encontrado evidencias que indiquen la necesidad de evaluar lo metacognitivo, si bien, entre las guías y talleres hemos encontrado 4 tareas en 2 actividades propuestas por un mismo profesor (Figura 9).

A modo de resumen, vemos que los resultados obtenidos en nuestra investigación sobre la evaluación de la resolución de problemas en matemáticas, sigue estando marcada por el predominio de ejercicios más que de problemas, que siguen la estructura de los denominados “problemas tipo”, se desliga el uso de las matemáticas escolares con el mundo real al hacer un mayor uso de contextos no reales. Así mismo, las demandas cognitivas son en mayor medida a un nivel bajo, en lo conceptual, y medio bajo en lo procedimental. Estos resultados no discrepan de otras investigaciones hechas sobre este tema, como la realizada en Barcelona por Remesal (2001).

Elija la opción que considere correcta a la pregunta

Dados los números naturales K y J, tales que:

k>j>0. Se definen k! y j! como:

k! = 1x2x3x···x(k-1)xk

j! = 1x2x3x···x(j-1)xj

se establece p= k!/j!

Sobre los posibles divisores de p se tiene que:

A.Los únicos divisores de p son los número menores a k-j

B. a es divisor de p, si k>a>j+1

C.j es el único divisor de p ya que p=qj, qϵN.

D.Todo número menor a K, a excepción de j, es divisor de p.

Opción elegida (1): ________

Opción elegida (2): ________

Espacio de trabajo

1. ¿Comprende lo que se pide en la pregunta?
2. Palabras que no entiende o desconoce

Figura 9: Tarea de tipo metacognitivo

En cuanto al uso del examen como instrumento principal de evaluación, vemos que sigue siendo predominante, según afirman los docentes porque es forma rápida e individual para evaluar a todos los alumnos. Además se pone en evidencia que el examen sigue llevando un mayor peso en la calificación final.

Por su estructura, se destaca que el examen privilegia la solución sobre algún proceso, ya que para dar la solución basta con marcar la respuesta que se considera correcta. Esto lleva a que los análisis o procedimientos se puedan omitir y que la respuesta del estudiante termine siendo dada al azar.

Finalmente, es posible observar que en las pruebas escritas predomina la evaluación de aspectos procedimentales sobre los conceptuales y se observa una ausencia casi total de aspectos afectivos. Así mismo se pone en evidencia el no uso de las TIC/TAC, siendo un aspecto que se viene exigiendo con mayor preponderancia en el currículo y en las necesidades y en los ámbitos socio-culturales.

6. Conclusiones, implicaciones y prospectivas

Podemos concluir, a modo general, que, los resultados encontrados en Bogotá/Colombia no distan de los encontrados en países como Portugal y España. Por ejemplo: no se visualiza una evolución ni una diferencia significativa entre el tipo de tareas de evaluación que se proponían hace más de 20 años en Barcelona, y en los últimos años en Badajoz. Esto se debe a que, en los exámenes, las tareas que los profesores plantean como problema, se sigue priorizando la aplicación y la ejercitación de algoritmos del contenido curricular sobre el cual se ha trabajado en ese nivel educativo, proponiendo en menor medida tareas que inviten al alumno a hacer uso del razonamiento, la comunicación, la modelación y el uso de heurísticas y del modelo general de resolución de problemas.

Las evidencias obtenidas a través de este estudio muestran que las exigencias y los avances en las demandas educativas, políticas y sociales sobre la evaluación de la resolución de problemas en matemáticas no han sido tenidas en cuenta (Cárdenas, 2014), ya que usualmente se pregunta por cuestiones memorísticas o en las que se evoca el uso de un algoritmo para resolver una tarea en las que normalmente se responde de forma numérica. Para ello, se hace uso casi siempre de situaciones cerradas, descritas en contextos ficticios o intramatemáticos donde el lenguaje verbal y numérico son empleados por excelencia.

Vemos problemático el hecho de que las tareas están inscritas en contextos que fortalecen la idea en los estudiantes de que las matemáticas son una ciencia alejada y desvinculada de la realidad. Además que no se proponen situaciones abiertas de las que se puedan desglosar varias tareas y donde se pongan en juego diferentes competencias y procesos generales al evaluar varios contenidos matemáticos. Por lo que nos es posible afirmar que la evaluación a través de las pruebas escritas difícilmente asume las diversas cuestiones establecidas en los currículos de matemáticas.

El hablar de la resolución de problemas como contenido no se limita al hecho de encontrar el algoritmo para resolver la tarea, se trata realmente de hacer matemáticas. Asumimos la posibilidad de que este tipo de tareas se desarrollan en el transcurso de las clases y de un modo u otro han de ser evaluadas y calificadas, por lo que se hace necesario entrar a indagar si la evaluación de la resolución de problemas se desarrolla en tareas de evaluación continua de las cuales los profesores no llevan registros o si realmente se asume la evaluación de la resolución de problemas bajo lo que los profesores conciben como problema, aunque esto no lo sea.

Los resultados obtenidos, así como los referentes teóricos, nos revelan un estancamiento en las tareas de evaluación propuestas en las pruebas escritas, más específicamente en los exámenes. Si asumimos la influencia que ejerce la evaluación y, en sí el examen final, sobre la motivación y el esfuerzo de los estudiantes sobre su aprendizaje, se hace necesario profundizar sobre la evaluación y el tipo de tareas que se proponen en los exámenes en busca de desarrollar herramientas y programas de formación que permitan incidir en la práctica profesional del profesor de matemáticas.

Bibliografía

Abraira, C. (1993). Efectos de la evaluación formativa en alumnos de matemáticas de E.U. de profesorado de E.G.B. (Tesis Doctoral). Universidad de León.

Acevedo, M., Pérez, M., Montañez, J., Huertas, C. y Vega, G. (2005). Propuesta para la actualización teórica de las pruebas saber y de estado. Bogotá: ICFES.

Álvarez, R. (2011). *Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º de ESO* (Trabajo final de máster no publicado). Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

Álvarez, R. y Blanco, L.J, (2015). Evaluación en Matemáticas: Introducción al Álgebra y Ecuaciones en 1º ESO. *UNION [en línea], 42,* 133-149. Recuperado el 3 de enero del 2016, de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42_Artigo6.pdf

Barberá, E. (2000). Los instrumentos de evaluación en matemáticas. *Aula de innovación educativa, 93-94*, 14-17.

Blanco, L.J., y Cárdenas, J.A. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto,* 32(1), 137-156. Recuperado el 15 de agosto del 2013 de: http://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1393/889

Blanco L.J. y Contreras, L.C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *UNION [en línea] 30,* 101-123. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_11_de_volumen_30.pdf

Blanco, L.J.; Guerrero, E. y Caballero, A. (2013) Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. *The Mathematics Enthusiast.* Vol.10, No. 1 y 2. 335 – 364. Recuperado en: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf

Brihuega, J. (2003). *La evaluación en Matemáticas. Recuperado en noviembre del 2013 de:* http://roble.pntic.mec.es/~jbrihueg/ordidart.htm#eval

Cáceres, M.J. (2010). *Las reflexiones que los maestros en formación incluyen en su portafolios sobre su aprendizaje didáctico matemático en el aula universitaria.*

(Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Salamanca. Salamanca, España. http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76373/1/DDMCE_CaceresGarciaMJ_FormacionMaestrosMatematicas.pdf

Cárdenas, J.A. (2014). *La evaluación de la Resolución de Problemas en Matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria.* (Tesis Doctoral no publicada) Universidad de Extremadura. Badajoz, España. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/2050

Cárdenas, J.A., Blanco, L.J., Gómez, R. y Guerrero, E. (2013). Resolución de Problemas de Matemáticas y Evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En Mellado, V., Blanco, L.J., Borrachero, A. y Cárdenas, J. *Las emociones en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias y las matemáticas.* Grupo DEPROFE. Badajoz. Capítulo IV. 67 – 88. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/dcem/Capitulo04.pdf

Colomina, R.; Onrubia, J. y Naranjo, M. (2000). Las pruebas escritas y la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 3(2)*.

Coll, J., Barberá, E. y Onrubia, J. (1999). Analyzing mathematic written exams in elementary and secondary schools. *Actas de la 8th European Conference of the Association for Research on Learning and Instruction*. Agosto. Göteborg.

Chamorro, C. y Vecino, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas.* (pp. 273-299). Madrid, España: Pearson. Prentice Hall.

Díaz, M.V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemátics en el aula. *Revista números 45*, 33 – 41

Fortuny, J.M., Giménez, J. y Alsina, C (1994). Integrated assessment on mathematics 12–16. *Educational Studies in Mathematics 27*(4), 401-412

Godoy, L. (2013). *Evaluación en Matemáticas: Análisis de exámenes de Geometría en 3º de ESO* (Trabajo Final de Máster no publicado). Universidad de Extremadura.

González, J. (2012). *¿Qué prueba una prueba escrita de matemáticas? Un breve estudio sobre la inferencia de atributos educativos a partir de las características y contenidos de las respuestas del estudiante en las pruebas escritas de matemáticas* (Trabajo Final de Máster no publicado). Universidad de Extremadura.

González, S.; Martín-Yague, M.C. y Ortega, T. (1997). Propuesta y análisis de una prueba de evaluación. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. 11*, 55-78

Goñi, J. (2011). Las finalidades del currículo de matemáticas en secundaria y bachillerato. En J.M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp.9-25). Barcelona: Grao

Graça, M.M. (1995). *Avaliação da resolução de problemas: Contributo para o estudo das relações entre as concepções e as praticas pedagógicas dos professores* (Tese de mestrado nâo publicado) Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Grupo de Investigación en Evaluación (2008). *Informe de avance.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Harlen, W. (2012). The role of assessment in developing motivation for learning. En J. Gardner (Ed.), *Assessment and Learning* (pp. 171-183). California: Sage.

Jarero, M., Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16*(2), 213-243. DOI:1012802/relime.13.1623

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29–63.

Lester, K.L. & Kroll, D.L. (1991). Evaluation: a new vision. *Mathematics teacher, 84*(4), 276-284

Ministerio de Educación Nacional –MEN- (1998). *Lineamientos Curriculares para matemáticas. Serie Lineamientos Curriculares.* Bogotá: MEN.

MEN (2006). *Estándares Curriculares en Matemáticas.* Bogotá: MEN.

National Council of Teachers of Mathematics -NCTM- (1991). Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM e IIE (original em inglês, publicado em 1989).

NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Granada: Imprime Proyecto Sur Industrias Gráficas, S. L., Armilla.

Pino, J. y Blanco, L.J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad, *Publicaciones* 38, 63-88.

Prieto, M., y Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: Un problema a develar. Estudios Pedagógicos, XXXIV(2), 245-262.

Rafael, M.A. (1998). *Avaliação em Matemática no ensino secundário: Concepções e práticas de professores e expectativas de alunos* (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Remesal, A. (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos.* (Tesis doctoral no publicada) Universidad de Barcelona. Barcelona: España. Recuperado de *http://www.tdx.cat/handle/10803/2646;jsessionid=ACD8B1DD35A82F2F30D5D535E5484FCE.tdx1*

Rochera, M.J.; Colomina, R. & Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. En *Investigación en la Escuela, 45*.

Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of “well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*, 145–166.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*, 41-65.

Autores:

Cárdenas Lizarazo, Janeth Amparo: Doctora en Didáctica de las Matemáticas**.** Docente de la Universidad de Zaragoza en el Área de Didáctica de las Matemáticas en la Facultad de Educación. jacarliz@unizar.es

Blanco Nieto, Lorenzo Jesús: Trabajó como Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemáticas. Dpto de Dtca. De las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura. Badajoz. Actual director y fundador de la revista Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM).

Cáceres, María José: Doctora en Didáctica de las Matemáticas**.** Contratado Doctor en Didáctica de la Matemáticas del Dpto de Dtca. de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura. Cáceres.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 79-102

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ESTUDIO DE PROCESOS DE FORMULACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN INTERACCIÓN CON PARES

Ana María Mántica, Ana Laura Carbó

Fecha de recepción: 09/08/2016
Fecha de aceptación: 30/10/2016

Resumen	Se presenta el análisis de lo actuado por un grupo de estudiantes de una escuela secundaria, al formular una conjetura y validarla, en una actividad en la que se pretende que establezcan que con dos lados no es posible construir un único triángulo. Conscientes que cuando se conoce el proceso de producción de la demostración se puede tomar una decisión acerca de su validez efectiva y de su nivel, realizamos el estudio utilizando registros etnográficos, audio, artefactos escritos y videos, de lo producido durante la resolución de la tarea. Se realizan clasificaciones de los niveles de prueba alcanzados. Uno de los principales medios que transforman una situación de argumentación en una situación de prueba es someterla al debate para garantizar o desconocer su validez. Se observa cómo actúan los estudiantes al producir soluciones comunes. **Palabras clave**:Conjetura – Procesos de Prueba - Interacciones – Triángulos
Abstract	In the following study it is presented the analysis of what has been done by a group of students at a secondary school, to formulate a conjecture and validate it, in an activity in which it is intended to establish that with two sides is not possible to build a single triangle. Being aware of knowing the process of production of the proof can take a decision on its validity and its effective level, the study was performed using ethnographic records, audio, videos and written artifacts, produced during the resolution of the task. Classifications of the test levels achieved were done. One of the most important ways that transform a situation of arguments in a test situation to submit it to the discussion to ensure or ignore its validity. It is seen as acting students when it has to produce common solutions. **Keywords :**Conjecture - Validation processes – Interactions – Triangles
Resumo	Neste artigo se apresenta uma análise da atuação de um grupo de estudantes de uma escola do Ensino Médio, ante uma formulação e avaliação de uma conjectura, em uma atividade em que se pretende estabelecer que com dois lados não é possível construir um único triângulo. Consciente que quando se conhece o processo de produção da demonstração se pode tomar uma decisão sobre a sua validez efetiva

	e o seu nível, realizamos o estudo utilizando registros etnográficos, áudio, artefatos escritos e vídeos, produzidos durante a resolução da tarefa. Foram feitas classificações dos níveis de prova. Um dos principais meios que transformam uma situação de argumento em uma situação de prova é levar a debate para garantir ou desconhecer a sua validez. Se observa como atuam os estudantes quando têm que produzir soluções comuns. **Palavras chave**: Conjecturas- Processos de Validação – Interações – Triângulos

1. Introducción

Presentamos el análisis de las interacciones entre estudiantes de segundo año, 14-15 años, de escuela secundaria al momento de realizar actividades de validación de un problema geométrico en un entorno de lápiz y papel, con el propósito de estudiar los tipos de pruebas que utilizan en el proceso de formulación y validación de conjeturas.

Entendemos la actividad de validar como la realización de dos procesos. En el primero, se establecen las conjeturas a partir de las evidencias que provee la exploración de la situación. En el segundo se justifica la conjetura y a estas justificaciones las llamamos pruebas. La prueba es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad.

Diferentes investigadores que han estudiado las particularidades del trabajo geométrico, como Vinner (1991), Fischbein (1993), Laborde (1996), Berté (1999), Berthelot y Salin (1994), Salin (2004), Itzcovich (2005), sostienen que una figura geométrica puede ser descripta como poseedora de propiedades intrínsecamente conceptuales. Pero esta figura geométrica no es un mero concepto; es una imagen visual, posee propiedades que normalmente los conceptos no poseen, dado que incluye la representación mental de propiedades espaciales. Mántica (2011) sostiene que “el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas no es espontáneo y deben ser objeto de enseñanza” (p. 32), por lo que deben proponerse a los estudiantes actividades que involucren estudiar y tratar propiedades de las figuras. Esto significa apostar a la elaboración, identificación y validación de propiedades por parte de los estudiantes, como también el uso de propiedades en la producción de nuevas relaciones

Acerca de la validación en geometría se han desarrollado estudios desde perspectivas diferentes, en general en el marco de la geometría euclídea y muchos de ellos apoyados por el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD). Estos estudios abordan aspectos históricos, epistemológicos, psicológicos, cognitivos, curriculares y didácticos, que generan diferentes clasificaciones o estructuras organizativas de los procesos de validación. Diversos estudios (de ninguna manera pretendemos ser exhaustivos) que hacen referencia a analizar procesos involucrados en tareas de conjeturar, explorar y validar, presentan diferencias que se pueden establecer entre los sujetos con los que se realizan y el entorno con el que trabajan los sujetos, ya sea con lápiz y papel, con SGD o con ambos. Harel y

Sowder (1998), Balacheff (2000), Marradez y Gutiérrez (2000), Gutiérrez (2002) y Prior y Torregosa (2013) realizan sus estudios con estudiantes de escuela secundaria. Marradez y Gutiérrez (2000) y Gutiérrez (2002) realizan el estudio empleando un SGD, en tanto los tres estudios restantes mencionados trabajan la problemática de la validación en entornos de lápiz y papel. En tanto Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) realizan la investigación con estudiantes avanzados de la Licenciatura en Matemática y utilizando SGD, Rodríguez (2006) también utiliza como sujetos estudiantes de Licenciatura en Matemática pero en el estudio emplea ambos entornos, lápiz y papel y SGD.

Coincidimos con Balacheff (2000) en que el proceso de validación es la actividad intelectual no completamente explícita que se encarga de la manipulación de la información, dada o adquirida, para producir una nueva información, cuando este proceso tiene como fin asegurarse la validez de una proposición y ocasionalmente producir una explicación, una prueba o una demostración.

2. Características del estudio

El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación **Estudio de procesos de validación en la producción de conocimientos en clases de matemática de distintos niveles educativos** y se encuadra dentro de la investigación-acción. Este método se relaciona con problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores y puede ser desarrollada por ellos, interpreta lo que ocurre desde el punto de vista de quienes actúan e interactúan en la situación problema y describe e interpreta lo que sucede con el mismo lenguaje utilizado por ellos.

La propuesta analizada se implementa con un grupo de estudiantes de segundo año de la escuela secundaria nº 3109 de la ciudad de Santa Fe, Argentina, al que concurren 40 alumnos entre 13 y 14 años. Estos estudiantes acceden a colaborar en la realización de las actividades en el marco del proyecto, dan su consentimiento para ser grabados durante las clases y acuerdan que lo producido sea utilizado en el marco de la investigación.

Se presenta en este trabajo un estudio descriptivo como la mayoría de los estudios en educación (Cohen y Manion (1990)), en el que se cuenta lo que ya ha ocurrido, a partir de observaciones a individuos, grupos, instituciones y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación.

Entre los métodos de recolección de datos mencionamos la observación no participante, artefactos escritos (McKnigh, Magid, Murphy y McKnigt, 2000) y grabaciones en audio y en video. En el estudio se observan y registran las clases de matemática durante tres módulos de trabajo. El observador realiza un registro etnográfico de lo acontecido y además emplea grabadores de audio y cámara de video, elementos que se utilizan para reconstruir el proceso realizado por los integrantes de cada grupo, además de lo escrito en las carpetas y afiches. El audio registrado permite analizar las interacciones de los estudiantes, intentando una única respuesta para la tarea encomendada, partiendo de lo realizado individualmente.

La secuencia que se diseña, presentada en el anexo, tiene por objetivo que los estudiantes conjeturen y validen la propiedad de la desigualdad triangular de los lados del triángulo.

En este artículo se presenta el análisis del problema 1 cuyo propósito es que los estudiantes conjeturen y validen que dados dos segmentos, se pueden determinar infinitos triángulos que los contengan como lados. Se forman para esto 8 grupos de 5 alumnos cada uno. La conformación de estos grupos la diseña el docente a cargo del curso de modo que en cada uno de ellos haya estudiantes que normalmente tienen una activa intervención en el aula de matemática. Se plantea la clase de manera que, en primera instancia los alumnos trabajen en la tarea propuesta por el docente en forma individual y luego se conforman los grupos con el propósito que se debatan las conjeturas elaboradas en forma individual y se logre una justificación grupal, para presentarla a la clase.

Los grupos se distribuyen en el aula de modo que las interacciones de sus integrantes no interfieran en la de los restantes. Los observadores no participantes ubicados en distintos puntos del aula registran en un cuaderno lo que acontece. Se colocan además grabadores en cada grupo a fin de registrar las interacciones entre los integrantes.

Para el análisis de la tarea que se presenta en este artículo, se utiliza lo documentado en las carpetas de los estudiantes, lo sintetizado en el afiche como acuerdo del grupo, las anotaciones del observador no participante, el audio de las grabaciones de las interacciones en cada uno de los grupos al realizar la tarea indicada. La implementación del problema 1 demanda tres módulos de clase consecutivos, que equivalen a 120 minutos.

3. Marco de referencia

Para el estudio que presentamos tomamos a Balacheff (2000) que analiza el proceso de estudiantes de entre 11 y 15 años que deben formular una conjetura y validarla en interacción con pares, en un entorno con lápiz y papel. Consideraremos, también a Harel y Sowder (1998) quienes se enfocan en asuntos cognitivos vinculados a los esquemas de pruebas y estudian las justificaciones que convencen a los estudiantes y que ellos utilizan para convencer a otros estudiantes y al profesor. En función de estas clasificaciones y lo encontrado en los análisis de lo actuado por los distintos grupos considerados tomaremos la clasificación propuesta por Rodríguez (2006) quien trabaja con estudiantes de la licenciatura en matemática empleando tanto en entornos con SGD como de lápiz y papel.

Además Quaranta y Wolman (2003) que abordan la importancia de la interacción para el avance del conocimiento.

Balacheff (2000) realiza una distinción entre los términos explicación, prueba y demostración. Sostiene que en la *explicación* es el sujeto quien establece y garantiza la validez de una proposición avalada por sus propias reglas de decisión de la verdad. Se habla de *prueba* cuando la explicación es reconocida y aceptada por una comunidad. El paso de la explicación a la prueba tiene que ver con un proceso social, es decir que el discurso que asegura la validez de la proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad determinada. La prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. Además la posición no es definitiva, puede evolucionar con el tiempo en función del avance de los saberes en los que se apoya. Reserva el término *demostración* para un tipo de prueba particular en matemática: una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto definido de reglas. Sostiene que los estudiantes construirán pruebas de los enunciados que ellos producen antes de dominar la demostración en el sentido de los griegos y analiza si logran distanciarse del discurso natural aproximándose a un discurso formal. Presenta un estudio experimental acerca de las concepciones de demostración de los estudiantes, desde el punto de vista de las prácticas matemáticas. Muestra los procesos de demostración usados por estudiantes, agrupados en binomios, al resolver con lápiz y papel un problema geométrico y analiza cómo llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta a través de la discusión verbal. Pone el énfasis no sólo en la relación entre los ejemplos utilizados y el enunciado que se pretende demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan eso ejemplos. En los primeros estudios realizados distingue cuatro tipos principales de pruebas pragmáticas e intelectuales: empirismo ingenuo, experimento crucial, ejemplo genérico y experimento mental. Llama "*pruebas pragmáticas* a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y *pruebas intelectuales* a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones"(p.22). Empirisismo ingenuo, experimento crucial y ejemplo genérico corresponden a demostraciones empíricas y experimento mental a demostraciones deductivas informales. Considera que la diferencia entre las demostraciones pragmáticas es la forma cómo los estudiantes seleccionan los ejemplos: En el empirismo ingenuo, el estudiante busca, muchas veces de manera aleatoria, uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados. La experiencia crucial es una experimentación sobre un caso que se reconoce tan poco particular cómo es posible, cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. En el ejemplo genérico, el estudiante hace una búsqueda cuidadosa de ejemplos, que son representantes de sus clases y portadores de propiedades abstractas. La principal característica del experimento mental es que los ejemplos ya no forman parte de la demostración, sino que son un complemento que ayuda al estudiante a encontrar propiedades y relaciones deductivas para construir la demostración. En este estudio, el autor, realiza una clasificación de las pruebas intelectuales. Entre éstas considera la experimento mental en la que las razones se fundamentan en un análisis de las propiedades de los objetos en juego no testificada por medio de sus representantes, sino que formuladas en su generalidad, aparecen como un medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación, se libera de situaciones particulares. El otro tipo que considera, dentro de las intelectuales, es el cálculo sobre enunciados que son pruebas totalmente independientes de la experiencia, basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones que se ponen en juego en la solución del problema. Este estudio permite ver los procesos de validación usados por los estudiantes al resolver un problema, revisando cómo llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta a través de la discusión verbal. Considera que una característica relevante es que los estudiantes tienen la tarea de resolver juntos un problema y sostiene que “las interacciones entre individuos en igualdad de condiciones permite independientemente de toda intervención de un experimentador la exteriorización de las concepciones de los proyectos y la toma de decisiones” (p. 44).

Harel y Sowder (1998) y Sowder y Harel (1998) emplean la palabra prueba en un significado amplio, en el sentido psicológico de justificación más que en el sentido estrecho de demostración matemática. Introducen el término “esquema de prueba” de una persona o una comunidad como aquello que le permite asegurarse (eliminar sus propias dudas sobre la veracidad de una afirmación matemática) y persuadir (eliminar las dudas de otros sobre esa afirmación). Plantean esta noción de “esquema de pruebas” como una herramienta para analizar esas formas de convicción o persuasión y los organizan en tres categorías: externos; empíricos, y analíticos, con subcategorías para cada uno. Estos esquemas son mutuamente exclusivos, pues una justificación no puede pertenecer a dos tipos de esquemas a la vez, pero puede suceder que los estudiantes utilicen más de una clase de esquema en diferentes partes de una prueba. Los esquemas de prueba externos los subdividen en autoritarios, rituales y simbólicos. En este esquema tanto lo que convence al estudiante como lo que el estudiante puede ofrecer para persuadir a otros tiene una procedencia/fuente exterior. En los esquemas de prueba empíricos las justificaciones son hechas sólo en base a ejemplo y se dividen en perceptivos e inductivos. Los esquemas de prueba analíticos los dividen en transformacionales y axiomáticos. Los profesores de matemática probablemente consideran los esquemas de prueba analíticos como el tipo fundamental de justificación en matemáticas. Los autores sostienen que los estudiantes deberían aprender que las demostraciones son argumentos convincentes producto de la actividad humana, en la que ellos pueden y deben participar dado que son parte esencial de la actividad matemática.

Rodríguez (2006) establece los siguientes tipos o categorías de pruebas, de convicción externa o de convicción propia. Las primeras son aquellas donde la principal fuente de convicción es un agente ajeno a la persona y los de convicción propia aquella en las que el origen de convicción radica en la propia persona. Las de convicción externa a su vez las clasifica, en autoritarios, rituales y simbólicos. En las de convicción propia distingue dos tipos, empíricas en las que la convicción proviene de la comprobación en ejemplos y deductivas en las que la comprobación proviene principalmente de una justificación lógico deductiva.

Quaranta y Wolman (2003) sostienen que el valor fundamental de los momentos de discusión es que son potencialmente fructíferos para la generación de confrontaciones, reflexiones y argumentaciones. No se trata sólo de dar a conocer los resultados obtenidos; sino buscar razones, argumentar intentando defender su verdad o falsedad. Estos momentos de discusión requieren de la participación activa del docente quien no debe sólo proponerlos sino también conducirlos. Para esto se requiere de una intervención que incite a los estudiantes a explicitar lo realizado, aceptando todas las respuestas, ayudando a establecer acuerdos y recordando acuerdos anteriores relacionados con los conocimientos que se pretenden trabajar en esa situación. El trabajo con “los otros” conlleva la situación de resolución conjunta entre los alumnos que, según las autoras, facilita colaboraciones en el proceso de buscar soluciones mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado. Esto requiere tener en cuenta lo que dicen los otros, las sugerencias que hacen explicitar y justificar sus propias elecciones, estimulando intercambios que posibilitan tomar conciencia sobre algún aspecto no considerado, descubrir nuevos aspectos, cuestionar otros, reformularlos.

4. Relevancia del problema

El trabajo con formulación y validación de conjeturas es de interés en el quehacer del aula de matemática, y se pone de manifiesto en los documentos regulatorios tanto nacionales como jurisdiccionales. Detallamos esto en los siguientes párrafos.

En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (2011) del ciclo básico de la educación secundaria, se expresa que debe abordarse “La producción en interpretación de conjeturas y afirmaciones de carácter general y el análisis de su campo de validez, avanzando desde argumentaciones empíricas hacia otras más generales” (p. 14). Más adelante se expone que la escuela ofrecerá situaciones de enseñanza que promuevan “La producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales” (p. 16). Para segundo año, en particular, propone en relación con la geometría y la medida “El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: (…) formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que puedan validarlas” (p. 22).

El Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, en sus orientaciones curriculares (2011) expresa,

> Con respecto a la validación, entendida como la decisión autónoma del estudiante acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta, se podrán aceptar en los primeros años de escolaridad secundaria, argumentaciones imprecisas y escrituras poco formales como pruebas ligadas a la acción y a la experiencia, para evolucionar hacia pruebas intelectuales que generalizan las relaciones borrando toda huella del contexto en el que se planteó la situación. (p. 40)

El diseño curricular jurisdiccional ciclo básico de la educación secundaria de la provincia de Córdoba (2011) propone, la elaboración de argumentaciones acerca de la validez de las propiedades de las figuras bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos) para analizar afirmaciones, reconociendo los límites de las pruebas empíricas. Expresa que debe consolidarse la

> Elaboración de argumentaciones sobre condiciones necesarias y suficientes para congruencia de triángulos construidos Uso de instrumentos de geometría y programas graficadores para la construcción de figuras a partir de informaciones. Producción de argumentaciones acerca de validez de la propiedad triangular y propiedad de la suma de ángulos interiores de triángulos y cuadrilátero. (p 42)

Podemos decir que hay un marcado interés en distintos documentos regulatorios de valorizar, en los estudiantes de la escuela secundaria, el inicio en el trabajo deductivo en el aula de matemática.

Respecto al trabajo en geometría, Balacheff (2000) plantea que de manera implícita, la enseñanza de la matemática despoja a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Esto es particularmente notorio cuando el problema planteado se presenta de la forma: “mostrar que…”. En una formulación de este tipo, el enunciado en cuestión es de hecho considerado como verdadero; lo que está por descubrir es una demostración” (p.5). Propone partir de los argumentos de los alumnos y conducirlo a una situación paradójica en la cual se vean obligados a ponerlos en tela de juicio. Trabajar para hacer que el estudiante tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales. Se trata de problematizar la evidencia. Considera que la interacción social es un elemento determinante para la toma de conciencia sobre la verdadera importancia de los procedimientos de validación como medio fiable y eficaz para establecer la verdad de la proposición.

Como se plantea en el punto que se expresan las características del estudio, la propuesta apunta a que los estudiantes interactúen poniendo en esta acción tanto la conjetura como su justificación. Estas interacciones dan acceso, por los debates que ellas suscitan, a la observación de los procesos que sostienen las decisiones tomadas por los alumnos.

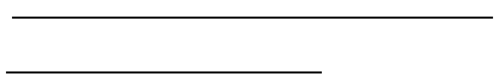
5. Análisis de los datos

El objetivo de la tarea es que los estudiantes logren enunciar la desigualdad triangular. Se plantean para esto tres problemas que se presentan en el anexo. En este trabajo realizamos el análisis del debate entre pares del primer problema cuyo objetivo es que los estudiantes puedan determinar que dados dos segmentos, se pueden determinar infinitos triángulos que los contengan como lados.

Los estudiantes en un trabajo individual en primera instancia y con un debate entre pares en un segundo momento, deben emitir una conjetura y suministrar una prueba respecto al problema 1, cuya consigna se transcribe:

Consigna:

Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás,



a) Construye un triángulo: b) Construye otro triángulo, distinto del anterior, con esos mismos dos segmentos. c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

Se presenta a continuación el análisis del debate de cada uno de los ocho grupos constituidos, y se clasifican las interacciones según los tipos de pruebas empleados, teniendo en cuenta si son de convicción externa o propia y si son de convicción propia según la forma de escoger los ejemplos y la utilización que de ellos se realiza.

5.1. Grupo 3

Ladislao: Esta todo entre es infinito y no es infinito.

Marisel: Para mi no es infinito, porque tenemos un límite para armar un triángulo, desde el grado 0 hasta 179 grados, 59 minutos, 59 segundos y no hay más posibilidades.

Pareciera que para Marisel si un conjunto es acotado no puede ser infinito. Está usando el límite del intervalo, para asegurar que no puede encontrar infinitos triángulos. Es decir que usa este ejemplo para descartar una de las hipótesis. La cuestión de que haya “un límite” es tomada como una experiencia crucial por Marisel, para asegurar que no hay infinitos triángulos.

Los estudiantes continúan una discusión sobre la finitud o infinitud de las soluciones del problema, fundado en la cota de los 180º y las posibles amplitudes de los ángulos que forman los segmentos dados. Interviene Florencia que afirma: “hay infinitas soluciones a pesar que hay un tope”. Descartan el ángulo de 0º y el de 180º considerando que en esos casos no se forma triángulo. Algunos estudiantes logran modificar lo referente a la infinitud de las soluciones.

Ladislao: entre el segmento de los 179º de inclinación hasta los 180º va a haber infinitos grados de inclinación, pero mientras que no supere los 180º, podés tener infinitos segmentos que no lleguen a los 180º de inclinación.

Florencia: entre el grado 1 y el grado 2 hay infinitas medidas, hay un tope pero nunca se llega porque hay infinitas medidas.

Podríamos decir que Ladislao y Florencia están utilizando un ejemplo genérico dado que logran interpretar la representación física como una sucesión de posiciones entre dos grados determinados. Florencia logra separarse de lo que los estudiantes consideran el “tope” para fundamentar su postura considerando un caso más general, entre 1º y 2º. De sus explicaciones, puede inferirse que estarían reconociendo que u*n conjunto acotado puede tener infinitos elementos*.

	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 3		Marisel *El ángulo de* *179º 59` 59``.*	Florencia y Ladislao *Consideran que entre 1º y 2º hay infinitas medidas* *Un segmento fijo y otro móvil.*	

Tabla 1. Tipos de pruebas grupo 3

Nos interesa destacar lo acontecido entre Florencia y Ladislao, ambos emplean el ejemplo genérico, utilizado para establecer las razones de validez de la conjetura, basándose en un segmento fijo y otro móvil, “el ejemplo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura” (Balacheff, 2000, p.69)

F: Si tomamos el transportador no tenemos infinitas subdivisiones, dado que la graduación es en grados, pero dentro del límite, entre cada grado, hay infinitas posibilidades.

L: se puede dejar fijo uno de los segmentos e ir corriendo el otro pero hay un momento en el que se corta, entonces.

F: cuando lo vas corriendo entre una posición y otra, hay más, hay infinitas.

L: hay infinitos triángulos, pero hay un tope, pero hay infinitos,… las dos cosas”, o sea hay un tope porque no es posible hacer un triángulo si los segmentos forman 0º o 180º, “pero entre un grado y otro hay infinitas “medidas”.

El trabajo en conjunto de explicitar y justificar permite a Ladislao considerar la posible infinitud de un conjunto acotado. Pareciera que Ladislao y Florencia utilizan implícitamente el concepto de infinito real, abordado por el docente en el tema números reales e intervalos. En este caso la interacción entre los pares constituye un factor de progreso en lo que respecta a la relación entre conjunto acotado y conjunto infinito.

5.2. Grupo 5

En principio, en el grupo no acuerdan la solución del problema, algunos sostienen que hay infinitas soluciones y otros que millones pero no infinitas.

Se presenta una discusión entre Julia y Milagros respecto a si hay muchas "millones" o infinitas soluciones, como no logran un acuerdo respecto al tema solicitan la intervención del docente. El docente, teniendo en cuenta el debate entre las estudiantes decide hacer referencia a la densidad de los números reales, tema que los estudiantes tienen disponible. Considera que puede relacionarlo con la densidad de los números reales y el concepto de intervalo acotado. Les propone analizar cuántos números reales hay entre dos reales dados, preguntando cuantos números reales hay entre 1 y 2.

Julia, sostiene que no hay infinitos triángulos como solución del problema, afirma que entre 1 y 2 hay infinitos números reales. Puede manifestar esto pero, no puede modificar su afirmación respecto a la cantidad de triángulos que podría construir. Por su parte Milagros puede utilizarlo para fundamentar lo que sostiene, dado que expresa "aunque haya un final en medio hay infinitos números".

El ejemplo planteado por el docente es un "experimento crucial", las estudiantes lo emplean para descartar una de las dos hipótesis planteadas, hay infinitas soluciones o hay millones.

Milagros representa dos circunferencias concéntricas (figura 1) con radio cada uno de los segmentos dados y centro el extremo común a estos segmentos para explicar su afirmación. Sostiene que son infinitos triángulos porque entre los extremos de un arco de la circunferencia de radio mayor hay infinitos puntos, a cada uno de esos puntos les corresponde uno que es extremo del radio de la circunferencia menor. Milagros estaría advirtiendo que "entre los extremos del arco de circunferencia considerada, hay infinitos puntos que permiten por tanto construir infinitos triángulos" (Mántica y Carbó, 2013, p. 41).

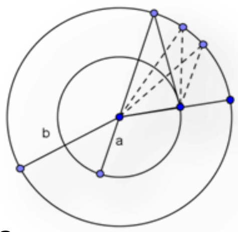


Figura 1

Para Milagros hay infinitos triángulos, pero para Julia no. Milagros, en función de las interacciones, logra establecer una relación entre los puntos del arco de la circunferencia de radio menor y los del arco de la circunferencia concéntrica de radio mayor, respecto a un ángulo central. Los estudiantes utilizan en su fundamentación la continuidad de la circunferencia, podríamos decir que emplean lo que Balacheff denomina teorema en acto[1].

	Empirisismo	Experiencia	Ejemplo	Experimento mental

[1] Teorema en acto: las propiedades de las relaciones que la persona utiliza en la solución de un problema. No obstante esto no significa que por tanto dicha persona puedas hacerlas explicitas o justificarlas.

	ingenuo	crucial	genérico	
Grupo 5		¿Cuántos reales hay ente 1 y 2? *Densidad de los números reales.*		Milagros *Relaciona arcos de dos circunferencias concéntricas, de distinto radio, respecto al mismo ángulo central.*

Tabla 2. Tipos de pruebas grupo 5.

Luego de la interacción presentan como conclusión que pueden construirse infinitos triángulos. Julia sostiene que por más que tenga infinitos puntos el arco de circunferencia algún límite tiene que tener, “en algún momento se termina” sin embargo concluye que son infinitos a pesar de no estar convencida. Manifiesta “Si Milagros lo dice, seguro es. Ella siempre resuelve bien todo”. Se pone de manifiesto que acata lo que sostiene Milagros por considerarla una alumna “avanzada” en matemática, esquema de prueba autoritaria, según Sowder y Harel (1998). En este caso la interacción no resulta beneficiosa para Julia ya que no se cumple con una de las características necesarias, como es el sostenimiento de las propias convicciones, en la medida que no puede fundamentar su conjetura.

En casos como este las interacciones presentan limitaciones pues algún alumno del grupo asume ““la dirección de la solución” y los demás la aceptan -tal vez por su “fama de bueno en matemática”-, pero sin poder reutilizarla por su propia cuenta en otra situación” (Quaranta y Wolman, 2003 p. 195). Es probable que Julia no pueda hacer uso de la relación conjunto acotado-conjunto infinito en otra situación que lo amerite.

Después de la intervención del docente, Milagros desiste de considerar que hay un número finito de triángulos y logra interpretar que al desplazar uno de los segmentos dados, considerándolo uno de los lados de un triángulo, su extremo describe una circunferencia. La continuidad de la circunferencia le permite interpretar que son infinitos los puntos del arco de la circunferencia que describe el extremo del segmento.

Tomaremos como experimento mental el caso que los estudiantes logren reconocer como un arco de circunferencia el lugar geométrico descripto por el extremo de uno de los segmentos dados al variar el ángulo que forma con el otro segmento dado, tomado como la inicial o fijo. Consideraremos esto como lo que Balacehff (2000) denomina “procedimientos de validación de nivel superior” (p. 59).

5.3. Grupo 6

Evangelina sostiene que se pueden formar diferentes tipos de triángulos dependiendo de la “ubicación” de los segmentos, dice “te puede quedar de 45º o de 90º” y el resto acuerda. Logran sólo estos dos casos, estaríamos frente a un empirisismo ingenuo.

Cuando Evangelina comienza a interactuar con los integrantes del grupo para fundamentar su respuesta, generaliza haciendo referencia a otros triángulos, pues deja de considerar que el ángulo que forman los segmentos dados sólo son de 45º o de 90º para centrarse en la longitud del tercer lado. Compara a los segmentos como si fuesen las agujas de un reloj, diciendo que “dependiendo del ángulo que forman varía el tamaño del tercer lado”. Estaría utilizando un ejemplo genérico, en este caso la r*elación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*. Podemos decir que los estudiantes están utilizando la propiedad “en todo triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa” propiedad que desconocen, podríamos decir también en este caso que utilizan un teorema en acto.

Sol interviene explicando su postura que no coincide con la de Evangelina y Flor. Hasta ese momento no la había explicitado pues esas alumnas tienen, para el resto de la clase, una “autoridad matemática” por sus notas académicas, según nos manifiesta la docente del curso. Sol explica que para ella pueden construirse muchos triángulos y lo hace utilizando el compás, apoyando un extremo en el punto común de los segmentos dados que considera como dos lados del triángulo y la otra punta del compás en el extremo libre de uno de los segmentos. Estaría utilizando en la justificación el concepto de circunferencia, estableciendo la relación ángulo central-arco que abarca. Podríamos decir que estamos frente a un experimento mental, dado que “es en virtud del conocimiento y no de la práctica que la evidencia permite rechazar algo para establecer una verdad”. (Balacheff, 2000, p. 26)

	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 6	Todo el grupo menos Sol, considera ángulos de 45º y 90º		Evangelina *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	Sol *Correspondencia entre el ángulo central y el arco de circunferencia que abarca*.

Tabla 3. Tipos de pruebas grupo 6.

La interacción entre los estudiantes permitió a Evangelina pasar de un empirisismo ingenuo a un ejemplo genérico y a Sol superar el esquema de prueba autoritaria y realizar una experimento mental. En este caso la interacción resultó positiva para Evangelina y para Sol, les permitió avanzar en el proceso de prueba. Estos intercambios “obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de las posibilidades hasta llegar, a veces, a perturbar la propia posición”. (Quaranta y Wolman, 2003, p. 198).

5.4. Grupo 7

En una primera instancia los alumnos centran la discusión en el caso que los segmentos no formen triángulo. Julieta sostiene “tenés que ir moviendo el segmento hasta llegar y se pueden hacer un montón de triángulos, pero que no se interpongan porque si no, queda plano”, considerando los segmentos incluidos en semirrectas opuestas. Yamila sostiene “que no queden segmentos superpuestos”, considerando ambos segmentos incluidos en la misma semirrecta.

Inés sostiene que hay un montón de triángulos pues considera que los segmentos pueden formar ángulos de 1º, 2º y así hasta 179º, “nosotros tomamos del punto de vista de los grados”. Es decir que considera los ejemplos que puede visualizar tomando las divisiones que le ofrece el instrumento de medida que poseen, el transportador. Podríamos decir que su tipo de prueba es empirisismo ingenuo dado que lo verifica en los casos que les permite visualizar el transportador, no aborda el problema de la validez ya que le alcanza con los casos que puede constatar.

Inés asegura que no puede haber infinitos triángulos porque “hay una medida establecida de 0º hasta 179º”, mantiene lo obtenido en un principio, o sea la conclusión que extrajo de observar el transportador. No se plantea que pueda existir un triángulo que posea un ángulo interior cuya amplitud sea mayor a 179º y menor a 180º, no considera factible que el ángulo que forman los segmentos tenga una amplitud no entera, es decir “no pueden reconocer que la amplitud de un ángulo puede expresarse como una parte entera en grados sexagesimales y las partes conmensurables” (Mántica y Carbó, 2013, p.46) .

Utilizan un soporte, el transportador, para ejemplificar los triángulos que puede construir. El ángulo que forman los segmentos dados debe ser un número entero. No consideran la existencia de submúltiplos conocidos del grado (minutos y segundos) dado que no les es posible visualizarlos en el instrumento disponible. Las soluciones propuestas son empíricas, “el empirisismo ingenuo aparece como un estado en el cual ellos se encuentran y permanecen debido a razones ligadas a la situación o a sus relaciones con el conocimiento mismo”. (Balacheff, 2000, p. 56).

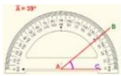
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 7	*El grado sexagesimal única unidad de medida* Basados en el transportador 			

Tabla 4. Tipos de pruebas grupo 7.

La confrontación surgida de las interacciones entre sus integrantes no les permite pasar hacia otro tipo de pruebas quedándose en el empirisismo ingenuo. El modo que utilizan para convencerse y convencer es la construcción del triángulo. No logran “generar” los triángulos, sólo pueden pensarlo a partir de la construcción de cada uno de ellos mediante la utilización del transportador, no consiguen desprenderse del instrumento. Esto se manifiesta en las representaciones realizadas y en los casos que excluyen, 0º y 180º, puesto que al graficar los segmento en ambas posiciones verifican que no se forma triángulo.

El docente pone en interacción a este grupo con otro, con el fin que puedan revisar, o bien la conjetura o el tipo de validación empleada. Les plantea las posturas son contrapuestas, para unos son infinitos los triángulos y para otros 179 triángulos. Un alumno del grupo 7 expresa “y … hacemos fácil: te preguntamos a vos y listo!” es notorio en este grupo el peso de la autoridad. Este alumno pone en evidencia un esquema de prueba utilizando una forma de convicción externa y dentro de estas la que Harel y Sowder (1998) denominan autoritaria, en este caso la autoridad es el docente.

5.5. Grupo 8

Josefina sostiene que se pueden construir “cuatro triángulos de diferentes formas según la ubicación de los segmentos”. Realiza un triángulo utilizando los dos segmentos dados (explica la construcción diciendo “corto, corto, largo” haciendo referencia a que utilizó para dos lados el segmento de menor longitud y para el lado restante el de mayor longitud). En el item b, considera que puede construir tres triángulos: rectángulo, obtusángulo y acutángulo, los asocia con una clasificación conocida según la amplitud de los ángulos interiores. Responde “se pueden construir cuatro triángulos”. Estamos frente a un empirisismo ingenuo ya que asegura esto después de haberlo verificado en estos cuatro casos.

El docente le hace notar que el problema pregunta cuantos triángulos, no cuantos tipos de triángulos. Josefina comienza a cuestionarse lo afirmado anteriormente y dice, haciendo referencia a los triángulos representados, “dentro de cada tipo, se pueden formar varios”. Expresa que considerando diferentes posiciones de los segmentos dados, la longitud del tercer lado va a ir variando, lo muestra sobre la representación como si uno de los segmentos tomara distintas posiciones. Al escuchar esto Micaela sostiene que la variación de la longitud de este tercer lado está relacionada con la variación de la amplitud del ángulo que forman los lados dados, advierte en la explicación de Josefina que el ángulo que forman los segmentos va variando al mover uno de ellos. Josefina y Micaela establecen una *relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*

Podríamos decir que el tipo de prueba elaborado por Josefina y Micaela es ejemplo genérico. En el caso de Josefina considerando la variación en la longitud del lado no coincidente con los segmentos dados y en el caso de Micaela considerando la amplitud del ángulo que determinan los lados dados. En estas pruebas la dificultad está en el carácter genérico del ejemplo que se propone y que los interlocutores compartan las concepciones de los objetos en juego. Este debate “exige principalmente la expresión de una interacción y de un sistema de representación de gran complejidad en lengua natural”. (Balacheff, 2000, p. 74).

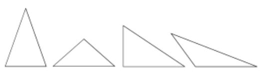
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 8	Josefina, Hay cuatro triángulos. 		Josefina y Micaela *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	

Tabla 5. Tipos de pruebas grupo 8

La interacción entre las estudiantes, ante el hecho de refutar una aseveración de un integrante del grupo, le permite a Josefina avanzar de un empirisismo ingenuo a un ejemplo genérico. Tener que confrontar y defender sus afirmaciones lleva a los estudiantes, a determinar criterios comunes para aceptar una afirmación.

5.6. Grupo 4

Comienzan con un empirisismo ingenuo. Sostienen que hay dos triángulos que son los que todos los integrantes del grupo lograron dibujar cuando resuelven la consigna en forma individual (un triángulo rectángulo donde los catetos son los segmentos dados y un triángulo isósceles que tiene dos lados iguales al segmento de menor longitud y el tercer lado el segmento de mayor longitud).

Constanza, opina que si se mueve uno de los segmentos de unos de los triángulos construidos se pueden ir obteniendo diferentes triángulos, los demás integrantes del grupo adhieren a lo propuesto por Constanza. Camila dice a la docente "ustedes nos dieron estos dos segmentos, entonces yo armo así: esta es mi base (tomando uno de los segmentos dados) y empiezo a mover el otro y a mover y mover, entonces tengo un triángulo, dos triángulos, tres triángulos,... se podría tener muchos, entonces llegamos a la conclusión de que vamos a tener infinitos triángulos". Establece una *relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*

Para Constanza, el hecho de mover uno de los segmentos de uno de los triángulos construidos se transforma en una experiencia crucial, que le permite refutar la hipótesis "son dos triángulos". A partir de esto se desprenden del caso particular, podríamos decir que emplean un ejemplo genérico para validar su afirmación de que hay infinitos.

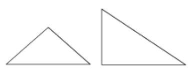
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 4	El grupo completo sostiene que hay dos triángulos. 	Constanza, comienza a girar uno de los lados del triángulo rectángulo.	Todo el grupo. *Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	

Tabla 6. Tipos de pruebas grupo 4.

Con base en los resultados de su investigación, Balacheff (2000), plantea una ruptura entre los dos primeros tipos de pruebas y los dos últimos. Esta ruptura puede ser caracterizada como el paso de una verdad asegurada a partir de una afirmación del hecho a una verdad asegurada a partir de un razonamiento. La dificultad con este tipo de pruebas es que es necesario que el resto acepte el carácter genérico del ejemplo propuesto, que compartan las mismas concepciones de los objetos en juego. "Cuando esto no ocurre, la explicación desarrollada aparece ligada a un caso particular. En este contexto empírico, es legítimo recurrir a la experiencia crucial como medio del debate de validez". (p. 73).

5.7. Grupo 1

Milagros describe los dos triángulos isósceles que el grupo considera se pueden construir con los dos segmentos dados, y por ese motivo su tipo de prueba es empirisismo ingenuo. Toma en un caso el segmento de mayor longitud para cada uno de los lados iguales y el otro segmento lo utiliza como "base" y en el otro caso toma el de mayor longitud como "base" y los de menor longitud para cada uno de los lados iguales.

Emilce y Agostina expresan que si uno de los segmentos dados es la base, se puede tomar el otro segmento y utilizar diferentes posiciones, que si lo mueven un pedacito obtienen otro triángulo distinto al anterior. Afirman “por cada grado se encuentra un triángulo, hasta llegar a los 179º”.

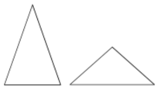
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 1	Milagros, dos triángulos isósceles 		Emilce y Agostina *El grado sexagesimal única unidad de medida* *Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto*	

Tabla 7. Tipos de pruebas grupo 1.

Se presenta por un lado la *discretización de la medida* y por otro la *relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto*. Dado que consideran la variación de grado en grado y van realizando el movimiento del lado que no consideran como “base”. Suponen un segmento fijo y el otro libre.

En la interacción acuerdan que se pueden construir los triángulos dejando fijo un lado y haciendo variar el otro, siempre de “grado en grado”, basados en el transportador. Dejan explicito que por cada grado se encuentra un triángulo. La situación de resolución conjunta es positiva “porque facilita colaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado”. (Quaranta y Wolman, 2003 , p. 195), aunque en este caso no les haya permitido despegarse del instrumento utilizado (el transportador) y considerar que existen submúltiplos del grado.

5.8. Grupo 2

Dicen que son tres los triángulos que pueden construirse, por ese motivo su tipo de prueba es empirisismo ingenuo. En realidad son dos, puesto que los triángulos rectángulos que consideran son iguales, pero están en distintas posiciones.

Dos integrantes del grupo, Lautaro y Santiago, centran su atención en el triángulo rectángulo. Sostienen que se pueden construir triángulos formando con los segmentos, un ángulo de “1º, 2º, 3º, 4º, y hasta 179º”. El docente que se encuentra presente en el momento del debate, pregunta “¿entre 1º y 2º no hay nada?”. Los estudiantes responden que “hay miles porque están en el medio los minutos y los segundos”. La pregunta del docente se convierte en un ejemplo crucial para estos alumnos permitiéndoles utilizar los submúltiplos del grado (minutos y segundos).

Los estudiantes continúan el intercambio y Manuela dice “si vas abriendo y cerrando (refiriéndose a los segmentos) los lados del triángulo, podés hacer miles de millones”. Estaría utilizando un ejemplo genérico para afirmar que hay más triángulos de los tres considerados. Interviene Emilia y dice “hasta 179º”, a lo que Manuela contesta “o más, porque no tiene que haber sólo un grado de diferencia, puede haber menos porque el grado no es la medida mínima de variación, tenés los minutos, segundos, milésimas de segundo etc. para variar" y sostiene que si lo haces de 180º queda llano pero si "lo corrés un poquitito ya podés hacer el triángulo".

El planteo de Manuela, que el grado no es la medida mínima para expresar la amplitud de un ángulo, se convierte en una experiencia crucial que le permite contrarrestar lo que afirma Emilia, para quien 179º es la mayor amplitud que podría formar el ángulo determinado por los segmentos dados. Manuela estaría haciendo referencia a lo que se denomina *sistema mixto para medición de ángulos,* interpretando la densidad pero no la continuidad del mismo. Pasan de considerar valores enteros para la amplitud del ángulo, observable en el transportador, a submúltiplos del grado, no directamente observables, y luego a considerar subdivisiones de estos submúltiplos.

El docente se mantiene atento al debate de los estudiantes e interviene oportunamente considerando que estas interacciones se "desarrollan siempre en torno a un objeto de conocimiento, apuntando hacia un saber al que queremos que nuestros alumnos se aproximen progresivamente" (Quaranta y Wolman, 2003, p. 234).

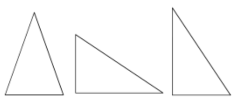
	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento mental
Grupo 2	Todo el grupo afirmaba que podían construirse tres, que en realidad son 2. 	Docente ¿Entre 1º y 2º no hay nada? Manuela El grado no es la medida mínima. Si vas abriendo y cerrando los segmentos.	Manuela, Lautaro y Santiago *Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto.* Manuela Consideran submúltiplos decimales de la unidad de medida.	

Tabla 8. Tipos de pruebas grupo 2

5. Conclusiones

En los grupos analizados es posible apreciar que intentan dar una explicación de lo que afirman aunque no siempre se valgan para ello de propiedades con las que cuentan. En el anexo II se presenta la síntesis de los tipos de pruebas puestos en juego.

Harel y Sowder (1998) consideran que las dificultades para aprender a demostrar obedecen a la variedad de formas como los estudiantes se convencen a sí mismos o persuaden a otros de la certeza de una observación. Las disidencias o los acuerdos en los intercambios permite, en algunos casos, avanzar en el tipo de justificación de la conjetura, aun sin lograr en algunos casos modificar el tipo de prueba que realiza el estudiante Los grupos (5),(6) y(7) apelan a cuestiones que no tienen que ver con el modo de validar las afirmaciones que se pretende abordar desde la matemática, y el modo de convencimiento se sitúa en lo que afirma un estudiante considerado como más avanzado en matemática o en la autoridad del profesor.

La interacción con los demás estudiantes permite modificar el tipo de validación que se realiza y esto, en general, conlleva un avance en el tipo de prueba. Los grupos (2), (3), (4) y (5) utilizan una experiencia crucial en el intercambio. Logran avanzar en el tipo de prueba para validar su conjetura, el (5) a una experimento mental y los otros tres a un ejemplo genérico, utilizando argumentaciones para convencer al resto del grupo de sus afirmaciones.

> (…) esta interacción social es la que le da significado a la experiencia crucial. Este tipo de validación se manifiesta en todo su apogeo en un conflicto acerca de la validez de un enunciando que no puede ser superado a través del paso a un nivel superior de prueba (Balacheff, 2000, pp.85-86).

Milagros, grupo (5), realiza una comparación que permite considerar que un conjunto acotado puede ser infinito en relación al caso del intervalo [1,2], Constanza, grupo (4), considera que uno de los lados puede ser considerado el lado libre de un ángulo. En ambos casos la experiencia crucial es sometida a prueba, para validar o invalidar la afirmación, es de hecho una respuesta pragmática al conflicto planteado entre los estudiantes. Las discusiones entre los estudiantes "no siguen necesariamente las reglas del debate matemático, aunque quizás constituyan sus precursores" (Quaranta y Wolman, 2003, p.235), dado que al someter a prueba en algunos casos al experimento crucial, podrían plantearse si un ejemplo es suficiente o no para probar una afirmación.

Los grupos (1), (6) y (8) logran avanzar de un empirisismo ingenuo al ejemplo genérico sin pasar por la experiencia crucial. En estos casos presentan la confrontación de un modelo de acción, Josefina (8) sostiene que al "tomar diferentes posiciones de los segmentos dados la longitud del tercer lado va a ir variando". Emilce y Agostina (1) afirman que si "al otro lado lo mueven un pedacito tienen otro triángulo". Evangelina (6), compara los segmentos como "si fuesen la agujas del reloj". No se toma un ejemplo en sí mismo para validar la conjetura sino que encuentran un modo de "generar" el triángulo partiendo de los segmentos dados.

La interacción jugó un papel fundamental y diferente en el trabajo de cada grupo. Se constituyó en un obstáculo en el grupo (5), dado que Julia no logra convencerse de que hay infinitos triángulos, pero una alumna que según los compañeros es "muy buena en matemática", sí está convencida de esto y puede fundamentarlo utilizando propiedades conocidas. Julia, sin estar convencida, acata esa afirmación, no logra desarrollar procedimientos propios de validación para su afirmación y por tanto emplea un esquema de convicción externa. Esto también ocurrió en el grupo (7), donde los estudiantes consideran que para modificar su conjetura deberían preguntar al docente, marcando la autoridad del mismo en lo que respecta a la determinación de su verdad o falsedad. Pero la interacción se convirtió, de alguna manera, en un motor de avance en otros grupos, como ya mencionamos, o en algunos integrantes de estos, debido a que "originó procesos de concientización, obligando a los estudiantes a justificar o hacer explícitas las decisiones tomadas por ellos" (Balacheff, 2000, p.85).

Sólo algunos integrantes de los grupos (5) y (6), para fundamentar la validez de su proposición, se basan en un análisis de las propiedades de los objetos que intervienen en la misma. Las razones que fundamentan la validez de su justificación obedecen a un proceso de interiorización que hacen explícito en los argumentos que utilizan para realizar sus pruebas. Estos casos los consideramos como experimento mental puesto que logran liberarse de situaciones particulares.

Balacheff (2000) sostiene que "los estudiantes tienen dificultades no solamente al expresar por medio de palabras las pruebas que realizan, sino al reconocer y hacer explícitos los conceptos en juego" (p.85). Esto se manifiesta en la interacción entre Inés, grupo (7) y Sol (6). La afirmación de Inés está fundada en un ejemplo basado en un instrumento, el transportador, y por lo tanto es un empirisismo ingenuo. Se contrapone a lo sostenido por Sol, que basa su afirmación en una experimento mental. Inés sostiene que hay un número determinado de triángulos porque varía de 0º a 179º, de grado en grado. Sol le dice "entre grado y grado hay infinitos, "tenés décimas, centésimas, milésimas… y todo eso, tenés infinitos para hacer triángulos" y afirma que, en grados "enteros" no hay infinitas pero considerando los submúltiplos de la unidad sí hay infinitos aunque no puedan superarse los 180º. Se manifiesta en los alumnos un problema con la unidad de medida,

> " (…) desconocen o se resisten a trabajar en el sistema mixto (sexagesimal y decimal) de medición de ángulos, es decir, no pueden reconocer que la amplitud de un ángulo puede expresarse como una parte entera en grados sexagesimales y las partes conmensurables. (Mántica y Carbó, 2013, p.46).

Consideramos que hubo buenos momentos de interacciones entre pares que permitieron el avance sobre el tipo de argumentación utilizada para fundamentar las afirmaciones. "Los momentos de discusión generan condiciones que facilitan el avance hacia la conceptualización de aquellos conocimientos que los alumnos pudieron utilizar en las resoluciones" (Quaranta y Wolman, 2003, p.234), si bien no siempre pueden formularse las propiedades que las fundamentan. Los tipos de pruebas empleados por los estudiantes al realizar la actividad de validar las conjeturas respecto a la actividad propuesta se ajustan más a las de convicción propia que a las de convicción externa. En la mayoría de los modos de convencerse y convencer tienen que ver con el modo de seleccionar el ejemplo utilizado, es menor el número de casos en el que los elementos de convicción están basados en propiedades o deducciones lógicas.

El hecho que las pruebas intelectuales, como la denomina Balacheff (2000) sean las menos utilizadas en el grupo analizado, consideramos que está en relación con las propiedades disponibles para justificar las afirmaciones. Además con el tipo de pruebas que habitualmente realizan los estudiantes de la escuela secundaria.

Se analiza una situación geométrica que implica la actividad de validar a estudiantes de secundario interactuando entre pares en el proceso, en un entorno de lápiz y papel, de un problema lleva implícito el concepto de infinito real. Este concepto es muy complejo para los estudiantes de este nivel, que tienen la "concepción del infinito como "lo que no tiene fin". Entendido fin en el sentido amplio como "límite"" (Waldegg, 2008, p. 121).

La mayoría de los grupos consideran la generación de los triángulos dejando un lado fijo y girando el otro, pero lo piensan como un conjunto discreto. Waldegg (2008) sostiene que "una concepción basada en un proceso de generación efectiva de los elementos de un conjunto" (p.30), no permite una aproximación al concepto real de infinito. Sólo en el caso del grupo (5) pueden relacionarlo con lo trabajado en el conjunto de los números reales y utilizar a partir de esto, que un conjunto acotado puede ser infinito. Establecen una relación entre la continuidad e infinitud de un segmento de la recta real con un arco de circunferencia. El grupo (2) se acerca a la concepción real del infinito.

Puede continuarse el trabajo analizando procesos de validación de estudiantes de secundaria utilizando un SGD. Estos softwares facilitan la exploración, permitiendo construcciones dinámicas y promoviendo la elaboración de conjeturas.

Referencias bibliográficas

Argentina. Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe. (2011). *Educación secundaria. Ciclo básico. Orientaciones curriculares.*

Argentina. Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba. (2011). *Diseño curricular jurisdiccional ciclo básico de la educación secundaria 2011-2015.*

Argentina. Ministerio de Educación ciencia y Tecnología. (2011). *Núcleos de Aprendizaje prioritarios. Nivel Medio.*

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Colombia.

Berté, A. (1999). *Matemática dinámica*. AZ Editora. Buenos Aires.

Berthelot, R. y Salim, M. (1994). *La enseñanza de la geometría en la escuela primaria.* Laboratorio de Didáctica de las Ciencias y Técnicas. Universidad Bordeaux. Francia.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla. Madrid.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24. pp. 139-162.

Gutiérrez, A. (2002): *Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles.* Actas del 5º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 85-94.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). *Student's proof schemes: results from exploratory studies.* En A. Schoenfeld y otros (Ed.), Research in collegiate mathematics education III (pp. 234–283), Providence, EE.UU., American Mahematical Society,

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría, en Puig, L.; Calderón, J. (eds.): *Investigación y didáctica de las matemáticas*. (MEC-CIDE: Madrid, España), pp. 67-85.

Mántica y Carbó (2013). *Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. Educación Matemática. 25(3)*. 27-59.

Mántica (2011) Referentes teóricos para un estudio didáctico de la geometría. En Mántica, A. y Dal Maso, M. (comp). *La geometría en el triángulo de las Bermudas.*

Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula. Ediciones UNL. Santa Fe. Argentina. Pp.13-32.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning Geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics.* 44: 87- 125.

McKnight, C., A. Magid, T. Murphy y M. McKnigt (2000*), Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician,* Rhode Island, American Mathematical Society

Moreno, L. y Waldegg, G. (2008a). La evolución conceptual del infinito matemático actual. En I. Fuenlabrada (comp.), Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 15-41. [Publicación original: “The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity”, *Educational Studies in Matehmatics*, vol. 22, núm. 3, 1991, pp. 211-231.]

Moreno, L. y Waldegg, G. (2008b). *El acercamiento de Bolzano a las paradojas del infinto: implicaciones para la enseñanza.* En I. Fuenlabrada (comp.), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 109-134. [Publicación original: Bolzano´s approach to the paradoxes of infinity: Implications for teachin”, Science & Education, vol. 14, 2005, pp.559-597]

Perry, P.; Camargo, L.; Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Prior, J. y Torregosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 16 (3), pp. 339-368.

Quaranta. M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En Mabel Panizza (comp.)*, Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas,* 189-243, Paidós. Buenos Aires.

Rodríguez Díaz, F. (2006). Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la licenciatura en matemáticas. Trabajo de investigación. Universidad de Valencia. Disponible en http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Rodriguez06.pdf. Fecha de captura: 13/10/2014.

Salim, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-82). Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of Student´s justifications*. The mathematics teacher.* 91(8): 670-676.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Anexo I

Tarea 1. Objetivo: Enunciar la desigualdad triangular.

Problema 1.

a) Dados estos dos segmentos, usando la regla no graduada y el compás, construye un triángulo.

b) Construye otro triángulo, distinto al anterior, con esos mismos dos lados.

c) ¿Cuántos triángulos diferentes se puede construir? ¿Por qué?

Problema 2.

a) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

b) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

c) Construye, si es posible, un triángulo que tenga estos segmentos como lados. Usa el compás y la regla no graduada.

Problema 3.

a) A continuación se proponen medidas de segmentos. Decidan en cada caso si con ellas se puede o no construir un triángulo.

3 cm, 2 cm, 1 cm

8 cm, 12 cm, 5 cm

8 cm, 4 cm, 4 cm

7 cm, 1cm, 2 cm.

b) Con estos segmentos no es posible construir un triángulo: 8cm, 3cm, 2 cm. ¿Qué explicación darían de por qué no se puede?

Al finalizar esta actividad el docente institucionalizara la desigualdad triangular

Anexo II

	Convicción externa	Convicción propia			
	Autoritarios	Empirisismo ingenuo	Experiencia crucial	Ejemplo genérico	Experimento Mental
Grupo 1		Dos triángulos isósceles		*El grado sexagesimal única unidad de medida. Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	
Grupo 2		Dos triángulos	¿Entre 1º y 2º no hay nada? El grado no es la unidad mínima. Abriendo y cerrando los segmentos dados.	*Relación entre la amplitud del ángulo interior de un triángulo y su lado opuesto Submúltiplos decimales de la unidad de medida.*	
Grupo 3			El ángulo de 179º59`.	Entre 1º y 2º hay infinitas medidas Un segmento fijo y otro móvil	
Grupo 4		*Dos triángulos*	Girando uno de los lados de uno de esos triángulos	*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	
Grupo 5	Alumna "buena en matemática"		*Densidad de los números reales.*		*Biyección entre arcos de dos circunferencias concéntricas, de distintos radios, respecto al ángulo central correspondiente a dichos arcos.*
Grupo 6	Pares con "autoridad matemática"	Triángulos con ángulos de 45º y 90º		*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto.*	*Correspondencia entre la amplitud del ángulo central y el arco de circunferencia que abarca.*
Grupo 7	Docente	*El grado sexagesimal única unidad de medida* Basados en el transportador			
Grupo 8		Cuatro triángulos.		*Relación entre la amplitud del ángulo interior del triángulo y su lado opuesto*	

Autores:

Ana María Mántica: Profesora en Matemática y Magister en Didácticas Específicas con mención en Matemática. Docente de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Directora de Proyectos de Investigación en Enseñanza de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo y de Proyectos de Extensión referidos a problemáticas de la enseñanza con estudiantes secundarios que concurren a escuelas de zonas vulnerables. Autora de publicaciones referida a la enseñanza de la matemática en revistas especializadas nacionales e internacionales y de libros y capítulos de libros sobre esta temática. ana.mantica@gmail.com

Ana Laura Carbó: Profesora en Matemática. Docente de la Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Integrante de Proyectos de Investigación en Enseñanza de la Matemática en todos los niveles del sistema educativo y de Proyectos de Extensión referidos a problemáticas de la enseñanza con estudiantes secundarios que concurren a escuelas de zonas vulnerables. analauracarbo@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 103-125

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

COLABORACIÓN INTERNACIONAL EN CURSOS DE MAESTRÍA: EL CASO BRASIL – COLOMBIA

Marcelo de Carvalho Borba, Helber Rangel Formiga Leite de Almeida, Carlos Mario Jaramillo Lopez, Edison Alberto Sucerquia Vega

Fecha de recepción: 12/09/2016
Fecha de aceptación: 06/12/2016

Resumen	Este artículo analiza la colaboración realizada entre dos grupos de investigación, quienes ofertaron un curso totalmente a distancia para dos programas de maestría de diferente nacionalidad. Este curso fue parte de un proyecto de colaboración entre Brasil y Colombia entre los años 2014 y 2016. Empleamos una investigación cualitativa y de manera más específica el estudio de caso, como abordaje metodológico. Destacamos que este tipo de acciones pueden ser una manera como los estudiantes, en los programas maestría, tienen un componente internacional en su formación. **Palabras clave**: Educación Matemática, educación a distancia, tecnologías digitales, internacionalización.
Abstract	This paper analyzes the collaboration between two master's degrees programs through a fully distance-offered discipline common to both programs. This discipline was part of a collaborative project between Brazil and Colombia from 2014 to 2016. We used qualitative research, specifically case studies as a methodological approach. We emphasize that this type of action can be a way for the students in master's programs to have an international component in their education. **Keywords**: Mathematics Education, distance education, digital technologies, internationalization.
Resumo	Este artigo analisa a colaboração entre dois programas de mestrados por meio de uma disciplina totalmente a distância oferecida em comum aos dois programas. Essa disciplina foi parte de um projeto de colaboração entre Brasil e Colômbia entre os anos de 2014 e 2016. Utilizamos a pesquisa qualitativa, mais especificamente o Estudo de Caso, como abordagem metodológica. Destacamos que esse tipo de ação pode ser uma maneira de os estudantes, em programas de mestrado, tenham uma componente internacional em sua formação. **Palavras-chave:** educação matemática, educação a distância, tecnologias digitais, internacionalização. **Palavras chave:** Educação Matemática, Educação a distância, tecnologías digitais, internacionalização.

1. Introducción

En un primer momento, las discusiones acerca de la educación a distancia (EaD) circulan en torno a las posibilidades que las diversas tecnologías podrían provocar en ésta modalidad educativa (Kenski, 1999). Además de esto, la comunidad de investigadores en educación, como sectores de la sociedad en general, pasó a discutir en torno de un debate “Educación a distancia versus Educación presencial”, por lo que entendemos que no es pertinente. Por el contrario, indicamos

> […] el desencadenamiento de esta discusión para preguntas como: ¿hay vertientes pedagógicas que se ajustan más a las posibilidades de la WWW? O: ¿Cómo se da la práctica pedagógica de profesores y monitores en determinado curso (independiente de la modalidad en la cual fue realizado)? O también: ¿Cuál es el grado de interactividad y las posibilidades técnicas tanto de la sala de aula virtual como de la sala de aula presencial? (Borba, 2013, pp.1)

Para Moran (2007), la EaD puede ser considerada como el proceso de enseñanza y aprendizaje, mediado por tecnologías, en el cual profesores y alumnos están separados en el espacio o en el tiempo. Según Maltempi & Malheiros (2010), estas tecnologías constituyen, la radio, la televisión, correo por correspondencia o la Internet. De esta forma, entendemos que la EaD puede ser entendida como el proceso de interacción entre alumnos y profesores, por medio de diferentes medios, en especial de la Internet, que pueden permitir el diálogo, la comunicación y la producción de conocimiento.

Ahora, ¿Por qué es “especial” el párrafo anterior? Porque creemos que el uso del medio “la Internet” como canal de comunicación, contribuye directamente con el mayor paso dado en el desarrollo de la EaD.

> No se trata de proponer que el acceso a la Internet resolverá los problemas […] que se acumulan en países como Brasil hace siglos, o hace décadas, dependiendo de la mirada que se quiera tomar, sin embargo, si es necesario entender que es un análogo de lo que representa el acceso a la escuela en el pasado, y todavía hoy representa cuando se piensa en el ingreso a la escuela de calidad. (Borba, Malheiros & Amaral, 2014, pp. 19).

La EaD viene despertando el interés de investigadores en Educación. En este sentido Borba, Almeida & Chiari (2015) apuntan a la importancia de realizar investigaciones que aborden sobre esta temática, principalmente por posibilitar que sus resultados, bien como otros aspectos, puedan influenciar la actuación del profesor, en la preparación y desarrollo de actividades, en la formación continuada, entre otros factores, sea en el Brasil (Borba, Gracias & Chiari, 2015) o en otros países de América Latina (Sucerquia, Londoño, Jaramillo & Borba, 2016).

El GPIMEM desarrolla todavía otros proyectos en el marco de la EaD. Uno de ellos inició en el año 2014, como una colaboración entre investigadores del grupo, con otros de EDUMATH de la Universidad de Antioquia, de Colombia. Este proyecto investigó aspectos relacionados con la formación continuada de profesores a distancia en los dos países y es coordinado, aquí en Brasil, por el profesor Marcelo de Carvalho Borba y en Colombia por el profesor Carlos Mario Jaramillo López. Una de las etapas del proyecto consistió en el ofrecimiento de una disciplina en común para un programa de posgrado de cada país, y es la experiencia de implementación y ejecución de este curso, de manera específica, de la colaboración que ocurre durante el desarrollo de un trabajo, realizado en parejas mixtas (un alumno brasilero y otro colombiano) que describiremos en este artículo[1].

2. La EaD y la formación online de profesores en Brasil y en Colombia

Todavía parece reciente que, la EaD dio sus primeros pasos hace siglos atrás. Autores como Alves y Nova (2003) hacen alusión a los manuscritos de Platón en Grecia y las cartas de Sao Paulo, en Roma, como experiencias de la EaD que permitieron, entre otras cosas, la difusión de informaciones científicas entre pueblos distantes geográficamente.

La educación a Distancia (EaD) se desarrolló de forma más rápida en los EUA y en algunos países de Europa, por medio de cursos por correspondencia, en general de pequeño valor académico, por ejemplo, cursos de taquigrafía (Rezek Neto, 2008). Un importante paso dado en el camino del ofrecimiento de cursos superiores a distancia fue la creación de la Britsh Open University, en la Inglaterra, en 1969. Litwin (2001) afirma que esta institución fue pionera en lo que se entiende hoy como enseñanza superior a distancia. De acuerdo con el autor, la Open University “mostró al mundo una propuesta con un diseño complejo, que consistió en la utilización de medios impresos, televisión y cursos intensivos en periodos de receso de otras universidades convencionales, producir cursos académicos de calidad” (Litwin, 2001, p. 15, traducción nuestra).

Algunos países de América del Sur y América latina siguieron en la creación de los cursos superiores a distancia, utilizando el modelo de implementación y producción de la Open University, como los casos de la Universidad Abierta de Venezuela y de la Universidad Estatal a distancia de Costa Rica, otros, entretanto, desarrollaron sus propios modelos, como El Salvador, México, Chile, Argentina y Ecuador (Barros, 2003).

Ahora, ¿Cómo esta modalidad educacional se desarrolló en Brasil y en Colombia? En estos países, es posible identificar tres generaciones de la EaD, pensando en la forma como ocurría (y todavía ocurre) la comunicación en cada una

[1] Una versión inicial de este artículo fue presentada, como relato de experiencia, en el XII ENEM en López, Almeida y Vega (2016).

de ellas, directamente relacionadas a las fases de las Tecnologías Digitales (TDs) en el país, principalmente la tercera y cuarta fase.

De acuerdo con Borba, Scucuglia & Gadanidis (2014), la primera fase, inició en los años 80, se caracterizó, fundamentalmente, por el uso del software LOGO, que posibilitaba la construcción de objetos geométricos como segmentos de rectas y ángulos. La segunda fase inició en la primera mitad de los años 90, con la popularización de los computadores personales, la creación de software educativos, y la gran preocupación con la oferta de cursos de formación continuada para capacitar profesores para el uso de esas nuevas tecnologías.

La siguiente fase, inició a final de los años 90, con el surgimiento de la Internet, cuando ésta comenzó a ser utilizada como fuente de informaciones y medio de comunicación entre profesores y alumnos. La cuarta y última fase, inició en mediados del año 2004, con la incursión de la Internet rápida. Como una de las características de esta fase, los autores apuntan a la multimodalidad, que se caracteriza por diversificados modos de comunicación, estando presentes en el ciberespacio, el uso de videos en la Internet, el fácil acceso a videos en plataformas o repositorios (ejemplo, YouTube, TEDTalks), y la producción de videos con cámaras digitales y software de educación con interfaces amigables.

Ya la EaD, dio sus primeros pasos en Brasil y en Colombia bien antes de las TDs mencionadas por Borba, Scucuglia & Gadanidis (2014). Según Zabel & Almeida (2015), la primera generación de EaD en Brasil, inició en el 1900, la cual fue marcada por la enseñanza por correspondencia, basándose fuertemente en la formación profesional técnica. En esta generación, los medios de comunicación utilizados eran la radio y la correspondencia postal. Los cursos ofrecieron poca interacción entre estudiantes y las instituciones que los organizaban y era casi nula entre estudiantes y estudiantes. La formación técnica también era el foco principal de la EaD Colombiana, (Arboleda, 2013; Chacón, 2003; Taylor, 2001; Sucerquia et al., 2016), así como la forma de comunicación entre los participantes de los cursos, esto es, la correspondencia postal era el principal medio de comunicación entre los profesores y los alumnos de los cursos. Actualmente, en ambos países, este tipo de formación continuada ha de ser una alternativa para el desarrollo de cursos en diferentes áreas del conocimiento, usando principalmente periódicos y revistas, nacionales y locales.

Posteriormente, en la medida en que otros medios se popularizaron, como la radio o la televisión, surge la segunda generación de la EaD en los dos países. En Brasil, se desarrolló en las décadas del 70 y 80, y tuvo su fuerza orientada al ofrecimiento de cursos supletorios, ofrecidos vía satélite, con los alumnos recibiendo material impreso para acompañar las clases (Zabel, Almeida, 2015). Ya en Colombia, en el inicio de los años 80, el gobierno nacional permitió la creación de cursos a distancia en el país, por ejemplo, la creación de la universidad del sur, actualmente denominada Universidad Abierta y a Distancia (UNAD). Además de esto, fueron desarrolladas en el país políticas públicas en el área de la educación orientadas directamente para la EaD que tenía como principal objetivo un mayor acceso a la educación superior.

En este sentido, Arboleda (2013) afirma que la Universidad de Antioquia, en 1973, fue la primera institución de enseñanza colombiana en ofrecer cursos a distancia en este nivel, con algunas licenciaturas (Matemáticas, Biología, Química y Español) para profesores, todavía sin formación, que vivieran en municipios distantes geográficamente en el departamento de Antioquia. Estos programas, utilizaban “módulos didácticos de auto estudio” que consistían en libros con instrucciones para que los estudiantes realizaran sus actividades y tareas orientadas por los profesores. Adicionalmente a los libros, existían también audios grabados, aulas de videos, entre otros medios, generando otras alternativas diferentes del material impreso, abriendo a los tutores la interacción con los alumnos durante los fines de semana, vía telefónica, con la finalidad de aclarar dudas.

Con el avance de las tecnologías, según Facundo (2003), las posibilidades de comunicación se tornaban cada vez más amplias, en particular, la Internet es un medio que estableció una nueva relación entre conocimiento y tecnología, y esta nueva forma de comunicarse transformó el estilo de vida en un contexto natural de nuestra sociedad, principalmente hablaremos en la educación. La tercera generación de la EaD brasilera y colombiana, está directamente relacionada a ese medio. Ella está comprendida a partir de mediados de los años 90 hasta hoy, y es marcada por el ofrecimiento de cursos de enseñanza superior, en especial, de formación de profesores. Para entender que esa forma de comunicación difiere cualitativamente de las demás utilizadas en las dos generaciones anteriores, investigadores como Borba, Malheiros & Amaral (2014) involucran el término online en la definición, es decir, ellos entienden EaDonline como la modalidad de educación en la cual las interacciones ocurren, principalmente, vía internet.

Con relación a la formación inicial de profesores, los primeros pasos en Brasil fueron dados en el inicio de los años 2000, pero ganó un mayor espacio a partir de la creación del sistema Universidad Abierta del Brasil (UAB), en 2005. La UAB se convirtió en uno de los principales instrumentos para la formación de profesores en el país, se propósito fue crear condiciones que ampliarán el acceso a cursos profesionales públicos, mediante un mejor aprovechamiento de la infraestructura física y de recursos humanos existentes en las instituciones de enseñanza superior del país (Gatti, Barreto & André, 2011). Aunque los cursos adoptaron semejanzas a los presenciales en la creación y organización, es posible encontrar modelos diferentes con relación a su desarrollo, por ejemplo en el que se hace referencia al uso de tecnologías digitales en estos cursos (Borba & Almeida, 2015).

Así como en Brasil, en Colombia, la EaDonline tiene su inicio en mediados de los años 90, en convenio con universidades extranjeras, por ejemplo, con instituciones mexicanas, españolas y canadienses. Algunas instituciones de enseñanza superior colombiana tenían como principales objetivos indagar y mejorar procesos relacionados con la EaD, como la utilización de ambientes virtuales de aprendizaje (AVA) y la aplicación de alternativas metodológicas para la modalidad.

En este sentido, algunas investigaciones fueron realizadas en los dos países en busca de estos y otros aspectos. En Brasil, con relación a la formación inicial, podemos percibir investigaciones que buscan entender el comportamiento del profesor formado en cursos a distancia y aquellos que actúan en estos cursos (Bandeira Júnior, 2009; Melillo, 2011). Otro aspecto que podemos identificar es la discusión acerca del papel del tutor en los cursos, destacando el hecho de que él establece, en algunos casos, el diálogo directamente con los alumnos, usando recursos de interacción en el sentido de orientarlos en el proceso de aprendizaje, mediado por los medios tecnológicos. Para esto, se requiere una formación en el área del curso en el que va a abordar, además de cierto conocimiento de las tecnologías presentes en el AVA, ya que será responsable por gran parte de las comunicaciones ocurridas durante el curso, vía chat o foros, por ejemplo (Santos, 2013; Viel, 2011). Por último, hay también investigaciones que miran el uso de TDs en estos cursos, buscando comprender cuál es el papel que desempeñan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (Almeida, 2016; Chiari, 2015; Zampieri, 2013).

Con relación a la formación continuada, destacamos la construcción de ambientes orientados a la investigación, es decir, cursos organizados y desarrollados para que las investigaciones indaguen diversos aspectos de esa formación de profesores de Matemática, como los cursos ofrecidos por el GPIMEM. El grupo ofrece anualmente un curso de formación continuada para profesores de matemática, con carácter de extensión, titulado “Tendencias en Educación Matemática”, coordinado por un profesor del grupo, contando siempre con la colaboración de un postgraduando (u otro investigador) y muchas veces de un técnico en informática. Este curso se basa en lecturas previas y discusiones sincrónicas y asincrónicas acerca de dichas lecturas, mediadas por medio de un ambiente virtual de aprendizaje, siendo un escenario para diversas investigaciones del grupo desde entonces.

En este sentido, Souto (2013) investigó cómo ocurren los movimientos que desencadenan algunas transformaciones expansivas durante el curso. La noción de transformación expansiva es una de las principales ideas de la teoría de la actividad en su formato actual, en conjunto con la unidad de análisis, la multivocalidad, la historicidad y las contradicciones internas. En esta versión del curso, los profesores participantes estudiaran propiedades de las cónicas por medio del software GeoGebra, encontrándose virtualmente en el AVA Tidia-Ae.

Ya la investigación de Galleguillos (2016), observó cómo ocurre el desarrollo de la modelación matemática en un curso de formación online. Los participantes de un curso fueron profesores de Matemática, interactuando en un grupo cerrado de la red social Facebook, en el desarrollo de una tarea de modelación. La tarea consistió en proponer y resolver un problema de modelación a partir de un tema de interés del grupo. La autora observó la ocurrencia de una situación de expansión, que envuelve la emergencia y la resolución de contradicciones también características de la Teoría de la Actividad.

Oliveira (2012) analizó las posibilidades de aprendizaje en un curso a distancia. La investigación se constituye a partir del planeamiento, desarrollo y análisis de una acción de formación continuada de profesores de matemática interesados en estudiar el uso de software y applets en la enseñanza de matemáticas. El curso analizado se asemejaba en estructura a los cursos de Tendencias organizados y ofrecidos por el GPIMEM, entre tanto el foco estaba direccionado al uso de algunas Tecnologías Digitales, lo que se ha convertido en el principal objetivo de muchos cursos de formación continuada de profesores, no se limitan sólo a cursos a distancia.

Richit (2015) desarrolló un curso que contó con profesores de Matemática de la Educación Superior en Brasil y del Exterior en un contexto formativo, que tiene como objetivo evidenciar y comprender los aspectos pedagógicos, tecnológicos, matemáticos, culturales y sociales manifestados por esos profesores. Richit (2015) discute, en el contexto del curso de extensión realizado, las potencialidades de las TDs en el abordaje de conceptos de matemática de la Educación Superior, en específico, de Cálculo Diferencial e Integral, Geometría Analítica y Álgebra Lineal, como también los docentes participantes desarrollaron actividades exploratorio-investigativas relacionadas con conceptos de las mencionadas disciplinas mediante el software GeoGebra.

En Colombia, por ejemplo, Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2015) discuten sobre la importancia de un proceso de interacción para la formación continuada de profesores de matemática en ambientes online, del programa de la Universidad de Antioquia, además presentan una relación entre la interacción y la producción de conocimiento matemático con el propósito de contribuir en el campo de la educación matemática desarrollada en ambientes online.

Con algunas características comunes y otras bien diferentes, en relación al desarrollo de la EaD en cada uno de estos países, surge, todavía en 2013, la idea de un proyecto de cooperación internacional entre Brasil y Colombia[2], cuyo objetivo fue establecer aspectos metodológicos y teóricos en un proceso de formación continuada de profesores de matemática en ambientes online, integrando las necesidades individuales de formación de cada uno de los países.

El proyecto contaba con la participación de investigadores de los dos países, entre otras actividades, y su desarrollo permitió que dos profesores de enseñanza media colombianos participaran de la edición de 2014 del curso de “Tendencias” desarrollado por el GPIMEM. Pensando en alcanzar objetivos más elevados, el equipo ejecutor del proyecto decidió entonces, por la elaboración y ofrecimiento de un curso de posgrado, en su totalidad a distancia, que atendiera a los maestrandos de ambos países, donde buscamos observar las posibilidades de colaboración entre alumnos y profesores distantes geográficamente, pero cercanos virtualmente.

[2] Projeto CAPES-COLCIENCIAS, Nº 03/2013.

3. La disciplina

Hace algún tiempo se discute la importancia de la internacionalización de los cursos de posgrado del Brasil. El CAPES, principal agencia de fomento de posgrados en el país enfatiza en la necesidad de internacionalización de los programas. Tales actividades, en general, incluyen publicación de artículos en el exterior, intercambio de posdoctorado y convenios entre los programas. En esta experiencia, intentamos una cooperación dentro de la propuesta de Villarreal, Borba & Esteley (2007) que proponen una cooperación más intensa entre países del sur, siendo “el Sur”, una metáfora para países fuera del eje principal de desarrollo de la ciencia.

Es así como entendemos que una disciplina a distancia reuniendo maestrandos de ambos países, con incentivo para proyectos en conjunto entre estudiantes de ambos países, sería una forma de dar nuevas dimensiones al diálogo, en este caso, un diálogo político, con P mayúscula, en el cual la colaboración entre dos países de América del Sur está intensificada.

Para nosotros, ese diálogo va mucho más allá de una simple conversación, es un medio de interacción en el cual los participantes expresan no solo sus opiniones, sino también sus experiencias, sus dudas y sus sentimientos, así como lo menciona Kenski (2012, p.119), “las personas se quieren comunican e interactuar”. De esta forma, la comunicación entre profesores y alumnos va mucho más allá de la transmisión de conocimiento, pasando por un proceso de construcción colectiva, posibilitando la transformación de experiencias y la producción colectiva de conocimiento. En este caso, una construcción colectiva internacional, superando barreras de lenguas y de distancia.

Ese fue el referente que guío todo el desarrollo del curso, desde su concepción, estructuración hasta su ejecución. La disciplina fue ofertada en el segundo semestre de 2015, a alumnos de maestría del programa de posgrado en Educación matemática (PPGEM) de la UNESP[3] y de la Maestría en enseñanza de las matemáticas, de la Universidad de Antioquia (UdeA), con un total de 17 alumnos, de los cuales nueve eran Brasileros y ocho Colombianos.

Los responsables del curso eran profesores del PPGEM y del Doctorado en educación de la UdeA[4], además de alumnos de Doctorado de ambas universidades, que actuaban en el curso, desempeñando el papel de tutores.

4. Metodología de la investigación

Adoptamos una investigación cualitativa, de manera específica el estudio de caso (Goldenberg, 2011), porque entendemos que esa noción hace posible una mejor comprensión de la situación analizada y una posible extensión a casos

---

[3] http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/new/index.php
[4] http://portal.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/institucional/unidades-academicas/facultades/educacion

semejantes. Entendemos que el análisis de este caso es especial, tener un curso administrado a distancia y desarrollado por un grupo de dos países, con idiomas diferentes. Esperamos que al final de este estudio exploratorio sobre un caso (Stake, 2000), lograr una comprensión más profunda de la naturaleza de este curso y de las interacciones entre los estudiantes de ambos países.

El curso fue dividido en momentos sincrónicos, por medio de la plataforma WizIQ[5], y asincrónicos, por medio del Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) Moodle[6]. En los momentos sincrónicos se discutieron, vía conferencias web, textos preseleccionados por los profesores del curso, con indicaciones de lecturas referentes a los temas (seis en total), además con dos encuentros para la presentación de los trabajos finales. Los temas para las discusiones en los encuentros sincrónicos fueron: educación a distancia online, tecnologías digitales, visualización, formación de profesores, modelación matemática y evaluación en matemática.

Ya en los momentos asincrónicos del curso eran dedicados a aspectos más generales y a los foros de discusión específicos, en los cuales las discusiones iniciadas durante los encuentros sincrónicos continuaban realizándose en el transcurso de la semana. Por lo tanto, cualquiera de los participantes podía hacer preguntas o interactuar con las temáticas del curso.

De esta forma, nuestra fuente de datos fueron los ambientes en los cuales se desarrolló el curso y una evaluación individual realizada por los alumnos del curso en relación a su desarrollo. Borba, Malheiros & Amaral (2014), en su libro sobre educación online resaltan semejanzas y diferencias en la investigación desarrollada en ambientes online, comparada con aquellas desarrolladas en ambientes tradicionales. La gran semejanza, es que el ambiente online puede ser tan "natural" como el presencial, logrando ser, por tanto, un ambiente donde la investigación cualitativa pueda ser desarrollada. Por otro lado, hay diferencias: por ejemplo, no es necesario hacer transcripciones, ya que la escritura es la forma "natural" de comunicación en el ambiente online, si la sala de chat o el foro fueran los ambientes utilizados. En nuestro caso, era usado la video conferencia, y el foro. Entonces, parte de las contribuciones de los alumnos ya era transcrita inmediatamente.

Es decir, no acompañamos eventuales interacciones que hayan ocurrido entre los participantes, como tampoco los entrevistamos. El diálogo durante las sesiones en el chat, foros y las conversaciones en los encuentros sincrónicos, permiten conseguir los datos para el análisis del proyecto.

[5]http://udearroba3.wiziq.com/online-class/3029330-t%C3%B3picos-en-educaci%C3%B3n-matem%C3%A1tica
[6] http://www2.udearroba.co/enrol/index.php?id=1145

De esta forma, diferente de los cursos mencionados en Santos (2006) y Malheiros (2008), en los cuales el chat era utilizado en la comunicación entre profesores y alumnos, o de los mencionados en Borba, Malheiros & Amaral (2014), que hacen uso de videoconferencias, con algunos momentos de chats, en el curso aquí descrito, esas dos tecnologías fueron usadas, constantemente, en conjunto, en el sentido de que, una complementa la otra, principalmente por la dificultad con la lengua, portuguesa o española, en momentos en los cuales la expresión oral no era entendida. Esto se mostró de gran importancia por el carácter colaborativo de la disciplina (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**).

Figura 1 – Foro de discusión de la disciplina
Fuente: Plataforma Moodle del curso. Acceso en nov. 2015

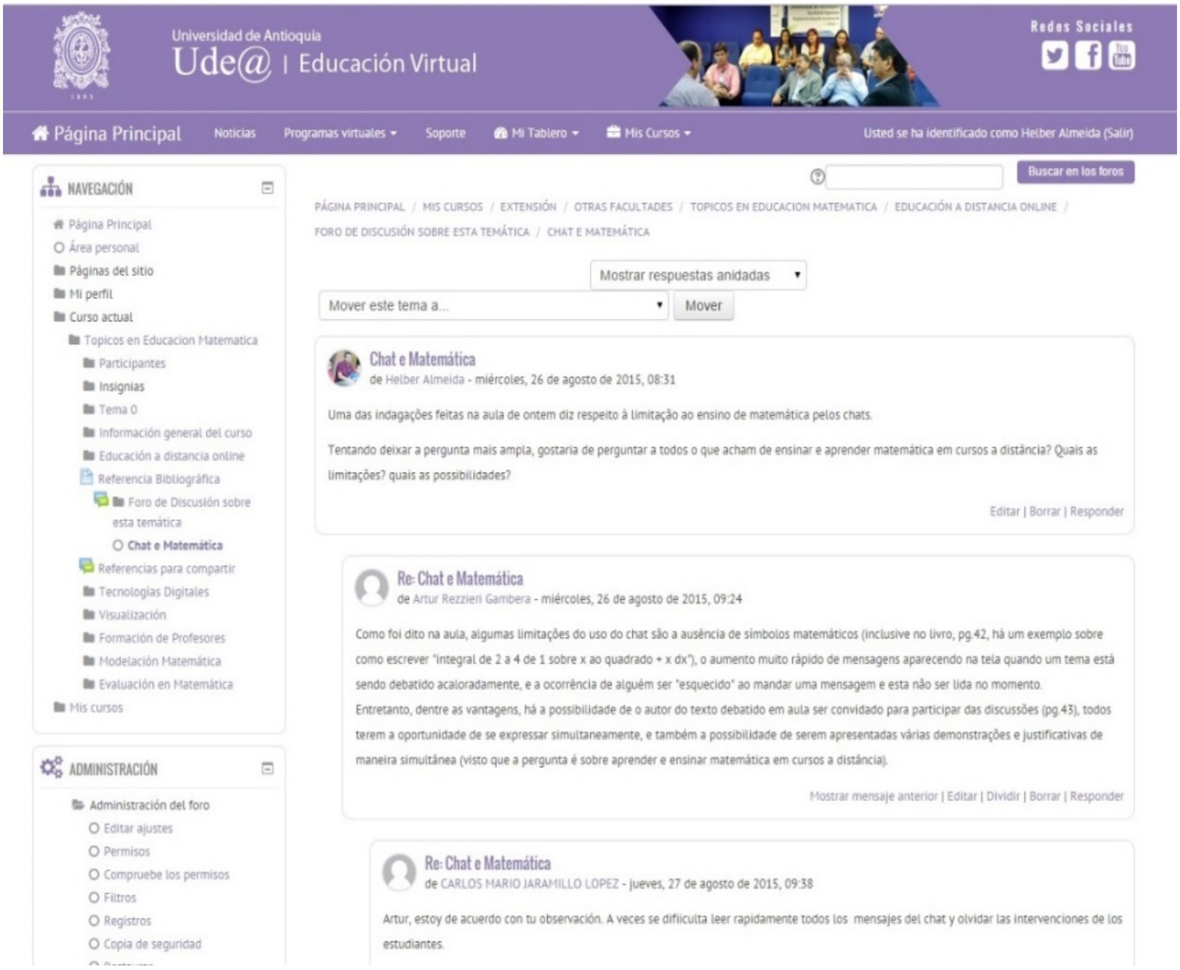
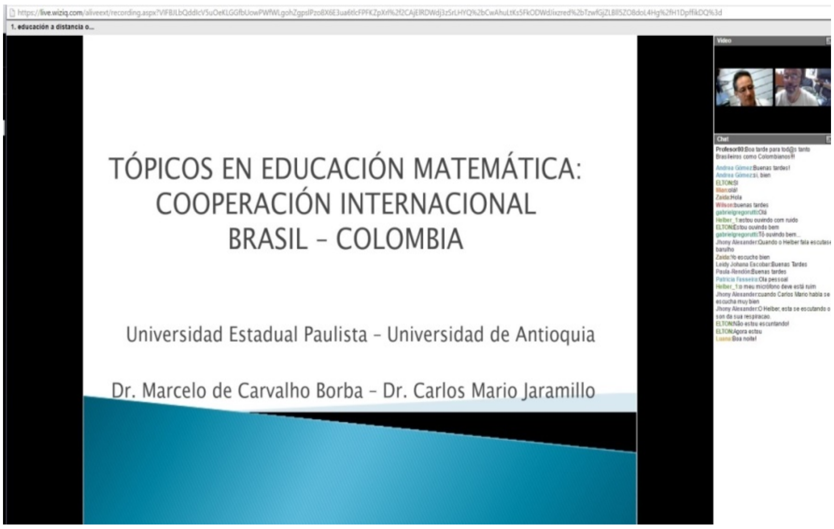


Figura 2 –Aula Virtual de la Disciplina
Fuente: Datos de la investigación



Entendemos que el aprendizaje colaborativo entre los participantes se dio durante todo el desarrollo del curso. Decimos esto para corroborar las ideas de Torres (2004), por lo que entendemos que el aprendizaje colaborativo se caracteriza por: participación activa del alumno en el proceso de aprendizaje; mediación del aprendizaje realizado por profesores y tutores; construcción colectiva del conocimiento, que emerge del intercambio entre pares, de las actividades prácticas de los alumnos, de sus reflexiones, de sus debates y preguntas; interactividad entre los diversos actores que actúan en el proceso; estimulación de los procesos de expresión y comunicación; flexibilización de los roles en el proceso de las comunicaciones y de las relaciones con el fin de permitir la construcción colectiva del saber; sistematización de la planeación, del desarrollo y de la evaluación de las actividades; aceptar las diversidades y diferencias entre alumnos; desarrollo de la autonomía del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje; valoración de la libertad con responsabilidad; compromiso con la autoría; valoración del proceso y no del producto. Todavía, en nuestra comprensión ella ocurre

> [...] cuando grupos relativamente constituidos trabajan juntos en tareas compartidas, reuniendo informaciones e ideas que no siempre son compatibles unas con otras. Asimismo, cada alumno/profesor debe presentar un argumento para apoyar su posición en relación al de otro grupo (Borba & Llinares, 2012), pp. 700, Traducción nuestra).

Durante el curso, incentivamos la constitución de grupos colaborativos, en acuerdo con Fiorentini (2012). Según el autor, el término colaboración puede asumir diferentes significados, o todavía, ser entendido, en algunos casos, como cooperación. Para él, cooperación y colaboración poseen diferentes significados y se relacionan al objetivo de un grupo determinado.

> [...] en la cooperación, unos ayudan a otros, (“co-operan”) en tareas cuyas finalidades generalmente no resultan de una negociación conjunta del grupo, pudiendo haber subordinación de unos en relación a otros y/o relaciones desiguales y jerárquicas [...] [en tanto que en la] colaboración, todos trabajan conjuntamente (“co-laboran”) y se apoyan mutuamente, visionando alcanzar objetivos comunes negociados por el colectivo del grupo (Fiorentini, 2012, p.56).

Es decir, en la colaboración, las relaciones tienden a no ser jerárquicas, en las cuales las responsabilidades por la conducción de las acciones son compartidas por ese colectivo. Ese liderazgo compartido ocurre cuando, por ejemplo, el propio grupo define quien coordina determinada actividad, siendo que, en algunos momentos, ella puede “cambiar de manos”. Todavía, tratándose de un grupo esencialmente colaborativo, todos deben asumir “la responsabilidad de cumplir y hacer cumplir los acuerdos de un grupo, teniendo en cuenta sus objetivos comunes” (Fiorentini, 2012, p.62).

Durante la realización de los encuentros, pudieron ser identificadas situaciones, con la dificultad en la conexión, el multidiálogo[7], ya discutidos en Borba, Malheiros & Amaral (2014) y el idioma, que aunque nos encontrábamos en momentos de “portuñol” muchas veces pudieron ser identificadas dificultades con el español o el portugués, pero no al punto de perjudicar el desarrollo de las clases. Aunque consideramos que otros aspectos puedan también ser discutidos, en este artículo nos restringimos a presentar una de las etapas del curso, los trabajos finales desarrollados por los alumnos, específicamente, aquellos realizados por parejas de alumnos de nacionalidades diferentes, destacando el proceso de colaboración ocurrido durante el proceso de elaboración.

5 Los trabajos finales

Al planear el curso, el equipo de profesores tutores decidió que, como parte de la evaluación, los alumnos deberían elaborar (y presentar) un trabajo que estuviese relacionado con una de las temáticas del curso. Es necesario observar que en este trabajo final, no era la única evaluación en el curso. Las discusiones sincrónicas y asincrónicas también fueron parte del proceso de evaluación, siendo un tercio el peso de cada una de las etapas en la evaluación final.

Para incentivar aún más la colaboración entre los alumnos brasileros y colombianos, se propuso que, en caso de que ellos quisieran, los trabajos podrían ser realizados en parejas, siempre y cuando fuesen alumnos con nacionalidades diferentes.

[7] Término utilizado por los autores para hacer referencia a un tipo de diálogo que ocurre en ambientes online, donde diversas personas “hablan” al mismo tiempo, sin un debate lineal, en el cual, algunas veces, el moderador del debate debe ir releyendo para poder dialogar con cada participante.

Esta idea va en correspondencia con lo que proponen Villarreal, Borba & Esteley (2007), es decir, creemos que los procesos de globalización generan un nuevo tipo de colaboración, lo que los autores llaman de “sur a sur”, con relaciones horizontales y dialógicas, en el sentido Freiriano, en las cuales ambos lados escuchan y son escuchados.

De esta forma, entre los 17 alumnos del curso, de ambos países, seis realizaron el trabajo en parejas. El proceso de escoger los temas a ser desarrollados partiría siempre de una negociación, inicialmente, algo que fuese de interés para ambos. Por tratarse de alumnos con nacionalidades diferentes, y también con realidades educativas distintas, ese proceso estaba relacionado con aspectos referentes a: la estructuración del currículo de Matemáticas en los países respectivos, las leyes que “rigen” esos currículos; y principalmente, cómo ocurría la formación del profesor de matemática, es decir, discusiones que permeaban la realidad en Brasil y en Colombia.

Los temas presentados por las parejas fueron: el uso de juegos electrónicos en Educación Matemática; el uso de la calculadora en los años de escolaridad que anteceden a la Educación superior; el uso de tecnologías digitales y la modelación matemática en la enseñanza y aprendizaje para la población con limitaciones visuales. A continuación se describen algunos aspectos de estos trabajos.

- El uso de juegos electrónicos en la Educación Matemática

En el trabajo “El uso de Juegos electrónicos en la Educación Matemática”, los alumnos desarrollaron una propuesta para un futuro proyecto de investigación que pudiese ser desarrollado por alguno de ellos, o ambos. Durante todo el proceso de elaboración del trabajo, se plantea la siguiente pregunta o interrogante, ¿un ambiente virtual constituido por varios juegos electrónicos sería un ambiente propicio para aprender matemáticas online?

A partir de esto, los autores discuten la posibilidad del uso de juegos electrónicos y de la modelación en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para esto, ellos escribieron cómo las leyes brasileras y colombianas indican el uso de la modelación como soporte a las aulas tradicionales de los dos países. Por ejemplo, ellos indican que en Colombia la modelación surge como uno de los procesos que permiten el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos a partir de una aproximación entre la realidad en que viven y la Matemática escolar.

La propuesta es que el proyecto se desarrolle en una escuela brasilera, específicamente del Estado de Sao Paulo, con un grupo de noveno grado de enseñanza fundamental. Como procedimiento metodológico, se escogerá un juego (con actividades matemáticas) disponible en la Web, en común acuerdo entre alumnos y profesores del grupo de clase. Las dudas, los avances, las dificultades encontradas por los alumnos, serán escritas en un documento compartido por todos. Finalmente, esos alumnos y profesores participarán de una entrevista semiestructurada, en la cual los autores del proyecto buscarán identificar, en el discurso de los sujetos, de qué manera el uso de esos juegos, asociados a la modelación, puede contribuir con la enseñanza y aprendizaje de la matemática en ese grupo de clase.

- Análisis sobre el uso de la calculadora en los años de escolaridad que anteceden a la educación superior: interface entre Brasil y Colombia

En este trabajo se realizó una investigación, cuyo objetivo fue analizar las percepciones de los alumnos y profesores de los dos países acerca del uso de calculadoras como recurso didáctico en las clases de matemáticas. Así mismo, como el trabajo anterior, los autores también tratan aspectos relacionados con las leyes brasileras y colombianas en cuanto al uso de la calculadora en el aula de clase. Además de las leyes, el trabajo presenta resultados de investigaciones que tratan el tema en los dos países. En este sentido, los autores destacan que, aunque las leyes apuntan a incentivar el uso de la calculadora en las aulas de clase de matemáticas, los resultados de estas investigaciones indican que ese uso no viene ocurriendo de forma intensa en los dos países.

Como metodología, los autores realizan una entrevista con alumnos y profesores de educación media de escuelas brasileras y colombianas. Las entrevistas fueron estructuradas y realizadas por medio de un cuestionario enviado a los participantes. Como resultados, los autores identificaron algunas categorías comunes en la opinión de profesores y alumnos, tales como: “la calculadora como una ayuda en las operaciones matemáticas” y “la calculadora como instrumento en la verificación de resultados”.

- Uso de Tecnologías y Modelación Matemática en los Procesos de Enseñanza: aprendizaje de las Matemáticas en Aulas con Población en Condición de Limitación Visual.

Finalmente, en el último trabajo los autores realizaron un rastreo bibliográfico de la literatura brasilera y colombiana acerca del uso de tecnologías y de la modelación en aulas de inclusión para alumnos con limitaciones visuales. Los autores argumentan que en esta revisión fue posible encontrar trabajos que tratan ese tema de forma individual o dos a dos. Por ejemplo, ellos identificaron investigaciones acerca de la modelación y el uso de software y del uso de software con alumnos con limitaciones visuales.

Entre tanto, los autores no consiguieron encontrar en la literatura de los dos países, estudios que abordaran los tres temas en conjunto, lo que, para ellos, justificaba la realización de una futura investigación orientada a investigar cómo ocurren los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con alumnos con limitaciones visuales, haciendo uso de software específicos y de la modelación.

6. Siempre mejorando los trabajos

Los tres trabajos presentados, por parejas formadas con alumnos de nacionalidades diferentes, estaban orientadas a la realización de investigaciones empíricas acerca del uso de las tecnologías en el aula de Matemática, en diferentes etapas de la enseñanza. El colectivo conformado por, los profesores que coordinan el proyecto de cooperación internacional (y también del curso), los alumnos de doctorado que actuaron como tutores y algunos alumnos que participaron del curso, que tenían experiencia con los temas presentados, permitió identificar momentos de colaboración entre estos.

Las presentaciones de los trabajos fueron realizadas en dos momentos distintos. En la primera, un día antes del encuentro sincrónico, los alumnos publican un video en el cual presentaban el trabajo para todos los participantes de la clase – profesores, tutores y demás alumnos. Durante el encuentro sincrónico el video era discutido por todos los participantes.

La idea de utilizar videos en Educación no es nueva, conforme menciona Teixeira (1963):

> No solamente la comunicación se hizo tan universal en el espacio, sino también, con nuevos recursos técnicos, se extendió a través del tiempo, pudiendo el hombre en una simple sesión de cine visualizar las civilizaciones a lo largo de la historia, como sucede en los grandes espectáculos modernos en que la cultura antigua es presentada de forma ni siguiera soñada por los más ambiciosos historiadores del pasado (Teixeira, 1963) pp. 14, traducción nuestra).

Entendemos que el video digital puede expresar determinadas ideas, sean de las matemáticas o no, por medio de la oralidad, escritura, gestos, expresiones corporales y sonidos Es también posible pensar en multimodalidad como un canal para múltiples formas de expresión, medios, medios y artefactos, que son utilizados en apoyo de determinada contextualización, comunicación, formalización o investigación matemática.

Los videos producidos por los alumnos enriquecen, demasiado, las discusiones sincrónicas, como podemos ver en el siguiente fragmento, realizado dentro de la plataforma WizIQ, luego de la exhibición del video producido por los alumnos, Artur (Brasil) y Wilson (Colombia). Las discusiones siguieron siempre vía chat o por medio de videoconferencia[8]. Para diferenciar los diálogos del chat y del video, utilizaremos **negrilla** e *Itálico*, respectivamente.

Artur: O objetivo principal é fazer uma discussão sobre as possibilidades de uso de jogos eletrônicos na educação matemática. Visto que os jogos atuais apresentam um ambiente virtual que permite a interação entre jogadores de diversos lugares, manipulação de objetos virtuais, etc.

---

[8] Debido a las dificultades con la conexión a la Internet, apenas los profesores del curso utilizaban la videoconferencia. En caso de que fuese necesario, un alumno podría utilizar esta tecnología, siendo que, para esto, sería solicitado durante la discusión.

Carlos: É possível saber qual é a pergunta?

Helber: E essa pesquisa seria onde? Uma escola no Brasil e outra na Colômbia? Vocês já pensaram nisso?

Marcelo: Vocês não acham que esse objetivo é muito geral?

Artur: sim, nós percebemos que está bem geral. Não definimos que jogo, ou que série escolar será aplicado.

Lilian: ok

Carlos: obrigado

Artur: A pergunta que motiva nosso projeto é se o ambiente virtual apresentado por vários jogos eletrônicos atuais é um ambiente propício à educação a distância.

Marcelo: A ideia é muito boa, mas vejam!! Está muito amplo!! Pensem em delimitar mais! Quem sabe um jogo só? Acho que é possível sair muita coisa boa do trabalho, mas tem que ser mais específico.

Durante el desarrollo y la presentación de los trabajos, percibimos dos momentos colaborativos. El primero, entre los alumnos que desarrollan el trabajo: en la discusión del tema, en los puntos comunes y diferentes, en como ese tema se presentaba en los escenarios educativos brasileros y colombianos, como ya se ha mencionado anteriormente. Sin embargo, creemos que la segunda colaboración ocurre durante la presentación y las discusiones en torno de los temas propuestos por los alumnos.

En el momento de la presentación, Arthur y Wilson tenían como idea investigar el uso de juegos electrónicos en la clase de Matemáticas, pero todavía no se habían decidido dónde y cómo harían eso. Las discusiones ocurridas en el día de la presentación permitieron que ellos delimitaran su escenario de investigación. En el caso del trabajo de Arthur y Wilson, por tratarse de una propuesta de una investigación que queda por hacerse, ese tipo de colaboración permitió que una idea naciera y fuera desarrollada. Cuando desarrollamos cursos de formación de profesores (continuada o inicial), tenemos que tener presentes esas posibilidades de colaboración.

> La colaboración es una celebración de similitudes y diferencias. Objetivos comunes ayudan a focalizar la energía que vuelve posible la colaboración, y diferentes perspectivas sustentan el aprendizaje y la creación de significados que son partes integrantes para el crecimiento profesional (Arvold, 2003, pp. 191).

Es decir, la colaboración no significa, necesariamente, que las personas involucradas en este proceso estén siempre de acuerdo con sus pares, por el contrario, las similitudes y diferencias entre los participantes de un grupo colaborativo son factores importantes para el crecimiento profesional de cada uno de ellos. Esos aspectos son encontrados en el diálogo que se presenta a continuación, presentado por el grupo formado por Jorge (Colombia) y Lilian (Brasil)

Después de la presentación de los participantes se tiene el siguiente diálogo:

Carlos: Jorge tengo una pregunta, no te entendí bien, dices que es población ciega y tu mencionas que es población en condición de limitación visual… creo que no es lo mismo. Hay que aclarar bastante.

Jorge: claro que sí, lo que pasa es que aquí en Brasil se definen dos grandes grupos, no se llama personas con limitación visual sino que se llama deficiencia visual y se tienen dos grupos: con limitación visual y con ceguera.

Carlos: es importante que a medida que se avance en la investigación delimitar la población.

Carlos: A que podemos llamar tecnología en el aula, es importante aclarar, es mi opinión, es la población con deficiencia visual. Veo tres aspectos importantes, el primero es la población, el segundo es la tecnología, y el tercero es la modelación matemática. Ahí termino.

Jorge*:* Profe Muchas gracias

Marcelo: un tema muy interesante. No pude ver claramente la construcción de la pregunta y objetivo de investigación, la dupla tiene un tema para investigar pero todavía, no tiene una pregunta de investigación y esta sería la cuestión central, pero el tema sería muy interesante, por ejemplo ¿quieren analizar el aprendizaje?, ¿quieren ver las cuestiones emocionales?... van a trabajar con un estudiante o con un salón de clase, esto sería importante para definir un proyecto de investigación.

Jorge: voy a anotar las preguntas y objetivos de investigación para que todos lo vean

*Marcelo***:** me gustó también la idea de una visión amplia de tecnología. Eu vou a pedir a Zaida que envie o link de nosso artigo que foi publicado hoje que fala sobre dobladura de papel. Zaida envie depois para o grupo do Facebook.

Zaida: Claro profe

Lilian: a população de alunos com deficiência visual (baixo visão – cegueira)

Zaida: Jorge y Lilian, ¿cuál es la pregunta y los objetivos? Sé que mencionó la pregunta al final en las conclusiones, pero no me quedó claro.

Jorge: la pregunta es ¿Cómo el uso de tecnologías en el aula se relaciona con modelación de matemáticas en aulas con población con limitación visual?

Lilian: isso... isso que o Jorge escreveu é que nós gostaríamos de discutir no nosso trabalho.

Lilian: ok, gracias professor!

Jorge: Entendida la limitación visual como las posible caracterizaciones que se pueden hacer de la limitación visual (baja visión y ceguera).

Marcelo: eu creo que é algo muy interesante, Modelagem, tecnología e inclusión juntos, pero si esto es um proyecto de investigación tendrán que trabajar bastante para engranar estos aspectos, pero a ideia é original, sería muito interessante.

Jorge: en la universidad (UNESP) hay una revista muy reconocida que es la Bolema, sin embargo la información es muy limitada, hay muy poco al respecto.

Edison: Eu posso enviar para vocês (Jorge e Lilian) algumas referencias sobre isso... Eu tenho duas copias do trabalho sobre limitação visual.

7. Consideraciones finales

El curso ofrecido, fue construido con el propósito de privilegiar el aprendizaje colaborativo. Los alumnos participaron del proceso de aprendizaje, así como también los profesores y tutores. La construcción del conocimiento se dio de forma colectiva en los debates asincrónicos y sincrónicos, en la interacción entre los participantes, en las reflexiones de todos los participantes y en las actividades prácticas de los alumnos, en este caso, se destacan los trabajos realizados por las duplas de nacionalidades diferentes, como se resaltan en este artículo. Es cierto que sólo se conformaron tres duplas de alumnos de nacionalidades diferentes, en total seis de un total de 17 alumnos, sin embargo, la participación de los otros 11 fue de forma colaborativa, en las interacciones que ocurrían durante las presentaciones de esos trabajos, así mismo, en debates que ocurrieron de manera anterior a esta fase, propiciaron la conclusión de trabajos ricos en aspectos teóricos y empíricos.

No hay también en la investigación de corte cualitativo, una preocupación con el tamaño de la muestra investigada. Así mismo, en este curso, intentamos estudiar la internacionalización de la posgraduación. En la realidad brasilera, se ha hablado mucho de esta internacionalización. Entendemos que la forma que proponemos puede llevar a estudiantes en sus etapas iniciales de investigación a desarrollar lazos científicos que pueden generar una colaboración duradera en el futuro. Y es claro que esto no puede ser investigado aquí. Sería interesante que en futuros estudios, fuese evaluado lo que un alumno de un país dado aprendió sobre la realidad educacional de otro, lo mismo sobre referencias bibliográficas de un país hermano. En la continuación de nuestro análisis, iremos buscando elementos para intentar responder esas preguntas.

Consideramos que el ofrecimiento de un curso con las características que presentamos aquí es un desafío en muchos sentidos. En primer lugar, por la dificultad burocrática de su aplicación, ya que por tratarse de un curso oficial de ambos programas de maestría, se tenían que cumplir con algunos requisitos. Además de esto, por tratarse de un curso totalmente virtual, aspectos como las dificultades con la Internet en algunos momentos o la adaptación misma de los alumnos a un curso en esta modalidad. Pero creemos también el carácter innovador de este proyecto.

Este diálogo entre los países, en el sentido descrito por Villarreal, Borba & Esteley (2007), puede ser una manera de que los estudiantes, ya en el inicio de su maestría, mantengan contacto con otros alumnos, de nacionalidades distintas, que también consideramos importantes en esta formación, por el intercambio de ideas y experiencias. Por ejemplo, en los trabajos, por parejas mixtas de alumnos, se evidencian comparaciones cualitativas entre los temas de los dos países. Esto puede ser una manera de que países, como Brasil y Colombia, que normalmente dialogan poco con otros países, estén en una mayor relación, como en momentos de conferencias y mesas redondas de eventos científicos como CIBEM y CIAEM, estableciendo un intercambio más intensivo.

Lo anterior tiene relación con lo que Ole Skovsmose entiende por Matemática Crítica.

> Estoy interesado en el posible papel de la educación matemática como portero, responsable por la entrada de personas, y cómo ella estratifica las personas. Estoy preocupado con todo discurso que pueda intentar eliminar los aspectos sociopolíticos de la educación matemática y definir obstáculos de aprendizaje, políticamente determinados, como fracasos personales. Estoy preocupado al respecto de cómo el racismo, sexismo, elitismo pudieran operar en la educación matemática. Estoy preocupado con la relación entre educación matemática y la democracia (Skovsmose, 2007, pp. 176).

No conocemos acción similar a la realizada entre dos programas de dos países, como en este caso entre Brasil y Colombia. En Borba (2012), también se discuten las cuatro fases del uso de las TDs en Educación (matemática) es discutida la crisis del aula de clase. La cultura en una aula de clase cotidiana, con conferencias y/o lecturas de textos, como es usual en el posgrado, se cruzan también con experiencias de extra posgrados de los estudiantes que “viven en la Internet” y “asisten a clase”, parafraseando Castells (2009). En el curso en cuestión, además de utilizar la Internet en la Educación matemática a distancia como se ha hecho en el GPIMEM hace más de 16 años, utilizamos lo mismo en un curso del posgrado más antiguo del Brasil, como una forma de generar una disciplina que tuviese talla de congreso internacional, al reunir diferentes lenguas, diferentes metodologías y literatura de diversos países dirigida de forma conjunta por colombianos y brasileros.

Todavía, sería interesante que otros programas de posgrado tanto del Brasil como de Colombia realizaran acciones similares a esta, con otros países del sur, pero también del norte, con el propósito de incentivar el intercambio entre alumnos y profesores y lograr así una internacionalización de estos programas y cursos. Todo lo anterior, con el fin de consolidar la conformación de colectivos-internacionales-colaborativos, así como también de experiencias significativas para la formación de maestrandos y doctorandos en el campo de la educación matemática.

Bibliografía

Almeida, H. R. F. L. (2016). Alunos, professores e as tecnologias digitais no Cálculo I da Universidade Aberta do Brasil. In *Anais* (pp. 1–11). São Paulo.

Alves, L., & Nova, C. (2003). *Educação a Distância: Uma Nova Concepção de Aprendizagem e Interatividade*. São Paulo: Futura.

Arboleda, N. (2013). La nueva relación entre tecnología, conocimiento y formación tiende a integrar las modalidades educativas. In N. Arboleda & C. Rama (Eds.), *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades* (pp. 47–63). Santa Fe de Bogotá: ACESAD.

Arvold, B. (2003). Intercultural collaboration: a celebration of commonalties and differences. In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Beeg (Eds.), *Collaboration in Teacher Education* (Vols. 1–191–1–210). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bandeira Júnior, C. P. (2009). *A Licenciatura em Matemática: Um estudo comparativo entre a modalidade presencial e a distância* (Dissertação). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa - PB.

Barros, D. M. (2003). *Educação a Distância e o Universo do Trabalho*. Bauru - SP: EUDSC.

Borba, M. C. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM*, *44*, 802–814.

Borba, M. C. (2013). Os diferentes usos de Tecnologias Digitais em EaD no Brasil. In *Anais* (pp. 1–8). Montevidéu: Semur.

Borba, M. C., & Almeida, h. R. F. L. (2015). *As Licenciaturas em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB): uma visão a partir da utilização das Tecnologias Digitais*. São Paulo: Livraria da Física.

Borba, M. C., Almeida, H. R. F. L., & Chiari, A. S. S. (2015). Tecnologias Digitais e a relação entre teoria e prática: uma análise da produção em trinta anos de BOLEMA. *BOLEMA*, *29*(53), 1115–1140.

Borba, M. C., Gracias, T. A., & Chiari, A. S. S. (2015). Retratos da pesquisa em Educação Matemática online no GPIMEM: um diálogo assíncrono com quinze anos de intervalo. *Educação Matemática Pesquisa*, *17*(5), 843–869.

Borba, M. C., & Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM*, *44*.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S., & Amaral, R. B. (2012). *Educação a Distância online* (3rd ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* (1st ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Castells, M. (2009). *Communication power*. New York: Oxford University Press.

Chacón, I. M. G. (2003). *Matemática Emocional: Os artefatos na aprendizagem matemática*. (D. V. de Moraes, Trans.). Porto Alegre - RS: ArtMed.

Chiari, A. S. S. (2015). *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios* (Tese (Doutorado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Facundo, Á. (2003). *La educación superior virtual en Colombia. La educación superior virtual en América Latina y el Caribe*. México: Biblioteca de la Educación Superior.

Fiorentini, D. (2012). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In M. C. Borba & J. L. Araújo (Eds.), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (4º ed., pp. 53–84). Belo Horizonte: Autêntica.

Galleguillos, J. (2016). Proposta e resolução de um problema de modelagem na Educação Matemática online. In *XII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1–12). São Paulo - SP: SBEM.

Gatti, B. A., Barreto, E. S. de S., & André, M. E. D. A. (2011). *Políticas docentes no Brasil: um estado da arte*. Brasília: UNESCO.

Goldenberg, M. (2011). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Kenski, V. M. (1999). NOVAS TECNOLOGIAS, O REDIMENSIONAMENTO DO ESPAÇO E DO TEMPO E OS IMPACTOS NO TRABALHO DOCENTE. *Informática Educativa*, *12*(1), 35–52.

Litwin, E. (2001). *Educação a distância: temas para o debate de uma nova agenda educativa*. Porto Alegre: Artmed Editora.

López, C. M. J., Almeida, H. R. F. L., & Vega, E. A. S. (2016). Tendências em Educação Matemática: coperação internacional. In *Anais* (pp. 1–12l). São Paulo.

Malheiros, A. P. S. (2008). *Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem* (Tese (Doutorado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Maltempi, M. V., & Malheiros, A. P. S. (2010). Online distance mathematics education in Brazil: research, practice and police. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 291–303.

Melillo, K. M. C. F. A. L. (2011). *o papel do tutor, indiscutivelmente, tem sido o coração do sistema UAB.* (Dissertação). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

Moran, J. M. (2007). *A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá*. Campinas: Papirus.

Oliveira, A. (2012). *Formação continuada de professores de matemática a distância: estar junto virtual e habitar ambientes virtuais de aprendizagem* (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Rezek Neto, C. (2008). *Educação Superior a Distância: criação de um sistema avaliativo exclusivo de EaD para o avanço tecnológico e educacional do país* (Tese). Universidade Metodoista de Piracicaba, Piracicaba.

Richit, A. (2015). *Formação de professores de matemática da educação superior e as tecnologias digitais: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online* (Tese (Doutorado em Educação para a Ciência)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Santos, S. C. (2006). *A Produção Matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial* (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Santos, S. C. (2013). *Um retrato de uma Licenciatura em Matemática a distância sob a ótica de seus alunos iniciantes* (Tese (Doutorado em Educação Matemática)). Programa de Pós-Graduação em Educação matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade*. São Paulo - SP: Cortez.

Stake, R. (2000). Case Studies. In Handbook of Qualitative Research (2a, pp. 435–454). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Souto, D. P. L. (2013). *Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online* (Tese (Doutorado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Sucerquia, E., Londoño, R. A, & Jaramillo, C. M (2015). La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online. En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Sucerquia, E. A., Londoño, R. A., Jaramillo, C. M. J., & Borba, M. C. (2016). La educación a distancia virtual: desarrollo y características en cursos de matemáticas. *Revista Virtual*, *48*. URL: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1167/471

Taylor, J. C. (2001). Fifth generation distance Education.Instructional Science and Technology. *Report*, *4*(1), 1–14.

Teixeira, A. (1963). Mestres de amanhã. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, *40*, 10–19.

Torres, P. L. Laboratório on-line de aprendizagem: uma proposta crítica de aprendizagem colaborativa para a educação. Tubarão: Ed. Unisul, 2004.

Viel, S. R. (2011). *Um olhar sobre a formação de professores a distância: o caso da CEDERJ/UAB* (Tese (Doutorado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Villarreal, M. E., Borba, M. C., & Esteley, C. (2007). Voices from the South: Digital Relationships and Collaboration em the Mathematics Education. In B. Atweh, A. C. Barton, M. C. BORBA, N. Gough, C. Keitel, C. Vistro-Yu, & R. Vithal (Eds.), *Internationalisation and Globalisation in the Mathmatics and Science Education* (pp. 1–20). Berlin: Springer.

Zabel, M., & Almeida, H. R. F. L. (2015). Um retrato da formação online do Professor de Matemática. In M. C. Borba & H. R. F. L. Almeida (Eds.), *As Licenciaturas* *em Matemática da Universidade Aberta do Brasil (UAB): uma visão a partir da utilização das Tecnologias Digitais*. São Paulo: Livraria da Física.

Zampieri, M. T. (2013). *A comunicação em uma disciplina de Introdução a Estatística: um olhar sob a formação inicial de professores de matemática a distância* (Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Autores:

Marcelo de Carvalho Borba. **Nascido no Brasil, professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro – SP, Brasil. Atualmente suas pesquisas estão relacionadas ao uso de Tecnologias Digitais na sala de aula, presencial ou a distancia.** E-mail: mborba@rc.unesp.br. Endereço: Avenida 24A, 1515. Departamento de Educação Matemática. Unesp. Telefone: +55 19 991744941.

Helber Rangel Formiga Leite de Almeida. **Nascido do Brasil, professor da Universidade Federal de Campina Grande. Doutor em Educação Matemática pela UNESP. Desenvolve pesquisas acerca de tecnologías digitais e educação a distância.** E-mail: helber.rangel@gmail.com. Endereço: Rua Leandro Gomes de Barros, 80. Pombal – PB. Telefone: +55 19 982714487.

Carlos Mario Jaramillo Lopez. **Nacido en Colombia, profesor del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Antioquia, Medelllin, Antioquia, Colombia. Actualmente, sus investigaciones están relacionadas con la formación de maestros en educación matemática, presencial y a distancia**. E-mail: carlos.jaramillo1@udea.edu.co. Dirección, calle 67 N° 53-108, bloque 4, oficina 108. UdeA. Telefono: 57 3148904448.

Edison Alberto Sucerquia Vega. **Nacido en Colombia, profesor de cátedra para pregrado y posgrado de la Universidad de Antioquia - Medellín- Antioquia, Colombia. Actualmente, desarrolla investigaciones relacionadas con la educación a distancia virtual en el campo de las matemáticas**. E-mail: edison.sucerquia@udea.edu.co Dirección: carrera 57a # 83f 21. Medellín. Teléfono: +573016385778.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 126-142

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

IMPLICAÇÕES DAS EXPERIÊNCIAS PESSOAIS NA CONSTITUIÇÃO DA IDENTIDADE PROFISSIONAL DOCENTE

Vicente Henrique de Oliveira Filho, Gilberto Tavares dos Santos, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

Fecha de recepción: 16/11/2016
Fecha de aceptación: 20/12/2016

Resumen

Este artículo presenta los resultados de una investigación cualitativa cuyo objetivo era comprender las implicaciones de las experiencias personales en la formación de la identidad profesional de un grupo de professores de la escuela primaria de Brasil. Para recoger los datos se utilizaron cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y paneles descriptivos. Para el análisis de datos se utilizó a ATD (Análisis Textual Discursiva), em cuatro etapas: organización del corpus, unitarización de los elementos de significado, definición de las categorías y producción de metatexto. Los resultados mostraron que las experiências de los profesores se suceden, permitiendo una reflexión y revisión de posiciones, y el consiguiente refuerzo de la identidad profesional a través del tiempo.

Palabras clave: Experiencias personales; refléxion, identidad profesional

Abstract

This paper presents results of a qualitative research whose objective was to understand the implications of personal experiences to the constitution of professional identity in a group of Brazilian elementary school teachers. To collect data, it was used questionnaires, interviews and descriptive memorials prepared by the participants. To analyze data, we used the Discursive Textual Analysis (ATD), in four steps: organization of the corpus, unitization of the elements with meaning, definition of categories and production of metatext. The results showed that the teachers' experiences have come succeeding uninterruptedly, allowing reflection and revision of postures, and consequent strengthening of professional identity over time.

Keywords: Personal experiences, reflection, profesional identity

Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa qualitativa cujo objetivo foi compreender as implicações das experiências pessoais na constituição da identidade profissional de um grupo de docentes do ensino fundamental brasileiro. Para coletar os dados foram utilizados questionários, entrevistas e memoriais elaborados pelos participantes.

Para analisar os dados, utilizou-se a Análise Textual Discursiva (ATD), em quatro etapas: organização do corpus, unitarização dos elementos de significado, definição das categorias e produção de metatexto. Os resultados evidenciaram que as experiências dos docentes vão se sucedendo, permitindo reflexão e revisão de posturas, e consequente fortalecimento da identidade profissional no decorrer do tempo.
Palavras-chave: Experiências pessoais, reflexão, identidade profissional

1. Introdução

A importância da escola, enquanto agente de formação e mediação do conhecimento, está na possibilidade de aproximação dos cidadãos por meio da discussão das relações e experiências que os envolvem. Porém, esse papel não é estático e requer revisão contínua. Na atualidade, por exemplo, faz-se necessário que a escola abandone um comportamento tradicional caracterizado por uma forma de ensinar pouco reflexiva e dissociada da realidade vivencial dos aprendizes. Por vezes, os conhecimentos são repassados “para frente”, encerrando-se a tarefa em si mesma, perdendo-se a oportunidade de promover discussão, reflexão e ampliação de conhecimentos. Para enriquecer o seu papel, é necessário estimular a estrutura escolar a melhor contribuir para a preparação dos discentes, a fim de que eles sejam capazes de interpretar o mundo em que vivem e assumam posicionamentos associados às suas questões cotidianas e às dos seus alunos. Na realidade, esse estímulo significa aprimorar a conexão entre teoria e prática.

Para se reconsiderar o papel da escola, é vital reavaliar as participações dos sujeitos nela envolvidos. Para que se possa pensar na melhor preparação do discente é inevitável articular a formação do docente. Para isso, é fundamental que os professores sejam desafiados a rever suas práticas pedagógicas para acompanhar os avanços surgidos. Ou seja, a relação “aprendizagem-docente-ensino-discente” precisa ser reconhecida conscientemente pelos seus entes para que inovações e melhorias sejam possibilitadas.

Uma das grandes dificuldades surgidas no atendimento da relação “aprendizagem-docente-ensino-discente” diz respeito à educação matemática. Não raro, a disciplina é percebida como obrigação curricular, distinta da possível utilidade que o seu conteúdo possa proporcionar para compreensão de situações cotidianas. Pouco se discute o seu uso na vida diária, pois há dificuldade em se promover a associação entre teoria e prática. Não fica claro para docente e discente que o conhecimento matemático é um produto cultural e está presente em diversos momentos das suas vidas, tais como trocas comerciais, identificação de espaços, quantidades de itens a adquirir etc, desde as atividades mais simples até as mais elaboradas. Todavia, independente do grau de complexidade requerido, é fato que a Matemática é um meio para explicar nossos comportamentos e ações.

Não obstante as dificuldades surgidas para revisar e melhorar os processos de ensino e da aprendizagem matemática, as rápidas transformações no nosso modo de viver vêm transferindo para os docentes muitos desafios e a necessidade de qualificar as práticas pedagógicas para que possam atender às exigências impostas pela sociedade.

Nesse aspecto, este artigo tem o objetivo de compreender as implicações das experiências pessoais na constituição da identidade profissional de um grupo de dezoito docentes de uma escola pública do ensino fundamental do estado brasileiro do Maranhão. Na prática, o trabalho coletou dados por meio de questionários, entrevistas semiestruturadas e análise de memoriais descritivos elaborados pelos professores durante um evento de formação continuada. Para analisar os dados, empregou-se a ATD (Análise Textual Discursiva) de Moraes e Galiazzi (2011), cujas etapas visam fragmentar as ideias apresentadas pelos participantes em suas unidades constituintes, relacioná-las, categorizá-las e ressignificá-las para obter uma compreensão renovada sobre o tópico de interesse.

O artigo está apresentado nas seguintes seções: (i) a introdução ao tema pesquisado, (ii) o referencial teórico que subsidia a interpretação das falas dos sujeitos participantes da pesquisa, (iii) o detalhamento sobre a aplicação da ATD no trabalho, (iv) o estudo de caso que associa as experiências pessoais dos docentes à formação das suas identidades, e (v) as considerações finais acerca da pesquisa realizada.

2. A identidade profissional e saberes docentes

A identidade profissional docente pode ser entendida como a convergência e interação entre o que o docente é (como sujeito cognoscente) e o que faz (como agente social) no espaço profissional e particular, estabelecendo uma tripla relação: pensar-sentir-agir. É o resultado de relações complexas estabelecidas entre o objetivo e o subjetivo, o social e o pessoal (MOITA, 2013).

Desse amplo conceito podem ser desdobradas outras compreensões do que a identidade docente significa e representa, sob vários enfoques e autores, conforme apresentados a seguir.

Para Moita (2013), a construção da identidade docente é inacabada, abrange o período ao longo da trajetória profissional em que se vai realizando a (des)construção e (re)construção de saberes e fazeres, como aprendiz na busca de descobrir algo novo.

Para Imbernón (2010), a identidade docente é elaborada por um conjunto de informações que personaliza, diferencia e confirma o que o sujeito é. A identidade é o resultado da capacidade do professor de ser objeto de sua própria reflexão e da sua capacidade de inter-relacionamento com outras pessoas.

Grillo e Gessinger (2008) argumentam que a identidade se forma do equilíbrio entre o perfil pessoal e profissional do docente. A identidade vai sendo aperfeiçoada com as subsequentes interações com o meio no qual o docente está inserido. Tal processo perpetua-se ao longo da sua carreira, em que os saberes vão sendo construídos e fundamentados em ciclos ininterruptos. Já para Nóvoa (2009), a configuração da identidade emerge de uma força vital em que os docentes se apoderam dos processos de mudança e os transformam em possibilidades reais de intervenção.

A escola é um dos locais de construção da identidade do professor. Nóvoa (2008) esclarece que esse ambiente colabora com os docentes para definirem o sentido social do seu trabalho, onde se procura afastá-los de posições burocráticas e corporativistas e valoriza-se o seu papel de mediador cultural e organizador de situações educativas. Assim vista, a escola é um local de conflitos em que há sinergia entre os sujeitos, de forma que trocas, construções e reconstruções são estabelecidas continuamente com o objetivo de fortalecer as identidades dos docentes e dos discentes.

Nesse sentido, competências colaboram para que o docente atenda a diversos desempenhos durante a sua atuação e vida cotidiana. Trata-se de estabelecer as qualidades harmônicas a serem desenvolvidas e associadas à definição do perfil de uma função ou profissão específica (GARCIA, 1999). Na prática, as competências requeridas no início do exercício da profissão, e estendidas para os anos subsequentes, entrecruzam-se no espaço de vida do docente, em ambiente profissional e privado, e podem ser classificadas sob vários aspectos, dentre os quais devem ser consideradas a reflexão, a formação crítica, a autonomia, a dialogicidade e a interação (TARDIF, 2008).

Liberali (2010) afirma que, para o professor, refletir é motivar novos olhares sobre a sua ação e a própria formação. A reflexão é uma ação consciente que busca compreender o próprio pensamento. Para Santos (1995), professor reflexivo é aquele que "pensa a ação", interrogando-se sobre os caminhos possíveis a seguir em determinados momentos e situações, avaliando os seus resultados.

Schon (2000) apresenta as etapas relacionadas a compreender o processo reflexivo do docente como: conhecimento na ação, reflexão na ação, reflexão sobre a ação e reflexão sobre a reflexão na ação. O conhecimento na ação relaciona-se a saberes que o professor demonstra na execução do seu trabalho; é tácito, revela-se durante a ação desenvolvida e resulta da reformulação constante da própria ação. A reflexão na ação acontece quando o docente reflete durante a própria ação, sem interrupção, e reformula o que está fazendo simultaneamente à ação ocorrendo. Quando o docente projeta a ação mentalmente para análise posterior, está diante da reflexão sobre a ação e essa ocorre por meio de um *insight.*[1] A reflexão sobre a reflexão na ação é a análise realizada após a ação ter sido concluída. É introspectiva, momento no qual o professor dá formato ao conhecer, estabelecendo suporte para compreender os problemas futuros e possíveis soluções.

Na prática, o ato de refletir sobre a ação pedagógica auxilia o professor a elaborar um diagnóstico referente ao processo de ensino e aprendizagem a ser explicitado. A partir desse diagnóstico, o docente será capaz de realizar a intervenção necessária e configurar a aula mais próxima à realidade do aluno (PIMENTA, 2005). Os professores reflexivos relacionam o pensar e o fazer, buscando estabelecer conexões que conduzam às aplicações cotidianas (HARTMAN 2015). Todavia, a reflexão não é exercida como um conjunto de técnicas a serem projetadas e implementadas. Para Zeichner (1993, p. 18),

> a ação reflexiva é um processo que implica mais do que a busca de soluções lógicas e racionais para os problemas. A reflexão implica intuição, emoção e paixão; não é, portanto, nenhum conjunto de técnicas que possa ser empacotado e ensinado aos professores, como alguns tentaram fazer.

Segundo Liberali (2010), o papel da formação crítica é questionar a alienação e gerar motivos que promovam ações para criar novos contextos de atuação. Porém, não basta criticar a realidade, é preciso também modificá-la. Para a autora (2010, p. 22) “ao refletir criticamente, os educadores passam a ser entendidos e entendem-se como intelectuais transformadores, responsáveis por formar cidadãos ativos e também críticos dentro da comunidade”.

Além do espírito crítico, é preciso também desenvolver pensamento autônomo diretamente relacionado à ação reflexiva sobre o fazer pedagógico. A autonomia possibilita ao docente ser o gestor de sua própria formação, assim como

---

[1]Compreensão repentina do docente, em geral intuitiva, de suas próprias atitudes e comportamentos.

o direciona para a realização de ações profissionais e particulares mais efetivas (PERRENOUD, 2008).

Para Guérios (2005), um dos pré-requisitos para se desenvolver autonomia no fazer e fazer-se docente está na valorização da criatividade, reflexão e formação crítica e no desenvolvimento do pensamento estratégico, de longo prazo, associados ao domínio de conhecimentos não apenas da área na qual se exerce a docência.

Ghedin (2005) diz caber ao docente a promoção de meios de reflexão que ultrapassem o campo das ideias em direção às ações concretas. Para isso ocorrer, é preciso que lhe seja atribuída autonomia de ação.

A dialogicidade e atuação em redes de interação são também características requeridas como competência do docente no processo educativo. Nóvoa (1992, p.26) afirma que:

> O diálogo entre professores é fundamental para consolidar saberes emergentes da prática profissional. Mas a criação de redes coletivas de trabalho constitui, também, um fator decisivo de socialização profissional e de afirmação de valores próprios da profissão docente. O desenvolvimento de uma nova cultura profissional dos professores passa pela produção de saberes e de valores que deem corpo a um exercício autônomo da profissão docente.

Do docente, espera-se atuar de forma coletiva por meio de uma rede de interação com outras pessoas, a começar pelos alunos. A interação ocorre em um contexto em que estão presentes símbolos, valores, atitudes, que são passíveis de interpretação. Essas interações são mediadas por diversos canais como os discursos, comportamentos e maneiras de ser. Tais redes exigem dos professores capacidade de se articularem como pessoas em conversação e interação permanente umas com as outras. A interação ocorre por meio de ações interdependentes em que cada sujeito ativo e criativo influencia e é influenciado pelo comportamento do outro (TARDIF, 2008).

Por conseguinte, a identidade profissional do docente é uma construção que evolui ao longo da sua carreira. Essa identidade forma-se sob influência das experiências vividas na sua vida pessoal, no ambiente escolar e no contexto social. Trata-se de uma aprendizagem que perdura a vida toda e requer o aprimoramento constante de várias características, dentre as quais se pode destacar a capacidade de refletir e gerar reflexão e a de praticar e incentivar a crítica como meios de questionar e interpretar a realidade social. Ou seja, espera-se que os professores respondam às necessidades sociais utilizando-se dessas principais características de forma conjunta. Não se pode abordar a constituição da identidade docente sem falar em reflexão associada ao pensamento crítico, ao exercício de autonomia e à capacidade de dialogar e interagir.

3. Metodologia

A pesquisa realizada é qualitativa, do tipo estudo de caso. Para Yin (2005), um estudo de caso busca realizar uma análise em profundidade acerca de um tópico de interesse, de forma a obter amplo conhecimento a seu respeito. O estudo foi aplicado junto a um grupo de dezoito docentes do ensino fundamental em uma escola da rede pública do estado do Maranhão, no Brasil. Os docentes todos têm graduação em nível superior, sendo que um deles já realizou pós-graduação. Os participantes trabalham, em média, há 13 anos na atividade docente.

Para coletar os dados da pesquisa foram utilizados: (i) questionários, (ii) entrevistas semiestruturadas, e (iii) memoriais elaborados pelos professores ao longo de um curso de formação continuada. Nesse memorial, os docentes esboçaram o seu processo formativo profissional em um entrelaçamento de experiências pessoais e formação no decorrer da sua carreira.

Para analisar os dados coletados, foi utilizada a técnica da Análise Textual Discursiva (ATD), conforme proposto por Moraes e Galiazzi (2011), cujas etapas estão definidas em (Figura 1): (1) construção de um corpus, cujo conteúdo é um texto que busque apresentar o material coletado em um nível organizado e de compreensão dos sentidos apresentados pelos entrevistados; (2) definição dos elementos unitários extraídos do corpus e que expressam as principais ideias conectadas ao propósito da pesquisa; (3) categorização dos elementos unitarizados, e (4) produção de metatexto que apresenta as compreensões e interpretações elaboradas.

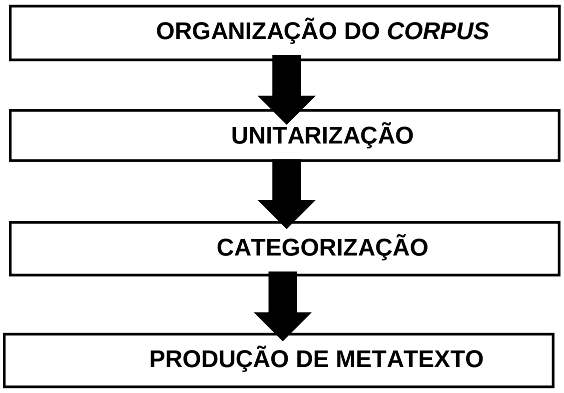


Figura 1 - Sequência de análise da ATD
Fonte: OLIVEIRA FILHO, 2016 (Adaptado de MORAES; GALIAZZI 2011)

De posse dos dados coletados, pôde-se elaborar o *corpus*, cujo conteúdo foi definido em forma de texto argumentativo. Do *corpus* organizado extraíram-se 195 elementos unitários que expressaram as principais ideias levantadas no decorrer das entrevistas. Com a análise dos 195 elementos unitários foram definidos 18 tópicos agrupadores das ideias anteriormente definidas, agora relacionadas entre si e direcionadas para os interesses da pesquisa.

Na etapa seguinte foi realizada a categorização dos elementos unitários. Obtiveram-se quatro categorias como agrupadoras dos elementos unitários, quais sejam: (i) trabalho pedagógico do docente e sua inserção no contexto do estudante, (ii) percepção do docente sobre o processo de aprendizagem, (iii) a formação continuada como aperfeiçoamento da prática pedagógica, e (iv) experiências de vida e o trabalho docente,

Na última etapa, elaborou-se o metatexto, com o fim de promover uma reflexão acerca do material analisado e reinterpretado pelos autores. O propósito dessa etapa foi o de ir além da explicitação das ideias definidas nas categorias, no sentido de permitir compreensão sobre as implicações das experiências pessoais na constituição das identidades dos docentes. Para respeitar a individualidade dos sujeitos pesquisados foram utilizados nomes fictícios para nominá-los.

4. Experiências pessoais e constituição da identidade profissional do docente

A seguir, apresenta-se o metatexto elaborado pelos autores, em que as experiências pessoais relatadas pelos professores são alinhavadas e interpretadas referencialmente à contribuição para a constituição das suas identidades. profissionais. As análises apresentadas têm subsídios dos pensamentos teóricos vigentes.

Experiências de vida e formação da identidade profissional são tessituras que se intercruzam e confundem, no sentido de que as condutas assumidas pelas pessoas no decorrer da vida têm normalmente implicações recíprocas entre o campo pessoal e profissional. As experiências vividas vão formando um conjunto de registros particulares e conduzindo as ações futuras de cada pessoa. Para Veiga (2010), a identidade profissional do docente é uma construção elaborada com vivências da formação pessoal e profissional ocorridas no contexto sociopolítico em que ele se inclui. Moita (2013) afirma que a identidade é o resultado de interações complexas entre o objetivo e o subjetivo. É a composição de um todo que emerge daquilo que se define de si mesmo, interiormente, e socialmente no seu exterior.

A constituição da identidade vem das percepções que se têm hoje referenciadas nas experiências do passado, sejam elas de origem profissional ou pessoal. É um exercício constante de rever a si próprio, repassar a história e lembrar de aspectos da vida particular e profissional como motivadores para construir o futuro. Por essa perspectiva, a vida é uma construção de saberes que são apreendidos de forma estruturada ou não. No caso do docente, o saber "[...] provêm de lugares sociais anteriores à carreira propriamente dita ou situados fora do trabalho cotidiano" (TARDIF, 2008, p. 64). Para o autor, o saber profissional docente é heterogêneo e plural, pois compõe-se de aspectos psicológicos e sociais, que vão sendo construídos no decorrer da sua carreira.

No decorrer da pesquisa, o relato das experiências pessoais ficou evidente relativamente à construção da identidade docente. Por exemplo, a docente Sandra afirma:

> [...] a leitura em matemática é feita diariamente no convívio do dia-a-dia do indivíduo, através de problemas apresentados pelo professor. Devido aos métodos tradicionais trabalharem somente o código matemático é que sinto muita dificuldade quando se exige a leitura matemática [...] o ensino que recebi foi diferente do que se pede hoje.

Subentende-se do depoimento que a docente apreendeu o conhecimento matemático de forma mecânica no seu período de escolarização. Ela faz uma distinção entre o ensino de hoje e o de sua época como discente, mostrando dificuldades para atender às necessidades atuais. Nesses casos, faz-se necessário inserir meios de promover esse destrave e impulsionar uma trajetória profissional mais experiencial e criativa. É preciso desconstruir o posicionamento anterior, motivando-a para o exercício de práticas didáticas mais inovadoras. Trata-se de reconstruir o processo formativo alicerçado em uma concepção de ensino mais reflexiva. Tardif (2008) menciona que o docente vai modificando suas percepções e tem necessidade de novas aprendizagens no decorrer do tempo. As aprendizagens incorporadas vão sendo assimiladas e adaptadas aos diversos contextos sociais percebidos.

Outra professora, Marina, comenta:

> Não fui aluna rebelde, sempre estava presente em tudo que havia na escola, uma aluna esforçada, mas com dificuldade de aprender a ler e principalmente com relação à matemática. Devido a esse problema, minha mãe matriculou-me em uma escola de reforço para aprender a ler e a fazer tabuada, só que eu apanhava muito de palmatória para aprender a tabuada.

Marina explica que teve dificuldades de aprendizagem em relação à leitura e ao aprender Matemática. Devido a essa limitação, que a escola não foi capaz de sanar, precisou buscar auxílio no aprendizado fora da sala de aula. Porém, o que se destaca do seu discurso é a violência física sofrida para memorizar um conteúdo, resquício de um ensino tradicional que não lhe foi capaz de conceder competência mínima para leitura e alfabetização numéricas. Ou seja, sua história de vida tem registros negativos de aprendizado e pouco estimuladores para se ver o ensino e aprendizagem como algo prazeroso e necessário. Situações desse tipo são demonstrações de poder que comprometem a interação entre professor e aluno, o andamento das aulas, o uso de práticas mais interativas, já que podem dificultar o estabelecimento de relações de confiança.

Para André,

> [...] na escola, os erros eram avaliados de forma tradicional, os alunos não podiam errar nunca. Em matemática, mais do que em outra disciplina. Hoje se sabe que os erros não podem ser encarados de forma complacente, nem ser motivo de punição. Mas a importância que se dá ao erro é uma questão fundamental no processo avaliativo.

André evidencia que seus erros em matemática eram avaliados de forma conservadora, ou seja, não eram permitidos. Porém, a despeito do ritual negativo a que possa ter sido submetido - a do erro enquanto fracasso -, a percepção do professor modificou-se e, hoje, ele admite que o erro não deve ser tratado com punição. Na prática, André refez um saber relativo à concepção do erro. O erro faz parte do processo de aprendizagem, representando, dentre tantas manifestações do aluno, indícios de como ele constrói o seu conhecimento. Nessas situações, o professor precisa saber reelaborar uma situação de erro, desvinculando-o de um resultado depreciativo. González Rey (2014, p.41) afirma que, “ o medo do erro é um dos piores inimigos da educação atual: o aluno fica engessado em fórmulas rotineiras para evitar errar e termina sendo incapaz de produzir pensamento sobre o que aprende”. Tapia (2012) diz que se deve aprender com os erros, aproveitando tais momentos para construir representações conceituais e procedimentos motivadores que facilitem a percepção de progresso.

Já para Madalena:

> [...] na escola, a escrita e leitura da matemática eram somente de modo tradicional, em que o professor pegava o livro didático para expor o seu assunto e fazer contas, decorar fórmulas e tabuada. E essa situação era principalmente nas séries de 5° a 8° e no 2° grau, em que os professores formados na área de matemática - a maioria do sexo masculino – não queriam ter o trabalho de realizar atividades lúdicas [...]. Eu procuro fazer com que os alunos aprendam matemática com a prática da vida deles.

A docente diz que também vivenciou o ensino tradicional, com os conteúdos lhe sendo apresentados com exigência de memorização e pouca reflexão. É destacável a sua crítica à inexistência de atividades mais práticas e lúdicas naquela época, em que os conteúdos lhe foram apresentados como um caminho a ser seguido sem questionamentos e reflexão. Presume-se que a docente já tem domínio de práticas pedagógicas mais criativas e que se diferenciam daquelas às quais manteve contato quando discente. A sua forma de atuação como docente referencia-se na reflexão sobre as experiências de aprendizagem a que esteve submetida quando discente.

A professora Roberta afirma:

> [...] hoje estudamos matemática porque a vida do ser humano gira em torno dela, desde os primórdios já havia a necessidade da matemática. Os tempos vão passando e nós precisamos aprimorar a cada dia e a cada instante as novidades existentes na matemática.

Roberta reconhece a relevância da matemática, colocando-a no centro das atenções da vida humana desde o seu surgimento. Porém, não a considera estagnada, já que aponta novidades surgidas constantemente. A essa evolução no tempo, ela vê a necessidade de acompanhamento e aperfeiçoamento do docente. Ao apresentar a Matemática como evolutiva e merecedora de observação permanente, Roberta manifesta necessidade de buscar novos olhares sobre a disciplina no decorrer do tempo a fim de manter a si e os discentes atualizados.

Sérgio afirma que:

> no início da minha escolaridade não tive acesso a um livro didático, era somente explicação da professora e quando passei a estudar em escola regular foi aí que houve contato com livros. Em casa, meus contatos eram por meio de materiais concretos e do dia-a-dia como: fazer compras, as brincadeiras, porque afinal a matemática faz parte da vida cotidiana. Hoje eu utilizo os livros como obrigação para que os alunos possam ter contato com a teoria, mas eu proponho fazer os exercícios em sala de aula também. Com a realização do curso estou vendo muitas possibilidades de usar a matemática de jeito mais prático para os alunos.

O processo de escolarização de Sérgio foi realizado sem o uso de livros didáticos. Percebe-se que essa experiência pessoal pode ter contribuído para delinear a sua formação profissional e a visão de ensino e aprendizagem que hoje ele tem. Ou seja, ele refez a sua trajetória profissional, identificando as limitações ocorridas e as corrigiu. Deduz-se que o curso foi uma oportunidade para reconstituir suas estratégias de atuação em sala de aula.

Por fim, a docente Madalena relata que "no 6º ano eu tive uma professora que me traumatizou na raiz quadrada e nas frações. Eu tive um bloqueio desse conteúdo para ensinar os alunos desde então". Constata-se que aspectos da vida pessoal da professora, como traumas sofridos durante a vida como discente, afloraram na representação da sua trajetória profissional. Nesse sentido Goodson (2013, p. 68) explicita que "é como se o professor fosse a sua própria prática". Porém, a relação do trauma com a ineficácia da ação pedagógica pode ser desfeita. A formação continuada pode ser um bom incentivo para que o trauma seja revisto e superado.

Presume-se que, a despeito das dificuldades enfrentadas no dia-a-dia da profissão, os docentes têm satisfação com relação à escolha profissional realizada. Essa satisfação manifesta-se no empenho em rever práticas, reconstruir conhecimentos, interagir com os colegas e aproximar-se do discente para lhe propiciar ensino e aprendizagem qualificados. Constata-se que a satisfação por ser professor é o componente determinante para que ele possa construir a sua trajetória profissional. Nesse aspecto, o curso serviu para revitalizar o sentimento positivo dos professores relativamente à atividade exercida e à trajetória a ser construída diariamente.

5. Considerações finais

A pesquisa buscou relacionar as experiências de vida do docente à construção da sua trajetória profissional. Das falas dos docentes entrevistados, deduz-se que não se pode relegar as experiências de vida como contribuição para o exercício da vida profissional. Os momentos passados servem de referência não só como exemplos a serem utilizados, mas também direcionam o comportamento do professor para ações futuras.

Os relatos de experiências dos professores, enquanto discentes, sob enfoque positivo ou negativo, demonstram que é possível refletir a partir das situações passadas. Pelas lembranças, é viável reproduzir ou refazer vários dos aspectos relacionados aos saberes docentes, e a postura diante do discente e ao desenvolvimento de práticas pedagógicas. À medida que o docente vai ampliando suas experiências, o seu olhar sobre o processo de ensino e aprendizagem transforma-se, novos saberes vão emergindo e outros vão sendo refeitos em uma construção ininterrupta e cumulativa. Apura-se que a construção da identidade profissional docente é formada pelas ocorrências e lembranças das experiências de vida e de trabalho surgidas no transcorrer do tempo.

A análise dos dados evidenciou que a conexão entre experiências de vida e o exercício da profissão são o sustentáculo para a constituição da identidade docente. Para os professores, as experiências vão se sucedendo, permitindo reflexão e revisão de posturas antes adotadas, no sentido de aprimorar ações, estimular o exercício da profissão e fortalecer a constituição da sua identidade profissional.

Referências

GHEDIN, Evandro. A reflexão sobre a prática cotidiana: Caminho para a formação contínua e para o fortalecimento da escola enquanto espaço coletivo*. Boletim Salto para o Futuro*, v.13, p. 24-32, 2005.

GONZÁLEZ REY, Fernando L. O sujeito que aprende: desafios do desenvolvimento do tema da aprendizagem na psicologia e na prática pedagógica. In: TACCA, Maria Carmem V.R. (Org.), *Aprendizagem e trabalho pedagógico*. 3. ed. Campinas: Alínea. 2014.

GOODSON, Ivor F. Dar voz ao professor: as histórias de vida dos professores e o seu desenvolvimento profissional. In: NÓVOA, António. *Vidas de professores.* Porto: Porto Editora, 2013.

GRILLO, Marlene Correro. GESSINGER Rosana Maria. Constituição da identidade profissional, saberes docentes e prática reflexiva**.** In: GRILLO, Marlene Correro. et al (Orgs.). *A gestão da aula universitária na PUCRS*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2008.

GUÉRIOS, Ettiène. Espaços intersticiais na formação docente: indicativos para a formação continuada de professores que ensinam matemática. In: FIORENTINI, Dario. NACARATO, Adair Mendes. Cultura (Org.). *Formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática*. São Paulo: Musa Editora, 2005.

HARTMAN, Hope J*. Como ser um professor reflexivo em todas as áreas do conhecimento.* Porto Alegre: McGraw-Hill Editora, 2015.

IMBERNÓN, Francisco. *Formação continuada de professores*. Porto Alegre: Artmed, 2010.

LIBERALI, Fernanda Coelho. *Formação crítica de educadores:* questões fundamentais. Campinas SP: Pontes, 2010.

MOITA, Maria da Conceição. Percursos de formação e de transformação. In: NÓVOA, Antonio. (Org.) *Vidas de professores.* Porto: Porto Editora, 2013.

MORAES, Roque. GALIAZZI, Maria do Carmo. *Análise textual discursiva*. Ijuí: Ed. Unijuí, 2011

NÓVOA, Antônio. (Org.). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

NÓVOA, António. Os professores e o "novo" espaço público da educação. In: TARDIF, Maurice. LESSAND, Claude. *O ofício de professor: história, perspectivas e desafios internacionais*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

NÓVOA, António. *Professores:* imagens do futuro presente. Educa: Lisboa, 2009.

OLIVEIRA FILHO, Vicente Henrique de. *Repercussões de um curso de formação continuada à distância na constituição da identidade profissional de um grupo de professores do ensino fundamental no Maranhão.* Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.- Porto Alegre, 2016.

PERRENOUD, Philippe. As "Altas Escolas Pedagógicas" (HEP) suíças entre a forma escolar e a forma universitária: as questões. In: TARDIF, Maurice. LESSAND, Claude. *O ofício de professor: história, perspectivas e desafios internacionais*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

PIMENTA, Selma Garrido (Org.). *Saberes pedagógicos e atividade docente*. 4ª. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

SANTOS, Lucíola Licinio de C. P. *Formação do professor e a pedagogia crítica*. In: FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. (Org.). A pesquisa em educação e as transformações do conhecimento. Campinas, SP: Papirus, 1995.

SCHON, Donald A. *Educando o profissional reflexivo*: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

TAPIA, Jesús Alonso. Contexto, motivação e aprendizagem. In: TAPIA, Jesús Alonso; FITA, Enrique Caturla. *A motivação em sala de aula: o que é, como se faz*. 10 ed. São Paulo: Edições Loyola, 2012.

TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

VEIGA, Ilma Passos Alencastro (Org.) *Profissão docente: novos sentidos, novas perspectivas.* 2ª. ed. Campinas, SP: Papirus, 2010.

YIN, Robert K. *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman. 2005.

ZEICHNER, Kenneth M. *A formação reflexiva de professores*: ideias e práticas. Lisboa: Educa, 1993.

Oliveira Filho, Vicente Henrique de: Licenciado em Ciências com habilitação em Matemática (2001) e Pedagogia (2010) pela Universidade Estadual do Maranhão. Mestre em Educação em Ciências e Matemática, PUCRS (2016). Doutorando em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Professor da Educação Básica no Estado do Maranhão. enriqueoliver2005@yahoo.com.br

Santos, Gilberto Tavares dos: Possui Graduação em Administração de Empresas pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1997), mestrado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2002) e doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2008). Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tem experiência na área de Engenharia de Produção, com ênfase em logística e confiabilidade estatística. gilberto.tavares@ufrgs.br

Abar, Celina Aparecida Almeida Pereira: Possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1973), Mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1979) e Doutorado em Lógica Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1985). Professora titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo atuando na Graduação e no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. abarcaap@pucsp.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 143-167

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

UM MODELO TEÓRICO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO A PARTIR DE UM ESTUDO COM PROFESSORES

Graça Luzia Dominguez Santos, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 26/11/2016
Fecha de aceptación: 13/12/2016

Resumen

En este estudio desarrollamos un modelo teórico de Matemáticas para la Enseñanza del Concepto de Función. Utilizamos como aporte teórico las reglas de reconocimiento y realización de la teoría del sociólogo Basil Bernstein, y como herramienta metodológica la estructura organizacional del Estudio del Concepto. Los datos fueron recolectados en una investigación empírica con un grupo de profesores. El modelo fue estructurado a partir de la categorización de las realizaciones (llamadas Panoramas), identificados como tabular, algebraico, máquina de transformación, generalización de patrones, gráfico, diagrama y formal. Estos Panoramas fueron construidos a la luz de la convergencia entre las reglas de realización y reconocimiento. El modelo puede ser empleado como cuadro teórico en pesquisas sobre Matemáticas para la Enseñanza, así como para analizar y generar una amplia gama de formas de realización del concepto de función en la enseñanza.
Palabras clave: Matemática para la Enseñanza. Función. Concepto. Reglas de Realización y Reconocimiento.

Abstract

In this study, we built a theoretical model of Mathematics for Teaching the Concept of Function. Recognition and realization rules from Basil Bernstein's theory and the structure so-called concept study were used as methodological tools. Data were collected at a group of schoolteachers discussing on teaching function. The model was structured through categories of realizations, which we named as landscapes: tabular, algebraic, transformation machine, pattern generalization, graphics, diagram and formal. These landscapes were built in light of their realization and recognition rules. The model might be used as theoretical framework in researches about Mathematics for Teaching, as well to analyze and produce a wide set of forms of realizing the concept of function in pedagogical practices.
Keywords: Mathematics for Teaching. Function. Concept. Realization and Recognition rules.

Resumo

Nesse estudo, desenvolvemos um modelo teórico de *Matemática para o Ensino do Conceito de Função*. Utilizamos como aporte teórico, os construtos *regras de reconhecimento* e *realização* da teoria do sociólogo Basil Bernstein e como ferramenta metodológica, a estrutura organizacional do Estudo do Conceito. Os dados foram coletados em uma investigação empírica com um grupo de professores. O modelo foi estruturado nas categorias de realizações (panoramas): tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. Estes foram construídos à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. O modelo pode ser empregado tanto como quadro teórico em pesquisas sobre Matemática para o Ensino, quanto para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino nas práticas pedagógicas.
Palavras-chave: Matemática para o Ensino. Função. Conceito. Regras de Realização e Reconhecimento.

1. Introdução

Em meados de 1980, conforme Adler e Davis (2006), Shulman identificou e descreveu o conhecimento profissional para docência em domínios específicos e técnicos, gerando o reconhecimento da natureza multidimensional do conhecimento em uso no ensino. Na área de Educação Matemática, o trabalho de Shulman alavancou uma série de estudos com o propósito de analisar, compreender e caracterizar a forma como a matemática é utilizada e/ou produzida pelos agentes responsáveis pelo seu ensino no contexto escolar (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013). Como consequência, um novo entendimento emergiu, sendo teorizado sob as denominações Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (tradução livre de *Mathematical Knowledge for Teaching*) e Matemática para o Ensino (MpE) (tradução livre de *Mathematics for Teaching*) (Adler; Davis, 2006; Barwell, 2013; Chapman, 2013).

O MKT e MpE têm sido investigados a partir de diferentes quadros epistemológicos e teóricos (Barwell, 2013; Rhoads; Weber, 2016). Nesse estudo, como será explicitado na seção a seguir, adotamos uma perspectiva discursiva para apresentar uma conceptualização de MpE. Sendo assim, como a comunicação produzida na realização do ensino de matemática desenvolve-se em torno de conceitos matemáticos[1], compreendemos MpE como sendo uma Matemática para o Ensino de um determinado conceito. No presente estudo, elegemos função como o conceito a ser investigado.

A escolha do tema função deve-se ao seu papel central e estruturador no ensino da matemática, em virtude de estar presente na maioria dos seus ramos e proporcionar uma forma consistente de fazer conexões entre e através de uma ampla gama de tópicos na própria matemática e em outras áreas (Brasil, 2002; Kleiner, 1993). A relevância desse tópico na matemática, e em particular na matemática escolar, tem se refletido em uma vasta literatura sobre o seu ensino e aprendizagem (Tabach; Nachlieli, 2015). Para Sajka (2003) e Nachlieli e Tabach (2012), a complexidade deste conceito, decorrente da diversidade de formas de comunicá-lo e, portanto de interpretá-lo, torna-o um terreno fecundo para estudos sobre os seus processos de ensino.

Investigações têm sugerido e utilizado diferentes abordagens para o ensino desse tema (Elia, 2006). Callejo, Zapatera (2014) e Wilkie (2016) recomendam a exploração sistemática de padrões e regularidades nos anos iniciais, com o propósito de subsidiar o entendimento de funções. Doorman et al (2012) e Sierpinska (1992) indicam que função deve aparecer inicialmente no contexto de modelagem, como um instrumento para matematizar relações de dependência e variabilidade entre grandezas físicas e de outras naturezas. Hitt e González-Martin (2015) propõem iniciar o ensino de função utilizando a noção de covariação (análise de como duas quantidades variam simultaneamente).

[1] Na seção a seguir apresentamos o nosso entendimento de um conceito matemático adotado nessa investigação. Por ora, considere-o de forma intuitiva.

No que diz respeito à apresentação de uma definição formal do conceito de função[2] no ensino desse tema, segundo Hansson (2006), pesquisadores da área de Educação Matemática consideram que, apesar da precisão e concisão de tais definições, estas não são adequadas para uma abordagem inicial desse conceito na Escola Básica, em decorrência de demandarem uma familiaridade anterior com a terminologia matemática (Jones, 2006). Desse modo, segundo Nachlieli e Tabach (2012), é necessário reexaminar o seu lugar no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Tais considerações apontam tanto para uma certa variabilidade, quanto para a natureza singular das configurações comunicativas produzidas no ensino do conceito de função, especialmente na Escola Básica. Ressaltamos que o foco da presente pesquisa não é o *status* ontológico do conceito de função, mas sim como é realizada[3] e quais as regras que regulam a comunicação matemática no ensino deste conceito.

Isto posto, nesse estudo temos como propósito analisar, descrever e demarcar essa variabilidade e natureza singular de formas de comunicar o conceito de função mobilizada e produzida no ensino, em termos de uma conceptualização de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Essa perspectiva para MpE do Conceito de Função será caracterizada por intermédio de suas fronteiras e possibilidades comunicativas, utilizando como quadro teórico conceitos da Teoria do sociólogo Basil Bernstein (2000, 2003). Adiante, reapresentamos o objetivo do presente estudo de maneira mais delimitada, após a apresentação da fundamentação teórica que sustenta a investigação.

2. Matemática para o Ensino do Conceito de Função: uma perspectiva teórica

Dentre as investigações que trilharam o caminho de estabelecer uma tipologia para o domínio do conhecimento profissional do professor para ensinar matemática, refinando a categorização proposta por Shulman, destacam-se, segundo Barwell (2013) e Chapman (2013), os estudos de Deborah Ball e colaboradores (por exemplo, Ball; Thames; Phelps, 2008). Com base em investigações empíricas de como professores da Educação Básica utilizam a matemática no ensino, esses pesquisadores estabeleceram uma categorização para MKT que está em sintonia, conforme visão por eles adotada, com as demandas matemáticas específicas mobilizadas no trabalho do professor (Ball; Thames; Phelps, 2008). Fundamentado nessa categorização, o projeto *Learning Mathematics for Teaching*[4], cujo corpo técnico é composto por Deborah Ball e colaboradores, tem desenvolvido e validado

---

[2] Por exemplo: "Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if for all $x \in E$ there exists a unique $y \in F$ which is in the given relation with x" (Nachlieli; Tabach, 2012, p.14).
[3] Provisoriamente, tomemos o termo realizar ou realização como intuitivo, a seguir iremos defini-lo apropriadamente.
[4] O projeto investiga os conhecimentos matemáticos necessários para o ensino. Estas medidas incluem itens que refletem as tarefas matemáticas reais que os professores enfrentam nas salas de aula. As avaliações podem ser usadas para medir a eficácia do desenvolvimento profissional focalizado na matemática. Informações disponíveis em http://www.umich.edu/~lmtweb/, acesso em 14 nov. 2016.

instrumentos qualitativos e quantitativos para avaliação do conhecimento profissional do professor de matemática (Adler; Patahuddin, 2012).

Para Adler e Huillet (2008), do ponto de vista epistemológico social, toda atividade matemática está direcionada a algum propósito e ocorre dentro de alguma instituição social. Então, a MpE só pode ser compreendida através de uma linguagem que a posiciona como estruturada e estruturando o contexto pedagógico, no qual ela "vive" (Adler; Huillet, 2008). Com base nesses pressupostos, Adler e Huillet (2008) analisam como a MpE é (re) produzida nos cursos de formação de professores na África do Sul.

Davis e Renert (2014), que adotam a nomenclatura MpE (*"Mathematics-for-teaching*", p.3) para o "[...] conhecimento disciplinar dos professores de matemática" (p. 3, tradução nossa), afastam-se de uma caraterização da MpE em domínios de conhecimento, em razão de a caracterizarem como emergente, dinâmica, tácita e distribuída pela categoria dos professores. Assim, esses pesquisadores sugerem como ferramenta para investigar e desenvolver a MpE, a estratégia colaborativa denominada de *Concept Study*, que traduzimos como Estudo do Conceito (EC), realizada "com" professores, para trazer à tona interpretações tácitas de conceitos matemáticos, selecionadas, mobilizadas e produzidas pelos professores no ensino, em diferentes circunstâncias e contextos (Davis; Renert, 2013, 2014).

Barwell (2013) sugere uma interpretação para o conhecimento de professores de matemática fundamentada na Psicologia Discursiva. Tendo em vista que, nessa perspectiva, o conhecimento é socialmente organizado e discursivamente estruturado (Barwell, 2013), então a comunicação matemática "[...] instanciada pelo ensino de matemática *in situ* desenvolve-se em formas que não são bem captadas por uma abordagem baseada em, por exemplo, categorias de conhecimento dos professores" (Barwell, 2013, p. 596, tradução nossa).

Diante do exposto, é possível corroborar o posicionamento de Chapman (2013) e Davis e Renert (2013) de que há, na área de Educação Matemática, um cenário heterogêneo de conceptualizações para MKT e MpE, implicando em diferenças consideráveis de como estes podem ser estudados, avaliados e desenvolvidos. Nesse estudo, apresentamos uma perspectiva discursiva para MpE[5], porquanto em ressonância com Bernstein (2000), entendemos que a comunicação matemática veiculada e produzida no contexto escolar onde ocorrem as relações entre professores e alunos para ensinar e aprender determinados conteúdos (prática pedagógica) é *regulada* por princípios inerentes a essa prática.

Bernstein (2000, 2003) nomeia os princípios reguladores da comunicação em cada prática pedagógica[6], como princípios de classificação e enquadramento. O princípio de classificação regula o grau de isolamento entre categorias, sejam essas categorias referindo-se a atores sociais, tais como: professores, alunos, disciplinas, práticas tradicionais e não tradicionais, contextos, a exemplo de: escola,

[5] Em decorrência da perspectiva assumida, as ações comunicativas (produtos discursivos) realizadas no contexto escolar constituíram o objeto de análise da presente investigação, por esse motivo optamos por usar a terminologia MpE.

[6] De forma mais ampla, Bernstein (2000) considera "[...] prática pedagógica como um contexto social fundamental por intermédio do qual a reprodução-produção cultural tem lugar." (p. 3, tradução nossa).

universidade, família, etc.. Esse isolamento é o que gera espaço para uma categoria tornar-se específica (Bernstein, 2003). O isolamento é regulado pelos marcadores de fronteira - *regras de reconhecimento*, que possibilitam distinguir as categorias pela especificidade dos seus textos, na sua variabilidade de apresentações (Bernstein, 2000, 2003). Concordante com Bernstein, compreendemos por texto aqui qualquer ato comunicativo expresso por alguém, incluindo textos verbais, escritos, gestuais ou espaciais (Bernstein, 2003). O grau de isolamento do princípio classificatório pode variar entre os valores mais forte (C+) e mais fraco (C-) (Bernstein, 2000, 2003). No caso C+, as categorias são mais especializadas, pois estão separadas por fortes limites (Bernstein, 2000, 2003). Onde há C-, o isolamento é mais reduzido, e como consequência as categorias são menos especializadas (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, se em uma determinada escola a relação entre as disciplinas é regulada por uma C+, há uma relação limitada ou ausente entre os seus respectivos textos.

O princípio de enquadramento refere-se à natureza do controle sobre as regras comunicativas[7] entre as categorias de uma prática pedagógica. Como dito por Bernstein (2003), por intermédio desse princípio é possível "[...] analisar as diferentes formas de comunicação legítima realizada em qualquer prática pedagógica" (p. 12, tradução nossa). O enquadramento também pode apresentar e variar entre valores mais forte (E+) e mais fraco (E-) (Bernstein, 2000, 2003). Diz-se que há E+, quando a categoria considerada como a de maior estatuto[8], dentro de um conjunto de categorias que estamos considerando, tem controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). No caso E-, as categorias de menor estatuto também têm algum controle sobre as regras comunicativas (Bernstein, 2003). O princípio de enquadramento gera e regula as *regras de realização* que fornecem uma base para a seleção e produção de textos legítimos para cada categoria, ou seja, "como" os textos legítimos podem se tornar públicos (Bernstein, 2000, 2003).

Nesse estudo, apropriamo-nos dos conceitos de classificação, enquadramento, regras de reconhecimento e realização para analisar, identificar e categorizar formas especializadas de comunicar o conceito de função, produzidas para/no seu ensino no contexto escolar. Fundamentados nesses pressupostos teóricos, sustentamos que uma perspectiva para uma MpE do Conceito de Função perpassa pela explicitação das regras de reconhecimento e realização que estruturam as configurações comunicativas do conceito de função realizadas no seu ensino. Essas regras são geradas, respectivamente, pelos princípios de classificação e enquadramento operantes na prática pedagógica, que demarcam, regulam e legitimam o caráter e a forma especializada dos seus textos.

Entendemos um conceito matemático como um conjunto constituído pelas *realizações* (tradução livre de *realizations* (Davis; Renert, 2013, 2014)) (textos) que podem ser associadas à palavra que o denomina. Por conseguinte, o "conceito de

---

[7] Para Bernstein (2000), o enquadramento também regula as regras de ordem social, que dizem respeito à forma que as relações hierárquicas tomam em uma determinada prática pedagógica.

[8] A posição hierárquica das categorias que constituem uma prática pedagógica é estabelecida pelo princípio classificatório (relações de poder) (Bernstein, 2000, 2003). Por exemplo, na relação médico-paciente, o médico pertence à categoria com maior estatuto ou o professor, na relação professor-alunos.

função" é formado pelo conjunto de realizações que podem ser associadas à palavra função. As realizações podem se apresentar, assim consideramos, como definições formais, metáforas, algoritmos, analogias, símbolos algébricos, aplicações, gestos, desenhos ou objetos concretos (Davis; Renert, 2014). Ressaltamos que optamos em adotar a denominação "realizações", ao invés de representações, com o propósito de evidenciar que não há, na perspectiva que estamos considerando, uma separação dualista entre o objeto matemático – no caso, função – e suas representações, como se objeto matemático (função) tivesse uma existência autônoma, ou seja, independente das suas representações. Nesse prisma, um conceito matemático não é nada mais do que um conjunto de suas realizações, reconhecidas e legitimadas no contexto comunicacional em que se manifestam.

Alicerçados por esses pressupostos teóricos, conceptualizamos *Matemática no Ensino* (MnE) *do Conceito de Função* como a categoria constituída dos textos do conceito de função, veiculados e produzidos no contexto escolar, pelos agentes responsáveis pelo ensino, de acordo com os princípios de classificação e enquadramento operantes na correspondente prática pedagógica. Portanto, a MnE do Conceito de Função diz respeito às formações discursivas deste conceito, com propósito de ensino, que ocorrem e emergem na dinamicidade da prática pedagógica, no contexto escolar.

Isto posto, definimos *Matemática para o Ensino* (MpE) *do Conceito de Função* como uma *re-presentação* da MnE do Conceito de Função. A utilização da palavra representação – separando o prefixo com um hífen – tem como objetivo demarcar que estamos referindo-nos a uma outra apresentação (apresentar novamente) das formas de realização do conceito de função no ensino. Como exemplos de MpE(s) do Conceito de Função, podemos citar: um grupo de professores analisando o ensino deste conceito ou um autor de um material curricular apresentando um conceito em sua obra. Além desses e outros exemplos, pode-se ter uma Matemática pra o Ensino de um determinado de conceito através de um modelo teórico, ou seja, um conjunto coerente, formalizado e sistematizado de proposições, que descreve as possibilidades e propriedades da MnE.

Assim posto, o objetivo do presente estudo foi desenvolver um modelo teórico de MpE do Conceito de Função, portanto, identificando e descrevendo sistematicamente as categorias de realizações do conceito de função e suas propriedades, produzidas nas relações pedagógicas (a serem) efetivadas. O modelo está estruturado em categorias de realizações do conceito de função que se assemelham relativamente às regras de reconhecimento e realização, produzidas pelos princípios de classificação e enquadramento, respectivamente, que regulam a comunicação nas aulas de matemática.

Para desenvolver o modelo de uma MpE, podemos recorrer a variadas fontes, que contenham realizações possíveis do conceito nas práticas pedagógicas, tais como: livros didáticos, documentos oficiais, avaliações de larga escala, pesquisas na área de Educação Matemática e professores. Esses últimos assumem um papel fundamental, porquanto são os principais agentes no processo de ensino e aprendizagem da matemática (Even; Ball, 2009; Guerrero; Ribeiro, 2014). Os professores são participantes vitais na circulação de textos nas práticas pedagógicas, principalmente por meio da seleção e relevância que dão a interpretações particulares de conceitos matemáticos, culturalmente situadas, que são evocadas, explicita ou implicitamente, de acordo com a adequação matemática, suficiência para situação em questão (Davis; Renert, 2009, 2014), especificidade e legitimidade do contexto escolar.

À vista disso, inferimos que um estudo coletivo com professores, analisando o ensino do conceito de função, produziria uma variabilidade de realizações deste conceito, que, ao serem organizadas utilizando conceitos da teoria dos códigos de Bernstein, nos termos mencionados anteriormente, possibilitar-nos-ia a construção de um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Nesta conformidade, colocando o objetivo da pesquisa de forma mais precisa, tivemos por propósito construir um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo coletivo com professores, que atuam em segmentos da Educação Básica.

O resultado da presente investigação pode servir de quadro analítico para pesquisas que se debruçam sobre fenômenos relativos ao ensino e à aprendizagem de função. Além disso, pode subsidiar autores de materiais didáticos e propostas curriculares no seu trabalho de delineamento, bem como professores no planejamento e realização do ensino.

3. O Contexto e os Participantes

O contexto para coleta de dados da investigação empírica foi um grupo de professores, todos licenciados em Matemática, que na ocasião atuavam no Ensino Fundamental II (anos finais) e/ou no Ensino Médio[9], na região metropolitana da Salvador na Bahia, Brasil. O grupo foi constituído pelos participantes do curso de extensão, intitulado "Curso de Formação Continuada: Conceito de Função e sua variabilidade nas formas de ensino", proposto e coordenado pela primeira autora, promovido pela Pró-Reitoria de Extensão e o Instituto de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA). O curso teve carga horária total de sessenta horas, com trinta e duas horas de aulas presenciais, realizadas nas dependências do Instituto de Matemática da UFBA, aos sábados, no período entre setembro e novembro de 2015.

O curso foi iniciado com treze participantes, mas em decorrência de algumas desistências no seu transcorrer, a partir do quinto encontro presencial esse número foi reduzido a sete participantes, que prosseguiram até sua finalização. No Quadro 1, apresentamos o perfil de todos os professores participantes.

[9] No Brasil, o Ensino Fundamental II, o qual tem duração de 4 anos, atende alunos com idade média (padrão) entre 10 e 15 anos; o Ensino Médio é posterior ao Ensino Fundamental II e tem duração de 3 anos.

Quadro 1 – Perfil dos participantes

Nome	Nível escolar de atuação	Tempo de docência
Profª Talita	Fundamental II e Médio	1 ano e 6 meses
Profª Cibele	Fundamental II e Médio	4 anos
Profª Cláudia	Fundamental II	4 anos
Prof. Cledson	Fundamental II	5 anos
Profª Deise	Médio	15 anos
Prof. Elcio	Fundamental II e Médio	30 anos
Prof. Eusébio	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Janice	Fundamental II	13 anos
Prof. Luis	Fundamental II	3 anos
Prof. Nadison	Fundamental II e Médio	15 anos
Profª Patrícia	Fundamental II	3 anos
Prof. Sampaio	Fundamental II	25 anos
Profª Regina	Fundamental II	20 anos

Fonte: autores

Dentre os nomes constantes no Quadro 1, apenas o nome da professora Talita é fictício. Os demais participantes optaram por sua identificação, pelo primeiro nome ou sobrenome.

O formato do curso foi inspirado na configuração do Estudo do Conceito (EC) proposta por Davis e Renert (2013, 2014). O EC é um modelo de estudo coletivo com professores, em que esses são convidados a analisar, refletir, estender e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito matemático, sob o ponto de vista do seu ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Segundo esses pesquisadores, investigações empíricas ratificam que grupos de professores trabalhando coletivamente, geram listas ricas e consistentes de realizações, quando convidados a situar um conceito no contexto das suas experiências de ensino (Davis; Renert, 2013, 2014). Foi precisamente com base nessa acepção que propusemos o referido curso, pois julgamos que tal configuração produziria dados para a construção de um modelo teórico da MpE do Conceito de Função.

Conforme sugerem Davis e Simmt (2006), no EC, o pesquisador é responsável pelo gerenciamento do curso, organizando, selecionando e adequando ações que possibilitem aos participantes interagirem e exporem suas perspectivas e entendimentos acerca do conceito que está sendo objeto de análise. Sendo assim, com o propósito de instaurar o debate e reflexões sobre o tema, a pesquisadora propôs no primeiro encontro: *Elaborem uma situação problema, questão ou tarefa que vocês utilizam ou já utilizaram em sala de aula, abordando o tema função, que em seguida será socializada com o grupo*. A apresentação dessa atividade gerou uma lista diversificada de noções e interpretações sobre formas de realizar o conceito de função no ensino, que foram anotadas por todos para reflexões posteriores. Nessa lista, já foi possível identificar várias realizações deste conceito.

No Quadro 2, apresentamos, as atividades desenvolvidas a partir do segundo encontro. Tomando como base os estudos do conceito realizados por Davis e Renert (2013, 2014), iniciamos o curso com apenas o primeiro encontro planejado previamente. As conformações das sessões seguintes emergiram no transcorrer de cada encontro precedente, como decorrência das discussões entrecorridas.

Quadro 2 – Atividades desenvolvidas nos encontros presenciais

Encontro	Atividades Desenvolvidas
Segundo	Cada professor trouxe uma situação problema, com solução, selecionada da sua experiência no ensino do tema. As situações foram analisadas pelo grupo e confrontadas com a lista construída no primeiro encontro.
Terceiro	O grupo foi dividido em três subgrupos, em que cada subgrupo apresentou uma situação problema (preparada previamente) que poderia ser aplicada no sexto, sétimo e nono ano, envolvendo noções do conceito de função, apesar desse tema não ser explicitamente abordado nesses anos.
Quarto	Organização e agrupamento da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função,por semelhanças de acordo com critérios estabelecidos pelos subgrupos.
Quinto	Apresentação das soluções de questões propostas pela pesquisadora no encontro anterior, com análise de quais noções e interpretações associadas ao tema função, construídas até o momento pelo grupo, as questões se vinculavam, bem como se existia algum outro entendimento relacionado com tema, que ainda não havia sido contemplado nos encontros anteriores.
Sexto	Discussão e análise de um texto que abordava a história do conceito de função, buscando relacionar as etapas históricas do desenvolvimento do conceito de função com as formas de realizar esse tema no ensino, que já haviam sido levantadas pelo grupo.
Sétimo	O grupo foi dividido em dois subgrupos, em que um subgrupo expôs uma aula de introdução do conceito de função no nono ano e o outro no primeiro ano do Ensino Médio. Após a apresentação, o grupo fez uma apreciação das similaridades e diferenças entre as duas aulas.
Oitavo	Retomada da tentativa de organizar da lista de noções e interpretações vinculadas ao conceito de função, por semelhanças, de acordo com critérios estabelecidos pelo grupo. Análise e reflexão coletiva acerca da variabilidade de formas de realizar o conceito de função na Escola Básica, bem como a repercussão dessa perspectiva, construída coletivamente, na tarefa de realizar o ensino esse conceito.

Fonte: autores

4. Procedimentos Metodológicos

Para análise e categorização das realizações do conceito de função identificadas no estudo com os professores, além dos conceitos da teoria dos códigos de Basil Bernstein, fundamentamo-nos na estrutura dos EC(s) implementados por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), porém, nesta dimensão, tomando-a para a análise de dados.

Baseados em experiências anteriores, Davis e Renert (2009) identificaram um conjunto de quatro ênfases para organização do trabalho dos grupos de estudo do conceito, que se mostraram produtivas para elaboração coletiva de entendimentos sobre conceitos matemáticos. Os investigadores intitularam essas ênfases de *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends* (Davis; Renert, 2009, 2013, 2014), que traduzimos como realizações, panoramas, vinculações e combinações, respectivamente.

O entendimento para realizações é o mesmo apresentado na seção 2. Nos estudos realizados por Davis e Renert (2013, 2014), os panoramas são conjuntos de realizações que possuem características similares, em conformidade com parâmetros estabelecidos pelos participantes. Vinculações são, segundo Davis e Renert (2013, 2014), implicações lógicas que as realizações constituintes de cada panorama instauram, gerando diferentes possibilidades e restrições interpretativas das relações conceituais. A ênfase combinação é definida como uma fusão de realizações que produzem novas realizações (meta-realizações), as quais circunscrevem perspectivas interpretativas de cunho mais amplo. (Davis; Renert, 2014). No presente estudo a ênfase combinações não foi observada.

Nesse estudo, usamos como parâmetro para construção dos panoramas, a convergência das regras de reconhecimento e realização. Para vinculações, adotamos entendimento congênere ao de Davis e Renert (2013, 2014), norteados, porém, por nossa perspectiva teórica. Por conseguinte, vinculações referem-se à produção de potencialidades e limitações comunicativas, desinentes das implicações lógicas estabelecidas pelas realizações componentes de cada panorama, que produzem uma teia de semelhanças e diferenças de noções, entendimentos e especificidades, muitas vezes subjacentes do conceito de função.

Ainda que os professores participantes do grupo pudessem agrupar as realizações e discutir suas implicações, a tarefa de organizá-las sistematicamente como necessário a um modelo teórico ficou sob a responsabilidade dos pesquisadores. Nesse sentido, entendemos que nos apropriamos da estrutura do EC, proposta por Davis e Renert (2009, 2013, 2014), para além de uma estratégia de trabalho com os professores, transformando tal sistematização organizacional das realizações em uma ferramenta analítica para construção do modelo teórico de MpE do Conceito de Função.

Para o registro dos dados gerados, utilizamos: 1) o diário de campo, no qual fizemos anotações sobre o andamento do curso e das realizações do conceito de função produzidas pelos participantes; 2) gravações audiovisuais de todos os encontros, que após serem analisadas, tiveram transcritos os trechos nos quais identificamos realizações e vinculações discutidas e produzidas pelos participantes; 3) produções escritas pelos participantes (registros em papel e no quadro); 4) questionário que aplicamos para traçar o perfil dos participantes.

Tais documentos foram analisados em relação dialógica-dialética com a sintaxe conceitual explícita dos conceitos da teoria dos códigos de Bernstein (2000; 2003) e com a organização estrutural do Estudo do Conceito, os quais constituíram o quadro teórico, analítico e metodológico que fundamentam a linguagem conceitual do modelo de MpE do Conceito de Função construído.

5. Panoramas e Vinculações

As realizações consideradas como associáveis à palavra função, identificadas na coleção dos dados produzidos pelos participantes do curso, foram agrupadas por semelhanças de acordo com a convergência das regras de realização e reconhecimento, nos seguintes panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal. A seguir, analisamos cada um dos panoramas, abordando suas vinculações.

Nas transcrições das falas dos professores quando inserimos alguma explicação para o enunciado, colocamo-la entre parêntesis.

5.1. Panorama Tabular

Compõem o panorama tabular as realizações de função como tabela, que se caracterizam pela disposição dos dados de entrada e os correspondentes dados de saída de uma relação funcional, em linhas ou colunas.

Na Parte A do Quadro 3, transcrevemos uma tabela da relação funcional que associa o consumo mensal em *watts* ao correspondente valor a ser pago na conta de energia elétrica, considerando o preço de R$ 0,54 por *watt*. Essa atividade foi proposta pela Profª Janice a uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental (quando o tema função ainda não foi inserido explicitamente no ensino), com os dados sobre o consumo mensal em watts de vários eletrodomésticos trazidos de casa pelos alunos. Segundo a Profª Janice, a tabela é realizada:

> "[...] usando a operação multiplicação pelo valor constante do *watt* [...] o que estaria variando é o valor mensal do consumo e automaticamente o valor da conta que iria ser paga [...] um ideia de função [...] a gente vai obedecer a uma sentença matemática e nós vamos calcular o valor em cima disso [...] que no caso é a operação matemática" (Profª Janice – 3º encontro).

Quadro 3 – Realizações de função como tabela

Parte A

Um *watt*-hora (W/h) é a medida de energia usualmente utilizada em eletrotécnica e é a quantidade de energia utilizada para alimentar uma carga de potência de um *watt* pelo período de uma hora. O valor de nossa conta de energia, depende do consumo de watts mensal. Com base nessas informações, complete a tabela abaixo:

.0,54	
Consumo (W)	Valor (R$)
40	21,60
70	37,80
120	64,80
170	91,80
220	118,80
254	137,16

Fonte: Transcrição do registro da Profª Janice – 3º encontro

Parte B

Uma caneta custa 3 reais. Se representarmos por "x" o nº de canetas que queremos comprar e por "y" o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela:

nº canetas	Preço a pagar
1	1 . 3 = 3
2	2 . 3 = 6
.	
.	
6	6 . 3 = 18

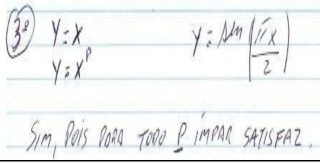
Fonte: Transcrição do registro da Profª Cibele – 2º encontro

Parte C

Atividade 3: Apresente uma lei de formação de uma função que satisfaça a relação descrita pela tabela a seguir.
Existem outras funções que satisfazem a relação? Por quê?

x	-1	0	1
y	-1	0	1

Adaptado de Schwarz e Dreyfus (1995)



Fonte: Registro do Prof. Luis Sérgio - 5º encontro

No supracitado extrato, podemos constatar que na realização da tabela está presente o reconhecimento das noções de variação e dependência, considerando que o preço a pagar (variável dependente) varia em decorrência do consumo (variável independente), bem como, que essa variação obedece a um padrão, uma lei (que no caso é a multiplicação do consumo por R$0,54, valor fixo do *watt*). Entendemos que a realização tabular pode ser o prelúdio do reconhecimento e legitimação das noções de variação, dependência, regularidade como constituintes da rede de interpretações do conceito de função.

Na Parte B do Quadro 3, expomos uma questão sugerida pela Profª Cibele para introdução do tema função no nono ano. No decorrer da apresentação da referida questão, a professora enuncia:

> Olhando a tabela você percebe que [...] a todos os valores de *x* estão associados valores de *y* e para cada valor de *x* está associado um único valor de y (Profª Cibele – 2º encontro).

Tal assertiva trata do caráter univalente de uma relação funcional, demarcando, dessa forma, o critério para o reconhecimento de uma tabela como uma realização do conceito de função, ou seja, a cada elemento do conjunto de entrada (das variáveis independentes) está associado um único elemento do conjunto de saída (das variáveis dependentes).

A solução da atividade descrita na Parte C do Quadro 3, apresenta uma infinidade de relações funcionais satisfazendo os dados da mesma realização tabular, e a análise da sua solução gerou algumas ponderações pelo grupo:

> Se temos um fenômeno e focalizamos parte de um fenômeno (poucos dados) então podemos ter modelos matemáticos (relações funcionais) que

representem aquele fragmento, mas não o fenômeno como um todo (Prof. Eusébio- 5º encontro).

O excerto anterior entremostra a limitação de termos informações apenas de um número reduzido de dados da realização tabular de uma relação funcional.

5.2. Panorama Algébrico

O panorama algébrico é composto das realizações de uma relação funcional cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, que explicitam a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou expressão algébrica. Indicando-se, em uma relação funcional, a variável independente por x e a variável dependente por y, então a realização de uma função como expressão algébrica é frequentemente reconhecida e realizada pelo texto $y = f(x)$.

O exercício da Parte A do Quadro 4 faz referência a uma relação funcional de uma situação fictícia ou hipotética, na qual a realização de função como expressão algébrica $(f(x) = 1{,}5x + 16)$ foi utilizada para descrever (modelar matematicamente) a situação, ou seja, a realização algébrica "traduz o comportamento do fenômeno" (enunciação do Prof. Eusébio – 2º Encontro), de forma concisa e compacta, por intermédio de textos específicos, a saber, operadores simbólicos e letras (variáveis).

Quadro 4 – Realizações de função como expressão algébrica

Parte A	Parte B	Parte C
Na produção de peças, uma fábrica tem custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida (custo unitário). Sendo x o número de peças produzidas, determine: a) A lei da função que fornece o custo de produção de x peças; b) Calcule o custo de produção de 400 peças. Respostas: a) $f(x) = 1{,}5x + 16$ b) $f(400) = 1{,}5.400 + 16$ $f(400) = 600 + 16 = 616$	Um automóvel está parado diante da UFBA, um caminhão o ultrapassa com velocidade constante de 20m/s, nesse exato instante o motorista do automóvel arranca com a aceleração de 4m/s^2, em perseguição ao caminhão. Após quanto tempo o automóvel alcançará o caminhão? Quanto terá percorrido o automóvel? $S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $S_a = 0 + (0 \cdot 1) + \frac{4t^2}{2} \Rightarrow S_a = 2t^2$ $S_c = 0 + 20t + \frac{0t^2}{2} \Rightarrow S_c = 20t$ $S_c = S_a \Rightarrow 20t = 2t^2 \Rightarrow 2t^2 - 20t = 0$ $\Rightarrow 2t(t-10) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 10s$	Uma aplicação f de R em R, define uma função "afim", quando associa a cada $x \in R$ o elemento $(ax+b) \in R$, onde $a \neq 0$. Isto significa que $(x, ax+b) \in f, \forall x \in R.$ Se $b = 0$ então $f : x \to ax$, é dita função linear.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Luis Sérgio – 4º encontro	Fonte: Transcrição do registro do Prof. Nadison – 2º encontro	Fonte: Transcrição do registro de Registro do Prof. Sampaio – 5º encontro

A partir da realização algébrica da relação funcional é possível determinar o custo de produção ($f(x)$ – variável dependente) que é único, para cada número x de peças produzidas (variável independente), o que foi realizado, no item b da questão transcrita na Parte A do Quadro 4 para $x = 400$. Tais considerações apontam para o reconhecimento da realização algébrica como apropriada para tratar aspectos quantitativos de uma relação funcional.

Para solucionar a questão apresentada na Parte B do Quadro 4 é necessário a partir da função horária do espaço do movimento uniformemente variado, cuja realização algébrica é $S = S_0 + v_0 t + (at^2/2)$, realizar algebricamente as funções horárias do automóvel ($S_a = 2t^2$) e do caminhão ($S_c = 20t$), e em seguida determinar a interseção entre essas duas relações funcionais, que é equivalente a obter os zeros da função quadrática $S_a - S_c = 2t^2 - 20t$. Demarcamos que o reconhecimento dos textos das realizações algébricas propiciou a legitimação da realização tanto da operação subtração $(S_a - S_c = 2t^2 - 20t)$, como também da determinação dos zeros desta relação funcional.

As realizações de função como expressão algébrica apresentam como especificidade e potencialidade consolidar informações acerca de uma relação funcional em uma única cadeia de símbolos, tornando possível realizar operações (Ronda, 2015), tais como somar, subtrair, multiplicar, dividir e compor.

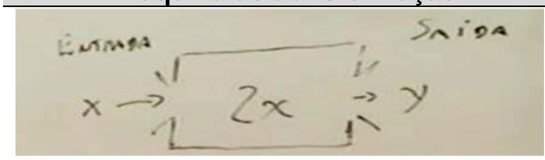
Na Parte C do Quadro 4, transcrevemos um registro em que a realização de função como expressão algébrica foi utilizada para definir as relações funcionais afim e linear. O caráter conciso das realizações algébricas pode viabilizar o reconhecimento de tipos específicos de funções, podendo ser empregada para defini-las.

No entanto, apesar das potencialidades das realizações desse panorama, Carraher, Martinez e Schliemann (2008) ressaltam que as realizações algébricas não são alternativas viáveis para estudantes no início do processo de escolarização, porquanto eles não estão familiarizados com esses textos. Desse modo, segundo esses pesquisadores, torna-se cabal investigar (outras) formas de como as relações funcionais podem ser realizadas no ensino (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

5.3. Panorama Máquina de Transformação

Constituem esse panorama as realizações de função que utilizam a metáfora de uma relação funcional como uma máquina que transforma um dado valor (de entrada ou *input*) em outro (saída ou *output*). No Quadro 5, reportamos um texto icônico da realização de função como máquina de transformação, apresentado pelo Prof. Sampaio no primeiro encontro presencial do curso.

Quadro 5 – Realização de função como máquina de transformação



Fonte: Registro de Prof. Sampaio – 1º encontro

O professor relata que utiliza essa realização na introdução do tema função, pois considera que tais textos têm uma relação mais direta com o contexto cotidiano dos alunos: "Aqui nessa máquina eu coloco minha matéria prima, a minha máquina processa e coloca para fora o meu produto" (Prof. Sampaio, 1º encontro), isto é, cada elemento que entra é transformado/processado em um (único) elemento de saída, condição (univalência) para que uma dada relação seja funcional. Esse extrato da fala do Prof. Sampaio revela que as realizações de função como máquina de transformação viabilizam o reconhecimento e legitimação das noções processo, transformação e mudança como constituintes da teia de possibilidades interpretativas do conceito de função. O Prof. Sampaio também menciona que, a partir dessa realização, introduz as definições dos conjuntos domínio (entrada) e imagem (saída), instaurando, desse modo, o processo de familiarização com os textos legítimos que compõem esse conceito.

As realizações desse panorama afiguram-se como mais condizentes para realizar funções cujos conjuntos domínio e imagem são numéricos, e a relação funcional respeita uma regra, como podemos observar no Quadro 5, em que a realização de função como máquina de transformação está subordinada à realização algébrica ($f(x)=2x$). Essas considerações evidenciam as limitações comunicativas que os textos desse panorama estabelecem.

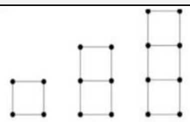
5.4. Panorama Generalização de Padrões

O presente panorama é formado das realizações que comunicam o conceito de função como uma generalização de padrões. Estamos considerando generalização de padrões como textos com afirmações gerais, que são gerados pelo reconhecimento do padrão de relação entre quantidades e/ou variáveis, com base em algumas informações de uma situação (funcional) particular (Mavrikis et al, 2012).

Na Parte A do Quadro 6, reportamos uma questão adaptada de Callejo e Zapatera (2014), proposta aos professores pela pesquisadora, que se refere ao reconhecimento e realização de uma generalização, padrão ou regularidade em uma sequência geométrica. Na discussão da questão pelo grupo a generalização foi realizada, por exemplo, pelos textos:

> Foram usados quatro palitos para fazer o primeiro quadrado e três para cada quadrado subsequente, assim n quadrados requererão $4+3(n-1)=3n+1$ palitos (Profª Cibele, 5º encontro).

> [...] as bolinhas vão aumentando dois a dois, só que eu tenho que subtrair sempre (as) do primeiro quadrado [...], logo $B=4+2(Q-1)$ [...] $2Q+2$, essa é a lei que vai reger as bolinhas [...] (Prof. Nadison, 5º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 6 – Realizações de função como generalização</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>Observe as seguintes figuras:

Como podem ver na imagem a figura com um quadrado, para ser construída necessita de 4 bolinhas e 4 palitos, a figura com dois quadros precisa de 6 bolinhas e 7 palitos e a com três quadrados de 8 bolinha e 10 palitos.
a) Quantos bolinhas e palitos serão necessários para construir uma figura com 4 quadrados? E com 6? E com 20?
b) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de bolinhas.
c) Expresse uma regra geral que relacione o número de quadrados e o número de palitos.
Adaptado de Callejo e Zapatera (2014)</td><td>A bula de um medicamento apresenta a dosimetria em função da massa corpórea, de acordo com a tabela:
<table><tr><td>Massa Corporal (Kg)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>Dose indicada (gota)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>
a) Escrever a expressão que relacione a dose a ser ministrada com a correspondente massa corporal.
$DI.2=M \Leftrightarrow M.\frac{1}{2}=DI$</td></tr>
<tr><td>Fonte: Questão proposta pela pesquisadora - 5º encontro.</td><td>Fonte: Transcrição dos registros dos professores Cibele, Cláudia, Sampaio e Luis Sérgio - 7º encontro.</td></tr>
</table>

Como podemos observar, são afirmações gerais (generalizações) de dependência funcional entre o número de palitos e o número de quadrados, e número de bolinhas e o número de quadrados, que foram realizadas com textos em linguagem natural e, posteriormente por realizações algébricas das respectivas relações funcionais. As realizações de função por generalização foram obtidas por inferências decorrentes da análise da estrutura de construção dos primeiros elementos da sequência, e funcionam como uma "autorização" para determinar qualquer elemento da sequência. Isso evidencia parâmetros próprios para o reconhecimento e realização de textos no contexto da Educação Básica, isto é, da MnE do Conceito de Função. Note que que a legitimação dessas realizações (as fórmulas), no contexto da Matemática Acadêmica (dos matemáticos, assim estamos assumindo), teria que ser pautada em uma demonstração, no caso, pelo processo de indução matemática.

Na Parte B do Quadro 6, relatamos uma questão em que com base em alguns dados de uma situação funcional, fornecidos por uma realização tabular, solicita-se uma expressão (afirmação geral) que relacione a dose (em gotas) de um medicamento com a correspondente massa corpórea (em kg) do usuário. Essa questão foi sugerida no 7º encontro, para introdução do tema função em uma turma do nono ano. O Prof. Luis Sérgio afirma: "A massa corporal é sempre o dobro da dose indicada" e escreve no quadro os textos: "$DI.2 = M$" e "$M.(1/2) = DI$". As três afirmações são generalizações da situação funcional descrita pela realização tabular, e como destacou o Prof. Eusébio, "do ponto de vista matemático procedem". No entanto, conforme ressaltaram os professores Sampaio e Eusébio, apenas uma delas é apropriada para generalizar o fenômeno, a saber: $DI = M/2$, porquanto "[...] é a quantidade de gotas que vai depender da massa" (Prof. Sampaio).

Os extratos relatados assinalam que realizar uma generalização de uma situação funcional, suscita tanto o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis, quanto a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. No exemplo descrito na Parte B do Quadro 6, as três generalizações obtidas seriam realizações da relação funcional que satisfaz a tabela, caso esta fosse considerada isoladamente. O reconhecimento da natureza das variáveis, como independente (massa corpórea) e dependente (dose), decorreu da análise dos textos, denominados por nós de não-escolares, que evidenciou a relação de causa e efeito do fenômeno (mesmo que fictício) matematizado por uma relação funcional.

Frisamos que as realizações de função como generalização de padrões estão restritas a um subconjunto de relações funcionais, aquelas que são passíveis de serem realizadas algebricamente (Carraher; Martinez; Schliemann, 2008).

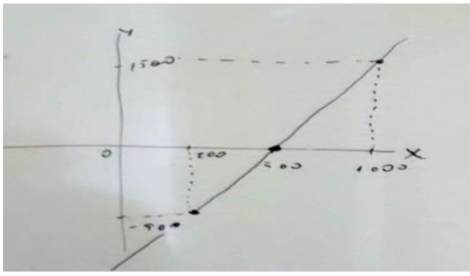
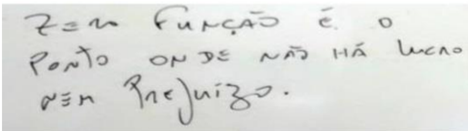
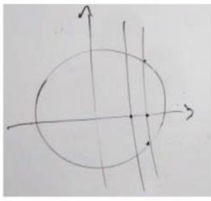
5.5. Panorama Gráfico

Compõem o panorama gráfico as realizações gráficas de relações funcionais, cujos conjuntos domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais, denotado por R. A realização gráfica de uma relação funcional *f,* dessa natureza, é o conjunto: $\{(x, y) \in R \times R; x \in dom(f) \text{ e } y = f(x)\}$. A realização gráfica de uma função real com variável real geralmente é uma curva no plano cartesiano $R \times R$, designada de gráfico da função.

Na Parte A do Quadro 7, apresentamos a realização gráfica de função, obtida a partir da sua realização algébrica $y = 3x - 1500$, que descreve uma situação funcional da semirrealidade (1ª coluna). Para realizar o gráfico da relação funcional $y = 3x - 1500$, o Prof. Eusébio determinou os pontos $(200,-900)$, $(500,0)$ e $(1000,1500)$, e plotou-os no plano cartesiano. O processo de realização do gráfico está subordinado ao reconhecimento (com base na realização algébrica) de que a relação funcional $y = 3x - 1500$ é afim[10], e, portanto tem como realização gráfica uma reta. A partir dessa realização gráfica é possível visualizar e interpretar para que valores de x (número de DVD(s) locados) a locadora teve lucro ($y > 0$), prejuízo ($y < 0$), ou nem lucro e nem prejuízo ($y = 0$), o zero da função ($x = 500$), que corresponde à interseção do gráfico com o eixo horizontal.

O exemplo supracitado atesta que as realizações gráficas de uma relação funcional propiciam o reconhecimento de características das funções, tais como sinal e zeros (caso existam), além também dos intervalos de monotonicidade e extremos (caso existam). Portanto, o comportamento global ou local de uma relação funcional pode ser analisado, reconhecido e legitimado, nesse contexto, com base na sua realização gráfica.

Quadro 7 – Realizações gráficas

Parte A		**Parte B – teste da linha vertical**
Em uma locadora de DVD(s), a locação de uma DVS custa R$ 3,00/mês e o custo fixo de manutenção da locadora é R$ 1500,00/mês. Que relação matemática podemos estabelecer para saber se ao final do período de um mês a locadora obteve lucro ou prejuízo? Locação: R$ 3,00 Custo mensal: R$ 1500,00 Lucro: *y* Quantidade de DVD(s) locados: *x* $y = 3x - 1500$	 	
Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro		Fonte: Registros do Prof. Sampaio – 7º encontro

O Prof. Eusébio evidenciou, nos quinto e oitavo encontros, que a noção de correspondência entre as variáveis está implícita nas realizações gráficas, em razão da existência dos pontos $(x, f(x))$ ser decorrência do fato de que: a cada x (variável independente) do domínio da função *f* corresponde a um (único) $y = f(x)$ (variável dependente). Além disso, o caráter univalente (um único $y = f(x)$) dessa

[10] Ressaltamos que o domínio da relação funcional que descreve o fenômeno é um subconjunto dos números naturais, assim sendo, a sua realização gráfica é um conjunto (discreto) de pontos sobre o gráfico da relação funcional $f(x) = 3x - 1500, x \in R$.

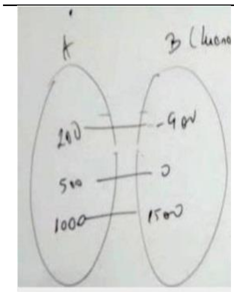
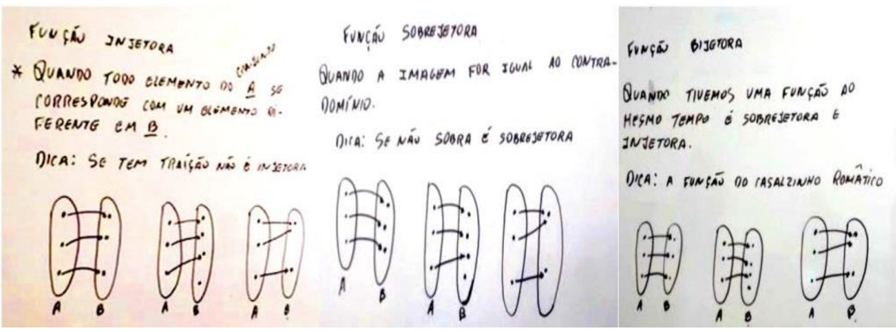
correspondência possibilita o reconhecimento das curvas no plano cartesiano que são realizações gráficas de uma relação funcional. Na Parte B do Quadro 7, a curva (uma circunferência) não é a realização gráfica de uma relação funcional, porque as retas verticais traçadas intersectam a curva em dois pontos. Esse processo de traçar retas paralelas ao eixo vertical, passando por pontos de abscissa x, com x um elemento do domínio de *f*, e verificar se estas intersectam a curva em um único ponto, é denominado de teste da linha vertical e é um critério para o reconhecimento (ágil) de curvas que são realizações gráficas de uma relação funcional (Jones, 2006; Steele; Hillen; Smith, 2013), legitimado no contexto da Educação Básica.

5.6. Panorama Diagrama

Constituem esse panorama as realizações de função como diagramas de setas, as quais viabilizam o reconhecimento de uma relação funcional como uma correspondência arbitrária e univalente entre dois conjuntos não vazios quaisquer. Convencionalmente as realizações por diagramas estão restritas as relações funcionais em que todos os elementos dos conjuntos domínio e contradomínio podem ser dispostos em diagramas.

Na Parte A do Quadro 8 é apresentada a realização por diagramas de flechas da (parte) relação funcional descrita na Parte A do Quadro 7, que foi realizada tomando como referência a sua realização algébrica $f(x)=3x-1500$, com a determinação das imagens $f(1000)=1500$, $f(500)=0$ e $f(200)=900$[11]. Neste caso, foram estabelecidas conexões (*pontes*) entre as realizações algébrica e por diagramas de setas. Na realização do diagrama o Prof. Eusébio comunica:

> “Então a gente teve para a quantidade locada (referindo-se ao conjunto A do número de DVD’s locados) uma valor correspondente [...] que corresponde a lucro ou prejuízo (conjunto B). A partir do diagrama a gente observa que todo elemento de A, vai ter um único correspondente em B” (7º encontro).

<table>
<tr><th colspan="2">Quadro 8 – Realizações de função como diagrama</th></tr>
<tr><th>Parte A</th><th>Parte B</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Fonte: Registros do Prof. Eusébio – 7º encontro</td><td>Fonte: Registros do Prof. Luis Sérgio – 7º encontro</td></tr>
</table>

[11] Neste caso, o professor usou a realização por diagramas apenas para alguns elementos do domínio e contradomínio da relação funcional em tema.

O excerto demarca que para realizar uma função por diagramas é necessário identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e a cada elemento do domínio fazer corresponder (por uma seta) um único elemento do contradomínio. Portanto, o caráter univalente do conceito de função está patente nessas realizações.

No sétimo encontro, O Prof. Luis Sérgio apresentou as definições de função injetora[12], sobrejetora e bijetora por intermédio das realizações de função como diagramas, conforme é possível observar na Parte B do Quadro 8, em que as mesmas três realizações por diagrama foram utilizadas para exemplificar as referidas definições. Nessa conformidade, a relação funcional realizada pelo primeiro diagrama (da direita para esquerda) é injetora e sobrejetora, e, portanto bijetora, a realizada pelo segundo diagrama é injetora, mas não é sobrejetora, e a realizada pelo terceiro é apenas sobrejetora.

Ainda referindo-nos a Parte B do Quadro 8, o Prof. Luis Sérgio apresentou o que denominou de “Dica” para cada uma das definições enunciadas. Cada “Dica” é um texto na forma de metáfora, empregado como recurso mnemônico, que estabelece relações entre o conteúdo matemático (no caso, as definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras) com circunstâncias da vida cotidiana. Segundo Grilo (2014), os recursos mnemônicos são estratégias utilizadas pelos professores com o propósito de auxiliar o reconhecimento de determinados textos (matemáticos), na expectativa de que possam ser realizados mais facilmente pelos estudantes, por apresentarem uma linguagem mais familiar para os alunos. Como é possível observar, tais textos distanciam-se do rigor e precisão dos textos da Matemática Acadêmica (Grilo, 2014), mais uma vez consubstanciando o pressuposto assumido de que os critérios de comunicação são regulados nos contextos em que são produzidos.

No que concerne às limitações das realizações desse panorama, ressaltamos que, para relações funcionais cujos conjuntos domínio e contradomínios são constituídos de uma grande quantidade de elementos (ou são infinitos), não é viável (possível) utilizar as realizações como diagramas, para reconhecer se a relação funcional em análise é injetora, sobrejetora ou bijetora.

5.7. Panorama Formal

Compõem o panorama formal as realizações de função como uma definição formal. Utilizamos o adjetivo formal, em razão dessas definições apresentarem perceptível semelhança com os textos contemporâneos que definem função, e são legitimados na Matemática Acadêmica, como por exemplo, a definição apresentada na seção 1 (nota de rodapé) e a atribuída ao grupo Bourbaki: “Uma função é uma tripla ordenada (X,Y,f) em que X e Y são conjuntos não vazios e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x,y) \in f$ e $(x,y') \in f$ então $y = y'$” (Sierpinska, 1992, p.30, tradução nossa).

[12] Sugerimos uma definição mais precisa, por exemplo, uma função é injetora se, e só se elementos distintos do domínio da função possuem imagens distintas.

No Quadro 9, expomos duas realizações de função como definição formal. A que consta na Parte A foi apresentada pelo Prof. Eusébio no sétimo encontro, na simulação de uma aula para introdução do tema função no primeiro ano do Ensino Médio, e a da Parte B foi enunciada pelo Prof. Sampaio no quinto encontro. Como podemos constatar, ambas apresentam reconhecível similitude com as definições supracitadas.

Quadro 9 – Realizações de função como definição formal

Parte A	Parte B
Dados dois conjuntos não vazios (*A* e *B*). Uma relação que associa a cada $x \in A$ um único $y \in B$, recebe o nome de função.	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação [...] f de $A \times B$, recebe o nome de aplicação de *A* em *B* ou função definida em *A* com imagens em *B* se, e somente se, para cada elemento do primeiro existe um e só um *y* do segundo, tal que o par (x, y) pertence a *f*.
Fonte: Transcrição do registro do Prof. Eusébio – 7º encontro	Fonte: Transcrição da enunciação do Prof. Sampaio – 5º encontro

O Prof. Eusébio apresentou a definição (formal) descrita na Parte A do Quadro 9, conjuntamente com as realizações algébrica, gráfica (Parte A - Quadro 7) e por diagramas (Parte A – Quadro 8), da situação funcional descrita na Parte A do Quadro 7 (1ª coluna). Segundo o professor, “[...] essas são algumas possibilidades da gente poder confrontar o conceito formal (definição formal, segundo nosso entendimento), vamos dizer assim com as representações [...]” (7º encontro). No caso, o Prof. Eusébio empenhou-se em instaurar o reconhecimento das relações existentes entre a realização de função como definição (formal) apresentada e as realizações gráficas e por diagrama, sobretudo no que diz respeito ao seu caráter univalente. Isso posto, afigura-se que o professor pretendeu estabelecer *pontes* entre tais realizações. De forma mais abrangente, essas *pontes* podem ser estabelecidos entre os panoramas aos quais essas realizações pertencem.

Os caracteres univalente e arbitrário das relações funcionais, expressos nas realizações de função como definição formal, propiciam precisão, estrutura lógica e generalidade a essas realizações, atributos que estão em consonância com os parâmetros de legitimação da Matemática Científica (Tabach; Nachlieli, 2015). Entretanto, segundo Even (1990) e Sierpinska (1992), não abarcam a variabilidade de entendimentos e formas de comunicar o conceito de função, quando este é utilizado tanto na matemática, como em ciências e situações funcionais do cotidiano, pois tais casos transcendem a mera lógica desta definição.

A natureza formal e generalista das realizações de função como definição formal indica, conforme Kleiner (1993), o que incluir ou excluir do estoque de exemplos de relações funcionais. Foi exatamente com esse propósito, que o Prof. Sampaio enunciou a realização de função como definição formal constante na Parte B do Quadro 9, para justificar o reconhecimento do texto: $g(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ como a realização algébrica de uma relação funcional, considerando que satisfaz a definição formal apresentada.

Comparada com a univalência, arbitrariedade é um critério menos visível (Steele; Hillen; Smith, 2013) nas realizações de função. Todavia, essas duas caraterísticas, concomitantes ou não, explicitadas ou não, auxiliam, ou mesmo possibilitam, o reconhecimento e a realização das legítimas realizações de função, como destacamos na análise dos panoramas anteriores.

6. Síntese do Modelo

O modelo foi estruturado em termos de panoramas, constituídos de agrupamentos de realizações do conceito de função que portam semelhanças referentes às regras de reconhecimento e realização.

As regras de reconhecimento são essenciais para caracterizar a especialização comunicativa de cada um dos panoramas. Em razão de regularem "que" textos podem ser reconhecidos, em decorrência da sua sintaxe específica (Bernstein, 2000, 2003;), como legitimamente pertencentes ao correspondente panorama.

As regras de realização regulam a forma da comunicação em cada panorama, transmitindo parâmetros específicos para seleção e produção dos seus textos legítimos (Bernstein, 2000), isto é, operam regulando "como" um texto legítimo de cada panorama pode ser dito.

No Quadro 10, sumariamos o "que" (regras de reconhecimento) e o "como" (regras de realização) das realizações integrantes de cada um dos panoramas que compõem o modelo construído. Apresentamos também um resumo das vinculações das realizações constituintes dos panoramas, identificadas no estudo com os professores.

Considerando que um conceito matemático é constituído pelo seu conjunto de realizações, a síntese apresentada no Quadro 10 ao explicitar o "que" e o "como" dos textos que constituem as realizações de cada um dos panoramas do conceito de função operam como "lentes de aumento", que esquadrinham as suas partes constituintes ao expor a variabilidade de facetas singulares dos seus textos, com suas diferentes estruturas de referências, conjuntos de convenções, interpretações e parâmetros de comunicação que são legitimados no contexto em questão.

Quadro 10 – Síntese da MpE do Conceito de Função – o "que" e o "como" dos seus

Panorama	o "que" (reconhecimento)	o "como" (realização)	Vinculações
Tabular	Relação entre dados numéricos ou não em uma tabela, no caso em que, todo elemento de uma linha (coluna) está associado a um único elemento da respectiva linha (coluna).	Organizar os dados de uma relação funcional em linhas ou colunas, de forma que os dados de entrada e os seus respectivos dados de saída estejam na mesma linha ou coluna.	-Evidenciar as noções de variação, dependência e regularidade. -Inferir incorretamente sobre o tipo da relação funcional.
Algébrico	Uma lei, regra ou fórmula, em textos com notação algébrica, na qual seja possível exprimir de forma única (com exceção de expressões algébricas equivalentes) uma variável (denominada de dependente) em termos de uma outra variável (denominada de independente).	Explicitar a relação entre as variáveis independente e dependente de uma relação funcional como uma lei, fórmula ou regra empregando símbolos algébricos.	-Tratar de aspectos quantitativos. -Operar com relações funcionais. -Propiciar o reconhecimento de tipos de relação funcionais. -Exigir familiaridade com a notação algébrica simbólica.
Máquina de transformação	Texto icônico de uma máquina, que transforma cada dado de entrada em um único dado de saída, obedecendo a uma regra.	Realizar texto icônico que simule uma relação funcional como uma máquina que processa os elementos do conjunto domínio transformando-os, por intermédio de uma regra, nos elementos do	-Demarcar as noções de processo, transformação e mudança. -Introduzir as definições dos conjuntos domínio e imagem de uma relação funcional.

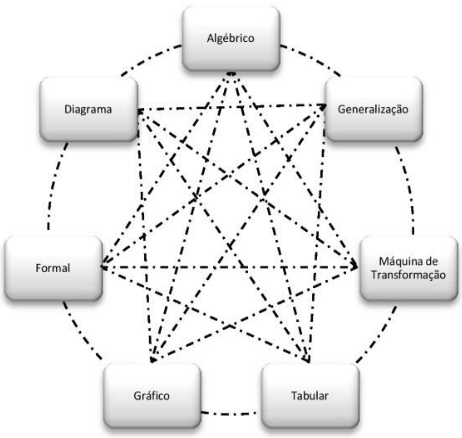
		conjunto imagem.	
Generalização de padrões	Texto declarativo ou simbólico que a partir de algumas informações de uma dada relação funcional, explicita de forma geral, seu padrão ou regularidade de caráter univalente.	Apresentar uma afirmação geral (texto declarativo ou simbólico), que com base em algumas informações de uma relação funcional, que expressam seu padrão ou regularidade.	- Propiciar o reconhecimento da relação entre quantidades e/ou variáveis. - Propiciar a distinção entre as variáveis independentes e dependentes. -Propiciar o reconhecimento da existência de um padrão ou regularidade.
Gráfico	Um conjunto G de pontos do plano cartesiano, tal que se (x,y_1) e (x,y_2) são elementos de G então $y_1 = y_2$.	Plotar no plano cartesiano os pontos da forma (x, $f(x)$), em que f é uma relação funcional com variável independente x.	-Evidenciar a noção de correspondência entre variáveis. -Utilizar o teste da linha vertical. -Identificar e determinar[13] os intervalos de monotonicidade, sinal, zeros e extremos (caso existam) de uma relação funcional.
Diagrama	Uma correspondência arbitrária e univalente entre conjuntos dispostos em diagramas.	Identificar os conjuntos domínio e contradomínio da relação funcional, e dispô-los em diagramas, de forma que a cada elemento do domínio corresponda (seta) um único elemento do contradomínio.	-Demarcar a correspondência entre conjuntos. -Apresentar as definições de funções injetoras, sobrejetora e injetoras.
Formal	-Associação arbitrária e univalente entre variáveis. -Subconjunto de AxB, A e B quaisquer e não vazios, tal que os elementos de A e B estão em uma associação univalente.	Realizar um texto declarativo que define função, na qual devem estar explicitadas as características de univalência e arbitrariedade, com a utilização de quantificadores.	-Reconhecer as relações que são funcionais nas suas mais variadas formas de realização. -Limitar o entendimento da variabilidade de noções e interpretações associadas ao conceito de função.

Fonte: autores

Na Figura 1, apresentamos um texto icônico do modelo construído nesse estudo – Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de um estudo com professores.

A Figura 1 tem como propósito apresentar uma visão estrutural geral (macro) do modelo de MpE do Conceito de Função desenvolvido no presente estudo.

Figura 1 – Um modelo teórico de MpE do Conceito de Função a partir de um estudo com professores



[13] Com a utilização de softwares gráficos é possível não apenas identificar, mas também determinar os zeros, extremos e as interseções (caso existam).

Ao dispormos os panoramas em retângulos disjuntos objetivamos comunicar que cada um deles tem sua identidade e fronteiras específicas, porquanto é o isolamento que confere singularidade (Bernstein, 2000, 2003) a cada panorama. As dimensões semelhantes dos retângulos e a conformação circular têm como propósito assinalar que as relações entre os panoramas, sob perspectiva do modelo, não são hierárquicas, tendo em vista que todos os panoramas têm como característica comum serem conjuntos de realizações do mesmo conceito. Por fim, as linhas tracejadas que interligam, dois a dois, os panoramas pretendem demarcar a possibilidade do estabelecimento de *pontes* entre os panoramas, no processo do ensino do conceito de função. Alguns dessas pontes, identificadas nos dados, foram evidenciados no decorrer da análise dos panoramas.

As pontes entre os panoramas podem ser interpretados, sob o ponto de vista bernsteiniano, como uma redução no isolamento entre os panoramas, ou seja, como uma classificação mais fraca nas relações entre os panoramas (intraconceito). Nessa perspectiva, valores de classificação mais forte ou mais fraco nas relações intraconceito, levam à menor ou maior articulação entre os vários panoramas.

Estudos assinalam a importância de organizar o ensino de forma a estabelecer, em nossos termos, *pontes* entre os diferentes modos de realizar funções (Ronda, 2015; Steele; Hillen; Smith, 2013), em razão de muitas investigações apontarem que os alunos tendem a identificar o conceito de função somente com uma das suas realizações (Nachlieli; Tabach, 2012). Por exemplo, o texto "função" pode ser visto como equivalente à sua realização algébrica em um contexto, como sua realização gráfica em outro, e só raramente, como relacionada às duas realizações simultaneamente (Nachlieli; Tabach, 2012). Por conseguinte, esses resultados sugerem que o ensino do conceito de função, em algum momento, dever ser pautado em uma classificação (C-) nas relações intraconceito.

Entretanto, como cada panorama tem sua comunicação especializada que revela aspectos particulares do conceito de função, mais apropriados e operacionais para certos contextos funcionais do que para outros, entendemos que deve haver espaço no ensino do conceito de função para o desenvolvimento de uma orientação específica e focada no reconhecimento e na realização dos seus textos, isto é, para uma classificação mais forte nas relações intraconceito. Nessa configuração, entendemos que o enquadramento também terá uma gradação mais forte (E+), pois os textos do panorama em estudo serão privilegiados em relação aos dos outros panoramas, em certo sentido os textos do panorama que está sob foco no ensino têm "controle" sobre as regras de comunicação.

Diante do exposto, entendemos que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função construído pode ser empregado para analisar e gerar uma ampla gama de formas de realizar o conceito de função no ensino, em decorrência da variação da gradação nos valores de classificação e enquadramento, que podem variar entre os extremos de mais forte a mais fraco.

7. Considerações Finais

No presente estudo, construímos um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de estudo com um grupo de professores, subsidiados por conceitos da teoria sociológica de Bernstein.

A teoria de Bernstein apresenta rigor e precisão que dão origem a uma série de conceitos inter-relacionados (Hoadley, 2006), operacionalizando-nos com robustez analítica, teórica e metodológica. No entanto, como ressaltado por Hoadley (2006), as suas categorias teóricas não permitem uma leitura direta do empírico. Nessa conformidade, faz-se necessário a construção de uma linguagem de descrição (no nosso caso, modelo teórico de MpE do Conceito de Função) com o propósito de trazer esses conceitos para mais perto dos dados, possibilitando a sua leitura. Assim sendo, os dados empíricos foram organizados em categorias de realizações (panoramas) do conceito de função, à luz da convergência das regras de realização e reconhecimento. Desse modo, o modelo foi estruturado nos panoramas: tabular, algébrico, máquina de transformação, generalização de padrões, gráfico, diagrama e formal.

A identificação com precisão dos critérios comunicativos legítimos para cada panorama possibilita tanto o reconhecimento, como uma forma de selecionar e produzir segmentos legítimos de textos sobre o conceito de função, inteirado da sua rede de entendimentos e especificidades interpretativas. Fornece, dessa forma, uma transparência comunicativa para leitura do modelo, que propicia uma perspectiva multifacetada da MnE do Conceito de Função, operacionalizada (ou a ser operacionalizada) no decorrer dos Ensinos Fundamental II e Médio, podendo, inclusive, alertar para novas possibilidades, relações e configurações comunicativas.

Tal perspectiva pode contribuir com a comunidade de professores que atuam na Escola Básica ou cursos de formação inicial e continuada, trazendo subsídios e reflexões em relação a formas de realizar conceito de função no ensino nesses níveis, tanto no diz respeito à diversidade e especificidade de formas de realizá-lo, a sua organização e sequenciamento, critérios de avaliação, quanto na escolha pela gradação dos princípios de classificação e enquadramento nas relações intraconceito das práticas pedagógicas a serem efetivadas.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que o modelo teórico de MpE do Conceito de Função desenvolvido e construído nesse estudo deve ser entendido como resultado de uma lente teórica particular, a qual nos permitiu uma descrição (uma re-presentação) sistemática e estruturada do que reconhecemos através do nosso olhar como o fenômeno que conceptualizamos como MnE do Conceito de Função.

Referências

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: researching mathematics for teaching mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 37*, p. 270-296.

Adler, J.; Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In Sullivan, P.; Wood, T. (eds). *International handbook of mathematics teacher education*: Vol1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and learning development. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 195-222.

Adler, J.; Patahuddin, S. M. (2012). Recontexualising items that measure mathematical knowledge for teaching into scenario based interviews: an investigation*. Journal of Education***,** No. 56.

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, p. 389-407.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, V. 45, p.595-606.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity*: theory, research, critique. New York: Rowman & Littlefield.

Bernstein, B. (2003). *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. New York: Routledge.

Brasil (2002). Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). *PCN + Ensino médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec.

Callejo, M. L.; Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *BOLEMA*. v. 28, n.48, p. 64-88.

Carraher, D. W.; Martinez, M. V.; Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, V. 40, p. 3-22.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 237-243.

Davis, B.; Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. Vol. 29, N. 3, p. 37-43.

Davis, B.; Renert, M. (2013). Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Matematics*, v. 9, n. 3, p. 37-43.

Davis, B.; Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know*: Profund Understanding of Emergent Matematics. Routledge Taylor & Francis Group. 141 p.

Davis, B.; Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, n. 3, p. 293-319.

Doorman, M. et al. (2012). Tool use and development of the function concept: from repeated the function concept: from repeated caculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*. V. 10, I. 6, p. 1243-1267.

Elia, I. et al. (2006). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*. p. 317-333.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* V. 21, p. 521-544.

Even, R.; Ball, D. (Eds.). (2009). The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Grilo, J. S. P. (2014). *Da Universidade para a Escola: A Recontextualização de Princípios e Textos do discurso pedagógico de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática*. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Guerrero, L. S.; Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, v. 1, p. 1-15.

Hansson, O. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function*. Tese de Doutorado. Luleå University of Technology, Suécia.

Hitt, F; González-Martin, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process:The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*. V. 88, p. 163-187.

Hoadley, U. (2006). Analysing pedagogy: the problem of framing. *Journal of Education*, n. 40, p. 15-34. Disponível em <http://www.joe.ukzn.ac.za>. Acesso em 07 set. 2016.

Jones, M. (2006). Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of the function. *Undergraduate Math Journal*, 7 (2), p. 1-20.

Kleiner, I. (1993). Functions: Historical and Pedagogic Aspects. *Science & Education*. Vol 2, p. 183-209.

Mavrikis, M. et al. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic a_ordances for an intelligent microworld. *Journal of Computer Assisted Learning*, Wiley.

Nachlieli, T., Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom-the case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, p. 10-27.

Rhoads, K.; Weber, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. *International Journal of Education*, V. 78, p. 1-12.

Ronda, E. (2015). Growth points in linking representations of function: a research-based framework. *Educational Studies in Mathematics,* n. 90, p. 303-319.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the Concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, p. 229-254.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. United States: The Mathematical Association of America, p. 25-58.

Steele, M.; Hillen, A. F.; Smith, M. S. (2013). Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 16, I. 6, p. 451-483.

Tabach, M.; Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitionsfor developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, n.90, p. 163-187.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, n.93, p. 333-361.

Graça Luzia Dominguez Santos: Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Brasil. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA. Temas de pesquisa: matemática para o ensino e formação continuada de professores. **E-mail:** gracadom@ufba.br

Jonei Cerqueira Barbosa: Professor de Educação Matemática da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Brasil. Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, ambos da UFBA. Pesquisador do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Temas de pesquisa envolvem materiais curriculares, matemática para o ensino e formação continuada de professores. **E-mail**: jonei.cerqueira@ufba.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 168-186

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE SUMA Y RESTA EN ESCOLARES DE TRES, CUATRO Y CINCO AÑOS

Catalina María Fernández Escalona

Fecha de recepción: 27/05/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	Se estudia el proceso que va desde las acciones reales y efectivas de añadir y quitar hasta la construcción de las operaciones aritméticas de suma y resta por parte de los escolares de 3, 4 y 5 años. El esquema lógico–matemático subyacente es el de transformaciones. Para que se den estas operaciones deben presentarse simultáneamente dicho esquema y la cuantificación, siendo esa simultaneidad la que lleva a las relaciones numéricas. Teniendo en cuenta que el origen de las operaciones de suma y resta en el escolar está supeditado a las acciones de añadir y quitar, se propone un plan de actuación en el aula mediante un tratamiento sistemático de dichas operaciones. **Palabras clave**: Suma, resta, operaciones aritméticas, educación infantil, educación matemática.
Abstract	This study examines the process that spans from real and effective addition and deduction actions to constructing the arithmetic operations of adding and taking away in schoolchildren aged 3, 4 and 5. The underlying logical-mathematical model is that of transformations. For these operations to take place this model must be introduced at the same time as quantification, since it is this simultaneity that leads to numerical relationships. Bearing in mind that the inception of addition and subtraction operations in schoolchildren is subject to the actions of adding and taking, an action plan is proposed using a systematic treatment of these operations. **Keywords**: Addition, subtraction, arithmetic operations, early childhood education, mathematical education.
Resumo	No artigo se estuda o processo partindo das ações reais e efetivas de somar e remover, e dando continuidade com a construção das operações aritméticas de soma e subtrai por parte dos estudantes de 3, 4 e 5 anos. O esquema lógico matemático subjacente é o das transformações. Para que essas operações ocorram devem se apresentados simultaneamente esse esquema e a quantificação, sendo essa simultaneidade a que leva às relações numéricas. Lvando-se em conta que a origem dos operações de adição e de subtração no estudante é subordinada às ações de somar e retirar, propõe-se um plano de atuação em sala de aula mediante um tratamento sistemático de tais operações.

	Palavras-chave: adição, subtração, aritmética, educação infantil, educação matemática.

1. Introducción

Existen transformaciones que cambian la cantidad frente a otras que la dejan invariante. Las primeras son las transformaciones cuantitativas y las segundas son las cualitativas. Cuando las cantidades que se están tratando son cantidades discretas esas transformaciones tienen un reflejo en las operaciones aritméticas. (Naito y Miura, 2001).

Los niños y niñas pequeños/as (menos de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.) manipulándolos y realizando acciones que más tarde concluirán en la suma y la resta; se trata de la acción real y efectiva (Dickson, Brown y Gibson, 1991; Siegler, 2016).El siguiente paso, es conseguir que los niños y niñas relaten las acciones que realizan, así van contando la acción al mismo tiempo que la ejecutan, es lo que Mialaret (1984) llama "acción acompañada de lenguaje". Con ello se consigue que: se adquieran términos básicos equivalentes a reunir-añadir, quitar-separar, diferencien unas acciones de otras, tomen conciencia del esquema de las transformaciones, sepan diferenciar las partes de un todo, etc., y en definitiva se den cuenta de todos los aspectos, a nivel de acción, que se ponen en funcionamiento al realizar una operación aritmética. A la edad de tres años los niños y niñas son capaces de contar lo que está sucediendo. (Dehaene, 2011;Vilette, 2002).

En este camino ascendente hacia la abstracción, nos encontramos que los niños y niñas de cuatro años son capaces de relatar una acción que sólo existe en su mente, que no se está realizando de forma efectiva, ya no se actúa sobre objetos concretos, es "la conducta del relato" (Hughes, 1981,Mialaret, 1984).

Finalmente, a los cinco años, los niños son capaces de comprender que una traducción simbólica del tipo 3+2 expresa una acción real, además, por conteo ascendente, pueden resolver problemas abstractos sin base concreta como por ejemplo: "¿Cuántos son tres más dos?" (Hughes, 1981).

En el periodo que abarca la Educación Infantil se dan los primeros encuentros del niño/a con la adición y la sustracción puesto que las acciones y transformaciones que dan lugar a estas dos operaciones son elementales y aparecen simultáneamente con el concepto de número.

Mediante la revisión de investigaciones en niños y niñas pequeños/as sobre la suma y la resta (Castro, 2006;Ginsburg y Pappas, 2004; Hughes, 1981; McCrink y Wynn, 2004; Naito y Miura, 2001; Ramos, Castro, Castro-Rodríguez, 2016;Robinson, 2001; Starkey y Gelman, 1982;Zur y Gelman, 2004). podemos asegurar que existen tareas apropiadas en las que estas operaciones parten de las acciones de añadir y quitar, siendo ésta la forma más adecuada para tratar los inicios de la aritmética en Educación Infantil.

2. El paso de añadir y quitar a sumar y restar

Es un hecho constatado que los primeros encuentros del niño/a con la suma y la resta se realiza sin necesidad de una instrucción previa (Canobi, Revé y Pattison, 2003;Carpenter y Moser, 1979; Carpenter, Fennema et al, 1999; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Opfer y Siegler, 2012). Estos contactos se realizan en un entorno cercano al niño/a; es por ello por lo que nos planteamos analizar algunas situaciones familiares en las que aparecen las acciones de quitar o añadir y en base a ellas analizar la interiorización de las operaciones aritméticas de suma y resta (Fernández, 2001).

Las acciones de añadir o quitar objetos, a una colección dada, transforman la cantidad. Lo primero que queremos observar en los niños es si realmente ellos se percatan de este hecho en edades tempranas. En general, los niños de tres años, son capaces de observar, e incluso de decir, "hay más" o "hay menos" ante situaciones en las que se transforman la cantidad.

Una de las situaciones familiares trabajadas consistía en lo siguiente: la madre le prepara para desayunar al niño pequeño (de dos a tres años) una bandeja con 4 galletas y un vaso de leche. Esta situación se repite día tras día. Después de un tiempo, una mañana sólo aparecieron 3 galletas en lugar de las cuatro que venía siendo habitual; fué entonces cuando el niño pequeño advirtió que faltaba una (Fernández, 2007).

Aprovechamos esta situación para presentarle bandejas con tres galletas, él o ella decía que había tres (respuesta que daba por subitización). Cuando ya se tenía la certeza de que conocía el estado inicial y que lo podía retener en su memoria (ésto ocurría día tras día preguntándole, varias veces y en distintos momentos, que cuántas galletas había en la bandeja), se realízaba la transformación que consistía en añadir una, y así llegamos al estado final que son cuatro galletas en la bandeja, el niño/a ante esta nueva situación decía que había una más.

Se repiten los ejercicios durante varios días. La madre ponía dos bandejas con tres galletas cada una. Él o ella las veía y decía que había lo mismo. Entonces a una de las bandejas se le añadía una más, y se le preguntaba qué era lo que había pasado, y decía que había puesto una. El hecho de poner dos bandejas con el mismo número era para que tuviese simultáneamente presente el estado inicial y final de la transformación, y con ello se perseguía que el niño/a se centrase en la acción, en este caso de añadir una galleta.

No obstante, en su quehacer diario los niños y niñas dan muestra inequívoca de que las acciones de quitar o añadir cambian la cantidad. Así, por ejemplo, si un niño/a está jugando con cochecitos y en su monólogo dice: "voy a por más" y acto seguido trae dos coches más que une a su colección, prueba que este niño o niña es consciente de que la colección de objetos aumenta cuando se añaden nuevos elementos frente a la conducta de separar objetos para obtener más. Asimismo, si alguien le quita algún coche y el niño/a hace comentarios como éste: "dámelo porque ahora tengo pocos", estaremos ante un caso en el que sabe que si se quitan objetos de la colección la cantidad queda modificada para tener menos que antes.

En general, todos los niños y niñas investigados, a la edad de tres años, son capaces de decir "hay más" ante una situación en la que se añaden varios objetos a una colección de cinco elementos como máximo (si ponemos más de cinco objetos algunos niños/as de tres años dicen que hay muchos y cuando añadimos nuevos objetos, sigue habiendo muchos). Análogamente son capaces de decir "hay menos" cuando la situación se plantea quitando varios objetos de una colección dada.

Además los niños/as pequeños/as, son capaces de establecer la relación inversa entre las dos acciones. Saben que si quitamos un objeto de una colección, lo que debemos de hacer para tener el mismo número que al principio es añadir uno. Así, por ejemplo, cuando un niño o niña juega con coches, y la madre le quita uno, dice "dame el que me has quitado". Incluso en situaciones en las que el niño/a tenía los coches dipuestos en los cuatro vértices de una mesa cuadradra, se le quitaba uno y se le preguntaba ¿qué hacemos para tener lo mismo que antes?, respondía "poner uno más", y aún en un grado de abstracción mayor, si tenía cuatro galletas en una bandeja y la madre se comía una, a la vista de que quedaban tres galletas en la bandeja, le preguntaba que cuántas galletas se había comido y respondía que una; entonces ¿qué tenemos que hacer para tener el mismo número de galletas que al principio?, y el niño/a respondía que poner una.

Esta última situación, además de poner de manifiesto la relación inversa entre las acciones de añadir y quitar, indica que los niños y niñas de tres años pueden cuantificar el cambio cuando la diferencia es de uno. Así, si cambiamos tres galletas por dos, dicen: "falta una"; pero si cambiamos cinco por tres dicen "hay menos". Por lo tanto, los pequeños y pequeñas cuantifican el cambio cuando la diferencia entre el estado inicial y el estado final de la transformación aritmética es más de uno.

2.1.¿Cómo se recorre el camino hacia la cuantificación?

Para Dickson y otros (1991), el paso previo hacia la cuantificación, y por tanto el inicio de las operaciones, es el principio de cardinalidad. Cuando el niño/a toma conciencia de que el proceso de recuento se puede usar para obtener el número de elementos de una colección, estará iniciando el camino adecuado para cuantificar el número de objetos que se añade o se quita a una colección dada; y ésto, según los autores citados se da a la edad promedio de cuatro años y dos meses.

Pero las operaciones de sumar y restar conllevan algo más que el simple recuento de una colección de objetos. Bajo las acciones de añadir y quitar, subyace el esquema de transformaciones de cantidades discretas (Vergnaud, 1985); cuando se realiza una de estas acciones se tiene que recordar y pensar simultáneamente en: el estado inicial (lo que se tenía), la transformación (acciones de quitar o añadir) y el estado final (lo que se tiene ahora);y se da la circunstancia de que las tres secuencias de la transformación no se dan al mismo tiempo, por eso en la suma y la resta el niño/a tiene que hacer algo más que contar una colección de objetos. Así, por ejemplo, se le presenta tres caramelos, se guardan en una bolsa y le damos dos caramelos más en la mano; el niño/a, que efectivamente, tiene adquirido el principio de cardinalidad dice que hay 3 caramelos en la bolsa, y que después tiene 2 caramelos más en la mano; pero si no utiliza el esquema de transformación no es capaz de llegar a la operación de sumar, que requiere establecer una relación numérica entre los 3 caramelos de la bolsa y los 2 que tiene en la mano.

2.2.¿Cómo se establece las relaciones numéricas para cuantificar la acción?

Un indicio de que el niño/a empieza a establecer relaciones numéricas es cuando usa estrategias de recuento progresivo para cuantificar la acción. Cuando cuenta a partir de tres, dos unidades más, para determinar el número de caramelos que tiene, está estableciendo la relación que existe entre el cardinal 3 y el cardinal 2 atendiendo a la acción de añadir, y por tanto está sumando 3 y 2. Otra conducta menos evolucionada que la anterior, pero que indica el establecimiento de relaciones numéricas, es cuando se recurre al recuento completo de la nueva colección ayudándose de los dedos o de objetos materiales concretos.

Estamos en un momento de la investigación en el que se tiene adquirido el principio de cardinalidad, nuestro esfuerzo irá dirigido al establecimiento de relaciones numéricas, para ello trabajamos: *El esquema de transformaciones de cantidades discretas.*

Ello supone distinguir entre transformaciones que cambian la cantidad de aquellas que no la cambian, y que los niños y niñas sean capaces de describir y reconocer las tres partes de una transformación, esto es: Estado Inicial (E.I.), Transformación (T) y Estado Final (E.I.).

Cuando son capaces de relatar, por ejemplo, situaciones como estas: "Tenía 3 caramelos (E.I.), tú me has dado 2 (T) y por eso tengo 5 caramelos (E.F.)", será la prueba inequívoca de que están estableciendo relaciones numéricas y que por tanto están cuantificando la acción de añadir.

Este tipo de relato lo consiguen los niños y niñas a una edad promedio de cuatro años y medio (Fernández, 2007). Debemos señalar que a la hora de describir la transformación anterior presentan fundamentalmente tres conductas, a saber:

- Conducta uno. Se describe una única secuencia: a) Estado Inicial (E.I.): "Antes tenía menos"; b) Estado final (E.F.): "Ahora tengo más"; c) Transformación (T): "Me has dado dos".
- Conducta dos. Se describen dos secuencias: a) Estado Inicial y Estado Final (E.I. y E.F.): "Antes tenía menos y ahora tengo más"; b) Transformación y Estado Final (T. y E.F.): "Me has dado dos y por eso ahora tengo más"; c) Estado Inicial y Transformación (E.I. y T): ""Tenía menos y me has dado dos".
- Conducta tres. Se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.):"Antes tenía menos tú me has dado dos y ahora tengo más", o bien "tengo más que antes porque tú me has dado dos".

En estas conductas se realiza una descripción cualitativa de las transformaciones, los niños y niñas saben que la cantidad ha variado, que el estado final supone una modificación de la cantidad de caramelos respecto del estado inicial lo que constituye un primer paso para llegar a cuantificar la acción.

Una vez que son capaces de realizar esas descripciones, el siguiente paso sería conseguir que pudieran describir todo el proceso de la transformación con la exigencia de que deben indicar cantidades concretas. Cuando se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Tenía

3 y ahora tengo 5 porque me has dado 2", estamos en el caso de conducta más evolucionada y supone el éxito operatorio; en ella se llega a interiorizar de tal forma la acción que se consigue expresar los estados mediante números, lo cual indica el paso de las operaciones en sentido físico a las operaciones aritméticas (Fernández, 2007).

Para pasar de las descripciones cualitativas a las cuantitativas debemos trabajar con los niños y niñas estos interrogantes: ¿cuántos tenías al principio?, ¿cuántos tienes ahora?, ¿cuántos te he dado?, ¿cuánto más tienes ahora que antes?, con el fin de que se percaten de las tres secuencias de la transformación y de que establezcan relaciones numéricas.

Referente a la acción de quitar podemos seguir los mismos pasos. Debemos conseguir que describan toda la secuencia de la transformación donde, ahora, la acción en lugar de "añadir" es "quitar". Trabajamos, por tanto, situaciones como estas: "Nuria tenía 5 caramelos, se come 2 y ahora tiene 3 caramelos".

En las descripciones cualitativas se da una situación análoga a la anterior, en este sentido los niños/as dicen: "antes tenía más y ahora tengo menos", o bien "me he comido 2", ó "tengo menos porque me he comido 2". A la hora de hacer una descripción cuantitativa, hay niños/as que establecen correctamente la relación entre 3 y 5 cuando se trata de añadir dos y no así llegar del 5 al 3 quitando 2, y es que parece ser que en un principio el recuento progresivo es más fácil que el recuento regresivo.

Para ello se propone trabajar desde el principio la acción de quitar como inversa de la de añadir. Entonces cuando decimos “tienes 3 y añades 2, ¿cuántas tienes?, inmediatamente proponemos ¿qué tienes que hacer para tener las mismas que al principio?, con ello pretendemos que con la cuenta 3+2=5 se tenga además las cuentas 5-3=2 y 5-2=3 (Fernández, 2007).

Hay modelos aditivos en los que no se da el esquema de transformaciones sino que subyace el esquema parte-parte-todo, como por ejemplo “Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?”, dándose las acciones de reunir y separar.

3. ¿Qué tipo de tareas son las adecuadas para trabajar la suma y resta en Educación Infantil?

Hay dos esquemas lógicos-matemáticos subyacente a las operaciones de suma y resta. El primero es el asociado al modelo de problemas que conlleva el esquema de transformaciones, en el que aparece un estado inicial-transformación-estado final, por ejemplo:“Tengo 3 coches y mi madre me regala 2 más, ¿cuántos coches tengo?”. Estos problemas parten de las acciones de añadir para el caso de suma y de quitar para la resta. El segundo esquema lógico-matemático corresponde al modelo de problemas parte-parte-todo, ejemplo de este modelo es el problema: “Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?”. Estos problemas parten de las acciones de reunir para el caso de la suma y de la acción de separar para el caso de la resta.

Por tanto, antes de empezar con los problemas aritméticos de suma y resta es preciso comenzar con las acciones tanto de añadir-quitar como de reunir-separar, porque son la base subyacente a los problemas aritméticos puesto que, como se ha visto anteriormente, no basta con saber contar y dominar la secuencia numérica, sino que una suma, al igual que la resta, conlleva relacionar dos cantidades para obtener otra y esa relación entre cantidades lo da precisamente el esquema de transformaciones y el esquema parte-parte todo.

Por otra parte, una de las cuestiones que nos planteamos es por qué empezar con niños de 3 años a trabajar las operaciones aritméticas de suma y resta. Según el marco teórico presentado los niños de 3 años son capaces de cuantificar las acciones de añadir y quitar cuando la diferencia entre el estado inicial y final es menos de 5. Es por ello que las tareas referentes a la cuantificación de dichas acciones en 3 años han de tratar el tramo de la secuencia numérica del 1 al 5.

Según Fernández y Ortiz (2008) los escolares dominan la secuencia numérica de este modo: los niños de 3 años dominan la secuencia del 1 al 5, los de 4 del 1 al 10 y los de 5 tienen un dominio de la secuencia superior a 10. Llevando esto a la cuantificaciónde las acciones de añadir y quitar, lo que son problemas de suma y resta con el modelo de transformaciones, obtenemos que en los problemas planteados, las sumas no deben pasar de 5 en el caso de los 3 años, no pasar de 10 para 4 años y más de 10 para los de 5 años. (Escalona, 2015).

Por otra parte, teniendo en cuenta el esquema de Mialaret, según el cual para conseguir el éxito en las operaciones aritméticas se parte de la acción real y con materiales concretos, y se llega a la máxima abstracción con la expresión simbólica pasando por la conducta del relato que es relatando la acción real pero sin que ocurra. Entonces, cogiendo esas tres fases y llevándolas a cada una de las edades en cuestión, conseguimos las tareas adecuadas para los 3 años, 4 años y 5 años del siguiente modo:

1) Para los de 3 años empezamos por lo más básico y los problemas aritméticos se plantean mediante la acción real lo cual significa que no es un problema con enunciado verbal sino que está ocurriendo realamente, por ejemplo si decimos "María tiene 3 caramelos es que existe una niña llamada María con 3 caramelos, "la maestra le da 2 caramelos" es que realmente eso es así, entonces "María tiene 5 caramelos" y eso está ocurriendo.
2) Para los de 4 años nos situamos en unpunto intermedio en el camino de la abstracción, entonces estamos en la conducta del relato, estamos con los problemas de enunciado verbal. El hecho habría ocurrido con anterioridad pero en este momento ya no ocurre, es la abstracción de la acción acompañada de lenguaje. Es un problema con enunciado verbal.
3) Para los de 5 años nos ponemos en el nivel máximo de abstracción, y les pedimos que después de la conducta del relato pase a la traducción simbólica preguntándole por ejemplo ¿cuánto es 3 más 2?.

4. Informe de la investigación previa a la propuesta de enseñanza

Antes de presentar la propuesta de enseñanza pasamos a describir la investigación sobre la que nos hemos basado para presentar dicha propuesta.

Se trata de un estudio experimental cualitativo que consta de dos partes. La primera se da en el ámbito familiar y la segunda en el escolar. En el primero se caracteriza y analiza los resultados de la tarea “acción de añadir y quitar en niños de 3 años” para averiguar si se percatan, de manera espontánea, de que estas acciones cambian la cantidad o no, y en caso afirmativo ver hasta donde cuantifican la acción. En el segundo, ámbito escolar, se caracterizan y analizan los resultados de tres tareas (añadir y quitar, acciones inversas o recíprocas, esquema de transformaciones y parte-parte-todo), tratadas mediante entrevistas clínicas, para dar significado a los comportamientos generales y a las situaciones singulares encontradas, así como a los procedimientos, destrezas y estrategias en niños de 3 a 6 años para explicar las relaciones numéricas en estos escolares.

Las soluciones dadas por los niños de 3 años ante la tarea del ámbito familiar manifiesta competencias en el esquema cualitativo de transformaciones aditivas que son esquemas lógicos matemáticos subyacentes en las operaciones de suma y resta.

Las respuestas a las tareas presentadas en las entrevistas, ámbito escolar, denotan la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos ha permitido secuenciar el comportamiento de los niños desde el nivel menos evolucionado, en el que los niños únicamente se percatan que “hay más” ó “hay menos” al añadir o quitar elementos en colecciones de menos de 5 objetos, hasta el nivel más evolucionado en el que los niños son capaces de establecer relaciones numéricas al tener adquirido el principio de cardinalidad e interiorizado el esquema de transformaciones.

Debemos indicar que el estudio empírico cualitativo se realizó mediante entrevistas clínicas y en el Colegio Público Juan Martín Pinzón de Ronda. Para la parte de ámbito familiar se reunió a las madres de los niños de 3 años y de los 25 niños fueron 18 madres las que participaron en el estudio. Por otra parte, las entrevistas se realizaron a 24 escolares de 3, 4 y 5 años. Se hicieron a puerta cerrada en un despacho preparado a tal efecto en el centro. Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre 20 y 30 minutos.

La tarea del ámbito familiar consta de 3 fases:

<u>Fase 1 (F1)</u>: El desayuno del niño va a consistir en un vaso de leche y 4 galletas que la madre va a presentar en una bandeja todos los días durante 2 meses (las galletas se disponen en hilera). Después de este tiempo en la bandeja sólo van aparecer 3 galletas y el vaso de leche.

<u>Fase 2 (F2)</u>: Durante 5 días la madre prepara 2 bandejas idénticas con 3 galletas cada una y le pregunta al niño que cuántas galletas hay en su bandeja. A continuación añade una galleta y pregunta por lo que ha ocurrido y por el número de galletas que ha añadido.

<u>Fase 3 (F3)</u>. La madre presenta una bandeja con 4 galletas y se come 1, entonces pregunta al niño que cuántas galletas se había comido y qué podían hacer para tener el mismo número de galletas que al principio.

Respecto a cada una de las fases señaladas se codifican y categorizan las actuaciones de los niños como Fij donde i toma los valores 1, 2 ó 3 indicando la fase y j va de 0 a 3, donde 0 indica “no sabe” o “no contesta “ y 3 “contesta correctamente”.

El resultado fué un 60% de niños con "éxito operatorio", es decir están en F13, F23 y F33, lo que significa que los niños de 3 años presentan competencias en los esquemas lógicos matemáticos subyacentes a la suma y la resta, se percatan de que las acciones de añadir y quitar cambian la cantidad, cuantifican el cambio cuando se trata de una unidad y reconocen dichas acciones como inversas o recíprocas.

Por otra parte, y análogamente, el estudio empírico cualitativo en el ámbito escolar consta de tres tareas bien diferenciadas:

1. Añadir y quitar: Al niño se le muestra 2 bandejas idénticas con un número de galletas, a continuación se añaden galletas a una de ellas y se la pregunta ¿cuál tiene más y por qué?. Análogamente se plantean las mismas cuestiones pero con la acción de quitar.

2. Acciones inversas o recíprocas: El niño debe reestablecer la cantidad inicial de galletas una vez que la experimentadora ha quitado una cantidad dada

3. Cuantificación de la acción. Esquemas de transformaciones. La experimentadora realiza la siguiente acción real delante del niño: "Tengo 3 galletas en esta bandeja, cojo 2 de este paquete y las añado a las de la bandeja, entonces ahora tengo 5 galletas en la bandeja". Se retira la bandeja y se le pide al niño que relate todo lo que ha ocurrido.

Las respuestas se codifican de la siguiente manera:

AQ. Categorías de respuestas relativas a la realización de la primera tarea: acciones de añadir y quitar.

R(A-Q). Es el bloque de respuestas correspondiente a las acciones inversas o recíprocas

CT. Son las respuestas relativas a la cuantificación de las acciones mediante el esquema de transformaciones.

Respecto a cada uno de las tareas señaladas realizamos la categorización de respuestas de la siguiente forma: AQi, R(A-Q)i y CTi con i variando de 0 a 3, siendo 0 la correspondiente a la categoría de respuestas menos evolucionadas y 3 corresponde a la categoria de respuestas más evolucionada.

En la tabla siguiente se recogen las respuestas de cada uno de los escolares según las tareas y codificaciones consideradas. En la primera columna se indica el nombre de los escolares junto con su edad, el primer número indica el año y el segundo los meses.

	AQ0	AQ1	AQ2	AQ3	R(A-Q)0	R(A-Q)1	R(A-Q)2	R(A-Q)3	CT0	CT1	CT2	CT3
Ma3,1												
La3,2												
Mr3,3												
Lu3,4												
Lc3,9												
Ir3,9												
Mi3,10												

Nu3,11
Pa4,0
Al4,1
An4,3
Be4,6
Mi4,6
Ra4,8
Sa4,11
Ma4,11
Ja5,0
La5,2
An5,2
Pe5,5
At5,9
Mr5,9
Pa5,11
Mb5,11

Tabla 1. Distribución de respuestas de cada niño en cada una de las tareas en el ámbito escolar.

Las respuestas del bloque AQi son más evolucionadas (en la escala de 0 a 3, considerando i=3 como la que más) que las del R(A-Q)i, ocurre lo mismo al comparar las respuestas del bloque R(A-Q)i con CTi. Esto se visualiza en la tabla observando que a medida que nos movemos en los bloques de izquierda a derecha las casillas señaladas en cada bloque de una misma fila, se mueven en sentido contrario o bien permanecen constantes.

El paso del bloque AQ al CT significa: “Realización de la cuantificación de las acciones de añadir y quitar aplicando el esquema de transformaciones de cantidades discretas”.

Según podemos observar en la tabla 1, para los niños entrevistados es condición necesaria la realización de las acciones de añadir y quitar para establecer relaciones pero no es condición suficiente. Esto se manifiesta claramente en los niños de 5 años en los que todos responden correctamente a la cuestión AQ y sin embargo no todos están en la categoría de respuesta CT3. Los niños de esta categoría alcanzan el éxito operatorio en las operaciones de suma y resta puesto que si aplican el esquema de transformación es porque establecen relaciones numéricas y cuantifican la acción.

5. Propuesta de enseñanza

Teniendo en cuenta los dos esquemas lógico matemáticos, junto a los tipos de acciones añadir-quitar y reunir-separar, y todo lo tratado anteriormente, proponemos que el tratamiento didáctico de la suma y la resta en Educación Infantil se realice atendiendo a 4 tareas tipo. Cada una de ellas conlleva estos esquemas:

- Acciones de añadir y quitar, que denominaremos como AQ
- Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones, que denominaremos como T
- Acciones de reunir y separar que denominaremos como RS
- Cuantificación de las acciones de reunir-separar mediante el esquema parte-parte-todo que denominaremos como PPT

A su vez, cada uno de estos esquemas estará dividido en tres de este modo:

AQ

- ✓ Acciones de añadir, que denominaremos A
- ✓ Acciones de quitar, que denominaremos Q
- ✓ Acciones de añadir y quitar, que denominaremos A-Q

T

- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir, que denominaremos TA
- ✓ Cuantificación de las acciones de quitar, que denominaremos TQ
- ✓ Cuantificación de las acciones de añadir y quitar, que denominaremos T(A-Q)

RS

- ✓ Acciones de reunir, que denominaremos R
- ✓ Acciones de separar, que denominaremos S
- ✓ Acciones de reunir y separar, que denominaremos R-S

PPT

- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir, que denominaremos PPTR
- ✓ Cuantificación de las acciones de separar, que denominaremos PPTS
- ✓ Cuantificación de las acciones de reunir y separar, que denominaremos PPT(R-S)

Recogemos esto en la tabla siguiente:

Clases	3 años	4 años	5 años
Tareas	**AQ3**: A3, Q3, (A-Q)3 **T3**: TA3, TQ3, T(A-Q)3 **RS3**: R3, S3, (R-S)3 **PPT3**: PPTR3, PPTS3, PPT(R-S)3	**AQ4**: A4, Q4, (A-Q)4 **T4**: TA4, TQ4, T(A-Q)4 **RS4**: R4, S4, (R-S)4 **PPT4**: PPTR4, PPTS4, PPT(R-S)4	**AQ5**: A5, Q5, (A-Q)5 **T5**: TA5, TQ5, T(A-Q)5 **RS5**: R5, S5, (R-S)5 **PPT5**: PPTR5, PPTS5, PPT(R-S)5

Tabla 1. Tratamiento didáctico de suma y resta en 3, 4 y 5 años

Acabamos de establecer una codificación de tareas que aclaramos a continuación: Una tarea cualquiera XYn, donde XY toma los valores AQ, T, RS y PPT y n los valores 3, 4 y 5, es la tarea que conlleva el esquema lógico-matemático XY para proponerla en la clase de 3 años, de 4 años ó de 5 años. Así por ejemplo AQ3 es la tarea propuesta para el tratamiento didáctico de "Acciones de Añadir y Quitar" en niños de 3 años.

Llamaremos Tarea XYn (con XY variando entre los valores AQ, T, RS y PPT, y n toma los valores 3 años, 4 años ó 5 años) a un conjunto de actividades que conlleva el esquema lógico-matemático XY adecuadas para la clase de n años.

Para cada tarea haremos lo siguiente: presentación que conlleva sistemáticamente 3 actividades (por ejemplo, para la tarea AQ3, las tres actividades son: acciones de añadir A3, acciones de quitar Q3 y acciones de añadir y quitar (A-Q)3); análisis operatorio que consiste en analizar las competencias lógico-matemáticas implicadas en la realización de la actividad; y por último, para los esquemas implicados surgidos del análisis operatorio, se planteará una situación didáctica. Todo esto se recoge en la figura 1.

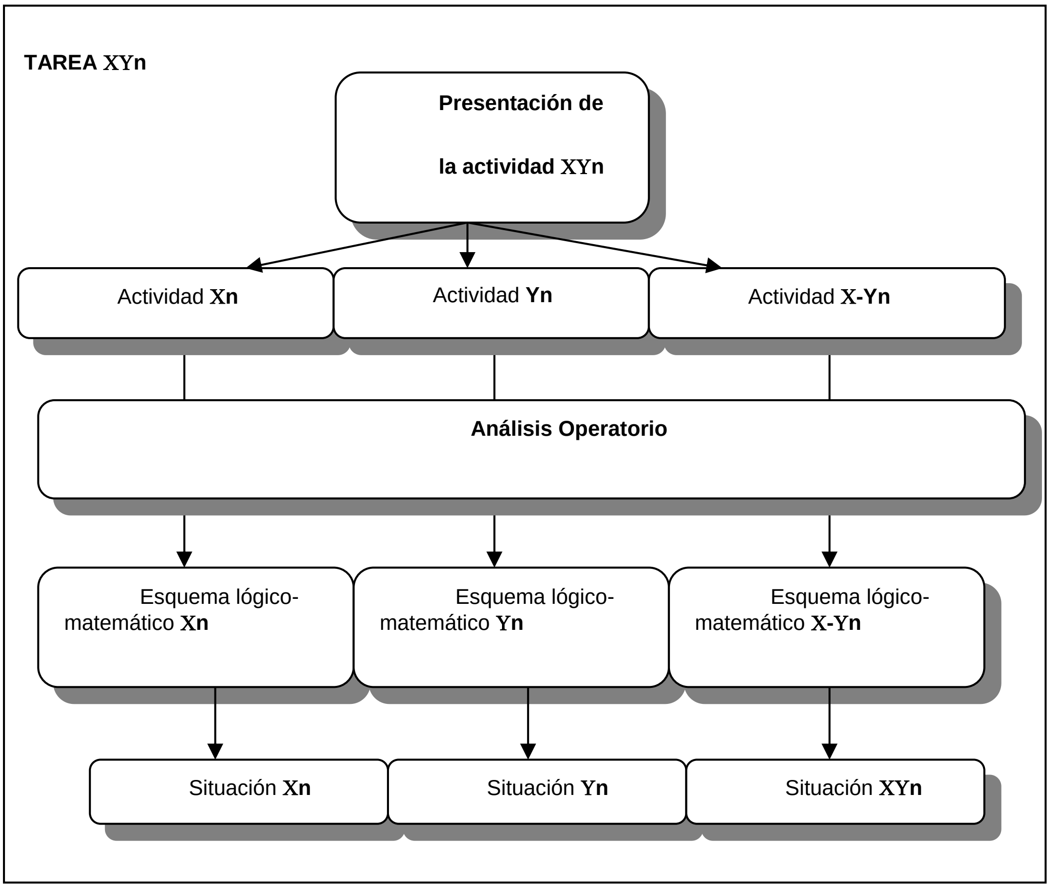


Figura 1.Actuación en el Aula de Educación Infantil en el tratamiento didáctico de suma y resta.

Por ejemplo, para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años, el esquema de la figura 1de manera explícita quedaría como se expone en los apartados sucesivos.

5.1. Cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años. Tarea T3

El esquema a trabajar es: "Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones: Estado inicial-transformación-estado final" en la clase de 3 años.

El escolar de 3 años se tiene que percatar de "cuántos más hay" si añadimos una cantidad de elementos a una colección, "cuántos menos hay" si quitamos y "hay la misma cantidad" si añadimos y quitamos el mismo número de elementos.

La característica fundamental en la forma de trabajar "la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años" en las actividades presentadas es "acciones efectivas o reales" o también lo podemos llamar "caja abierta y cerrada",es decir el escolar está viendo la colección de elementos y realizando las acciones de añadir y quitar para su cuantificación.

5.1.1. Cuantificación de la acción de añadir en 3 años. Actividad TA3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de +1 ó +2, es decir, cuando se añade 1 elemento a una colección dada ó 2 elementos como máximo. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo y la cuantificación del Estado Final llega a 5 como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas sumas:

+1) 1+1, 2+1, 3+1 y 4+1

+2) 1+2, 2+2 y 3+2

Y todo ello en las dos direcciones, es decir primero hacer cada suma con el +1, y después una a una hacerlo con el +1 y a continuación con el +2, por ejemplo si 2+1=3 entonces 2+2=4.

Actividad TA3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el niño esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro o maestra tiene 1 moneda en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y añade 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F).

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 2 monedas

Igual para 3 monedas como estado inicial

Y por último se repite con 4 monedas, es decir el maestro o maestra tiene 4 monedas en la mano (E.I), la cierra y añade 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada.

Se repite todo el proceso pero añadiendo 2 monedas y considerando los estados iniciales 1 moneda, 2 monedas y 3 monedas.

Por último se trabaja añadir 1 y añadir 2 como hecho deducido del primero de esta manera: "El maestro o maestra tiene 1 moneda en la mano (E.I), la cierra y añade 1 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F) (Es 1+1). A continuación se hace 1+2, es decir se añade 2: "El/la maestro/a tiene 1 moneda en la mano (E.I), la cierra y añade 2 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F)". Se repite todo el proceso con "2+1 y 2+2"; y con "3+1 y 3+2".

5.1.1.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir. Esquema lógico matemático TA3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado "acción real ó caja abierta y cerrada" por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, la cerramos y añadimos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de añadir 1 ó añadir 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para proseguir la cuenta y el resultado ordinal hay que volver a convertirlo en cardinal para dar la solución. Es decir, si tenemos 3 monedas (E.I) y añadimos 2 (T), entonces para obtener el estado final, 5 monedas, se ha seguido el siguiente razonamiento: el número 3 que representa las 3 monedas (cantidad y por tanto número cardinal) lo hemos situado dentro de una secuencia (1, 2, 3, 4, 5, 6,….) donde ocupa un lugar determinado (posición ordinal) y a partir de esa posición contamos 2 lugares puesto que añadimos 2 (contar 2 lugares en la secuencia es un proceso ordinal y añadir 2 es tratar el número 2 en su aspecto cardinal ya que representa una cantidad), después de contar esos 2 lugares a partir de 3 en la secuencia obtenemos el número 5 mediante un proceso ordinal, finalmente convertimos el ordinal 5 en cardinal y decimos que hay 5 monedas.

Para conseguir que los escolares piensen en la secuencia numérica para resolver problemas con cantidades presentamos la situación TA3

5.1.1.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir en 3 años. Situación TA3

Vamos a realizar 3+2. Hay una escalera con 10 peldaños. En cada escalón hay 1 caramelo. Cada vez que el osito sube un escalón coge el caramelo que allí se encuentra. Cuando va por el tercer escalón el osito se detiene después de haber cogido el caramelo que allí se encuentra. Preguntamos ¿cuántos caramelos tiene el osito?, como está en el tercer escalón, posición ordinal, tiene 3 (cantidad y por tanto número cardinal), y el problema es ¿cuándo suba 2 escalones más cuántos caramelos va a tener?, por lo que la respuesta y razonamiento es: cuatro (señalando el cuarto escalón porque el 4 está después del 3) y cinco porque el 5 está después del 4, y como ya se han contado 2 lugares la respuesta es 5.

5.1.2. Cuantificación de la acción de quitar en 3 años. Actividad TQ3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de -1 ó -2, es decir, cuando se quita 1 elemento a una colección dada ó 2 elementos como máximo. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas restas:

-1) 2-1, 3-1 y 4-1

-2) 3-2 y 4-2

Y todo ello en las dos direcciones, es decir primero hacer cada resta con el -1, y después una a una hacerlo con el -1 y a continuación con el -2, por ejemplo si 3-1=2 entonces 3-2=1.

Actividad T3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el escolar esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro o maestra tiene 2 monedas en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y quita 1 moneda (T), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F).

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 3 monedas

Igual con 4 monedas como estado inicial, es decir el maestro tiene 4 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 1 moneda (T), el niño tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada.

Se repite todo el proceso pero quitando 2 monedas y considerando los estados iniciales 3 monedas, y 4 monedas.

Por último se trabaja quitar 1 y quitar 2 como hecho deducido del primero de esta manera: "El maestro/a tiene 3 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 1 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F) (Es 3-1). A continuación se hace 3-2, es decir se quitan 2: "El maestro/a tiene 3 monedas en la mano (E.I), la cierra y quita 2 (T), el escolar tiene que averiguar cuántas monedas tiene en la mano que permanece cerrada (E.F)". Se repite todo el proceso con "4-1 y 4-2.

5.1.2.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de quitar. Esquema lógico matemático TQ3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado "acción real ó caja abierta y cerrada" por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, la cerramos y quitamos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de quitar 1 ó quitar 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para hacer un recuento regresivo y el resultado que es ordinal volver a convertirlo en cardinal para dar la solución.

5.1.2.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de quitar en 3 años. Situación TQ3

Vamos a realizar la resta 5-2. El osito se encuentra en el 5º escalón con 5 caramelos. Cada vez que baje un peldaño debe dejar un caramelo en el mismo, la pregunta es ¿cando baje 2 peldaños, cuántos caramelos va a tener?.

5.1.3. Cuantificación de añadir-quitar en 3 años. Actividad T(A-Q)3

Vamos a trabajar de manera sistemática la cuantificación de +1 ó +2 como inversa o recíproca de la cuantificación de –1 ó -2 es decir, cuando se añade 1 ó 2 elementos a una colección dada para seguidamente quitar 1 ó 2 (según proceda) entonces volvemos a tener el mismo número que al principio. Partimos de un Estado Inicial de hasta 4 elementos como máximo y la cuantificación del Estado Final llega a 5 como máximo.

El objetivo es que los escolares realicen de manera sistemática estas sumas y restas:

+1, -1) "<u>2+1 y 3-1</u>" y "<u>3+1 y 4-1</u>"

+2, -2) "<u>2+2 y 4-2</u>" y "<u>3+2 y 5-2</u>"

Actividad T(A-Q)3. El/la maestro/a juega con un niño/a delante de toda la clase. Mientras el escolar esté dando la respuesta correcta sigue jugando, si falla pierde y sale otro, el resto de la clase está pendiente de lo que hace el/la profesor/a y el niño/a. El juego consiste en ir adivinando las sucesivas respuestas:

En primer lugar el maestro/a tiene 2 monedas en la mano que enseña a toda la clase preguntando que cuantas monedas tiene (E.I), cierra la mano y añade 1 moneda (TA), el escolar tiene que adivinar cuántas monedas hay en la mano que permanece cerrada (E.F). A continuación el maestro/a abre la mano y comprueban que hay 3 monedas entonces pregunta ¿cuántas monedas tengo que quitar para tener igual que al principio, es decir 2?.

Se repite todo el proceso pero siendo el estado inicial 3 monedas

Por último, se repite todo el proceso pero añadiendo 2 y quitando 2 monedas y considerando los estados iniciales 2 monedas, y 3 monedas.

5.1.3.1. Análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir-quitar. Esquema lógico matemático T(A-Q)3

En 3 años consideramos lo que hemos llamado "acción real ó caja abierta y cerrada" por eso llevamos las monedas a la clase las tenemos en la mano, la cerramos y añadimos-quitamos monedas todo ello de manera real y efectiva.

Para averiguar, en cada caso el estado final después de haber realizado la transformación de añadir 1 ó añadir 2 según el caso, el escolar tiene que realizar la operación mental de convertir la cantidad del estado inicial (que es un número cardinal) en ordinal para proseguir la cuenta y el resultado que es ordinal volver a convertirlo en cardinal para dar la solución. A continuación tiene que pensar que la acción de quitar es inversa o recíproca a la de añadir por eso quitando la misma cantidad que antes añadimos volvemos a tener el estado inicial.

5.1.3.2. Situación a partir del análisis operatorio de la cuantificación de la acción de añadir-quitar en tres años. Situación T(A-Q)3

Vamos a realizar la suma 3+2 y la resta5-2.

Tenemos una escalera con 10 peldaños, cada vez que el osito sube un escalón coge 1 caramelo que se encuentra en él. Igualmente cuando baja un peldaño debe soltar 1 caramelo. Así tenemos que subir es añadir y bajar es quitar con respecto a la cantidad de caramelos que tiene el osito.

El osito ha subido 3 escalones, se encuentra por tanto en el tercer escalón y tiene 3 caramelos, ¿cuándo suba 2 escalones más cuántos caramelos va a tener?, se encontrará en el quinto escalón y tendrá 5 caramelos, entonces preguntamos ¿cuántos caramelos tiene que dejar para ocupar la misma posición que al principio, es decir para estar en el escalón número 3?.

6. Síntesis

El modelo de la figura 1 se aplica, para las acciones de añadir y quitar y la cuantificación mediante el esquema de transformaciones, en la clase de 3, 4 y 5 años atendiendo a las siguientes pautas:

- ✓ En la clase de 3 años se trabaja las acciones de añadir y quitar provocando la acción, por eso se le dice al escolar “coge más”, “quita algunas”. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja abierta-caja cerrada” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real” (Mialaret, 1984).
- ✓ En la clase de 4 años se trabaja las acciones de añadir y quitar sin provocar la acción, por eso se le dice al escolar “¿qué tienes que hacer para tener más? y para tener menos” Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo 2, 3 ó 4 con el esquema de transformaciones y con el formato “caja cerrada-caja hipotética” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real y conducta del relato” (Mialaret, 1984).
- ✓ En la clase de 5 años se trabaja las acciones de añadir y quitar mediante un relato, sin objetos tangibles. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática trabajando los dobles, los dobles más uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja hipotética- código formal” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “conducta del relato-representación simbólica” (Mialaret, 1984).

Bibliografía

Canobi, K. Reeve, R. & Pattison, P. (2003). *Patterns of Knowledge in Children's Addition*.*Developmental Psychology*, 39 (3), 21-34.

Canobi, K.(2004). *Individual Differences in Children's Addition and Subtraction Knowledge.Cognitive Development*, 19 (1), 81-93.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1979).*An investigation of de learning of addition and subtraction.*Research and Development Center for IndividualizadSchooling, Madison.Wisconsi.

Carpenter, T:P. Fennema, E. et al (1999). *Children's Mathematics.Cognitively Guided Instrction.*Prtsmouth, NH: Heinemann.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Pensamiento Educativo, 39* (2), 119- 135

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. OUP USA.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, S.A, Cerdanyola. España

Escalona, C. M. F. (2015). Análisis cognitivo de la secuencia numérica: procesamiento de la información y epistemología genética. *Pensamiento Educativo, 52* (2), 172-188

Fernandez, C. (2001). Aprendizajes numéricos en el ámbito familiar. En A. Gervilla, M. Barreales, R. Galante & I. Martinez, (Eds),*Familia y Educación* (pp. 339-348). HUM 205, Málaga. España.

Fernández, C. (2007). *¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta?.Bordón,* 59(1), 63-80

Ginsburg, H. & Pappas, S. (2004). *SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation*. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 25 (2), 171-192

Hughes, M. (1981). *Can Pre-School Children Add and Subtract?.EducationalPsychology*, 1(3), 207-219.

Mccrink, K. & Wynn, K. (2004). *Large,number addition and subtraction by 9-month-old infants*. *Psycological Science, 15*, 776-781.

Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Aprendizaje Visor, Madrid. España.

Naito, M. &Miura, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age- and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology, 37* (2), 17-30.

Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2012). Development of quantitative thinking. *Developmental Science, 15*, 863 – 875

Ramos, L., Castro, E., Castro-Rodríguez, E., (2016) Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las Ciencias, 34*.(1), 173-192

Robinson, K. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction.*Journal of Educational Psychology*.*93* (1), 211-222

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: the common core of numerical development. *Developmental Science*, *19*(3), 341-361.

Starkey, P. &Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic.En T. Carpenter, J. Moser & T.

Romberg(Eds). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*p. (pp.99-116). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Nueva Jersey.

Vergnaud, G. (1985). *L´enfant, la mathématique et la réalité*. Peter Lang, New York.

Vilette, B. (2002). *Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic*.*Cognitive Development,* 17, 1365-1383

Zur, O. &Gelman, R. (2004). *Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking.Early Childhood Research Quarterly, 19* (1), 121-137.

Catalina María Fernández Escalona
UNIVERSIDAD DE MALAGA
País España
Resumen biográfico
PROFESORA TITULAR DE UNIVERSIDAD
UN SEXENIO DE INVESTIGACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES
cfernandez@uma.es

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 187-207

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

GEOMETRÍA EN EL AULA A PARTIR DE UN TRATADO ESPAÑOL DE FORTIFICACIÓN DEL SIGLO XVI

Carlos Dorce Polo

Fecha de recepción: 06/09/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen	Se ha demostrado que la introducción de la historia de las matemáticas en el aula ordinaria es muy beneficiosa para el desarrollo y el proceso de aprendizaje. Aquí se presenta una secuencia didáctica donde la geometría, las TIC y el trabajo cooperativo se ven complementadas con un tratado de fortificación español del siglo XVI: los estudiantes aprenderán a tomar medidas indirectas a partir de las instrucciones de la *Teorica y practica de fortificacion* (1598) de Cristóbal de Rojas. De este modo, tendremos una experiencia exitosa donde la historia de las matemáticas se hace imprescindible para contextualizar un problema determinado. **Palabras clave**: Historia de las matemáticas, Innovación pedagógica
Abstract	It has been shown that the introduction of the history of mathematics in regular classrooms is very beneficial for the development and learning process. Here is presented a didactic sequence in which Geometry, ICT and cooperative are complemented with a 16th century Spanish treatise about Fortification: the students will learn to compute indirect measures from the instructions of the *Teorica y practica de fortificacion* (1598) by Cristobal de Rojas. Thus, we will have a successful experience where history of mathematics is essential to contextualize a particular problem. **Keywords**: History of mathematics, Pedagogical innovation
Resumo	Tem sido demonstrado que a introdução da história da matemática em salas de aula regulares é muito benéfico para o processo de desenvolvimento e aprendizagem. Aqui é apresentada uma seqüência didática em que Geometria, TIC e cooperativa são complementados com um tratado espanhol do século 16 sobre Fortificação: os alunos vão aprender a calcular medidas indiretas de as instruções *do Teórica y practica de fortificacion* (1598) por Cristobal de Rojas. Assim, teremos uma experiência bem sucedida onde a história da matemática

é essencial para contextualizar um problema particular.
Palavras-chave: História da matemática, Inovação pedagógica

1. Introducción

Los beneficios de la historia de las matemáticas dentro de los currículos oficiales han sido ampliamente estudiados y no sólo por la relación intrínseca de la historia con la propia asignatura (Siu y Tzanakis, 2004) sino porque aporta, como mínimo, tres mejoras muy considerables (Panasuk y Horton, 2012):

1. El contexto para poder comprender de modo adecuado la revolución de los conceptos matemáticos. Como pasa con cualquier otra ciencia, los temas que llenan los libros de texto actuales no surgieron de la nada sino que detrás hubieron grandes mentes que propusieron soluciones a problemas concretos. Los logaritmos, por ejemplo, fueron el resultado de las pocas ganas que tenía el gran terrateniente escocés John Napier (1550–1617) de hacer "tediosos cálculos" (Dorce, 2014) y ahí apareció la idea de obtener una herramienta que permitiera convertir los productos en sumas y las divisiones en restas (a través de las conocidas fórmulas $\log xy = \log x + \log y$ y $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$). Pongamos un ejemplo más. La tradición antigua asigna la invención de la geometría al reparto de tierras ordenado por el faraón Ramsés II (s. XIII a.C.) entre sus ciudadanos. Cada egipcio recibió una parcela rectangular de terreno por la cual tenía que pagar impuestos. Tras la crecida del Nilo, todas las parcelas cercanas a la orilla del río quedaban parcialmente inundadas y, evidentemente, los contribuyentes pidieron que se tuvieran en cuenta las áreas secas de sus rectángulos a la hora de cobrar dichos impuestos (Heath, 1981, p. 121). Con todo, cada problema es un mundo y cada situación puede despertar la curiosidad por la resolución de una cuestión que, en algún momento de la historia, pareció imposible de resolver.
2. Esta búsqueda de soluciones adecuadas aporta al estudiante una percepción muy interesante de cómo la humanidad se ha desarrollado intelectualmente. Durante muchos años, por ejemplo, las reglas de falsa posición fueron el único método razonable que tenía un mercader o un comerciante para poder resolver una ecuación de primer grado. En el antiguo Egipto, por ejemplo, para calcular la cantidad que sumada a su mitad es igual a 16, un escriba suponía que dicha cantidad era 2 que, sumado a su mitad daba un resultado de 3. Evidentemente, como el resultado tenía que ser 16, todo debía ser $\frac{16}{3}$ veces mayor y, consecuentemente, la cantidad buscada es $\frac{16}{3} \cdot 2 = \frac{32}{3}$. Con la llegada del álgebra árabe y, sobre todo, con la aparición del álgebra simbólica, la

transposición de términos entre ambos miembros de la ecuación se hizo popular y dichas reglas dejaron paso a los actuales libros de texto.

3. El aumento de la motivación y del interés del alumnado hacia esta asignatura. La historia de las matemáticas está llena de anécdotas y datos que permiten que la clase sea un espacio donde los alumnos tengan la necesidad de seguir aprendiendo relaciones, fórmulas y propiedades que en ningún caso se había planteado con anterioridad. Un ejemplo de ello son los cálculos con números decimales que se hicieron en un grupo de alumnos de 2º de Enseñanza Secundaria Obligatoria de un instituto catalán (edades de 13 y 14 años) a partir de las propiedades del número 1.089 (Dorce, 2013). La experiencia consistió en proponer que cada alumno se pensase mentalmente un número de una cifra con dos decimales (por ejemplo, el 6,31). Después, debían darle la vuelta (1,36) y restar ambos números (6,31 – 1,36 = 4,95). Una vez más, los alumnos debían girar el resultado (5,94) y sumar ambos números (5,94 + 4,95 = 10,89), obteniendo 10,89. En general, partiendo de un número no-capicúa, el resultado siempre es 10,89 y esa fue una excusa para deducir casos particulares e introducir el lenguaje algebraico. El problema inicial fue popularizado por Lewis Carrol (1832–1898) tras plantearlo como un problema de monedas distintas, aunque la referencia más antigua que he encontrado se remonta a la revista londinense *Educational Times*, fundada en 1847, dedicada a la educación, la ciencia y la literatura.

En este sentido, la historia de las matemáticas permite romper con la visión parcial de la materia que tienen los alumnos (Guevara Casanova y Massa Esteve, 2009). A veces, los contextos históricos no tienen un momento específico y único dentro de las unidades didácticas sino que pueden servir para introducir un determinado tema situándolo en el tiempo, o bien para terminar el tema y poder dar así una visión más amplia del mismo.

En el ámbito de la historia de la geometría, las experiencias realizadas hasta el momento pueden considerarse de satisfactorias. Un ejemplo son las clases de geometría basadas en compases móviles (Maschietto y Bartolini Bussi, 2011). Las mismas autoras (2006) defienden que estas "máquinas matemáticas" son parte de la fenomenología histórica de la geometría ya que la regla y el compás están en la base misma de la geometría elemental, y los instrumentos para trazar curvas fueron muy usados por personajes de la talla de René Descartes (1596–16650), Frans Van Schooten (1615–1660) e Isaac Newton (1643–1727) en su camino por desarrollar la geometría algebraica. Otro ejemplo algo distinto es la construcción geométrica de la ecuación cuadrática. Radford y Guérette (2000) plantean que los alumnos resuelvan dicha ecuación tal y como se hizo en la antigua Mesopotamia alrededor del siglo XX a.C. Partiendo de $x^2 + x = \frac{3}{4}$ y de los pasos descritos por el escriba de la tablilla BM 13901 para resolverla, el procedimiento lleva directamente al razonamiento geométrico mesopotámico descrito por Høyrup (1990). La clase se organiza en grupos cooperativos y se plantean encontrar las dimensiones de un rectángulo cuyo semiperímetro es igual a 20 unidades y cuya área es igual a 96 unidades cuadradas, es decir, resolver $x^2 - 20x + 96 = 0$. En la experiencia se impuso el método de ensayo-error y el profesor siguió la secuencia didáctica con una presentación de la geometría mesopotámica, la discusión de las soluciones y la introducción del álgebra simbólica. Siguiendo esta idea, Guevara y Massa (2009) propusieron también la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas a partir del *Hisâb fî al-jabr wa'l-muqqabala* de Muhammad ibn Mûsâ al-Jwârizmî (s.IX).

En nuestro caso, la propuesta se va a centrar en la lectura del primer tratado de fortificación que se imprimió en castellano en el siglo XVI y que incluye grandes dosis de aritmética y de geometría. Su autor, Cristóbal de Rojas, lo pensó para ser un libro útil y didáctico para cualquier ingeniero, con lo que todas sus explicaciones se fundamentan en su propia experiencia y conocimientos. Como es habitual en este tipo de obras, la geometría es uno de los pilares sobre los que se apoya toda la teoría de la fortificación, de modo que los *Elementos* de Euclides pasan a jugar un papel determinante. En 1576, Rodrigo de Zamorano (h.1542–1623), Catedrático de Cosmografía en la Casa de Contratación de Sevilla, había publicado en España los *Seis libros primeros de la Geometria de Euclides* con lo que la geometría euclídea pasaba a estar a disposición de la lengua castellana. Veinte años más tarde, Rojas dio un paso más al elaborar un manual práctico de uso de dicha geometría y, con ello, abrió la puerta a la docencia de las técnicas habituales de medición en cualquier ejército del siglo XVI.

2. El autor: Cristóbal de Rojas

No se conoce la fecha de nacimiento exacta de Cristóbal de Rojas (Mariátegui, 1880) aunque el retrato suyo realizado en 1597 (fig. 1) que acompaña su *Teorica y practica de fortificacion* contiene una nota donde se lee que el autor tenía 42 años. Por lo tanto, se acepta que Rojas nació en la ciudad de Toledo alrededor del año 1555.

Figura 1

Rojas inició sus estudios en la Real y Pontificia Universidad de Santa Catalina de Toledo y allí entró en contacto con los *Elementos* de Euclides como discípulo de Alonso Cedillo[1]. Sus primeros trabajos de arquitectura fueron como colaborador de Juan de Herrera (1530–1597) en las obras del monasterio de San Lorenzo de El Escorial. Una vez finalizadas en 1584, se dirigió a Andalucía donde participó en diversas obras de las que no conservamos ninguna noticia. Precisamente, su primer proyecto conocido se encuentra recogido en el capítulo VII de su *Teorica y practica de fortificacion*:

> Por yr picando en muchas cossas, sere siempre ellas breue, aunque todas las que he tratado, y tratarè en este libro, las tengo experimentadas, y principalmente èsta de atajar vn rio para vn molino, porque en el Andaluzia, en vn rio que llaman Guadajoz, estaua vn molino desbaratado, mas auia de 30 años, y para reedificarlo, hizo su dueño muchas vezes juntas de Ingenieros [...] Y viendo y considerando yo todas las traças, que auian dado aquellos maestros, y junto con esto discurriendo largo sobre ello, me resolui y dispuse, aplicando à proposito la materia para tal fundamento, sobre el qual hize la traça y fabrica siguiente (Rojas, 1598, pp. 95-96).

A partir de esta obra que culminó con éxito, su nombre debió de tomar una cierta reputación como ingeniero y esto lo llevó a aceptar el cargo de Maestro Mayor de las Fábricas de Sevilla. Su nueva situación no evitó que tuviera discrepancias con las autoridades debido a sus distintas opiniones sobre las obras que se tenían que llevar a cabo y a los retrasos en el cobro de sus honorarios. Rojas solicitó la plaza de Ingeniero en Madrid en diversas ocasiones y aunque no le fue concedida hasta 1596, su buena predisposición provocó que fuera nombrado Maestro Mayor en Cádiz, donde habían quedado muchas obras inconclusas tras el fallecimiento de Giacomo Fratin, Capitán Ingeniero, en 1586. En esta etapa de su vida fue cuando conoció al italiano Tiburzio Spannocchi (1541–h.1606) quien influiría bastante en su vida. En Cádiz, Rojas levantó un plano completo de la bahía y diseñó su propio proyecto hasta que en 1591 tuvo que cumplir con diversas misiones militares en España y Europa. Tras volver a Madrid, empezó su labor docente en la Academia de Matemáticas de Madrid, iniciando así sus primeras ideas sobre la edición de un tratado en castellano sobre fortificación. Tras diversos trabajos en Cádiz, Gibraltar y Tarifa, Rojas obtuvo la licencia para imprimir su inédito tratado en 1598, aunque sus tareas como ingeniero siempre lo tuvieron muy ocupado. Entre los años 1600 y 1606 se dedicó a seguir trabajando en las fortificaciones de Cádiz hasta que estas quedaron definitivamente paralizadas. A partir de aquí, su situación económica empeoró de manera que empezó a aceptar obras civiles particulares para

[1] Alonso Cedillo ocupó la Cátedra de Matemáticas desde, como mínimo, el año 1576.

ganarse la vida e inició la redacción de un nuevo libro que vería la luz en 1613 con el título *Compendio y breve resolucion de fortificacion conforme a los tiempos presentes*. Rojas falleció el 12 de octubre del año siguiente tras enfermar durante los trabajos en la construcción de la fortaleza de Mámora.

3. La *Teorica y practica de fortificacion*

Como se ha dicho, la *Teorica y practica de fortificacion* fue el resultado de la experiencia docente que tuvo Rojas en la Academia de Matemáticas. La obra, terminada en 1596, tiene un carácter marcadamente práctico, hecho que provocó que tuviera mucho éxito tanto en España como en Portugal a lo largo de los siglos XVI y XVII.

El tratado está dividido en tres partes precedidas de un prólogo introductorio donde Rojas explica que lo escribió a instancias del Conde de Puñonrostro y reconoce que le pidió consejo a Juan de Herrera. De influencias claramente italianas, el texto se enmarca en la serie de obras de ingeniería militar en las que las matemáticas y, sobre todo, la geometría se convierten en el eje transversal de las mismas. De hecho, la primera parte se inicia con una sección con "las reglas de Aritmética necesarias al Ingeniero" (Rojas, 1598, p. 2), es decir, la suma, la resta, la multiplicación y la división de números naturales y "quebrados", la regla de tres con y sin tiempo, la regla de compañías, las reglas de falsa posición, y la extracción de las raíces cuadrada y cúbica. También se recogen las "demostraciones forzosas de Euclides para el Ingeniero" que incluyen las definiciones de punto, línea, superficie, ángulo, triángulo, cuadrilátero, polígono y, en todos los casos, sus distintos tipos y clasificaciones. Se demuestran las proposiciones 1 (construcción del triángulo equilátero a partir de uno de sus lados), 3 (restar segmentos), 9 (construcción de la bisectriz de un ángulo), 10 (construcción de la mediatriz de un segmento), 12 (trazo de la perpendicular a una recta desde un punto exterior), 13 (la suma de dos ángulos suplementarios es igual a dos ángulos rectos), 21 (desigualdades entre ciertos ángulos), 23 (construcción de un ángulo igual a otro dado), 31 (trazo de una recta paralela a otra recta dada), 32 (la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos), 46 (construcción de un cuadrado a partir de uno de sus lados) y 47 (teorema de Pitágoras) del libro I de los *Elementos*, la 3 (el equivalente geométrico a la igualdad ($(a+b)a = ab + a^2$) y 12 (teorema del coseno) del libro II, la 31 (el triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo) y 36 (construcción de la recta tangente a una circunferencia desde un punto exterior) del III, la 5 (trazo de la circunferencia circunscrita a un triángulo), 10 (construcción del triángulo isósceles de ángulos 72º, 72º y 36º), 11 (construcción del pentágono regular inscrito en una circunferencia) del IV, la 16 ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$) del V, la 4 (teorema de Tales), 13 (teorema de la altura), 17 ($\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = ac$), 25 (construcción de figuras semejantes con una razón dada) y 30 (construcción de líneas continuas proporcionales) y la 33 (los planos paralelos comparten perpendiculares comunes) del XI. Esta primera parte sigue con un capítulo que concreta las citadas reglas de la Aritmética, y otro sobre los principios y reglas de la fortificación, donde se explica cómo construir los ángulos exteriores de todos los polígonos regulares de diez o menos caras. A partir de aquí, Rojas inicia una serie de ejemplos de aplicación directa de la geometría a la construcción de plazas triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales y heptagonales a partir de la división de un ángulo recto en tantas partes como ángulos tienen dichos polígonos. Vale la pena señalar que antes del trazo de los baluartes de la plaza pentagonal, Rojas explica la construcción geométrica del pentágono regular (fig. 2) que, traducida al castellano actual es:

> Sea el círculo dado *AFD* y sea su centro el punto *B*. Dice esta regla que se divida el semidiámetro *AB* en dos partes iguales en el punto C y puesta la punta del compás en el mismo punto *C* con el intervalo o distancia *CD* se señalará el punto *E*, de suerte que estén distantes por partes iguales la *E* y la *D* del punto *C* y luego pasar la punta del compás al punto *E* y abrirle justamente hasta el punto *D* como muestran los puntillos *ED* y aquel es un lado justamente del pentágono de este círculo que vamos trazando (Rojas, 1598, p. 21).

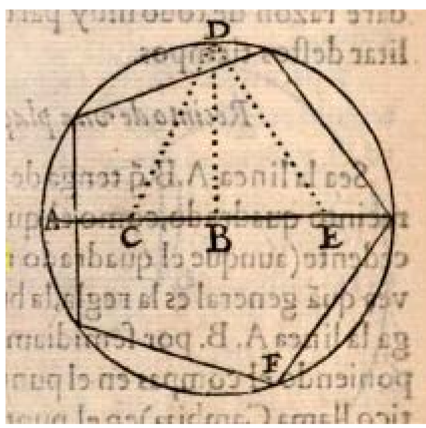


Figura 2

Si $r = AB = BD = 1$ es el radio de la circunferencia (con *AB* y *BD* perpendiculares), por construcción se tiene que $AC = CB = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras el segmento *CD* medirá $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Es evidente, pues, que $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y que *BE* es igual a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Una vez más, por el teorema de Pitágoras, $DE = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, medida que coincide con la longitud del lado del pentágono regular inscrito en una circunferencia. En efecto, como $\cos\angle ECD = \cos 72º = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos 72^\circ =$$
$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = 2 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \tfrac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Además, a partir de la misma figura (fig. 2), *BD* se corresponde con el lado del hexágono regular y *BE* con el del decágono regular (por la proposición 10 del libro XIII de los *Elementos*, que afirma que los lados del pentágono, hexágono y decágono inscritos en una misma circunferencia forman un triángulo rectángulo).

Con el cálculo de la suma de los ángulos de un polígono y la construcción de polígonos semejantes a escala finaliza esta primera parte que da paso a la segunda que es una recopilación de todas aquellas materias que Rojas cree que son imprescindibles para ser un buen ingeniero. Reconoce sus 25 años de experiencia en este campo y cita a Galasso Alghisi (1523–1573), Gabriello Busca (h.1540–1605), Girolamo Maggi (h.1523–1572), Jacopo Castriotto (1501–1563) y Giacomo Lanteri (h.1500–1560), todos ellos autores de tratados de fortificación en la segunda mitad del siglo XVI, y también a "los más modernos y que más a propósito parece haber escrito" (Rojas, 1598, p. 31) que son Carlo Tetti y Girolamo Cattaneo (1540–1584). Con este primer discurso, Rojas demuestra estar al corriente de las obras más relevantes de ingeniería militar de su época y discute las medidas de las distintas plazas determinando cuales son más seguras. Con todo, en el capítulo V plantea el diseño y fortificación de "una plaza en triángulo y las demás hasta el heptágono" (Rojas, 1598, pp. 39-44), al que siguen una serie de capítulos dedicados a aspectos prácticos de su construcción, del mejor modo de ser defendidas y de cómo han de ser medidas, intercalando capítulos dedicados al cálculo de áreas de los triángulos, los cuadriláteros y el círculo, y a la transformación de unas figuras en otras. Tras una resolución del problema de la duplicación del cubo, donde cita a Niccolò Fontana, más conocido por el sobrenombre de Tartaglia (h.1499–1557), Rojas inicia su capítulo XXII "que enseña a medir distancias":

> Yo quiero medir desde el punto *A* hasta el punto *B* [Fig. 3], cuántos pasos, o varas, o pies hay. [Se pondrá] el cuadrante en el punto *B* y será de forma que el lado *CE* del dicho cuadrante mire al punto *A* y el lado *CD* mire hacia el arbolillo señalado con la *T*. Luego, se irá

> caminando hacia el arbolillo *T* por la línea, en ángulos rectos, y se volverá a plantar el cuadrante junto al dicho arbolillo *T* de tal forma que por el lado *CD* se vea el punto *B*, y por el lado *DE* se vea el punto *A*. Y estando así, se medirá la distancia que hay desde *B* hasta el punto *D* junto al arbolillo *T*, y aquella será la distancia que habrá des del punto *A* [...] (Rojas, 1598, p. 80).

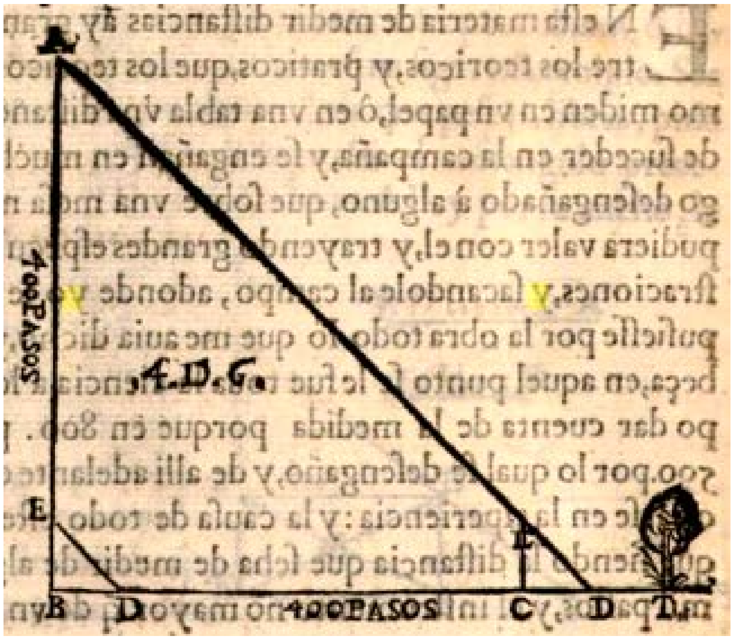


Figura 3

Rojas explica que con este método se puede medir cualquier distancia aunque, en el caso de que haya algún impedimento en el camino, también se puede utilizar el siguiente método:

> Sea el río *BA* [Fig. 4]. Digo que se haga un cuadrado en la tierra tan grande como se pudiere, pues cuanto mayor fuere, tanto será más cierta la medida, y se hará de tal forma este cuadrado que un lado suyo, que será *EC*, mire al punto *A* de la otra banda del río. Y supongo que este cuadrado tiene por cada lado 80 pies, como en esta figura aparece. Digo pues, que se plante el cuadrante, o instrumento, en el punto *D* y se mire al punto *A*, y se note por donde corta la línea al cuadrado que se hizo en la

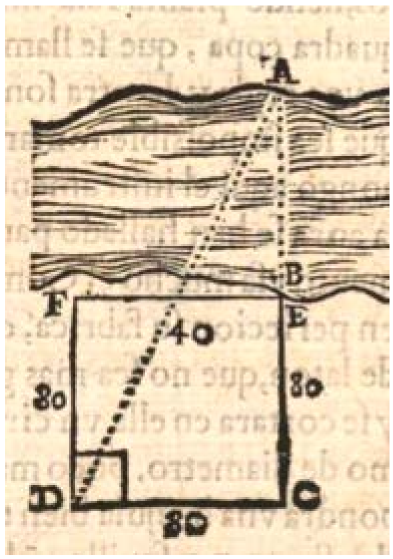


Figura 4

> tierra. Y supongo que cortó por la mitad del [lado], que fue a los 40 pies. Hecho esto se ordene una regla de tres diciendo: Si 40 vinieron de 80, los mismos 80, ¿de dónde vendrán? (Rojas, 1598, p. 81).

4. El trabajo cooperativo como valor añadido

Una vez planteado el marco teórico en el que se van a mover los estudiantes, vale la pena aprovechar los beneficios propios del trabajo cooperativo ya que va a lograr que los alumnos desarrollen habilidades personales relacionadas con el trabajo en equipo y el liderazgo, así como la reflexión conjunta de un conjunto de información que debe ser analizada y procesada para poder extraer conjeturas y razonamientos propios de las matemáticas.

Si bien el aprendizaje cooperativo no puede ser un recurso que sólo sea utilizado dentro de una unidad didáctica sin cambiar la estructura fundamental del aprendizaje (Pujolás, 2008), este tipo de actividades pueden fomentar otro tipo de visión dentro del alumnado. Esta nueva manera de ver las cosas puede ser fundamental para romper los esquemas tradicionales de las aulas ya que además de introducir esta nueva metodología, nos permite promover el desarrollo de las competencias básicas. En este sentido, la sensación que tiene el estudiante de que necesita ayuda al mismo tiempo que aporta sus conocimientos y razonamientos es equivalente al equilibrio entre iguales que cada grupo encuentra y con ello se potencia la participación de todos los alumnos, la regulación del propio aprendizaje y la necesidad del trabajo en equipo como punto de apoyo de su esquema cognitivo. Con unos objetivos de trabajo determinados por los propios interesados, sus resultados de aprendizaje son mucho más óptimos que los que se obtienen a través de las típicas clases magistrales.

Sin embargo, el trabajo en grupo de manera cooperativa no es fácil ya que no se trata simplemente de colocarlos sentados físicamente juntos, sino que se ha de crear el clima propicio para que todos trabajen de manera autónoma a la par que colaborativa. El planteamiento es, pues, el de estructurar el aula en grupos cooperativos que intenten dar respuesta a la pregunta: "¿Cuál es la longitud del patio del instituto?" A partir de una lluvia de ideas, cada grupo se dedica a teorizar sobre cómo se puede medir el patio de manera fiable tras lo cual, hay una puesta en común de todas las opciones pensadas. He aquí las opciones más razonables:

1. Medir el patio directamente. Para ello se necesita una cinta métrica suficientemente larga. Pregunta: ¿disponemos de dicha cinta métrica?
2. Si no disponemos de ella, podemos enlazar sucesivas mediciones con cintas métricas más cortas.
3. Usar la aplicación "Medir la distancia" de Google Maps (Fig. 5). La tecnología actual permite medir la longitud del patio sin necesidad de salir del aula. Es necesario aprovechar esta aplicación gratuita (o alguna similar de otra firma) y al mismo tiempo formularnos la pregunta de cómo lo haríamos si no tuviéramos ordenadores disponibles. Es decir, ¿cómo hubieran medido el patio en el siglo XVI?
4. Mirar las medidas que constan en los planos del edificio que se conservan en los despachos de la dirección del centro educativo.

Con una actividad como esta, los estudiantes deben argumentar sus puntos de vista y, en la puesta en común, deben defender sus posiciones o reconstruirlas a partir del intercambio y discusión de las ideas. Todos tienen su opinión y la diversidad del aula se ve perfectamente armonizada ya que se recogen los esfuerzos de todos en un mismo frente común. De esta manera se consigue un punto en el que toda la clase está deseosa de saber cuál es la verdadera longitud del patio y los alumnos se preguntan realmente qué hay que hacer para conseguirla. Por lo tanto, el camino que se va a iniciar en el aula va a estar formado por una secuencia de actividades que deben trasladar la geometría del libro de texto a la realidad y, posteriormente, a través de la *Teorica y practica de fortificacion*, trasladar la realidad a la geometría del libro de texto.

Esta retroalimentación permitirá contextualizar las matemáticas, ver su pasado y terminar concluyendo con un resultado explícito y práctico.

5. Propuesta de aula

La secuencia de actividades que aquí se va a plantear fue implementada en un grupo de estudiantes de 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (edades de 15 y 16 años) en un instituto público de la periferia de Barcelona, en Cataluña, España. A través de seis actividades, temporizadas en cuatro sesiones de 60 minutos cada una, el alumnado trabajó diversos contenidos del currículo oficial catalán de este curso y que se adaptan perfectamente a las nuevas ordenaciones curriculares actuales (Decret 187/2015), que son:

Numeración y cálculo

- Números racionales e irracionales
  - Recursos digitales para la realización y comprobación de cálculos numéricos.
  - Cálculo mental: estimación y estrategias de cálculo.

Espacio y forma

- Trigonometría
  - Uso de programas de geometría dinámica.
  - Uso de la trigonometría para la resolución de problemas en contextos diversos.

Medida

- Medidas indirectas
  - Semejanza y trigonometría.
  - Unidades de medida.
  - Aproximación por exceso y por defecto.
  - Precisión, exactitud y error.
  - Resolución de problemas relativos a medidas indirectas.

Estadística y azar

- Estudios estadísticos
  - Diseño, muestras y aleatoriedad de las respuestas y experimentos.
- Herramientas de análisis de datos
  - Medidas de centralización y dispersión.
  - Hoja de cálculo y recursos digitales para la estadística.

Además, también se adapta a los criterios de evaluación propuestos:

Dimensión resolución de problemas

- Resolver problemas de la vida cotidiana, de otras materias y de las mismas matemáticas utilizando distintos tipos de números (racionales e irracionales), símbolos y métodos algebraicos (ecuaciones de 1º y 2º grado, sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales) y evaluar los métodos de resolución posibles, como por ejemplo el ensayo-error o el cálculo mediante herramientas tecnológicas.

- Estimar, medir y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con la precisión adecuada a la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.
- Obtener medidas indirectas en la resolución de problemas de ámbitos diversos (por ejemplo, la agrimensura y la navegación), utilizando la trigonometría con los medios tecnológicos que actualmente se usan para realizar medidas indirectas.
- Elaborar estudios estadísticos e interpretar tablas y gráficos estadísticos así como los parámetros estadísticos más habituales [...].

Dimensión razonamiento y prueba

- Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, como la realización de conjeturas, su justificación y generalización, así como la comprobación, el tanteo y el contraste con diversas formas de razonamiento a lo largo de la historia de las matemáticas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros a través del trabajo por parejas o en grupo o la puesta en común con toda la clase.

Dimensión conexiones

- Usar relaciones entre diversas partes de las matemáticas (álgebra y geometría, números y geometría, números, estadística y geometría, números y azar) que favorecen el análisis de situaciones y el razonamiento.

Dimensión comunicación y representación

- Expresar verbalmente y por escrito, con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, simbólicos o gráficos, valorando la utilidad del lenguaje matemático y su evolución a lo largo de la historia.
- Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información, y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

Con todo, la secuencia didáctica es la siguiente.

5.1. Actividad 1

En esta primera sesión de una hora, se introduce la pregunta "¿Cuál es la longitud del patio del instituto?", se forman los grupos cooperativos y se inicia la lluvia de ideas y la puesta en común descritas en el punto 4. Sea como sea, el grupo entero debe organizar la tarea de medición del patio y se va a proponer como incentivo que la secuencia de actividades va a terminar en el patio realizando efectivamente la medición con los medios que se tienen a mano.

Figura 5

5.2. Actividad 2

Cada grupo va a disponer de un ordenador y su misión será la de calcular la longitud del patio, y también su perímetro y su área. A través del plano del instituto que se obtiene de Google Maps y la aplicación "Medida de distancias", cada grupo deberá seguir los siguientes pasos:

1. Buscad el plano del patio del instituto en Google Maps y rellenad la primera columna de la tabla con la aplicación "Medida de distancias" que se obtiene al pulsar el botón derecho del ratón:

	Medida Google Maps	Medida calculada a mano
Longitud		
Perímetro		
Área		

Tabla 1

2. Bosquejad en vuestro cuaderno de notas la forma del patio del instituto y con las medidas obtenidas en la tabla anterior, comprobad que vuestros resultados coinciden, con un cierto margen de error, con el área calculada por Google Maps.

3. Calculad el error absoluto y el error relativo cometido en vuestro cálculo del área comparado con el resultado de Google Maps.
4. Compartid vuestros tres resultados con el resto de grupos y calculad la media aritmética y la desviación típica de los mismos. ¿Podemos llegar a una conclusión final?

Con estas cuatro preguntas se trabajan tres aspectos del currículo. En primer lugar, como se ve en la Fig. 6, la forma del patio es irregular y en la pregunta 2 cada grupo tendrá que desarrollar al máximo su capacidad de abstracción para poder calcular las medidas que se piden. Según Google Maps, el perímetro del patio es de aproximadamente 400,5 metros (1.314 pies) y su área es igual a 5.888,3 m^2 (63.381,09 ft^2).

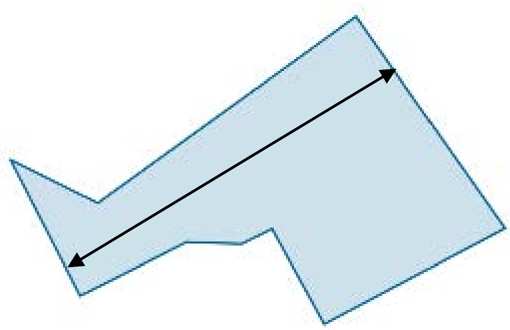


Figura 6

.

En la pregunta 3 se pide comprobar la exactitud de los cálculos realizados comparándolos con los resultados obtenidos mediante la aplicación informática. El cálculo del área de la figura a partir de descomposiciones en polígonos más simples y regulares obliga a tener un cierto grado de precisión para poder corroborar que el resultado obtenido por el grupo es suficientemente correcto. Por lo tanto, se puede abrir aquí un debate sobre qué porcentaje de error relativo es aceptable y a partir de qué valor no lo es.

Finalmente, con la pregunta 4 se pretende repasar dos de los conceptos básicos de la estadística para terminar concluyendo una medida más o menos estandarizada del patio.

5.3. Actividad 3

La clase se realiza directamente en el patio del instituto y cada grupo dispondrá de sus respectivos cuadernos de notas, una calculadora, un transportador de ángulos y una cuerda de longitud igual a 10 m. Su objetivo será el de medir efectivamente la longitud del patio.

Si bien se intuye una cierta desesperanza en algunos de los grupos, al final todos ellos colaboran con sus respectivas cuerdas para organizarse y dar una única medida común. Es previsible que la idea salga de los mismos grupos y que los propios alumnos hagan de picas de referencia con lo que, una vez más, el trabajo colaborativo da sus frutos con esta ayuda mutua entre todos los miembros del aula. Un incentivo que ayuda a esta agrupación es que el alumnado sabe previamente el resultado obtenido por el medidor de Google Maps (112,78 m en este caso) con lo que en seguida se dan cuenta de su necesidad de cooperar.

5.4. Actividad 4

Para esta actividad, es necesario que el docente presente adecuadamente el uso de la historia de las matemáticas en el aula y, en particular, la de la *Teorica y practica de fortificacion*. Cada grupo va a disponer del texto correspondiente al capítulo XXII del tratado y un guión basado en las siguientes preguntas:

1. Buscad en internet información sobre la figura de Cristóbal de Rojas, su época y el estado de las matemáticas a finales del siglo XVI.
2. Leed el capítulo XXII de la *Teorica y practica de fortificacion*. Bosquejad en vuestro cuaderno de notas la figura del patio del instituto y cómo podéis medirlo con tan solo una cuerda de 10 metros de longitud.

Como antes, la actividad se cierra con una puesta en común de los razonamientos de cada uno de los grupos y un debate sobre su idoneidad efectiva. Además, el profesor ha de plantear también la variante de la Fig. 8.

5.5. Actividad 5

Esta es la actividad clave de toda esta secuencia didáctica. Organizados en grupos, los alumnos han utilizado las TIC para calcular la longitud, el perímetro y el área del patio de su instituto, han calculado explícitamente dicha área, errores absolutos y relativos y también han trabajado la estadística. Se han enfrentado también a la resolución contextualizada de un problema y han terminado encontrando en un libro del siglo XVI, el cual han tenido que situar en el espacio y en el tiempo, la solución al cálculo real de una medida de longitud horizontal. Además, han aprendido cómo estaban las matemáticas en el siglo XVI y con una buena guía propuesta por el profesor, han obtenido nociones sobre los renacentistas italianos Girolamo Cardano (1501–1576) y Niccolò Fontana, el francés François Viète (1540–1603) y, en otro ámbito, los españoles Juan de Ortega (h.1480–1568) y Juan de Herrera (aunque estos nombres podrían considerarse del todo imprescindibles, siempre se pueden obtener otras historias matemáticas de mucha utilidad).

Ahora llega el momento de utilizar las matemáticas sobre el terreno. La clase se desarrolla en el patio y con el texto de Rojas cada grupo ha de calcular la longitud del patio. Con la cuerda suministrada, cada grupo formará un cuadrado de lado igual a 10 m a partir del cual se representarán las figuras 7 i 8 y se medirán las longitudes *x* e *y*, respectivamente (Figs. 9 y 10). Para medir la distancia *AB*, lo único que hay que hacer es determinar el punto *K* (Fig. 7) en el que corta la visual *AD* al lado *BF*. Entonces, aplicando el teorema de Tales se tiene que:

$$\frac{FK}{DF} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow AB = \frac{DF \cdot BK}{FK} = \frac{l\,x}{l - x},$$

donde *l* es el lado del cuadrado y $x = BK$.

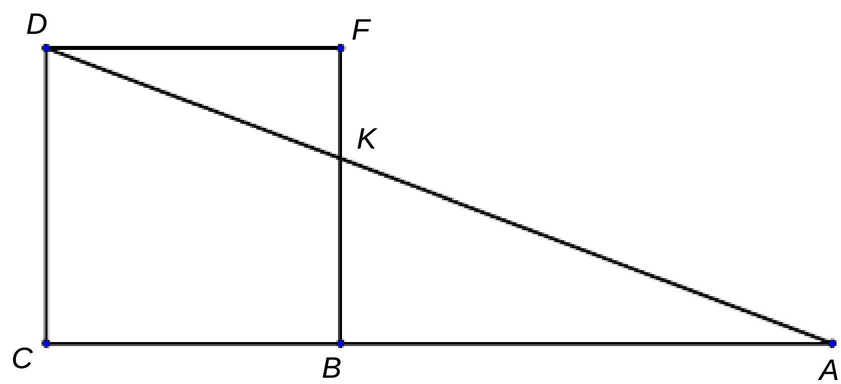


Figura 7

Una variante de esta medición (no contenida en la obra) podría haber sido buscar la visual *MFA* (Fig. 8) y medir directamente la distancia $y = DM$. En este caso, por el teorema de Tales se obtiene:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{DF}{DM} \Rightarrow AB = \frac{BF \cdot DF}{DM} = \frac{l^2}{y}$$

Tras la explicación de ciertos instrumentos de medición y la construcción de relojes de sol, la tercera parte trata sobre los principios de la arquitectura y la fábrica de materiales, citando a personajes de la talla de Marco Vitruvio (s. I a.C.), Jacopo Vignola (1507–1573), Andrea Palladio (1508–1580) o Sebastiano Serlio (1475–h.1554).

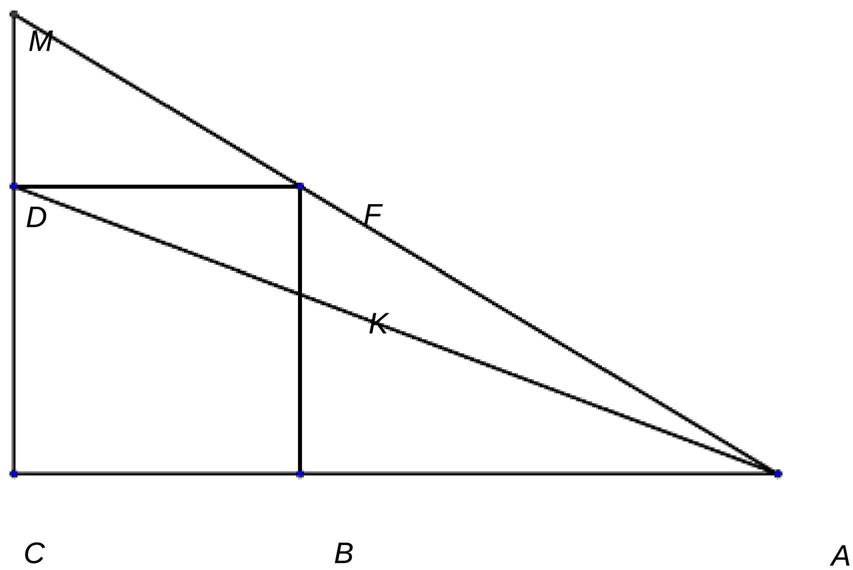


Figura 8

A la vista de los resultados, la mejor medida obtenida fue de $x = 9{,}12$ m e $y = 0{,}96$ m, con lo que se obtuvo una longitud del patio igual a 113,64 m y 114,17 m, respectivamente (112,78 m es la medida que se obtuvo de Google Maps en la línea transversal que se utilizó para determinar la longitud).

Una pregunta más que ha de ser añadida en el trabajo grupal es la determinar las correctas medidas de *x* e *y* que se deberían haber obtenido considerando que 112,78 m es la longitud exacta del patio, es decir, resolver las ecuaciones:

$$\frac{10x}{10-x} = 102{,}78 \Rightarrow 10x = 102{,}78(10-x) = 1027{,}8 - 102{,}78x \Rightarrow x = \frac{10{,}278}{112{,}78} \approx 9{,}11\text{m}$$

$$\frac{100}{y} = 102{,}78 \Rightarrow y = \frac{100}{102{,}78} \approx 0{,}97 \text{ m}$$

Se cierra así esta secuencia didáctica, analizando las medidas tomadas con los resultados obtenidos y hasta qué punto se podrían haber mejorado.

Figura 9: trazado de las Figs. 7 y 8 con cuerdas

5.6. Actividad 6

Esta es la actividad final. Cada grupo tiene que presentar sus resultados y entre todos se deben sacar las conclusiones finales.

Para una correcta evaluación, cada alumno debe implementar su propia evaluación individual dentro del grupo que se ha de complementar con la observación permanente del docente y de su seguimiento tanto individual como colectivo del proceso de aprendizaje. Además, cada grupo tiene que presentar una memoria con sus reflexiones y cálculos. Por lo tanto, se pueden plantear distintos tipos de rúbricas evaluadoras que enfaticen algunos de los aspectos trabajados por encima de otros. En general, los resultados obtenidos son muy satisfactorios y el alumnado suele mostrar su interés por este tipo de actividades que combinan facetas diversas del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por lo que respecta a la introducción lectura y análisis de un texto matemático del siglo XVI y la correspondiente introducción de la historia de las matemáticas en el aula, la reflexión global es igualmente satisfactoria y las rúbricas planteadas han de contener preguntas concretas sobre su implementación.

Figura 10: medición del segmento *x*

6. Reflexiones finales

En general, esta actividad permite la introducción de una pequeña dosis de historia de las matemáticas dentro del aula y lo hace para colaborar en la adquisición de las competencias matemáticas básicas del alumnado. Puede afirmarse que, en este caso, la historia de las matemáticas no ha sido introducida tan solo de modo anecdótico y divertido, sino que ha contribuido al diseño de una secuencia didáctica que ha permitido a los estudiantes poder desenvolverse adecuadamente por un problema geométrico. Siguiendo las competencias generales elegidas por el proyecto PISA (OECD, 2004, p. 40), se puede afirmar que esta secuencia de actividades cumple las expectativas de adquisición de las competencias básicas matemáticas (tabla 2).

	P	A	C	M	PR	R	LS	HR
Actividad 1	X	X	X		X			
Actividad 2	X	X	X	X	X	X	X	X
Actividad 3	X	X	X		X			X
Actividad 4	X	X		X	X	X	X	X
Actividad 5	X			X	X	X	X	X
Actividad 6	X	X	X					

Tabla 2: P: pensar; **A:** argumentar; **C:** comunicar; **M:** modelar; **PR:** plantear y resolver problemas; **R:** representar; **LS:** utilizar el lenguaje simbólico y técnico y las operaciones; **HR:** usar herramientas y recursos

De este modo, la interacción entre los propios alumnos así como todo el trabajo realizado contribuye a que el aula de matemáticas sea el espacio ideal para poder desarrollar el razonamiento lógico óptimamente.

Bibliografía

Bartolini Bussi, M. G. y Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche*. *Dalla storia alla scuola*. Springer-Verlag, Nueva York.

DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (DOGC, núm. 6945, 28.08.2015).

Dorce, C. (2013). "El joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebraic". Noubiaix, 33, 22-34.

Dorce, C. (2014). "Un paseo histórico por la invención de los logaritmos", Suma, 75, 33-42.

Guevara Casanova, I. y Massa Esteve, M. R. (2009). "La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària". *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Nova època, Vol. 2 (1), 377-388.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*. Volume I. Dover Publications, Inc, Nueva York.

Høyrup, J. (1990). "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17.1 (Jan 1, 1990): 27-69.

Mariátegui, E. (1880). *El capitán Cristóbal de Rojas. Ingeniero militar del siglo XVI. Apuntes históricos*. Imprenta del Memorial de Ingenieros, Madrid.

Maschietto, M. y Bartolini Bussi, M. G. (2011). "Mathematical Machines: From History to Mathematics Classroom", en O.Zaslavsky y P.Sullivan (eds.), *Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics. Tasks to Enhace Prospective and Practicing Teacher Learning*. Springer, Nueva York, Dordrecht, Heidelberg, Londres.

OECD (2004), *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. OECD, París.

Panasuk, R. y Horton, L. (2012). “Integrating history of mathematics into curriculum: What are the chances and constraints. *International Electronic Journal on Mathematics Education*, 7 (1), 3-20.

Pijolàs, P. (2008). *Nueve ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Grao, Barcelona.

Radford, L. i Guérette, G. (2000), "Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach", en Katz, V. (ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective. An International Perspective*, The Mathematical Asociation of America, Washington DC.

Rojas, C. (1598). *Teorica y practica de fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos*. Luis Sanchez, Madrid.

Siu, M.-K. (2004). "History of mathematics in classroom teaching - appetizer? Main course? Or dessert?" *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3 (1-2), V-X.

Nombre: **Carlos Dorce Polo**
Correo: cdorce@ub.edu
Profesor asociado de Historia de las Matemáticas en la facultad de Matemáticas e Informática de la Universitat de Barcelona (desde 2006)
Profesor de enseñanza secundaria y bachillerato en el INS Barres i Ones de Badalona, Cataluña, España (desde 1998).

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Páginas 208-222

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ERRORES, TRIGONOMETRÍA Y VECTORES: APLICACIONES MATEMÁTICAS SOBRE EL MISMO OBJETO DE ESTUDIO

Alejandra Cañibano, Patricia Sastre Vazquez, Rodolfo D´Andrea

Fecha de recepción: 08/03/2016
Fecha de aceptación: 25/10/2016

Resumen

A partir de una situación real y concreta con la cual puede enfrentarse un alumno de la carrera de Ingeniería Agronómica de universidades de Argentina, tanto en la situación de estudiante como posteriormente de profesional, en este trabajo, se pretende hacer uso de tres temáticas diferentes, Errores, Trigonometría y Vectores, incluidas en el plan de estudios e íntimamente relacionadas, con el objeto de poder resolver una problemática donde se integren los conocimientos que se dictan en las asignaturas como también utilizar dos temas inherentes a la matemática como alternativa a la solución del mismo.
Palabras clave: errores, trigonometría, vectores

Abstract

From a real and specific situation with which a student of agronomic engineering of universities of Argentina, both in the situation of student as a professional, in this work, later may face intends to make use of three different, but included in the curriculum and intimately related issues, in order to be able to resolve a problem where to integrate knowledge as stated in subjects like also use two themes inherent in mathematics as an alternative to the solution of the same.
Keywords: errors, trigonometry, vectors

Resumo

De uma verdadeira e específica situação com que pode enfrentar um estudante de engenharia agronômica de universidades da Argentina, ambos na situação de estudante e mais tarde profissional, este trabalho, destina-se a fazer uso de três temas diferentes, erros, trigonometria e vetores, incluindo no currículo e intimamente relacionados, a fim de ser capaz de resolver um problema onde se integram conhecimento trabalhados como também dois temas inerentes à matemática como uma alternativa para a solução do mesmo.
Palavras-chave: Erros, trigonometría, vetores

INTRODUCCIÓN

Sabida la importancia del uso de la matemática en el alumno de carreras de Ingeniería; sabida la importancia de la utilización de la matemática como herramienta para resolver problemas concretos de la disciplina y como co - ayudante de otras disciplinas pertinentes al plan de estudio es necesario, y siempre lo serán, las reflexiones sobre el uso, dictado y forma de transmitir conocimientos que incidirán en el proceso de enseñanza y de aprendizaje del futuro profesional.

A fin de reflexionar sobre estas cuestiones partimos con pequeñas citas de un trabajo de Miguel de Guzmán (1983) en la revista *Investigación y Ciencia*:

> *"La matematización del pensamiento como camino científico es hoy un dogma, a veces llevado a extremos ridículos, de la ciencia moderna.*
>
> *Puede uno preguntarse: ¿Merece la matemática este lugar privilegiado que se le ha atribuido de una forma tan constante? …*
>
> *Y con todo, el pensar matemático merece un lugar privilegiado en el conocimiento por razón de su adecuación a su propio objeto, su evidencia y su certeza…*

El constructivismo propone un paradigma donde el proceso de enseñanza se percibe y se lleva a cabo como un proceso dinámico, participativo e interactivo del sujeto, de modo que el conocimiento sea una auténtica construcción operada por la persona que aprende.

En líneas generales, estas teorías consideran que la enseñanza debe basarse en la producción de estrategias que permitan comprender conceptos y que el conocimiento no puede transferirse de manera aislada, de una persona a otra, sino que el conocimiento conceptual debe ser construido activamente desde la propia experiencia y relacionado con el conocimiento preexistente. En ese sentido, el aprendizaje es un proceso personal del que aprende, aunque necesita un marco social para desarrollarse.

Es así que un ambiente de aprendizaje constructivista se diferencia de otros porque debe proveer a las personas el contacto con representaciones reales, preferentemente situaciones contextualizadas.

OBJETIVO: Hacer uso de una parcela obtenida de una imagen satelital para estudiar tres aspectos distintos, de aplicación matemática, y de gran utilidad para el futuro profesional.

OBJETIVOS PARTICULARES:

- ✓ Mostrar tres aplicaciones concretas sobre el uso de la matemática en un objeto de estudio a la que los alumnos ya tienen acceso (las imágenes satelitales)
- ✓ Otorgar a la matemática un carácter fundamental de herramienta, para algunas aplicaciones concretas en la carrera de Ingeniería Agronómica.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

A partir de una porción extraída de una imagen LANDSAT de Abril del 2001, correspondiente a la zona de la cuenca del Arroyo del Azul, Buenos Aires, Argentina se analizarán tres aplicaciones de carácter inminentemente práctico, los cuales tienen como sustento teórico conceptos sobre: Teoría de Errores, Trigonometría y Producto Vectorial entre vectores

JUSTIFICACIÓN:

Respecto a la primera aplicación, Teoría de Errores, los errores, como todos los fenómenos naturales obedecen a ciertas leyes que es indispensable conocer y en las cuales se debe apoyar para establecer métodos y señalar tolerancias. Una medida exacta es imposible de obtener y por lo que se adopta una que más o menos se aproxime al compararla con las diferentes medidas realizadas. Esto dará por resultado una serie de errores aparentes únicos que podemos conocer. Es por eso que la teoría de errores que se debe enseñar debería denominarse con más propiedad *teoría de los errores aparentes accidentales* (Domínguez García- Tejero, 1984)

La trigonometría por su parte ofrece muchísimas ventajas que no siempre se saben aprovechar; la situación por la que pasa el profesional recién egresado hace que no pueda desaprovechar ninguna situación de trabajo profesional y se debería dar por sabido que el cálculo de lados o de superficies o de volúmenes de distintos objetos, forman parte de las incumbencias del Ingeniero Agrónomo.

Por su parte en el tema vectores se cae indefectiblemente en las operaciones de producto escalar y productor vectorial. Estos conceptos, la mayoría de las veces, no son interpretados por los alumnos y tampoco la totalidad de los textos los ofrece de una manera clara. Más allá de las aplicaciones inmediatas con otras materias del plan de estudio, se puede lograr que el alumno identifique las bondades de conocer estas operaciones y las tenga en cuenta como una herramienta más a la hora de resolver situaciones de carácter geométrico.

MATERIALES

Para este trabajo se utilizó una imagen LANDSAT 7, correspondiente al mes de Abril del 2001 que abarca una superficie de 185 x 185 km^2. En esta imagen está incluido un alto porcentaje del Partido de Azul y de la misma se recortó una zona cercana a la ciudad, de fácil acceso en caso que los alumnos deseen realizar una visita a campo, y que tiene una forma geométrica particular, triángulo rectángulo, apta para las aplicaciones posteriores. En la Fig. 1 se muestra la imagen completa y en la Fig. 2 la zona que se recortó para realizar los análisis posteriores; en ella está marcada el área utilizada para las aplicaciones.

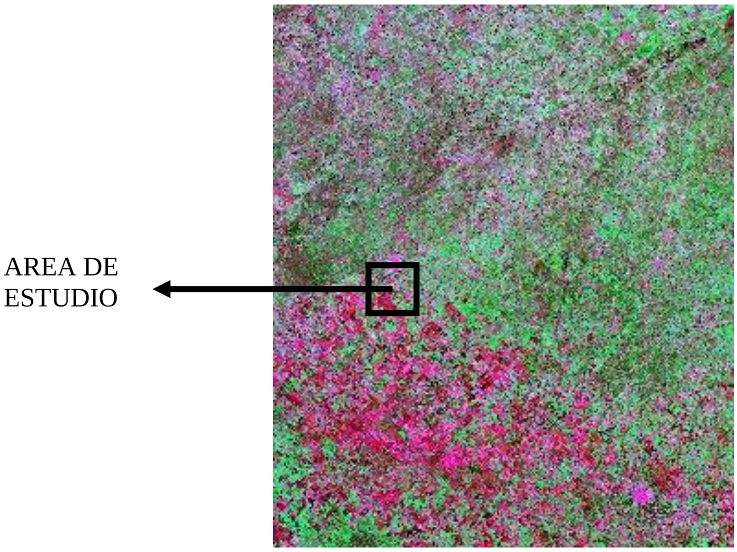


Fig. 1

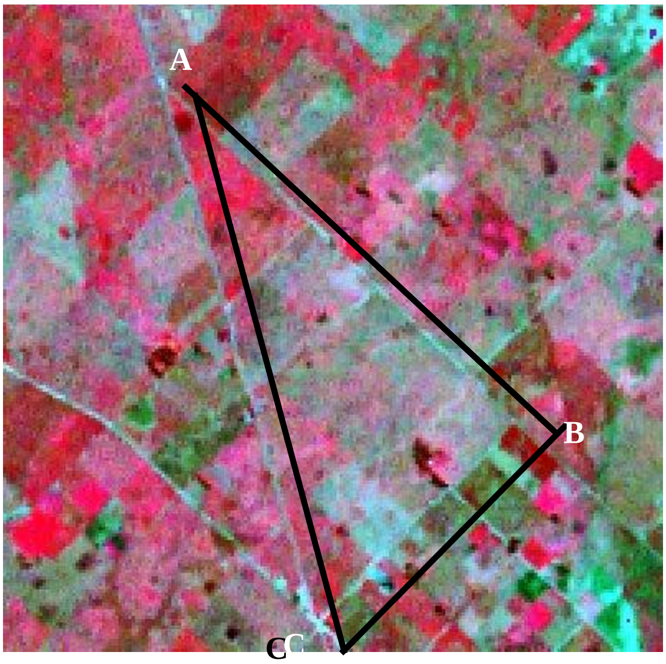


Fig. 2

METODOLOGÍA:

Fundamentalmente los datos que se utilizan son las coordenadas (*X,Y*), expresadas en metros, de los vértices del triángulo, que ofrece la imagen mediante un programa apto para realizar trabajos de Teledetección. El programa utilizado en esta oportunidad, para reconocer la zona de estudio y obtener la serie de coordenadas, se denomina ILWIS 2.2 aunque hay varios disponibles en el mercado. La característica predominante es que las coordenadas pueden observarse en pantalla pero un simple e inadvertido movimiento del ratón ya cambiará las mismas y se torna muy difícil lograr encontrar el punto elegido inicialmente por que, siempre trabajando sobre el mismo punto, se obtienen distintos valores para *X* y para *Y*.

RESULTADOS:

- Aplicación 1: TEORÍA DE ERRORES

Se obtienen distintas medidas de sus coordenadas (*X,Y*) de los puntos A, B y C (en este caso se registran a modo de muestra 5 medidas).

OBSERVACIONES PUNTO A	***X***	***Y***
Observación 1	5507160,51	5938790,83
Observación 2	5507568,17	5938937,36
Observación 3	5507613,41	5938952,99
Observación 4	5507643,52	5938938,28
Observación 5	5.507628,44	5938937,38

OBSERVACIONES PUNTO B	***X***	***Y***
Observación 1	5510377,80	5935730,04
Observación 2	5510363,01	5935821,56
Observación 3	5510378,14	5935791,95
Observación 4	5510362,71	5935730,04
Observación 5	5510392,88	5935730,66

OBSERVACIONES PUNTO C	***X***	***Y***
Observación 1	5508622,23	5933840,49
Observación 2	5508622,38	5933870,83
Observación 3	5508607,20	5933840,18
Observación 4	5508607,25	5938845,17
Observación 5	5508622,23	5933825,17

Al hacer el registro de las coordenadas no es posible determinar la causa en la variación. Afectan al resultado en ambos sentidos y se pueden disminuir para que las desviaciones, por encima y por debajo del valor que se supone debe ser el verdadero, se compensen. En este trabajo se necesita de varias observaciones de un mismo punto, por lo que hay que tener en cuenta la variación, en cada observación, respecto del valor promedio.

Por lo tanto en un ejercicio con estas particularidades el alumno podrá desarrollar los siguientes conceptos:

Cálculo de la media aritmética

Cálculo de los desvíos

Cálculo de la sumatoria de los residuos

- Aplicación 2: TRIGONOMETRÍA

A través de los valores medios de las coordenadas es posible desarrollar los siguientes conceptos pertinentes a la trigonometría:

Distancia entre puntos

Cálculo de la existencia o no del ángulo recto (Aplicación del Teorema del Coseno)

Aplicación del Teorema del Seno para cálculo de ángulos restantes.

Y, alternativamente, se podrá calcular perímetro y superficie de la parcela. Se podrá hacer uso de distintas unidades de longitud para el cálculo de las mismas.

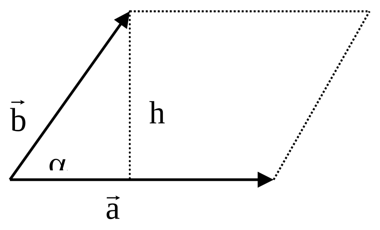
- Aplicación 3: PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES

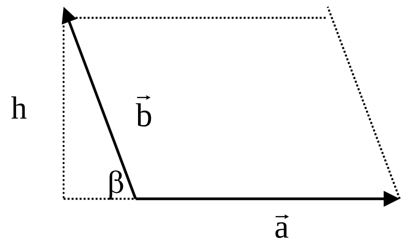
Para esta aplicación se simula que la parcela representa un triángulo rectángulo y se toman los lados del triángulo como vectores a través de sus coordenadas.

El alumno podrá calcular por medio del producto vectorial la superficie del área de estudio ya que la interpretación geométrica del mismo redunda en el área de un paralelogramo.

Esto es:

El producto vectorial tiene una sencilla e importante interpretación geométrica que resuelve bastantes problemas. La norma (o módulo) del vector producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores que lo definen.





Si el ángulo determinado por los dos vectores es agudo resulta:

$$S = \|a\|\, h = \|a\|\,\|b\|\, sen\,\alpha$$

Por otra parte:

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a,b)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \left(\|a\|^2\|b\|^2 \cos^2\alpha\right) = \|a\|^2\|b\|^2\left(1-\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \|a\|^2\|b\|^2 sen^2\alpha$$

$$S = \|a \times b\| = \|a\|\|b\|\, sen\,\alpha$$

Si el ángulo es obtuso, entonces $\beta = \pi - \alpha$ y tendremos:

$$h = \|b\|\, sen(\pi - \alpha) = \|b\|\, sen\alpha$$

como en el caso anterior.

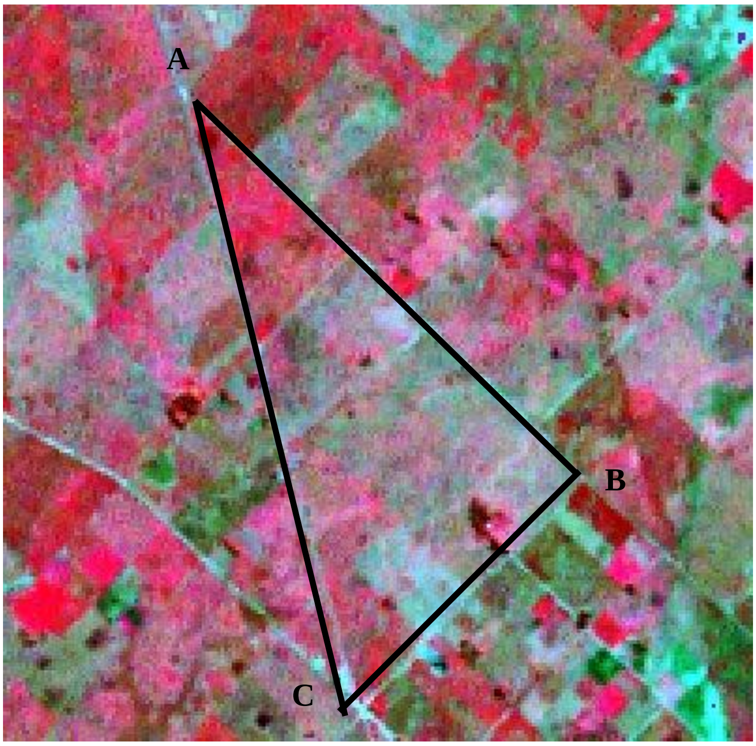
CONCLUSIONES

Si bien la primera de las aplicaciones no suele incluirse en las asignaturas matemáticas y casi siempre se halla relacionada a la estadística, no se deja de reconocer su importancia cuando existen trabajos de este tipo y por lo tanto se deja como una aplicación más.

Respecto a las dos restantes aplicaciones se las toma en este trabajo como independientes una de otra, como alternativa a la solución de un problema ya que a la vista y en los casos en que los alumnos o profesionales no están acostumbrados a la visión de imágenes satelitales, el área de estudio puede verse como un triángulo rectángulo y es por ello que en la tercera de las aplicaciones se lo considera como tal. Podría suceder que la trigonometría resulte más familiar a la hora de recordar conceptos entonces, esta aplicación se desarrolló en forma más exhaustiva. De todas maneras al observar los resultados obtenidos no existen grandes diferencias entre ambos resultados.

Resaltaremos, para este tipo de trabajo, cierta preferencia por las teorías constructivistas porque se fomenta el aprender matemática mediante la construcción de conocimientos en base a las experiencias del alumno, por medio de la realización de actividades que son de utilidad en el mundo real. Y respecto al papel del docente, el mismo debe ser de moderador, coordinador, facilitador, mediador y al mismo tiempo participativo, es decir debe contextualizar las distintas actividades del proceso de aprendizaje

Anexo



APLICACIÓN 1: **TEORIA DE ERRORES**

PUNTO A

X	Y
5507160,51	5938790,83
5507568,17	5938937,36
5507613,41	5938952,99
5507643,52	5938938,28
5507628,44	5938937,38

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **A**

$$\overline{X_A} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5507160{,}51 + \cdots + 5507628{,}44}{5}\right)$$

$$\overline{X_A} = 5507522{,}81$$

$$\overline{Y_A} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5938790{,}83 + \cdots + 5938937{,}38}{5}\right)$$

$$\overline{Y_A} = 5938911{,}37$$

Por lo tanto coordenadas del punto **A**

A (5507522,81; 5938911,37)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **A**

ε_{1x}	362,3
ε_{2x}	-45,36
ε_{3x}	-90,71
ε_{4x}	-120,71
ε_{5x}	-105,63
$\Sigma\varepsilon_{xA}$	**-0,11**

ε_{1y}	120,54
ε_{2y}	-25,99
ε_{3y}	-41,62
ε_{4y}	-28,91
ε_{5y}	-26,01
$\Sigma\varepsilon_{yA}$	**0,01**

PUNTO B

X	Y
5510377,80	5935730,04
5510363,01	5935821,56
5510378,14	5935791,95
5510362,71	5935730,04
5510392,88	5935730,66

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **B**

$$\overline{X_B} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5510377{,}80 + \cdots + 5510392{,}88}{5}\right)$$

$$\overline{X_B} = 5510374{,}91$$

$$\overline{Y_B} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5935730{,}04 + \cdots + 5935730{,}66}{5}\right)$$

$$\overline{Y_B} = 5935760{,}84$$

Por lo tanto coordenadas del punto **B**

B(5510374,91; 595760,84)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **B**

ε_{1x}	-2,89
ε_{2x}	11,9
ε_{3x}	-3,23
ε_{4x}	12,20
ε_{5x}	-17,97
$\Sigma\varepsilon_{xB}$	**0,01**

ε_{1y}	30,80
ε_{2y}	-60,72
ε_{3y}	-31,11
ε_{4y}	30,80
ε_{5y}	30,18
$\Sigma\varepsilon_{yB}$	**-0,05**

PUNTO C

X	Y
5508622,23	5933840,49
5508622,38	5933870,83
5508607,20	5933840,18
5508607,25	5938845,17
5508622,23	5933825,17

a) Cálculo del valor promedio de las coordenadas del punto **C**

$$\overline{X_C} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \left(\frac{5508622{,}23 + \cdots + 5508622{,}23}{5}\right)$$

$$\overline{X_C} = 5508616{,}26$$

$$\overline{Y_C} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \left(\frac{5933840{,}49 + \cdots + 5933825{,}17}{5}\right)$$

$$\overline{Y_C} = 5933844{,}37$$

Por lo tanto coordenadas del punto **C**

C(5508616,26 ; 5933844,37)

b) Cálculo de la sumatoria de los desvíos del punto **C**

ε_{1x}	-5,97
ε_{2x}	-6,12
ε_{3x}	9,06
ε_{4x}	9,01
ε_{5x}	-5,97
$\Sigma\varepsilon_{xC}$	**0,01**

ε_{1y}	3,88
ε_{2y}	-26,46
ε_{3y}	4,19
ε_{4y}	-0,80
ε_{5y}	19,2
$\Sigma\varepsilon_{yC}$	**0,01**

APLICACIÓN 2: **TRIGONOMETRÍA**

a) Distancia entre puntos

$$\overline{AB} = \sqrt{(5507522.81 - 5510374.91)^2 + (5938911.37 - 5935760.84)^2} = 4249.72m$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5507522.81 - 5508616.26)^2 + (5938911.37 - 5933844.37)^2} = 5183.63m$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5510374.91 - 5508616.26)^2 + (5935760.84 - 5933844.37)^2} = 2601.15m$$

b) Aplicación del Teorema del Coseno para verificar si existe el ángulo recto en **B**

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{BC}\,cos\beta$$

$$\therefore cos\beta = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{-2\,\overline{AB}\,\overline{BC}} = -0.0924502$$

$$\boxed{\beta = 95^\circ\ 18´\ 16´´}$$

c) Aplicación del Teorema del Seno para calcular el ángulo en **C**

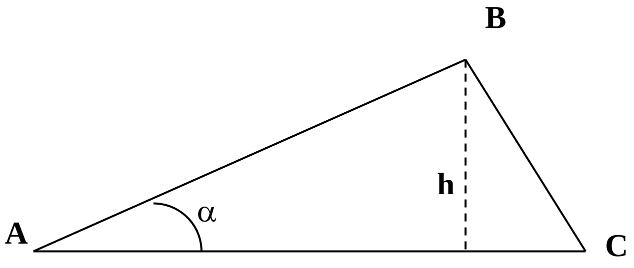
$$\frac{\overline{AC}}{sen\beta} = \frac{\overline{AB}}{sen\gamma}$$

$$sen\gamma = \frac{\overline{AB}\ sen\beta}{\overline{AC}}$$

$$\boxed{\gamma = 54^\circ\ 43´\ 6´´}$$

$$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha = 29^\circ\ 58´\ 38´´}$$

d) Cálculo de la superficie de la parcela



$$sen\alpha = \frac{h}{\overline{AB}} \Rightarrow h = \overline{AB}\, sen\alpha$$

$$h = 2123.40\,m$$

$$Sup A\hat{B}C = \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{5183.63m \times 2123.40m}{2} =$$

$$Sup A\hat{B}C = 5503460\,m^2$$

$$Sup A\hat{B}C = 550.346 Ha$$

APLICACIÓN 3: **PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES**

Cálculo de la superficie utilizando el producto vectorial.

Las coordenadas del vector $\vec{a}$ y $\vec{c}$ se obtienen a partir de la diferencia de las coordenadas promedio de los puntos A, B y C. En base a la interpretación geométrica del producto vectorial se consideran los lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ como vectores que van a formar parte de los lados del paralelogramo y el módulo del vector producto vectorial es igual al área del paralelogramo determinado por los vectores que lo definen.
Las coordenadas de los vectores vienen dadas en metros.

A partir de la fórmula del área del paralelogramo, si se la parte en dos se puede calcular el área de un triángulo y eso es lo que se aplica a continuación.

$$S = \left| \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{2} \right|$$

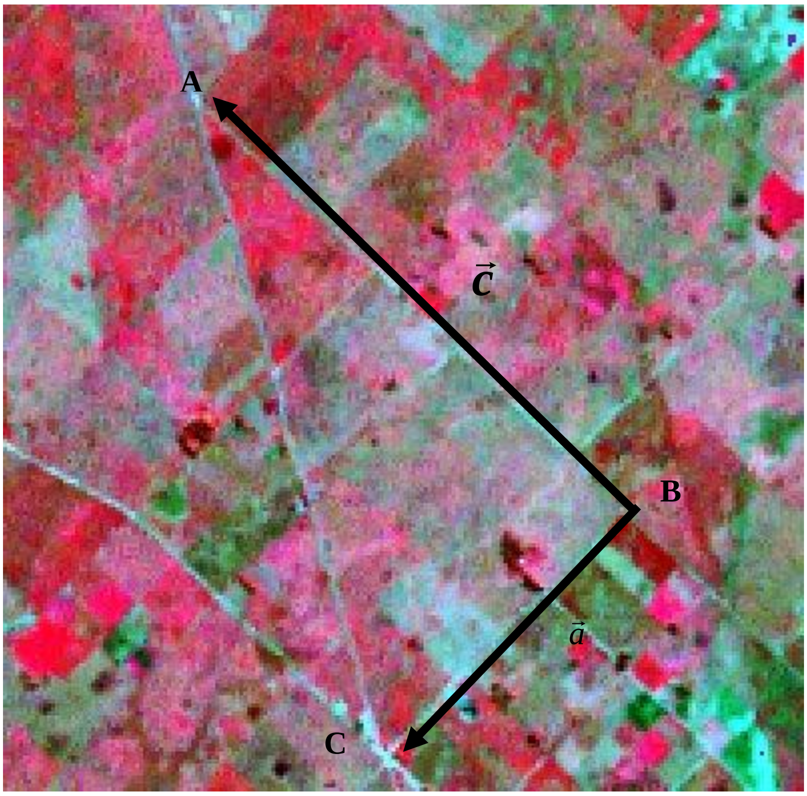
$$\vec{c} = \overrightarrow{BA} = (2852.10; -3150.53)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = (-1758.65; -1956.47)$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \left(2852.10\,\breve{i} - 3150.53\,\breve{j}\right) \times \left(-1758.65\,\breve{i} - 1956.47\,\breve{j}\right) =$$

$$= 5540679\,\breve{j} \times \breve{i} - 5465821.5\,\breve{i} \times \breve{j} = 11006501\,\breve{k}$$

$$\therefore \quad S = \left| \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{2} \right| = 5503250.5\, m^2$$



BIBLIOGRAFÍA

1. de Guzmán M. (1983). *Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática*. Investigación y Ciencia, Febrero, 100-108.

2. Domínguez García- Tejero F. (1984). *Topografía General y Aplicada*. Dossat. Madrid

3. Jonassen, D. (2000) *El Diseño de entornos constructivistas de aprendizaje* En: Reigeluth, Ch. (Eds) Diseño de la instrucción Teorías y modelos. Un paradigma de la teoría de la instrucción. Parte I. 225-249 Madrid: Aula XXI Santillana

Alejandra Cañibano. Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Docente del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. mac@faa.unicen.edu.ar

Patricia Sastre Vázquez. Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,
UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del
Proyecto: “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”. Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas
Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en
España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. psastre@faa.unicen.edu.ar; pasava2001@yahoo.com.

Rodolfo Eliseo D´Andrea, argentino. Magíster en Educación Matemática y Doctorando por la Universidad Nacional del Comahue. Profesor Adjunto en el Área de Matemática en Pontificia Universidad Católica Argentina (PUCA), Campus Rosario. Integrante de un Proyecto de Investigación sobre Lenguaje Matemático y Procesos de validación en estudiantes de Ingeniería (Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Sede Azul). Ha participado, como ponente, en numerosos congresos sobre Educación Matemática.
Email: rodolfoedandrea@yahoo.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Página 223-231

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES, EN CONTEXTO COTIDIANO Y CON PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

En un mercado se vende arroz y azúcar "al menudeo" a 3 soles y 2,40 soles el kilo, respectivamente. También, como oferta especial, se vende paquetes por 10 soles, que tienen 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar.

Sea f la función que expresa el pago de f (x; y) soles por la compra de x kg de arroz, y kg de azúcar, usando la oferta siempre que sea posible y asumiendo que las variables x, y pueden tomar todos los números reales no negativos.

a) *Exprese algebraicamente f considerando los posibles pagos de un comprador que a lo más comprará 8 kg de arroz y 5 kg de azúcar*

b) *¿f es continua en (3; 2)? ¿Por qué?*

Este problema es una versión simplificada de un problema creado al estar impartiendo un curso de funciones reales de varias variables reales en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP y plantearme la pregunta sobre la existencia de funciones discontinuas, de dos variables, en contextos cotidianos. Como me hice pregunta similar al impartir el curso de funciones reales de una variable real y así surgió el problema tratado en el número anterior de *UNIÓN*, pensé que lo natural sería hacer una variación adecuada a tal problema.

Recordará el lector que teníamos la situación dada por una oferta de venta de arroz según la cual, siendo 3 soles el precio del kilo de arroz en la venta "al menudeo", se vendían paquetes de 6 kg de arroz por 15 soles. Se pedía entonces, usar la situación para ilustrar casos de continuidad y de discontinuidad de una función en el intervalo [0; 17]. Una primera reacción mayoritaria ante este requerimiento, evidenciada por alumnos de pregrado y de posgrado, fue encontrar explícitamente la función que exprese algebraicamente el pago correspondiente a la compra de x kilos de arroz, usando la oferta siempre que sea posible. Con tal expresión algebraica se evidencia, tanto analítica como gráficamente, la discontinuidad de la función en los puntos $x = 6$ y $x = 12$ del intervalo [0; 17].

Al hacerme la pregunta *¿Cómo plantear una situación similar, considerando dos variables?* me vino la idea de considerar ahora dos productos, con sus precios respectivos por kilo para compras “al menudeo” y una oferta especial de un paquete que contenga algunos kilos de ambos productos. Así surgen la situación y los problemas propuestos en el presente artículo.

Para facilitar la comprensión del problema y el involucramiento de los estudiantes en su solución, propuse algunas cuestiones previas a los ítems (a) y (b).

i) *¿Para qué valores de x , y el comprador NO puede usar la oferta?*
ii) *¿Para qué valores de x , y el comprador puede usar la oferta solamente una vez?*
iii) *¿Para qué valores de x , y el comprador puede usar la oferta a lo más dos veces?*

Estos son también ejemplos de “*problemas pre*”, creados a partir de la situación descrita.

Ciertamente, es muy interesante examinar las soluciones de los estudiantes a la luz de un marco teórico, como el enfoque ontosemiótico (EOS), pero ese no es el objetivo de este artículo, sino mostrar algunas soluciones y el potencial que tienen estos problemas, para estudiar aspectos didácticos relacionados con regiones en el plano; con la definición de una función de dos variables que tiene expresiones distintas en regiones disjuntas de su dominio; y con aspectos que tienen que ver con las estructuras algebraica y topológica del plano. Todo a partir de un contexto extramatemático cotidiano.

- Sobre el ítem *i)*.

A continuación muestro la respuesta del alumno A10

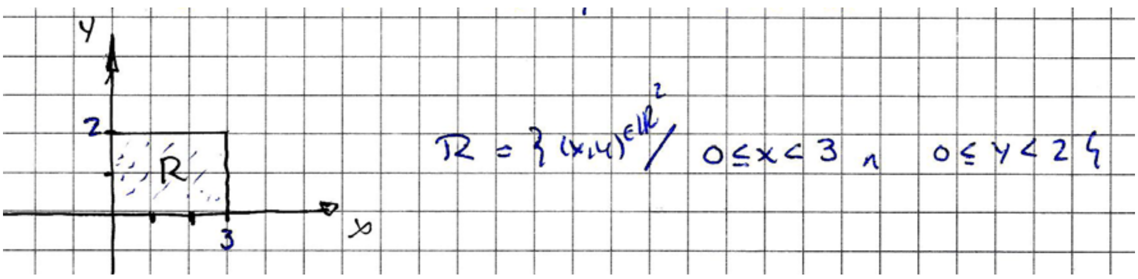


Figura 1

Se puede observar que el estudiante tiene idea del conjunto que se pide, sin embargo, las siguientes son algunas observaciones a su respuesta:

- El conjunto mostrado en el registro gráfico no corresponde al conjunto mostrado en el registro simbólico, pues en el primero se incluyen los segmentos vertical y horizontal que parten de (3; 0) y (0; 2) respectivamente y en el segundo no. Así, el conjunto mostrado en el registro gráfico representa un conjunto cerrado en el plano (contiene a su frontera), mientras que en el registro simbólico el conjunto no es cerrado.

- Una consecuencia de lo anterior es que en el registro gráfico se incluye el punto (3; 2) y en el registro simbólico no. Esto es particularmente importante, pues incluir este punto significa tener valores de x y de y para los cuales sí se puede usar la oferta. Precisamente, al comprar 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar, se compraría el paquete por 10 soles y no se pagaría 13,80 soles que resultaría de pagar 3 soles por cada kilo de arroz y 2,40 soles por cada kilo de azúcar.
- El estudiante no considera – en ninguno de los registros – los infinitos pares ordenados con valores de x y de y que están fuera de su rectángulo, para los cuales tampoco se puede hacer uso de la oferta; por ejemplo, el par (5; 1), pues al comprar 5 kilos de arroz y 1 kilo de azúcar no se puede hacer uso de la oferta; tampoco al comprar 2 kilos de arroz y 7 kilos de azúcar; y tampoco al comprar 2,9 kilos de arroz y 4 kilos de azúcar, pues en ninguno de los casos se puede incluir en la compra un paquete de 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar. Todos estos casos constituyen pares ordenados, que gráficamente son “fajas de longitud infinita”, una horizontal y otra vertical, como se muestra, a continuación (Figura 2) en la solución del alumno A3

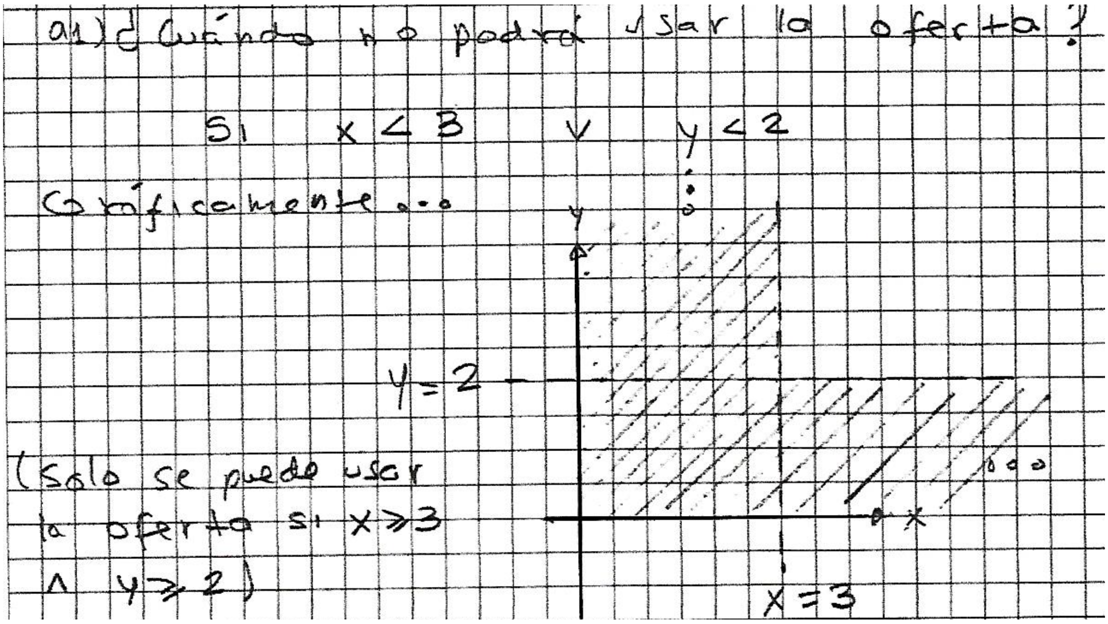


Figura 2

Evidentemente A3 está dando por obvio que las variables son no negativas, aunque lo correcto es explicitar esta restricción.

Lo original de esta solución es que llega a una representación correcta haciendo uso de una ley importante de la lógica simbólica (ver en la Figura 2 el segundo renglón y el paréntesis en la esquina inferior izquierda). El alumno usa la negación de una conjunción:

$$\begin{aligned} \sim(x \geq 3 \ \wedge y \geq 2) &\equiv \sim (x \geq 3) \ \vee \sim (y \geq 2) \\ &\equiv x < 3 \ \ \vee \ \ y < 2 \end{aligned}$$

Luego hace la representación gráfica en el primer cuadrante, asumiendo – como ya lo hicimos notar – la innegatividad de las variables.

Aludiendo a la forma de L del conjunto y a que para compras expresadas con pares ordenados $(x; y)$ en tal conjunto hay 0 posibilidades de hacer uso de la oferta, en este artículo llamaremos L_0 a tal conjunto. Aunque A3 no lo explicita simbólicamente, lo que muestra (Figura 2) es el conjunto:

$$L_0 = ([0;3[\ \times \mathbb{R})\ \cup (\mathbb{R} \times [0;2[)$$

que es una manera simbólica y resumida de expresar el conjunto de pares ordenados $(x; y)$ de compras de x kg de arroz y de y kg de azúcar, en cada uno de los cuales no es posible usar la oferta, respondiendo así a la pregunta formulada en *i)*.

Podemos observar que si al conjunto dado por A10 en su registro gráfico le quitamos el punto (3; 2), tal conjunto está incluido en el conjunto dado por A3.

- En cuanto al ítem *ii)*

Observemos que, por ejemplo, si se compra 4 kg de arroz y 2,8 kg de azúcar, es posible usar una sola vez la oferta, pues se comprará el paquete de 3 kg de arroz con 2 kg de azúcar pagando 10 soles por él y el resto pagando los precios de venta “al menudeo”. Es decir, como

$$(4; 2,8) = (3; 2) + (1; 0,8),$$

es posible usar la oferta una sola vez. Situación similar ocurre, por ejemplo, con (7; 3) y con (5; 4,5), pero no con (7; 5), pues

$$(7; 5) = (3; 2) + (3; 2) + (1; 1)$$

y vemos que es posible usar la oferta dos veces.

Muestro en la Figura 3 la solución del alumno A3:

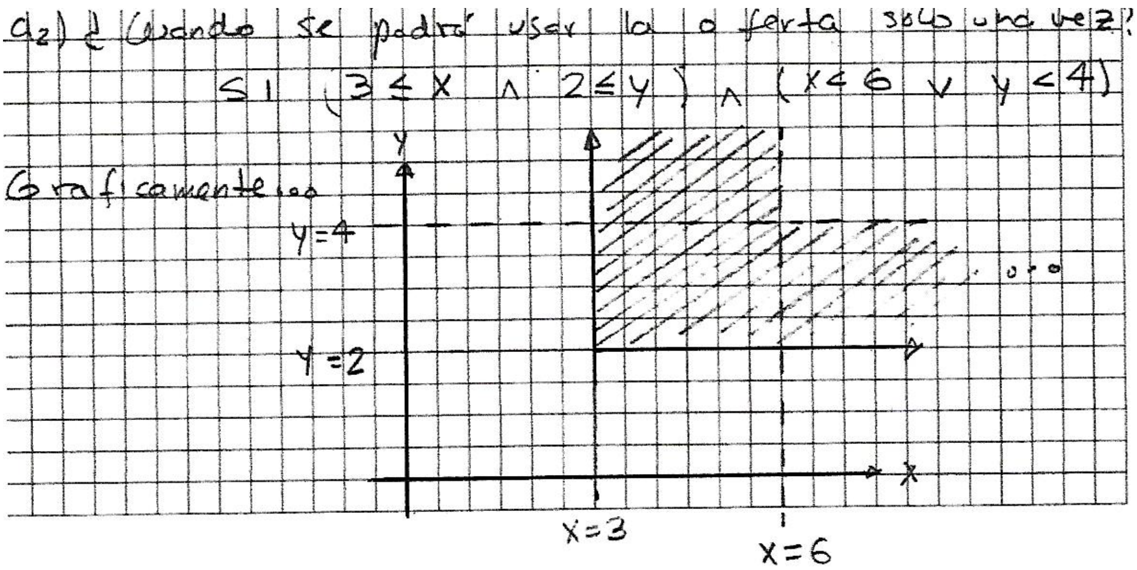


Figura 3

De manera similar a lo convenido al comentar la solución del ítem *i)*, a este conjunto llamamos L_1 y tenemos:

$$L_1 = ([3;6[\ \times[2;\ +\infty[) \cup ([3;\ +\infty[\times[2;4[)$$

- En relación al ítem *iii)*.

Muestro en la Figura 4 la solución del alumno A3:

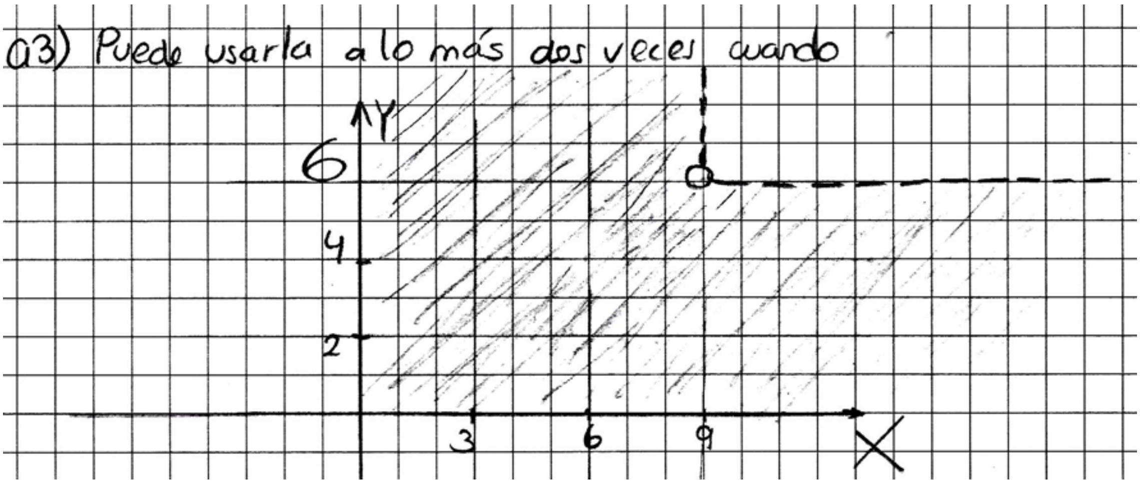


Figura 4

El conjunto mostrado corresponde a lo pedido y para relacionarlo con los conjuntos anteriores, notamos que si el requerimiento hubiera sido similar al requerimiento de *ii)*; es decir, determinar el conjunto de pares ordenados $(x;\ y)$ para los cuales la oferta se puede usar "*solamente*" [1] dos veces, tal conjunto, sería el denotado por L_2, similar a los casos anteriores; o sea:

$$L_2 = ([6;9[\ \times[4;\ +\infty[) \cup ([6;\ +\infty[\times[4;6[)$$

Pero el requerimiento en este caso es determinar el conjunto de pares ordenados $(x;\ y)$ para los cuales la oferta se puede usar *a lo más* dos veces, lo cual incluye la posibilidad que no se pueda usar, que se use una sola vez o que se use dos veces; en consecuencia, tal conjunto lo podemos denotar por $L_{0,1,2}$ y advertimos que

$$L_{0,1,2} = L_0 \cup L_1 \cup L_2$$

Además, la intersección de cualquier par de los conjuntos L_i descritos es vacía; es decir,

$$L_0 \cap L_1 = L_1 \cap L_2 = L_0 \cap L_2 = \emptyset$$

- Veamos ahora el ítem (a) del problema propuesto.

Debemos encontrar la función f de dos variables, tal que $f\,(x;\ y)$ exprese la cantidad que pagaría un comprador de x kilos de arroz y de y kilos de azúcar, a los precios dados y usando la oferta de los paquetes, siempre que sea posible.

---

[1] Las comillas a la palabra solamente, son porque debe tomarse en el sentido de poder usar la oferta dos veces, pero no tres o más; sin embargo, el solamente no puede excluir que la oferta se use una vez, pues - obviamente - si se usa dos veces, se está usando también una vez. La idea es no usar la oferta solamente una vez, para no incluir los casos ya considerados en L_1.

Tengamos en cuenta que según la información dada en el problema, el comprador a lo más puede comprar 8 kilos de arroz y 5 kilos de azúcar; es decir,

$$0 \leq x \leq 8 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 5.$$

Esto es equivalente a decir que $x \in [0; 8]$; $y \in [0; 5]$.

Así tenemos *el conjunto factible* del comprador, al que podemos denotar *A* y expresarlo como un producto cartesiano de los intervalos en los que toman valores las variables x, y.

$$A = [0; 8] \times [0; 5]$$

Este conjunto, en el registro gráfico, es el rectángulo que se muestra en la Figura 5.

Figura 5

Es ilustrativo hacer cálculos con algunas cantidades específicas:

$x = 4$; $y = 1$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f\,(4; 1) = 3x4 + 2{,}40x1 = 14{,}40$

$x = 2$; $y = 5$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f\,(2; 5) = 3x2 + 2{,}40x5 = 18{,}00$

$x = 1{,}5$; $y = 1$ ⇒ no se puede usar la oferta ⇒ $f\,(1{,}5; 1) = 3x1{,}5 + 2{,}40x1$
$= 6{,}90$

Podemos concluir que situación similar tendremos siempre que los x kilos de arroz y los y kilos de azúcar que se compren, no sean las suficientes como para hacer uso de la oferta del paquete por 10 soles; es decir, si el par (x ; y) se encuentra en la región L_0, que, como vimos, es la región en la que no se puede hacer uso de la oferta. En consecuencia:

$$f\,(x; y) = 3x + 2{,}40y, \text{ para } (x; y) \in A \cap L_0 \qquad (\alpha)$$

En la Figura 6 mostramos, en color verde, $A \cap L_0$:

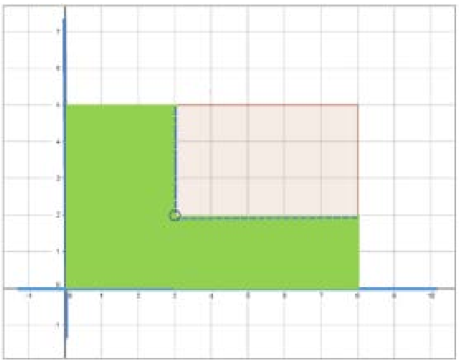


Figura 6

Veamos otros casos:

$x = 3;\ y = 2$

Estas son las cantidades que están en el paquete de oferta y obviamente, en este caso, $f\,(3; 2) = 10$.

$x = 5;\ y = 3$

Vemos que (5; 3) = (3; 2) + (2; 1); así, en este caso se puede usar la oferta una vez; en consecuencia, $f\,(5; 3) = 10 + 3x2 + 2{,}40x1 = 18{,}40$.

Es decir, se paga 10 soles por 3 kg de arroz y 2 kg de azúcar, y por lo que excede a lo que está en el paquete se paga a los precios de venta "al menudeo". O sea (5 – 3) kilos de arroz a 3 soles el kilo y (3 – 2) kilo de azúcar a 2,40 soles el kilo.

Situación similar tendremos siempre que los x kilos de arroz y los y kilos de azúcar que se compren, permitan usar solo una vez la oferta del paquete por 10 soles; es decir, si el par $(x; y)$ se encuentra en la región L_1, que, como vimos, es la región en la que se puede hacer uso de la oferta una sola vez. En consecuencia:

$$f\,(x; y) = 10 + 3(x\text{-}3) + 2{,}40(y\text{-}2),\ \text{para } (x; y) \in A \cap L_1 \qquad (\beta)$$

En la Figura 7 mostramos, en color naranja, $A \cap L_1$:

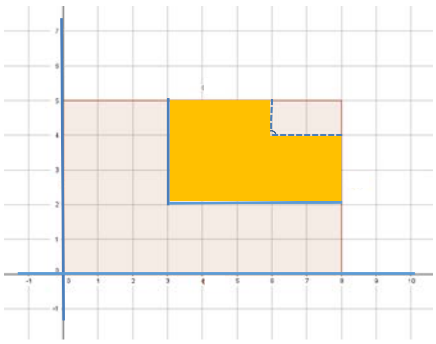


Figura 7

Como el lector podrá imaginarse, nos falta solo considerar los casos en $A \cap L_2$; es decir, aquellas cantidades de arroz y azúcar, que estando en el conjunto factible del comprador (en el conjunto A), sean tales que permitan usar solo dos veces la oferta de paquetes por 10 soles (en el conjunto L_2).

En la Figura 8 mostramos, en color marrón, $A \cap L_2$:

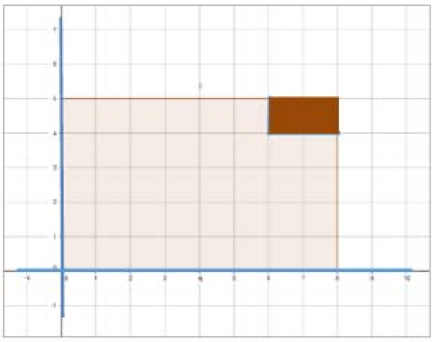


Figura 8

Se puede observar que, por ejemplo, si

$x = 7$; $y = 5$,

escribimos (7; 5) = (6; 4) + (1; 1)

= 2(3; 2) + (1; 1)

y así, en este caso, se puede usar la oferta dos veces; en consecuencia,

$$f(7; 5) = 20 + 3\text{x}1 + 2{,}40\text{x}1 = 25{,}40.$$

Por razonamiento similar al hecho para compras $(x; y)$ del conjunto $A \cap L_1$, ahora tenemos:

$$f(x; y) = 20 + 3(x\text{-}6) + 2{,}40(y\text{-}4)\text{ , para }(x; y) \in A \cap L_2 \qquad (\gamma)$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$L_0 \cap L_1 = L_1 \cap L_2 = L_0 \cap L_3 = \emptyset$ y que $A = (A \cap L_0) \cup (A \cap L_1) \cup (A \cap L_2)$,

ya podemos usar (α), (β) y (γ) para completar lo pedido en el ítem (a) expresando resumidamente la función f para todas las posibilidades de compra en el conjunto factible del comprador; es decir, para todo $(x; y) \in A$:

$$f(x; y) = \begin{cases} 3x + 2{,}40y\text{ ,} & \text{para } (x;\ y) \in A \cap L_0 \\ 10 + 3(x-3) + 2{,}40(y-2)\text{ ,} & \text{para } (x;\ y) \in A \cap L_1 \\ 20 + 3(x-6) + 2{,}40(y-4)\text{ ,} & \text{para } (x;\ y) \in A \cap L_2 \end{cases}$$

- El ítem (b) del problema propuesto.

Para examinar la continuidad de la función f en el punto (3; 2) notemos que (3; 2) $\in L_1$; que $f(3; 2) = 10$ y que para puntos $(x; y)$ cercanos a (3; 2) en el conjunto L_0 los valores que toma f son cercanos a 13,8. Así, podemos concluir que f no es continua en (3; 2).

La conclusión anterior puede obtenerse de manera más formal teniendo en cuenta que (3; 2) es punto de acumulación tanto de L_0 como de L_1 y que

$$\lim_{(x;y)\to(3;2)} f(x; y) \text{ no existe}$$

pues para puntos $(x; y)$ vecinos a (3; 2) en el conjunto L_0 los valores que toma f son cercanos a 13,8 , mientras que para puntos $(x; y)$ vecinos a (3; 2) en el conjunto L_1 los valores que toma f son cercanos a 10.

Comentario

Una vez más, destaco la importancia de crear problemas y la vinculación de estos procesos con la modelización matemática. Es muy importante para la docencia y la investigación estar atentos a la riqueza matemática que hay en la realidad y muchas veces en situaciones muy sencillas y cotidianas como la compra-venta de productos y las ofertas que suelen hacerse en los mercados. Al construir la situación para ilustrar en un contexto real la discontinuidad en un punto de una función de dos variables, no imaginé toda la riqueza que se encontraría al resolver minuciosamente el problema. Ciertamente, se puede explotar didácticamente aún más esta situación-problema y el lector queda invitado a hacerlo.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

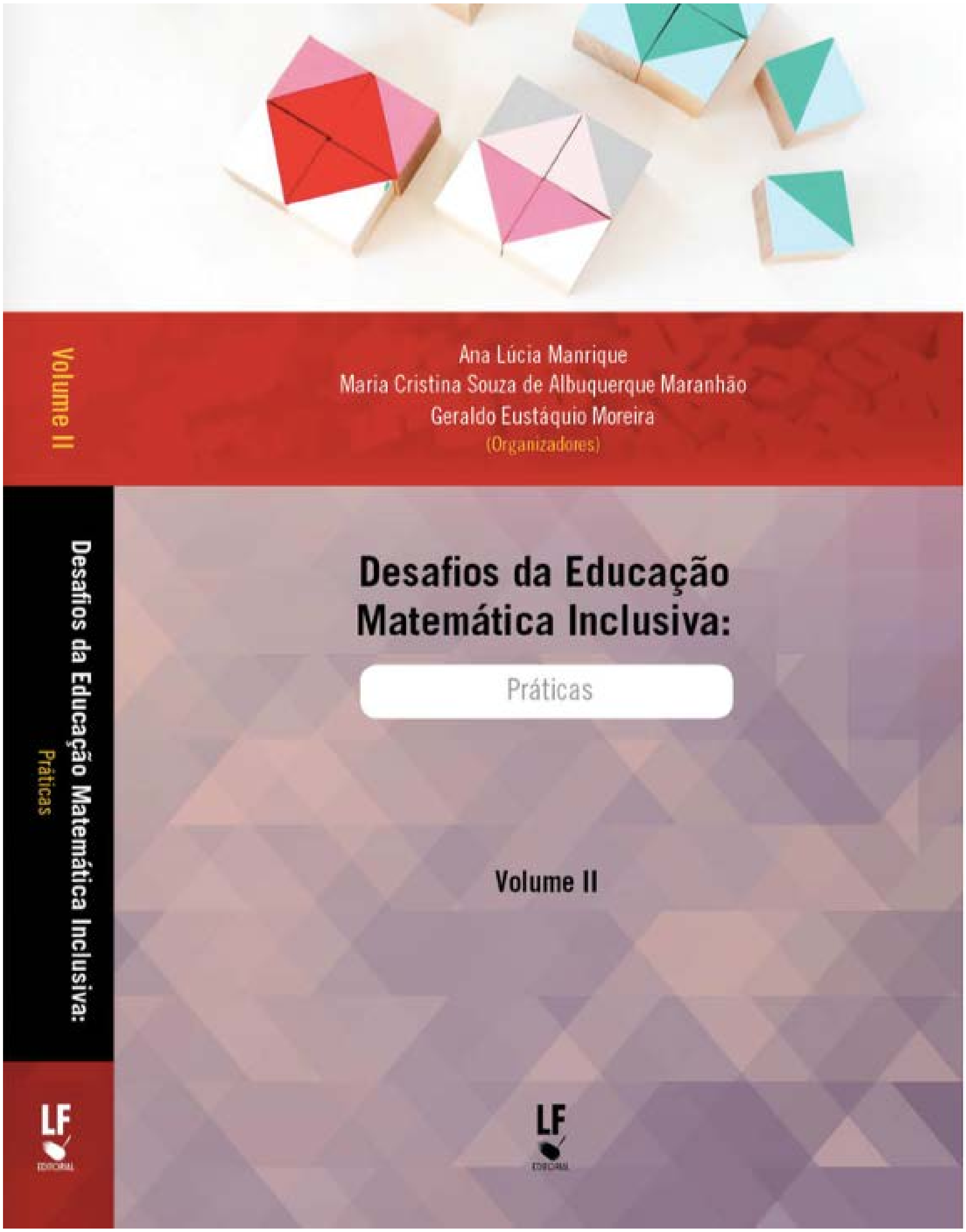
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 48. Diciembre 2016
Página 232-237

Reseña de los libros: *Desafios da Educação Inclusiva: formação de professores e práticas*

Armando Traldi Júnior

MANRIQUE, Ana Lúcia; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque, MOREIRA, Geraldo Eustáquio (organizadores). Desafios da educação matemática inclusiva: formação de professores, volume I. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2016. 193 pp.



MANRIQUE, Ana Lúcia; MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque, MOREIRA, Geraldo Eustáquio (organizadores). Desafios da educação matemática inclusiva: práticas, volume II. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2016. 187 pp.

Desafios da Educação Inclusiva: formação de professores e práticas

Armando Traldi Júnior[1]

É notório que a partir da segunda metade do século XX, uma das pautas em destaque no cenário mundial é o enfrentamento da exclusão social, que priva determinados indivíduos ou grupos sociais de diferentes âmbitos da estrutura da sociedade. Assim, os grupos, que são excluídos socialmente, ficam impedidos de exercerem livremente seus direitos de cidadãos, seja por questões étnicas-raciais, de gênero, cultura, e condições físicas e mentais.

Um dos espaços que mereceu uma atenção especial desse enfrentamento foi o espaço escolar, que até então, muitas vezes reforça a exclusão, por ser pautado em um modelo homogêneo de processos de ensino e aprendizagem, não considerando as diferenças individuais dos estudantes.

Um marco relevante na busca da inclusão social e educacional foi a *Conferência Mundial de Educação para Todos, Jomtien/1990*, na qual foi apresentado os altos índices de crianças, adolescentes e jovens sem escolarização, e anunciado, nesta conferência a importância de se promover as transformações nos sistemas de ensino para assegurar o acesso e a permanência de todos na escola.

Na expectativa de alcançar as metas propostas de assegurar o acesso e a permanência na escola, foi realizada, em 1994, a *Conferência Mundial de Necessidades Educativas Especiais: Acesso e Qualidade, realizada pela UNESCO em 1994*, que propõe ampliar as discussões, problematizando os aspectos acerca da escola não acessível a todos os estudantes, que resulta na publicação do documento Declaração de Salamanca e Linhas de Ação sobre Necessidades Educativas Especiais.

Neste documento é afirmado que as escolas comuns representam o meio mais eficaz para combater as atitudes discriminatórias e que o principio fundamental dessa Linha de Ação é de que todas as crianças são potenciais estudantes, independente de suas condições sociais, culturais, físicas e

---

[1] Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do departamento de Matemática do Instituto Federal de São Paulo. Linha de pesquisa: formação do professor de matemática e a Educação Inclusiva: estudantes surdos.
Email: traldijr@gmail.com

intelectuais e sendo assim devem ser acolhidas pelos agentes das escolas.

Frente a essa proposta inclusiva, passa a ser necessária a busca de conhecimentos que possibilitem efetivar essas mudanças na prática escolar. Pesquisadores, no mundo, passam a constituir grupos de pesquisas com o objetivo de compreender as possibilidades de uma educação inclusiva.

É neste movimento que o grupo de pesquisa "Professor de Matemática: formação, profissão, saberes e trabalho docente", constituído no *Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*, desenvolveu o projeto de pesquisa "Desafios para a Educação Inclusiva: pensando na formação de professores sobre os processos de domínio da Matemática nos anos iniciais da Educação Básica", coordenado pela professora Dra. Ana Lúcia Manrique, e aprovado no Programa Observatório da Educação (Obeduc) da Capes, no período de 2010 a 2015.

Como resultado das reflexões a partir de pesquisas realizadas pelos integrantes do grupo, foi organizado pelos pesquisadores Ana Lúcia Manrique, Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão e Geraldo Eustáquio Moreira, da área da Educação Matemática, a presente obra intitulada "Desafios da Educação Matemática Inclusiva", composta em dois volumes, com artigos escritos pelos integrantes do grupo.

No volume I "Desafios da Educação Matemática Inclusiva: formação de professores", organizado em doze capítulos, são apresentados diferentes estudos, oriundos principalmente de trabalhos de conclusão de mestrados e doutorados.

Entre os desafios relacionados a análise teórica da Educação Inclusiva, com o foco na disciplina de Matemática, é a necessidade da aproximação de teorias gerais da Educação, com enfoque na formação do professor, para analisar a formação do professor que ensina Matemática, que atua com estudantes pertencentes ao grupo da Educação Inclusiva.

Na obra, este desafio foi enfrentado fazendo articulações teóricas com diferentes estudos propostos por pesquisadores do cenário nacional e internacional da área da Educação, com enfoque na formação de professores, como Candau, Imbernón, Shulman, Roldão, Zeichener, Cochran-Smith e Lytle, e Mizukami, com as análises realizadas a partir das investigações focando aspectos da teoria e prática da formação do professor que ensina

Matemática, na Educação Inclusiva.

Foi possível confirmar hipóteses elaboradas a partir de teorias da formação de professores, problematizadas com o enfoque da disciplina de Matemática na Educação Inclusiva, tais como “...nossas investigações foram práticas que produziram conhecimentos ressignificados de outras práticas. Dessa forma, defendemos, amparadas em Cochran-Smith e Lytle (2002), que investigações realizadas por professores da Educação Básica é uma forma de mudança social...” (p. 35).

Assim como ampliar reflexões teóricas relacionadas a formação de professores, focando a Educação Inclusiva, “...o professor deve adequar-se às necessidades da criança, cabendo à escola preparar sua estrutura e propiciar formação aos professores para que possam integrar todos os alunos com sucesso. O correto é mudar o sistema, não a criança...” (p. 51).

Em relação a metodologia para o desenvolvimento das pesquisas, a grande contribuição desta obra está relacionada com a elaboração e validação da “Escala Multidimensional de Inclusão de Alunos com NEE em aula de Matemática”, que foi um instrumento elaborado por um grupo de pesquisadores brasileiros, portugueses e holandeses. Além de ser apresentado na obra, um capítulo com reflexões acerca da elaboração e utilização deste instrumento, é posto, em anexo do capítulo, o instrumento utilizado para coleta dos dados.

Outro aspecto relevante que é discutido neste volume é a experiência da formação de professores, que também dialoga com diferentes autores que defendem, principalmente, o modelo de formação em grupos colaborativos e/ou comunidades de práticas. É feita uma análise descritivo-analítica de diferentes experiências, envolvendo professores da Educação Básica e Infantil, de instituições públicas e privadas, que oferecem ensino especifico para Educação Especial e ensino regular.

Ainda vale destacar que diferentes tipos de deficiências são tratados ao longo da obra e, neste volume, em particular, apresenta um estudo que foi desenvolvido com estudantes com o Transtorno do Espectro Autista, na perspectiva da teoria da atividade, que traz significativas contribuições para reflexões iniciais, visto que é uma das deficiências raramente abordada em estudos da Educação Inclusiva com o foco no ensino de Matemática.

O volume II, que também compõe a obra, e é intitulado como

“Desafios da Matemática Inclusiva: prática”, é dividido em doze capítulos, sendo que os primeiros seis capítulos se referem às “práticas de formação” e os seis últimos capítulos às “práticas de sala de aula”.

Destacam-se nos seis capítulos iniciais a descrição analítica feita de diferentes cenários de formação envolvendo professores que atuam com a Educação Especial, mostrando a possibilidade de fortalecimento do diálogo entre a academia e os diversos atores dos processos educacionais, o envolvimento com a produção de material por parte dos professores da Educação Inclusiva, considerando as possibilidades de aprendizagem dos estudantes com deficiência, as possibilidades de criação de dispositivos “assistivos”, envolvendo em um mesmo projeto de pesquisa e desenvolvimento, estudantes da engenharia, do programa de pós graduação em Educação Matemática, professores da rede pública e particular, e pesquisadores.

Outro aspecto a ser destacado é a forma detalhada que estão descritas as experiências de formação, pois possibilita a sua reprodução enriquecida de reflexões e adaptações para diferentes grupos de formação. Vale ressaltar o estudo realizado com adolescentes superdotados, que, ainda é um grupo pouco estudado nas pesquisas em Educação Matemática.

A obra apresenta um cuidado merecido com a temática Educação Especial, propondo estudos fundamentados em literaturas atuais e com a sensibilidade necessária para tratar do tema, com a utilização dos termos técnicos recomendado por especialistas da área da Educação Especial. Sendo assim, a obra traz contribuições significativas e relevantes à comunidade cientifica, mas destaca-se pelas contribuições relacionadas a formação dos professores que atuam na Educação Especial.

Referência

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Especial. Orientações para implementação da política de educação especial na perspectiva da educação inclusiva. Secretaria de Educação Especial - MEC/SEESP, 2015.