UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XIII– Número 50 – Agosto

2017 http://www.revistaunion.org

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 1

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad quadrimestral, de modo que se publican três números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recensionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex*** y ***CAPES***

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto, 2017
Página 02-07

www.fisem.org/web/union
http://revistaunion.org

EDITORIAL

Estimados colegas y amigos,

Este es el número 50 de la revista Unión. Es una muestra significativa de educadores matemático de Iberoamerica. Los artículos de este número, abordan diferentes temas y pueden, así, ser atractivo para muchos. Consideramos que es necesario divulgar lo que se produce en un campo científico, para que los acuerdos, y también, por qué no, los malentendidos sean juzgado y tomado en cuenta por los investigadores en la continuidad de las investigaciones. Esta acción debe, a nuestro juicio, ser parte de la ardua tarea de hacer avanzar la investigación, para que los resultados si convertirse en un referente calificado para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en nuestros países. Como editores de esta revista queremos cumplir esta función.

A seguir vamos hablar a los lectores cómo es el número 50.

En la sesión Firma Invitada aparece el artículo **Pensamiento Geométrico en la Educación Superior y el despertar de la Imaginación**, escrito por los investigadores José Carlos Cifuentes y Valdeni Soliani Franco. Cifuentes es Doctor en Matemáticas de la Universidad de Campinas-UNICAMP; Profesor en el Departamento de Matemáticas y en el Posgrado en Educación de Ciencias y Matemáticas en la Universidad Federal de Paraná-UFPR, Curitiba, PR, Brasil. Valdeni Soliani Franco tiene un doctorado en matemáticas de la Universidad de São Paulo (San Carlos) – USP/San Carlos; Profesor en el Departamento de Matemáticas en el posgrado en Educación para la Ciencia y las Matemáticas; Universidade Estadual de Maringá-Maringá-PR, UEM, Brasil. En su artículo pretende mostrar didácticamente, un estilo de hacer investigación en Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas a nivel de licenciatura.

En la continuidad, son nueve artículos publicados.

El primer artículo está escrito por Claudia Margarida Acuña Soto, Elizabeth Hernández Arredondo y Vicente Liern Carrión. Este artículo se titula **Metáforas Conceptuales de las Relaciones Lineales que manejan los estudiantes de Economía**. Se argumenta que el uso de relaciones lineales en el trabajo de los economistas permite modelar e interpretar fenómenos, pero el proceso inverso resulta difícil de recorrer sin construir nuevas metáforas conceptuales.

En el segundo artículo, Rubia Fernandes y Guataçara dos Santos Junior analizan las contribuciones de una Secuencia de Enseñanza (SE) para el processo de la enseñanza y aprendizaje de gráficos y tablas para los primeros años de escolaridad. Esta investigación tiene como resultado el artículo **Ensino e Aprendizagem de Gráficos e Tabelas nos anos iniciais de Escolarização**.

En **Historia de la Matemática como recurso educativo de las Naciones Unidas: una posibilidad de análisis a través de su Hermenéutica Profunda**, los autores Ana Jimena Lemes Pérez y Virginia Cardia Cardoso analizan los conceptos de siete profesores de universitários en el Estado de São Paulo sobre la história de las Matemáticas como recurso pedagógico utilizando la metodología de la investigación llamada Hermenêutica Profunda.

Marisa Rosâni Abreu da Silveira es la autora del cuarto artículo, cuyo título es: ' **Jogos de linguagem entre professor e alunos: posibilidades de aprender e ensinar Matemática**. Silveira discute cómo el énfasis en la lengua puede contribuir a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más específicamente a través de juegos de lenguaje, uno de los principales conceptos de la filosofía de Wittgenstein.

El quinto artículo, titulado **La articulación entre situaciones problema de Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal y afín** ha escrito por Ligia Amparo Torres Rengifo y Ofelia Angulo Vallejo.Este artículo presenta los resultados de una investigación pedagógica que articula situaciones problémicas de Proyectos Productivos Agroindustriales en el contexto de la institución educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo y la función lineal.

En el artículo sexto, Flavia Cristina de Macêdo Santana y Jonei Cerqueira Barbosa presentan un estudio que tuvo como objetivo identificar, describir y analizar, en los textos que circulan sobre el trabajo de colaboracion, cómo las matemáticas y los profesores gestionan los conflictos que surgen. El título de este artículo es **Professores de Matemática e acadêmicos gerindo conflitos entre/nos textos em um trabalho colaborativo**.

El artículo séptimo es **Creencias y actitudes sobre género y Educación Matemática en la formación del profesorado de Preescolar**, en que Eduardo

Molina Morán búsqueda de explorar la dinámica psíquica que permite a los estudiantes que se gradúan maestros preescolar construyen sus creencias y actitudes sobre género y la Educación Matemáticas.

El último trabajo de este volumen es de Christian Camilo Fuentes leal. La experiência aulica se titula **Salarios y calidad de vida: Una experiencia de aula en educación matemática crítica** y ofrece una experiencia de Educación Matemática Crítica en la que se estudia la relación entre salarios mínimos y la calidad de vida en América Latina y em el contexto nacional.

Serapio García Cuesta presenta una revisión del interesante libro **Estrellas en la Sagrada Familia**, cuya autora es María de los Desamparados López de Briñas Ferragut, publicado pelo Servicio de Publicaciones de la FESPM. La obra es fruto de dos años de investigación concienzuda y laboriosa sobre la arquitectura y algunos de los contenidos de geometría que se encuentran en la Sagrada Familia. Con un importante apoyo gráfico, nos desvela la importante y variada presencia de poliedros estrellados en la obra cumbre de Gaudí.

“Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones”, es el problema del número 50 propuesto por nuestro colaborador habitual, el profesor **Uldarico Malaspina Jurado** de la Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. En este problema, en una perspectiva matemática, o autor usou la estrecha relación entre las estructuras algebraicas del conjunto de las funciones afines con las operaciones de adición y multiplicación, y del conjunto de los números reales, con operaciones similares.

Para terminar, quisiéramos agradecer la labor de los revisores y de otros colaboradores que han hecho posible este número.

¡Buena lectura!

EDITORAS

Celina Abar y Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene, a partir de 2017, una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre.

EDITORIAL

Estimados colegas e amigos,

Este é o número 50 de nossa Revista Unión. Nele encontra-se uma amostra significativa da produção dos educadores matemáticos iberoamericanos. Os artigos, deste número, abordam temas diversos podendo, assim, agradar a muitos. É nossa concepção que é necessário divulgar o que é produzido em uma área científica, para que os acertos, e também, porque não, os desacertos sejam julgados e levados em conta pelos pesquisadores na continuidade de suas investigações. Essa ação deve, a nosso ver, fazer parte da árdua tarefa de fazer avançar a pesquisa, de modo que cada vez mais os resultados da mesma se tornem-se referencia qualificada para a melhoria das condições de ensino e da aprendizagem da Matemática, em nossos países. Como editoras desta Revista buscamos desempenhar essa função.

Vamos na sequência falar aos leitores como está o número 50.

Na sessão Firma Invitada consta o artigo **O Pensamento Geométrico no Ensino Superior e o Despertar da Imaginação**, de autoria dos eminentes pesquisadores José Carlos Cifuentes e Valdeni Soliani Franco. Cifuentes é Doutor em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática; Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba/PR Brasil. Valdeni Soliani Franco é Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (São Carlos) – USP/São Carlos; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática; Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá/PR, Brasil. Em seu artigo eles visam mostrar, didaticamente, um estilo de fazer pesquisa em Matemática e em Didática da Matemática em nível de Graduação.

Em continuidade, são divulgados nove artigos.

O primero artigo é de autoria de Claudia Margarida Acuña Soto, Elizabeth Hernández Arredondo e Vicente Liern Carrión. Esse artigo se intitula **Metáforas conceptuales de las relaciones lineales que manejan los estudiantes de economía**. Nele é discutido que o uso de relações lineares no trabalho dos economistas permite modelar e interpretar os fenômenos, mas que o processo inverso é difícil sem que se construa novas metáforas conceituais.

No segundo artigo, Rubia Fernandes e Guataçara dos Santos Junior analisam as contribuições de uma Sequência de Ensino (SE) para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas para os anos iniciais de escolarização. Essa investigação resultou no artigo **Ensino e Aprendizagem de Gráficos e Tabelas nos anos iniciais de Escolarização**.

Em **Historia de la Matemática como un recurso pedagógico: una posibilidad de análisis a través de la Hermenéutica Profunda**, os autores Ana Jimena Lemes Pérez e Virgínia Cardia Cardoso analisam as concepções de sete professores universitários do Estado de São Paulo sobre a História da Matemática como um recurso pedagógico, utilizando para isso a metodologia de pesquisa denominada Hermenêutica de Profundidade.

Marisa Rosâni Abreu da Silveira é autora do quarto artigo cujo título é: **Jogos de linguagem entre professor e alunos: posibilidades de aprender e ensinar Matemática.** Silveira discute como a ênfase na linguagem pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da matemática, mais especificamente por meio de jogos de linguagem, um dos principais conceitos da filosofia de Wittgenstein.

O quinto artigo, intitula-se **La articulación entre situaciones problema de Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal y afín** e tem a autoria de Ligia Amparo Torres Rengifo e Ofelia Angulo Vallejo. Este artigo apresenta os resultados de pesquisa educacional que articula situações problemáticas de Projetos Produtivos Agroindustriais no contexto da escola Policarpa Salavarrieta do município de Yumbo e a função linear.

No sexto artigo, Flávia Cristina de Macêdo Santana e Jonei Cerqueira Barbosa apresentam um estudo que identifica, descreve e analisa a maneira como professores de matemática e acadêmicos gerenciam os conflitos que surgem entre/nos textos que circulam em um trabalho colaborativo. O título deste artigo é **Professores de Matemática e acadêmicos gerindo conflitos entre/nos textos em um trabalho colaborativo**.

Como sétimo artigo está **Creencias y actitudes sobre género y Educación Matemática en la formación del profesorado de Preescolar**, em que Eduardo Molina Morán busca explorar a dinâmica psíquica que possibilita às estudantes que se formam para ser professoras de preescolar construir suas crenças e atitudes sobre gênero e Educação Matemática.

O último trabalho deste volume é devido a Christian Camilo Fuentes Leal. A experiencia de aula intitula-se **Salarios y calidad de vida: Una experiencia de aula en Educación Matemática Crítica’** e apresenta uma experiência de Educação Matemática Crítica em que se estuda a relação entre os salários mínimos e a qualidade de vida no contexto latinoamericano e nacional.

Serapio García Cuesta apresenta uma resenha del interesante libro **Estrellas en la Sagrada Familia** cuja autora é María de los Desamparados López de Briñas Ferragut, publicado pelo Servicio de Publicaciones de la FESPM. O trabalho é fruto de dois anos de pesquisa, consciente e trabalhosa sobre a arquitetura e alguns dos conteúdos da geometria encontrados na Sagrada Família. Com suporte gráfico, revela a presença importante e variada de poliedros estrelados na obra de Gaudí.

“Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones”, compõe a seção Problema do número 50 proposto pelo, sempre colaborador, Professor **Uldarico Malaspina Jurado** da Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM. Neste problema, em uma perspectiva matemática o autor utilizou a estreita relação entre as estruturas algébricas do conjunto de funções afim com as operações de adição e multiplicação e o conjunto dos números reais, com operações similares.

Finalmente, gostaríamos de agradecer o trabalho dos revisores e outros colaboradores que tornaram possível este número.

Boa leitura!

EDITORAS

Celina Abar e Sonia Igliori

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática é uma publicação da Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tem, a partir de 2017, uma periodicidade quadrimestral, de modo que se publicam tres números ao ano, nos meses de abril, agosto e dezembro.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Página 08

FIRMAS INVITADAS

JOSÉ CARLOS CIFUENTES

Doutor em Matemática; Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática; Universidade Federal do Paraná-UFPR, Curitiba/PR, Brasil. E-mail: jccifa@gmail.com

VALDENI SOLIANI FRANCO

Doutor em Matemática; Universidade de São Paulo (São Carlos) – USP/São Carlos; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática; Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá/PR, Brasil. E-mail: vsfranco@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 09-28

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

O Pensamento Geométrico no Ensino Superior e o Despertar da Imaginação

José Carlos Cifuentes, Valdeni Soliani Franco

Resumen	Este artículo pretende mostrar didácticamente un estilo de realizar investigación en matemática y en didáctica de la matemática en el pregrado dirigido a un mejoramiento de la “formación matemática, promovido a través de la puesta en movimiento de las capacidades de imaginación, intuición y visualización en el campo de la geometría. El asunto que discutiremos para alcanzar esa finalidad es la construcción de las geometrías del plano cartesiano provisto de diversas formas de “medir distancias”. Veremos que esas geometrías pueden ser presentadas en forma “cualitativa” lo que estimula la imaginación en la medida en que sus conceptos admiten diversas “concretizaciones”. **Palabras clave**: Educación Matemática Superior, Geometrías del Plano, Imaginación Matemática.
Abstract	This paper aims to show a style of doing research in mathematics and didactics of mathematics at the undergraduate level, leading to an improvement in "mathematical training", which is promoted through the movement of the capacities of imagination, intuition and visualization in the field of geometry. The subject we will discuss in order to achieve this purpose is the construction of the geometries of the Cartesian plane, with several forms of "measuring distances". We will see that the geometries can be presented in "qualitative" form, which stimulates the imagination, as its concepts admit several "concretizations". **Keywords**: Higher Mathematics Education, Plane Geometries, Mathematical Imagination.
Resumo	Este artigo visa mostrar didaticamente um estilo de fazer pesquisa em matemática e em didática da matemática em nível de graduação conducente a um aprimoramento da “formação matemática”, aprimoramento que se promove através da movimentação das capacidades da imaginação, intuição e visualização no campo da geometria. O assunto que discutiremos para atingir essa finalidade, é o da construção das geometrias do plano cartesiano, munido de diversas formas de “medir distâncias”. Veremos que essas geometrias podem ser apresentadas em forma “qualitativa”, o que estimula a imaginação, na medida em que seus conceitos admitem diversas “concretizações”. **Palavras-chave:** Educação Matemática Superior, Geometrias do Plano, Imaginação Matemática.

1. Introdução: o despertar da imaginação na formação matemática no Ensino Superior

Este artigo tem um propósito didático: mostrar um estilo de fazer pesquisa em matemática e pesquisa em didática da matemática em nível de graduação conducente a um aprimoramento na "formação matemática" dos estudantes de Licenciatura e também de Bacharelado em Matemática, aprimoramento que se promove através da movimentação das capacidades de imaginação, intuição e visualização matemáticas no campo da geometria.

Mostraremos, através de exemplos, que o ensino de matemática na Educação Superior pode ou deve partir do concreto rumo ao abstrato visando o despertar, ou melhor, a liberação da imaginação no campo da matemática. Intuição e imaginação, então, fazem parte essencial de nossa concepção de matemática, uma concepção dinâmica, que considera a matemática como atividade, como forma de pensar, que incorpora também formas de argumentação que escapam ao puramente lógico-dedutivo.

Além disso, iremos mostrar que a matemática, assim concebida, tem uma face heurística e experimental, que pode ser explorada e potencializada por meio de *softwares* dinâmicos. Esses permitem elaborar conjecturas para serem trabalhadas e possivelmente demonstradas, ou no mínimo suscitar a imaginação para construção de novos conceitos e resultados. Especificamente, para isso neste artigo, utilizaremos o *software* livre GeoGebra.

O assunto que discutiremos neste artigo, como um pretexto (embora por si importante) para atingir a nossa finalidade, é o da construção das geometrias do plano e do espaço cartesianos a partir da determinação de diversas formas de "medir distâncias", não apenas da geometria euclidiana, entendendo esta como a geometria cartesiana que resulta da forma pitagórica de medir distâncias, sendo os pré-requisitos os seguintes: 1) geometria euclidiana plana e espacial; 2) geometria analítica elementar; 3) álgebra linear; e 4) cálculo diferencial e integral em uma variável.

Os conceitos e resultados utilizados neste artigo podem ser encontrados em qualquer referência que trate dos assuntos mencionados anteriormente como pré-requisitos, é por isso que não haverá bibliografia específica pertinente no final do artigo.

Veremos, principalmente, que as geometrias em consideração, na sua versão cartesiana, podem ser apresentadas em forma "qualitativa", isto é, sem o recurso a coordenadas, e que é essa forma de abordagem que estimula a imaginação matemática na medida em que seus conceitos admitem diversas "concretizações" quando traduzidos à coordenadas.

Este trabalho é uma contribuição para o Grupo de Pesquisa em Ensino da Geometria – GPEG, sediado no Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática – PCM da Universidade Estadual de Maringá – UEM, e foca principalmente a formação de professores, especialmente a formação matemática do professor em formação inicial e continuada, colocando esta pesquisa no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior.

2. A Abordagem Vetorial para se Fazer Geometria no Plano e no Espaço Cartesianos: a norma e o produto interno como recursos teóricos para a geometria

O primeiro passo na construção da geometria analítica elementar é a definição dos "espaços de concretização" dos objetos geométricos: o plano cartesiano $\mathbf{R}^2$ e o espaço $\mathbf{R}^3$, sendo **R** o conjunto (corpo ordenado completo) dos números reais. E o primeiro passo importante para introduzir a linguagem vetorial na geometria analítica é considerar os pontos como vetores. As argumentações a seguir, podem ser estendidas facilmente a $\mathbf{R}^n$, para $n \geq 4$, porém, a visualização experimental das propriedades geométricas correspondentes, que é um dos nossos focos, pode não ser possível nesses casos.

Para $P = (x, y)$ ou $P = (x, y, z)$, um ponto de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, respectivamente, define-se a chamada de **norma euclidiana de *P*** da seguinte forma:

$$\|P\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ ou } \|P\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

sendo que o índice 2 na norma faz referência à potência 2 e ao expoente ½ da fórmula.

E para $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, ou $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$, respectivamente, define-se o **produto interno usual de *P* e *Q*** da seguinte forma:

$$\langle P, Q\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \text{ ou } \langle P, Q\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Observa-se que a norma pode ser "induzida" facilmente pelo produto interno, pois $\|P\|_2 = \langle P, P\rangle^{1/2}$, nossa primeira fórmula de caráter qualitativo, pois ela não remete diretamente à sua versão em coordenadas.

Com essas noções, é possível introduzir os conceitos geométricos básicos como distância e ângulo, da seguinte maneira.

No caso de $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, a **distância euclidiano-pitagórica** induzida, entre esses pontos (vetores) é dada por:

$$d_2(P, Q) = \|P - Q\|_2 \ \left(= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}\right).$$

E o "ângulo θ" entre esses vetores, se ambos forem não nulos, é definido através de:

$$cos\,\theta = \frac{\langle P, Q\rangle}{\|P\|_2\|Q\|_2}.$$

Devemos reparar no fato de que as definições de distância e ângulo dadas anteriormente são também apresentadas "qualitativamente", isto é, usando apenas os conceitos de norma e de produto interno independentemente de sua forma concreta expressa em coordenadas que eles adotam, expressão colocada acima entre parênteses no caso da distância, a que podemos entender como "quantitativa", pois através dela pode ser obtido um resultado numérico. A versão qualitativa permite diversas concretizações quantitativas, dependendo de como sejam definidas a norma e o produto interno, podendo ser eles diferentes dos usuais euclidianos.

Por outro lado, é importante reparar que usualmente (e erradamente) pensa-se que, pelo menos no contexto do ensino, só é possível medir "ângulos" num espaço vetorial se ele estiver munido de um produto interno com sua norma induzida, como feito anteriormente para o caso da geometria euclidiana no plano e no espaço cartesianos.

Neste artigo, veremos que num "espaço real normado", especialmente o $\mathbf{R}^2$ como exemplo representativo, com diversas normas que podem ser distintas da norma euclidiana e não necessariamente induzidas por um produto interno, ainda é possível medir ângulos através do conceito de 'radiano', que analisaremos. Em particular será possível calcular o "valor de π" nas geometrias resultantes (que, como veremos, não necessariamente será o tradicional euclidiano 3,141592...).

Gera-se, assim, o que chamaremos de "o problema da definição de ângulo entre retas (ou entre vetores) num espaço vetorial". A discussão em profundidade desse problema, que pode ser formulado não apenas no âmbito da matemática, senão também da educação (em) matemática, visa reforçar a formação matemática conceitual na graduação (Licenciatura e Bacharelado) mostrando, através desse exemplo particular, que a intuição e imaginação matemáticas, que manifestam-se na discussão qualitativa dos conceitos, são também relevantes para a construção do conhecimento matemático. Essa discussão permite desvincular, epistemologicamente, o qualitativo do quantitativo em matemática, especialmente em geometria.

Diversos problemas interessantes serão formulados no contexto da geometria analítica desses espaços normados que podem ser abordados inicialmente em nível de Iniciação Científica e Iniciação à Docência Superior em Matemática, mas que facilmente podem alcançar níveis mais avançados, como esboçaremos no final. Esses problemas mostrarão, também, que a matemática tem, além de sua face analítica formal, uma face sintética experimental guiada pela intuição e que pode ser explorada usando recursos não formais como os da geometria dinâmica, especialmente o *software* livre GeoGebra, face que tem a virtude de aprimorar essa nossa intuição matemática no campo da geometria.

3. Alguns Conceitos Geométricos que Dependem Qualitativamente da Norma

Assim como a distância e o ângulo, há muitos outros conceitos geométricos que podem ser expressos qualitativamente usando aqueles como conceitos de base. O caso mais notório é o de circunferência no plano.

Em $\mathbf{R}^2$, define-se a **circunferência euclidiana de raio *r*** ($r > 0$) como o lugar geométrico C_r dos pontos P do plano que estão a distância r de um ponto fixo chamado centro, cujo "formato" (ou forma gráfica) é ilustrado na figura 1, em que o centro é o ponto (a, b). No caso do centro ser a origem $0 = (0,0)$,

$$C_r = \{P / \|P\|_2 = r\}.$$

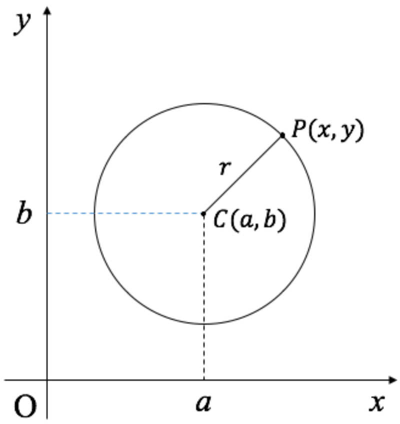


Fig. 1: Circunferência com centro em (a, b) e raio de medida r.
Fonte: autores

No Cálculo Diferencial e Integral, pode-se definir, também, o **comprimento euclidiano de arco de uma curva** γ, diferenciável por partes, cujas equações paramétricas são dadas por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in [a\ ,\ b]$, usando apenas a norma, mediante a seguinte integral, pensada intuitivamente como uma soma infinita de comprimentos infinitesimais,

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

A forma qualitativa desses conceitos permitirá generaliza-los ao caso de outras normas e outros produtos internos, como será mostrado na sequência.

4. "Retrato Falado" de uma Norma num Espaço Vetorial e Concretização de Outras Normas Diferentes da Euclidiana

Para estabelecer a condição qualitativa de uma norma e de um produto interno, não podemos recorrer a suas expressões concretas (definições explícitas) usando as coordenadas, devemos procurar defini-las implicitamente através de propriedades mínimas que esses conceitos deverão satisfazer, propriedades que chamaremos de 'axiomas'. É como construir o "retrato falado" de um conceito através do enunciado dessas propriedades mínimas, metáfora que ilustra o fato de poderem existir muitas concretizações que se adequem a esse "retrato falado".

Começaremos pela norma. Os axiomas a seguir são motivados pelo que de fato ocorre com a norma euclidiana de $\mathbf{R}^2$ e de $\mathbf{R}^3$.

Seja E um espaço vetorial real. Para todo u, $v \in E$ e $t \in \mathbf{R}$, definimos a **norma em *E*** como uma função $\|\ \ \|: E \to \mathbf{R}$ satisfazendo:

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

3. $\|tu\| = |t|\|u\|$;

4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Esses axiomas determinam implicitamente uma norma no espaço *E*.

É claro que a restrição da norma de *E* a qualquer subespaço é uma norma no subespaço, em particular o será nos subespaços planos (isto é, de dimensão 2) que são os que interessam para definir ângulo entre dois vetores.

Um fenômeno muito frequente, próprio de um "retrato falado", é que o conceito definido assim pode se concretizar de diversas maneiras, como já mencionado. Em $\mathbf{R}^2$, facilmente extensível a $\mathbf{R}^3$, ou a $\mathbf{R}^n$ em geral, temos os seguintes "exemplos concretos" de normas:

Para todo $p \geq 1$ ($p \in \mathbf{R}$) e para todo $P \in \mathbf{R}^2$ com $P = (x, y)$, definem-se as ***p*-normas**:

$$\|P\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p};$$

as quais têm como casos particulares: para $p = 1$, a **norma soma** $\|P\|_1 = |x| + |y|$ e para $p = 2$, a **norma euclidiana** $\|P\|_2 = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Essas normas ainda podem ser mais gerais, por exemplo, pode-se ter:

$$\|P\| = (a|x|^p + b|y|^p)^{1/p}, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

A partir dai, pode-se explicitar diversas "formas concretas" do conceito de 'circunferência' (ou formatos de circunferências) a respeito dessas normas como ilustramos a seguir, substituindo na definição de C_r dada anteriormente, a norma euclidiana pela *p*-norma em consideração.

Ao utilizar o GeoGebra 3D, pode-se obter a norma $\|P\|_p$ como função de *p*, representando-a graficamente por meio da seguinte construção tridimensional:

- Constrói-se inicialmente, um controle deslizante para *p*, por exemplo, com mínimo 1 e máximo 25, com incremento 1.
- Na janela de entrada coloca-se a função nas variáveis *x* e *y*,
$$a(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

Nas figuras 2, 3 e 4 a seguir, temos alguns representantes da função $z = a(x, y)$ para variações de *p*. Cada gráfico pode ser considerado como um "cone" na geometria correspondente.

Em geral, a *p*-circunferência (ou circunferência em relação à *p*-norma) de raio *r* com centro na origem, tem como equação cartesiana $|x|^p + |y|^p = r^p$. Para obter essas circunferências no GeoGebra 3D, toma-se planos paralelos ao plano coordenado *x*O*y*, ou seja, planos $z = k$. Este *k*, é na verdade, a medida do raio r. Nas figuras 2, 3 e 4, temos também representantes dessas circunferências em três normas distintas, a 1-norma, a 2-norma (a euclidiana) e a 5-norma, quando se faz a interseção dos gráficos estabelecidos na descrição anterior, no GeoGebra 3D, com o plano $z = 2$, por exemplo.

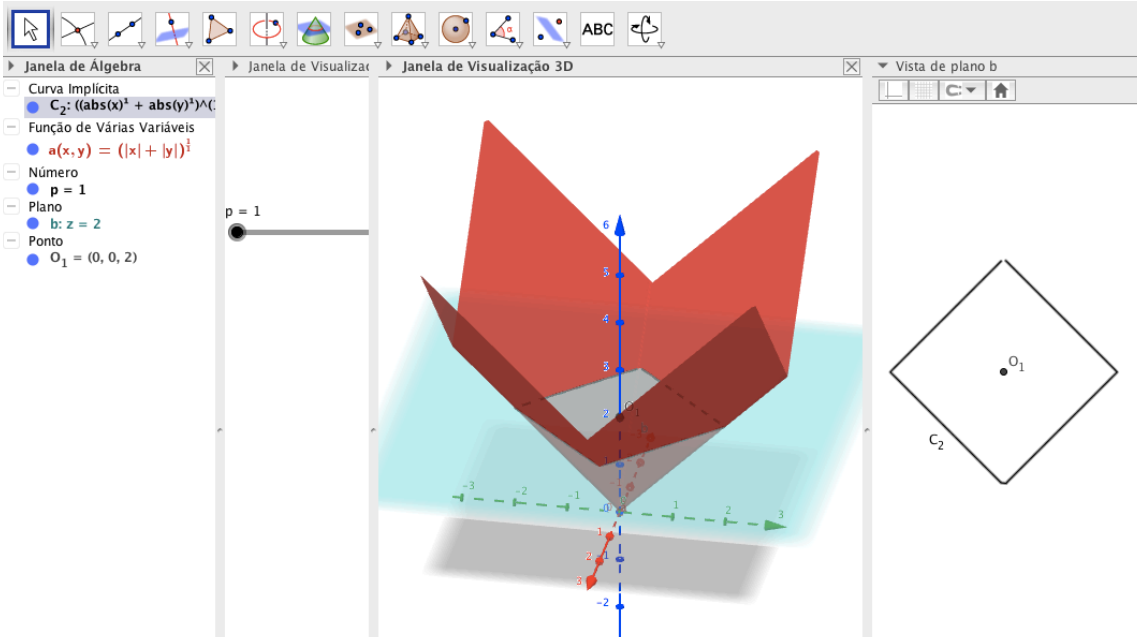


Fig. 2: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_1, na 1-norma.
Fonte: autores

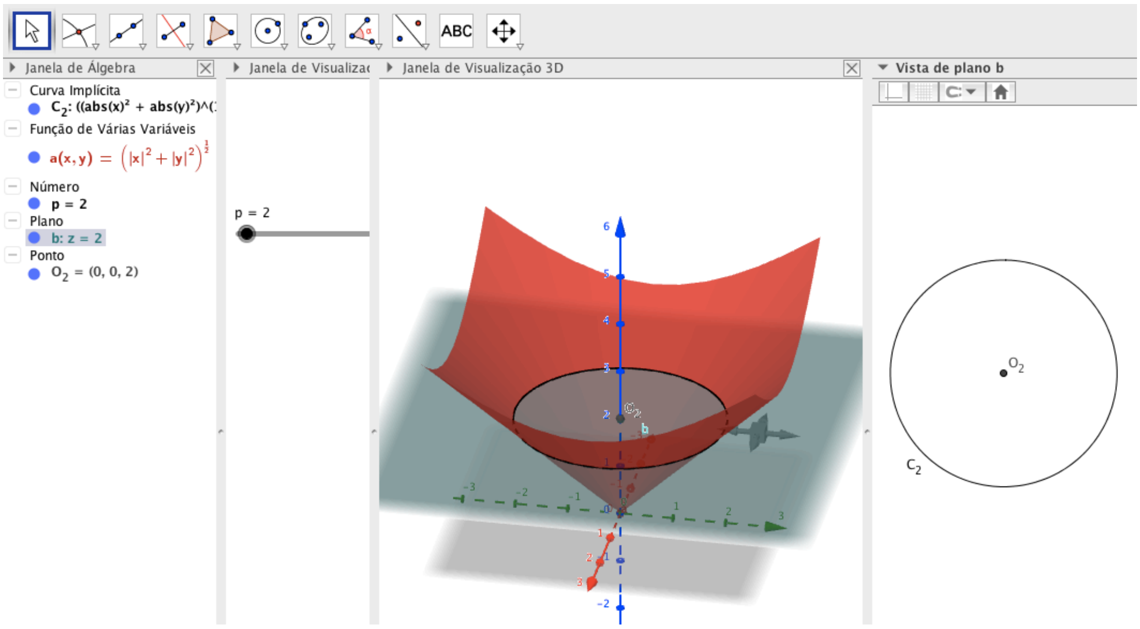


Fig. 3: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_2, na 2-norma.
Fonte: autores

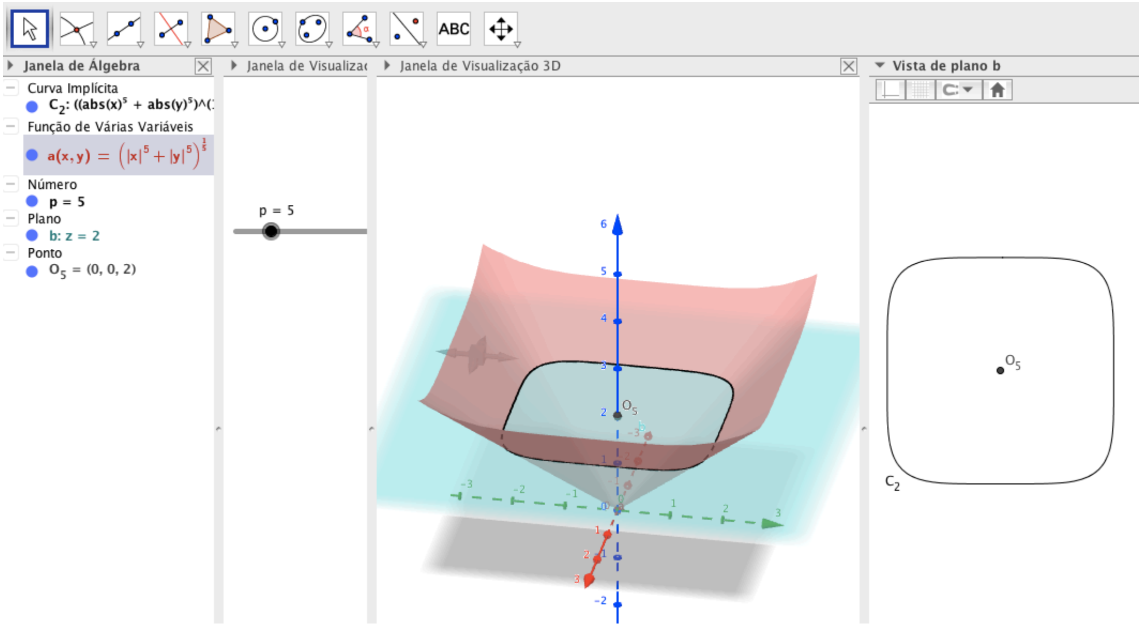


Fig. 4: Circunferência de raio de medida 2 e centro em O_5, na 5-norma.
Fonte: autores

5. “Retrato Falado” de um Produto Interno num Espaço Vetorial e Concretização de Outros Produtos Internos Diferentes do Usual

Um **produto interno** num espaço vetorial real E é uma função $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$ tal que para todo u, v, $w \in E$ e para todo r, $s \in \mathbf{R}$,

1. $\langle u\ ,\ v\rangle \geq 0$,
2. $\langle u\ ,\ v\rangle = \langle v\ ,\ u\rangle$,
3. $\langle ru + sv\ ,\ w\rangle = r\langle u\ ,\ w\rangle + s\langle v\ ,\ w\rangle$,
4. $\langle u\ ,\ rv + sw\rangle = r\langle u\ ,\ v\rangle + s\langle u\ ,\ w\rangle$.

Esses axiomas, motivados também pelo que acontece com o produto interno usual de $\mathbf{R}^n$, determinam qualitativamente um produto interno no espaço E.

A partir dai, define-se a norma induzida pelo produto interno mediante $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$, e demonstra-se que satisfaz os axiomas de uma norma. Demonstra-se, também (o que não será feito aqui, porém daremos um indício informal mais adiante), que dentre as p-normas, somente a norma euclidiana pode ser definida a partir de um produto interno e é o usual.

Como no caso das normas, pode-se ter diversas concretizações de um produto interno no espaço E. No espaço $\mathbf{R}^2$, se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ temos os seguintes:

$$\langle P, Q\rangle = ax_1x_2 + by_1y_2, \text{ onde } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

As normas induzidas por eles são: para $P = (x, y)$, $\|P\| = (ax^2 + by^2)^{\frac{1}{2}}$.

No desenvolvimento da teoria qualitativa das normas em espaços vetoriais, prova-se, usando apenas os axiomas correspondentes, que todo produto interno satisfaz a chamada 'desigualdade de Schwarz':

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

É esta desigualdade que permite definir 'ângulo' entre os vetores *u* e *v* quando eles são não-nulos, pois nesse caso teremos que:

$$\left|\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1,$$

donde segue que existe um número real θ tal que:

$$cos\,\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Esse número θ será interpretado como o "ângulo entre os vetores *u* e *v*" na geometria gerada por esse produto interno.

Em geral, se $\|\ \ \|$ é uma norma em $\mathbf{R}^2$ induzida por um produto interno, e e_1 e e_2 são vetores de uma base de $\mathbf{R}^2$, isto é, vetores não nulos e não paralelos, então, para todo $P \in \mathbf{R}^2$ existirão x , $y \in \mathbf{R}$ tais que $P = xe_1 + ye_2$, portanto, usando as propriedades elementares do produto interno, a norma induzida adota a seguinte forma:

$$\|P\| = \langle xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2\rangle^{1/2} = (\|e_1\|^2x^2 + 2\langle e_1, e_2\rangle xy + \|e_2\|^2y^2)^{1/2},$$

isto é, $\|P\| = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$ com $a > 0$, $c > 0$ e, devido à desigualdade de Schwarz e ao fato dos vetores da base não serem paralelos**,** $b^2 < ac$.

Essa expressão para a norma de *P* já dá um indício de que dentre as *p*-normas, somente a norma euclidiana pode ser definida a partir de um produto interno e é o usual.

Ao utilizar o GeoGebra 3D, pode-se obter a norma $\|P\|$ como função de *a*, *b* e *c*, representando-a graficamente por meio da seguinte construção:

- Constrói-se inicialmente, três controles deslizantes para *a*, *b* e *c*, por exemplo, com mínimo 1 e máximo 10, com incremento 1, para *a* e *c* e com mínimo -5 e máximo 5, também com incremento 1 para *b*.
- Na janela de entrada coloca-se a função nas variáveis *x* e *y*, $f(x, y) = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$.

A figura 3 mostra o cone correspondente ao produto interno usual, enquanto que a parte esquerda da figura 6 a seguir mostra essa construção, com diferentes valores para *a*, *b* e *c*, resultando num cone elíptico.

Nessa geometria, a equação da "circunferência" de raio *r* centrada na origem é dada por $ax^2 + 2bxy + cy^2 = r^2$, para os diferentes valores de *a*, *b* e *c*, e que podem ser obtidas, por meio da interseção com planos $z = r$, cujo formato que "vemos", depende dos valores atribuídos aos coeficientes. Na parte direita das figuras 5 e 6 a seguir, apesar de "vermos" diferentes formatos, devemos "imaginar" que são "circunferências" para as diferentes normas. "Vemos" uma elipse, mas "imaginamos" uma circunferência!

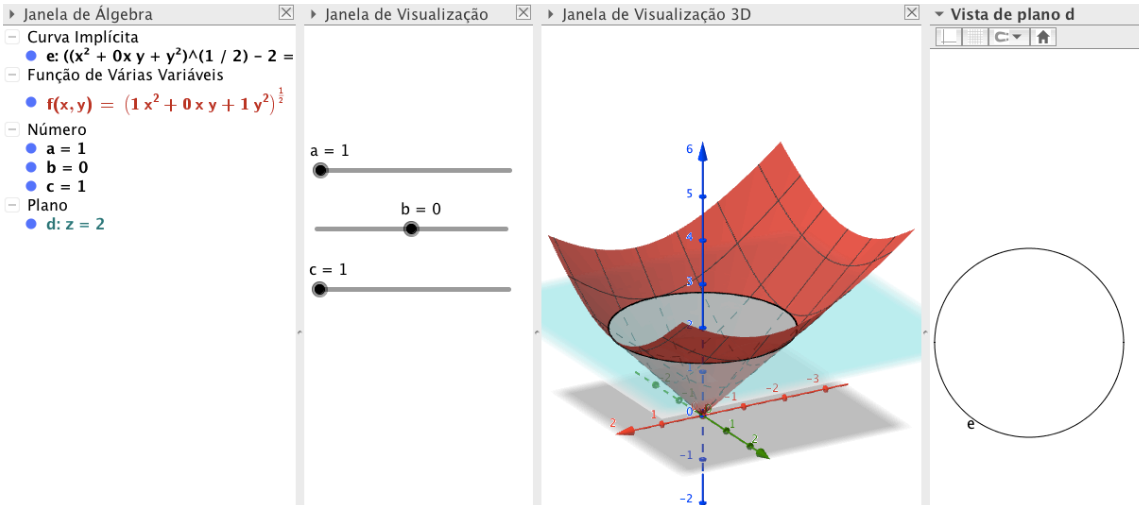


Fig. 5: Circunferência obtida por meio da norma proveniente do produto interno usual.
Fonte: autores

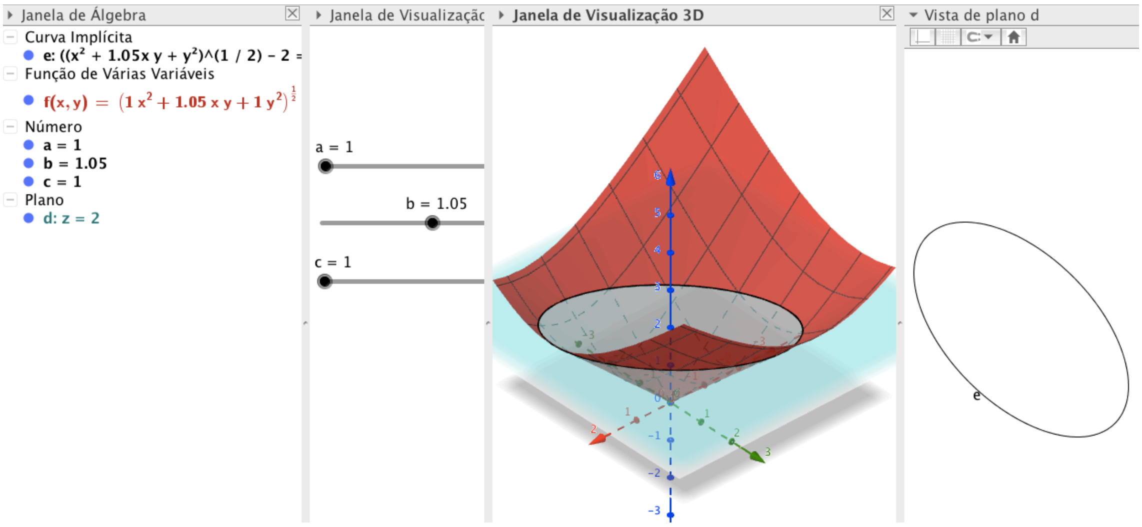


Fig. 6: “Circunferência” obtida por meio da norma proveniente de um outro produto interno.
Fonte: autores

6. Definição Tradicional de Ângulo na Geometria Euclidiana: a “propriedade angular” e o conceito de “radiano”

Em geometria euclidiana plana, para se chegar ao conceito de ângulo entre duas retas (ou entre dois vetores), com sua medida dada em radianos, demonstra-se primeiro que:

> *dadas duas retas concorrentes, se C_1 e C_2 são duas circunferências com centro no ponto de interseção das retas e raios que medem r_1 e*

r_2 respectivamente, e se s_1 e s_2 são os comprimentos dos respectivos arcos menores formados com as retas dadas, então, $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$.

Esta propriedade pode ser observada experimentalmente no GeoGebra, construindo inicialmente duas retas concorrentes, um controle deslizante para o comprimento do raio *r*, que pode variar, por exemplo de 1 até 3 e com incrementos de uma unidade. Na sequência, constrói-se uma circunferência com centro no ponto de interseção das retas e raio de medida *r*. Utilizando as interseções das retas com a circunferência, escolhe-se um dos arcos menores obtidos para fazer o teste da propriedade. Ao construir o arco escolhido, o GeoGebra mostrará na janela de álgebra o seu comprimento s_r. Utilizando a janela de entrada, chame, por exemplo, de α_r o valor do quociente $\frac{s_r}{r}$. Variando o controle deslizante, observe que o valor do ângulo não se altera.

Chamaremos de **propriedade angular** esse enunciado. Portanto, esse valor constante e sem dimensões, que então não depende da circunferência, mas só das retas concorrentes, é considerado como a "definição do valor, em radianos, do ângulo de interseção entre essas retas".

A figura a seguir mostra a representação para dois raios diferentes de circunferências com centro na interseção das retas. Observe, na janela de álgebra, que mesmo com a variação dos valores de *r* e de s_r, o valor do ângulo α_r = 0,86 não se altera.

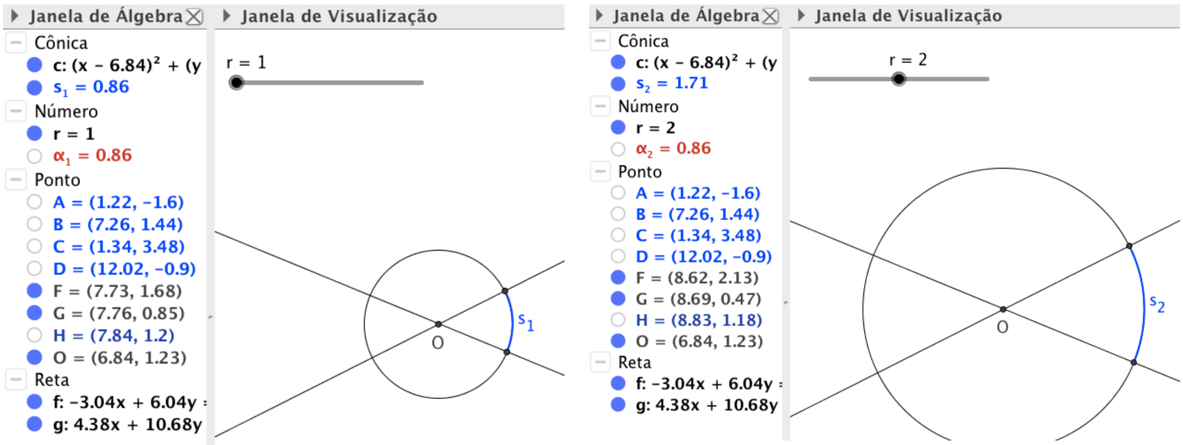


Fig. 7: Medida de um ângulo, obtido pelo quociente do comprimento do arco e o raio de duas circunferências com medidas 1 e 2.
Fonte: autores

Esta propriedade permite, portanto, definir "π" como sendo o quociente entre o comprimento *C* de uma circunferência qualquer e a medida do seu diâmetro *D*, isto é, duas vezes a medida do raio, ou seja: $\pi = C/D$. Destaca-se que esta é uma definição qualitativa e não quantitativa de π.

A pergunta natural que surge aqui é: quais as normas no plano que satisfazem a propriedade angular para suas "circunferências" e qual a concretização numérica de π nesses casos?

Consideremos, primeiro, o caso de uma norma induzida por um produto interno, que será então da forma $\|P\| = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1/2}$, com *a* > 0, *c* > 0 e b^2 < *ac*. Suporemos inicialmente *b* = 0, isto é $\langle e_1 , e_2\rangle = 0$ para a base subjacente, o que significa a ortogonalidade dos vetores dessa base a respeito do produto interno dado. Nesse caso, a "circunferência" de centro na origem e raio *r*, em relação a norma induzida, tem como equação cartesiana $ax^2 + cy^2 = r^2$ com *a* > 0 e *c* > 0.

Essa "circunferência", que tem uma representação geométrica com o formato de uma elipse, ao fazer variações nos coeficientes, como nas figuras 5 e 6, pode ser parametrizada da seguinte maneira:

$$\gamma(t) = \left(\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\right) cos\, t, \left(\frac{r}{\sqrt{c}}\right) sen\, t\right), t \in [0,2\pi].$$

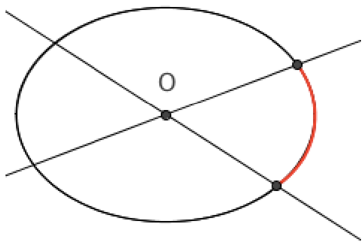


Fig. 8: "Circunferência" em que a norma induzida tem como equação cartesiana $x^2 + 2y^2 = 4$, realizada no GeoGebra.
Fonte: autores

Na geometria do plano $\mathbf{R}^2$ munido desse produto interno, será possível definir ângulo entre duas retas, se demonstrarmos a correspondente propriedade angular, isto é, se demonstrarmos que o quociente entre o comprimento de um arco em relação à medida do raio, nas circunferências indicadas, é constante.

No caso da parametrização de um arco da elipse no intervalo [α , β] temos:

$$L(\gamma) = r\int_{\alpha}^{\beta} (sen^2 t + cos^2\, t)^{1/2} dt = r(\beta - \alpha).$$

Portanto,

$$\frac{L(\gamma)}{r} = \beta - \alpha,$$

que é constante e coincide com o ângulo euclidiano formado pelas retas que passam pelo centro da elipse e que tem como vetor diretor, respectivamente, $\gamma(\alpha)$ e $\gamma(\beta)$.

Nessa geometria, o valor de π, definido como o quociente do comprimento da "circunferência" *C* pela medida do seu diâmetro *D*, é o mesmo que no caso euclidiano!

Exercício: Demonstrar que o mesmo acontece no caso em que $b \neq 0$.

Podemos concluir que, no caso de uma norma induzida por um produto interno, o ângulo definido através do produto interno coincide com o ângulo definido a partir da constatação da propriedade angular correspondente.

6.1 A Propriedade Angular no Plano com as *p*-normas

A norma $\|P\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, com $P = (x, y)$ e para $p \neq 2$, é um típico caso de uma norma que não pode ser induzida por um produto interno. Isso significa que não será possível definir ângulo entre vetores como se faz num espaço de produto interno. No entanto, é um bom exemplo para testar a proposta de definir ângulo a partir da constatação da propriedade angular.

Para essa norma, a *p*-circunferência com centro na origem e raio de medida *r* é dado por:

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |x|^p + |y|^p = r^p\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \left|\frac{x}{r}\right|^p + \left|\frac{y}{r}\right|^p = 1\}.$$

Observa-se que essa circunferência é simétrica em relação aos eixos *x* e *y*. Portanto, no intuito de calcular o valor de π para essa norma como sendo o comprimento da circunferência dividida por 2*r*, o que denotaremos por π_p, basta usar o arco correspondente ao primeiro quadrante.

O cálculo desse comprimento pode ser feito mediante a fórmula integral do cálculo do comprimento euclidiano de uma curva parametrizada, substituindo apenas a norma clássica pela *p*-norma.

Uma parametrização desse “arco de circunferência” pode ser feita a partir de sua própria equação cartesiana, a que é dada por:

$$y = (r^p - x^p)^{1/p}, \text{ com } x \in [0, r],$$

obtendo, então,

$$\gamma(t) = \left(t, (r^p - t^p)^{1/p}\right), t \in [0, r],$$

e assim,

$$\gamma'(t) = \left(1, -(r^p - t^p)^{\frac{1-p}{p}} t^{p-1}\right).$$

Utilizando esta parametrização, o comprimento da circunferência é dado por:

$$4L(\gamma) = \int_0^r \|\gamma'(t)\|_p dt = \int_0^r \left(1 + \left(\frac{t^p}{r^p - t^p}\right)^{p-1}\right)^{1/p} dt,$$

resultando $\pi_p = \pi_p(r) = 4L(\gamma)/2r = 2L(\gamma)/r$, isto é,

$$\pi_p(r) = \left(\frac{2}{r}\right) \int_0^r \left(1 + \left(\frac{t^p}{r^p - t^p}\right)^{p-1}\right)^{1/p} dt.$$

Resta verificar que $\pi_p(r)$ não depende de r, e para tanto basta verificar que $\pi_p(r) = \pi_p(1)$, o que pode ser feito, sem calcular a integral, mediante a substituição $u = 1/r$.

Concluímos que,

$$\pi_p = \pi_p(1) = 2\int_0^1 \left(1 + \left(\frac{t^p}{1-t^p}\right)^{p-1}\right)^{1/p} dt.$$

Não podemos calcular analiticamente essa integral, no caso geral. De fato, ela é imprópria em $t = 1$. Mas, em alguns casos particulares é possível esse cálculo. Por exemplo, para $p = 1$ temos $\pi_1 = 4$(!!), e para $p = 2$ temos $\pi_2 = \pi$ (caso euclidiano).

Colocando na janela de entrada do GeoGebra, a integral, chamando este valor de b, criando um ponto A = (p, b) e ativando o seu rastro, quando p varia, por meio de um controle deslizante é possível verificar, os valores calculados anteriormente para π_1 e π_2, além de poder fazer conjecturas, por meio da exploração deste gráfico, obtido desta forma, apresentado na figura 9, a seguir.

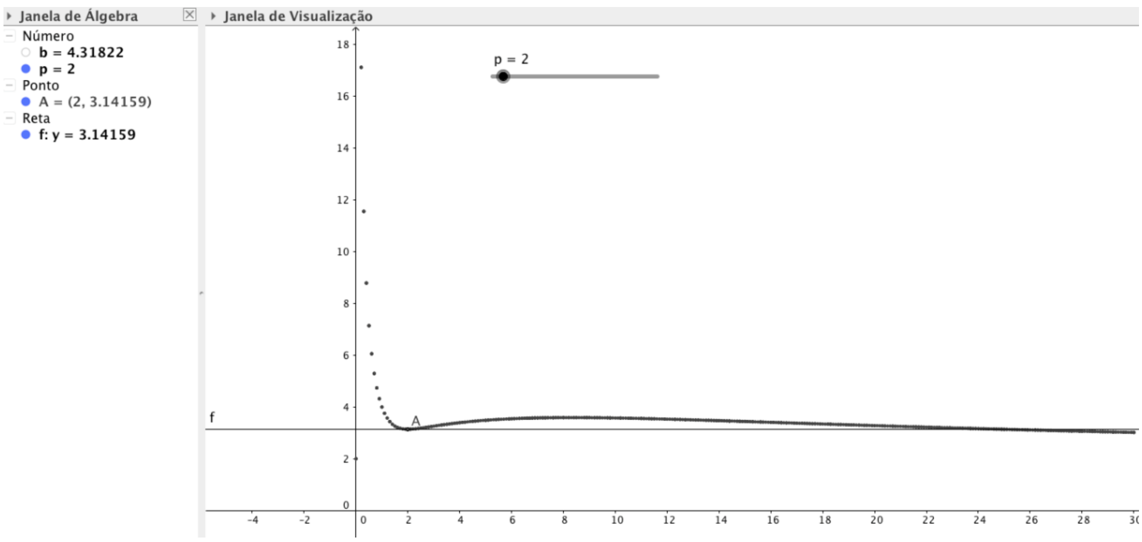


Fig. 9: Estimativa do valor de π_p para $p \geq 1$.
Fonte: autores

Observe que em $p = 2$, mostrado no gráfico anterior, o valor da segunda coordenada de A (que pode ser observada na janela algébrica), é o valor de π com cinco casas decimais. Note também que o ponto A, deslizante, em destaque, tem um mínimo local, mas não é global, pois em $p = 30$, o gráfico mostra-se abaixo da reta $x = \pi$. Pode-se conjecturar, que este gráfico tende a 2, quando p tende ao infinito. Ainda, neste gráfico observa-se que em $p = 1$, tem-se o valor 4, como obtido algebricamente. O gráfico da figura 9, mostra também a tendência da norma, para valores entre 0 e 1. Nota-se ainda, que existe um provável máximo local, por volta da 8,3-norma, no qual o valor de π fica em torno de 3,59033, com cinco casas decimais. Todas estas observações experimentais serão motivo de análise e estudo para outro artigo, utilizando, inclusive, outros *softwares* como, por exemplo, o Matlab. Agradecemos ao Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira (UFPR) quem nos chamou a atenção para as potencialidades desses outros *softwares* e inclusive corroborou com eles algumas de nossas conjecturas.

Uma outra parametrização da *p*-circunferência em consideração pode ser feita imitando o caso da circunferência euclidiana: a partir de $\left(\frac{x}{r}\right)^p + \left(\frac{y}{r}\right)^p = 1$ correspondente ao primeiro quadrante, podemos definir, para $t \in [0\ ,\ \pi/2]$,

$$\gamma(t) = (rcos^{2/p}t\ ,\ rsen^{2/p}t),$$

donde,

$$\|\gamma'(t)\|_p = \left(\frac{2r}{p}\right)(cos^{2-p}t\ sen^p t + sen^{2-p}t\ cos^p t)^{1/p},$$

resultando, então,

$$\pi_p = \left(\frac{4}{p}\right)\int_0^{\pi/2}(cos^{2-p}t\ sen^p t + sen^{2-p}t\ cos^p t)^{1/p}dt.$$

Note que a parametrização da curva γ dada anteriormente pode ser considerada como uma espécie de coordenadas polares na *p*-norma.

Exercício: Demonstrar que as duas versões para o cálculo do valor de π_p coincidem e fazer um estudo comparativo do comportamento gráfico dessas parametrizações.

7. Resultados "Qualitativos" que Aproximam a Geometria de um Espaço Normado, com a Propriedade Angular, da Geometria Euclidiana

Na geometria do plano munido de uma norma qualquer, os conceitos de 'reta' e de 'segmento de reta' que adotaremos aqui serão os mesmos que os da geometria analítica euclidiana, isto é, no caso do plano, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação do 1° grau em *x* e *y*, ou melhor, uma equação da forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde *m* é uma constante.

Isto pode ser justificado da seguinte maneira: se tomamos um ponto fixo $(x_0\ ,\ y_0)$ e outro variável $(x\ ,\ y)$ da suposta "reta", então, para que a inclinação em relação ao eixo *x*, na norma considerada seja constante, devemos ter que:

$$\frac{\|(x,y) - (x,y_0)\|}{\|(x,y_0) - (x_0,y_0)\|} = \text{constante},$$

e assim,

$$\frac{|y - y_0|\|(0,1)\|}{|x - x_0|\|(1,0)\|} = \text{constante}.$$

Esse argumento é válido, devido ao fato que a norma é invariante por translações e, portanto, preserva distâncias. A relação encontrada fornece, então, uma equação do 1º grau para a equação da reta chamando de *m* a constante $\frac{y-y_0}{x-x_0}$.

No caso de um segmento de reta que une os pontos *P* e *Q*, temos suas equações paramétricas dadas por: $\gamma(t) = P + t(Q - P)$ com $t \in [0\ ,\ 1]$. Nesse caso, é fácil ver que, se $\|\ \ \|$ é uma norma qualquer, então, o comprimento desse segmento, usando a fórmula do comprimento de arco, é $L(\gamma) = \|Q - P\| = d(P, Q),$ sendo *d* a distância correspondente a essa norma.

Portanto, a menor distância entre dois pontos é ainda o segmento que os une, embora, em muitos casos, podem haver muitos caminhos de distância mínima, como mostra facilmente a figura 10.

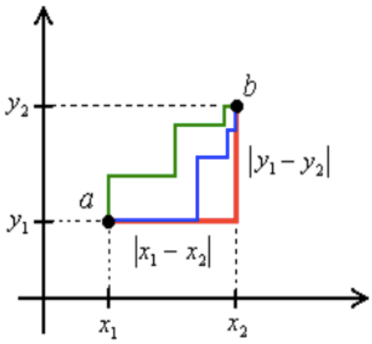


Fig. 10: Percursos de distância mínima na 1-norma
Fonte: autores

Por outro lado, observe que se uma norma *N* satisfaz a propriedade angular, então, é possível, em geral e como já indicado, definir $\pi_N = C/D = C/2r$, em que *C* é o comprimento de uma circunferência qualquer, em relação a essa norma, e *D* seu respectivo diâmetro, donde teremos que o comprimento da circunferência de raio *r* será dado por $C = 2\pi_N r$, igual em forma ao caso euclidiano.

Um outro resultado positivo curioso é o seguinte: consideremos a circunferência euclidiana com centro na origem e raio *r*, isto é, $C_r = \{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 = r^2\}$, e calculemos seu comprimento *C* em relação a norma $\|\ \ \|_p$.

Observa-se que essa circunferência é simétrica em relação aos eixos *x* e *y*. Portanto, para calcular *C* basta usar o arco correspondente ao primeiro quadrante e multiplicar por 4. Nesse caso, usando a parametrização:

$$\gamma(t) = r(cos\ t, sen\ t), t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

obtemos,

$$L(\gamma) = r\int_0^{\pi/2} (cos^p t + sen^p t)^{1/p} dt,$$

e assim,

$$C = 4r\int_0^{\pi/2} (cos^p t + sen^p t)^{1/p} dt.$$

No caso específico de $p = 1$, obtemos $C = 8r$, isto é, $C = 2\pi_1 r$ pois $\pi_1 = 4$ como vimos, e para $p = 2$, obtemos $C = 2\pi r = 2\pi_2 r$ como no caso euclidiano. Isto é, o comprimento da circunferência euclidiana na 1-norma e na 2-norma é o mesmo que o da circunferência própria do espaço correspondente a essa norma.

Problema: Será que para p qualquer, $C = 2\pi_p r$, sendo C o comprimento da circunferência euclidiana na p-norma?

7.1 A Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

No que segue, faremos uso da propriedade de uma norma ser invariante por translações (já usado na seção anterior) para obtermos diversos resultados na geometria do plano munido com esta norma. Por exemplo, "um ângulo transladado paralelamente mantém sua medida (em radianos)". Também, a propriedade da norma de que $\|-u\| = \|u\|$ implicará que "ângulos opostos pelo vértice tem mesma medida".

Com essas duas propriedades é possível resolver o seguinte exercício.

Exercício: Na geometria do plano munido de uma norma N que satisfaz a propriedade angular, provar que uma reta que passa pelo centro de uma "circunferência" qualquer, divide o plano em dois ângulos iguais, sendo, portanto, a medida de cada um igual a π_N.

Disso segue que podemos obter a seguinte propriedade surpreendente.

No caso de um espaço normado com a propriedade angular, vimos que é possível definir ângulo entre duas retas, logo, é possível também calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo, formado sempre por segmentos de reta.

O surpreendente que pode ser verificado, transladando cada ângulo α, β e γ do triângulo à origem, o que não altera sua medida em radianos, é que essa soma é sempre igual ao valor de π_N correspondente a essa norma! Isto é,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi_N.$$

Esse fato tem profundas consequências epistemológicas: será que a geometria subjacente a essa norma N é a euclidiana apesar de que o valor de π_N correspondente não seja o euclidiano?

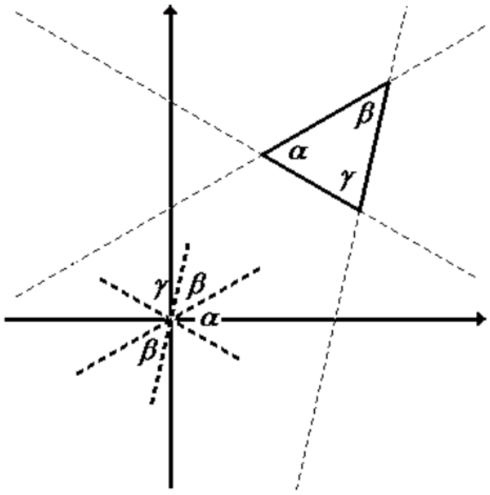


Fig. 11: Soma dos ângulos internos de um triângulo.
Fonte: autores

Esse exemplo, e muitos outros, mostra que as propriedades que estimulam a imaginação em geometria são as que dependem do conhecimento qualitativo dos conceitos e não de suas concretizações! A esse conhecimento temos acesso através da lógica, mas também, notoriamente, através da experiência matemática guiada pela intuição e potencializada com os recursos tecnológicos digitais modernos como os que a geometria dinâmica nos fornece.

8. Resultados que Afastam a Geometria de um Espaço Normado, com a Propriedade Angular, da Geometria Euclidiana: a face heurístico-experimental da geometria

Com técnicas de geometria dinâmica podem ser testados alguns resultados da geometria euclidiana usando diversas normas, reforçando a potencialidade dessa técnica para fazer “experimentos” e formular conjecturas em geometria.

A seguir, proporemos dois problemas que mostram que a geometria do plano com a *p*-norma, para diversos valores de *p*, é diferente da do caso euclidiano. Os problemas serão formulados para *p* arbitrário, mas resolvidos analiticamente para a norma soma, isto é, para *p* = 1, mostrando o caminho para *p* qualquer, o que pode ser testado com o recurso do GeoGebra.

Começaremos calculando o valor, em radianos, de um ângulo θ no primeiro quadrante do plano. Consideremos, então, a 1-circunferência de raio *r* centrada na origem *O* = (0 , 0) no plano cartesiano, e a semirreta que parte de *O* e corta a 1-circunferência no ponto *P* = (*x*, *y*) do primeiro quadrante. Chamemos de θ o ângulo *PÔQ*, onde *Q* = (*r* , 0). Então,

$$\theta = \frac{\|(x,y)-(r,0)\|_1}{r},$$

resultando $\theta = 2 - \frac{2x}{r}$ **,** em que *x* > 0, *y* > 0 e *x* + *y* = *r*.

Aparentemente o ângulo θ depende de *r* contradizendo a propriedade angular, no entanto, se calcularmos a declividade *m* do segmento *OP* obteremos que $\frac{x}{r} = \frac{1}{m+1}$, donde $\theta = 2 - \frac{2}{m+1} = \frac{2m}{m+1}$, dependendo só de *m*, isto é, do ângulo dado pela declividade da reta, e não do raio.

Esse argumento será usado várias vezes para resolver os problemas propostos a seguir exemplificando-os na 1-norma.

Problema *A*: Em geral, para diversos valores de *p*, dado um triângulo inscrito num "círculo" com um de seus lados um diâmetro dele, o ângulo no vértice oposto nem sempre é $\pi_p/2$ (o que sim é verdade no caso euclidiano *p* = 2). Qual a diferença desse valor para *p* qualquer?.

Vejamos o caso *p* = 1. Consideremos a 1-circunferência de centro *O* = (0 , 0) e raio *r* no plano cartesiano, e trazemos a semirreta que parte de *R* = (–*r* , 0) e corta essa 1-circunferência no ponto *P* = (*x* , *y*) no primeiro quadrante. Chamemos, ainda, de *Q* o ponto (*r* , 0), e consideremos o triângulo *RPQ*. Chamando de θ o ângulo no vértice *P*, α o ângulo no vértice *Q* e β o ângulo no vértice *R*, temos que $\theta + \alpha + \beta = \pi_1 = 4$, donde $\theta = 4 - (\alpha + \beta)$. Transladando os ângulos α e β à origem, facilmente podem ser calculados seus valores em radianos, resultando α = 1 e $\beta = 1 - \frac{x}{r}$, donde $\theta = 2 - \frac{x}{r} = \frac{\pi_1}{2} - \frac{x}{r}$. Observa-se que θ aproxima-se de $\frac{\pi_1}{2}$ quando *x* aproxima-se de zero.

A figura seguinte dá um contraexemplo para o problema A, feito por meio do GeoGebra, e é possível, nesse caso, variar o ponto $P = (x, y)$, obtendo diversos valores para o ângulo θ, o que mostra, a diferença com o valor de $\frac{\pi_1}{2} = 2$.

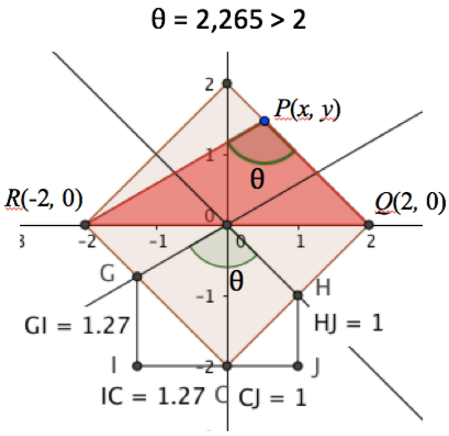


Fig. 12: Contra-exemplo para o problema *A* e para *r* = 2 na 1-norma.

Fonte: autores

Problema *B*: Também, para diversos valores de *p*, os ângulos na base de um triângulo isósceles nem sempre são iguais.

Vejamos novamente o caso *p* = 1. Consideremos a 1-circunferência com centro na origem e raio *r* e a semirreta que parte da origem e corta essa 1-circunferência no ponto *P* = (*x*, y) do primeiro quadrante. Consideremos o triângulo *POQ* onde *Q* é o ponto (*r*, 0). Como os segmentos *OP* e *OQ* são iguais na 1-norma, esse triângulo é isósceles. Chamando de α o ângulo em *Q*, β o ângulo em *P* e θ o ângulo em *O*, mostraremos que $\beta \neq \alpha$. Já vimos que $\alpha = 1$ e $\theta = 2 - \frac{2x}{r}$, logo, sabendo que $\alpha + \beta + \theta = \pi_1 = 4$, obtemos que $\beta = 1 + \frac{2x}{r} \geq \alpha$ e, portanto, $\beta > \alpha$ se $x > 0$.

Exercício: Fazer uma análise análoga com o GeoGebra, para o problema *B*, para $p = 1$.

Observação Final

Como pudemos apreciar, a matemática tem também uma face experimental e heurística, aqui potencializada pelos recursos da geometria dinâmica, que envolve raciocínios não dedutivos, mas indutivos, analógicos, informais, importantes para a pesquisa e descoberta em matemática.

Essa face deve ser enfatizada e incentivada no ensino em todos os níveis e, em especial, na "formação" do matemático e do professor de matemática para o aprimoramento de sua intuição e o despertar de sua imaginação.

A pesquisa aqui desenvolvida para o estudo da geometria do plano cartesiano munido de diferentes normas, pode ser realizada, também, numa fase avançada, para o estudo da geometria intrínseca de superfícies (ou, em geral, de variedades diferenciáveis), cujos planos tangentes (espaços tangentes), estejam munidos de uma norma não necessariamente proveniente de um produto interno.

As variedades diferenciáveis cujos espaços tangentes estão munidos de uma norma que não provém de um produto interno, são um caso das chamadas de *variedades de Finsler*, contrastando com as *variedades Riemannianas*, cujos espaços tangentes estão munidos de uma norma induzida por um produto interno.

Autores:
José Carlos Cifuentes
Doutor em Matemática; Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática; Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba/PR, Brasil. E-mail: jccifa@gmail.com.

Valdeni Soliani Franco
Doutor em Matemática; Universidade de São Paulo (São Carlos) – USP/São Carlos; professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática; Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá/PR, Brasil.
E-mail: vsfranco@gmail.com.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 29-40

Metáforas conceptuales de las relaciones lineales que manejan los estudiantes de economía

Claudia Margarida Acuña Soto, Elizabeth Hernández Arredondo,

Vicente Liern Carrión

Fecha de recepción: 07/02/2016
Fecha de aceptación: 15/05/2017

Resumen	El uso de relaciones lineales en el trabajo de los economistas permite modelar e interpretar fenómenos, al menos de manera aproximada, y esto resulta fundamental para la toma de decisiones. Comprobamos que la construcción de metáforas conceptuales posibilita la proyección del dominio de la economía al matemático, pero encontramos que el proceso inverso resulta difícil de recorrer sin construir nuevas metáforas conceptuales. **Palabras clave**: Relaciones lineales, economía, matrices y vectores, metáforas
Abstract	Economists' use of linear relations allows for the interpretation and creation of models based on phenomena, which can in turn be later used in decision making, in an approximate way at least. The construction of conceptual metaphors permits the projection of economy's dominion to the mathematician. We have found, however, that the process is difficult to be replicated the other way around without new conceptual metaphors. **Keywords**: Linear relationship, economics, matrix and vectors, metaphors.
Resumo	O uso de relações lineares no trabalho dos economistas permite modelar e interpretar os fenômenos, pelo menos de modo aproximado, o que é essencial para a tomada de decisões. Comprovamos que a construção de metáforas conceituais possibilita a projeção do domínio da economia ao matemático, mas descobrimos que o processo inverso é difícil de recorrer sem que se construa novas metáforas conceituais. **Palavras-chave**: Relações lineares, economia, matrizes e vetores, metáforas

1. Introducción

Desde el punto de vista de la construcción del conocimiento, la comprensión de un dominio conceptual en términos de otro (metáforas conceptuales) constituye una sólida estructura de apoyo para la investigación educativa. Estas metáforas forman una adecuada base epistemológica para el pensamiento, si consideramos que la actividad de la mente tiene raíces en la actividad del cuerpo, pero al mismo tiempo no son deterministas (Johnson, 1991), por lo que su uso no necesariamente llega a una conceptualización adecuada. Por esta razón, en nuestro trabajo estamos interesados en disipar algunas incógnitas asociadas a las metáforas conceptuales (Lakoff y Núñez, 2000) que subyacen al tratamiento e interpretación de los modelos lineales que se usan en economía, como son los vectores, las matrices y los sistemas de ecuaciones, para interpretarlos en contexto.

Lakoff y Núñez (2000) sugieren que la forma en que se construye el pensamiento matemático se basa en el hecho de que las ideas surgen de los procesos cognitivos y corporales de las personas. Además, según Jonhson (1991), para llegar a la conceptualización es necesario utilizar esquemas que derivan de las experiencias. Actualmente se usa el término esquema de imagen (Lakoff, 1990) para referirse a todo aquello que se relaciona con cierta idea general y especialmente matemática que lo engloba como un todo.

Aun aceptando los mecanismos cognitivos y corporales de los individuos como germen de las ideas, se requieren las llamadas metáforas conceptuales para lograr la culminación de la construcción del conocimiento. Es necesaria una proyección conceptual del esquema imagen entre dos dominios, uno de partida y uno de llegada (Acevedo y Font, 2004).

En esta investigación observamos las metáforas llamadas ontológicas como son: (1) La del contenedor, que aparece, por ejemplo, cuando los estudiantes organizan matrices con base en vectores y (2) La del camino, que surge cuando interpretan las fluctuaciones de un espacio generado en economía.

En la Figura 1 presentamos un esquema de la construcción de las metáforas conceptuales (Font y Acevedo, 2003) subyacentes a esta investigación y que vincula los aspectos relevantes con base en la construcción de las metáforas conceptuales.

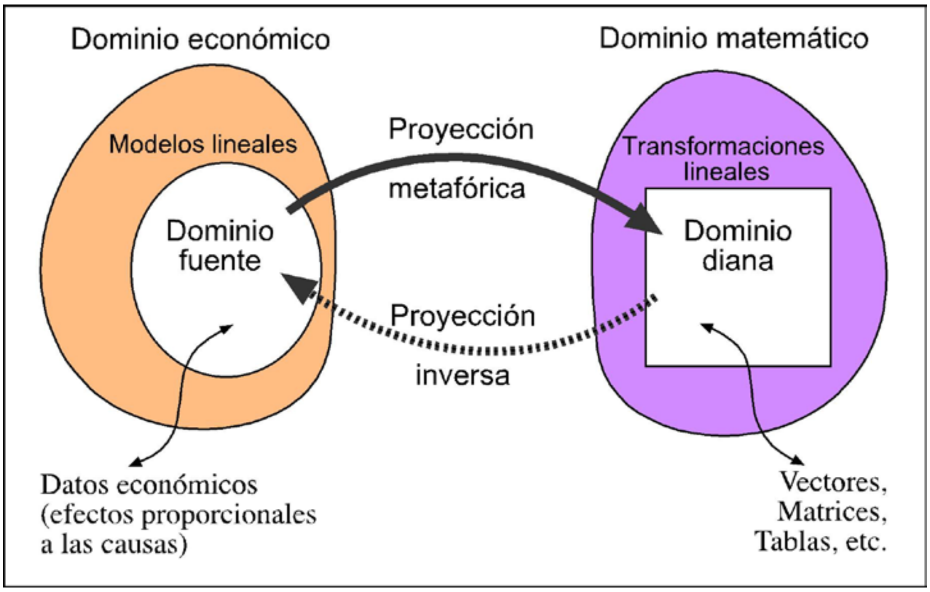


Figura 1. Esquema de la relación metafórica en funcionamiento.
Fuente: Elaboración propia.

En esta investigación nos centraremos en estudiantes de nuevo ingreso a los estudios de Grado en Economía, a quienes se les pide interpretar elementos que surgen de los modelos lineales en un dominio matemático, en un dominio económico o trasladándolos de un dominio a otro. Como se verá, al proyectar entre dominios es cuando surgen las mayores dificultades.

2. Punto de partida

El alumno que accede a titulaciones universitarias relacionadas con la Economía, la Empresa o las Ciencias de Gestión, normalmente ha cursado asignaturas de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, en las que se ha hecho hincapié en los problemas con sentido económico y en los que han tenido que modelar en distintas ocasiones. Sin embargo, la realidad con la que nos encontramos en los primeros cursos universitarios es que el paso del dominio económico al matemático, y viceversa, así como el proceso de formulación de los problemas, les resulta bastante complicado a nuestros estudiantes.

Como en este trabajo nos centramos en los modelos lineales, para fijar mejor nuestro punto de partida vamos a exponerlo a partir de un ejemplo: los sistemas de ecuaciones lineales. Normalmente el alumno resuelve sin dificultad estos sistemas, pero otra cuestión es que sea capaz de plantearlo (proyección metafórica), resolverlo (dominio diana), posteriormente de interpretar los resultados (proyección inversa) o de vislumbrar su enorme utilidad como una estructura capaz de expresar un equilibrio entre los dominios involucrados. Pese a ser el principio de la economía matemática, no siempre resulta fácil transmitir que:

> el concepto de equilibrio es fundamental en economía. Una situación de equilibrio es una situación estable u óptima, porque en ella la empresa opera con el menor coste posible, obtiene el máximo beneficio, la asignación de los recursos económicos es la mejor para la utilidad de un individuo, etc. Todas estas posibilidades tienen en común que se cuenta con varios fenómenos económicos que suceden simultáneamente y se debe determinar el punto o puntos en los que la situación es beneficiosa (Liern 2012, pp. 11).

Con el objetivo de entender la dificultad que provoca en los estudiantes el paso de un dominio a otro, planteamos un sistema de ecuaciones lineales que representa el equilibrio entre tres situaciones económicas, que se dan simultáneamente, pero del que no se conoce el origen de las circunstancias modeladas. Si recurrimos al esquema que aparece en la Figura 1, estamos partiendo de un objeto que se encuentra directamente en el dominio diana, dentro del dominio matemático. Aunque el sistema de ecuaciones no proporcione al estudiante información suficiente para que la *proyección inversa* sea unívoca, lo cierto es que hay varias posibilidades que debería ser capaz de descartar. Veámoslo más claramente con el ejemplo que aparece en la Tabla 1.

Enunciado	Objetivo y dominio
Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+2z=36 \\ 4x+2y+z=35 \\ 3x+3y+2z=40 \end{array}\right.$$ A) Calcula la solución del sistema x*, y*, z*. B) Razona si x*, y*, z* puede ser solución en alguno de los escenarios económicos siguientes: B.1 Precios de equilibrio en un mercado. B.2 Incremento de precios en un mercado. B.3 Producción de una empresa. B.4 Incremento en la producción de una empresa.	Obtener la solución de un sistema y asociar la solución a una situación económica. **Dominios:** Matemático → Económico.

B.5 Beneficios de una empresa. B.6 Incremento en los beneficios de una empresa.	

Tabla 1. Ejemplo de proyección desde el dominio matemático al económico.
Fuente: Elaboración propia.

Como la solución del sistema es x* = 4, y* = 10, z* = - 1, el alumno debería saber que ésta no puede representar ni precios de equilibrio ni producción, puesto que, en estos casos, los valores negativos no tienen sentido y sólo en circunstancias muy especiales y por un breve periodo de tiempo (campaña de promoción en la que hay un obsequio, remodelación parcial de la empresa, etc.) podrían tenerlo las soluciones nulas. Esto significa que la solución podría pertenecer a los escenarios B.2, B.4, B.5 y B.6, pero no a los restantes.

Quizás en el ejemplo anterior pudiese parecer que la elección de los escenarios resultaba muy obvia, pero un cambio en el enunciado puede modificar completamente la respuesta de algunos alumnos. Supongamos que el problema se planteaba en dos fases:

Enunciado	Objetivo y dominio
Fase 1: Consideramos el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $(A) = \begin{cases} 2x+3y+2z = 35 \\ 4x+2y+z = 35 \\ 3x+3y+2z = 40 \end{cases}$ Resuelve el sistema. **Fase 2:** Tras un periodo de tiempo, se comprueba que la primera ecuación de (A) debería ser 2x+3y+2z=36, en lugar de la que aparece en el sistema. Calcula la solución x*, y*, z* del nuevo sistema: $(B) = \begin{cases} 2x+3y+2z = 36 \\ 4x+2y+z = 35 \\ 3x+3y+2z = 40 \end{cases}$ Razona si x*, y*, z* es solución válida en alguno de los escenarios económicos siguientes: B.1 Precios de equilibrio en un mercado. B.2 Incremento de precios en un mercado. B.3 Producción de una empresa. B.4 Incremento en la producción de una empresa. B.5 Beneficios de una empresa. B.6 Incremento en los beneficios de una empresa.	Obtener la solución de un sistema y asociar la solución a una situación económica. **Dominios:** Matemático → Económico.

Tabla 2. Modificación de un ejemplo de proyección desde el dominio matemático al económico.
Fuente: Elaboración propia.

El sistema (A) de la Tabla 2 tiene como soluciones x = y = z = 5, mientras que las soluciones de (B) ya hemos visto en el ejemplo de la Tabla 1 que son x = 4, y = 10, z = - 1. Por supuesto, la respuesta debería ser la misma que en el ejemplo anterior. Sin embargo, la metáfora del camino que viene inducida por "*Tras un periodo, se comprueba que la primera ecuación debería…*" hace que algunos alumnos tengan dificultades para ver que (A) y (B) son dos sistemas distintos y erróneamente relacionan las soluciones cuando ven que alguna de ellas presenta resultados inesperados. Así, algunos alumnos argumentan ideas equivocadas como que la solución es la suma de las dos, es decir x=5+4=9, y=5+10=15, z=5-1=4, con lo cual las soluciones de (B) servirían para cualquiera de los escenarios presentados.

Por otra parte, creemos conveniente aclarar que todos los estudiantes han recibido instrucción sobre planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices, y los vectores se les han presentado como filas o columnas de una matriz. Precisamente esta última circunstancia desarrolla de forma implícita una *metáfora del contenedor* (Font, Acevedo, 2003; Saslaw, 1996) al concebir, metafóricamente hablando, a las matrices como *estanterías* cuyas filas o columnas están formadas por vectores. Como veremos más adelante, con estas estrategias, no resulta inmediato poder desprenderse de la asociación con el contenedor para utilizar o interpretar parte de sus elementos, en este caso los vectores (ver Figura 2).

Es significativo que, al menos desde los años ochenta, los manuales cásicos de Matemáticas para la Economía, como puede ser *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (Chiang, 1984), viesen la necesidad de introducir al alumno a la interpretación económica de cada "parte" del “contenedor” que son las matrices (en la Figura 3 puede verse un ejemplo de esto). Se trata de facilitarles la labor, tender un puente para recuperar el significado de cada porción de contenedor, o lo que D. Kahneman denomina: potenciar la *heurística de la disponibilidad* (Kahneman, 2012), aspectos cuyo dominio compete a la interpretación y no a los procedimientos matemáticos asociados.

124 STATIC (OR EQUILIBRIUM) ANALYSIS

4 Given the input matrix and the final-demand vector

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

(*a*) Explain the economic meaning of the elements 0.33, 0, and 200.
(*b*) Explain the economic meaning (if any) of the third-column sum.
(*c*) Explain the economic meaning (if any) of the third-row sum.
(*d*) Write out the specific input-output matrix equation for this model.

5 Find the solution output levels of the three industries in the preceding problem by Cramer's rule. (Round off answers to two decimal places.)

Figura 2. Ejemplo de interpretación de los elementos contenidos en una matriz.
Fuente: Fragmento de la página 124 de Chiang (1984).

Conscientes de la dificultad que supone para nuestros alumnos transitar de un dominio a otro y de la relación entre el enunciado y la resolución exitosa de este, nos hemos planteado realizar un experimento que nos permita extraer conclusiones acerca de las metáforas cognitivas que utilizan nuestros estudiantes. Además, intentaremos que el estudio nos proporcione información de cuándo las metáforas resultan beneficiosas o cuándo producen un “efecto ancla” (Kahneman, 2012) del que el alumno no está en capacidad de desprenderse.

3. Puesta en marcha

Hemos llevado a cabo un estudio con 147 estudiantes de primer semestre de Grado en Economía de la Universidad de Oviedo (UO) y de la Universitat de València (UV). Sus edades están entre 18 y 19 años y reciben las clases en distintas lenguas: 44 en español, 38 en inglés y 65 en valenciano. Consideraremos que los alumnos forman una sola población porque, una vez efectuado un contraste de igualdad de medias de las respuestas correctas realizadas por estudiantes de la UO y de la UV, no presentan una diferencia significativa entre ellas para un nivel de significación alto ($\alpha = 0.05$).

Para lograr nuestros objetivos, centraremos nuestro análisis en dos cuestiones:

a) Identificar las dificultades de los estudiantes en la resolución y/o interpretación de los problemas.

b) Reconocer la forma en la que fueron usadas las metáforas y analizar sus aplicaciones a la matemática y a la economía.

Los estudiantes contestaron a un cuestionario, basado en propuestas como las hechas en Liern (2013) en donde se presentaban situaciones de la vida cotidiana que les eran matematicamente accesibles y de interés. Este consistió en siete problemas que resolvieron en setenta minutos y que aparecen expresados en las tablas siguientes. Con el objeto de detectar las metáforas conceptuales en economía, en primer lugar usamos problemas que manejan un solo dominio (Tabla 2) y después otros que requieren el paso de un dominio a otro (Tabla 3). Los datos que manejaremos se extrajeron de las respuestas al cuestionario y de las notas de campo de la sesión de trabajo.

Enunciado	Objetivo y dominio
PROBLEMA 1. De las siguientes ecuaciones lineales, marca con una ***X*** las que sean homogéneas: $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ $\quad x - y = (\text{sen } 4)\, z$ $\quad 2x+3y-z=5$	Identificar un sistema de ecuaciones homogéneas. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 2. Escribe un sistema lineal partiendo de la matriz aumentada $B=\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$. Comprueba que $x_1= -10$, $x_2= 3$, $x_3= 4$ es una solución particular del sistema anterior.	Transformar una matriz aumentada en un sistema de ecuaciones lineales. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 4. Calcula ½ v_1-3v_2 con los vectores $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.	Determinar una combinación lineal de dos vectores. **Dominio matemático**.
PROBLEMA 5. Escribe el sistema $\begin{cases} x-5y=1 \\ -x+6y=3 \end{cases}$ como una ecuación vectorial y como un sistema matricial. Una vez se tienen los valores de *x* e *y* que son la solución del sistema, explica qué representan en los casos: a) Ecuación vectorial b) Sistema matricial.	Transformar un sistema de ecuaciones lineales en una ecuación vectorial y en una ecuación matricial. **Dominio matemático**.

Tabla 3. Problemas del cuestionario que pertenecen al dominio matemático.
Fuente: Elaboración propia.

Enunciado	Objetivo y dominio
PROBLEMA 3. Consideramos una economía con tres sectores: 1) combustibles y energía, 2) manufactura y 3) servicios. Combustibles y energía venden el 80% de su producción a manufactura, el 10% a servicios, y retiene el resto. Manufactura vende el 10% de su	Construir una tabla de intercambio, transformarla

producción a combustibles y energía, el 80% a servicios, y conserva lo restante. Servicios vende un 20% a combustible y energía, el 40% a manufactura, y retiene el resto.

3.1 Escribe el sistema de ecuaciones con el que se obtendrían los precios de equilibrio en ese mercado.

3.2 Construye una tabla de intercambio para esta economía.

3.3 Plantea un sistema de ecuaciones para determinar los precios que igualan los ingresos y gastos de cada sector.

3.4 Encuentra los precios de equilibrio cuando el precio para la producción de servicios es de 100 unidades.

3.5 ¿Cuántos sectores están involucrados en la solución?

en un sistema de ecuaciones y calcular la solución.

Dominios: Económico → Matemático.

PROBLEMA 6. Una empresa fabrica dos productos. Para obtener \$1.00 del producto B, la empresa gasta \$0.45 en materiales, \$0.25 en mano de obra y \$0.15 por concepto de costos indirectos. Para obtener \$1.00 del producto C, la empresa gasta \$0.40 en materiales, \$0.30 en mano de obra y \$0.15 en costos indirectos. Consideramos

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0.45\\0.25\\0.15\end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0.40\\0.30\\0.15\end{bmatrix},$$

es decir, que **b** y **c** representan los "costes por dólar de ingreso" para los dos productos.

6.1 ¿Qué interpretación económica puede darse al vector 100**b**?

6.2 Construye una tabla de intercambio para esta economía.

6.3 Plantea un sistema de ecuaciones para determinar los precios que igualen los ingresos y gastos de cada sector.

6.4 Encuentra los precios de equilibrio cuando el precio para la producción de servicios es de 100 unidades.

Aplicar operaciones vectoriales en Economía.

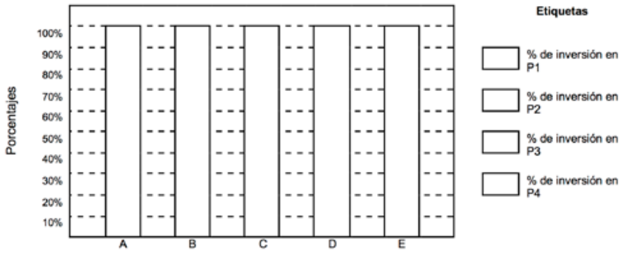
Dominios: Económico → Matemático → Económico.

PROBLEMA 7. Un banco gestiona 5 carteras A, B, C, D y E, cuyo capital se distribuye en cuatro compañías P1, P2, P3 y P4 en la proporción que se indica en la tabla siguiente:

Compañías	Carteras				
	A	B	C	D	E
P1	0.2	0.3	0.25	0.3	0
P2	0	0.5	0.25	0.3	0.2
P3	0.2	0.1	0.25	0.1	0.5
P4	0.6	0.1	0.25	0.3	0.3

7.1 El banco desea ampliar el capital de sus carteras. Expresa el conjunto de todas las posibilidades que tiene el banco sin que se creen excedentes de capital.

7.2 Con la tabla anterior elabora un gráfico de barras que represente los vectores de las carteras.



7.3 Explica la relación que crees que existe entre las dos representaciones de un vector propuestas en los puntos 7.1 y 7.2.

Explorar representaciones de un espacio generado en Economía.

Dominios: Económico → Matemático → Económico.

Tabla 4. Problemas del cuestionario que requieren el paso de un dominio a otro.
Fuente: Elaboración propia.

4. Identificación de errores

Los porcentajes de estudiantes que contestaron a cada problema y de aciertos respecto del total se presentan en la Figura 3. Como puede apreciarse, la mayoría de alumnos tuvieron dificultades con los problemas 3, 6 y 7 que contienen una aplicación de los vectores en Economía (menos de un 20% responden a estas preguntas). Responderlas bien implicaba, por un lado, interpretar las relaciones matemáticas y los eventos específicos a tratar, pero además, el éxito dependía de que fuesen capaces de establecer adecuadamente las proyecciones del domino económico al matemático y viceversa.

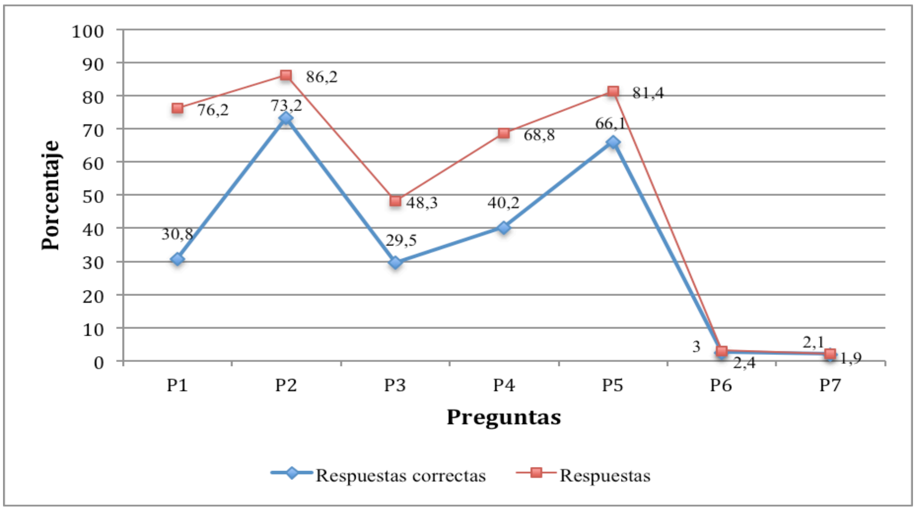


Figura 3. Porcentajes (respecto del total) de respuestas y de aciertos a las preguntas planteadas. Fuente: Elaboración propia.

En el resto de preguntas, en las que se piden operaciones conocidas o en los que la relación economía-matemáticas es más clara (porque la proyección de un dominio a otro no es necesaria o porque la proporciona el propio problema), los estudiantes recurren, sin demasiada dificultad, a diversas estrategias (ver Figura 4), como son los diagramas, las tablas o la formalización algebraica.

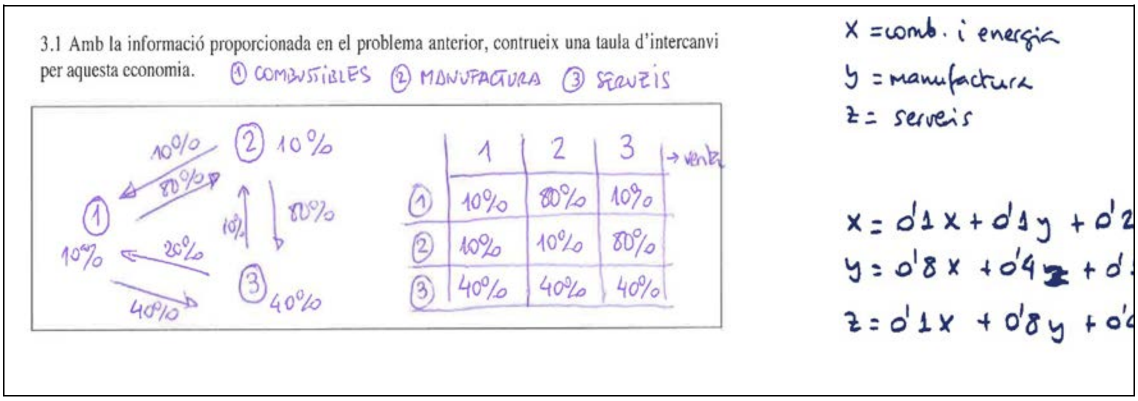


Figura 4. Ejemplos de algunas estrategias empleadas. Fuente: Respuestas al cuestionario.

Son de destacar algunos errores de procedimiento que se deben, generalmente a aspectos formales, de cálculo o de interpretación matemática (como puede verse en el ejemplo de la Figura 5) y en los que los mecanismos de visualización incorrecta de las matemáticas (Acuña, 2012) juega un papel importante.

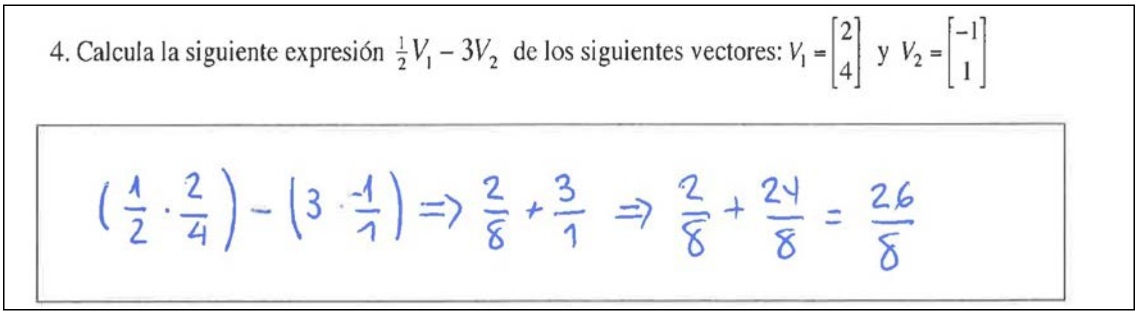


Figura 5. Ejemplo de un error por la disposición vertical de los vectores.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

En la Tabla 5 presentamos un resumen de las clases de errores que aparecen en las soluciones y de los porcentajes sobre el total de los que los cometen. Los hemos agrupado en cinco tipos (desconocimiento, procedimentales, interpretativos, de estrategia y de sintaxis) y hemos calculado los porcentajes de cada uno de ellos respecto del total de estudiantes que han participado en la experiencia.

Tipo de error	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Desconocimiento del concepto	23.8	21.7	63.2	32.4	23.2	94.1	95.2
Procedimentales	12.1	7.5	2.8	21.2	15.2	1.2	1.1
Interpretativos	19.2	7.8	9.2	11.2	7.5	1.1	2.1
Elección de estrategia inadecuada	2.5	2.1	2.1	1.5	6.9	1.2	1.3
Confusión de la sintaxis	3.2	1.9	9.1	4.2	8.9	1.3	1.1

Tabla 5. Porcentaje de errores clasificados por tipos en cada pregunta.

Observamos que los porcentajes de error más grandes se refieren al desconocimiento de los conceptos, pero detectamos un importante problema de interpretación (relación vector-matriz-vector) y de procedimiento. El primero de ellos, que podría relacionarse con la construcción de la metáfora, es lo que se advierte en Chiang (1984) cuando propone recuperar la interpretación de cada elemento de una matriz (ver Figura 2). En cuanto a las deficiencias procedimentales, sin particularizar a cada estudiante, resulta más difícil saber si están relacionadas con la construcción de la metáfora.

5. Uso de metáforas

Para analizar las metáforas presentes en la solución de los problemas planteados, así como en el uso de los recursos operativos y de procedimiento, las hemos clasificado en dos grupos, de acuerdo a la imagen de esquema que usan: la metáfora del camino y la metáfora del contenedor, que antes hemos mencionado.

La metáfora del camino aparece en las respuestas a los problemas 3, 6 y 7, en los que tratan de dar sentido al contexto económico del problema. Aquí el esquema imagen presente es el del recorrido que da la experiencia sensorio-motriz conocida (véase Figura 6).

El vector 1006 representa la trajectoria dels costos per 100 $ d'ingrès per al producte 6.

Figura 6. Ejemplo de expresión que alude a un camino usada por los estudiantes.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

En cuanto a la metáfora del contenedor, que alude a elementos y propiedades que forman un contenedor, se encuentra presente en la mayoría de soluciones a los problemas (ver Figura 7).

$$\text{Tot. cost} = \begin{bmatrix} 0{,}45x_1 + 0{,}40x_2 \\ 0{,}25x_1 + 0{,}30x_2 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}15x_2 \end{bmatrix} = x_1(0{,}45;\ 0{,}25;\ 0{,}15) + x_2(0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}15)$$

Figura 7. Una de las expresiones que aluden a un contenedor.
Fuente: Respuestas al cuestionario.

La proyección metafórica que ha permitido ver la matriz como un "contenedor" de la información, ha facilitado la relación economía-matemáticas, pero ha dificultado el análisis de las partes. Con los datos de nuestros cuestionarios, sólo alrededor del 4% utilizó adecuadamente la proyección inversa (ver Figura 1) para descifrar el significado económico de cada elemento de la solución matemática.

Encontramos que sólo con el conocimiento y los procedimientos cuantitativos sobre los modelos lineales los estudiantes no pueden hacer uso de las metáforas conceptuales mencionadas, aquellas que les permitirían separar y recomponer los a vectores en función de la interpretación económica. En ese caso se deben apoyar en las definiciones de los componentes matemáticos usados, esto es, recuperar las partes una vez conformado el todo, lo que los lleva a considerar la relación sintáctica de los signos expresados algebraicamente.

Revisando la construcción de las metáforas en ambos sentidos, observamos que interpretar las matrices como un todo y como la unión de las partes se relaciona también con el proceso de visualización (Acuña, 2012) que requiere tanto de los significados asociados (definición, operaciones, datos entre otros), como del aspecto que los vectores y matrices presentan, lo que crea dos relaciones identificadas pictóricamente: vectores de datos-matriz y matriz transformada-vectores transformados en cuyo caso, ambas debían ser interpretadas metafóricamente de forma equivalente. En nuestra opinión, para aumentar las posibilidades de éxito no sólo debemos observar la proyección metafórica, sino las relaciones sintácticas y espaciales que estructuran los elementos mencionados.

6. Discusión

Los estudiantes presentan dificultades para manejar relaciones lineales que se plasman en el desconocimiento de algunos conceptos o de la incapacidad para interpretar un vector como parte de una matriz. Esencialmente, esto se debe a la incertidumbre sobre los efectos de las transformaciones lineales sobre las matrices y sobre cada vector, lo que descontextualiza la información y ya no responde al tipo de información original, dificultando el uso de la metáfora del contenedor de manera inversa, puesto que no la reconocen.

El papel de las metáforas usadas depende mucho de factores de interpretación, ya que pese a estar disponibles y activadas, los estudiantes, en general, no supieron hacer uso de ellas para inferir la información y apoyarse en una para llegar a la otra. A este fenómeno hay que añadir la ambigüedad subyacente a la nomenclatura. Por ejemplo, el hecho de que tanto los puntos como los vectores se designen como una secuencia ordenada de n elementos, reduce las posibilidades de manejar bien los conceptos si no se hace hincapié en la contextualización.

Por último, queremos destacar la necesidad de que el docente sea capaz de transmitir un equilibrio entre el uso de las metáforas, el formalismo y la visualización de los objetos, tanto matemáticos como económicos que, aun siendo transformados, continúan dando información contextualizada. Somos conscientes de la dificultad que entraña conseguir esta armonía, pero creemos que el esfuerzo vale la pena e implica abordar un diseño de actividades que incorpore todos estos elementos.

Bibliografía

Acevedo, J. I.; Font, V. (2004). *Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* [en línea]. Recuperado el 23 de julio de 2015 de http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/48279/01120112000091.pdf?sequence=1

Acuña Soto, C. M. (2012): *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*, Gedisa, S. A., Barcelona. España.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education,* Taylor & Francis, New York. USA.

Chiang, A. C. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics (Third Edition),* McGraw-Hill, New York. USA.

Font, V.; Acevedo, J. I. (2003). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 405-418.

Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Debate, Madrid. España.

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio.* Ediciones Debolsillo, Barcelona. España.

Lakoff, G. (1990). *The Invariance Hypothesis: is abstract reason based on image-schemas?*, *Cognitive Linguistics*, 1(1), 39-74.

Lakoff, G. (1993). *The contemporary theory of metaphor.* En *Metaphor and Thought* (202-251)*,* Ed. A. Ortony, Cambridge University Press, Cambridge. Reino Unido.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). Metáforas de la vida cotidiana, Ediciones Cátedra, Madrid. España.

Lakoff, G.; Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*, Basic Books, New York. USA.

Liern, V. (2012). Matemáticas y economía. Ventajas de la cooperación. Manual del XIII Día Escolar de las Matemáticas. Recuperado el 23 de julio de 2015 de www.fespm.es/IMG/pdf/dem2012_-_matematicas_y_economia_ventajas_de_la_cooperacion.pdf.

Liern, V (2013). *¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía?. Revista Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 62, 11-20.

Saslaw, J. (1996). *Forces, containers and Paths: the role of the body derived image schematas in the conceptualization of Music. Journal of Music Theory* 40(2), 217-243.

Acuña Soto, Claudia Margarita. Es Doctora en Ciencias Pedagógicas del Instituto Superior E.J. Varona de la Habana Cuba, Maestro en Ciencias en Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN, México y Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México, Miembro del Sistema Nacional de Investigadores y Profesor Titular de Matemática Educativa del Cinvestav, México. claudiamargarita_as@hotmail.com

Hernández Arredondo, Elizabeth. Es Licenciada en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, México; Maestra en Ciencia y estudiante de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Cinvestav-IPN, México. eli_visual@hotmail.com

Liern Carrión, Vicente. Es licenciado en Matemáticas y doctor en Física Teórica por la Universitat de València (España), catedrático de Economía Financiera y Académico numerario de la Royal European Academy of Doctors y de la Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras. Fue coordinador de la sección *Musymáticas* de la revista SUMA y es editor de las revistas Rect@ y Anales de ASEPUMA. vicente.liern@uv.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 41-61

Ensino e Aprendizagem de Gráficos e Tabelas nos anos iniciais de Escolarização

Rúbia Juliana Gomes Fernandes, Guataçara dos Santos Junior, Rudolph dos Santos Gomes Pereira

Fecha de recepción: 07/02/2016
Fecha de aceptación: 15/05/2017

Resumen	El objetivo de este estudio es analizar las contribuciones de una secuencia de enseñanza (SE) para la enseñanza y el aprendizaje de proceso de gráficos y tablas a los primeros años de escolarización. Con el fin de alcanzar el objetivo planteado, se desarrolló una encuesta en estudiantes de 5º clase de la escuela primaria del año de una escuela de la Red Municipal de la ciudad de Curitiba, estado de Paraná, Brasil. La metodología utilizada en la investigación se aplica, descriptivo y los resultados fueron analizados en perspectiva cualitativa. SE de los resultados fueron positivos, se puede observar un progreso significativo, como la adquisición y desarrollo de contenidos, el conocimiento y el conocimiento estadístico **Palabras clave:** Educación Estadística; La enseñanza de la estadística; secuencia de enseñanza (SE).
Abstract	The objective of this work is to analyze the contributions of a Sequence of Teaching (SE) to the process of teaching and learning of charts and tables for the initial years of schooling. In order to reach the objective presented, a research was developed in a class of students of the 5th Year of Elementary School of a school of the Municipal Network of the city of Curitiba, state of Paraná-Brazil. The methodology used in the research is applied, descriptive and the results were analyzed in the qualitative perspective. The results of the SE were positive, significant progress can be seen in the acquisition and development of the contents, knowledge and statistical knowledge. **Keywords:**Statistical Education; Teaching Statistics; Sequence of Teaching (SE)
Resumo	O objetivo deste trabalho é analisar as contribuições de uma Sequência de Ensino (SE) para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas para os anos iniciais de escolarização. Com o intuito de atingir o objetivo apresentado, foi desenvolvida uma pesquisa numa turma de alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal da cidade de Curitiba, estado do Paraná-Brasil. A metodologia utilizada na pesquisa é aplicada, descritiva e os resultados foram analisados na perspectiva qualitativa. Os resultados da SE foram positivos, pode-se constatar avanços significativos quanto à aquisição e desenvolvimento dos conteúdos, conhecimentos e saberes estatísticos. **Palavras-chave:** Educação Estatística; Ensino de Estatística; Sequência de Ensino (SE).

1. Introdução

Nas últimas décadas, a Educação Estatística expandiu-se, deixando de ser um campo de estudos utilizado somente por especialistas e técnicos e que se restringia a universidades e centros de pesquisas. Ampliou-se gradativamente para um movimento muito mais abrangente, perpassando desde o Ensino Fundamental, Médio e Superior até a capacitação de pesquisadores e profissionais de áreas diversas do conhecimento (CAZORLA, 2005).

Frente as exigências do mundo contemporâneo é notória a necessidade de ensinar Estatística a um número cada vez maior de pessoas. Em consequência desse fato, nas últimas cinco décadas, grande parte dos países agrega os conteúdos estatísticos às suas estruturas curriculares, nos programas de matemática.

Cabe ressaltar o levantamento feito pelo International Statistical Institute (ISI) em 1986, em diversos países, no qual houve insatisfação generalizada dos países, no que tange o ensino da Estatística, e em especial, nas instituições escolares dos anos iniciais onde o seu ensino foi praticamente ignorado.

Corrobora-se com a ideia apresentada, ao refletir a afirmação de Lopes (2010, p.4), de que tais fatos vêm sendo apontados e denunciados sistematicamente pelos pesquisadores da área, "principalmente nas últimas duas décadas, no entanto, parece ainda não efetivar-se em propostas concretas que transformem - se em aprendizado para os estudantes do longo da sua escolaridade".

Nesse sentido, no Brasil, após a década de 1990, vários estudiosos e pesquisadores estatísticos começaram a dispensar maior atenção e cuidado com o ensino de Estatística, buscando significar socialmente tal conhecimento (ARAÚJO, 2008). Esses podem "configurar-se como elemento crucial dentro do contexto escolar, visto que sua importância extrapola a mera reprodução sistemática curricular e vai além da sala de aula, gerando reflexões sobre situações cotidianas" (Fernandes; Santos Junior, 2013, p.246).

É crescente a importância atribuída à Educação Estatística na formação de qualquer cidadão, haja vista que todos estão expostos às diversas informações estatísticas cotidianamente veiculadas pelos diferentes meios de comunicação. E, com isso, estas informações podem ser determinantes e influenciar os processos de tomada de decisão que, por vezes, em virtude da falta de conhecimento científico da área, são aceitas como verdades sem nenhum filtro ou análise reflexiva, deixando os sujeitos vulneráveis a interpretações e julgamentos que nem sempre correspondem à realidade dos fatos.

Considerando-se que a Educação Estatística é uma área do conhecimento que busca estudar a melhor forma de ensinar e aprender Estatística, além de beneficiar e colaborar com o desenvolvimento do letramento estatístico, saber imprescindível no mundo contemporâneo. Nessa linha de pensamento, Cazorla (2002, p.17) reflete que a Educação Estatística é uma área de pesquisa, cuja intenção é o estudo dos fatores que interferem direta e indiretamente no "processo ensino-aprendizagem de Estatística. [...] Para tal, busca-se o desenvolvimento das habilidades de solução para problemas e análises de dados, possibilitando o desenvolvimento do pensamento estatístico".

Portanto, o objetivo deste trabalho é analisar as contribuições de uma Sequência de Ensino (SE) para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas para os anos iniciais de escolarização.

2. Interpretação e leitura de tabelas e gráficos

A preocupação com relação à Educação Estatística no que concerne à "leitura, interpretação e compreensão de gráficos e tabelas, estão crescendo significativamente, uma vez que as pessoas se confrontam com inúmeras situações que exigem essas habilidades, conhecimentos e saberes" (Fernandes e Santos Junior, 2014, p.41). Por compreender que esses elementos são fundamentais para a representação dos dados de um conjunto, os gráficos e tabelas têm como finalidade esclarecer, organizar e sintetizar as informações e dados quantitativos advindos dos diversos meios de comunicação, sendo, assim, um "meio para se comunicar e classificar dados" (CURCIO,1989, p.1). Complementando essa ideia, Monteiro e Selva (2001) indicam que os gráficos são uma ferramenta cultural que permite ao sujeito expandir a sua capacidade de entender e explorar as informações estatísticas estabelecendo relações entre os distintos tipos de informação.

Quanto às tabelas, Duval (2002), em sua análise, pontua a contribuição cognitiva das tabelas e seus diversos usos e considera essencial diferenciar dois importantes aspectos: a própria organização representacional, ou seja, a composição semiótica das tabelas, e as funções cognitivas a que elas se prestam. Nesse sentido, designa-se em geral por tabela qualquer disposição em linhas e colunas. "Essa organização apresenta uma dupla vantagem, pois distribui os dados de acordo com o cruzamento de linhas e colunas, separando-os visualmente" (Araújo e Flores, 2010, p.4). Contudo, para Duval (2002), isso não basta para descrever o funcionamento representativo das tabelas, fazendo-se imprescindível discernir as particularidades das tabelas em relação às demais representações gráficas.

O referido autor destaca que as tabelas não servem exclusivamente para fins de consultas rápidas ou questões desse gênero, mas podem também expressar características com relação à classificação ou variação, determinando, com isso, uma leitura global da tabela exigindo compreensão plena, e não simplesmente uma leitura estanque e pontual. Portanto, conduz o sujeito a ultrapassar "um passo pontual para um passo de interpretação global na leitura dos dados" (Araújo e Flores, 2010, p.4).

Assim, entende-se como essencial refletir que o aluno só terá condições de realizar uma leitura global compreensiva das estruturas tabulares quando o professor utilizar-se de encaminhamentos pedagógicos adequados à questão, atuando como colaborador nesse processo. A esse respeito, cabe apresentar os elementos importantes indicados por Crespo (2005) para a construção de uma tabela, elementos esses que ratificam os pressupostos de (Araujo e Flores, 2010).

> Corpo: conjunto de linhas e colunas que contém informações sobre a variável em estudo; Cabeçalho: parte superior da tabela que especifica o conteúdo de cada coluna; Coluna indicadora: parte da tabela que específica o conteúdo das colunas;Linhas: retas

> imaginárias que facilitam a leitura, no sentido horizontal de dados que se inscrevem em seus cruzamentos com as colunas;
> Casa ou célula: espaço destinado a um só número; Título: conjunto de informações, as mais completas possíveis, e que possa responder as perguntas: O quê? Quando? Onde? Deve estar localizado no topo da tabela e é de suma importância, pois se não colocarmos os leitores não saberão sobre o que está falando a tabela. (CRESPO, 1999, p.25)

As tabelas podem ser simples ou de dupla entrada. A simples organiza seus dados estabelecendo relação entre eles e uma determinada característica, enquanto que a de dupla entrada organiza os dados que apresentam mais de uma característica e, com isso, duas ordens de classificação uma na horizontal (linha) e outra na vertical (coluna).

Com relação aos gráficos, observa-se que são constantemente utilizados para diversos fins e em variados contextos sociais, como forma de comunicação no cotidiano das pessoas. Assim, acredita-se que os professores possam entender como natural que os alunos tenham condições de ler, interpretar e compreender a linguagem gráfica, mesmo antes do contato formal com ela nos ambientes escolares. Todavia, tal fato não necessariamente implica que eles realmente saibam o que é uma estrutura gráfica, seu significado e a relevância na sociedade contemporânea (CARVALHO, 2009).

Desta forma, e considerando que a sociedade contemporânea utiliza cada vez mais os gráficos, tabelas e dados estatísticos, torna-se fundamental que os alunos venham a desenvolver competências para que tenham condições de interpretá-los e compreendê-los. Apresentam-se três níveis de leitura e compreensão, definidos por Curcio (1989, p.25), com relação aos gráficos e tabelas:

> Nível 1: Ler os dados: Neste nível foi considerada apenas a leitura direta de um gráfico sem qualquer interpretação, atendendo apenas a factos representados explicitamente; Nível 2: Ler entre os dados: Este nível já requer a comparação, o conhecimento de conceitos e habilidades matemáticas, que já permitem identificar relações [..] fazendo inferências simples; Nível 3: Ler além dos dados: Este nível exige uma ampliação dos conceitos, a predição, a inferência [..] ou previsões com base numa interpretação dos dados.

Compreende-se que o primeiro nível, ou seja, a leitura dos dados, não exige do indivíduo um alto nível de entendimento cognitivo, pois ele necessita somente ler e retirar as informações contidas na representação. Para efetivar a leitura entre os dados, é preciso que o indivíduo faça a comparação dos valores expressos pelas variáveis, situação que requer um desenvolvimento cognitivo superior com relação ao contexto inicial, a leitura dos dados. Ao realizar a leitura além dos dados, o indivíduo necessita obrigatoriamente possuir o domínio dos contextos anteriores, ou seja, requer maior desempenho e agilidade cognitiva, para então ter recursos a fim de realizar inferências sobre os dados.

Portanto, entende-se que os principais entraves, com vistas à leitura e interpretação gráfica, apresentam-se no segundo e terceiro níveis de compreensão. Há estudos de cunho teórico como, por exemplo, o de Medici (2007), Vasconcelos

(2007) e Pagan (2010), que perceberam que os alunos exibem indicativos de crescentes dificuldades nas questões do primeiro para o terceiro nível.

3. Encaminhamentos e Procedimentos metodológicos

Os sujeitos da pesquisa foram 35 alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, na faixa etária de 9 a 11 anos de idade, numa escola da Rede Municipal da cidade de Curitiba, estado do Paraná - Brasil. Esta pesquisa se caracteriza por aplicada, descritiva e os resultados foram analisados na perspectiva qualitativa. Sendo necessárias três etapas para o seu desenvolvimento e aplicação (pré-teste, aplicação da SE e pós-teste), distribuindo-se da seguinte forma:

1º Momento: Aplicação do pré-teste

Aplicou-se para os alunos um instrumento diagnóstico denominado de pré-teste, que tinha como intuito central averiguar quais as habilidades, competências e conhecimentos relativos aos conteúdos básicos de Estatística, para tanto apresentam-se 4 questões que contemplaram à leitura e interpretação de gráficos e tabelas.

As questões elencadas são advindas das Avaliações da Secretaria da Municipal de Educação (SME) e Jornada de Resolução de Problemas de Matemática da Rede Municipal de Educação de Curitiba (JRPM) e questões adaptadas de um livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para esse momento utilizou-se 1 aula de 50 minutos. Tais questões podem ser observadas, por meio das análises e discussões de resultados nos Quadros 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 e 8.

2º Momento: Explorando em sala de aula a Sequência de Ensino (SE)

Para realização da pesquisa aplicou-se uma sequência de atividades dirigidas, objetivando-se sistematizar o ensino de Estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A aplicação dessas atividades foi organizada em seis aulas de cinquenta minutos cada, divididas em cinco encontros, na disciplina de Matemática. A seguir apresentam-se os objetivos para cada encontro, bem como o formato da sua estruturacão:

- 1º Encontro: Delineamento da temática coletiva
- 2º e 3º Encontro: Coleta, análise e sistematização dos dados
- 4º e 5º Encontro: Representação dos dados

Primeiro Encontro: Delineamento da temática coletiva

Para começar a sistematização didática optou-se em realizar uma roda de conversa para que os alunos tivessem a possibilidade de elencar temáticas coletivas, que a turma entende-se como interessante. Os alunos se organizaram em grupos para pensar e discutir alguns assuntos que gostariam de apresentar, analisar e estudar, sob a ótica dos conhecimentos estatísticos, para posterior sistematização em sala de aula.

Nesse momento, alguns itens sugeridos pelos alunos e pesquisadores foram apresentados como: esportes, brincadeiras preferidas, jogos eletrônicos e tabuleiros, utilização de redes sociais, disciplina predileta, entre outras. A partir do diálogo coletivo, a opção da turma foi por brincadeiras. Desse modo, entende-se favorecer o desenvolvimento dos alunos como comunicador de suas opiniões e suas escolhas, ao passo que Brasil (1997) propõe que sejam desenvolvidas atitudes participativas em sala de aula. Foi notório que com as discussões coletivas sobre os temas e a apresentações das justificativas dessas escolhas, os alunos aprenderam a falar e ouvir, expressando suas ideias, bem como a respeitar a dos outros, sob um olhar crítico.

A interação social mediada pela ação dialógica acaba se tornando indispensável na construção dos saberes discentes, por meio da prática pedagógica docente interacionista, com o intuito de oportunizar a construção, a relação e a compreensão legítima de conceitos estatísticos. Os PCN (BRASIL, 1997) orientam que a prática pedagógica deve oportunizar uma aprendizagem significativa com relação à Estatística, de modo que o eixo desencadeador de conceitos, ideias e métodos matemáticos não deve ser a definição de alguns exercícios de aplicação mecânica e operatória imediatas, devendo-se propor situações-problema contextualizadas ou mais familiares possíveis.

Segundo e terceiro encontro: Coleta de dados e representação de dados

Nesses encontros a propostas era a realização da coleta de dados, utilizando uma avaliação individual e autodirigida, na qual os participantes tiveram poder decisório sobre suas preferências referente as brincadeiras, podendo avaliar brincadeira a brincadeira, segundo três critérios pré-estabelecidos (gostou, mais ou menos, não gostou). Sequencialmente, após a conversa e explicação do instrumento avaliativo a turma o preencheu, com o objetivo de agrupar os dados coletados. No decorrer, os alunos expuseram quais os motivos que os levaram a avaliar que gostaram de uma brincadeira e não de outra.

A professora foi instigando a turma para que argumentasse coerentemente, não sendo aceito, simplesmente, não gostei. Dentre as questões que surgiram neste momento pode-se destacar: Que fatores foram importantes para chegar a essa conclusão? Não gostou das regras da brincadeira? Todos esses pontos foram levantados em roda de conversa para que os alunos conjecturassem uma opinião formada sobre os itens que iriam avaliar.

Sequencialmente, foi exposta uma tabela grande, para que a professora pudesse explicar e os estudantes receberam a mesma tabela em formato pequeno para manuseio e realização da atividade, na qual estavam os dados coletados individualmente. Pois, é necessário viabilizar o diálogo entre estudantes e professor, na expectativa de buscar a melhor estratégia para representar os dados coletados, instigando os alunos a agrupar as informações comuns para facilitar a observação, entendimento e análise dos resultados. Lopes (2008) indica que a formação estatística deve perpassar também pela percepção da necessidade em descrever populações, baseando-se no levantamento de dados, considerando tendências e características dessa população. Complementado essa ideia, Almeida (2010, p.46) afirma “a importância de o aluno ler, interpretar, tratar, comunicar os dados de forma segura e crítica”.

Ao explorar as questões referentes à representação tabular, destacou-se a utilidade das tabelas, bem como seu formato e os elementos que devem ser ali representados. Nesse sentido, as tabelas devem ser claras e objetivas

contemplando todos os dados fundamentais, ou seja, serem autoexplicativas, que não necessitem de nenhum contexto textual para serem entendidas.
Na sequência foram apresentados os elementos que devem ser contemplados em qualquer tabela ou representação tabular, sob a ótica de (WalichinskI, 2012 p.36, apud, VENDRAMINI; CAZORLA; SILVA, 2009):

- Título: indica a que se refere a tabela em questão. Deve ser numerado com algarismos arábicos em ordem crescente dentro de um capítulo.
- Coluna indicadora: apresenta a variável e seus respectivos valores.
- Cabeçalho: tem a função de nomear as variáveis.
- Corpo da tabela: forma-se pela interseção de linhas e colunas;
- Fonte: indica de onde as informações foram retiradas.

Foi proposto aos estudantes que utilizando o instrumento avaliativo unificado da turma, realizassem a tabulação dos dados advindos da pesquisa realizada com a turma. Na sequência, organizaram-se as brincadeiras preferidas da turma numericamente, sendo atribuído àquela de maior aceitação o número 1, a seguinte na preferência o número 2 e, assim, sucessivamente, até o final das opções, pautando-se nos dados coletados, onde a variável qualitativa é a brincadeira.

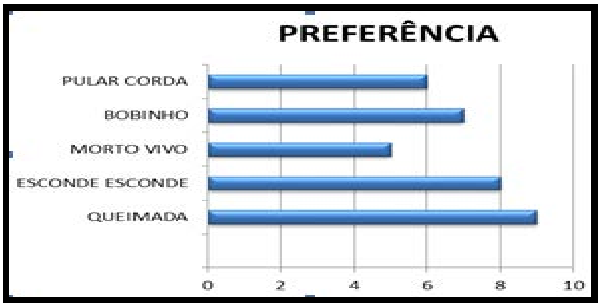
Entretanto, observou-se que os alunos em geral não fizeram uma tabela, e sim um quadro. Acredita-se que isso se deve ao fato de vários livros didáticos que não omitem as linhas laterais, formando assim quadros e não tabelas.

Dessa forma, as instituições escolares devem oportunizar práticas pedagógicas nas quais os estudantes não somente apresentem os dados, mas também tenham a possibilidade de compreender a problemática como um todo, e não fragmentos dela, para que tenham subsídios para comparar, hipotetizar, elencar soluções e verificar a validação ou refutação dessa problemática.

Quarto e quinto encontro: Representação e interpretação dos resultados

No quarto e quinto encontro, foi proposto a exploração e a construção gráfica interativa utilizando o programa Excel no laboratório de informática da escola, pois se entende que a utilização de recursos tecnológicos aliados às práticas pedagógicas pode favorecer e enriquecer as aulas. Desse modo, os alunos tiveram condições de estabelecer uma relação interativa do conteúdo sistematizado em sala, tabulando os dados e visualizando os formatos distintos da mesma amostra. Nessa perspectiva, os estudantes puderam conhecer outros gráficos, além dos tipos de barras e colunas, ao visualizarem as demais representações gráficas como, por exemplo: linha, setores, rosca, área entre outras.

Ressalta-se que é fundamental destacar, que a amostra pode se apresentar por meio de distintas representações, porém continuará a esboçar os mesmos dados, independente da sua ilustração, conforme nota-se na figura 1:



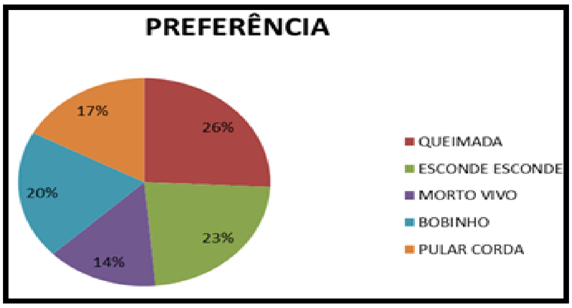


Figura 1: Gráficos elaborados pelos alunos
Fonte: Autores

Nas etapas de aplicação da sequência os alunos se envolveram em todos os momentos propostos, como a coleta, a leitura, a interpretação e a representação dos dados, tanto em sala de aula quanto no laboratório de informática. Nesse contexto, torna-se evidente a importância de explorar e apropriar-se dos recursos tecnológicos direcionados a favor das práticas pedagógicas escolares, bem como na sistematização dos conceitos matemáticos em momentos de empregabilidade, como por exemplo, a coleta e representação dos dados da pesquisa estatística dos alunos, corroborando com o exposto em Brasil (1997, p. 31):

> [...]o uso dos recursos tecnológicos pode ocasionar significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino-aprendizagem de matemática com várias finalidades: fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino-aprendizagem; auxiliar no processo de construção do conhecimento; meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; como ferramenta para realizar determinadas atividades, emprego de planilhas eletrônicas, processadores de textos, bancos de dados e outros.

Desse modo, com vistas aos conhecimentos de Estatística os ambientes gerados por aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam os processos pedagógicos. Entende-se que os ambientes educativos interativos possam configurar-se numa forma lúdica de propor práticas didáticas desafiadoras, ao entender que os conhecimentos e aprendizagens matemáticas são apresentados de forma atrativa e motivadora, tendo por finalidade potencializar a iniciativa na busca de estratégias e mecanismos eficientes para apresentar os dados e as informações coletadas.

3º Momento: Aplicação do pós-teste

Nesse momento, aplicou-se aos estudantes um instrumento diagnóstico denominado de pós-teste. Cabe destacar, que ele apresentava as mesmas questões do pré-teste, sendo necessária a utilização de 1 aula de 50 minutos, na mesma ordem de apresentação das questões. Portanto, foi possível compreender a contribuição da SE ao comparar os resultados obtidos pelos alunos no pós-teste e pré-teste, com a intenção de verificar os progressos alcançados, bem como pontuar as dificuldades que ainda necessitam ser superadas após o trabalho pedagógico.

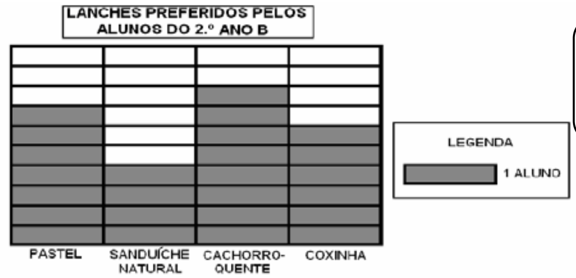
4. Apresentação, análise e discussão dos resultados

4.1 Análise - 1ª Questão

A primeira questão teve por objetivo verificar a habilidade dos alunos na realização da leitura dos dados num pictográfico. Tal questão pode ser observada a seguir, no quadro 1:

1ª Questão

A cantina da escola vende diferentes tipos de lanche. Os alunos do 2º ano b fizeram uma pesquisa para descobrir quais são os lanches preferidos da turma e construíram o gráfico abaixo:



Qual foi o total de votos de quem ganhou?

Quadro 1 – Questão do pré-teste e do pós-teste
Fonte: SME Curitiba (2012)

4.1.1 Análise do desempenho dos alunos anterior a aplicação da SE

Uma vez que os sujeitos pesquisados estão cursando o 5º ano do Ensino Fundamental, acreditou-se que eles já tivessem se apropriado dos conhecimentos básicos de Estatística nos anos anteriores, como indicado os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e nas Diretrizes Curriculares de Curitiba.

Desse modo, com base na análise das respostas dos alunos pesquisados para essa questão, observou-se 63,3% apresentaram a resposta correta sobre o que foi indagado, ou seja, a preferência com relação ao lanche dos estudantes da cantina de escola. Assim, percebe-se que 36,7% dos alunos compreenderam de forma errônea o que foi proposto, distribuindo-se da seguinte forma: 20% acreditavam que o lanche preferido era o pastel, 10% indicaram que o lanche de que os alunos menos gostavam era cachorro quente e 6,6% entendeu que 25 alunos preferiam o mesmo tipo de lanche. Indicativo muito semelhante à analisada, fato que reforça a dificuldade dos alunos em realizar a interpretação gráfica dos conceitos de Estatística corretamente.

Acreditou-se que os alunos apresentariam um melhor desempenho com relação a essa questão envolvendo o pictográfico, já estavam habituados a trabalhar com esse formato gráfico que aparece frequentemente em seu dia a dia. Com relação aos processos de ensino e aprendizagem da Estatística, pontua-se a necessidade de conduzir o aluno para a compreensão dos procedimentos de organizar e comunicar os dados, utilizando tabelas, gráficos e representações cotidianas (BRASIL, 1998).

4.1.2 Análise do desempenho dos alunos posterior à aplicação da SE

Analisando as respostas dadas pelos alunos em relação à questão proposta, verificou-se que os alunos obtiveram 63,3% de aproveitamento no pré-teste. Desta forma, nota-se um aumento considerável de 36,7% de aproveitamento, no pós-teste. Sendo assim, constata-se que todos os alunos da amostra, após a intervenção realizada, responderam assertivamente à questão, atingindo 100% de aproveitamento nesse quesito.

Entende-se como fundamental que sejam propostas e sistematizadas atividades pedagógicas nas quais sejam apresentadas várias estruturas gráficas aos alunos, possibilitando-lhes identificar as estruturas mais utilizadas e seus elementos.

Com relação a tais questões, Walichinski (2012) e Medici (2007) observaram a necessidade de que os alunos apresentem o título e as legendas, elementos considerados como parte integrante do entendimento dos dados, uma vez que visivelmente essas questões subsidiam o processo de leitura, interpretação e compreensão.

Nessa perspectiva, Morais (2006) afirma que, mesmo na educação contemporânea, os conceitos estatísticos ainda são trabalhados de forma isolada e desarticulada, o que pode justificar a dificuldade dos alunos em perceber e entender as inter-relações entre os diversos registros de representação, na conversão e na sua compreensão.

Portanto, o quadro 2 apresenta o percentual comparado de acertos referente ao desempenho dos alunos para a 1ª questão.

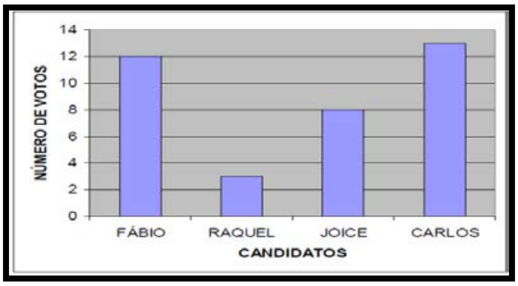
Quadro 2: Análise percentual					
	Conteúdo	**Objetivo**	**Conhecimentos**	**Pré-teste%**	**Pós-teste %**
1	Representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura e interpretação num gráfico pictográfico.	Identificação, leitura e interpretação gráfica.	63,3%	100%

Quadro 2 – Síntese da análise e discussão de dados da 1ª questão
Fonte: Autores (2014)

4.2 Análise - 2ª Questão

A segunda questão teve como objetivo verificar a habilidade dos alunos na leitura dos dados e entre os dados, num gráfico de barras verticais. Além disso, constatar a habilidade do aluno na representação de informações contidas num gráfico de barras verticais, por meio de uma tabela simples (transnumeração). Tal questão pode ser observada a seguir, no quadro 3:

2ª Questão
2.Foi feita uma eleição para escolher o representante de uma classe. Quatro alunos se candidataram, e o resultado está representado no gráfico.



2.1 Qual foi o total de votos de quem ganhou? a) 14 b) 13 c) 12 d) 11

2.2 Represente por meio de uma tabela as informações apresentadas no gráfico.

Quadro 3 – Questão do pré-teste e do pós-teste
Fonte: SME Curitiba (2011)

4.2.1 Análise do desempenho dos alunos anterior a aplicação da SE

Amparando-se na análise das respostas dadas pelos alunos para o item 2.1, observou-se que 86,7% da amostra pesquisada acertaram ao responder que o candidato mais votado foi o Carlos, com 13 votos. E 13,3% dos alunos pesquisados indicaram erroneamente que Fábio seria o candidato mais votado. Acredita-se que esses alunos erraram não por falta de compreensão na leitura ou por não terem condições para realizarem a interpretação correta dos dados e, sim, por falta de atenção a todos os dados contidos na estrutura gráfica.

Vasconcelos (2007) observou que os alunos também encontraram dificuldade na sua pesquisa, haja vista que 51,18% dos alunos pesquisados responderam de forma errônea à leitura entre os dados num determinado gráfico de barras. Desse modo, cabe destacar as análises realizadas por Medici (2007) ao indicar que a localização da variável com maior frequência não apresenta dificuldade para os alunos. Entretanto, no caso desta pesquisa, ao serem indagados, “quantos votos tem o candidato mais votado?”, pode-se ponderar que, quando o valor não está explícito no gráfico, ou seja, na leitura direta dos eixos, os alunos demonstram dificuldades em estabelecer a proporcionalidade entre os pontos adotados na escala.

Com relação ao item 2.2 constatou-se que somente 26,6% dos alunos pesquisados conseguiram estruturar uma tentativa de representação tabular, fato que chama atenção por apresentar resultados contraditórios com relação ao item 2.1, ou seja, os alunos demonstram facilidade em realizar a leitura dos dados na representação gráfica, contudo têm dificuldades acentuadas em realizar a transnumeração. A esse respeito, vale refletir que Walichinski (2012) encontrou problema similar no que trata da habilidade de transpor informações de uma representação gráfica para a representação tabular, afirmando que os alunos não têm desenvolvido a habilidade de passar informações de uma representação para outra.

4.2.2 Análise do desempenho dos alunos na 2ª questão, posterior a aplicação da SE

Baseando-se na análise das respostas dadas pelos alunos no pós-teste para o item 2.1, observou-se que 100% da amostra pesquisada acertaram o problema apresentado, respondendo que o candidato mais votado foi o Carlos com 13 votos. Constatou-se, nesta pesquisa, também a observação realizada por Medici (2007) ao advertir que os alunos apresentavam grande facilidade em localizar a variável de maior frequência nas representações gráficas. Desse modo, concorda-se com Santos (2003), Caetano (2004) e Lima (2005), em suas pesquisas, ao afirmarem que crianças de 9 e 10 anos de idade são capazes de identificar pontos de máximos e mínimos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Evidencia-se que o objetivo apresentado de realizar a leitura e interpretação gráfica foi alcançado, uma vez que a atividade proposta requeria que os alunos identificassem as variáveis do gráfico com maior frequência, para solucionar o problema, explorando a leitura dos dados e entre eles.

Ao analisar os resultados para o item 2.2 constatou-se que somente 26,6% dos alunos pesquisados conseguiram estruturar uma tentativa de representação no pré-teste. Após a intervenção, houve um aumento significativo de acertos que representou um aproveitamento de 62,8%, o índice de acertos ficou em 36,2%, um aumento significativo. Isso corrobora com Walichinski (2012), quando observou que seus alunos, após a aplicação da SE, apresentaram uma melhora considerável com relação ao aproveitamento da questão que contempla o conceito da transnumeração. Assim, apresentam-se o quadro 4, percentual comparado de acertos, referente ao desempenho dos alunos para a 2ª questão.

Quadro 4: Análise percentual					
	Conteúdo	**Objetivo**	**Conhecimentos**	**Pré-teste %**	**Pós-teste %**
2.1	Representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura de dados em um gráfico de barras simples.	Raciocínio, pensamento e letramento estatístico.	86,6%	100%
2.2	Representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar o processo de transnumerar, passando os dados de um gráfico de barras simples para uma tabela.	Raciocínio, letramento e pensamento estatístico.	26,6%	62,8%

Quadro 4 – Síntese da análise e discussão de dados da 2ª questão
Fonte: Autores (2014)

4.3 Análise - 3ª Questão

A terceira questão teve como objetivo verificar a habilidade dos alunos na leitura entre os dados, numa tabela de dupla entrada. Bem como, averiguar a habilidade dos alunos na representação de informações contidas, numa tabela de dupla entrada, por meio de um gráfico de barras duplas (transnumeração).

3ª Questão

3 - Na escola "Alegria do Saber" a professora fez uma pesquisa com alunos do 4º ano sobre suas preferências com relação as atividade recreativas ofertadas no horário do recreio. Sabe-se que todos os alunos responderam indicando somente uma atividade. O resultado dessa consulta pode ser visto por meio da seguinte tabela.

Atividade preferida	Meninas	Meninos
Caçador	10	5
Perna de pau	3	1
Jogos diversos	4	2
Betis	1	7
Total	18	15

3.1 - Qual é a atividade de recreação que as meninas preferem para brincar no horário do recreio?

3.2 - Na malha quadriculada abaixo, represente, por meio de um gráfico de barras duplas, a preferência dos meninos e das meninas em relação às atividades preferidas no recreio, conforme informações da tabela anterior.

Quadro 5: Questão do pré-teste e do pós-teste
Fonte: Adaptação do livro Bonjorno (2011)

4.3.1 Análise do desempenho dos alunos anterior à aplicação da SE

Com base nas respostas dadas para o item 3.1 da 3ª questão, observou-se que 54,3% da amostra pesquisada acertaram a situação-problema ao indicar que a atividade recreativa preferida é caçador, e 45,7% dos alunos responderam que a atividade preferida como sendo betis.

Constata-se com isso que uma quantidade considerável de alunos não realizou a leitura de forma correta da tabela de dupla entrada. Acredita-se que esse fato se deve à análise da tabela referente à preferência dos meninos, e não das meninas, ou seja, percebe-se que realizaram a leitura dos dados, mas o que faltou foi atenção para ler a tabela correta, segundo o proposto na atividade.

Com relação o item 3.2 da mesma questão, observou-se muita dificuldade dos alunos, pois 74,2% da amostra nem realizaram tentativas de resolução do problema; já 25,8% dos alunos elaboraram tentativas, mas desconexas, com o que deveriam realizar. Alguns apresentaram a tabela somente das preferências dos meninos, outros com a preferência das meninas, mas nenhuma das tentativas de soluções reportou-se à representação gráfica de dupla entrada.

Para essa questão, Vasconcelos (2007) e Walichinski (2012) também encontraram respostas parecidas em seus alunos, ou seja, baixo índice de aproveitamento ao realizarem atividades com esse nível de exigência estatística. Desse modo, a pesquisadora Walichinski (2012) apresentou em seu estudo que 40,91% dos alunos nem tentaram realizar a tarefa, já 9,09% da amostra apresentaram a tabela do enunciado da questão, e 50% dos alunos apresentaram tentativas de representações gráficas, entretanto nenhum deles teve êxito na tarefa.

Portanto, verificou-se que os alunos em geral não desenvolveram satisfatoriamente a habilidade de transcrever uma representação tabular para a representação gráfica, ou seja, o princípio da transnumeração, conforme já indicado na atividade anteriormente proposta.

4.3.2 Análise do desempenho dos alunos posterior a aplicação da SE

Com base nas respostas dadas pelos alunos para o item 3.1, no pós-teste, percebeu-se que existiu uma melhora no aproveitamento dos alunos nesse conteúdo. Ao comparar com o pré-teste observa-se um aumento considerável de 34,2%. Assim, para essa questão houve um aproveitamento de 88,5% da amostra pesquisada, o que representa um bom desempenho dos alunos. Cabe destacar que 11,5% dos alunos continuaram respondendo de forma errônea o problema, indicando a atividade recreativa preferida dos meninos, e não a das meninas. Ao refletir sobre essa situação, acredita-se que esses alunos, ao realizarem a leitura dos dados na tabela de dupla entrada, não prestaram atenção a todas as informações, fato que os conduziu ao erro da questão.

Nesse sentido, percebe-se também que Vasconcelos (2007), com alunos do 9º ano, e Walichinski (2012), com alunos do 7º Ano, observaram contextos parecidos em suas pesquisas, percebendo também que existiu um progresso significativo no aproveitamento e desempenho dos alunos, após a intervenção de ensino. Durante o pós-teste com relação às questões que exploravam a leitura dos dados e entre os dados numa tabela de dupla entrada, Walichinski (2012) observou que os alunos obtiveram um acréscimo no aproveitamento de 22,8%, para 81,82% na atividade proposta.

Para o item 3.2 da questão 3.2, solicitava-se que os alunos representassem num gráfico os dados contidos na tabela de dupla entrada. Cabe destacar que no pré-teste nenhum aluno respondeu assertivamente a questão. Cenário que mudou no pós-teste, pois verificou-se que 57,1% dos alunos organizaram um gráfico de barras duplas com os dados corretos, apresentando as categorias das variáveis e a legenda. Com isso, avalia-se que houve uma melhora significativa com relação ao aproveitamento e desempenho dos alunos quanto à habilidade de realizar a transnumeração. Outros 34,4%, na tentativa de resolver a questão, permaneceram representando os dados utilizando os gráficos e apresentando somente os dados da tabela com a preferência dos meninos, e outros com a preferência das meninas; e 8,5% da amostra pesquisada apresentaram um gráfico de barras duplas, mas com valores fictícios que não correspondiam aos dados da tabela.

Com relação à construção de gráficos e tabelas, Silva (2008) observou que os alunos em geral apresentam melhor aproveitamento nas construções gráficas baseando-se nos dados representados em tabela e não o contrário. Com isso, o autor orienta que é preciso enfocar mais a conversão de gráficos em tabelas, ou seja, explorar os princípios da transnumeração. Batanero et. al (1996) destacam que é essencial a mudança de representação para que os alunos possam apropriar-se desses conceitos de modo a se beneficiarem do desenvolvimento e ampliação dos níveis de raciocínio e letramento estatístico.

Desse modo, apresentam-se o quadro 6, percentual comparado de acertos, referente ao desempenho dos alunos para a 3ª questão.

Quadro 6: Análise percentual					
	Conteúdo	Objeitvo	Conhecimento	Pré-	Pós-

				teste %	teste %
3.1	Representação tabular	Verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura de dados em uma tabela de dupla entrada.	Raciocínio, pensamento e letramento estatístico.	54,3%	88,5%
3.2	Representação tabular e representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar o processo de transnumerar, passando os dados de uma tabela de dupla entradas para um gráfico simples.	Raciocínio, letramento e pensamento estatístico	0%	57,1%

Quadro 6 - Síntese da análise e discussão de dados da 3ª questão
Fonte: Autores (2014)

4.4 Análise - 4ª Questão

A quarta questão objetiva verificar a habilidade dos alunos na realização da leitura dos dados e entre os dados num gráfico de barras duplas.

4ª Questão

4 - O gráfico a seguir, representa o número aproximado de estudantes matriculados no Ensino Fundamental, no período de 2007 a 2011, em Curitiba.

4.1- De acordo com o gráfico, em que ano houve o maior número de estudantes matriculados em Curitiba, no ensino Fundamental?

4.2- De acordo com o gráfico, qual a diferença, em milhares, dos estudantes matriculados em Curitiba, entre os anos de 2008 e 2011?

Quadro 7 - Questão do pré-teste e do pós-teste
Fonte: SME Curitiba (2012)

4.4.1Análise do desempenho dos alunos, anterior a aplicação da SE

Dentre as respostas apresentadas pelos alunos para o item 4.1 da 4ª questão, tem-se que 77,1% indicaram acertadamente a resposta ao problema em questão, ao afirmar que o ano com maior número de matrículas foi o de 2008, no qual 22,9% dos alunos erroneamente indicaram como resposta o ano de 2009.

Acredita-se que os alunos que apresentaram essa resposta não estavam atentos à estrutura gráfica e nem realizaram a leitura dos dados de forma adequada. Nesse sentido, vale destacar que Medici (2007), Vasconcelos (2007) e Walichinski (2012) também encontraram contexto similar, indicando que mais de 50% da amostra pesquisada obteve sucesso na leitura dos dados.

Com relação o item 4.2 da mesma questão, observou-se que 40% dos alunos pesquisados responderam corretamente a proposta, indicando 6 milhares de estudantes matriculados entre os anos de 2008 e 2011. Os outros 60% da amostra pesquisada indicaram erroneamente a resposta para a questão, distribuindo-se da seguinte forma: 22,8% afirmaram não haver mudança nos valores, ou seja, que os valores são idênticos para os anos referidos, o que se pode deduzir que eles apenas observaram os dois últimos anos, sem considerar o enunciado apresentado para a questão; 17,1% dos alunos indicaram 5 milhares de estudantes, o que leva a pressupor que eles utilizaram os dados do ano de 2007 e 2008; 11,4% da amostra indicaram como solução 2 milhares de pessoas, provavelmente por terem feito a diferença dos alunos de 2008 e 2009; e, finalmente, 8,7% dos alunos pesquisados apresentaram como resposta à situação-problema valores que não são compatíveis com a diferença de nenhum dos dados expressos, por meio dos anos em questão, ou seja, atribuíram um valor qualquer, para não deixar a questão em branco. A esse respeito, também Medici (2007) e Vasconcelos (2007) salientam que os alunos apresentaram baixo desempenho nas questões referentes à leitura entre os dados.

4.4.2 Análise do desempenho dos alunos posterior à aplicação da SE

Apoiando-se nas respostas apresentadas pelos alunos para o item 4.1 da questão 4.1, no pós-teste, notou-se que somente um aluno indicou erroneamente que o ano com maior número de matrículas foi 2009, que corresponde a 2,8% dos alunos. Os outros 97,2% da amostra obtiveram sucesso ao afirmar que o ano era 2008. Assim, constata-se que houve um aproveitamento significativo com relação à leitura dos dados e entre os dados. Acredita-se que o único aluno que indicou a resposta errada não estava atento ao gráfico durante a leitura dos dados e entre eles.

Quanto ao item 4.2 da mesma questão percebeu-se que 82,8% da amostra pesquisada apresentaram bom desempenho para a questão, na qual deveriam apontar a diferença em milhares de estudantes matriculados no Ensino Fundamental em Curitiba. Observou-se um acréscimo significativo, com relação ao rendimento dos alunos, já que o acréscimo em acertos revela um aproveitamento superior ao dobro quando comparado ao pré-teste. Os outros 17,2% dos alunos que indicaram respostas incorretas estão distribuídos da seguinte forma: 11,4% dos alunos permaneceram afirmando que não havia diferença nos valores desses anos, ou seja, não realizaram corretamente a leitura e interpretação do que era solicitado para a questão e, com isso, acabaram efetivando a leitura entre os dados dos anos errados, para sugerir tal conclusão; os 5,8% restantes dos alunos apresentaram valores que não fazem sentido, haja vista que não se enquadram como diferença para nenhum dos dados apresentados no gráfico.

Em linhas gerais, conforme já discutido em cada uma das questões propostas, constatou-se que houve um avanço significativo no desempenho e aproveitamento dos alunos do 5° ano do Ensino Fundamental em relação aos conteúdos de Estatística. Fator que se reflete no desenvolvimento das competências estatísticas e probabilísticas dos alunos. Portanto, apresentam-se quadro percentual de acertos comparados, referente ao desempenho dos alunos para a 4ª questão.

Quadro 8: Análise percentual					
	Conteúdo	**Objetivo**	**Conhecimentos**	**Pré-teste%**	**Pós-teste%**
4.1	Representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura de dados em um gráfico de barras simples.	Raciocínio e pensamento estatístico.	77,1%	97,2%
4.2	Representação gráfica	Verificar a habilidade do aluno em realizar a leitura entre os dados de um gráfico de barras simples.	Raciocínio, letramento e pensamento estatístico.	40%	82,8%

Quadro 8 - Síntese da análise e discussão de dados da 4ª questão
Fonte: Autores (2014)

5. Considerações Finais

Baseando-se nas análises realizadas a partir das respostas dos alunos no pré-teste, foi possível considerar como insatisfatório o seu desempenho escolar prévio com relação à leitura, interpretação e construção de gráficos e tabelas. Uma vez que tais conteúdos são considerados básicos e que são indicados para o trabalho pedagógico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental nas instituições escolares, conforme os PCN e as Diretrizes Curriculares de Curitiba

Desse modo, notou-se que os alunos apresentavam dificuldades acentuadas em questões simples como, identificar estruturas gráficas mais usuais; construir uma tabela simples e de dupla entrada; realizar a leitura de dados; extrair dados de uma tabela de dupla entrada; apresentar gráficos utilizando a escala corretamente; perceber a importância em apresentar título, legenda e fonte. Cabe destacar outra dificuldade apresentada pelos alunos, nas questões que exigiam maior entendimento devido ao nível de complexidade ser mais elevado, como por exemplo: realizar a leitura entre os dados por meio de tabelas e gráficos.

A partir da aplicação e dodesenvolvimento da SE constatou-se um avanço significativo com relação ao desempenho e aproveitamento dos alunos, principalmente quanto à leitura de dados, a leitura entre os dados, o reconhecimento de estruturas gráficas e as construções gráficas e tabulares.

Nesse sentido, de acordo com os PCN, os conteúdos precisam estabelecer estreita relação com os conceitos, os procedimentos e as atitudes. Com relação às atitudes, entende-se que uma sequência de ensino pode favorecer questões importantes como despertar a motivação e interesse dos alunos pelas aulas de matemática propiciar aos alunos um maior envolvimento com a Estatística e Probabilidade; promover e instigar a disponibilidade dos alunos para a realização atividades; desenvolver a perseverança nos alunos na busca das soluções almejadas; e promover o princípio colaborativo entre os alunos durante a resolução das problemáticas apresentadas.

No que se refere aos conceitos e procedimentos, acredita-se que a estratégia metodológica aplicada, por meio da sequência de ensino, beneficiou significativamente o processo de ensino e aprendizagem, quanto à apropriação, desenvolvimento e ampliação dos conteúdos essenciais de Estatística e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, destaca-se que a realização das atividades propostas na Sequência de Ensino, não é suficiente para que os alunos tenham subsídios e recursos intelectuais para compreender e apropriar-se dos conhecimentos e saberes de Estatística que se desejada.

A aplicação da SE configurou-se como um recurso eficiente para promover o processo de aprendizagem dos conteúdos estatísticos, bem como para viabilizar a constituição e ampliação do desenvolvimento das competências estatísticas dos alunos, nela eles deixaram de ser meros espectadores para se tornarem atores ativos no processo da sua aprendizagem.

Destaca-se a importância de oportunizar atividades pedagógicas em que os alunos participam ativamente em todos os momentos - na coleta de dados, no tratamento dos dados e na análise dos resultados, conforme é indicado na SE aplicada nesta pesquisa. Ao refletir sobre os resultados atingidos e apresentados, destaca-se que atividades nesse formato merecem um olhar mais atento e cuidadoso dos professores que atuam nessa modalidade de ensino escolar e que podem ser introduzidas na prática docente, uma vez que foi possível observar contribuições pedagógicas para o ensino de Estatística.

Portanto, compreende-se que o objetivo deste trabalho foi atingido, já que foi constatada contribuições significativas para o processo de ensino e aprendizagem de Estatística para os anos iniciais de escolarização ao aplicar e desenvolver a Sequência de Ensino (SE).

Bibliografia

Almeida, L. A. (2010). *Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática*: um estudo com o 2º ano do ensino médio. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto.

Araujo, G. E. (2008) *O tratamento da informação nas séries iniciais uma proposta de formação de professores para o ensino de gráficos e tabelas*. 178 f. Dissertação –Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC).

______. *Flores, C. R. (2010). O Tratamento da informação nas séries inicias: uma proposta de formação de professores para o ensino dos gráficos e tabelas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2010. Anais... Belo Horizonte.*

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Brasília: MEC/SEF.

______. (1998).*Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Bakhtin, M. (2012). *Marxismo e Filosofia da linguagem.*13. ed. Trad. M. Lahud; Y. F. Vieira. São Paulo: Hucitec.

Batanero, C.(1996). *Didáctia de la probabbilidady de la estadística.* Granada (ESP): Universidade de Granada.

Bonjorno, J. R. (2011). *Aprendendo sempre matemática:* 1º ao 5º ano. 1.ed. São Paulo: Ática.

______. Estepa, A.; Godino, J. D.(1991). *Análisis exploratório de datos: sus posibilidades em la ensiñanza secundaria.* Suma, n.9, p.25-31. Disponível em: <http://faeaweb.uncoma.edu.ar/archivos/matematica/unidad_2_analisis_exploratorio_SUMA_91.pdf>. Acesso em: 22 mai. 2016.

Caetano, D. S. S. (2004). *Introduzindo a estatística nas séries iniciais do ensino fundamental a partir de material manipulativo: uma investigação de ensino*.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Carvalho, C.(2009). *Reflexões em torno do ensino e da aprendizagem da estatística: o caso dos gráficos*. In: Fernandes, J A.; et al.(Orgs.). In: ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA, 2., **Actas...** Braga (POR), p.22-36, 30 jan. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2015.

Cazorla, I. M.(2002) A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas (SP).

Cazorla, I.M.(2005). Tratamento da informação na Educação Básica. In: Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

Cazorla, I. M; OLIVEIRA, S.M. (2010). Para saber mais. In: Cazorla, I. M; Santana, E. (Org.). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico.* Itabuna (BA): Via Litterarum.

Crespo, A. (1999). *Estatística Fácil.* 14ª ed. São Paulo: Saraiva.

Crespo, M.I. (2005). *Um estudo sobre o comportamento de busca e uso de informação de pesquisadores das áreas de biologia molecular e biotecnologia*: impactos do Periódico científico eletrônico.

Curcio. F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (2002). *Comment analyser le fonctionnemment représentationnel des tableaux et leur diversité?* In: Séminaires de Recherche Conversion et articulation des représentations. Vol II. Éditeur Raymond Duval, IUFM Nord-Pas de Calais.

______. (2003).Representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros e representações semióticas.* Campinas (SP): Papirus.

Fernandes, G.J.R. Santos Junior, G*. (2013). Jogos interativos: recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem Matemática.* Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revimat, vol.8, nº2, p. 245-260.

Fernandes, G.J.R. Santos Junior, G. A Estatística e a Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Revista Iberoamericana de Educação Matemática - Unión, nº39, p.35-56, set. 2014.

Freitas, P. M. C. (2011). *O desenvolvimento da literacia estatística no 5° ano uma experiência de ensino*. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Universidade de Lisboa, Lisboa (Portugal).

Grando, R. C. (2004). *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.* São Paulo: Paulus.

Lima, R. C. R. (2005). *Introduzindo o conceito de média aritmética na 4ª série do ensino fundamental usando o ambiente computacional.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

Lopes, C. A. E. (2010). *A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico*. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Caxambu (MG), 2010. Anais... Disponível em:

<http://www.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/ GT19-6836--Int.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2015.

Medici, M. *A. (2007). Construção do pensamento estatístico: organização, representação e interpretação de dados por alunos da 5ª série do ensino fundamental.* 127 f. Dissertação - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo (SP).

Monteiro, C. E. F.; Selva, A. C. V.(2001). *Investigando a atividade de interpretação de gráficos entre professores do ensino fundamental.* In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 24, Anais... Caxambu/MG: ANPED.

Morais, M. T. (2006). *Um estudo sobre o pensamento estatístico: Componentes e Habilidades.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Pagan, A. M. *(2010). A interdisciplinaridade como proposta pedagógica para o ensino de estatística na educação básica*. Dissertação- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo (SP).

Santos, S. S.(2003). *A formação do professor não especialista em conceitos elementares do bloco: tratamento da informação: um estudo de caso no ambiente computacional.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de Campinas. Campinas.

Silva, C. B.(2008). *Os núcleos de pesquisa da USJT*. Integração (USJT), v.55, p.303-304.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

Vasconcelos, R. P. (2007). *Leitura e interpretação de gráficos e tabelas: estudo exploratório com alunos da 8ª série do ensino fundamental.* 206 f. Dissertação Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo (SP).

Vendramini, C. M. M. C.; Cazorla, M. I.; Silva, B.(2009). *Normas para apresentação de informações estatísticas no estilo editorial.* In: Sabadini, Angélica, Z. P.; Sampaio, M. I. C.; Koller, S. H. (Orgs). Publicar em psicologia**:** um enfoque para a revista cientifica. São Paulo: Associação Brasileira de Editores Científicos de Psicologia / Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo.

Walichinski, D. (2012). *Contextualização no ensino de estatística: uma proposta para os anos finais do Ensino Fundamental.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência e Tecnologia). Universidade Tecnológica Federal do Paraná – P.G.

Wodewotzki, M. L. L.; Jacobini, O. R. (2011). A modelagem matemática aplicada no ensino de estatística em cursos de graduação. Bolema, Rio Claro (SP), v.14, p.47-68.

Rúbia Juliana Gomes Fernandes: Nascida em 08 de junho de 1982 na cidade Curitiba do estado Paraná - Brasil. Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Ponta Grossa - Brasil. Atua como professora de matemática da Rede Municipal de Educação de Curitiba Brasil e pedagoga da Rede Estadual do Estado do Paraná. rufernandes@hotmail.com

Guataçara dos Santos Júnior: Nascido em 03 de outubro de 1971 na cidade Ponta Grossa do estado Paraná - Brasil. Possui doutorado em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná - Brasil. Atualmente é professor na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Ponta Grossa - Brasil. Atua no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia onde orienta trabalhos prioritariamente para o ensino de Probabilidade e Estatística. guata@utfpr.edu.br

Rudolph dos Santos Gomes Pereira: Nascido em 16 de maio de 1982, na cidade de Cornélio Procópio do Estado do Paraná – Brasil. Possui Doutorado em Educação pela Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” – Brasil. Atualmente é profesor na Universidade Estadual do Norte do Paraná – Campus Cornélio Procópio – Brasil. Atua no Programa e Pós-Graduação em Ensino onde orienta trabalhos em Modelagem Matemática, Educação a Distância e Formação de professores. rudolphsantos@uenp.edu.br

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 62-77

Historia de la Matemática como un recurso pedagógico: una posibilidad de análisis a través de la hermenéutica profunda

Ana Jimena Lemes Pérez, Virgínia Cardia Cardoso

Fecha de recepción: 11/01/2017
Fecha de aceptación: 10/05/2017

Resumen	En este artículo se pretenden analizar las concepciones de siete profesores universitarios del Estado de San Pablo sobre la Historia de la Matemática como un recurso pedagógico, utilizando para esto la metodología de investigación denominada Hermenéutica Profunda. Se presentan argumentos a favor y en contra de la utilización de este recurso para luego cruzar estos argumentos con las concepciones presentadas por los profesores. Se concluye que la ausencia de materiales realizados por y para profesores, que utilicen la Historia de la Matemática como un recurso pedagógico es una carencia a resolver. **Palabras clave**: Educación Matemática, Historia de la Matemática, Hermenéutica Profunda
Abstract	This paper aims to analyze the conceptions of seven university professors of the State of San Pablo on the History of Mathematics as a pedagogical resource, using the research methodology called Deep Hermeneutics. Arguments are presented for and against the use of this resource and then these arguments are intersected with the conceptions presented by the teachers. It is concluded that the absence of materials produced by and for teachers, who use the History of Mathematics as a pedagogical resource, is one deficiencie that must be solved. **Keywords**: Mathematics Education, History of Mathematics, Hermeneutics Depth
Resumo	O presente artigo tem como objetivo analisar as concepções de sete professores universitários do Estado de São Paulo sobre a História da Matemática como um recurso pedagógico, utilizando para isso a metodologia de pesquisa denominada Hermenêutica de Profundidade. Apresentam-se argumentos favoráveis e contrários à utilização deste recurso para depois comparar tais argumentos com as concepções apresentadas pelos professores. Conclui-se que a falta de material criado por e para professores que usam a História da Matemática como um recurso pedagógico é uma necessidade a ser resolvida. **Palavras-chave:** Educação Matemática, História da Matemática, Hermenêutica da Profundidade

1. Introducción

La Historia de la Matemática (HM) ha sido considerada un recurso atractivo para la clase de Matemática por profesores y especialistas en educación, muchos de los cuales han comentado sobre las diversas potencialidades vinculadas a la lectura, motivación, contextualización de conceptos, problematización, humanización de la ciencia. Sin embargo, como cualquier recurso pedagógico, también puede ser utilizado de forma ingenua, poco crítica o sin planificación, demostrando de cierta manera que la capacidad y competencia didáctica son básicas a la hora de trabajar en la clase. En este artículo se reporta una investigación cualitativa en la que se busca comprender por medio de entrevistas, cuales son las concepciones sobre la HM utilizada como un recurso pedagógico, a través de la Hermenéutica Profunda, un referencial metodológico elaborado por Thompson (2000).

2. La Hermenéutica Profunda como metodología de investigación

John Brookshire Thompson es un sociólogo norteaméricano, radicado en Inglaterra, interesado en el análisis de los discursos transmitidos en los medios de comunicación de masas. Para Thompson, la sociedad moderna se caracteriza por la difusión de valores culturales por estos medios de comunicación. De esta forma los mensajes son dirigidos a un público masivo. Generalmente, tales mensajes son transmitidos por medios técnicos, como la televisión, la radio, la prensa (periódicos, revistas y libros) y digitales (sitios y blogs disponibles en Internet), que de cierta forma vehiculan el mensaje en un único sentido –del productor al receptor– y adoptan una padronización que representa la institución productora del mensaje. Para Thompson, los mensajes son concretizados por formas simbólicas, que pueden ser palabras escritas o habladas, sonidos, imágenes, textos o acciones producidas y reconocidas como significativas para los sujetos involucrados en los contextos de producción, emisión y recepción del mensaje. Los medios de comunicación de masas institucionalizan las formas simbólicas.

Para estudiar el fenómeno de la transmisión de formas simbólicas, en el contexto de la sociedad moderna, Thompson creó una metodología de análisis cultural, denominada por él como Hermenéutica Profunda (HP). Su obra publicada en Brasil como "Ideologia e Cultura Moderna: Teoria Social Crítica na Era dos Meios de Comunicação de Massas" (Thompson, 2000)[1] presenta una propuesta de análisis de formas simbólicas en tres dimensiones: análisis de los contextos de recepción, circulación y recepción de las formas simbólicas, llamado análisis socio histórico; y la interpretación o re-interpretación que sintetiza los aspectos analizados conforme las interpretaciones del hermeneuta. Autores como Andrade (2012), Cardoso *et al* (2013), y Lemes (2015), afirman que este referencial es flexible y abierto, permitiendo que el investigador explore otros métodos que subsidien su investigación, a medida que se evoluciona en el ejercicio interpretativo.

[1] Thompson, J. B. Ideologia e Cultura Moderna: Teoria Social crítica na Era dos Meios de Comunicação de Massas. 5ª ed. Petrópolis, Ed. Vozes, 2000.

Estas tres dimensiones de análisis de la HP no son consideradas por Thompson como fases o etapas de análisis, ya que pueden iniciarse de manera independiente y no precisan seguir un orden determinado. Para el autor, la interpretación de una forma simbólica se inicia con la comprensión cotidiana, más superficial, sin la mirada crítica del investigador científico. Este inicio es llamado por Thompson (2000) de Hermenéutica de lo Cotidiano. A partir de este primer contacto, se continua con la HP, en donde se analiza la forma simbólica en las tres dimensiones citadas:

> A “análise sócio histórica” tem como objetivo reconstruir as condições sociais e históricas de produção, circulação e recepção das formas simbólicas, evidenciando as relações de dominação que caracterizam o contexto. As relações de dominação que mais interessam à HP são aquelas mais duráveis no contexto, como por exemplo, as que se referem à classe social, etnia, sexo, etc. Dentro desta dimensão, têm-se as seguintes preocupações:
>
> - Identificar e descrever as situações espaço-temporais em que as formas simbólicas são produzidas e recebidas.
>
> - Analisar o campo de interação das formas simbólicas: trajetórias que determinam como as pessoas têm acesso às oportunidades de usar as formas simbólicas: emprego dos recursos disponíveis, esquemas tácitos de conduta, convenções, conhecimento próprio inculcado nas atividades cotidianas.
>
> - Analisar as instituições sociais, isto é, as regras e os recursos em uso nas relações sociais. Examinar as práticas e as atitudes das pessoas que agem a favor da instituição social.
>
> - Analisar as estruturas sociais: estabelecer critérios e categorias para examinar as diferenças da vida social.
>
> - Examinar os meios técnicos de constituição de mensagens e como eles são inseridos na sociedade. (Cardoso, 2009, p. 29)

Las formas simbólicas tienen una estructura interna que puede ser comprendida por medio del “análisis formal o discursivo”. Thompson (2000) no presenta un método cerrado de análisis, una vez que la forma simbólica puede asumir muchos aspectos diferentes. Presenta sugerencias de formas posibles de análisis, para el caso de textos escritos, como por ejemplo: análisis semiótico, análisis de conversación, análisis sintáctico, análisis argumentativo, análisis narrativo. En la dimensión de la interpretación o re-interpretación tenemos la síntesis de los análisis realizados: “Trata-se de construir ou reconstruir os significados do discurso. É entender o que foi dito através das formas simbólicas” (Cardoso, 2009, p. 30).

Al aplicar la HP al estudio sobre la HM como recurso pedagógico, adaptamos la HP a nuestros objetivos de investigación. Observamos en primer lugar, que las entrevistas concedidas por los profesores que leccionan HM en los cursos de licenciatura en Matemática, pueden ser consideradas como formas simbólicas. Tanto para Contreras (1998) como para Garnica (2008), las concepciones pueden ser consideradas como creencias, percepciones, juicios, experiencias previas u opiniones sobre algún asunto. De esta forma, retomando las palabras de Thompson, quien llama de formas simbólicas a las “ações, declarações e objetos significativos” (Thompson, 2000, 197), es posible considerar una concepción como una forma simbólica. En segundo lugar, notamos que estas entrevistas no pueden ser consideradas como comunicación de masas, ya que no se dirigen a un público masivo ni fueron transmitidas por medios técnicos. Sin embargo los entrevistados aceptaron conceder declaraciones públicas, que, salvando las distancias, pueden ser comparadas a entrevistas concedidas en programas de televisión o radio, lo que las torna plausibles de análisis a través de la HP. De esta manera también es posible considerar como formas simbólicas las declaraciones de nuestros entrevistados, y aplicar las dimensiones de análisis socio histórico y análisis formal de la HP para construir nuestras interpretaciones.

Respecto a la primera dimensión, Thompson especifica: “O objetivo da análise sócio-histórica é reconstruir as condições sociais e históricas da produção, circulação e recepção das formas simbólicas” (Thompson, 2000, p. 366), por lo tanto en esta primera dimensión fueron consideradas las principales perspectivas sobre la HM y sus múltiples abordajes. Fue tejido un referencial teórico a partir de varias referencias teóricas del área, con el cual se cotejan argumentos favorables y contrarios a la utilización de HM en las clases.

La segunda dimensión, la de análisis formal o discursivo, es caracterizada según Thompson porque “os objetos e as expressões significativas que circulam nos campos simbólicos são também construções simbólicas complexas que apresentam uma estrutura articulada” (Thompson, 2000, p. 412). Por lo tanto, para abordar esta dimensión, es necesaria la elección de una forma de análisis que esté de acuerdo con los objetivos propuestos. En este sentido, para realizar el análisis de las entrevistas realizadas, fue necesario romper el *corpus* del discurso en diferentes fragmentos, organizados en función de tópicos, que luego fueron asociados al referencial teórico para establecer convergencias y divergencias. Este análisis es considerado argumentativo.

La tercera dimensión, la de interpretación y re-interpretación, precisa basarse en las dimensiones anteriores, una vez que el *corpus* del discurso ya fue quebrado y re-organizado, con objeto de estimular la emergencia de nuevos vínculos y reflexiones.

3. Dimensión socio histórica

The ICMI Study (2000) fue una compilación de varios grupos de discusión liderados por investigadores de referencia internacional en el área de Educación, Historia, Filosofía y Epistemología de la Matemática, que discutieron sobre temas vinculados a la inclusión de la HM en la enseñanza.

Barbin, investigadora francesa vinculada a la escuela de Bachelard, presenta en este estudio las dos razones más citadas para la inclusión de HM en la enseñanza: (1) ofrece oportunidades para el desarrollo de puntos de vista sobre lo que es la Matemática, y (2) permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías. Barbin justifica que la HM puede modificar en primer lugar la percepción y comprensión de los profesores sobre la Matemática, lo que podría tener influencia en como enseñarla, y finalmente podría influir en la forma en la cual los alumnos la perciben y la comprenden (Fauvel y Van Maanen, 2000, p. 63, traducción de las autoras).

3.1 La HM como motivación

Uno de los argumentos más utilizados es considerar a la HM como motivadora y generadora de interés por la Matemática. De hecho esto puede suceder de igual forma con otros recursos, pero este argumento presenta un aspecto negativo destacado por Miguel (1993, p. 70): "[…] se a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma, parece-nos que a categoria motivação constitui-se numa instância problemática de justificação para a incorporação da história no ensino".

3.2 La HM como camino hacia la problematización

Según Bkouche (2000), el trabajo a partir de una perspectiva histórica puede ser útil, siempre que no se considere como un "método" de enseñanza:

> [...] en amenant *ceux qui enseignent* à une réflexion sur les enjeux et les significations de leur enseignement; le danger est alors que, de ce recours à la perspective historique, on fabrique des «méthodes d'enseignement» donnant l'illusion d'un prêt-à-enseigner qui ne peut être que néfaste, autant pour *ceux qui sont enseignés que pour ceux qui enseignent*. (Bkouche, 2000, p. 47- 48)

Bkouche afirma que los problemas históricos que pueden presentarse con el propósito de mostrar una problemática, son más importantes que la propia Historia, y que para encontrar un camino hacia esa problematización es necesario el conocimiento histórico de los profesores, es decir, la intervención de la HM en la formación de profesores (Bkouche, 2000, p. 52)

3.3 La HM para pensar la Matemática como construcción humana

Frente a una Matemática de rutinas, que nos presenta la clásica terna: definición, teorema y ejemplo, De Guzmán (2007), defiende una postura que integra la Historia en un sentido humanizador:

> La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico. (De Guzmán, 2007, p. 31)

Esta defensa también es levantada por Barbin (2006):

> Elles [les mathématiques] sont l'œuvre d'hommes et de femmes, et de communautés. Ensuite, elles ont été produites à une certaine époque, dont elles reflètent les préoccupations et les manières. Enfin, elles ont été produites dans une aire culturelle et géographique et elles ont circulé. (Barbin, 2006, p. 3)

3.4 La HM como contextualizadora

La HM posibilita la contextualización de conceptos, problemas y sus posibles respuestas. Así la justificativa para contextualizar el contenido a ser trabajado en la clase es que los estudiantes pueden aprender que los errores, los argumentos heurísticos, las incertezas, las dudas, los caminos sin salida, las controversias y aproximaciones alternativas a los problemas, son más que legítimos una vez que forman parte de la propia actividad matemática (Fauvel y Van Maanen, 2000, p. 205). Además de la contextualización, algunos investigadores argumentan que la creación o los descubrimientos de la ciencia no ocurren aislados del mundo, de una época y de una concepción de ciencia permeando el momento histórico. Matthews dice sobre eso:

> Si la ciencia se ha desarrollado como un diálogo con la metafísica (por no decir nada sobre intersecciones con los campos político, económico y social), enseñar la ciencia como un soliloquio en que la propia ciencia se habla simplemente a sí misma y crece únicamente con su autocrítica, entonces, es empobrecer su contenido (Matthews, 1994, p. 269).

3.5 La HM y la interdisciplinaridad

Tzanakis y Arcavi también participando en The ICMI Study, afirman que la Historia puede ser considerada como puente entre la Matemática y otras disciplinas, de tal forma que el estudio de la Historia expone interrelaciones entre diferentes dominios matemáticos, o entre la matemática y otros campos de estudio. Es posible considerar que el conocimiento de algunos tópicos de HM por parte del profesor, vinculados a conceptos que van a ser desarrollados en la clase, puede auxiliarlo en las situaciones en las que es necesaria la aproximación empírica, tanto en la presentación de motivaciones iniciales de un cierto tema, como en la verificación de resultados apoyándose, por ejemplo, en resultados físicos.

3.6 La HM y su carencia en la formación de profesores

Frente a numerosas publicaciones que refuerzan las potencialidades de la HM, podría considerarse que existe un cierto consenso en proponer la disciplina HM en la formación de profesores, sin embargo Nobre (2012, p. 510) asegura que no existen suficientes profesionales formados en el área. Por otro lado, presenta algunos objetivos y cuestiones metodológicas que deberían ser consideradas en esta disciplina:

> Propiciar ao aluno o conhecimento da história de conceitos matemáticos;
> Propiciar ao aluno a percepção de que o conhecimento matemático é fruto do trabalho de várias gerações de pensadores;
> Fazer com que o aluno estabeleça relações entre a origem de um conceito matemático e o contexto sociocultural onde isto se deu. (Nobre, 2012, p. 511)

También es necesario disponer de materiales de consulta adecuados y que tales materiales sean diseñados con objetivos vinculados a la Educación Matemática. En este sentido la ausencia de libros de enseñanza de HM realizados por profesores y pensados para profesores destaca la necesidad de estos materiales a partir de una contribución real por parte de los profesores:

> […] nem a História da Matemática escrita sob o ponto de vista do

> matemático profissional, nem as breves e episódicas referências à Matemática que aparecem nas obras dos historiadores de ofício conseguem realçar aqueles elementos e aspectos que poderiam, eventualmente, trazer uma real contribuição aos professores que têm a intenção de planejar as suas aulas de modo que a história venha a participar delas de um modo efetivo e orgânico. (Miguel y Miorim, 2005, p. 157)

Sin embargo, a pesar de haber aumentado la inclusión de esta disciplina en diversos cursos, continúan sin existir materiales especializados. Citando palabras de Beltran *et al* (2014):

> Durante as últimas décadas, aumentou a inclusão de temas de História da Ciência em cursos de formação inicial e continuada de professores, bem como nos bacharelados em ciências naturais e exatas. Entretanto, ainda não há materiais especializados dirigidos ao ensino de História da Ciência nos cursos superiores. (Beltran *et al,* 2014, p. 9)

3.7 La HM es confusa

Este argumento es sustentado por la premisa de que los estudiantes no poseen sentido de la Historia, no tienen claridad sobre los periodos históricos, o simplemente porque no gustan de ella (Fauvel y Van Maanen, 2000, p. 203). Kuhn (2004) tampoco apoyaba su inclusión, asegurando que exponer a los estudiantes a la Historia de la Ciencia, podría debilitar las convicciones científicas necesarias para finalizar con éxito su aprendizaje. Además este autor argumenta que la ciencia misma se encarga de descartar detalles históricos que solo podrían dar un falso status a los errores y confusiones humanas, y que de cierta forma, despreciar esos datos es parte de la profesión científica. De esta manera, la idea errónea que produce el contacto con los libros de texto sobre ciencia, favorece una concepción lineal y acumulativa en la que no aparecen obstáculos ni revoluciones científicas (Kuhn, 2004, p. 221).

Es posible comprender la posición del autor, y también llamar la atención sobre la subjetividad de la Historia que puede verse influenciada por distorsiones que dependen de quien hace las interpretaciones, sin embargo la propuesta presente, no es la de que los profesores ni estudiantes se formen como historiadores de la ciencia, ni de que integren conocimientos equivocados, sino de ofrecer otra aproximación al contenido escolar, apelando para eso a la competencia didáctica de los profesores.

4. Análisis formal

Este estudio de carácter cualitativo, basado en el análisis argumentativo de siete entrevistas, corresponde a siete profesores de matemática universitarios, que dan clases en la licenciatura en matemática, y tienen algún vínculo o no, con la disciplina Historia de la Matemática. Al momento de las entrevistas, tres de los profesores formaban parte del cuerpo docente de una universidad privada, y cuatro de una universidad pública, ambas universidades del estado de San Pablo, Brasil.

4.1 Los entrevistados

Los siete entrevistados[2] presentaron visiones diferentes sobre el uso, la importancia, y los cuidados a tomarse en cuenta a la hora de trabajar con HM en el aula, logrando identificarse dos grupos de ideas:

1) El profesor A es formado en ciencias con énfasis en química y posee además una especialización. Da clases de una disciplina del núcleo pedagógico, en el curso de licenciatura en matemática de una universidad privada. El profesor B da clases en el núcleo de las matemáticas, en el curso de licenciatura en matemática. Es formado en matemática, posee una especialización, una maestría y actualmente es estudiante de doctorado en el área de Educación Matemática. El profesor C es coordinador de la licenciatura en matemática, y da clases de HM. Está formado en matemática pura tanto en la graduación como en maestría. Actualmente es estudiante de doctorado en el área de ingeniería biomédica.

Este primer grupo de tres profesores muestra posiciones diversificadas sobre las potencialidades de la HM, en particular no se percibe ningún temor sobre la utilización de este recurso. En contraposición a los cuidados apuntados antes, este grupo defiende el uso de la HM con diversos argumentos que varían desde la motivación y el ocio recreativo, hasta el desarrollo de la criticidad y la contextualización, pudiendo dar una visión humanizadora de la matemática, pero sin colocar ningún tipo de negativa.

2) El profesor D es licenciado en matemática, posee maestría y doctorado en el área de Educación Matemática, desarrollando sus investigaciones en el área de HM. Da clases de esta disciplina desde el año 1988. El profesor E, da clases en el núcleo de matemática pura. Posee graduación, maestría y doctorado en el área de matemática pura. El profesor F (hispanohablante) posee graduación, maestría y doctorado en el área de matemática pura, y trabajó dando clases de HM. El profesor G es licenciado en matemática, y también se formó en matemática pura. Posee un doctorado en Educación Matemática, en el área de HM, y es libre-docente en Historia de la Ciencia.

Este segundo grupo de cuatro profesores plantea que la HM no debe ser vista como un recurso pedagógico, una vez que por si misma define un área de investigación con sus propios objetos de estudio. Su idea principal es que la HM es independiente de la matemática y su enseñanza, y por esa razón no es necesario justificar su existencia mediante los usos que puede tener. Sin embargo, también se contempla a la HM de forma complementaria ya que presenta una amplia variedad de potencialidades, como ser: práctica de la criticidad, visión de construcción colectiva y humana de la ciencia con sus errores y aciertos, capacidad de ofrecer contextos para reelaborar conceptos y contenidos. Para este grupo de profesores es importante despertar y profundizar esas características en el pensamiento y práctica de los futuros profesores, una vez que ofrecen una aproximación diferente al conocimiento matemático. También fueron muy claros al advertir una serie de riesgos que pueden perjudicar la enseñanza de la matemática si no son tomadas ciertas precauciones en la utilización de HM en la clase.

2

Todas las entrevistas fueron autorizadas a través del Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

4.2 El instrumento de colecta de datos

La información que se recogió, fue a través de una entrevista semiestructurada, que es presentada a continuación. Con estas preguntas se pretendía conocer la relación que el entrevistado tenía con la HM, cómo y cuándo se había dado esa aproximación, y si su formación académica había tenido influencias.

Entrevista semiestructurada

1. *Como foi sua formação na graduação?*
2. *Por que fez essa escolha?*
3. *Lembra alguma disciplina em sua formação relacionada com a História da Matemática?*
4. *Tem na memória algum livro sobre História da Matemática?*
5. *Procurou algum livro de História da Matemática antes, durante ou depois de sua passagem pela graduação?*
6. *Assistiu aulas de matemática nas quais em algum momento se falou de História da Matemática?*
7. *Utiliza História da Matemática em suas aulas?*

Fuente: Elaboración propia

4.2 Análisis argumentativo

Las entrevistas fueron audio grabadas y transcriptas. El análisis se realizó identificando tópicos generales a través de los cuales las entrevistas se desarrollaron. Al realizar el análisis de la primera entrevista fue posible definir algunos tópicos y en el proceso de análisis de las siguientes entrevistas fue posible identificar algunos de los tópicos definidos previamente, y en caso necesario, se definieron nuevos. De esta forma fue posible comenzar a relacionar fragmentos identificados bajo un mismo tópico, con el objetivo de cruzar estos fragmentos de entrevistas con el referencial teórico elaborado.

Los tópicos identificados fueron: falta de profesores formadores con especialidad en HM en su formación; HM como contextualizadora de conceptos; HM para entender a la Matemática como construcción social, actual y humana; HM como demostrativa de errores cometidos por científicos, de la evolución de los conceptos y de la concepción de demostración; HM como motivadora para la enseñanza; HM como narrativa – informativa; HM y rigor; HM y el vínculo con la realidad; HM y la cuestión del tiempo. En lo que sigue se presenta el análisis de las entrevistas por tópicos.

4.2.1 Falta de profesores formadores con especialidad en HM en su formación.

En este tópico que fue mencionado antes desde Miguel y Miorim (2005), Nobre (2012) y Beltran *et al* (2014), coincidió la mayoría de los entrevistados:

> Se você está na sala de aula e se nem você sabe como surgiu, quem inventou essa fórmula, o que é, de onde saiu? Então fica difícil, também, você querer motivar um aluno a se interessar por isso, se nem você conhece isso (profesor A).

> Eu acho que nunca ninguém pensou na relação propriamente da História, talvez os matemáticos puros fizessem isso quando tentavam resgatar teoremas antigos, talvez eles fizessem alguma coisa, mas os professores que eu tive, em si, nunca fizeram nada em sala de aula (profesor B).

> Existe um abismo de formação aí. Porque existem indicações nas diretrizes curriculares[3], que haja HM. Por outro lado, uma parte das pessoas nunca teve. E quem vai dar essa aula? (profesor D)

> […] as aulas de História da Matemática eram ministradas por um matemático profissional com interesses em produção e pesquisa em Matemática, e não necessariamente alguém vinculado profissionalmente com a profissão de História da Matemática, História da Ciência, ou História de maneira geral. De fato na graduação, não tive nenhuma formação adequada em História da Matemática. (profesor G)

4.2.2 HM como contextualizadora de conceptos

Los profesores E y F, afirman que la HM ofrece una explicación para los orígenes y surgimiento de ideas, asegurando que la explicación de la Matemática por sí misma, sin contextualizar ni aplicar, es instrumental, y aparece poco natural y desvinculada de los procesos que llevaron a su evolución.

> Se você ensina matemática sem falar de sua fundamentação teórica e sem falar de aplicações, o que sobra é uma matemática muito instrumental. Isto é assim, calcula assim, e resolve um exercício assim. E aí a HM, para mim acaba sendo um instrumento extremamente rico e forte, de dar ao aluno uma contextualização daquele conceito, uma percepção daquele conceito. (profesor E).

> Si, en todos mis cursos de Matemática hablo de Historia. Claro, hablo poco, pero cada vez que voy a introducir un concepto nuevo, trato de decirle a los alumnos de donde viene, quien lo introdujo y porqué. Cuáles eran los problemas del momento que hicieron que fuera natural pensar en eso (profesor F).

Como también fue comentado por (Fauvel y Van Maanen, 2000) y Matthews (1994), afirmamos que separar la educación en ciencias de su Historia, además de empobrecerla le quita la posibilidad de ofrecer una comprensión y abordajes más amplios.

4.2.3 HM para entender a la Matemática como construcción social, actual y humana

A partir de los siguientes fragmentos entendemos que varios profesores se muestran entusiastas frente a la posibilidad de presentar a la Matemática como una ciencia actual y como construcción humana a través de la Historia, lo cual es sustentado también por De Guzmán (2007), Barbin (2006), Tzanakis y Arcavi (2000), y Matthews (1994):

[3] La referencia es sobre los Parametros Curriculares Nacionais – PCN.

> […] se a matemática fosse olhada mais como uma construção social, ou como as pessoas da filosofia da matemática (elas têm desenvolvida uma espécie de visão da matemática como uma construção histórica e social e não como uma coisa num sentido platônico, de preexistência), a matemática acaba perdendo um pouco desse caráter de divisor de águas, ou seja, ela se aproxima um pouco mais na área de humanas, e os recursos típicos como a linguagem, que é desenvolvida a partir da necessidade do relacionamento humano. (profesor D)

> […] qualquer assunto que eu vou falar, eu sempre respondo essas perguntas como perguntas iniciais: "Isso é obra do ser humano, não é obra de um extraterrestre" foram pessoas que fizeram. Se possível identificar um autor, como é o caso: "Séries de Fourier", tem a figura do Fourier, alguns conceitos eles estão mais espalhados ao longo de uma janela temporal e geográfica maior, então não dá para dizer que foi o fulano "A" quem criou o conceito de função, ele foi evoluindo de maneira natural. Mas de qualquer maneira, sempre respondo essas perguntas: "quem foram os agentes, os atores humanos, que criaram esse conceito?", "em que época isso ocorreu na história da civilização?", "em que lugar isso ocorreu?", e "o que motivou que esse conceito fosse estudado?". Muitas vezes precisa ser muito resumido isso, porque às vezes as perguntas são muito difíceis […] (profesor E).

4.2.4 HM como demostrativa de errores cometidos por científicos, de la evolución de los conceptos y de la concepción de demostración

Al respecto de este tópico y como ya fue comentada y discutida la posición de Kuhn (2004), entendemos que tales argumentos no tienen sustento frente a una visión crítica de la Historia, que busca discutir la legitimidad absoluta promulgada por la ciencia. El siguiente fragmento del profesor A nos muestra su interés en el tema pero no una reflexión profunda al respecto de su vínculo en la formación de profesores:

> Contar como foram as descobertas dos cientistas, do passado, os erros que eles interpretavam de alguma forma, o que era para eles até quem mostrou o correto. É hoje que conseguimos entender como uma teoria estava completamente errada, mas que foi evoluindo. (profesor A)

El profesor D hace mención a la formación de profesores, y coloca a la HM en un lugar diferente del factual, afirmando que la HM debería ofrecer la posibilidad de desarrollar un sentido crítico respecto de las verdades establecidas en algún momento por la ciencia:

> Na minha visão, o conhecimento histórico que o professor precisa ter não é muito factual, claro que isso também ajuda a contextualizar, mas o que é mais importante é perceber pela História como os conceitos de matemática se desenvolvem e se relacionam, como eles se organizam, logicamente de uma forma mais psicológica. [...] Por exemplo, alguns resultados da História têm erros, como alguns matemáticos afirmaram coisas que depois se comprovou que eram falsas. Isso eu acho que desenvolve essa criticidade que a gente tem que ter em todas as áreas de conhecimento (profesor D).

4.2.5 HM como motivadora para la enseñanza

Como fue comentado desde Miguel (1993), la utilización de este argumento genera algunas controversias:

> Não me importava com a HM, achava que era uma coisa que o aluno deveria aprender. Mas depois vi que usando HM e matemática, as coisas melhoraram. Aumentou o carinho dos alunos pela matemática, então mais por estarem motivados, eu acho que é uma ferramenta muito interessante dentro de sala de aula, até no ensino superior estou fazendo isso também. (profesor C)

> En los cursos que he dado sobre Historia de Grupos, o Historia de Anillos, uno ve el deseo de las personas por conocer la Historia. Cuando doy alguno de esos cursos, se llena la sala, la gente está viva, está activa. No es aquella pasividad de escuchar un teorema tras otro. (profesor F)

> Não gosto de pensar, simplesmente, que a História da Matemática é importante para motivar mais aos alunos, e entender os conceitos de Matemática. Isso, acho que pode ser que sim, ou pode ser que não, os professores motivam de muitas maneiras. Motivam com desafios, motivam com aplicações, motivam com História da Matemática. Motivação é o de menos. Eu acho que para se chegar ao significado dessa prática de nossa sociedade, é preciso algum tipo de metalinguagem. (profesor G)

La diferencia entre los dos puntos de vista radica en que los primeros asumen que sin importar los objetivos ni el método de presentación, la HM motiva a los estudiantes, y el segundo explica que eso depende de la competencia del profesor.

4.2.6 HM como narrativa – informativa

La HM puede ser utilizada para dar información sobre algún acontecimiento, y esos casos algunos profesores entienden la importancia de la contextualización y optan por hacer una narrativa:

> Eu teria que fazer todas as somatórias, todas as justificativas, calcular seus coeficientes, mostrar o significado de cada um daqueles coeficientes, do mesmo jeito. Só que tem uma narrativa em que eu gasto pouco tempo a mais, e o pouco tempo que eu gasto a mais, é para falar: “olha, Fourier queria estudar o problema da equação do calor”. Qual era o problema exatamente? Tinha extremidades com temperaturas fixa, condução de calor era linear, não tinha perda do calor lateral. Por conta disso, ele conseguiu ter esta equação para resolver, uma equação em derivadas parciais. E era isso que Fourier tinha em mãos. Então se você gasta quinze ou vinte minutos, e o resto do tempo é o mesmo tempo que você gastaria, só que ele está conectado com uma narrativa, que é uma narrativa de carácter histórico, e que na minha percepção faz muita diferença para que os alunos sintam que aquela matemática faz sentido, que essa matemática tem uma razão de ser. (profesor E)

El profesor F expresa la falta de información sobre HM y su buena recepción frente a los cursos ofrecidos:

> Tenemos dos cursos: Historia 1, desde los comienzos hasta el Renacimiento; e Historia 2, desde el Renacimiento hasta el siglo XX. Y siempre que doy esos cursos hay un montón de alumnos, me ha llegado a pasar de tener más alumnos que sillas en la sala. Realmente tienen muy buena recepción. En la Licenciatura son cursos obligatorios, y en el bacharelado son opcionales, hay otro que se llama Historia del Álgebra. Di dos veces ese curso, ampliado, pero en el mestrado. Puede verse que hay una especie de falta, de carencia de información. Cuando uno dice: “esta idea salió de aquí”, “era importante en aquel momento por tal razón”, las cosas son recibidas de otra forma. (profesor F)

4.2.7 HM y el rigor

La HM puede ser utilizada para mostrar como evoluciona el concepto de rigor y las diferencias en las demostraciones:

> Eu acho uma ferramenta muito forte para fixar ideias no aluno, enquanto e das coisas abstratas da matemática. Porque na História não existiam demonstrações. As primeiras não existiam, era só empírico, só cálculo. As demonstrações eram feitas mediante cálculo, depois isso já se formaliza. E hoje, já funcionamos com as demonstrações. (profesor C)

> [. . .] e também para constituir o conceito de demonstração, que eu acho que é uma das características mais importantes do pensamento matemático. E que a HM é a História das demonstrações (profesor D).

> El rigor fue cambiando mucho. Hay un episodio famoso cuando se discutía sobre resolubilidad de ecuaciones. El primero que demostró que una ecuación de 5to grado, no puede resolverse por radicales fue Ruffini. Algunos años después, Abel escribió un artículo diciendo que el trabajo de Ruffini no era totalmente riguroso y que él lo iba a hacer bien. Y cuando uno lee ese artículo se pregunta: "¿donde está el rigor de Abel?". Es más riguroso que el trabajo de Ruffini, y está todo correcto pero uno se pregunta: "¿esto lo demostró o lo intuyó?". Para nuestros padrones actuales, siguen existiendo lagunas (profesor F).

Esta perspectiva de utilización de la HM puede ser importante para la formación de profesores, una vez que, como vimos desde Barbin (2006) y De Guzmán (2007), conseguir mirar conceptos, conjeturas y pruebas del pasado, sin interpretarlos como equivocados, permite al profesor mostrar a sus alumnos la dinámica de la construcción matemática, aceptando que errores en la actualidad pueden haber sido aceptados como verdades en el pasado.

4.2.8 HM y el vínculo con la realidad

Algunos profesores comentan la importancia de establecer conexión entre la Matemática y la realidad, interpretando que varias de las preguntas de los alumnos representan la necesidad de tener una aplicación de aquella Matemática con lo que está en contacto:

> Eu acho que o aluno desse nível, precisa saber "porque isso?" não só ficar com aquilo que está no livro, está lá e temos que aceitá-lo, tem que se demonstrar, mas, ir a origem do que aparece no teorema, como a matemática liga os conceitos abstratos com o mundo real. Eu acho que para estabelecer essa relação com o mundo, pode ser por meio da HM. (profesor C)

> […] Eu acho que essa temática da História no que se refere ao seu valor didático, está muito associada às concepções do próprio ensino, relações interpessoais, o quê os professores acham que é importante desenvolver nos alunos. Eu não creio que seja somente para tornar a aula mais agradável, eu tenho expectativa de que ela ensina melhor, ela faz a disciplina ser ensinada de uma forma mais crítica (profesor D).

> Eu não tenho dúvida nenhuma que para o professor de matemática, ela [a História da Matemática] é absolutamente fundamental. O professor de matemática, não deve apenas dominar o conteúdo técnico, o professor de matemática, tem que entender

> como é que se dá a existência da matemática nessa sociedade. Então, seja pela História da Matemática, seja pela Sociologia da Ciência, por algum caminho o professor de matemática precisa entender o quê que é a matemática nesse mundo. Que interesses sociais, políticos, econômicos, filosóficos a Matemática tem, ou que interesses ela segue. Como que a Matemática é mobilizada pela sociedade, acho que isso é fundamental para o professor de Matemática, para poder pensar a contribuição da Matemática no currículo (pensar em todas as disciplinas), para, no mínimo pensar a relação da Matemática com os outros campos do conhecimento. (profesor G)

Estas concepciones nos orientan a pensar que la HM contribuye a una cultura necesaria para el futuro profesor de Matemática y su desempeño respecto a las preguntas y explicaciones a los alumnos.

4.2.9 HM y la cuestión del tiempo

Entre los profesores entrevistados existe la preocupación de que trabajar con contenidos matemáticos desde una perspectiva histórica implica tiempo extra de trabajo, sin embargo también existen opiniones que relativizan ese argumento:

> Acho que eu não teria condições de dar esse tipo de conteúdo de uma forma muito extensa. Talvez uma coisa mais rapidinha porque os conteúdos já são de uma quantidade muito grande. Se eu começar o curso com essa parte de História, que não seja de matemática, eu acho que vou acabar perdendo um pouco de tempo. Não digo perder tempo, mas não vou conseguir atingir todo o conteúdo de jeito nenhum. Tem que ser uma coisa mais rápida. Então, às vezes, eu acho que não é que não seja possível trabalhar [a HM], eu acho que até dá, mas tem que ser uma introdução, ou uma coisa mais rápida. […] Eu não vejo essa aplicação, não. Eu acredito que o principal motivo seja o tempo. (profesor A)

> Agora na minha experiência, depois de tantos anos lecionando, vejo que há uma preocupação com relação à organização do tempo, que faz com que as pessoas não queiram falar de História porque não dá tempo. Mas na verdade o que eu percebo às vezes é que o tempo acaba sendo mais aproveitado se você elabora uma aula mais interessante, porque os alunos costumam perceber melhor suas intenções. (profesor D)

> Não dá para fazer muito disso nas disciplinas tradicionais, porque você não tem muito tempo, mas acaba se gastando mais ou menos o mesmo tempo, com um nível de aproximação do aluno muito maior. O tempo que eu gasto para contar a História da equação do calor, quando vou ensinar séries de Fourier, é o mesmo que eu gastaria sem contar a história, eu vou contando a história da equação do calor, e eu vou ensinando a calcular a série de Fourier, o que eu ensinaria do mesmo jeito. (profesor E)

> El único inconveniente de esta modalidad, es que consume tiempo. Para uno, como profesor, algunas veces consume mucho tiempo descubrir como se desarrolló determinado concepto. Porque muchas de esas cosas no están, y no aparecen en los libros. [...] por un lado, requiere bastante trabajo, para preparar cada tema, y por otro lado, el tiempo que uno gasta en Historia, es tiempo que no está dedicado a Matemática. (profesor F)

5. Interpretación / re-interpretación

Es necesario aclarar que dentro de la perspectiva de la HP, en tanto que nos apropiamos de las lecturas, textos, fuentes y autores, ya estamos realizando interpretaciones. En este sentido, al momento de escribir las conclusiones, estas son las interpretaciones de aquellas primeras, es decir, las re-interpretaciones. Siendo así, dos consideraciones son posibles: por un lado respecto a la HM como recurso pedagógico, y por otro, sobre la HP como metodología de investigación.

La HM continúa siendo un recurso pedagógico de interés para los profesores, con diversas potencialidades para el trabajo en la clase y aunque son presentados varios argumentos negativos, apostamos a la elaboración de materiales especializados, hechos por y para profesores, aportando a la discusión sobre la influencia que puede tener la HM en las competencias profesionales de los futuros profesores de matemática.

En relación a la HP, es posible afirmar que es una metodología emergente que por su característica de flexibilidad, puede ser utilizada en diversas investigaciones cualitativas, siendo una herramienta legítima tanto para el análisis de entrevistas –como ha sido en esta investigación– como para el análisis de fuentes históricas y otras manifestaciones de formas simbólicas.

Bibliografía

Andrade, M. M. *O referencial metodológico da hermenêutica de profundidade (hp) como aporte teórico-metodológico numa pesquisa em história da educação matemática.* In: Anais do I ENAPHEM. Vitória da Conquista/BA: Enaphem 1, 2012.

Barbin, E. (2006). Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignements. *Tréma* [en ligne], n. 26. Recuperado en diciembre de 2016, de http://trema.revues.org/64

Beltran *et al* (2014). *História da Ciência para formação de professores*. São Paulo: Livraria da Física, CAPES/OBEDUC.

Bkouche, R. (2000) Sur la notion de perspective histoirique dans l'enseignament d'une science. *REPERES–IREM* [en ligne], n. 39. Recuperado en abril de 2014, de http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/39bkouche.pdf

Cardoso, V. C. (2009*). A cigarra e a formiga: uma reflexão sobre a Educação Matemática brasileira da primeira década do século XXI.* Tesis de doctorado en Educación – UNICAMP, Campinas, Brasil. Recuperado en diciembre de 2016, de http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000447104

Cardoso, V. C. *et al*. (2013) *A hermenêutica de profundidade como possibilidade metodológica para as pesquisas em educação matemática.* Anales del XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Contreras, L. (1998) Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. [en línea]. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Huelva, España. Recuperada en diciembre de 2016, de: http://www2.uhu.es/luis.contreras/Tesistexto. htm

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de educación* [*en línea*], 43. Recuperado en diciembre de 2016.

Fauvel, J. y Van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: An ICMI study*. [S.l.]: Springer Science & Business Media.

Garnica, A. V. M. Um ensaio sobre as concepções de professores de matemática. Educação e Pesquisa, SciELO Brasil, v. 34, n. 3, p. 495–510, 2008. Recuperado en diciembre de 2016, de http://www.scielo.br/pdf/ep/v34n3/v34n3a06

Kuhn, T. *La estructura de las revoluciones científicas*. [S.l.]: Fondo de cultura económica, 2004.

Lemes, A. J. (2015) *A história da matemática como recurso pedagógico: uma análise hermenêutica sobre as concepções de alguns professores*. Disertación de maestría en Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática – Universidad Federal do ABC, San Pablo, Brasil.

Matthews, M. R. (1994). *Historia, filosofía y enseñanza de las ciencias: la aproximación actual. Enseñanza de las Ciencias*, 12(2), 255-277.

Miguel, A. (1993) *Três estudos sobre história e educação matemática*. Tesis de doctorado en Educación Matemática – Faculdad de Educación, Universidad Estatal de Campinas, Campinas, Brasil.

Miguel, A. y Miorim, M. (2005) História na educação matemática: propostas e desafios. [S.l.]: Autêntica, San Pablo, Brasil.

Nobre, S. (2012). A disciplina acadêmica “história da matemática” na formação de profissionais em matemática. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*. [*en línea*], 19. Recuperado en diciembre de 2016, de http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12768

Thompson, J. B. (2000) Ideologia e Cultura Moderna: Teoria Social crítica na Era dos Meios de Comunicação de Massas. 5ª ed. Petrópolis, Ed. Vozes.

Ana Jimena Lemes Pérez
Master en Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática, por la Universidade Federal do ABC (UFABC, Brasil). Diplomada en Perfeccionamiento en la Enseñanza de la Matemática en la Formación de Profesores y profesora de Matemática por el Instituto de Profesores Artigas (IPA, Uruguay). Actualmente es alumna de doctorado en la Université de Lille 1, Francia. jimena.lemes@ufabc.edu.br

Virgínia Cardia Cardoso
Doctora en Educación por la Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP, Brasil). Actualmente se desempeña como profesora de la Universidade Federal do ABC, con experiencia en el área de Educación Matemática, Filosofía de la Educación, Historia de la Matemática y Hermenéutica Profunda, en San Pablo, Brasil.
virginia.cardoso@ufabc.edu.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 78-91

Jogos de Linguagem entre Professor e Alunos: Possibilidades de Aprender e Ensinar Matemática

Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Fecha de recepción: 11/01/2017
Fecha de aceptación: 14/05/2017

Resumen	Este texto tiene el objetivo de discutir cómo el énfasis en el lenguaje puede contribuir a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, más específicamente a través de juegos de lenguaje, uno de los principales conceptos de la filosofía de Wittgenstein. Nos apoyamos en esta filosofía y en investigaciones educativas para analizar los lenguajes que circulan en las clases de matemáticas, la interpretación y aplicación de reglas matemáticas, así como destacamos algunas interacciones entre maestros y estudiantes y entre los propios alumnos cuando buscan un mismo universo discursivo. **Palabras clave**: Enseñanza. Aprendizaje. Matemáticas. Juegos de lenguaje.
Abstract	This text aims to discuss how an emphasis on language can contribute to the teaching and learning of mathematics, more specifically by means of the language games, one of the main concepts of Wittgenstein's philosophy. We rely on this philosophy and in educational research to analyze how languages that circulate in mathematics classes, the interpretation and application of mathematical rules, and also we highlight some interactions between teachers and students and among the students themselves when they seek the same discursive universe. **Keywords**: Teaching. Learning. Mathematics. Language games.
Resumo	Este texto tem o objetivo de discutir como a ênfase na linguagem pode contribuir para o ensino e a aprendizagem da matemática, mais especificamente por meio de jogos de linguagem, um dos principais conceitos da filosofia de Wittgenstein. Nos apoiamos nesta filosofia e em pesquisas educacionais para analisarmos as linguagens que circulam nas aulas de matemática, a interpretação e aplicação de regras matemáticas, bem como destacamos algumas interações entre professores e alunos e entre os próprios alunos quando buscam um mesmo universo discursivo. **Palavras-chave**: Ensino. Aprendizagem. Matemática. Jogos de linguagem.

1. Introdução

A educação matemática está constantemente buscando diferentes metodologias para que o professor tenha êxito em sua tarefa docente. Esta preocupação está pautada nos alarmantes resultados insatisfatórios dos estudantes brasileiros na disciplina de matemática. Nas universidades, muito se tem pesquisado para que este quadro desolador melhore, pois, os professores de matemática tentam buscar soluções amparados em diferentes teorias educacionais. Muitas destas pesquisas estão pautadas no construtivismo piagetiano que trabalha com um sujeito consciente que constrói seu próprio conhecimento na reflexão de suas ações com o objeto de estudo, tais como Becker (2012), Caetano e Pirola (2010).

Entretanto, nosso texto analisa a ênfase na linguagem como uma alternativa de buscar o êxito no ensino e na aprendizagem da matemática. Para tanto, nos apoiaremos na filosofia de Ludwig Wittgenstein que nos aponta para caminhos diferentes das teorias educacionais vigentes. Gottschalk (2015) nos esclarece como boa parte das questões epistemológicas podem ser dissolvidas pela terapia filosófica de Wittgenstein com consequências para o campo educacional. A autora afirma que a concepção referencial da linguagem - concepção que considera apenas a sua função descritiva tal que para cada palavra existe um referente -, designa o uso dogmático de certos conceitos educacionais, tais como: ensino, aprendizagem, avaliação, com consequências nas práticas educacionais. Essa concepção admite significados extralinguísticos por trás do uso das palavras, tal como um significado no mundo empírico (externo) ou um significado mental (interno). A autora nos mostra que, ao contrário, na terapia filosófica o significado da palavra está ligado à sua aplicação. Concordamos com Gottschalk, pois nossa perspectiva educacional é pautada na linguagem, mais especificamente no seu uso.

Portanto, nosso objetivo é refletir como os jogos de linguagem – um dos conceitos importantes da filosofia do segundo[1] Wittgenstein – podem auxiliar a elucidar os problemas de ordem linguística que professores e alunos enfrentam quando lidam com a linguagem codificada da matemática. Esses jogos possibilitam a discussão dos conceitos entre os alunos e o professor, como também entre os próprios alunos, de forma que na comunicação possam dissolver os problemas encontrados no uso da linguagem e na compreensão das regras que governam os enunciados matemáticos. Professor e alunos tentam participar de um mesmo universo linguístico para que as palavras pronunciadas tenham um mesmo significado, tenham uma forma de vida.

Para esta discussão buscaremos elucidar alguns conceitos da filosofia da linguagem de Wittgenstein, tais como jogos de linguagem, semelhança de família e sua discussão sobre seguir regras. A filosofia da matemática de Wittgenstein nos proporciona inspiração para a análise de alguns temas discutidos atualmente na educação, tais como, a contextualização dos conceitos matemáticos no cotidiano dos

[1] A filosofia de Wittgenstein é costumeiramente designada por seus comentadores em duas etapas, a primeira referente a obra do *Tratactus* e a segunda referente a obra *Investigações filosóficas*.

alunos em atividades de sala de aula, bem como algumas características da linguagem matemática.

Neste texto foram tratamos das linguagens que circulam nas aulas de matemática, das características da linguagem natural e da linguagem matemática; discutimos a interpretação e aplicação de regras e os possíveis jogos de linguagem que podem ser constituídos na sala de aula, e como conclusão tecemos considerações sobre as ideias discutidas no texto.

2. Linguagem matemática e linguagem natural

A linguagem natural é polissêmica e é por isso que nossa comunicação sofre interferência dos equívocos gerados dos muitos significados das palavras que pronunciamos. Na linguagem matemática, no entanto, há uma objetividade que não oferece margens para mal entendidos quando tratamos dos conceitos matemáticos. Essa linguagem é codificada de tal forma que sintetiza ideias matemáticas sem recorrer às palavras da linguagem natural, e ela pode estar representada por expressões algébricas, gráficos, figuras ou numerais, ela descreve aquilo que não conseguimos nomear em linguagem natural, tal como, por exemplo, enunciar todos os números reais compreendidos entre zero e dois, ese fato pode ser representado pelo conjunto $\{x \in \Re / 0 \leq x \leq 2\}$. Sabemos que entre zero e dois existem infinitos números, tais como: 0; ...; 0, 0003; ...; 0,12308; ...; 1; ...; 1,05; ...; 2. Não conseguimos dizer todos os números desse conjunto, daí nada mais natural que abreviarmos por uma notação matemática que subentenda os números do intervalo fechado de zero a dois e que pode também ser representado por [0, 2]. Essa linguagem expressa o que não podemos enunciar por meio de palavras da nossa linguagem natural.

No entanto, quando é apresentado para o aluno um enunciado escrito em linguagem matemática é bem possível que tenha dificuldades de compreende-lo, uma vez que um texto escrito nesta linguagem possui um resíduo – aquilo que está subentendido e que foi excluído no processo de formalização (Granger, 1974). A matemática enquanto conhecimento rigoroso revela traços de um certo ideal. Segundo Granger (1989), para termos o rigor devemos eliminar a intuição e por este motivo o rigor obriga o matemático a ser criativo. O rigor deve passar inicialmente pelo aperfeiçoamento da linguagem que não pode conter equívocos, tais como aqueles que podem ser gerados por nossa subjetividade. Assim, busca-se eliminar a interferência da intuição para lidarmos com o exato**.** Por exemplo, não basta que uma figura pareça um triângulo retângulo, para representar um triângulo retângulo a figura deve conter o símbolo matemático que o identifica como tal.

Na escola mesmo que o estudante seja criativo em matemática, ele sabe de antemão que existe uma resposta prevista para uma determinada questão, tal como aquela que está no gabarito do professor ou no final do livro texto na seção dedicada às respostas dos exercícios. Existe uma relação interna dos conceitos matemáticos que caracteriza um automovimento (Caveing, 2004) e uma relação externa que é empírica. No automovimento da matemática os conceitos matemáticos são criados um em função do outro formando uma rede conceitual. Se temos o conjunto dos inteiros é porque o conjunto dos números naturais não dava mais conta de responder algumas questões tal como 2 – 3, assim como o conjunto dos inteiros não dava conta de explicar a raiz quadrada de dois. Portanto, por uma necessidade intrateórica é que criamos conjuntos até chegarmos no conjunto dos números imaginários.

A relação empírica da matemática é externa à própria matemática, ou seja, a matemática aplicada no cotidiano do aluno, por exemplo. A proposição três maçãs mais duas maçãs pode ser cinco maçãs para um comerciante, mas o comprador de maçãs pode não aceitar este cálculo se duas maçãs estiverem muito pequenas em relação as outras três. Este é um exemplo que mostra que a matemática aplicada na empiria, no cotidiano do aluno, pode não ser a mesma aplicada na sala de aula, já que são contextos diferentes. O professor dirá que 3 + 2 é 5, mas de acordo com o comprador de maçãs 3 maçãs + 2 maçãs pode ser 4 maçãs ao considerar que a soma das duas maçãs pequenas seja igual ao tamanho de uma maçã grande, ou seja, 3 maçãs grandes + 2 maçãs pequenas = 3 maçãs grandes + 1 maçã grande = 4 maçãs grandes.

> Portanto, depende inteiramente de nossa gramática o que será chamado possível e o que não, isto é, o que a gramática permite. Mas, com certeza, isso é arbitrário! Certamente, mas as construções gramaticais que chamamos proposições empíricas (por exemplo, as que descrevem uma distribuição visível de objetos no espaço e poderiam ser substituídas por um desenho representativo) têm uma aplicação particular, um uso particular. (Wittgenstein, 2010, p. 94)

> A gramática não é responsável por nenhuma realidade. São as regras gramaticais que determinam o significado (que o constituem) e, portanto, elas próprias não são responsáveis por qualquer significado e, nessa medida, são arbitrárias. (Ibid., p.138)

A gramática governa o uso das palavras. A proposição matemática é uma regra gramatical que determina uma significação, é um enunciado gramatical. A proposição 3 + 2 = 5 deixa de ser normativa e passa a ser descritiva na empiria, quando descreve com a linguagem que, por exemplo, 3 maçãs mais 2 maçãs são 5 maçãs. Neste sentido, podemos afirmar que um enunciado empírico não é uma regra. Isto porque a nossa linguagem é baseada em regularidades, em acordos sobre ações**:** 3 + 2 = 5 porque 5 é o resultado comum a todas as pessoas que praticam a ação de somar 3 e 2.

3. Interpretação e aplicação de regras matemáticas

> O emprego da palavra “regra” está entretecido com o emprego da palavra “igual”. (Tal como o emprego de “proposição” com o emprego de “verdadeiro”). (Wittgenstein, 1996, § 225)

Nosso mundo é guiado por regras, temos as regras sociais que tentam organizar a conduta humana para que possamos viver em sociedade, as regras gramaticais que criam uma harmonia em nossa fala e escrita para que possamos nos comunicar e também temos as regras matemáticas que orientam nossos cálculos para que todos alcancem um mesmo resultado. Muitas regras sociais com o tempo tornam-se normas, tais como a regra do trânsito que avisa ao motorista que se o sinal está vermelho, ele deve parar para dar lugar a outros condutores circularem numa estrada de forma que não haja colisão entre veículos. Agimos seguindo regras, principalmente em locais públicos somos obrigados a nos comportar de certa forma que esteja condizente aos ditames da vida em sociedade. Assim, temos critérios públicos, regras públicas que governam nossos hábitos.

> O que chamamos "seguir uma regra" é algo que apenas uma pessoa pudesse fazer apenas uma vez na vida? – E isto é, naturalmente, uma anotação sobre a gramática da expressão "seguir uma regra". Não pode ser que apenas uma pessoa tenha uma única vez, seguido uma regra. Não é possível que apenas uma única vez tenha sido feita uma comunicação, dada ou compreendida uma ordem, etc. – Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são hábitos (costumes, instituições). (Wittgenstein, 1996, § 199).

Nossa atividade linguística é guiada por regras gramaticais que têm uma forma de vida. Uma regra para ser aprendida precisa ser aplicada diversas vezes, pois não aprendemos tudo de uma só vez, necessitamos do treino. Quando uma pessoa aprende a conjugar um novo verbo, precisa aplicá-lo muitas vezes para que possa conjugá-lo corretamente sem ater-se à regra de sua aplicação, sem refletir. É assim que acontece com a aplicação de uma regra matemática**:** também é preciso aplica-la diversas vezes para compreender como utiliza-la em diferentes contextos. Quando pretendemos ensinar o aluno resolver equações logarítmicas, por exemplo, mostramos a ele a equação em que deve aplicar a definição de logaritmo para resolve-la, outra que deve aplicar as consequências da definição, outra ainda que deve aplicar as propriedades operatórias dos logaritmos e por fim, aquela que deve substituir o logaritmo por uma variável. Enfim, todos esses tipos de equações precisam ser treinados para que o aluno saiba distinguir um tipo do outro e aplicar uma regra correspondente.

> Seguir uma regra é análogo a cumprir uma ordem. Treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada. Mas como entender isso se a reação das pessoas tanto diante da ordem como diante do treinamento é diferente: um reage *assim* e o outro de *modo diferente*? Quem está então com a razão? (Wittgenstein, 1996, § 206).

A regularidade de juízos nos fornece parâmetros para decidirmos os critérios que serão adotados em nossa sociedade, inclusive às regras que guiam nossa gramática ao formularmos enunciados matemáticos. Não é uma regularidade de opiniões tal como na empiria quando nosso suposto comprador de maçãs citado anteriormente afirma que duas maçãs pequenas equivalem a uma maçã grande. O cálculo, a gramática e os jogos de linguagem seguem regras, assim como os enunciados matemáticos. O enunciado 'o triângulo é o polígono de três lados' é uma regra que diz o que define um triângulo. A regra de três, por exemplo, é empregada quando queremos determinar um elemento que consta na proporção formada pela regra. O cálculo mental também segue regras, é uma habilidade desenvolvida pelo aluno e é um modo de seguir regras publicamente aprendidas, tais como o cálculo desenvolvido no papel. Desta forma, podemos afirmar que seguir uma regra matemática é aplica-la em um determinado contexto.

O problema de interpretação de regras matemáticas pode ser ~~é~~ também um problema de comunicação. Muitas vezes, a regra enunciada pelo professor é mal interpretada pelo aluno. Neste sentido, o professor precisa estabelecer jogos de linguagem em suas aulas para compreender como seus alunos interpretaram as regras por ele ensinadas. Se a regra não foi interpretada corretamente, é salutar que o professor retome a palavra e encontre uma forma mais adequada de dizer aquilo que pretende que seu aluno aprenda. Vejamos o exemplo fornecido por Gomes-Granell

> Uma menina de nove anos conhece o algoritmo da subtração com reserva. Quando lhe propuseram que solucionasse estas duas operações, 36 – 27 e 27 – 36, a criança aplicou a mesma regra para ambos os casos: sempre subtraindo o número menor do maior. Quando lhe perguntaram por que, a menina afirmou que a professora tinha ensinado que sempre se deve diminuir colocando o número maior em cima (Gomez-Granell, 2003, p. 265).

A menina tem razão, ela seguiu rigorosamente a regra que a professora um dia lhe ensinou, mas que não se aplica para o segundo cálculo que lhe foi proposto. A regra aplicada agora deve ser outra, mas a menina não se dá conta que o contexto é outro. Estes equívocos são normais quando nos referimos a interpretação de palavras, de regras, etc. O que devemos compreender que nosso aluno faz este tipo de conjecturas, mas como podemos saber que isto acontece? Quando fornecemos a palavra para que ele explique como compreendeu aquilo que foi ensinado pelo professor.

4. Jogos de linguagem na sala de aula

Não temos acesso ao pensamento do aluno, mas temos acesso às suas palavras ditas e escritas e estas palavras nós podemos corrigir, aperfeiçoar e até mesmo fazer o aluno refletir sobre aquilo que está dizendo ou escrevendo. Neste sentido, recorremos aos jogos de linguagem entre professor e alunos, como também entre os próprios alunos para termos acesso aos problemas relativos à linguagem. É Wittgenstein que nos aponta caminhos para que possamos compreender aquilo que nossos alunos não compreendem. A importância que o filósofo fornecia à linguagem era tão grande que na sua experiência docente em escolas primárias no interior da Áustria, ele construiu junto a seus alunos um dicionário que continha palavras com significados de suas vivências. Wittgenstein acreditava que por meio de jogos de linguagem poderíamos curar nossos males relativos à linguagem.

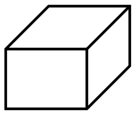
Para Wittgenstein (1996), podemos fazer uma terapia por meio de jogos de linguagem, ou seja, podemos tentar curar as doenças linguísticas, tais como as palavras que não têm sentido, palavras inadequadas, palavras com muitos sentidos, etc. Compreender uma palavra é ser capaz de emprega-la adequadamente, pois é no uso da palavra que compreendemos seu significado. A pragmática da linguagem pretende eliminar as confusões, os problemas de linguagem colocando as palavras no uso.

Quando um pedreiro diz a outro “lajota!”, seu colega de trabalho compreenderá que ele quer dizer “Traga-me uma lajota!”. Da mesma forma, na sala de aula se o professor diz ao seu aluno “calcule a hipotenusa deste triângulo!”, pode ter vida nestas palavras se o aluno compreender que deve calcular o lado oposto ao ângulo reto de um determinado triângulo. Os jogos de linguagem estão sempre disponíveis como prática do docente para ensinar matemática aos seus alunos. Nestes jogos as palavras têm vida, forma de vida quando professor e alunos pronunciam palavras que tenham o mesmo sentido.

A matemática tem sua gramática que contém as regras de uso das palavras dentro dos jogos de linguagem. O uso da matemática como linguagem torna possível o seu aprendizado e seu ensino, pois, segundo Bouveresse (1987), a matemática não constitui simplesmente uma linguagem, sua aplicação faz dela uma linguagem. Assim, podemos afirmar que os conceitos e as proposições matemáticas são instrumentos de linguagem, tal como a aritmética que trata da gramática dos números, a geometria trata dos entes geométricos, etc. Wittgenstein (1996) afirma que ao ensinarmos a aritmética estaremos dando os seus fundamentos, pois aritmética se fundamenta nos jogos de linguagem.

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos “jogos”. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios esportivos etc. O que é comum a todos eles? Não diga: “algo deve ser comum a eles, senão não chamaríamos ‘jogos’”, – mas *veja* se algo é comum a eles todos – pois, se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a *todos*, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles (Wittgenstein, 1996, p. 66).

Entre os jogos de linguagem podemos encontrar semelhanças de família, tais como aquelas encontaradas nos jogos de linguagem da matemática do feirante e os jogos de linguagem da matemática utilizada na sala de aula. O cálculo matemático desenvolvido por um feirante é diferente do cálculo desenvolvido na escola porque na feira, ele pode negociar por exemplo, preço e troco, na escola os cálculos seguem as regras da própria lógica matemática que não se negocia. Eles têm alguns pontos comuns, tais como o uso de mesmas operações, porém com finalidades diferentes, uma como comércio e outra como atividade escolar. As diferenças encontradas nos dois jogos se explicam pelo fato de quando mudamos o contexto, - do comércio para a atividade escolar - mudamos a regra de aplicação. O contexto de aplicação de uma regra dirige nosso olhar para diferentes formas de interpretação.

> Poder-se-ia imaginar que a ilustração
>
> 
>
> aparece em várias partes de um livro, por exemplo, de um livro escolar. No texto adjunto, fala-se que se trata cada vez de algo diferente: Uma vez de um cubo de vidro, outra vez de uma caixa aberta virada, de uma armação de arame que possui esta forma, de três tábuas que formam um ângulo. A cada vez o texto interpreta a ilustração (Wittgenstein, 1996, p. 254).

Para o filósofo, o "conceito de aspecto é parente do conceito de representação. Ou: o conceito 'vejo-o agora como...' é parente de 'represento-me agora *isto*'" (Wittgenstein, 1996, p. 277).

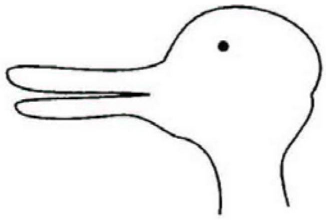


Figura 1. Lebre-pato de Joseph Jastrow (1901).

Existem diferentes técnicas para ver um objeto. Na Figura 1 podemos ver ora um pato, ora um coelho. Uma forma de ver não é necessariamente melhor do que a outra. Esta experiência de ver um determinado objeto é necessária para treinarmos nossos modos de ver as coisas que nos aparecem. Nas aulas de matemática, podemos ver 8 como 2^3 ao resolver exercícios de equações exponenciais, ver $\frac{2}{3}$ como $\frac{4}{6}$ ao resolver problemas que envolvem o uso de frações equivalentes, ver a diagonal do quadrado como a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos *l*, nas atividades de trigonometria, ver $2\frac{1}{5}$ como $\frac{11}{5}$ na transformação de um número misto em fração, dentre outros exemplos, mostram que ver um aspecto peculiar em determinados objetos matemáticos que podem facilitar a compreensão de conceitos. Para isso, precisamos treinar o olhar de nosso aluno para que consiga perceber as transformações matemáticas necessárias, porém, para que isto aconteça ele tem que conhecer técnicas, tais como, decompor um número em seus fatores primos, compreender o papel da diagonal do quadrado, transformar um número misto em fração, e assim por diante. Semelhante a um artista que conhece as técnicas de pintura de obras artísticas, nosso aluno pode conhecer as técnicas para, por exemplo, desenhar um trapézio. Neste sentido, o filósofo nos adverte

> "É um pensar? É um ver?". Não seria isso equivalente a "É um *interpretar*? É um ver". E interpretar é uma espécie de pensar, e frequentemente ocasiona uma repentina mudança de aspecto. Posso dizer que ver aspectos está *relacionado* com interpretar? Minha inclinação era de fato dizer: "É como se eu *visse* uma *interpretação*". Pois bem, a expressão desse ver está relacionada com a expressão do interpretar (Wittgenstein, 2008, p. 59).

Na sala de aula, a cegueira visual é diagnosticada ao aluno que não consegue ver aquilo que é ensinado, não percebe um aspecto do objeto que é salientado pelo professor. O aluno cego para determinados aspectos precisa treinar sua visão para que consiga ver aquilo que lhe está diante dos olhos. Mas, este treino terá que ser orientado por seu professor.

Nesse contexto, o gesto ostensivo é regularmente utilizado pelo professor de matemática quando, por exemplo, quer explicar o significado da hipotenusa de um triângulo retângulo**.** Ele aponta para o símbolo de ângulo reto do triângulo e diz "a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto". Porém, este gesto pode indicar o uso referencial da linguagem quando o professor aponta para um triângulo e diz "esse é o lado *a*" e posteriormente aponta para outro lado do triângulo e diz "este é o lado *b*" e "este lado é o lado *c*, *c* é a hipotenusa". O problema do gesto utilizado com as características de apenas designar os catetos como letras *a* e *b*, bem como a hipotenusa como *c* pode trazer problemas quando trocarmos as letras que designam cada elemento do triângulo, como por exemplo, *x*, *y* e *z* ou simplesmente invertermos a ordem das letras que designam os catetos, por exemplo pelas letras *b* e *c* e a hipotenusa pela letra *a*. Isto quer dizer que o ensino pode prejudicar a aprendizagem do aluno se for por meio do gesto ostensivo com as características de mostrar os elementos de um triângulo retângulo designados apenas por letras. Por isso, insistimos no uso do significado das palavras, no caso de nosso exemplo, o conceito do que é cateto e do que é hipotenusa.

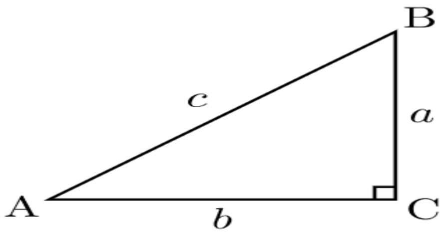


Figura 2

Este uso da linguagem é um entre tantos outros que pode ser usado pelo professor para obter sucesso em sua empreitada de ensinar seus alunos, porém temos que nos dar conta que no uso referencial da linguagem, o aluno pode pensar que o lado *c* de um triângulo retângulo sempre será a hipotenusa. E se a triângulo for retângulo em M, será que não haverá confusão para o aluno que está habituado com triângulo retângulo em C?

Para ilustramos o conceito de jogo de linguagem de Wittgenstein traremos algumas pesquisas que apontam para a problemática da linguagem em sala de aula. Iniciaremos nossa exposição com a pesquisa que envolve jogos de linguagem entre o aluno surdo (B), o professor ouvinte (P) e o intérprete (I). No diálogo abaixo temos o aluno B necessitando de reconhecimento das regras matemáticas apresentadas pelo professor (Moreira, 2015, p. 92).

> **(I)** (apontando para (P)) Ele está apenas colocando valores nesta equação (aponta para o caderno a operação $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$). Vamos trocar **– a = 1** e **– b = - 2**, mas o **a** e o **b** não podem ser menos ....lembra? Tem que ser mais.
> **Aluno B** – VERDADE
>
> **Tradução** – [Verdade].

> **(I)** – Então, o que nós fazemos?
> **Aluno B** – SABER-NÃO
> **Tradução** – [Não sei].
> **(I)** – Multiplicamos por (- 1), assim os valores continuam igual, mas os sinais trocam. Lembra-se de fazer isso outras vezes.
> **Aluno B** – SIM / LEMBRAR-EU / AGORA SABER.
> **Tradução** – [Sim, eu lembro. Agora já sei].

Na pesquisa intitulada *Os jogos de linguagem entre surdos e ouvintes na produção de significados de conceitos matemáticos* realizada por Moreira (2015) percebemos que as palavras pronunciadas pelo intérprete fazem sentido para o aluno surdo quando lhe explica aquilo que o professor lhe ensina. O papel do intérprete é justamente aquele de traduzir as palavras ditas em linguagem materna dos ouvintes - língua portuguesa - para a LIBRAS (Língua Brasileira de Sinais) - língua materna dos surdos. Os educadores que trabalham na tentativa de atender às necessidades dos alunos surdos tais como Moreira (2015) e Costa (2015), manifestam o desejo de que o intérprete, além de fazer a mediação entre as duas línguas, tenha formação em matemática para que possa traduzir com mais fidelidade as palavras ditas pelo professor.

Costa (2015) em sua pesquisa intitulada *Tradução da linguagem matemática para a libras: jogos de linguagem envolvendo o aluno surdo* apresenta a questão: Como o aluno surdo traduz textos em linguagem matemática para a Língua de Sinais? O pesquisador verificou que, muitas vezes, os alunos surdos têm dificuldades em compreender a lógica do professor, mesmo que estes alunos pareçam entender os textos matemáticos de uma maneira específica. O autor destaca que

> Para o surdo, traduzir um texto em linguagem matemática é um processo que requer tempo, haja vista que, ao se deparar com o texto, precisa recorrer ao seu vocabulário específico para poder dar sentido às palavras. Ou seja, para que a tradução seja realizada, ele precisa recorrer a sua linguagem natural e verificar os equivalentes linguísticos que fazem sentido para a interpretação do texto. Entretanto, vimos que os surdos faziam as traduções das palavras como se as mesmas fossem soltas, não havendo uma ligação entre elas, remetendo ao modelo referencial da linguagem (Costa, 2015, p. 83).

Assim, o pesquisador destaca a discussão acerca da forma adequada de se traduzir um texto matemático - a tradução palavra por palavra ou traduzir o sentido do texto matemático? - apoiado em Silveira (2014), o autor compreende que a tradução do sentido das palavras tende a ser a mais propícia, ou seja, é preferível buscar a fidelidade na tradução do texto do que apenas traduzir palavra por palavra.

Na sua pesquisa, Silva (2015) ao narrar um episódio ocorrido em sala de aula destaca que um aluno que apresentava dificuldade na escrita dos números até dez procurou a professora pedindo que lhe dissesse como deveria escrever o número nove. A professora lhe propôs que fizesse a escrita a partir do um até nove. O autor observou que durante a aula que este aluno, a cada número escrito, procurava a professora para perguntar qual seria o próximo, até que chegou no número nove.

> O aluno perguntou: "*Como ele é, o nove?*". Ela [a professora] devolveu a pergunta: "*Como é o nove?*". Ele ficou pensativo e escreveu a letra "i" no caderno e perguntou: "*É assim o nove?*". Ao olhar para o que o aluno escrevera, a professora indagou se o número nove se escrevia com a letra "i" e se o "i' era número. Como tentativa de responder à professora, o aluno apresentou respostas semelhantes, como "s", "v". A professora procurou fazer o aluno recordar das aulas sobre a escrita dos algarismos, mas o aluno insistia: "*Então, me diz aí logo!!*". A professora, então perguntou a ele: "*Eu começo: 'i', 2, 3, 4? 's', 2, 3, 4? Eu começo assim a contar?*". Ele prontamente respondeu balançando a cabeça: "*Não!*". Então a professora lançou outra pergunta: "*Qual é o primeiro número que começo a contar?*". Os alunos que estavam juntos a eles na mesa responderam: "*Um!*". E ela perguntou ao aluno (E), que respondeu: "*Um!*". Então, a professora pediu que ele escrevesse o "um" no caderno. Depois que ele escreveu o "um", a professora apontou para o número escrito no caderno e perguntou: "*Que número é esse?*". Ele respondeu: "*O 'um'!*". Ela então comemorou por ele ter acertado o número "um". Em seguida ela perguntou para ele: "*Depois do 'um'?*". Então, ela usou uma das mãos levantando o dedo indicador para indicar o "um" e em seguida levantou o dedo médio para que o aluno dissesse "dois", mas a resposta dele foi "v". (Silva, 2015, p. 49)

Este episódio mostra que as palavras pronunciadas pela professora não tinham forma de vida para seu aluno, pois ao tentar lhe mostrar o número dois levantando o dedo indicador e posteriormente o dedo médio, seu aluno percebe a letra 'v'. O diálogo não efetivou um jogo de linguagem, já que as perguntas lançadas pela professora tinham outro sentido para o aluno. O autor da pesquisa analisa a situação e constata que a professora faz um uso referencial da linguagem e argumenta que a contagem é uma técnica que precisa ser aprendida pelo aluno. Tal técnica pode ser desenvolvida pelo treino de contar números de um até dez, por exemplo. O uso contínuo de contar cria o costume até o momento que o aluno aprende com a regularidade do uso da contagem. Assim, podemos perceber que a cura para os males da linguagem, para o mal-uso da linguagem, pode ser encontrada nos jogos de linguagem, quando estes são percebidos pelo professor que procura agir imediatamente buscando uma alternativa, uma terapia por meio de algumas técnicas linguísticas.

Lacerda (2010) em sua pesquisa intitulada *A interpretação e a comunicação das regras matemáticas na resolução de problemas de divisão por alunos da 5ª série do ensino fundamental* ao propor um problema para uma turma de alunos descreve o seguinte jogo de linguagem.

> Em uma escola, 550 alunos vão de ônibus a uma excursão, junto com 25 professores. Em cada ônibus, podem ir até 50 passageiros.
> Quantos ônibus serão necessários?
> Carol: E os 25?
> Marcia: Não sei... vão na van...
> Pesquisador: Como ficaria a resposta?
> Carol: 11 ônibus e meio... (sorri)
> Márcia: Meio ônibus! (sorri)
> Pesquisador: Tem meio ônibus?
> Carol: Não...tem micro-ônibus...
> Pesquisador: Então, como seria?

Podemos perceber que a aluna Marcia ao não conseguir vislumbrar uma resposta adequada busca uma outra alternativa de solução para o problema proposto sugerindo uma van enquanto Carol sugere um micro-ônibus. O problema descreve um ônibus e não menciona nem van, nem micro-ônibus. Como o enunciado não tem sentido para as alunas, elas criam estratégias para buscar uma solução. O problema não lhes faz sentido e o que o professor pode fazer neste momento é ler e reler com as alunas as palavras contidas no enunciado até que tenham forma de vida, caso contrário o problema não terá solução.

Melo (2013, p. 80) ao discutir sua pesquisa intitulada *Dois jogos de linguagem: a informática e a matemática na aprendizagem da função quadrática* afirma

> As tecnologias informáticas possibilitam, portanto, aos usuários (alunos e professores) tanto ver o mundo como ver as coisas por um prisma diferente do que é tradicional e que se resume, por vezes, à descrição e representação da realidade como formas de aprendizagem. Recursos do computador, como *softwares*, por exemplo, numa perspectiva dinâmica da Informática como Jogo de Linguagem pretende dar sentido aos conceitos estudados em Matemática na sala de aula.

O autor salienta que uma das premissas da pesquisa que desenvolveu acena para aspectos visuais implicando na possibilidade do aluno poder ver o movimento de uma função quadrática na tela do computador – quando se manipula seus elementos - com auxílio do software geogebra. Estas atividades devem ser entendidas como ligadas a objetos matemáticos virtuais que partem dos jogos de linguagem da matemática e da informática.

Nos jogos de linguagem, os argumentos capacitam os alunos a compreender e explicar aquilo que está mal-entendido em suas falas. Eles também permitem que os alunos sintam a necessidade de chegar a um acordo na utilização das mesmas palavras no contexto da geometria. Estas trocas interativas por meio de jogos de linguagem envolvendo os alunos fornessem momentos de explicação e negociação na tentativa da busca de mesmos significados para as palavras pronunciadas. Os acordos dos alunos residem em encontrar termos comuns para decidirem o uso adequado das palavras nas aulas de geometria (Mathé, 2012).

5. Considerações finais

Dar uma boa aula é o desejo da maioria dos professores. Uns buscam apoio em materiais concretos na tentativa de fazer os alunos manipularem objetos com o intuito de que construam conceitos matemáticos por meio da reflexão das ações com tais objetos. Outros buscam apoio nos conhecimentos prévios do aluno para que a partir destes conhecimentos construam novos conceitos (Baruk, 1996). Conforme os indicadores da educação básica brasileira em escala mundial e nacional, essas e outras tentativas até o momento mostraram que não são satisfatórias, pois nossos alunos continuam fracassando em matemática. Nós apostamos no conhecimento via linguagem, onde o sujeito constrói conceitos no uso das palavras, em meio a jogos de linguagem com seus colegas e com o professor. Neste texto, analisamos alguns problemas encontrados no ensino e na aprendizagem da matemática na educação básica que concernem ao uso de palavras com sentido. Os problemas de ordem linguística podem ser resolvidos por meio de jogos de linguagem entre professor e alunos, como também entre os próprios alunos. Sabemos que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas aquilo que o aluno diz ou escreve. Nesta perspectiva, podemos recorrer ao ensino da significação das palavras, pois inclusive a matemática é circunscrita em jogos de linguagem. Sabemos que o aluno não pode descobrir por si só algo que é intersubjetivo, algo que foi construído historicamente pela humanidade e sim, ele pode compreender no aprendizado e no uso da linguagem.

Nesse sentido, tentamos mostrar que as proposições matemáticas não são empíricas, elas são gramaticais. A matemática é normativa, mas possui um aspecto utilitário que é apenas um dos usos possíveis da linguagem matemática, um dos jogos de linguagem que pode ampliar o seu entendimento. Nossas criações são precedidas por outras e não pelos fatos. A relação interna entre os conceitos, o automovimento da matemática e relação externa na empiria apontam para dois contextos diferentes.

A regra matemática não muda com o tempo, é uma necessidade, é uma convenção. Porém, a regra matemática aplicada na empiria, no cotidiano do aluno pode ser um enunciado antropológico, um acordo entre homens que está sujeito a negociações. Para mostrarmos aos alunos a diferença de acordos feitos no cotidiano e regras convencionais, nada melhor que proporcionarmos jogos de linguagem onde todos equívocos e diferenças de significado podem ser esclarecidos.

Os jogos de linguagem entre professor e alunos ou entre os próprios alunos envolvendo conceitos matemáticos possibilitam que muitas dúvidas sejam dirimidas, muitos mal entendidos, equívocos de interpretação, perguntas mal formuladas e respostas erradas, enfim, todas palavras usadas de forma inadequada sejam dissolvidas pela busca de palavras que tenham vida, palavras que tenham o mesmo significado para todos os seus integrantes.

Bibliografia

Baruk, S. (1996). *Insucessos e Matemáticas*. Lisboa / Portugal: Relógio D' Água Editores.

Becker, F. (2012). *Epistemologia do professor de matemática*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Bouveresse, J. (1987). *La force de la règle*: Wittgenstein et l'invetion de la necessité. Paris: Les Éditions de Minuit.

Caetano, R. S.; Pirola, N. A. PIROLA (2010). Alguns reflexos da didática construtivista piagetiana no ensino de conteúdos matemáticos nas séries iniciais do ensino fundamental. In: Pirola, N. A. (Org.). *Ensino de ciências e matemática, IV:* temas de investigação. São Paulo: Editora UNESP.

Caveing, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Costa, W. C. L. (2015). *Tradução da linguagem matemática para a libras: jogos de linguagem envolvendo o aluno surdo*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de

Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém.

Gottschalk, C. M. C. (2015). *A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional*. Revista Latinoamericana de Filosofia de la Educación. v. 2, n. 4, p. 299-315.

Gomez- -Granell, C. (2003). Aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. *Além da Alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática*. São Paulo: Ática. p. 257-282.

Granger, G.-G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São Paulo.

Granger, G.- G. (1989). O rigor da matemática. In.: *Por um conhecimento filosófico.* São Paulo: Papirus. p. 67-96.

Lacerda, A. G. **(**2010). *A interpretação e a comunicação das regras matemáticas na resolução de problemas de divisão por alunos da 5ª série do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Institutode Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém.

Mathé, A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, RDM vol.32.2,195-228. <hal-00943555>.

Melo, L. A. S. (2013). *Dois jogos de linguagem: a Informática e a Matemática n a aprendizagem de Função Quadrática*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará.

Moreira, I. M. B. (2015). *Os jogos de linguagem entre surdos e ouvintes na produção de significados de conceitos matemáticos*. (Tese de Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Silva, C. E. S. (2015). *Concepções de significado: implicações no ensino da matemática na alfabetização*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federaldo Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Silveira, M. R. A. (2014). *Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem*. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v.16, n.1, 47-73.

Wittgenstein, L. (1996). *Investigações Filosóficas*. Rio de Janeiro: Coleção Pensamento Humano.

Wittgenstein, L. (2010). *Gramática Filosófica*. São Paulo: Edições Loyola.

Wittgenstein, L. (2008). *Últimos escritos sobre Filosofía de la Psicologia* (Volume 1). Madrid: Tecnos.

Autora: Marisa Rosâni Abreu da Silveira**.** Possui Graduação em Matemática, Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul com Estágio Doutoral na Universidade de Paris 7 e Estágio Pós-Doutoral no Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques da Université Paris 1 (Sorbonne). Atualmente é professora associada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. marisabreu@ufpa.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 92-110

La articulación entre situaciones problema de Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal y afín

Ligia Amparo Torres Rengifo, Ofelia Angulo Vallejo

Fecha de recepción: 11/01/2017
Fecha de aceptación: 09/03/2017

Resumen

Este artículo presenta los resultados de una investigación pedagógica que articula situaciones problémicas de Proyectos Productivos Agroindustriales en el contexto de la institución educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo[1] y la función lineal. Además muestra cómo se pueden apropiar los estudiantes de grado noveno de Educación básica secundaria, de conceptos y procedimientos relacionados con la función lineal y afín, tales como: identificación de relaciones de variación, comprensión e interpretación de la regla que determina el comportamiento variacional y utilización de diferentes representaciones. Esta propuesta que tiene como referente teórico el Análisis didáctico (Rico, 1997, pp. 39-59), reconoce dificultades reportadas por investigaciones en didáctica del álgebra y favorece el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes en la escuela.

Palabras clave: Análisis didáctico, Unidad didáctica, Función lineal, Situaciones problémicas

Abstract

This article presents the results of a pedagogical research that articulates problematic situations of Productive Agroindustrial Projects in the context of the educational institution Policarpa Salavarrieta of the municipality of Yumbo and the linear function. It also shows how students of the ninth grade of secondary basic education, of concepts and procedures related to linear and related functions, can be appropriated, such as: identification of relations of variation, understanding and interpretation of the rule that determines the variational behavior and utilization Of different representations. This proposal has theoretical reference Didactic Analysis (Rico, 1997, pp. 39-59), recognizes difficulties reported by research in didactics of algebra and favors the development of students' variational thinking in school.

Keywords: Didactic analysis, Didactic unit, Linear function, Problem situations

[1] Municipio ubicado en el departamento del Valle del Cauca – Colombia.

Resumo	Este artigo apresenta os resultados de pesquisa educacional que articula situações problemáticas Produtivo projetos agroindustriais no contexto da escola Policarpa Salavarrieta município de Yumbo ea função linear. Ele também mostra como você pode apropriar-se dos estudantes da nona série do secundário de educação básica, conceitos e procedimentos relacionados à função afim linear e, como identificar índices de variação, compreensão e interpretação da regra que determina o comportamento variational e uso de diferentes representações. Esta proposta tem como uma análise didática referencial teórico (Rico, 1997, pp. 39-59), reconheceu dificuldades relatadas pela pesquisa em álgebra de ensino e promove o desenvolvimento do pensamento variacional de alunos na escola. **Palavras-chave:** análise didática, unidade didáctica, função linear, situações problemáticas

1. Introducción

Este documento presenta los resultados de una investigación pedagógica realizada como trabajo de grado de la Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle[2]. Parte de reconocer la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, la cual está relacionada, con la naturaleza misma de esta disciplina en tanto los conceptos matemáticos, al ser objetos de naturaleza abstracta, tienen determinadas características y obedecen a leyes y propiedades bien definidas, que no son asequibles a los sentidos y por lo tanto requieren para su manipulación de diversas representaciones como la representación simbólica, que implica poner en juego una capacidad de abstracción que requiere espacios amplios de tiempo para ser desarrollada. Por esta razón se les dificulta a los estudiantes, realizar la visualización simbólica de los objetos matemáticos y aún más comprender y ejecutar el proceso de transformación de un objeto desde un sistema de representación a otro.

Acerca de la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, Sfard (1991, p. 3) plantea que: A diferencia de los objetos materiales, los constructos matemáticos avanzados son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos, ellos únicamente pueden ser vistos con los ojos de nuestra mente. En efecto, aun cuando dibujemos una función o escribamos un número, somos muy cuidadosos al enfatizar que el símbolo sobre el papel es una de las diferentes representaciones posibles de alguna entidad abstracta, la cual en sí misma no puede ser vista ni tocada. El matemático haría afirmaciones acerca de la existencia y propiedades de este objeto intangible sin pensar mucho en las cuestiones filosóficas que sus declaraciones pueden evocar. Sólo casualmente un autor de un texto haría una observación de disculpa tal como esta: "No necesitamos discutir cómo estos entes abstractos... pueden ser

[2] Este proyecto titulado "Análisis de la articulación de los Proyectos Productivos Agroindustriales y la función lineal", fue realizado por Ofelia Angulo Vallejo bajo la tutoría de la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo (Mg) durante los años 2012-2013, sustentado el 7 de abril de 2014.

categorizados desde un punto de vista filosófico. Para el matemático... es importante solamente saber las reglas o leyes por las cuales estos pueden ser combinados" (Courant & Jhon, 1962, p. 2). Ser capaz de "ver" de algún modo estos objetos invisibles parece ser una componente esencial de la habilidad matemática; la carencia de esta capacidad puede ser una de las mayores razones a causa de la cual las matemáticas aparecen prácticamente impermeables a tantas "mentes bien formadas".

Con relación a lo anterior se plantea que existen dos concepciones matemáticas complementarias para definir cualquier concepto matemático, una es la concepción estructural que permite visualizar a un concepto como un objeto y la otra concepción es la operacional que permite visualizarlo como un proceso (Sfard, 1991); un ejemplo de esto, se observa con el significado del signo igual que en algunos casos actúa como símbolo de igualdad y en otros como una instrucción para obtener un resultado o realizar una operación.

Para el Álgebra en forma específica, resultados de investigaciones (Kieran, 1992, pp. 17-18), muestran que algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de esta disciplina se relacionan con un gran distanciamiento entre las concepciones estructural y operacional, que se manifiestan en las reacciones de la mayoría de los estudiantes cuando comienza el estudio de las expresiones algebraicas y no logran comprender su estructura, puesto que no han alcanzado a desarrollar el álgebra en su parte estructural; de ahí sus intentos infructuosos en: 1.) Convertir expresiones y/o situaciones problémicas en ecuaciones, 2.) Simplificar expresiones, 3.) Operar sobre una ecuación como un objeto, 4.) Entender que el signo igual es un símbolo de simetría más que el anunciante de un resultado, 5.) Considerar las letras como variables o como *cantidades dadas*, 6.) Traducir problemas de palabras a ecuaciones, 7.) Ver la estructura escondida de las ecuaciones y 8.) Usar el álgebra como herramienta para probar relaciones numéricas. Los estudiantes pretenden compensar un poco su debilidad, memorizando procedimientos y reglas, pues consideran que el Álgebra se limita sólo a esta actividad mecánica, no la conciben como la rama de las matemáticas que trata sobre la simbolización de relaciones numéricas generales, estructuras matemáticas y las operaciones con esas estructuras.

Ampliando un poco sobre estas concepciones estructural y operacional, es oportuno tener en cuenta que el pensamiento estructural dota a un concepto de "un tipo de fisonomía", el cual le permite a una persona "pensar en él como una cosa única, por más complicado que pueda ser, así como vemos un rostro de un hombre" (Hadamard, 1949, p.65). En contraste, interpretar una noción como un proceso implica considerarla como una entidad potencial más que como entidad real, la cual llega a existir bajo el cumplimiento de una secuencia de acciones. Así, mientras la concepción estructural es estática, instantánea e integrada, la concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada.

Por otro lado, varias tendencias en Didáctica de las matemáticas (tales como: el Análisis didáctico (Rico, 1997, pp. 52-53), la Teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007, p. 11), la Propuesta Fenomenológica (Freudenthal, 1983, pp. 432-460), la Educación Matemática Realista de Freudenthal (Freudenthal, 1991, p.34) reconocen la importancia del contexto para construir significado y potenciar la articulación entre esa naturaleza dual de los conceptos matemáticos (como proceso y como estructura), sin embargo la escuela aún no está atendiendo estas demandas, pues la forma como tradicionalmente se imparte la educación en el aula, no considera el contexto sociocultural e institucional en el cual se desarrolla la actividad matemática particularmente en el campo algebraico. La educación matemática es un proceso de hacer matemáticas que conduzcan a un resultado, matemáticas como un producto. En la educación matemática tradicional, el resultado de la actividad matemática de otros es tomada como punto de partida de la enseñanza, y Freudenthal (1973, p. 134) caracteriza a esto como una inversión anti-didáctica. Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma

Al respecto, Freudenthal, referenciado por Puig (1997), establece que el principal objetivo de la acción educativa es la construcción de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. Es así como la actividad matemática estaría determinada por la imagen mental que el alumno elabora sobre la naturaleza de las matemáticas por tanto, cuando se inicia el proceso por los conceptos y no por las situaciones problémicas que son las que dan sentido al aprendizaje, como generalmente se hace, sólo ocurre la enseñanza de unas matemáticas descontextualizadas, que no articula las situaciones de la vida cotidiana con los contenidos escolares, de modo que no es significativa, ni útil y tampoco favorece el aprendizaje.

Sfard enfatiza en el papel de lo procedimental como un aspecto que da sentido a la formación de los conceptos matemáticos siempre y cuando este precede al aspecto estructural (Sfard, 1991, p. 9); en relación con esta propuesta, se consideraron las características de la institución educativa en tanto que promueve los proyectos que están contextualizados o aluden a un proyecto específico y el contexto de los estudiantes en el sentido de que ellos hubieran participado en los Proyectos Productivos Agroindustriales para así propiciar la naturaleza procedimental y conceptual de los objetos matemáticos. Puesto que en la institución educativa Policarpa Salavarrieta también se reconoce que a pesar de la riqueza de su contexto estos no se articulan con lo matemático y los estudiantes también tienen dificultad en la manipulación de los objetos algebraicos, como las expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones, en este sentido se adelantó entre el 2012 y 2013 un proyecto que permitió caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y las funciones lineal y afín, mediante la propuesta de Análisis didáctico y de esta forma se contribuyó con la integración de los estudiantes en el siguiente nivel de enseñanza media, además de potenciar su aprendizaje y promover su capacidad emprendedora en beneficio de su comunidad. Se tomó una muestra de 10 estudiantes del grado 9º, cuyas edades oscilaban entre 15 y 18 años (60% con 16 años, 20% con 15 años, 10% con 17 y el otro 10% con 18 años), aprovechando su entusiasmo y motivación frente a las actividades relacionadas con la unidad productiva, para plantear el siguiente interrogante:

¿Cómo caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal y afín, mediante una propuesta de Unidad didáctica para el grado 9° de la IE Policarpa Salavarrieta?

En este sentido, este trabajo está inscrito en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, que según (Rico, 1997, p. 55), es una disciplina científica que se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos; tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático y propone actuaciones para sus transformación basadas en sus propios fundamentos teóricos. En este sentido desarrolla una Unidad didáctica fundamentada en una propuesta metodológica de Análisis didáctico que consta de 5 situaciones problémicas que parten de la variación y el cambio hasta la conceptualización de la función lineal y afín; estas cinco situaciones son: Preparación de la mezcla para pandebonos[3] y la relación uno a uno entre magnitudes, Preparación de la mezcla para pandebonos y expresiones algebraicas, Comercializando pandebonos y la función lineal, Costos fijos y la función afín y Reconociendo el modelo de función constante.

2. Algunos referentes teóricos desde el Análisis didáctico

Este trabajo se inscribe dentro de la propuesta del grupo de investigación denominado Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA)[4] que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos y algebraicos en el sistema educativo y en el medio social; estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas y algebraicas; de este referente se toma la propuesta de Análisis didáctico como marco teórico y metodológico que guió este proyecto.

En este marco de referencia se asume que el conocimiento producido al interior de la Didáctica de las Matemáticas, denominado Conocimiento didáctico, proporciona los elementos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; estos elementos son reconocidos como Organizadores del currículo de matemáticas y según Rico (1997, p. 44) son aquellos conocimientos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas.

[3] Pandebono o pan de bono es un panecillo característico en la región del Valle del Cauca en Colombia, elaborado con harina de maíz, almidón de yuca fermentado, queso y huevo, que se amasa, se forma en pequeñas porciones usualmente achatadas y posteriormente se hornean. https://es.wikipedia.org/wiki/Pandebono

[4] PNA es un Grupo de Investigación de la línea Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España) que coordina la revista del mismo nombre donde se tratan investigaciones en esta disciplina. Este grupo se constituyó como tal por la multiplicidad de vínculos entre los conocimientos numérico y algebraico, enfatizando que los problemas derivados de la enseñanza y el aprendizaje de estos dos campos son similares y que las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes ((Socas, 1999, p. 143-148).

La articulación y concreción de estos conocimientos didácticos conforman el Análisis didáctico que es un proceso cíclico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas e identificar las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto.

En este sentido, el Análisis didáctico se basa en cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación. El Análisis de contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares, el Análisis cognitivo es una reflexión e indagación acerca de por qué, cómo y cuáles dificultades, obstáculos y errores se presentan con mayor frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes al abordar el estudio de un contenido matemático particular, a su vez el Análisis de instrucción se refiere a una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que orientan la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y los procesos de evaluación y por último el Análisis de actuación que le permite al profesor determinar las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

El análisis de contenido es considerado por (Gómez, 2002, pp. 262-285), como el eje central del análisis didáctico por cuanto constituye el análisis matemático, es decir, la descripción detallada de la estructura matemática del contenido matemático que le permite al profesor dar cuenta de las relaciones existentes entre tres elementos: hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Este estudio, da especial preponderancia a el Análisis de contenido, reconociéndolo como el procedimiento que le permite al profesor establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las matemáticas escolares atendiendo a tres dimensiones que (Gómez, 2007, pp. 36-55) denomina *Estructura conceptual*, *Sistemas de representación* y *Fenomenología*.

La *Estructura conceptual* se refiere al análisis de la estructura matemática de la temática a estudiar considerando los conceptos y procedimientos involucrados y sus relaciones; los *Sistemas de representación* describen las diferentes maneras de representar esos conceptos y procedimientos señalando como se relacionan dichos sistemas de representación y la *Fenomenología* que va de la mano con la *Modelación matemática*, permite identificar familias de fenómenos en diferentes contextos y la forma cómo estos fenómenos son modelados por alguna subestructura de la estructura matemática original; estos aspectos son determinantes para una modelación matemática que esquematiza la relación de estas características con elementos y propiedades de la estructura matemática en uno o más sistemas de representación.

Para el caso de este trabajo, el Análisis de contenido se centró en el contenido escolar de la función lineal y afín, por tanto realizar el análisis fenomenológico implicó identificar como fenómenos: variaciones entre la cantidad en gramos de los elementos utilizados como materia prima, entre los ingresos totales, entre los costos de producción y entre la ganancia obtenida y el número de pandebonos, para continuar con la modelación a partir de las situaciones de variación y cambio que admitían ser modeladas mediante la función lineal, articulando así los diferentes conceptos y procedimientos.

A propósito de la Modelación, es conveniente precisar que este proceso consiste en identificar esquemas o comportamientos que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y/o matemáticas para reconstruirlas mentalmente; en una situación problémica, la modelación permite identificar la relación entre variables y proponer un modelo que represente esta relación de modo que se pueda establecer una proyección de la variable establecida como dependiente en términos de la variable independiente. Este proceso favorece el desarrollo de procesos de pensamiento, la contextualización y en lugar preponderante los impactos de la nueva tecnología pues de esta forma se puede hacer pronósticos más ajustados a la realidad, validarlos y ajustarlos. Uno de los objetivos de este proyecto fue modelar la función lineal a partir de situaciones problémicas diseñadas considerando el contexto institucional de los Proyectos Productivos Agroindustriales particularmente la producción de pandebonos, incorporando el software Excel.2010 en algunos momentos.

2.1. Algunos aspectos sobre la Experimentación

Este estudio considera la perspectiva de Modelación de la Educación Matemática Realista, desde la postura de (Freudenthal, 1991, p. 32) denominada Matematización progresiva, que se refiere al proceso mediante el cual los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego cambiar a analizar su propia actividad matemática, permitiendo identificar dos categorías de Matematización. *Matematización Horizontal*: que se refiere a ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos, es decir convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva. Mediante este proceso matemático, los estudiantes (con ayuda del docente) logran hacer una modelación particular de la situación problema, trasladando el problema de su contexto a algún tipo de matemáticas, mediante métodos informales o pre-formales a diferentes niveles de abstracción y la *Matematización Vertical*: que significa moverse dentro del mundo de los símbolos, dentro de la matemática misma, lo cual promueve estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigorización (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática. En otros términos se refiere a la elevación del pensamiento abstracto, propiciando la reorganización de las ideas (alcanzadas en el nivel anterior) dentro del mismo sistema matemático.

El Análisis didáctico culmina con la elaboración de una Unidad didáctica que es una propuesta de aula donde el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que son objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período determinado de tiempo y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según criterios principalmente conceptuales; esta Unidad didáctica debe estar dirigida a un grupo concreto de alumnos y referirse a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto sociocultural determinado. Esta propuesta se complementa con el Análisis del contexto curricular en el cual se propone el trabajo de aula.

Después de realizar una descripción de cada uno de los componentes del Análisis didáctico, se identificaron para cada uno de los Análisis considerados en el proyecto (el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación), cuáles elementos ejercían mayor influencia para el diseño de la Unidad didáctica, lo que permitió precisar lo siguiente:

El Análisis de contenido se realizó a partir del proceso de producción de pandebonos, del cual se seleccionaron fenómenos de variación y cambio que admitían ser modelados mediante la función lineal describiendo comportamientos que denotaban dependencia entre magnitudes (materias primas vs número de pandebonos, costos de producción vs número de pandebonos, ganancia vs número de pandebonos) y podrían representarse por diversos lenguajes: verbal, tabular, gráfico o algebraico.

A partir del Análisis cognitivo se identificaron principalmente las dificultades en que incurrieron los estudiantes durante el proceso de implementación de la Unidad didáctica, el Análisis de instrucción determinó el propósito de cada una de las Situaciones que conformaron la Unidad didáctica, considerando el contenido matemático y el contexto; el Análisis de actuación que se realizó después del proceso de implementación permitió al profesor, validar el diseño de la Unidad didáctica mediante la observación y registro que hizo de lo que sucedió en su interacción con los estudiantes en términos de sus logros y deficiencias. Finalmente el Contexto curricular articuló los Lineamientos Curriculares (LCM) con los Estándares Básicos de Competencia (EBC) y permitió identificar la Modelación y el Pensamiento Variacional como los procesos determinantes en este proyecto en el marco de los Proyectos Productivos Agroindustriales (PPA).

3. La función lineal y los Proyectos Productivos Agroindustriales

Para efectos de esta comunicación se presentará la estructura general de la Unidad didáctica y se analizará sólo la primera situación, las demás se describirán brevemente.

Se diseñó una Unidad didáctica considerando que la función lineal puede ser modelada mediante la articulación de los conceptos matemáticos involucrados con los proyectos productivos agroindustriales, para ello se analizaron las características de la relación entre las variables involucradas en las situaciones propuestas y el tipo de variación determinada por dicho modelo funcional.

Esta Unidad didáctica, consta de cinco situaciones, cada una conformada por tareas y cada tarea por una serie de preguntas; cada situación tiene un nombre particular relacionado con las tareas a realizar y plantea unos objetivos en términos de propósitos y las habilidades a desarrollar en los estudiantes y una descripción de la situación a resolver.

Es importante aclarar que según el Ministerio de Educación Nacional (2006, p. 72), situación es equivalente a situación problemática, que para efectos práctico del proyecto se redujo el nombre, y corresponde al conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento aportan al aprendizaje de los estudiantes; se entiende por tareas al conjunto de actividades generadas a partir de una situación problema que movilizan un saber determinado y se entiende por preguntas a aquellos interrogantes estructurados a raíz de una tarea específica y pueden ser de dos clases: cognitivos que implican la realización de un procedimiento explícito para obtener un resultado y metacognitivos que se refieren a aquellas tareas que impulsan al estudiante a realizar asociaciones, inferencias, visualizar patrones y regularidades antes de expresar sus respuestas.

En la Tabla 1 se aprecia la estructura general de esta Unidad didáctica donde se relaciona cada situación de la Unidad didáctica con su nombre, sus respectivas tareas y el número de preguntas para cada tarea.

Situación Nº	Nombre	Tareas	Número de preguntas
1	Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Relación entre magnitudes	7
		Tarea3:Validando la relación entre magnitudes	5
2	Preparación de la mezcla para el pandebono y expresiones algebraicas	Tarea 1: Expresiones algebraicas	5
		Tarea 2: Representación Gráfica	4
		Tarea 3: Variaciones lineales con el Programa Excel	3
		Tarea 4: Afianzar manejo del Programa Excel con variaciones lineales	6
3	Comercializando pandebonos y la función lineal	Tarea 1: Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas	10
		Tarea 2: Lectura e interpretación de representaciones gráficas	11
		Tarea 3: Relaciones lineales de tendencia decreciente	6
4	Costos fijos y la función afín	Tarea 1: Relación, gráficas y expresiones algebraicas	6
		Tarea 2: Gráficas y Relaciones lineales mediante Excel	5
		Tarea 3: Lectura e interpretación de gráficas cartesianas de Excel	5
		Tarea 4: Construyendo modelos funcionales	5
5	Reconociendo el modelo de función constante	Tarea 1: Comprendiendo la situación	5
		Tarea 2: Afianzando el modelo funcional constante	6
		Tarea 3: Afianzando el modelo funcional	5

Tabla 1. Esquema general de la Unidad didáctica

Además, se tuvo en cuenta la experiencia y conocimientos que desarrollaron los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta sobre la producción de pandebono al trabajar en pro de la Unidad productiva conformada desde el año lectivo 2011. Este proceso implicó para ellos realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización.

Una Unidad productiva es la gestión de cada una de los grados de la IE Policarpa Salavarrieta desde Transición hasta grado Noveno, para concretizar el propósito del proyecto pedagógico productivo *La Tienda Agroindustrial las delicias de Pola de* comercializar los productos transformados por los estudiantes de los grados Décimo y Once (mediante el proyecto pedagógico productivo Gestionando futuro con la agroindustria), para incentivar en ellos su espíritu emprendedor y motivarlos a la conformación de microempresas agroindustriales

Una descripción de la actividad matemática que movilizan las tareas de la situación se presenta a continuación:

3.1. Situación 1 (S1): Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

Los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta han gestionado la producción de pandebono en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011. La gestión de este proceso ha consistido en realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización. En la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 g y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma; dicha masa se prepara conforme a la siguiente relación de materias primas:

Tabla 2. Relación materias primas fabricación pandebonos

Materia Prima	Cantidad en gramos
Queso costeño	4.000
Almidón agrio	5.000
Areparina	1.000
Azúcar	1.000
Mantequilla	2.000
Leche en polvo	1.000
Total de materia prima	14.000

Para esta relación de materias primas, el número aproximado de pandebonos producidos es de 250 unidades.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta las cantidades relacionadas en la tabla anterior, realice o responda lo siguiente:

1. Si se utilizan 8.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos considerando la misma receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
2. Calcule la cantidad de gramos de queso costeño requerido para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos. Explique cómo obtuvo los resultados solicitados.

3. Realice una tabla donde se muestre el número de pandebonos y los gramos de queso requeridos según los datos del punto 2.
4. Si se utilizan 2.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos sin alterar la receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
5. Calcule la cantidad de gramos de areparina requeridos para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos.

Tarea 2: Relación entre magnitudes

A partir de los resultados de la actividad anterior, realice lo indicado o responda las siguientes preguntas:

1. Calcule el número de pandebonos que sin alterar la receta se pueden producir con 240 g. de queso costeño, con 560 g., con 6.000 g. y con 4.800 g, teniendo los gramos necesarios de los otros ingredientes.
2. Complete la siguiente tabla:

Tabla 3. Relación gramos de queso costeño vs número de pandebonos

Gramos de queso costeño				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

3. Explique cómo obtuvo los resultados de la tabla anterior.
4. Determine las magnitudes y cantidades que intervienen en la situación y sus unidades de medición.
5. Escriba de qué depende la cantidad de queso utilizado en cada caso. Explique su respuesta.
6. Escriba cuánto queso se requiere para producir un pandebono, para 2, para 10.
7. Escriba una expresión que permita calcular la cantidad de gramos de queso necesarios para producir una cantidad cualquiera de pandebonos.

Tarea 3: Validando la relación entre magnitudes

A partir de los resultados del numeral 5 de la Tarea 1, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

1. Complete la siguiente tabla para el caso de la cantidad de areparina necesaria para producir pandebonos:

Tabla 4. Relación gramos de areparina vs número de pandebonos

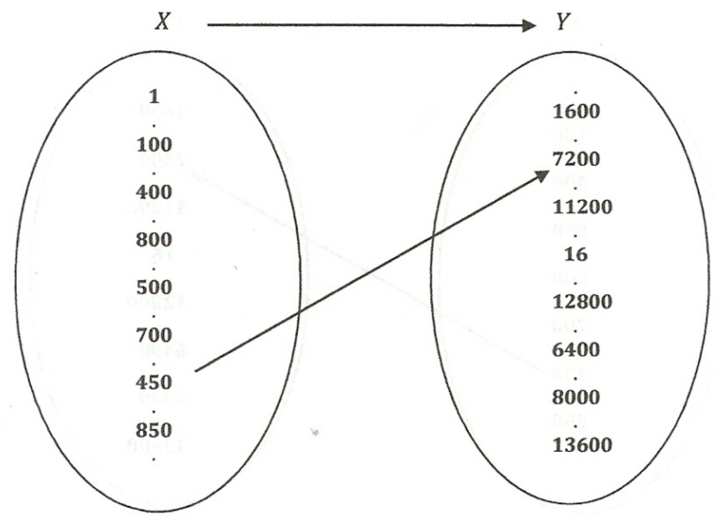
Gramos de areparina				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

2. Escriba una expresión que permita calcular los gramos de areparina requeridos para fabricar una cantidad cualquiera de pandebonos.
3. Explique la validez de las siguientes afirmaciones:

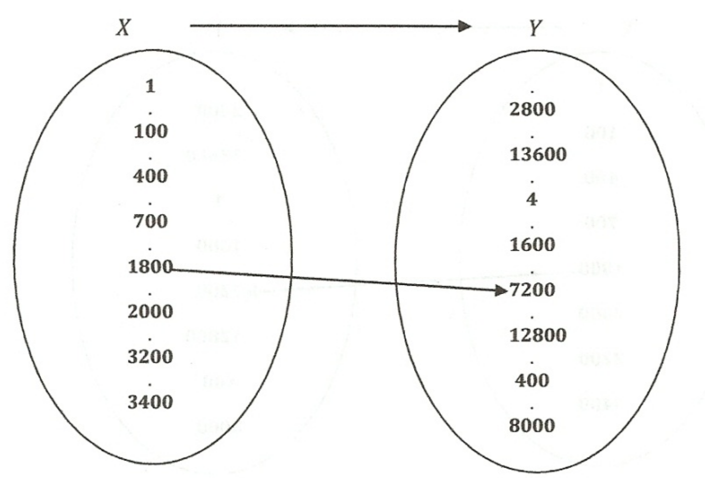
"Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad gramos de queso necesario para esta producción"

"Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad de gramos de Areparina necesaria para esta producción"

4. Complete los siguientes diagramas que relacionan:
a. Número de pandebonos (X) Cantidad de gramos de queso (Y)



b. Número de pandebonos (X) Cantidad de gramos de areparina (Y)



5. Plantee por lo menos dos situaciones, en contextos diferentes a la producción de pandebonos, en las cuales se presenten relación entre cantidades o magnitudes.

Esta situación consta de 3 tareas, cada una con un propósito específico; la Tarea 1 (Comprendiendo la situación) pretende que los estudiantes comprendan la situación, identificando el concepto de magnitud y reconociendo estos elementos en la situación dada; con la Tarea 2 (Relación entre magnitudes), los estudiantes deben identificar la relación entre las magnitudes dadas en la situación y con la Tarea 3 (Validando la relación entre magnitudes) se hace una validación de la relación entre las magnitudes identificadas con otra materia prima.

3.2. Situación 2 (S2): Preparación de la mezcla para el pandebono y expresiones algebraicas

Esta Situación consta de 4 tareas; la Tarea 1 (Expresiones algebraicas) consiste en hacer que los estudiantes reconozcan y manipulen tantos los términos variantes como los invariantes en una expresión algebraica, mediante la comprensión del significado práctico del coeficiente de la variable x, en una expresión de la forma: $y = mx$ también que manipulen una expresión algebraica para pronosticar valores de la variable dependiente a partir de valores conocidos de la variable independiente y viceversa; con la Tarea 2 (Representación gráfica) se pretende que los estudiantes pasen de un lenguaje verbal a un lenguaje tabular, identifiquen magnitudes dependientes e independientes e indistintamente calculen una magnitud a partir de otra, posteriormente pasen a una representación gráfica, reflexionen sobre la interpretación de la ubicación de un punto en el plano cartesiano; reconozcan de forma práctica el concepto de razón de cambio y su interpretación contextual; la Tarea 3 (Variaciones lineales con el programa Excel 1) busca una articulación con las TIC, haciendo que los estudiantes realicen una representación tabular y gráfica utilizando el software Excel, verificar los resultados con los obtenidos manualmente y reflexionar sobre el procedimiento técnico del software para obtener los resultados; la Tarea 4 (Variaciones lineales con el programa Excel 2), está orientada a que los estudiantes aprovechen la facilidad del recurso tecnológico, realicen una serie de representaciones tabulares que les permita analizar el efecto de aumentar o disminuir la razón de cambio y posteriormente visualicen este comportamiento a través de sus correspondientes representaciones gráficas. Para realizar estas actividades se tiene en cuenta la misma relación de materias primas de la Situación 1 que aparece en la Tabla 2.

3.3. Situación 3 (S3): Comercializando pandebonos y la función lineal

Esta Situación consta de 3 tareas relacionadas con la función lineal; la Tarea 1 (Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas), consiste en los estudiantes deben establecer una relación entre una representación tabular y las expresiones algebraicas, a partir de considerar términos económicos como son los costos de producción y la ganancia, en términos del número de pandebonos producidos, identificar relaciones de proporcionalidad directa y una reflexión respecto a la continuidad; la Tarea 2 (Lectura e interpretación de representaciones gráficas) permite a los estudiantes realizar una lectura e interpretación de una representación gráfica de forma contextualizada, afianzar el concepto de razón de cambio y el procedimiento para su cálculo, manipular indistintamente el cálculo de una magnitud a partir de otra; la Tarea 3 (Relaciones lineales de tendencia decreciente) afianza el manejo del plano cartesiano para la construcción de gráficos a partir de una representación tabular, avanza en la interpretación de los gráficos al observar su tendencia, reflexión sobre la continuidad, calculo e interpretación de razón de cambio y reconocimiento de relaciones de tendencia decreciente y finalmente el paso a una expresión algébrica.

Para desarrollar estas actividades esta Situación suministró la siguiente información; el costo de producción de 350 pandebonos ($ 108.500) que incluye el costo de las materias primas, el de transporte y de las bolsas para empaques; el precio de venta de cada pandebono ($500); además la Tarea 2 presentó dos gráficas, la de Costo de producción vs número de pandebonos y la de Ganancia vs número de pandebonos.

3.4. Situación 4 (S4): Costos fijos y la función afín

Esta situación consta de 4 tareas relacionadas con la función afín; la Tarea 1 (Relación, gráficas y expresiones algebraicas) está diseñada para que los estudiantes manipulen diferentes sistemas de representación, a partir de un lenguaje verbal pasar a un lenguaje tabular, reconociendo cantidades variantes e invariantes mediante la identificación de costos que tienen que ver con la producción de pandebonos (costos fijos y costos variables) y finalmente pasar a una expresión algebraica y utilizar esta expresión para pronosticar magnitudes. En la Tarea 2 (Gráficas y relaciones lineales mediante Excel) se afianza la construcción de tablas en Excel, dando énfasis a la interpretación del proceso instruccional para calcular la variable dependiente en este caso el costo total de producción y comparar con el proceso realizado manualmente; esta tarea implica también hacer la representación gráfica y a partir de esta hallar la razón de cambio y el punto de corte con el eje dándoles una interpretación en contexto. Con la Tarea 3 (Lectura e interpretación de gráficas cartesianas de Excel) se reafirma la construcción de tablas y gráficos en Excel para analizar su comportamiento conforme a las siguientes modificaciones propuestas: cambia el costo fijo y la razón de cambio permanece constante y viceversa, es decir el costo fijo permanece constante y la razón de cambio si varía, adicionalmente se debe escribir la expresión algebraica para cada situación. Corresponde además hacer la interpretación en contexto de los parámetros de la ecuación afín (razón de cambio y corte con el eje y). Finamente la Tarea 4 (Construyendo modelos funcionales) plantea 5 expresiones algebraicas, 2 correspondientes a la función lineal y 3 correspondientes a la afín para que los estudiantes escribieran una situación en cualquier contexto, que respondiera a la expresión dada.

Para realizar esta Situación se entrega la siguiente información; el costo total de producción de cierta número de pandebonos incluye costos fijos (generados por el mantenimiento de la infraestructura); los costos variables (generados por la materia prima y otros insumos); un costo básico estimado de $ 15.000 para cualquier producción que se realice en el laboratorio para garantizar el mantenimiento de la infraestructura; se tiene en cuenta además la información de la Situación 3 sobre los costos variables para 350 pandebonos.

3.5. Situación 5 (S5): Reconociendo el modelo de función constante

Esta Situación consta de 3 tareas relacionadas con la función constante; la Tarea 1 (Comprendiendo la situación) consiste en construir una tabla que relaciona dos magnitudes una de las cuales permanece constante (masa unitaria en gramos) mientras que la otra si varía (número de pandebonos) dando explicación de cómo se obtienen los resultados; se deben presentar los resultados en un diagrama Sagital y en el plano cartesiano, comentar sobre lo observado y proponer una expresión algebraica para este modelo funcional; la Tarea 2 (Afianzando el modelo funcional constante) toma en cuenta la siguiente propuesta: a Daniel se le ocurre una situación en la cual los pandebonos podrían ser de 60 g, 65 g, 85 g, 90, 100 g, 110 g y siempre se deben fabricar 200 pandebonos. Con la información dada se debe construir una tabla que relaciona las mismas magnitudes de la Tarea 1 pero en condiciones contrarias, es decir, el número de pandebonos permanece constante y la masa unitaria en gramos, varía. También se deben mostrar los resultados en un diagrama Sagital y hacer la representación gráfica en el plano cartesiano, comentar sobre lo observado y proponer una expresión algebraica que describa el modelo funcional; la Tarea 3 (Afianzando el modelo funcional) presenta 5 representaciones gráficas correspondientes a: una función lineal, dos a funciones afines, una creciente y otra decreciente, una función constante respecto a Y, y otra constante respecto a X, al estudiante se le solicita escribir la interpretación de lo que representa cada gráfica y proponer una expresión algebraica correspondiente.

Para esta Situación se parte de la información dada en la Situación 1 de que en la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 gramos y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma.

4. Discusión de resultados y algunas conclusiones

A continuación se presentan los aspectos más significativos alcanzados por los estudiantes participantes en el estudio de la implementación de la Unidad didáctica sobre la Función lineal y afín y la producción de pandebonos, con relación a la Situación 1:

Se observa, en términos generales, que los estudiantes determinan las magnitudes involucradas en la situación (número de pandebonos y cantidad en gramos ya sea de queso costeño o areparina), los estudiantes explican las relaciones entre estas magnitudes al reconocer que al aumentar o disminuir el número de pandebonos también aumenta o disminuye la cantidad de gramos de queso costeño o areparina, es decir están explicitando una relación de dependencia entre dos magnitudes que varían, de modo que cambios en una de ellas genera cambios en la otra; construyen y completan el registro tabular solicitado, completan el diagrama sagital y argumentan respuestas asociadas con la correspondencia entre magnitudes.

Además se puede inferir que los anteriores elementos corresponden al nivel situacional de Matematización horizontal pues reflejan una comprensión de la situación desde el contexto de producción de pandebonos. Otros elementos que también corresponde a este nivel son: el hecho de utilizar diversos procedimientos para obtener la respuesta, en tanto los estudiantes utilizan diferentes puntos de vista para visualizar el problema; de igual manera la representación de la relación de correspondencia en un diagrama sagital o una expresión algebraica, pues muestran diferentes formas para esquematizar el problema. Adicionalmente se visualiza una tendencia a ascender a otros niveles, es decir iniciar un proceso de Matematización progresiva, lo que se observa cuando los estudiantes escriben una expresión algebraica para expresar la relación, indicando con ello la identificación de una relación que se puede esquematizar y describir mediante un lenguaje algebraico.

Otro aspecto relevante de esta implementación, es que los estudiantes muestran un acercamiento a los estándares que guían esta situación, en el sentido de estar diseñada en el marco de una situación cotidiana para los estudiantes (la producción de pandebonos), condicionada por fenómenos de variación que implican dependencia entre variables y por tanto admite ser modelada matemáticamente en este caso por la función lineal.

4.1 Resultados generales y en relación a las otras Situaciones

En primer lugar la mayoría de los estudiantes determinaron las magnitudes involucradas en las situaciones (número de pandebonos y cantidad en gramos ya sea de queso costeño o areparina), explicaron las relaciones entre estas magnitudes al reconocer que al aumentar o disminuir el número de pandebonos también aumentaba o disminuía la cantidad de gramos de queso costeño o areparina, es decir explicitaron una relación de dependencia entre dos magnitudes que varían, de modo que cambios en una de ellas genera cambios en la otra; construyendo y completando el registro tabular solicitado, completando el diagrama sagital y argumentando respuestas asociadas con la correspondencia entre magnitudes.

De igual forma un alto porcentaje de estudiantes (90%) lograron: (a) la identificación de la cantidad de gramos de queso costeño y de almidón agrio requeridos para fabricar un pandebono, lo cual permite la identificación de la razón de cambio como un valor constante que representa la variación de una variable respecto a la otra, (b) el reconocimiento e interpretación de este valor dentro de una expresión algebraica, apropiación del procedimiento para calcularlo, manipulación de este valor para determinar el valor de una variable o de otra dependiendo de unos valores conocidos. Estos aspectos aparte de afianzar el reconocimiento de la relación funcional, muestran el desarrollo del pensamiento variacional, que se manifiesta cuando los estudiantes detectan las variables que cambian y el comportamiento de este cambio, es decir la variación involucrada dentro de una situación que luego representan a través de expresiones algebraicas y (c) la expresión de la relación funcional mediante diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico y algebraico y la transformación de un sistema de representación en otro; a propósito se reconoce el tabular como un sistema clave en tanto favorece la visualización de las magnitudes en juego y su comportamiento, sea que estas varíen o alguna de ellas permanezca constante; esto se presentó en las situaciones, cuando fue preciso construir una tabla y en otros donde se requería completarla.

Respecto a las gráficas, los estudiantes tuvieron oportunidad de construirlas, leerlas e interpretarlas y en cada una de estos casos se expresa la dependencia entre dos variables mediante la correspondencia punto a punto y se construye la idea de variación de una función la cual se manifiesta en conceptos relacionados con la función lineal, tales como la razón de cambio. Es preciso aclarar que hacer lectura de la gráfica, implica identificar las variables que se representan en cada uno de los ejes e identificar una coordenada de un punto (desconocida) a partir de la otra coordenada (conocida), es decir hallar el valor de una variable a partir de un valor conocido de la otra variable por ejemplo; mientras que la interpretación de la gráfica está asociada a describir la función representada de una manera global, considerando las características generales, tales como su forma, su comportamiento y sus variaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 69).

Se logró que los estudiantes realizaran la construcción de tablas y los gráficos lineales mediante el software Excel y la confrontación ante las dificultades técnicas que presenta esta herramienta para las lecturas precisas de las coordenadas de un punto.

Es conveniente resaltar el manejo que demostraron la mayoría de los estudiantes de los diferentes sistemas de representación y la transformación de un sistema en otro, lo que afianza la conceptualización sobre la relación funcional ya que cada uno de los sistemas de representación permite expresar aspectos particulares un fenómeno de variación o una dependencia entre variables; un ejemplo de la visualización de este enfoque se presenta cuando los estudiantes logran completar una tabla pues con ello muestran el reconocimiento de una regularidad, de un patrón de comportamiento que en forma intuitiva no es más que la identificación de un modelo y el manejo implícito de una expresión algebraica, y al argumentar sus procedimientos para obtener la respuesta están potencializando procesos de pensamiento tales como el razonamiento y la comunicación, de igual manera se promueven procesos de pensamientos numéricos y en especial el variacional que se desarrolla mediante la identificación de fenómenos de variación y sobre el razonamiento algebraico.

En esta dirección de la discusión, sobresale el reconocimiento por parte de los estudiantes, del modelo que subyace a la variación, equivalente a abstraer la regla de dependencia entre las dos variables, especialmente si pasan a una expresión algebraica, lo cual implica un conocimiento del lenguaje algebraico y del hecho que una fórmula de dos variables representa una función (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 81).

Desde la perspectiva de modelación se evidenció una movilización de elementos desde el nivel situacional de Matematización horizontal hacia la Matematización vertical, es decir se visualiza una tendencia a iniciar un proceso de Matematización progresiva que se caracteriza porque no hay ruptura entre un nivel y otro por el contrario es una división casi imperceptible y no se puede establecer con precisión los elementos exclusivos de un nivel y de otro, ratificando que un estudiante puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido ((Bressan & Gallego, 2011, p. 7); en este sentido se observa que comportamientos tales como la identificación de una relación entre magnitudes, la interpretación de una descripción verbal, la traducción a una representación tabular, la diferenciación de cantidades que varían y que no varían pertenecen al nivel situacional de Matematización horizontal por cuanto evidencian la comprensión de una situación y su visualización desde diferentes puntos de vista, de aquí en adelante se inicia un proceso de Matematización progresiva que conduce a la Matematización vertical caracterizada por la identificación de relaciones y regularidad entre magnitudes (nivel referencial) dado que permite la identificación del modelo que representa una determinada relación, y la utilización de diferentes lenguajes de representación (nivel general) ya que dan cuenta del reconocimiento de características similares y la conexión con situaciones anteriores.

Resulta significativo admitir además elementos implícitos dentro del hecho de que un estudiante realice el paso de una gráfica a una expresión algebraica, tales como la realización de una lectura de las coordenadas de los puntos, la identificación de las variables asignadas a cada eje, la interpretación de la escala de medición utilizada en cada caso, la interpretación de un punto de la gráfica en términos de sus coordenadas y reafirmar el procedimiento para calcular la razón de cambio e interpretarlo en términos de la tendencia de la gráfica. Solamente estos dos lenguajes, gráfico y algebraico, como lo expresan (Azcárate & Deulofeu, 1996, pp. 91-98), son potentes pues facilitan la caracterización de un modelo funcional lineal y afín, ya que la gráfica permite visualizar variaciones e intervalos constantes, crecimiento y continuidad y la expresión algebraica que permite determinar valores de ambas variables con precisión.

Otro aspecto que marca este proceso de implementación lo dejan ver los estudiantes cuando presentan la falta de una tendencia definida respecto a la continuidad o no de los puntos de una gráfica cartesiana, que es una de las dificultades que se presentan con más frecuencia en estudiantes de este nivel; otro más es la tendencia de los estudiantes a permanecer en el contexto de pandebonos que al parecer les da seguridad pues en este contexto con mayor facilidad identifican un modelo, proceso que se les dificulta en contextos diferentes; en pocos casos se presenta un acercamiento incipiente hacia otro contexto. En este sentido y respecto a la lectura e interpretación de gráficos, algunos estudiantes presentaron dificultades en el manejo de los signos de las coordenadas de los puntos utilizados para calcular la razón de cambio especialmente con coordenadas negativas y en cuanto a la expresión algebraica de la función constante, algunos estudiantes presentaron la dificultad de expresar la función en términos de X.

4.2 Visiones futuras

Estos resultados constituyen un punto de partida para diseñar otros modelos funcionales partir de las situaciones problémicas que surgen a la luz de los proyectos productivos agroindustriales, en este sentido se podrían considerar la función cuadrática, la función inversa y la función compuesta; para nuevos trabajos diseñados que tomen este como referencia, es conveniente realizar algunos ajustes en cuanto al diseño de la estructura, hacerlo más conciso eliminando preguntas que resultaron repetidas y un poco confusas.

Bibliografía

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Síntesis. Madrid.

Bressan, A., & Gallego, M. (s.f.). *La Educación Matemática Realista: Bases teóricas*. Recuperado el 2 de octubre de 2012, de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Editorial Zorzal .Traducción de: FREGONA, Dilma. Buenos Aires.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publishing Co. Holanda.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer.* Dordrecht, Reidel Publishing Co. Holanda.

Gómez, P. (2002). *Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas*. Bogotá: Revista EMA.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada. Granada.

Hadamard, J. (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press. New York

Kieran, C. (1992). *The Learning and Teaching of School Algebra*. Universidad de los Andes. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticos*. MEN. Bogotá.

Pandebono, (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 17 de abril de 2016, de https://es.wikipedia.org/wiki/Pandebono

Puig, L. (1997). *Análisis Fenomenológico*. Horsori. Barcelona.

Rico, L. (1997). *Los organizadores del Currículo en Matemáticas*. Horsori. Barcelona.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different side of the same coin*. Kluwer Academic Pubisher. Jerusalen.

Socas, M. (1999). *Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Valladolid.

Autores:

Torres Rengifo Ligia Amparo: Profesora del Área de Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali (Colombia S.A). ligia.torres@correounivalle.edu.co

Angulo Vallejo Ofelia: ofeliava@gmail.com, carrera 48 Nº 12B-60 apto 302B Plazuela I, barrio Panamericano, Santiago de Cali (Valle del Cauca), Colombia S.A.
Ingeniera Química (Universidad del Valle (UV), 1987), Magíster en Administración de Empresas (UV, 1996), Magíster en Educación énfasis en Educación Matemática (UV, 2014). Tel: 3216407072.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 111-132

Professores de Matemática e Acadêmicos Gerindo Conflitos Entre/Nos Textos em um Trabalho Colaborativo

Flávia Cristina de Macêdo Santana, Jonei Cerqueira Barbosa

Fecha de recepción: 17/01/2017
Fecha de aceptación: 12/04/2017

Resumen	El artículo presenta un estudio que tuvo como objetivo identificar, describir y analizar, en los textos que circulan sobre el trabajo de colaboracion, cómo las matemáticas y los profesores gestionan los conflictos que surgen. Utilizamos la observación como un procedimiento metodológico. Los datos recogidos nos permitieron identificar dos categorías: a) la gestión de los conflictos mediante la negociación; y b) la gestión de conflictos a través de la mediación. En general, entre los resultados obtenidos, se vetifica que la gestión de conflictos está relacionada, entre otras cosas, con la participación de los integrantes del equipo, con el liderazgo compartido y la responsabilidad compartida para la realización de las acciones. **Palabras clave**: gestión de conflictos; texto; el trabajo colaborativo; profesores de matemáticas.
Abstract	The article presents a study that aimed to identify, describe and analyze how mathematics and academic teachers manage the conflicts that arise between / in the texts circulating in a collaborative work. We use observation as a methodological procedure. The data collected allowed us to identify two categories: a) the management of conflicts through negotiation; b) the management of conflicts through mediation. Overall, among the results achieved, we point out that conflict management is related, among other things, with the engagement of the participants, with shared leadership and the responsibility for the conduct of actions. **Keywords:** conflict management; text; collaborative work; math teachers
Resumo	O artigo apresenta um estudo que teve como objetivo identificar, descrever e analisar a maneira como professores de matemática e acadêmicos gerenciam os conflitos que surgem entre/nos textos que circulam em um trabalho colaborativo. Utilizamos a observação como procedimento metodológico. Os dados coletados permitiram-nos identificar duas categorias: a) a gestão de conflitos por meio da negociação; e b) a gestão de conflitos por meio da mediação. De modo geral, dentre os resultados alcançados, destacamos que a gestão de conflito está relacionada, entre outros aspectos, com o engajamento dos participantes, com a liderança compartilhada e com a corresponsabilidade pela condução das ações. **Palavras-chave:** gestão de conflitos; texto; trabalho colaborativo; professores de matemática.

1 Introdução

As discussões sobre trabalho colaborativo têm crescido em diferentes campos da área de Educação (Roldão, 2007; Damiani, 2008; Levine; Marcus, 2010), como por exemplo, nas áreas de ensino de biologia (Almeida; Sepúlveda; El-hani, 2013; Almeida, 2014), de ensino de história (Ferreira, 2010) e de educação matemática (Peter-Koop et al., 2003; Nacarato; Grando; Eloy, 2009; Fiorentini, 2012; Oliveira; Barbosa, 2014). Uma razão para isso é que, há mais de uma década, a literatura tem apontado o trabalho colaborativo como uma alternativa promissora para o desenvolvimento profissional[1] dos envolvidos, a exemplo de professores de matemática e pesquisadores (Fiorentini, 2004; Nacarato, 2005; Nacarato, Grando, Eloy, 2009; Vrieling; Beemt; Laat, 2015). Os estudos realizados têm conceituado trabalho colaborativo como uma forma de trabalho e de pesquisa cuja dinâmica consiste em tomar como ponto de partida os problemas e desafios trazidos pelos professores da educação básica (Fiorentini, 2012b) e é marcado pelo engajamento e busca de um objetivo comum (Fiorentini, 2004; 2009; Ferreira; Miorim, 2011).

No que diz respeito ao trabalho colaborativo em Educação Matemática, área de interesse deste estudo, muitos pesquisadores têm enfatizado relações harmoniosas (Boavida; Ponte, 2002; Costa; Fiorentini, 2007; Costa, 2008; Ferreira; Miorin, 2011; Gonçalves Júnior, 2014). Entretanto, estudos como os de Achinstein (2002) e Goulet, Krentz, Christiansen (2003) sinalizam que as relações em trabalhos colaborativos também podem ser marcadas pela existência de conflitos, o que as constituem como fontes potenciais de mudanças. Provisoriamente, tomemos conflito como a diferença ou divergência entre os encaminhamentos enunciados pelos participantes em um contexto do trabalho colaborativo. Mais adiante, ampliaremos a discussão sobre esse conceito.

Segundo Johnson e Johnson (2009), os resultados de um trabalho em conjunto não dependem apenas do desempenho individual de cada um de seus membros, mas igualmente da estreita colaboração, do grau de entreajuda existente, da capacidade dessa equipe de lidar e administrar pontos de vistas divergentes. Na mesma direção, Ainley, Pratt e Hansen (2006) concordam que o conflito não deve ser considerado um problema, mas que é necessário utilizar os meios apropriados e enfatizar as estratégias mais adequadas para solucioná-lo. Corroborando Cubero e colaboradores (2008), Jaca e Diaz (2009) e Rebollo, Veja e Garcia-Pérez (2011) afirmam que os conflitos podem converter-se em situações de negociação e construção de significados compartilhados a partir da confrontação de diferentes vozes, referências, argumentos, pontos de vista.

Indícios da existência de conflitos em trabalhos desenvolvidos em parceria com professores também aparecem em artigos que dão ênfase a outros fenômenos, como os de Espinosa (2002) e Nacarato (2005). Espinosa (2002), por exemplo, mapeou assuntos ou temas discutidos no grupo e os diferentes momentos de interação entre professores e pesquisadores. Já Nacarato (2005) desenvolveu um estudo sobre o trabalho coletivo na escola, destacando as potencialidades e os riscos da colaboração. Apesar do desenvolvimento dessas investigações, percebemos que esses estudos não chegaram a focalizar a gestão dos conflitos,

[1] Com base em Ferreira (2006), compreendemos desenvolvimento profissional como um processo que se dá ao longo da vida, seja pessoal ou profissional, que não possui linearidade.

compreendida como o modo a partir do qual os indivíduos agem para abordar os conflitos.

Diante disso, na presente investigação, o objetivo foi identificar, descrever e analisar a maneira como professores de matemática e acadêmicos gerenciam os conflitos que surgem entre/nos textos que circulam em um trabalho colaborativo. Para tanto, na próxima seção, mobilizaremos conceitos da teoria de Bernstein (1990, 2000) para ampliar a discussão sobre o tema e realizar uma interlocução com a revisão de literatura; em seguida, apresentaremos o contexto, os procedimentos metodológicos adotados e os resultados dessa investigação.

2 Recontextualização reversa de textos e princípios

Inspirados nos estudos de Bernstein, compreendemos o trabalho colaborativo como uma prática pedagógica, isto é, um empreendimento social no qual há participantes encarregados de ensinar e de aprender. Nele, a responsabilidade por tais funções compete a todos os participantes, de modo que, além de identificar a “aprendizagem mútua”, podemos falar em “ensino mútuo”. No âmbito do trabalho colaborativo, a prática pedagógica pode ser vista em termos de relações entre diferentes sujeitos, como por exemplo, entre professores da educação básica no contexto escolar, entre professores de matemática e acadêmicos (pesquisadores, estudantes da graduação e da pós-graduação), e entre si.

Essas relações nem sempre são harmoniosas e podem ser marcadas por conflitos, como sinalizam algumas pesquisas (Achinstein, 2002; Goulet; Krentz; Christiansen, 2003; Peter Koop et. al. 2003). Compreendemos conflito como o embate entre os diferentes posicionamentos comunicados entre/nos textos que pertencem originalmente a diferentes práticas sociais. Usamos a expressão “entre/nos” para denotar que ele pode ocorrer entre enunciações produzidas por diferentes participantes de um trabalho colaborativo, bem como em uma enunciação própria de um dos participantes. Segundo Bernstein (2000; 2003), texto é compreendido como qualquer representação pedagógica gestual, falada, visual, espacial ou expressa no currículo; em outras palavras, é tudo aquilo que comunica na relação pedagógica.

No trabalho colaborativo com professores, é possível reconhecer duas práticas sociais de referência, que possuem textos especializados, ou seja, aqueles produzidos conforme suas próprias regras: as práticas de pesquisadores (no nosso caso, relacionadas ao campo da Educação Matemática) e as de professores. Os pesquisadores podem apresentar argumentos aos seus pares de maneira especifica, assim como professores podem debater com seus colegas de modo particular. Os textos dos professores de matemática refletem percepções enraizadas no contexto escolar, ao passo que os textos dos acadêmicos revelam posições teóricas expostas na literatura.

Seguindo Bernstein (2000), é possível verificar que não há exata correspondência entre o texto produzido por um participante de um trabalho colaborativo e a prática de origem. Isto é, textos de professores, enraizados na prática do contexto escolar, podem ser produzidos por qualquer membro de um trabalho colaborativo; o mesmo pode ser dito sobre textos de acadêmicos (pesquisadores e estudantes da graduação e da pós-graduação). Esse deslocamento de texto, seja do contexto escolar ou do contexto acadêmico para o contexto do trabalho colaborativo, ocorre por meio de um processo de recontextualização pedagógica. De acordo com Bernstein (2000, 2003), a recontextualização pedagógica constitui-se em um movimento que desloca textos e, por vezes, princípios, de um contexto a outro. Entendemos princípios como um conjunto de regras subjacentes que configuram a prática pedagógica (Bernstein, 1996).

O conceito de recontextualização pedagógica é abordado em diferentes estudos no âmbito do ensino de ciências e da Educação Matemática (Jablonka, 2007; Marandino, 2004; Luna, 2012; Grilo, 2014). Dentre as pesquisas relacionadas ao processo de recontextualização na primeira área, destaca-se a de Marandino (2004), na qual a autora busca compreender o processo de produção do discurso expositivo[2], quando ele é socializado nas exposições dos museus do Ensino das Ciências, concluindo que há especificidades que se relacionam com aspectos inerentes a instituição museu, que se diferenciam daqueles referentes à escola. No que se refere à segunda área, Luna (2012) analisa como os textos que circularam em um curso de formação continuada em modelagem matemática são recontextualizados em salas de aula da educação básica e conclui que no processo de recontextualização há influências de fatores contextuais e da própria prática pedagógica.

Na grande área da Educação, destaca-se o trabalho de Lopes (2004), que faz uma leitura sobre os efeitos das políticas curriculares no contexto da prática. Para isso, a autora apoia-se no conceito de recontextualização de Bernstein para sinalizar que os textos que circulam no meio educacional são movidos de um contexto a outro e, nesse processo, eles podem ser ressignificados. Segundo Lopes (2008), em termos bernstenianos, no processo de recontextualização, o texto não é mais o mesmo: são feitas releituras e adequações ao novo contexto em meio aos conflitos.

Um aspecto a ser considerado nos estudos sobre a recontextualização é apresentado por Barbosa (2013) que, amparado pela teoria de Bernstein, desenvolve um trabalho sobre *design* de tarefa[3]. O autor toma como exemplo uma experiência vivenciada no programa EM-AÇÃO[4], que tinha por objetivo apoiar professores do Estado da Bahia a implementar mudanças no ensino de matemática. Segundo Barbosa (2013) foi possível observar que os professores consideravam a relação pedagógica existente nas suas salas de aula quando tentavam ajustar a tarefa aos princípios pedagógicos dirigidos no referido programa. Para o autor, o que ocorre é um processo de recontextualização reversa, em que os agentes movem textos e princípios do contexto escolar para o de formação enquanto delineiam tarefas.

---

[2] Segundo Marandino (2004), o discurso expositivo pode ser capaz de recontextualizar outros discursos envueltos no proceso de sua elaboração e os relocar a partir de seus próprios principios.

[3] Tarefa é compreendida como um segmento de atividades da sala de aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular (Stein e Smith, 2009).

[4] EM-AÇÃO é um programa da Secretaria de Educação do Estado da Bahia/SEC, em parceria com as Instituições Públicas de Ensino Superior/IES do referido estado. (http://educadores.educacao.ba.gov.br/noticias/lancamento-do-programa-ensino-medio-em-acao-em-acao)

Corroborando essas ideias, adotaremos o conceito de recontextualização reversa para mostrar que isso também pode ocorrer em um trabalho colaborativo - no caso, com professores da educação básica. Em termos bernsteinianos, podemos afirmar que os textos deslocados do contexto escolar são confrontados com outros textos (como aqueles enunciados por pesquisadores e estudantes da graduação e da pós-graduação) e submetidos a regras que possibilitam a produção de um novo texto no trabalho colaborativo, conforme os contornos de cada contexto, seja, ele escolar ou acadêmico. Dessa forma, professores de matemática e acadêmicos parecem operar de acordo com dois diferentes conjuntos de princípios: os de classificação e enquadramento.

O princípio de classificação, que traduz as relações de poder, é utilizado, segundo Bernstein (1996, 2000), para examinar as ligações entre as categorias com independência, como por exemplo, entre agentes (professor, pós-graduandos e graduandos) e discursos (matemática e da matemática escolar), no caso do trabalho colaborativo podemos destacar possíveis demarcações entre professores da educação básica, pesquisadores e estudantes da graduação e da pós-graduação. É esse princípio que constitui, por meio do isolamento entre as categorias, ou seja, entre os textos enunciados por professores de matemática e acadêmicos, os sinalizadores da sua especialidade. Em outras palavras: as relações entre os diferentes contextos criam marcadores de fronteira, nos quais contextos específicos são distinguidos por seus significados e realizações especializadas, determinando o que pode ser dito. Em vez de examinar esses textos atuando em combinação, sugerimos que eles estejam em conflito, uma vez que seu isolamento se baseia em lógicas diferentes.

Para Bernstein (2000), o enquadramento*,* por sua vez*,* regula as relações dentro de um contexto e remete às relações entre os agentes que têm a função social de ‘ensinar’ e os que têm a função social de ‘aprender’, em que ambos se apropriam de princípios da comunicação legítimos, como por exemplo, quando professores e estudantes interagem em uma sala de aula possibilitando formas de comunicação que podem variar entre o ensinar (professor) e aprender (estudante) ou entre relações que permeiam o questionar, o explicar, o ouvir e o responder de ambas as partes. O foco está nas relações de controle que se manifestam no interior de qualquer contexto, ou seja, diz respeito a como o texto pode ser dito, determinando sua regulação local de comunicação. Nesse caso, são essas relações de controle que instauram as relações dentro dessas formas de interação. Como posto neste estudo, o trabalho colaborativo como prática pedagógica possibilita, mesmo implicitamente, que o controle seja distribuído e, por meio de acordos conjuntos, sejam criadas regras que regulem a comunicação pedagógica e determinem as formas que adotam as relações hierárquicas na relação pedagógica.

Bernstein (2000) sugere que variações (ou mudanças) na classificação, isto é, na distribuição de poder, produzem variações nas mudanças no grau de isolamento entre categorias - em nosso trabalho, entre professores de matemática e acadêmicos, variando ou mudando, assim, seus princípios. O autor destaca também que variações e/ou mudanças no enquadramento, ou seja, nas relações e nos procedimentos de controle, produzem variações nas relações sociais da prática pedagógica. Assim, variações e/ou mudanças no (do) poder e nos (dos) procedimentos de controle se traduzem em fortalecimento/enfraquecimento do princípio de classificação (±) e de enquadramento (±).

Segundo Bernstein (1996), a inter-relação e a variação entre os princípios de classificação e enquadramento podem delinear as regras da prática pedagógica. Estes últimos são reconhecidos, mas, apesar de raras, há pressões para enfraquecer o enquadramento desta prática. Em um trabalho colaborativo, isso não é tão raro, uma vez que tal prática pedagógica constitui-se em uma arena de conflitos e o enfraquecimento desse enquadramento pode propiciar a oportunidade de gerenciamento desses conflitos, a partir do momento em que professores de matemática e acadêmicos se unem em busca de estratégias para a resolução dos conflitos. Consequentemente, esse enfraquecimento pode fortalecer os princípios colaborativos e gerar mudanças.

Nas seções a seguir, descreveremos o contexto, o método e as categorias de análise para a identificação das formas de gestão dos conflitos.

3 Contexto

Como mencionamos, neste estudo, pretendemos identificar, descrever e analisar a maneira como professores de matemática e acadêmicos gerenciam os conflitos que surgem entre/nos textos que circulam em um trabalho colaborativo. Para tanto, os dados para análise foram coletados durante as reuniões quinzenais de um grupo denominado *Observatório de Educação Matemática* (OEM)[5], que tem delineado propostas de materiais curriculares educativos para o ensino de tópicos previstos na matriz de referência da área de matemática para os anos finais do ensino fundamental, capazes de inspirar mudanças nas práticas pedagógicas estabelecidas nas salas de aula de matemática da educação básica.

As atividades desenvolvidas ao longo de quatro anos foram apoiadas pela Universidade Federal da Bahia (UFBA), em parceria com a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), e o OEM constitui-se a partir da junção de professores de matemática da educação básica e acadêmicos (pesquisadores, pós-graduandos e graduandos) dessas universidades.

Na dinâmica do trabalho, o grupo formado por vinte e cinco pessoas foi dividido em subgrupos denominados S1, S2, ..., S7, formados a partir da união de, pelo menos, um professor da educação básica, um estudante da graduação e um estudante da pós-graduação. A ideia era que cada subgrupo ficasse responsável por um descritor da Prova Brasil[6]. O primeiro passo foi a realização de uma revisão de literatura sobre o tema selecionado; em seguida, cada subgrupo assumiu a responsabilidade de produzir protótipos (sucessivas versões), elaborando objetivos

---

[5] O projeto de pesquisa e desenvolvimento intitulado “A aprendizagem dos professores de matemática com materiais curriculares educativos” está vinculado ao Programa Observatório de Educação, sob a gestão conjunta da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) (edital nº 038/2010/CAPES/INEP) para o quadriênio 2011-2015.

[6] O descritor é uma associação entre conteúdos curriculares que traduzem certas competências e habilidades (BrasiL, 2008, p. 18).

e tarefas[7] relacionados com o descritor. Após os encontros de debate e produção de materiais no subgrupo, esses protótipos foram socializados, discutidos e refinados no grupo.

Os materiais produzidos nos subgrupos foram compostos pela tarefa do estudante, pela tarefa respondida com uma possível solução, uma versão comentada para o professor, o planejamento da implementação da tarefa, uma narrativa elaborada pelo professor após a aplicação da tarefa, análises de vídeos da aula e de registros de estudantes. O trabalho desenvolvido no OEM foi dividido em ciclos: nos três primeiros, elegemos o tema "Espaço e Forma" para a produção dos materiais curriculares[8] e, na sequência, desenvolvemos materiais em que o foco era a Aritmética. Na próxima seção, apresentaremos o delineamento do método adotado na presente investigação.

4 Método

De acordo com os objetivos deste trabalho, desenvolvemos um estudo empírico, o qual se caracteriza pela revisão de literatura e produção de dados (Berg, 2000). Como nossa investigação orienta-se em direção à compreensão da gestão de conflitos entre/nos textos enunciados nas falas e nas ações que os participantes expressaram no trabalho colaborativo, tentamos identificar situações geradoras de conflitos e suas possíveis formas de gestão.

Durante a produção dos dados, a observação foi adotada como procedimento de coleta. Para Adler e Adler (1994), a observação qualitativa consiste em uma técnica integrada e independente, com características essencialmente naturalísticas, que ocorre no contexto natural entre os envolvidos no espaço interativo e segue o fluxo natural da sua rotina. Para uma melhor análise da gestão dos conflitos, neste estudo, recorremos aos registros das imagens audiovisuais das reuniões do grupo capturadas por meio da filmagem, tendo como referência as recomendações de Lichtman (2010). As informações obtidas foram transcritas e transformadas em dados do estudo, cujo foco foram os turnos de fala[9] dos agentes que integram o trabalho colaborativo. De forma complementar, recorremos aos documentos produzidos pelos subgrupos (protótipos), considerados materiais legítimos de informação**,** e o diário de campo, que se consistiu em uma produção textual.

Para a análise, selecionamos episódios capturados durantes as reuniões do que denominamos terceiro ciclo, por ser um período de reuniões contínuas e por ter sido possível identificar, nos dados, uma maior participação dos membros do grupo colaborativo. Os episódios selecionados foram organizados, codificados e agrupados em categorias e, a cada apresentação dos dados, faremos uma contextualização da atividade realizada pelo grupo. Em seguida, realizarmos uma análise de primeiro nível dos dados coletados.

---

[7] Seguiremos o documento do ICMI *Study* 22 (ICMI, 2012), no qual a tarefa é tomada como "algo que um professor usa para demonstrar a matemática, para seguir interativamente com os estudantes, ou para pedir que os estudantes façam algo" (p.10).
[8] Disponível em: www.educacaomatematica.ufba.br
[9] Por vezes, utilizamos reticências para sinalizar pausas curtas no meio das falas, reticências entre colchetes para sinalizar que ocorreram mais falas entre as que foram apresentadas nos dados e parênteses para destacar as ações do indivíduo.

Durante a descrição das análises, utilizaremos pseudônimos para identificar os pesquisadores, os professores da educação básica, os pós-graduandos e os graduandos, e finalizaremos com a discussão e as considerações finais.

5 Apresentação dos dados

As categorias referentes à forma como os professores de matemática e os acadêmicos geriram os conflitos foram construídas a partir da análise de episódios seleccionados a partir das observações das reuniões do grupo durante a socialização e refinamento dos trabalhos produzidos pelos subgrupos.

Em nossa primeira análise, reconhecemos a existência de conflitos e suas formas de gestão. Em seguida, identificamos, com base em nosso enquadramento teórico, duas categorias para a gestão dos conflitos: a) por meio da negociação, que se refere ao momento em que há uma abertura para o diálogo, em que todas as partes são ouvidas; b) por meio da mediação, a que diz respeito ao momento em que um dos participantes assume a figura de liderança, conduz o diálogo, considera alternativas e encaminha-as para um acordo coletivo.

Apesar de termos separado os episódios em categorias distintas, em alguns momentos, o leitor pode identificar traços de outras categorias nos episódios apresentados neste artigo. Vejamos, a seguir, essas categorias.

5.1 A gestão de conflitos por meio da negociação

Nesta categoria, apresentamos dois episódios que evidenciam a maneira como os membros interagiram durante o debate sobre o assunto programático/problema a ser tratado na tarefa e argumentaram em favor de uma solução coletiva para o conflito.

5.1.1 Episódio I

Neste episódio, apresentamos a análise de um dos registros dos estudantes, realizada pelo subgrupo S4, após a implementação de uma tarefa em uma turma do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada em Salvador, no Estado da Bahia. O objetivo era utilizar a relação S_i (soma dos ángulos internos) é igual a 180° para verificar que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo S_e (soma dos ángulos externos) é igual a 360° e que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele. Inicialmente, apresentamos a tarefa proposta:

TAREFA

Caro(a) estudante, esta tarefa envolve a exploração de triângulos. Ao resolvê-la, você poderá perceber propriedades importantes desse polígono.
Vamos começar?!

1. Utilizando os três triângulos que foram entregues a vocês, encontre as medidas dos ângulos externos a partir da manipulação e comparação dos ângulos dos outros dois triângulos:

   a. Utilize os dois triângulos coloridos para analisar as medidas dos ângulos x, y e z em termos dos ângulos internos. O que podemos observar?

   b. O que é possível concluir sobre a soma do ângulo interno de um triângulo com o ângulo externo adjacente a ele?

   c. Com base na análise da resposta anterior e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, o que podemos concluir sobre a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo?

Figura 1. tarefa elaborada pelo subgrupo
Fonte: arquivo do subgrupo (2013)

Essa tarefa foi elaborada visando à utilização de um *kit* de matérias manipuláveis, formado por um triângulo com os ângulos externos destacados e dois triângulos coloridos, como no exemplo apresentado na figura 2:

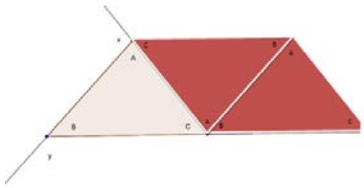


Figura 2. modelo de *kit*
Fonte: arquivo do subgrupo (2013)

Para a resolução da questão apresentada no ítem c da tarefa, os estudantes, além de utilizarem o *kit*, precisaram recorrer aos dados da questão anterior (item b). Na questão em foco, o subgrupo trabalhou com a soma dos ângulos externos, como se pode observar na figura 3:

c) Com base na análise da resposta anterior e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, o que podemos concluir sobre a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo? 180° + 180° 180° 540° - 180 360°   180 - 40   50 50   40   30   60 60 60

Figura 3. Registro do estudante sobre a primeira questão, letra c, da tarefa elaborada por S4
Fonte: arquivo do subgrupo (2013)

Ao apresentar o registro (figura 3), o subgrupo inferiu que os estudantes tinham compreendido a questão, embora tenham expressado que os ângulos internos do triângulo eram iguais:

(01) Cláudia/ professora:	Vocês entenderam a ideia? Na verdade, foi feita uma pergunta relacionada aos ângulos externos e o grupo [estudantes] respondeu

	perfeitamente: a soma é 360º. Mas, ao analisarmos o registro, percebemos que o grupo considerou que a soma dos ângulos externos dá sempre 360º, ou seja, o grupo está considerando que o triângulo é sempre equilátero.
(02)Beatriz/pós-graduanda:	Não, não podemos inferir o que os estudantes compreenderam. Além disso, a análise do grupo não está casada com o que há no registro, porque, além de ter três vezes o número 60º, também têm os números 50º, 40º e 30º. Não podemos dizer que por isso o grupo considerou que o triângulo é sempre equilátero!
(03) Cláudia/professora:	Mas colocamos como sugestão que o professor discuta com os estudantes e solicite que eles analisem os triângulos que eles têm em mãos.
(04) Laura/pós-graduanda:	Mas, observe que o *kit* apresentado não garante que os estudantes tirem essas conclusões. Os ângulos dos triângulos estão parecidos [...]
(05) Ruan/pesquisador:	Uma ideia seria dar contraexemplos!
(06) Adriano/pós-graduando:	Ou, ao invés de apenas mostrar, questionar! Não é só mostrar, mas levar o estudante a investigar as possibilidades através de questionamentos, da investigação de outras possibilidades.
(07) Ruan/pesquisador:	Isso que Adriano falou é importante, porque os materiais que estamos produzindo têm que comunicar, para quem for ler, um movimento do explicar para o questionar. Ou seja, precisamos comunicar para o professor a necessidade de explicar menos e questionar mais.
(08) Aline/professora:	Ok! Então, vamos sugerir que o professor apresente outros triângulos com medidas de ângulos diferentes, para que os estudantes analisem outras possibilidades.
(09) Cláudia/professora:	Sim, podemos trabalhar com outros exemplos.

Nessa discussão, alguns pós-graduandos, a exemplo das estudantes Beatriz (02) e Laura (04), chamaram a atenção para a ideia enunciada por Claúdia (01). Elas observaram que não seria possível inferir o que os estudantes compreenderam porque o registro apresentado não evidenciava, de forma clara, a resposta dos alunos. Ao ser questionada, Claúdia (03), imediatamente, sinalizou que já existia uma alternativa para o problema apresentado. Isso nos levou a concluir que o próprio texto enunciado pela professora Claúdia apresentava contradições.

Detectado o impasse no tocante à validade do material produzido pelo subgrupo, o grupo passou a negociar alternativas para refinar esse material. Ao analisar as alternativas propostas, a professora Aline (08) sintetizou o que foi argumentado e sugerido pelo grupo. Nesse momento, foram considerados princípios e textos movidos do contexto acadêmico para justificar e indicar uma possível solução como, no caso, a utilização de contraexemplos.

5.1.2 Episódio II

Esse episódio mostra uma discussão surgida enquanto o subgrupo S2 socializava uma tarefa, cujo objetivo era a exploração de ângulos consecutivos e adjacentes, complementares e suplementares, após realização do experimento com três estudantes. Já tinha sido acordado pelo grupo que, antes da implementação da tarefa em sala de aula, os subgrupos deveriam vivenciar esse momento de experimentação com o intuito de refinar tal tarefa e observar a necessidade de possíveis alterações antes de sua aplicação para a turma toda.

A partir dos dados produzidos após transcrição, foi possível perceber que a tarefa em si não sofreu alterações, principalmente no que tange à primeira questão, mas houve divergências em termos da gestão em sala de aula para a realização da segunda questão, cujo enunciado segue abaixo:

Construa também no *software Geogebra* um ângulo de 90° e outro ângulo de 180°. Clique no vértice de cada ângulo formado e construa uma semirreta interna a cada um deles. O que podemos afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos internos?

Figura 4. Questão apresentada pelo subgrupo
Fonte: arquivo do subgrupo (2013)

Segundo o relato do subgrupo, os estudantes conseguiram realizar os procedimentos solicitados, ou seja, construíram, no *Geogebra*[10], dois ângulos, um de 90° e o outro de 180°, e uma semirreta interna a cada um deles, como era solicitado na segunda questão. Além disso, responderam o que poderia ser afirmado sobre a soma das medidas desses ângulos, isto é, no primeiro caso, a soma dos dois ângulos seria 90º, e no segundo caso, a soma dos dois ângulos seria 180º. Todavia, a inquietação do grupo era a respeito da nomenclatura, de como gerir a aula de forma que os estudantes tivessem a oportunidade de conhecer os termos complementares e suplementares:

(10) Heloisa/graduanda:	Eu achei, que na hora que você tentou conduzir para que os estudantes falassem a palavra “complementar”, houve problemas! Porque não é uma palavra que flui facilmente!
(11) Selma/professora:	Sim! Mas deve ser trabalhado! Durante a minha aula, os estudantes não chegaram a falar o nome; por isso, fui ao quadro e, após alguns questionamentos, comecei a formalizar.
(12) Heloisa/graduanda:	Mas não flui! Os estudantes não conseguem chegar às palavras “complementar” e “suplementar”, ou seja, à nomenclatura!
(13) Selma/professora:	Pela minha experiência, “complementar” é mais

[10] O *Geogebra* é um *software* livre e gratuito, desenvolvido pelo austríaco prof. Dr. Markus Hohenwarter, em 2001, e destina-se ao ensino de Geometria, Álgebra e Cálculo (Soares, 2012; Kolodzieiski, 2011).

	fácil do que “suplementar”! E acho que é importante que o estudante saiba! Sempre trabalhei dessa forma!
(14) Heloisa/graduanda:	Observe que não é tão importante falar se é complementar ou suplementar. O mais importante é o estudante perceber que, se ao somar dois ângulos o resultado pode dar 90º, e se ao somar outros dois ângulos, o resultado pode dar 180º.
(15) Alan/graduando:	Então, podemos colocar na tarefa comentada para o professor uma sugestão: caso ele perceba a necessidade de intervenção, que ele a faça!
(16) Heloisa/graduanda:	Sim! Pode! Mas, além disso, creio que seria interessante na sistematização o professor amarrar isso!
(17) Beatriz/pós-graduanda	Podemos sugerir que o professor apresente diferentes exemplos para que os estudantes compreendam as diferenças entre os ângulos e, no final, o professor apresente a nomenclatura.
(18) Selma/professora:	É, pode! Podemos continuar?

Nesse episódio, a graduanda Heloisa (10) sinalizou uma preocupação relacionada com a apresentação de nomenclaturas antes que o estudante compreendesse o conteúdo proposto. Ao refutar o argumento da graduanda, a professora se contradisse, pois considerava que o conteúdo deveria ser trabalhado, mas reconheceu que os estudantes não enunciaram o termo. O debate continuou e a professora demonstrou resistência para aceitar a sugestão dada, justificando, de certa forma, que a sua experiência em sala de aula era a que contava naquele momento. Detectado o impasse, o graduando Alan (15) sugeriu a inserção de uma observação na parte destinada aos comentários para o professor, que foi negociada e aceita pela professora.

Nesse processo de negociação, as partes envolvidas tiveram em foco o objetivo comum delineado pelo grupo e seguiram analisando a posição dos textos enunciados para que pudesse haver compreensão dos pontos de vista e das condutas do outro. Dessa forma, a negociação de significados levou a uma compreensão compartilhada das questões propostas e das alternativas de ação para a resolução do conflito. Para que uma negociação como essa possa ocorrer, é necessário que os envolvidos saibam argumentar, ouvir e questionar, porque, sem diálogo, não há como elaborar estratégias para solucionar possíveis conflitos.

5.2 A gestão de conflitos por meio da mediação

Nessa categoria, observamos as estratégias utilizadas na intervenção feita pelos membros do OEM, com o intuito de contribuir para o refinamento do material produzido. Para isso, selecionamos dois episódios em que foi possível observar a variabilidade das ações propostas e a presença de uma figura de liderança que conduziu o diálogo e considerou alternativas para atender os objetivos do grupo.

5.2.1 Episódio III

Nesse episódio, o subgrupo S6 apresentou a análise de um dos vídeos que evidenciava o momento de introdução da implementação de uma tarefa, cujo objetivo era a compreensão do Teorema de Tales e sua aplicação para identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados. Para isso, os estudantes foram convidados a solucionar três questões, desenvolvidas a partir do uso de réguas para medir os segmentos formados nas transversais que cortavam o feixe de retas paralelas.

Em uma análise inicial, o subgrupo sinalizou que, para a introdução dessa tarefa, o professor tinha utilizado a estratégia de leitura compartilhada, permitindo-lhe estar atento à maneira como os estudantes interpretaram as questões, o que funcionou como um convite. No entanto, isso provocou algumas divergências sobre o uso dessa estratégia:

(19) Naldo/professor:	Neste momento, fizemos uma leitura da tarefa para ver se os estudantes perceberam, entenderam o que estava escrito. Entendemos isso como um convite! Leiam, compreendam! Há dúvidas? Vamos discutir?
(20) Ruan/pesquisador:	Vamos discutir, então? Nesse momento, como sabemos que o estudante aceitou o convite?
(21) Naldo/professor:	Bem, o que estamos chamando de convite é aquela apresentação....
(22) Ruan/pesquisador:	Mas os estudantes não falaram, apenas balançaram a cabeça quando você perguntou! [Dado apresentado no vídeo]
(23) Naldo/professor:	Mas há também uma chamada do professor. Compreenderam? Alguma pergunta?
(24) Ruan/pesquisador:	O fato de os estudantes falarem algo significa que eles compreenderam?
(25) Naldo/professor:	Acho que sim! A minha turma interagiu muito bem! Se os estudantes não falassem nada, aí sim, seria problema. Você acha que o professor deveria ir mais além?
(26) Ruan/pesquisador:	Qual seria a pergunta em que teríamos mais evidências?
(27)Beatriz/pós-graduando:	O que Aline falou! O que é para fazer nesta questão?
(28)Adriano/pós-graduando:	Do que trata a atividade? Do que trata o enunciado? O que é para ser feito? Ao explicar, nós temos evidências de que eles estão entendendo!
(29) Naldo/professor:	Com essa estratégia**,** pude proporcionar uma reflexão sobre o enunciado, apoiando-os na interpretação dos pontos em que eles apresentaram alguma dificuldade. Sempre indagando se eles tinham entendido!
(30) Adriano/pós-graduando:	Acredito que não basta perguntar se os estudantes entenderam! Pela tradição da escola, o fato de simplesmente perguntar se os estudantes entenderam não significa que entenderam!
(31) Naldo/professor:	Tenho de ir mais além?

(32) Ruan/pesquisador:	Sim! Perguntas do tipo: do que se trata a questão? Por quê? Como? Em vez de perguntas que demandam respostas do tipo “sim” ou “não”!
(33) Naldo/professor:	Compreendo! Vamos colocar como sugestão!

O primeiro momento desse episódio evidencia a preocupação do professor Naldo (19) em mostrar como gerenciou a aula e de que modo interagiu com os estudantes em sua sala de aula, de forma a despertar o interesse deles para participar da aula. Entretanto, no próprio texto enunciado pelo professor**,** há contradições, uma relacionada ao termo ‘convite’ e outra quando o professor afirma que a leitura da tarefa permitiu observar se os estudantes tinham entendido a questão.

Ao perceber as contradições, o pesquisador Ruan (20) assumiu a liderança e conduziu o diálogo de forma reflexiva para que o professor chegasse às suas próprias conclusões. Mas a entrada dos pós-graduandos, nos turnos de fala (27), (28) e (30), atribuiu um novo significado a dinámica de comunicação instaurada em que os textos enunciados assumiram um caráter investigativo. Os textos foram reinterpretados a partir dos significados e interpretações da própria experiência de sala de aula, de forma que o professor percebesse a necessidade de ir além do que estava proposto na tarefa. Durante a gestão de sala de aula, seria necessário questionar mais os estudantes para que eles construíssem suas próprias conjecturas a respeito do tema trabalhado.

5.2.2 Episódio IV

Nesse episódio, nosso foco de análise diz respeito ao momento em que o subgrupo S1 apresentou uma das versões da tarefa elaborada, cujo objetivo era identificar e representar a altura, a mediana e a bissetriz de um triângulo e compreender seus pontos notáveis. A proposta de implementação da tarefa exploratória consistia na utilização do *software Geogebra* para a condução da atividade. O subgrupo colocou em apreciação a seguinte questão:

> Construa um triângulo qualquer e a partir de um de seus vértices trace uma reta perpendicular a lado oposto. **a)**Deforme o triângulo. O que acontece com o segmento perpendicular traçado? **b)** A partir dos vértices do triângulo, trace todas as retas perpendiculares referentes a cada lado. O que podemos concluir a partir da análise dessa figura?

Figura 5. Questão apresentada na tarefa
Fonte: arquivo do subgrupo (2013)

Ao iniciar os comentários, o próprio subgrupo ressaltou que, em um primeiro momento, o professor deveria dar uma introdução sobre o que é reta perpendicular, porque ao traçar a reta no *Geogebra*, o *software* já daria o comando. Ao propor essa questão, o subgrupo articulou a possibilidade de investigação, por parte dos estudantes, de vários triângulos; eles perceberiam que mesmo ‘deformando’ o triângulo construído na tela do *Geogebra*, a altura continuaria a mesma. Esse comentário provocou divergências e um dos membros do grupo iniciou novo comentário, com um questionamento:

(34) Heloisa/graduanda	O que leva a ‘deformar’ o triângulo em relação ao objetivo?

(35) Carla/graduanda	Quando 'deformamos' os triângulos, nós podemos ter possibilidades de encontrar diferentes tipos de triângulos e a altura vai mudar!
(36) Heloisa/graduanda	Não! A altura permanece a mesma! O que muda são os lados que se 'deformaram'!
(37) Sandra/professora	Isso!
(38) Heloisa/graduanda	Agora, vamos pensar em exemplos fora do *Geogebra*. Saia do *Geogebra*, desenhe três triângulos, em um deles trace uma perpendicular, transporte essa perpendicular para outro. Observe que não vai dar certo! O que são os lados em relação à reta que fica fixa. Então, esse conhecimento geométrico não é real! É uma coisa do programa. Isso não é verdade! A verdade é que no *Geogebra* você manda colocar uma reta perpendicular, ela vai permanecer nessa posição, porque você comandou. Esse conhecimento geométrico está errado.
(39) Marília/professora	Espere aí!!! Não é verdade, o quê? Se você traçou a altura do triângulo, o segmento de reta perpendicular à base é a altura, mesmo sendo no papel. O *Geogebra* foi construído tendo como base os fundamentos da geometria.
(40) Heloisa/graduanda	É sim!
(41) Marília/professora	Então, se eu 'deformo' o triângulo, a altura permanece a mesma. Posso virar de cabeça para baixo, ampliar ou reduzir, a altura continua a mesma.
(42)Alan/pós-graduando	Isso é importante! E o professor pode falar que essa altura não deixa de ser altura mesmo mudando de tamanho!
(43) Marília/professora	Acho que tem de reforçar o conceito de perpendicularidade associado à altura.
(44) Sandra/professora	Sim. Acho que podemos demarcar isso na parte destinada à conversa com o professor.

Inicialmente, a graduanda Heloisa (34) conduziu o diálogo e colocou em xeque as ações propostas pelo subgrupo para a resolução da tarefa no tocante ao objetivo proposto e, mesmo implicitamente, questionou a utilização do *software*. Ela apropriou-se de contraexemplos para mostrar possíveis contradições na proposta apresentada pelo subgrupo. Entretanto, as divergências existentes entre as ideias sobre a utilização do *Geogebra* fizeram com que a professora Marília assumisse a liderança e argumentasse a favor da utilização do programa, o que evidenciou a existência de variabilidade na condução da discussão, ou seja, a liderança pode ser assumida por qualquer participante independentemente da categoria (professor de matemática, pesquisador, graduando ou pós-graduando). A argumentação da professora Marília, nos turnos de fala (39) e (41), sobre a funcionalidade do *software*, não só legitimou a estratégia adotada pelo subgrupo, mas sinalizou a necessidade de se trabalhar com o conceito de perpendicularidade.

Nesta categoria, observamos que a gestão de conflitos por meio da mediação, proporcionou uma reorientação das relações pedagógicas estabelecidas em um trabalho colaborativo, abrindo espaço para análise, reflexão, adaptação e transformação das formas de comunicação. Nesse processo não só textos são enunciados, relocados e produzidos, mas também principios, como tolerância, responsabilidade e iniciativa individual de colaborar para o desenvolvimento de um trabalho como esse.

6 Discussão dos dados

Com o intuito de contribuir com as pesquisas sobre trabalho colaborativo e apontar implicações para a prática docente, este estudo teve como objetivo identificar, descrever e analisar a maneira como professores de matemática e acadêmicos gerenciam os conflitos que surgem entre/nos textos que circulam em um trabalho colaborativo. As formas de gestão selecionadas para análise foram identificadas após a constatação do embate entre os diferentes posicionamentos comunicados entre/nos textos durante as discussões realizadas nas reuniões do OEM, em que se socializaram as produções dos subgrupos.

Na seção anterior, apresentamos duas categorias para a gestão dos conflitos: por meio da negociação e por meio da mediação. A partir dos dados analisados nessas categorias, reconhecemos, primeiramente, que em um trabalho colaborativo envolvendo a participação de diferentes sujeitos, oriundos de diferentes contextos, há uma probabilidade que se instaurem conflitos, visto que, segundo Bernstein (2000), as especificidades de cada contexto mantêm o isolamento como afirmam.

A dinâmica adotada em um trabalho colaborativo pode ser traduzida em variações nos princípios de classificação, no que concerne às relações de poder entre professores de matemática e acadêmicos, e de enquadramento, no que diz respeito às relações de controle evidenciadas no contexto do trabalho colaborativo. Considerando as variações nos princípios de enquadramento, podemos inferir que quando há um enfraquecimento desse princípio, os participantes unem-se em busca de estratégias para a gestão de conflitos. Com base nos dados apresentados, podemos deduzir algumas características para a gestão de conflitos: engajamento dos participantes, liderança compartilhada e corresponsabilidade pela condução das ações.

A primeira característica refere-se à maneira como os participantes se envolvem na resolução do conflito. Em um trabalho colaborativo, que conta com a participação de diferentes sujeitos, com características e especificidades próprias de seus contextos, uma das maiores dificuldades observadas e implicitamente manifestadas pelos participantes foi conseguir alinhar os objetivos individuais com os do grupo. No momento de interlocução, os textos enunciados por professores de matemática e acadêmicos são independentes e apresentam lógicas diferentes, mas, ao mesmo tempo, são articulados e confrontados; esse confronto significa a possibilidade de refletir, mudar e produzir novos textos coletivamente. O ato de ceder em relação aos seus próprios textos e compreender os novos textos enunciados, sintetizando e negociando outros significados, pode promover uma gestão efetiva dos conflitos, levando à mobilização de uma maior variedade de ideias e de estratégias para a solução do conflito (Morgado, 2009).

A segunda característica diz respeito ao momento em que os participantes dialogam, tentando atingir um objetivo comum. Com base nos dados, observamos que os professores de matemática, muitas vezes, conduziram as discussões durante as reuniões do OEM, refutaram as posições opostas e argumentaram em favor dos seus textos, assim como os estudantes da pós-graduação sinalizaram possibilidades para a gestão dos conflitos. Os textos enunciados evidenciaram um misto de resistência, segurança, desafio e convencimento por parte dos sujeitos que argumentaram e defenderam seus posicionamentos. Nos momentos de conflito, porém, diferentes textos foram recontextualizados para a produção e legitimação de um novo texto que pudesse enunciar possíveis soluções para a gestão dos conflitos. As estratégias mobilizadas, geralmente, tiveram como referência os parâmetros acordados no grupo, como por exemplo, a inserção de sugestões e observações na parte destinada à conversa com o professor, e/ou textos oriundos da academia. Segundo Bernstein (2000), em qualquer relação pedagógica determinada, regras de conduta podem, em graus variados, permitir um espaço para a negociação, as quais ajudam a analisar e criticar as ideias sem depreciar os sujeitos que estão enunciando os textos, diferenciar as posições e avaliar o grau de evidência e lógica por trás de cada texto.

A terceira característica está ligada à maneira como os sujeitos interagem para a organização e funcionamento do grupo, especificamente, para a resolução do conflito – vale lembrar que em um trabalho colaborativo, a responsabilidade sobre as ações do grupo compete a todos os participantes. Observamos, nos dados apresentados, que a troca de ideias e experiências contribuiu para uma resolução compartilhada do conflito, beneficiando todos os envolvidos e motivando-os a produzir e transformar os diferentes textos em um trabalho colaborativo. Observamos, também, que princípios que regulam a conduta esperada pelos participantes, a exemplo da interatividade e autonomia intelectual, durante o processo de recontextualização é legitimado pelos pares, uma vez que eles reconhecem como conduta legítima a independência dos textos enunciados. Corroborando Meirink e colaboradores (2010), neste contexto, ao trabalhar com valores como o reconhecimento e a responsabilidade, ao permitir a legitimação e a resolução de problemas com base na colaboração, a autoridade não é ameaçada, mas sim, legitimada e reconhecida.

Rebollo, Veja e García-Perez (2011) afirmam que apesar dos conflitos se manifestarem no seio do próprio grupo, mostrando posicionamentos distintos, é nesse mesmo espaço que nascem evidências e argumentos para a resolução dos conflitos. Segundo os autores, esses conflitos proporcionam um espaço para negociar e reinterpretar as normas e práticas a partir de significados e interpretações que elaboramos com base na própria experiência por meio da confrontação e argumentação de outras vozes, permitindo construir e elaborar conhecimento compartilhado e contrastado que favorece as mudanças.

Assim, de acordo com o objetivo deste artigo, podemos dizer que há uma efetiva gestão dos conflitos entre/nos textos de professores de matemática e acadêmicos em um trabalho colaborativo quando as relações entre os membros são fortalecidas. Além disso, há uma reciprocidade entre seus integrantes, mantendo-os dispostos a ouvir críticas e a mudar. A comunicação estabelecida nessa prática pedagógica caracteriza-se por uma interação constante entre professores de matemática e acadêmicos, marcada por um misto de relações harmoniosas e conflituosas, o que legitima nosso argumento de que, embora as relações nem sempre sejam harmoniosas, os conflitos e suas possíveis formas de gestão são fontes potenciais de continuidade e mudança nas produções textuais.

7 Considerações finais

O presente artigo teve por objetivo descrever, analisar e discutir a maneira como os professores de matemática e acadêmicos geriram os conflitos entre/nos textos em um trabalho colaborativo. Inicialmente, identificamos situações de conflito em momentos em que os subgrupos colocavam em apreciação o material produzido, e a incidência desses conflitos estavam relacionadas com discussões referentes a: ideias matemáticas, questões pedagógicas e organização do material curricular produzido pelo OEM.

Os resultados apontam que a forma de gerir um conflito determina em grande medida o êxito de um trabalho colaborativo. Para garantir que os conflitos instaurados no grupo resultem em fontes potenciais de mudança, os professores de matemática e acadêmicos devem priorizar o desenvolvimento de ações comuns, preservando as relações construídas em prol da parceria. Analisamos que, no trabalho colaborativo, voluntariedade, respeito, confiança, neutralidade e imparcialidade de todos os participantes (que não impõem soluções) contribuem para o empoderamento das partes em conflito. Observamos que o embate entre/nos textos, muitas vezes, revelou resistência às transformações e inovações educacionais, mas também sinalizou a oportunidade de mudanças nas formas de comunicação e de desenvolvimento. O modo de lidar com situações de conflito torna-se, portanto, um diferencial no trabalho colaborativo, já que possibilita crescimento mútuo.

Como implicações deste artigo, as formas de gestão dos conflitos podem ajudar a entender a dinâmica de um trabalho colaborativo, marcada pela movimentação de textos de contextos específicos, para posicioná-lo segundo as regras acordadas na prática pedagógica. Os conceitos da teoria de Bernstein (1990, 2000) foram as lentes teóricas mobilizadas para compreendermos a gestão de conflitos em um trabalho colaborativo, envolvendo, especificamente, professores de matemática.

A forma de lidar com os conflitos está associada às regras socialmente legitimadas que precisam ser consideradas nas discussões envolvendo professores de matemática em suas diferentes modalidades de formação. Além disso, sugerimos que novas pesquisas sejam agendadas, tendo como foco as formas de participação não só dos professores, mas também dos estudantes da pós-graduação e da graduação em trabalhos colaborativos e uma possível ampliação de investigações sobre o conflito e suas formas de gestão em outros contextos educacionais.

8 Agradecimentos

Ainda que não sejam responsáveis pelas posições adotadas neste artigo, nossos agradecimentos a todos os membros do Grupo Observatório da Educação Matemática (OEM) pelo apoio para a realização dessa pesquisa e aos membros do Grupo de Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA), em especial à Ana Virgínia de Almeida Luna, Graça Luzia Dominguez Santos, Jamile Vilas Boas, Jaqueline P. Grilo, Maria Rachel P. P. Queiroz e Roberta Bortoloti pelas contribuições.

Bibliografía

Achinstein, B. (2002). Conflict amid community: The micropolitics of teacher collaboration. *Teachers College Record*, California, Santa Cruz, v. 104, n. 3, p. 421-455, April.

Adler, P. A.; Adler, P. (1994). Observational techniques. In: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks: Sage, p. 377-392.

Ainley, J.; Pratt, D.; Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal,* United Kingdom (UK),v. *32*, n. 1, p. 23-38, Feb.

Almeida, M.; Sepúlveda, C. de A. S.; El-hani, C. (2013). Colaboração entre professores de ciências e pesquisadores universitários: organização social e tensões na dinâmica de um grupo colaborativo de pesquisa. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, 9, 2013. Águas de Lindóia. *Actas*... Águas de Lindóia: ABRAPEC.

Almeida, M. C. (2014). *Colaboração entre pesquisadores e professores de ensino de ciências e biologia: um estudo da organização e desenvolvimento da prática social do grupo Coppec* (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Instituto de Física/Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

Barbosa, J. C. (2013). Designing written task in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: Berger, M.; Brodie, K.; Frith, V. and Roux, K. *Proceedings of the Seventh International Mathematics Education and Society Conferenc*e, Cape Town, 2-7 Apr.

Bernstein, B. (1996). *Pedagogía, control simbólico e identidad*: teoria, investigación y critica. Trad.: Pablo Manzano. Revisión: Basil Bernstein y Julia Varela, Madrid: Morata.

_________ (2000). *Pedagogy, symbolic control and identify*: theory, research, critique. Lanham: Rowman & Littlefield, 230 p.

__________(2003). *Class, codes and control*: the structuring of pedagogic discourse. Londres: Routledge; Taylor & Francis Group.

Berg, B. L. (2000). *Qualitative research methods for the social sciences*. Long Beach: California State University.

Brasil. Ministério da Educação. (2008). *Plano de Desenvolvimento da Educação* (PDE). Ensino Fundamental: matrizes de referências, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep.

Boavida, A. M; Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (ed.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional.* Lisboa: APM, p. 43-55.

Costa, G. L. M.; Fiorentini, D.. (2007): Mudança da cultura docente em um contexto de trabalho colaborativo de introdução das tecnologias de informação e comunicação na prática escolar. *Bolema*, v. 20, n. 27, p. 2-19.

Costa, G. L. M.. (2008): Trabalho colaborativo mediado pelas tecnologias de informação e comunicação na formação de professor de matemática: indícios de mudança da cultura docente. *Boletim GEPEM*, n. 52, p. 69-84, jan./jun.

Cubero, R.; Cubero, M.; Santamaría A.; de La Mata, M.; Ignacio, M. J.; Prados, M. (2008): La educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula. *Revista de Educación, n. 346*, 71-104, *mayo.*

Damiani, M. F.. (2008): Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios**.** *Educar***.** Curitiba: UFPR, n. 31, p. 213-230.

Espinosa, A. J. (2002). *Quando professores de Matemática da escola e da universidade se encontram:* re-significação e reciprocidade de saberes. Tese (Doutorado em Educação – Área de concentração em Educação Matemática). Faculdade de Educação da Universidade de Campinas. Campinas (SP).

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In.: Borba, M.; Araújo, J. L. (org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Fiorentini, D. (2009). Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: FIORENTINI, D; GRANDO, E.C.; MISKULIN, R. G. S. (org.) *Prática de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática.* Campinas: Mercado de Letras.

Fiorentini, D. (2012a). Investigar e aprender em comunidades colaborativas de docentes da escola e da universidade. Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, 16, 2012, Campinas. *Anais eletrônicos...*Campinas: UNICAMP.

Fiorentini, D. A (2012b). Investigação em Educação Matemática desde a perspectiva acadêmica e profissional: desafios e possibilidades de aproximação. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Costa Rica,* Ano 8, n. 11, p. 61-82.

Ferreira, A. C. (2006). O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento professional: compartilhando experiências. In: Nacarato, Adair Mendes e PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela*. A formação do professor que ensina matemática:* perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica.

Ferreira, A. A. (2010). *Desenvolvimento profissional de professores de história: estudo de caso de um grupo colaborativo mediado pelas tecnologias de informação e comunicação aplicadas à educação* (Doutorado em Educação: conhecimento e inclusão social). Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

Ferreira, A. C.; Miorim, M. A. (2011). Collaborative work and the professional development of mathematics teachers: analysis of a Brazilian experience. In: Bednarz, N; Fiorentini, D.; Huang, R. (Org.). *International approaches to professional development of mathematics teachers.* Ottawa: University of Ottawa Press.

Gonçalves Júnior, M. A.; Cristovão, E. M.; Lima, R. C. R. (org.). (2014). *Grupos colaborativos e de aprendizagem do professor que ensina matemática*: repensar a formação de professores é preciso! Campinas, SP: FE/UNICAMP.

Goulet, L.; Krentz, C.; Christiansen, H. (2003). Collaboration in Education: The Phenomenon and Process of Working Together. *The Alberta Journal of Educational Research*, v. XLIX, n. 4, p. 325-340, Winter.

Grilo, J. de S. P. (2014). *Da universidade para a escola: a recontextualização de princípios e textos do discurso pedagógico de disciplinas específicas da licenciatura em matemática* (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

ICMI - International Comission on Mathematical Instruction (2012). *ICMI Study 22 – Task design in mathematics education (Document).* Disponível em: http://www.mathunion.org/icmi.

Jaca, L.; Diaz, F. (2009). *Gestión del conflito, negociación y mediación*. Madrid: Pirámide.

Jablonka, E. (2007). The relevance of modeling and applications: relevant to whom and for what purpose? In: BLUM, W. et al (Org.). *Modelling and applications in mathematics education:* The 14th ICMI. Berlin: Springer, p.193-200.

Johnson, D. W.; Johnson, R. T**.** (2009). Energizing Learning: The Instructional Power of Conflict**.** *Educational Researcher*, v. 38, n. 1, p. 37–51.

Levine, T. H.; Marcus, A. S. (2010). How the structure and focus of teachers' collaborative activities facilitate and constrain teacher learning. *Teaching and Teacher Education,* n. 26, p. 389–398.

Lichtman, M. (2010). *Qualitative research in education***:** a user`s guide. Thousand Oaks: Sage.

Lopes, A. C. (2004). Políticas curriculares: continuidade ou mudança de rumos? *Revista Brasileira de Educação,* n. 26, p. 109-118.

_____________. (2008). *Políticas de integração curricular*. Rio de Janeiro: UERJ.

Luna, A. V. A. (2012). *A modelagem matemática na formação continuada e a recontextualização pedagógica desse ambiente em salas de aula* (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador.

Kolodzieiski, J. F. (2011). O software GeoGebra como ferramenta para o ensino da matemática. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Marandino, M. (2004): Transposição ou recontextualização? Sobre a produção de saberes na educação em museus de ciências. *Revista Brasileira de Educação,* n. 26, p. 95- 108.

Meirink, J. A., Imants, J., Meijer, P.C.; Verloop, N. (2010): Teacher learning and collaboration in innovative teams. *Cambridge Journal of Education,* v. 40, n. 2, p.161–181.

Morgado, Catarina; Oliveira, Isabel. (2009): Mediação em contexto escolar: transformar o conflito em oportunidade*. EXEDRA*, Coimbra, Portugal, n. 1, p. 43-56, jun.

Nacarato, A. M. (2005): A escola como lócus de formação e de aprendizagem: possibilidades e riscos da colaboração. In: Fiorentini, D.; Nacarato A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática***:** investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa Editora; Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP. p. 175-195.

Nacarato, A. M.; Grando, R. C.; Eloy, T. A. (2009): Processos formativos: compartilhando aprendizagens em geometria com diferentes mídias. In: Fiorentini, D.; Grando, R.C.; Miskulin, R.G.S. (Org.). *Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras.

Oliveira, A. M. P.; Barbosa, J. C. (2014): A produção de materiais curriculares educativos em grupos colaborativos. In: Júnior, M. A. G.; Cristovão, E. M.; Lima, R. C. R. *Grupos colaborativos e de aprendizagem do professor que ensina matemática*: repensar a formação de professores é preciso! Campinas, SP: FE/UNICAMP. p. 118-126.

Peter-Koop; A.; Santos-Wagner, V: M.; Breen, C.; Begg; A. (ed.). (2003): *Collaboration in teacher education*: examples from the context of mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rebollo, Mª Ángeles; Vega, Luisa; García-Pérez, Rafael. (2011): El profesorado en la aplicación de planes de igualdad: conflictos y discursos en el cambio educativo. *Revista de Investigación Educativa,* v. 29, n. 2, p. 311-323.

Roldão, M. C. (2007): Colaborar é preciso: questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. *Dossier*, Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC, n. 71, p. 24-29, out./dez.

Soares, L. H. (2012). Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do Geogebra no estudo de funções. *1ªConferência Latino Americana de GeoGebra*, pp.LXVI – LXXX.

Stein, M. H e Smith, M. S. (2009): Tarefas como quadro para reflexão*.* Trad.: alunos do mestrado em Educação e Matemática. Revisão: João Pedro Ponte e Joana Brocardo. *Educação e Matemática*, n. 105, nov./dez.

Vrieling, E; Beemt, A. van den; Laat, M. de. (2015). What's in a Name: Dimensions of Social Learning in Teacher Groups. *Teachers and Teaching*: Theory and Practice, Heerlen.

SANTANA, Flávia Cristina de Macêdo

Possui doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia - UFBA (2015). Atualmente, professora adjunta da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e professora permanente do Programa de Pós-graduação da UEFS. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em Matemática e Educação - GEPEMATE/UEFS. Membro fundador do Grupo colaborativo Observatório de Educação Matemática (OEM)/UFBA e membro do Grupo de Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA)/UFBA. flaviacris.uefs@gmail.com

BARBOSA, Jonei Cerqueira

Possui pós-doutoral na London South Bank University (2008) e na University of London (2013-2014). Atualmente, é professor adjunto do Departamento II da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia (UFBA). É professor permanente no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFBA e no Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS. jonei.cerqueira@ufba.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 133-152

Creencias y Actitudes sobre Género y Educación Matemática en la Formación del Profesorado de Preescolar

Eduardo Molina Morán

Fecha de recepción: 10/02/2017
Fecha de aceptación: 04/05/2017

Resumen	El trabajo explora la dinámica psíquica que posibilita a las estudiantes que se forman para ser profesoras de preescolar construir sus creencias y actitudes sobre género y educación matemática. Se llevó un estudio mixto con estudiantes de la Universidad Vicente Rocafuerte de Guayaquil. Se aplicó el test de Actitud Matemática de Fennema-Sherman y el Who and Math de Leder et al, una encuesta y un grupo focal. Los resultados refutan que la competencia matemática sea un dominio masculino, aunque se reconoce que la cultura influye en los varones a desarrollar un interés matemático. Además, la inadecuada metodología es la causante de las actitudes negativas hacia esta materia. **Palabras clave**: Profesorado, preescolar, género, matemática, creencias.
Abstract	The paper explores the psychic dynamics that make possible for students who are trained to be preschool teachers to construct their beliefs and attitudes about gender and mathematics education. A mixed study was conducted with students from the Vicente Rocafuerte University of Guayaquil. The Fennema-Sherman Mathematical Attitude test and the Leder et al's Who and Math, a survey and a focus group were applied. The results refute that mathematical competence is a masculine domain, although it is recognized that culture influences males to develop a mathematical interest. In addition, the inadequate methodology is the cause of negative attitudes towards this subject. **Keywords**: Faculty, preschool, gender, mathematics, beliefs.
Resumo	O trabalho explora a dinâmica psíquica que possibilita às estudantes que se formam para ser professoras de preescolar construir suas crenças e atitudes sobre gênero e educação matemática. Um estudo misto foi realizado com alunos da Universidade Vicente Rocafuerte de Guayaquil. Aplicou-se o teste de Atitude Matemática de Fennema-Sherman e Who and Math de Leder et al, uma enquete e grupo focal. Os resultados refutam que a competência matemática seja um domínio masculino, embora reconheça-se que a cultura influencia os homens para desenvolver um interesse matemático. Além disso, a metodologia inadequada é a causa de atitudes negativas en relação a essa disciplina. **Palavras-chave**: Professores, pré-escolar, gênero, matemática, crenças.

1. Introducción

La relación entre educación matemática y género es un campo que se ha investigado crecientemente. Si bien dichos estudios empezaron en poblaciones de adolescentes y niños, también se ampliaron al análisis de prácticas que reproducen la inequidad de género vinculadas a la didáctica, currículo y docencia.

Los estudios sobre la docencia también se diversifican, por ejemplo, desde los que exploran el vínculo profesor-alumno hasta los que indagan sobre los tipos de maestros según el nivel al que imparten. Uno de ellos, el de los educadores del nivel preescolar, tiene gran importancia por cuanto su función es iniciar al niño en el conocimiento formal y comprensión de la realidad matemática (Baroody, 1997), por lo que el dominio de los contenidos que se enseñan es esencial para lograr aprendizajes significativos (Gil-Pérez et al, 1991; Díaz Barriga y Hernández, 1999). No obstante, si las profesoras de preescolar expresan actitudes adversas y creencias controvertibles sobre la matemática, se enseñará inadecuadamente sus conceptos a los niños y se influirá también en sus creencias.

Hay algunos estudios que sustentan la idea precedente. En uno de ellos, Bekdemir (2010) concluyó que la alta ansiedad matemática en estudiantes que se preparan para ser docentes de primaria se debe a experiencias negativas en clase de matemáticas causadas por comportamientos de sus profesores en el pasado, generando resistencias a los espacios relacionados con la matemática.

Por su parte, Malinsky et al (2006) encontraron que en estudiantes que se preparan para ser maestros de diversas asignaturas, las mujeres registran mayor ansiedad matemática que los hombres, e identificaron 2 mitos relacionados con el aprendizaje: “los hombres son mejores en matemáticas que las mujeres” y “en la matemática no hay creatividad”.

En otro estudio sobre género y ansiedad matemática en profesoras de primero y segundo grado de primaria en los Estados Unidos (Elementary), donde más del 90% son mujeres, Beilok et al (2009) no encontraron diferencias entre la ansiedad matemática de las profesoras y las de sus alumnos (niños y niñas) al inicio del año escolar, pero al finalizar el año la ansiedad tanto de las maestras como de las niñas aumentó significativamente en relación a la de los niños.

Un hecho ordinario que se puede pasar por alto en este fenómeno es la escasa presencia de varones que se interesan por formarse como profesores de preescolar. Casi la totalidad de educadores de preescolar de América Latina son mujeres (Lizana 2008), dato encontrado también en la carrera de Educadores de Párvulos de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil (98.72%), lugar donde se realizó este estudio.

En virtud de la evidencia mostrada, esta institución de educación superior ha expresado inicialmente su motivación por mejorar la profesionalización de las futuras maestras, especialmente por minimizar la reproducción de inequidad de género que pueda estar siendo provocada por su currículo oculto, por lo que es importante develar estos aspectos. Hacer cambios curriculares sin tener la certeza de que existe tal reproducción sería inoportuno; resulta más pertinente sondear primero las opiniones de las estudiantes acerca de este tema. En consecuencia, el objetivo del estudio es explorar algunas particularidades psicológicas de dicha población como las creencias y actitudes sobre la relación entre género y educación matemática.

2. Marco teórico

La relación entre género y competencia matemática tiene su origen en el juego infantil como réplica de las prácticas sociales. En los juegos infantiles activos se ha priorizado históricamente la participación de varones, mientras que la mujer ha sido permanentemente relegada a una función contemplativa frente a la mirada de otros actores como maestros y adultos, e independiente de la cultura (Wollstonecraft, 1998). Apoyada en sus investigaciones, Tobías (1993) propuso una explicación de cómo los juegos infantiles influyen en la potenciación de habilidades y destrezas subyacentes a la matemática. Los varones están acostumbrados a juegos con mucha actividad física: correr, patear, batear, lanzar pelotas u otros objetos. Desarrollan habilidades relacionadas con el espacio, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, entre otras, además de una actitud hacia la indagación. Contrariamente, los juegos de las niñas difieren considerablemente por tratarse de juegos caseros como las muñecas. Ante estas situaciones es difícil desarrollar habilidades en igualdad de condiciones. Los niños se presentan más dispuestos que las niñas en el aprendizaje matemático, su iniciación y seguimiento serán más promisorios.

La actividad, y especialmente el tipo de actividad, es base para la formación y crecimiento de procesos psicológicos y del pensamiento (Leontiev, 1984). Pero la actividad no sólo determina el tipo de habilidades que provocan, también influyen en la emocionalidad. Los discursos aversivos y la historia de experiencias negativas en el aprendizaje matemático llevan a desarrollar creencias debilitadoras desde los primeros cursos (Carpenter et al, 1983), influyendo en la autopercepción del dominio matemático y en la personalidad del estudiante (Baroody, 1997).

Pero no sólo los espacios informales como los juegos son abono para fomentar la inequidad de género, también parece ser un producto social y más específicamente escolar. Un estudio en Venezuela sobre género y currículum formal del nivel preescolar develó que los fines, objetivos, contenidos, actividades, materiales y criterios de evaluación, ocultan a la niña y contribuyen a mantener los estereotipos (Monsalve y García, 2002), estos se expresan a través de los juegos infantiles, el lenguaje, los juegos de roles, las láminas en libros y roles domésticos.

El hallazgo precedente es apoyado por algunas estadísticas sugerentes. Los resultados PISA revelan que existen diferencias claras entre géneros, siendo los chicos los que obtienen un promedio más elevado respecto a las chicas en la competencia matemática, no así en lenguaje donde ocurre lo contrario (Inda-Caro et al, 2010). Así mismo, en 54 de 65 países, los varones puntúan mejor que las mujeres en matemáticas. De estos, 35 países mostraron diferencias altamente significativas, siendo Chile y Colombia los países de la región que más diferencias presentaron (OCDE, 2010).

Otra fuente es que los meta-análisis realizados sobre ansiedad matemática y género concluyen que las mujeres manifiestan más ansiedad que los varones (Hyde et al, 1990). Sin embargo, en sitios donde se ha trabajado por mejorar un acceso equitativo de género a las oportunidades de educación y campo laboral, la brecha de ansiedad matemática entre hombre y mujer se ha reducido, por lo que las diferencias son culturales y no genéticas (Baker y Jones, 1993).

Por otro lado, existen evidencias que sugieren que las dificultades que los adolescentes tienen con la matemática podrían tener su inicio en la educación preescolar. Lizana (2008) expone que la población docente de América Latina tiene una clara distribución piramidal; en la educación inicial la participación de las mujeres es casi total, en la educación básica es de un 70%, la mitad en el bachillerato, y menos de la tercera parte a nivel superior; entonces, los hombres ocupan cargos visibles y relacionados con la gestión, dirección y toma de decisiones, mientras que las mujeres un espacio más reservado en las aulas.

También los estudios sobre creencias de las estudiantes que se preparan para ser maestras acerca de la matemática y su enseñanza revela que existe un considerable número de creencias negativas hacia la matemática (Markovitz, 2011) y el establecimiento de mitos que exhiben una mayor competencia matemática en varones (Malinsky et al, 2006).

Por tanto, una carrera universitaria en la que casi la totalidad de sus estudiantes son mujeres, y que se forman para enseñar áreas como la matemática, campo donde estadísticamente no han superado a los hombres y en la que muestran mayor temor, apunta a reflexionar si el mismo sistema de formación del profesorado promueve tales creencias y actitudes.

Para concretar se empieza por esclarecer los conceptos de *creencias* y *actitudes*.

Primero, se entiende como *creencias* las ideas firmemente arraigadas, consideradas verdaderas y creadas por el sujeto como producto de la interpretación de eventos específicos sin demostración objetiva (Bloch et al, 1996); para estudiarlas se utilizan técnicas verbales para explorar la lógica subyacente y supuestos concretos (Beck et al, 1983).

Segundo, la *actitud* es un constructo importante de la psicología social, sin embargo, es evitado por los psicólogos por la complejidad de su definición (Bloch et al, 1996), ya que intervienen en él algunos procesos. González Rey (2004) indica que, pese a ello, existe consenso entre los investigadores en considerar la actitud como concepto que integra tres tipos de componentes: cognitivo, afectivo y conductual.

Dentro de la matemática educativa, Zan y Di Martino (2007) han analizado la literatura científica en cuanto a lo que es actitud positiva o negativa hacia la matemática. Indican que existe una carencia de claridad teórica en las investigaciones sobre la actitud, y por lo general se brinda una definición implícita del constructo que oscila entre las esferas cognitiva, afectiva y comportamental.

Se encontró que cuando se ha explicitado o inferido una definición, esta puede referirse a tres aspectos: 1) Una disposición emocional positiva o negativa hacia la matemática (McLeod, 1992), en esta postura suele identificarse la *actitud* *matemática* con *ansiedad matemática*. 2) Una definición multidimensional referida a tres componentes: respuesta emocional, creencias relacionadas con la materia y comportamiento relacionado con la asignatura (Hart, 1989), y 3) Una definición bidimensional donde la actitud es vista como patrones de creencias y emociones asociadas a la matemática (Daskalogianni y Simpson, 2000). Estos dos últimos autores concluyen que el constructo actitud es definido por la postura del investigador.

Para este estudio se toma la definición de actitud de Guerrero, Blanco y Vicente (2002), como la permanente predisposición conformada de acuerdo a una serie de convicciones y sentimientos que hacen que el sujeto reaccione acorde con sus creencias y sentimientos.

En estas creencias y actitudes se integran los componentes objetivos y subjetivos; su formación se realiza sobre los procesos mentales utilizados, la experiencia, los conocimientos previos, la actividad que se ejecuta y sus percepciones, las cuales son entendidas como las representaciones que un individuo se hace de las personas y de su entorno social, y juicio que les atribuye (Bloch et al, 1996).

Por último, este trabajo toma la sugerencia de Tobías (1993) de considerar como una herramienta útil para el estudio de las actitudes y creencias hacia la matemática, la teoría de la atribución de Weiner, marco de corte cognitivo que plantea que las personas buscan y encuentran explicaciones sobre los acontecimientos favorables o desfavorables que les ocurren. Estas explicaciones llamadas atribuciones no se hacen permanentemente, más bien se efectúan después de acontecimientos sorprendentes o inesperados (Weiner, 1988). Las atribuciones causales se forman de acuerdo a tres dimensiones: 1) El Locus o foco (interno-externo), 2) Estabilidad (estable-inestable), y 3) Controlabilidad (Controlable-incontrolable). La primera indica si el sujeto atribuye el éxito o fracaso a un aspecto autogenerado (interno) o impulsado por otro sujeto (externo). La segunda dimensión se refiere a la estabilidad de la causa atribuida en el tiempo, si es duradera (estable) o pasajera (inestable). La tercera dimensión expresa si la persona tuvo un alto poder (control) o bajo poder (incontrolable) de decisión en el resultado.

Las creencias, actitudes y percepciones tienen una génesis, desarrollo y estado que se expresan con mucha claridad en la historia verbal de los implicados, especialmente en sus relaciones con los entornos de aprendizaje, sus aciertos, dificultades, reacciones emocionales, vínculos con compañeros y profesores, y su proyección como maestras que inician a los niños en el aprendizaje de nociones lógicas, todo ello cruzado con la variable de género. Toda esta información permite dilucidar acerca de las creencias y actitudes que las estudiantes que se preparan para ser profesoras de preescolar portan sobre la relación entre género y educación matemática.

3. Metodología

Se eligió el enfoque mixto cuali-cuantitativo debido al interés de conseguir dos objetivos claros: 1) Tener una lectura de la población sobre sus actitudes en el tema de género y educación matemática, y 2) Profundizar en sus opiniones por medio del análisis de casos representativos que rescaten los significados de los sujetos en ese contexto.

3.1. Muestra

En la fase cuantitativa se aplicó un muestreo probabilístico estratificado (Pérez, 2009). Dada la población de 234 estudiantes en la carrera, se calculó una muestra representativa de 146 participantes de la siguiente manera: primer curso, 80; segundo, 36; tercero, 12; cuarto, 10; y quinto, 8 estudiantes.

Para la fase cualitativa se aplicó un muestreo no probabilístico basado en la elección de casos–tipo, con sujetos seleccionados que portan las características sociales y demográficas vinculadas (Hernández et al, 2010), identificando un total de 11 casos representativos según ciertos criterios establecidos. Cabe indicar que dentro de estos casos-tipo se encontraban los dos únicos varones que estudian esta carrera en dicha universidad.

3.2. Instrumentos

Para la fase cuantitativa se eligió el test de Actitud hacia la matemática de Fennema-Sherman (1976) y el test Who and Math de Leder y Forgasz (2002). El primero es una prueba Likert de 5 ítems, fácil de contestar, breve (20 a 40 min), con un alfa de Cronbach de 0.97, y mide varias dimensiones estructuradas en 108 reactivos en el test original. En este estudio se seleccionó las dimensiones: auto confianza, ansiedad matemática, utilidad de la matemática y actitud hacia el profesor, conformando un total de 48 reactivos. La razón de esta selección obedece a su relación con las anticipaciones hipotéticas planteadas más adelante.

El test Who and Math indaga sobre la matemática como área de dominio masculina o femenina, siendo una prueba Likert con 5 ítems: *definitivamente los varones, probablemente más los varones, es igual para ambos, probablemente más las mujeres,* y *definitivamente las mujeres*. Esta escala consta de 30 reactivos, un alfa de Cronbach de 0.85 y sus resultados se categorizan en: matemáticas como dominio masculino, matemática como dominio femenino y matemática como dominio neutral. También mide varias dimensiones: habilidad, autoconfianza, esfuerzo, profesores de matemáticas y utilidad; pero todas relacionadas con el género.

Para la parte cualitativa se aplicó dos técnicas de recolección de datos: Una encuesta y un grupo focal. La encuesta constó de 11 preguntas producto del análisis de las siguientes categorías: actitud y ansiedad a la matemática, dificultades en su aprendizaje y enseñanza, la relación con profesores, equidad de género, y compromiso como docentes en la enseñanza de nociones lógicas. Las preguntas intentan revelar aspectos relacionados con sus actitudes, experiencia, creencias y conceptos sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Se aplicó en forma individual con el fin de aclarar dudas del participante y asegurar la legibilidad, totalidad y calidad de sus respuestas en el mismo instante.

La segunda técnica cualitativa fue el grupo focal, el cual intentó acceder en los participantes a sus conocimientos, creencias, rituales y parte de su vida en la sociedad o cultura, obteniendo datos en el propio lenguaje de los sujetos; sin contrastar ideas o supuestos (Balderrama 1989). Tanto las preguntas de la encuesta como los del grupo focal pasaron una validación de contenido a cargo de 2 expertas.

3.3. Procedimiento

Los resultados de los instrumentos de la fase cuantitativa se volcaron en una matriz del Programa SPSS 20.0 donde constan los nombres y datos generales de los participantes, valores parciales y totales de las pruebas, y los comentarios que los participantes ofrecieron. Para esta fase se planteó la primera hipótesis: 1) El género está relacionado con una actitud positiva hacia la matemática.

Para la fase cualitativa se indagó tanto en la matriz de análisis cuantitativo como en la información del Censo Estudiantil Universitario (2011) de la universidad analizada. Se identificó los casos-tipo de acuerdo a los siguientes criterios: curso en que estudia, historia académica, actividad laboral, género, nivel socioeconómico y resultados obtenidos en los instrumentos estandarizados. Estos criterios trataron de asegurar la diversidad de opiniones. La identificación de categorías y construcción de tablas fue posible gracias al análisis de contenido de estas respuestas, el cual ayudó a afinar las preguntas a realizarse en el grupo focal.

Posteriormente se realizó un grupo focal de 2 horas de duración con los casos-tipo más representativos sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el cual sirvió para aclarar datos difusos de la información recabada en el análisis de la encuesta, así como el cumplimiento de una triangulación metodológica. Esta sesión se grabó, fue transcrita y finalmente se ejecutó un análisis de contenido.

En esta fase cualitativa se plantearon las siguientes anticipaciones hipotéticas: 2) Las estudiantes tienden a creer que la competencia matemática es un dominio masculino, 3) Las dificultades con las matemáticas se vinculan con las relaciones conflictivas con el profesor, y 4) Las estudiantes minimizan la importancia de dominar conceptos matemáticos por parte del docente en la enseñanza a nivel preescolar.

En general, la investigación espera encontrar en las estudiantes que estudian para ser docentes de preescolar opiniones negativas sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, y el reconocimiento de que las competencias matemáticas están más marcadas en los varones que en las mujeres.

4. Resultados

4.1 Análisis de resultados de la fase cuantitativa

La fase cuantitativa se basó en la aplicación del Test de Actitud hacia la Matemática de Fennema-Sherman y el Who and Math de Leder y Forgasz; para el primer test, valores altos representan actitud positiva. Para el segundo test, valores altos indican dominio femenino y valores bajos dominio masculino. Se señala que aunque en la redacción se nombra a la muestra como “las estudiantes”, en la misma están involucrados los dos únicos varones de la carrera. A continuación el detalle.

Actitud a la matemática. Se colocó en la sección de datos informativos de una de las pruebas estandarizadas la siguiente pregunta: ¿Qué tan bueno eres en matemáticas? La tabla 1 resume sus resultados, observándose que un 76.8% de las estudiantes se autocalifican como estudiantes promedio o por encima del promedio en su rendimiento matemático.

Calificación	Número	Porcentaje
Excelente	1	0.7 %
Bueno	39	26.7 %
Promedio	72	49.4 %
Debajo del promedio	14	9.5 %
Débil	20	13.7 %

Tabla 1: Distribución de estudiantes según su autoconcepto en rendimiento matemático

La tabla 2 expresa la actitud hacia la materia, registrándose que el 85% de las estudiantes presentan actitud neutral o favorable frente al aprendizaje matemático, frente a un 15% que la toleran o que muestran una actitud negativa declarada.

Actitud	Intervalo de puntajes	Número	Porcentaje
Excelente actitud	204 – 240	6	4.1 %
Aceptable actitud	165 – 203	48	32.9 %
Actitud neutral	126 – 164	70	48.0 %
Actitud tolerante	87 – 125	21	14.4 %
Actitud Inadecuada	48 –86	1	0.6 %

Media=152.6, s=27.1

Tabla 2: Distribución del número de estudiantes según su actitud a la matemática

Al comparar estas dos tablas se observa que, pese a que una actitud desfavorable a la matemática tiende a ser reducida (Ver Tabla 2), la disposición de los porcentajes de las respuestas de las estudiantes sobre su autoconcepto tiende a una distribución normal (Ver Tabla 1); es decir, aunque se es consciente de su habilidad o limitación matemática, su actitud en general se ubica en intervalos superiores a la tolerancia de esta materia.

Este hallazgo concuerda con los de Zan y Di Martino (2007) sobre la discrepancia que suele presentarse en los resultados sobre la actitud hacia la matemática cuando los estudios provienen de enfoques cuantitativos o cualitativos; ellos concluyen: "el éxito en matemáticas tiene muchos y profundos significados diferentes" (Zan y Di Martino, 2007, pp. 165).

Actitud y género. La tabla 3 muestra los coeficientes de correlación de Pearson entre las dimensiones del Test de Actitud Matemática y el Test Who and Math, encontrándose correlaciones significativas en dos pares de dimensiones. Cabe indicar que tradicionalmente se considera una gran correlación aquella que es igual o superior a 0,50; moderada aquella de aproximadamente 0,30; y pequeña aquella cercana a 0,10. "De hecho, en psicología es raro obtener correlaciones mayores a 0,40" (Aron y Aron, 2001, pp. 96).

El primer par involucra la dimensión Actitud-Confianza-Motivación por el test de Género y la dimensión Autoconfianza por el test de Actitud. Se observa una correlación positiva entre la autoconfianza en la competencia matemática y la creencia de que las mujeres están más motivadas, autoconfiadas y con mejor actitud hacia la matemática, en comparación con los varones. Esto sugiere que la muestra cree principalmente que las chicas que disfrutan la matemática tenderán a puntuar alto en autoconfianza, y de la misma manera, que los chicos que disfrutan la matemática no puntuarán significativamente valores altos en autoconfianza. En conclusión, se tiende a creer que la motivación hacia la matemática es un evento más visible en mujeres.

TEST DE GÉNERO	TEST DE ACTITUD			
	Autoconfianza	Utilidad	Ansiedad	Profesor
Habilidad	0,0645	-0,1057	0,1333	0,0254
Actitud-Confianza-Motivación	**0,1801***	0,1157	**0,1537***	0,0317
Responsabilidad-Esfuerzo	0,0931	-0,0194	0,1251	0,0660
Profesor	-0,0711	-0,1076	0,0164	-0,0628
Amigos-Familiares	0,0705	0,0336	-0,0189	0,0293
Utilidad	0,0247	0,0844	0,0813	0,0303

*p<0.05

Tabla 3: Correlaciones de Pearson entre las dimensiones de los Test

Esto concuerda con un estudio de Molina (2012), quien descubrió que las mujeres tienen una mejor actitud que los varones hacia la matemática, pero también encontró que la varianza de su muestra femenina era muy superior a la varianza de la muestra masculina, aunque no presentó ninguna explicación. Sin embargo, este resultado analizado insinúa que una chica motivada por la matemática exhibe más confianza en sí misma que un chico en las mismas condiciones.

El segundo par involucra la dimensión Actitud-Confianza-Motivación por el test de Género y la dimensión Ansiedad por el test de Actitud. Se reconoce otra correlación positiva entre baja ansiedad matemática y motivación femenina para las matemáticas. El resultado arrojó que las chicas que confían en su competencia matemática demuestran poca ansiedad al aprenderla, y de la misma forma, los chicos con autoconfíanza matemática no muestran significativamente baja ansiedad.

En el mismo estudio, Molina (2012) concluye que no hay diferencias significativas en la ansiedad matemática entre hombres y mujeres, pero exhibe una mayor varianza de la muestra femenina en contraste con la masculina, aunque no presenta explicaciones para estos datos. No obstante, el resultado analizado sugiere que una chica motivada por la matemática exhibe más su tranquilidad (baja ansiedad) que un chico en las mismas condiciones.

Excepto por este par de dimensiones, los puntajes globales de actitud matemática y percepción sobre género no correlacionan significativamente ($r=0.0983$, $p>0.05$); las estudiantes de educación preescolar tienden a creer que el género no es un criterio relacionado con una buena disposición a la matemática, también este resultado es sustentado por la información de la tabla 4, la cual excluye totalmente casos que opinen que la matemática sea un dominio masculino.

Percepción	Rango del puntaje	Número	Porcentaje
Dominio femenino	110 – 150	13	8 %
Dominio neutral	70 – 109	133	92 %
Dominio masculino	30 – 69	0	0 %

Tabla 4: Distribución del número de estudiantes según actitud matemática como dominio de género

Por lo expuesto, los datos no revelan información que asegure que exista una creencia que vincule la competencia matemática como área de dominio de género, por lo que se rechaza la hipótesis 1. Así mismo, no se confirma que exista una actitud predominantemente negativa ni positiva hacia la matemática (media=152.6, s=27.1).

Zan y Di Martino (2007) sugieren que debido a las dificultades que originan el estudiar la actitud matemática como una dicotomía positiva/negativa, se debe acompañar estos estudios con métodos cualitativos para lograr una mejor comprensión de las percepciones de los sujetos involucrados.

4.2 Análisis de resultados de la fase cualitativa

Para la fase cualitativa se analizó la matriz de datos cuantitativos de la muestra y se escogió 11 casos-tipo de acuerdo a categorías como género, edad, curso, tipo de escuela de la que proviene, puntuaciones en pruebas de la fase cuantitativa, autodiagnóstico y actividad laboral; las razones predominantes para su elección se detallan en la tabla 5.

N	Gen	Edad	Curso	Puntuación Actitud	Puntuación Género	Auto diagnóstico	Labora	Razón predominante de elección
1	F	43	1	Aceptable	Neutro	Bueno	Si	Estudiante de mayor edad
2	F	17	1	Aceptable	Neutro	Promedio	No	Estudiante de menor edad
3	F	18	1	Aceptable	Dominio femenino	Bueno	No	Percepción de la matemática como dominio femenino
4	F	21	1	Excelente	Neutro	Bueno	No	Comentario expresando desear dar mayor información
5	F	19	1	Aceptable	Dominio femenino	Promedio	No	Percepción de la matemática como dominio femenino
6	M	19	1	Moderada	Neutro	Promedio	No	Estudiante de sexo masculino
7	F	25	2	Aceptable	Neutro	Excelente	Si	Se auto diagnostica como Excelente
8	F	29	2	Moderada	Neutro	Bajo del Promedio	No	Puntuación límite sobre la matemática como dominio masculino
9	M	21	3	Moderada	Neutro	Promedio	No	Estudiante de sexo masculino
10	F	22	4	Inadecuada	Neutro	Promedio	No	Calificación Inadecuada en el test de Actitud a la Matemática
11	F	28	4	Excelente	Neutro	Débil	No	Calificación Excelente en el Test de Actitud a la Matemática

Tabla 5: Perfil de los casos-tipo elegidos

4.2.1 Análisis de los resultados de la Encuesta

Actitud y ansiedad. La tabla 6 muestra las estudiantes que presentaron experiencias frustrantes en el aprendizaje matemático, la mayoría de ellas relacionadas al entorno escolar. La razones evidencian diversas dificultades como la metodología: "*me bloqueé a los 12 años porque la maestra no se daba a entender en su explicación*"; la generación de climas propicios de aprendizaje en clase: "*al salir a la pizarra no pude hacer un ejercicio*"; o el establecimiento de empatía por parte del maestro: "*me puse nervioso en la pizarra y me bloqueé, el profesor se enojó, me asusté y no pude hablar*". Tobías (1993) plantea la analogía del bloqueo con las matemáticas como la sensación de chocarse contra una pared, en que se paralizan procesos como la atención, la memoria y el pensamiento.

Atribuciones de bloqueo a las Matemáticas	Estudiantes que presentaron bloqueos
Situación familiar	E1 E7
Exámenes	E11
Clase	E2 E3 E6
Profesor	E8 E9 E4
Metodología	E10 E5

Tabla 6: Distribución de estudiantes según las causas de Ansiedad Matemática

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La interpretación de la tabla 7 demandó de la aplicación de la teoría de la atribución de Weiner (1986), ya que la información muestra a qué atribuyen las estudiantes sus dificultades en matemáticas. Se observa que 6 de 11 estudiantes reconocieron tener dificultades en la materia y que estas dificultades se centran en dos tipos de atribuciones: las primeras relacionadas con sus habilidades matemáticas percibidas como inalterables, lo que Weiner (1988) postula como atribución de Locus-interno, Estabilidad-estable y Controlabilidad-controlable: "*no estudiaría ingeniería porque no soy buena para las matemáticas*". El segundo tipo de atribuciones indican que las experiencias con familiares o profesores son las que determinaron sus dificultades con la materia, lo que Weiner (1988) enuncia como atribuciones de Locus-externo, Estabilidad-estable y Controlabilidad-incontrolable: "*no elegiría estudiar una ingeniería porque no quisiera tener profesores como los que tuve*".

Tipo de atribuciones referidas a las dificultades en Matemáticas	Estudiantes que presentaron dificultades
Interna estable controlable (Habilidades)	E2 E3 E9 E11
Externa estable incontrolable (Profesor/familia)	E1 E8
No presenta dificultades	E4 E5 E6 E7 E10

Tabla 7: Distribución de estudiantes según su atribución a dificultades matemáticas

Relación con profesores. La tabla 8 muestra que de los profesores a los que se recuerda positivamente, solo 1 estudiante señala a su maestro de matemáticas, además, los buenos recuerdos tienden a darse más con docentes de la primaria, mientras que las experiencias negativas son más frecuentes con los de secundaria y especialmente con profesores de matemáticas, apoyando los hallazgos de Jackson y Leffingwell (1999) de que el temor a la matemática se desarrolla en grados anteriores al universitario.

Experiencia con Profesores		Edad del alumno a la que se produjo evento significativo con el docente		
		6 a 11 años	12 a 15 años	Mayor a 18
Experiencia positiva	Docentes de Primaria	E3 E5 E8 E11		
	Ciencias Exactas		E7	
	Ciencias Sociales		E2	E4 E6
	Ciencias Naturales	E9	E10	
	Docentes Universitarios			E1
E xp er	Ciencias Exactas	E1	E2 E4 E8 E7	
	Ciencias Sociales		E5 E10	

	Lenguas		E9 E11	
	Ninguna	E3 E6		

Tabla 8: Distribución de estudiantes según las experiencias con profesores

Equidad de género. La tabla 9 expresa una clara tendencia a percibir la matemática como dominio masculino: "*pienso que los chicos tienen mayor afinidad y desenvolvimiento para los cálculos matemáticos*". Incluso la percepción neutral es más frecuente que la percepción femenina: "*pienso que los dos por igual pues todos tenemos la capacidad*".

Percepción de la matemática como dominio femenino	Percepción de la matemática como dominio neutral	Percepción de la matemática como dominio masculino
E3	E4 E5 E7	E1 E2 E6 E8 E9 E10 E11

Tabla 9: Distribución de estudiantes según percepción de género y matemática

De las estudiantes que adoptaron una postura de género, la información de la tabla 10 resume el tipo de sus atribuciones, siendo las más comunes las habilidades: "*porque ellos son más capaces que nosotras*"; la cultura: "*los varones son mejores en matemáticas porque desde pequeños el hogar les inculca que deben estudiar alguna carrera de ingeniería*"; la motivación: "*a los chicos les atrae más la matemática*"; o la paciencia: "*las chicas son mejores en matemáticas porque no se desesperan y la toman con calma*". Se observa un patrón parecido a las atribuciones analizadas anteriormente sobre la dificultad, siendo la habilidad, la paciencia y la motivación, atribuciones con Locus-interno, Estabilidad-estable y Controlabilidad-controlable, y la cultura una atribución de Locus-externo, Estabilidad-estable y Controlabilidad-incontrolable. Esto apoya los hallazgos de Eccles (1974) sobre las opiniones de estudiantes acerca de la natural habilidad matemática de los varones.

Tipo de atribución	Atribución a la competencia matemática	Percepción de la matemática como dominio masculino	Percepción de la matemática como dominio femenino
Interna-Estable-Controlable	Habilidad	E2 E8 E9	
Externo-Estable-Incontrolable	Cultura	E1 E10	
Interno-Estable-Controlable	Paciencia	E11	E3
Interno-Estable-Controlable	Motivación	E6	

Tabla 10: Distribución de estudiantes según atribución al dominio matemático por género

Compromiso docente en la enseñanza de nociones lógicas. La información del gráfico 1 expone lo que piensan las estudiantes sobre los saberes o habilidades que debe considerar la Educación Básica, así como los saberes o habilidades necesarios para que una persona pueda manejarse adecuadamente en la vida. Las repuestas a las dos preguntas son similares, pero se diferencian por su frecuencia, ya que se observa notables discrepancias entre lo que se considera importante para la vida y lo que debe contemplar la Educación Básica.

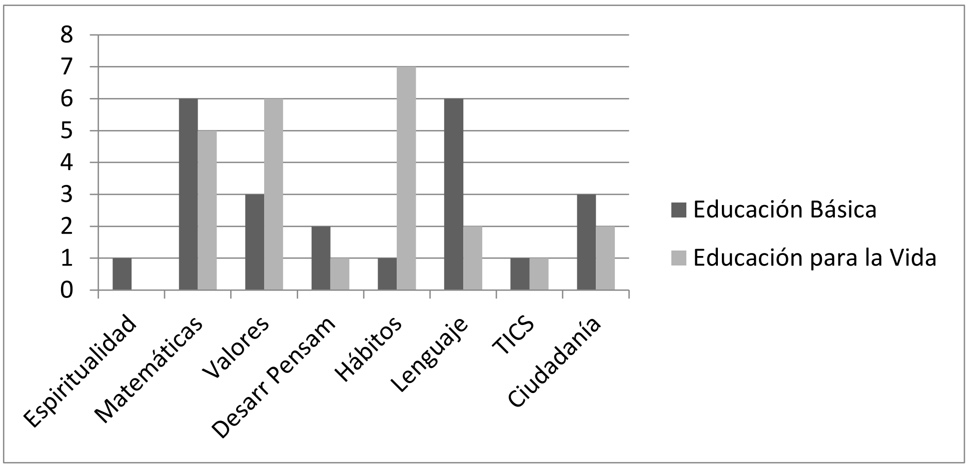


Gráfico 1: Saberes necesarios en la educación y la vida

El gráfico 1 muestra que, mientras se considera a los hábitos, valores y habilidades matemáticas, saberes fundamentales para la vida; la Educación Básica debe contemplar la enseñanza de habilidades matemáticas y comunicativas. A pesar de esta discrepancia se registra que el saber matemático es el que menor diferencia indica. Esto sugiere que las estudiantes tienen conciencia de la importancia de la educación matemática para la vida.

Estos datos apoyan la tesis de Mialaret (1986) sobre los 3 fines de la enseñanza matemática: suministrar un instrumento intelectual, desarrollar su formación intelectual, y la adaptación a la vida, siendo la matemática un instrumento que enseña a seguir reglas que permiten representar correctamente el papel de ciudadanos.

Los datos hasta aquí analizados parecen aceptar las hipótesis 2 y 3, y rechazar la hipótesis 4. No obstante, la fase cualitativa se completa con una segunda técnica: el grupo focal.

4.2.2 Análisis de los resultados del Grupo Focal

Dada la diferencia encontrada entre los resultados de los análisis cuantitativo y cualitativo, se realizó una relectura de la información de las encuestas con el fin de discriminar dentro de los casos-tipo, cuáles de ellos presentaban similares características para seleccionar los futuros participantes del grupo focal, Morgan (1998) manifiesta la homogeneidad de los miembros del grupo como una fortaleza porque ello permite el surgimiento de una información y experiencia más rica y concentrada, logrando que quien se exprese sea el grupo y no los individuos.

Basado en las categorías que este trabajo pretende estudiar como la actitud negativa a la matemática, la matemática como dominio masculino, las relaciones con los profesores y experiencias negativas vinculadas, se decidió profundizar en las mismas evaluando cada pregunta de las encuestas para determinar si satisfacían o no estas categorías; la tabla 11 sintetiza el registro, siendo la columna los 11 casos y la fila las 11 preguntas de la encuesta. Esta información determinó la selección de los casos 1, 2, 6, 9 y 11 como participantes del grupo focal. Se aclara que uno de estos cinco casos fue uno de los estudiantes varones.

Caso	**Preguntas**											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**Total**
1	x	x	x	x	x			x	x	x	x	**9**
2	x	x	x	x				x	x		x	**7**
3	x	x	x									3
4	x				x			x		x		4
5	x	x	x									3
6	x	x	x	x					x	x	x	**7**
7	x							x	x			3
8	x	x		x				x	x		x	6
9	x	x	x	x	x				x	x	x	**8**
10	x			x	x				x		x	5
11	x	x	x	x				x	x		x	**7**

Tabla 11: Registro de evidencia de presentación de las categorías estudiadas

La primera pregunta realizada al grupo focal fue:

¿Qué opinan sobre sus actitudes hacia la matemática, les gustan o no y por qué?

En general, a los miembros del grupo no les agradan las matemáticas, por lo que presentan actitudes negativas hacia su aprendizaje. La razón se debe principalmente a una cuestión de método. El grupo expresa que bajo ciertas condiciones como una tutoría más personalizada: "*si tengo a alguien quien me ayude, le pongo empeño y me dejo guiar*"; o una metodología más adecuada: "*en mi época los métodos eran difíciles, ahora los métodos son más divertidos*"; sí lograron o pudieron haber logrado resultados óptimos. El método es un proceso planificado y aplicado perdurablemente por el docente que, aunque produce un intercambio comunicativo con el alumno, es externo a este último; en consecuencia, se trata de una atribución externa, estable e incontrolable, lo que sugiere que sus percepciones sobre la matemática son producto de la experiencia, corroborando las aportaciones de Tobías (1993) sobre el origen del temor a la matemática.

Segunda pregunta:

¿Cuáles son sus opiniones sobre la relación entre las diferencias de género y el dominio de la matemática?

Todos los miembros reconocieron que existe una brecha entre el dominio matemático de los hombres y las mujeres, sin embargo, las causas de esas diferencias no fueron las mismas. El grupo presentó dos posturas inicialmente contrarias y que finalmente armonizaron, por un lado, fundamentando la habilidad masculina: "*el hombre es más rápido, más chispa; la mujer en cambio es más organizada y tiene que ver más el problema*". Por otro lado, se presentaron causas vinculadas a la cultura: "*no son mejores, es la sociedad, la educación fomenta la competencia*". Posteriormente convinieron en que pueden existir diferencias disposicionales que la educación social y formal las agudiza y fortalece, y por ello dan la impresión de que esas diferencias entre el dominio por género es causa innata. Esto se explica por la influencia cultural en el sentido de que el tipo de actividad influye sobre el desarrollo de procesos psicológicos y del pensamiento (Leontiev, 1984).

Tercera pregunta:

Dependiendo de cada caso, ¿cuál creen que es el origen por la que desarrollaron sus actitudes a la matemática?

Las opiniones son compartidas entre dos posturas, una considera que el origen de sus actitudes se debe a la naturaleza de la asignatura: "*pienso que es la materia, el álgebra es difícil, tuve profesores que trataron de ayudarme pero no pude*"; y una segunda postura que considera que sus actitudes nacen por un aspecto de la metodología por parte del tutor, sea este el profesor: "*el profesor iba bien rápido y no importaba si no entendías o no, él avanzaba*"; o algún familiar: "*mi papá me enseñaba matemáticas y con facilidad perdía la paciencia*". Se observa que en el proceso de enseñanza se establecen vínculos entre el educador y el educando que afectan notablemente la metodología, siendo estas experiencias personales las que inhiben el intelecto y la curiosidad, y lleva a limitar el aprendizaje matemático (Tobias, 1993).

Cuarta pregunta:

¿Qué importancia tiene para ustedes la enseñanza de las matemáticas en el nivel inicial?

El grupo expresa clara conciencia de la importancia de la enseñanza de la matemática en los niveles iniciales: "*es muy importante porque soy la encargada de iniciar a los niños en la educación*". Sin embargo, inicialmente se vio una discrepancia entre lo que el profesor de preescolar debe conocer sobre matemática, ya que unos planteaban contenidos básicos: "*se debe saber hasta las operaciones* *básicas"*; y otros indicaban un nivel superior de conocimiento: "*el profesor de preescolar debe conocer las nociones, la geometría, toda la matemática hasta el nivel de la secundaria"*. Finalmente, el grupo convino en que se debe dominar los conocimientos relativos a la educación primaria; una participante lo sintetizó de la siguiente manera: "*es mejor que no tenga límites porque el niño busca a la maestra, por ejemplo, yo doy clases en un jardín y hay alumnos que están en 6to año y regresan a hablar conmigo, con su profesora de preescolar, a preguntar por algún dato de su materia, y la maestra ¿qué va a decir? El profesor debe ser completo"*.

Como término de este análisis, las opiniones vertidas en el grupo focal fueron muy convergentes, aludiendo que el profesor y su didáctica son los factores principales del origen de una actitud negativa hacia la matemática, aunque enlazado a ella se encuentra la naturaleza de la asignatura como un factor obstaculizador; de esta manera se acepta la hipótesis 3. Así mismo, la competencia matemática es reconocida como un dominio masculino. Si bien puede existir una base disposicional, la cultura y la educación la fortalece a través de un currículo que promueve las diferencias en los roles de género relacionados con la educación matemática; de este modo se acepta la hipótesis 2. Por último, el grupo admitió la importancia de la enseñanza de la matemática en los niveles iniciales como fundamento para desarrollar las capacidades que le servirán al niño en la educación básica. También es importante su rol como guía en esta iniciación y su dominio al menos de los contenidos de la primaria como preparación para enseñar en estos niveles; así, se rechaza la hipótesis 4.

5. Conclusiones y recomendaciones

Lo expuesto considera que el origen de la actitud negativa a la matemática es atribuida al método, las habilidades y la naturaleza de la asignatura. Los métodos de enseñanza usualmente empleados atenúan la relación profesor-alumno y contribuye a la formación de autopercepciones debilitadoras de las habilidades de las estudiantes.

Se acepta la idea de que los hombres no superan considerablemente a las mujeres en habilidades lógicas innatas, pero sí que la sociedad influye notablemente sobre los varones a desarrollar un interés por esta materia, reafirmando que el dominio matemático masculino se debe a factores culturales.

Por otro lado, las estudiantes perciben que los valores o hábitos son aspectos más importantes en la formación de un ciudadano, aunque no descuidan la trascendencia de la enseñanza matemática. También le dan mucha importancia a su rol orientador en el inicio de la educación; además, consideran que el dominio de los contenidos matemáticos por parte de los profesores de preescolar debe llegar hasta los del nivel primario o el equivalente a los 11 años del niño.

En lo relacionado con el diseño técnico, la investigación aporta una discusión sobre los enfoques cuantitativos y cualitativos, ya que dependiendo de cada fase se puede tener interpretaciones distintas de las anticipaciones hipotéticas inicialmente planteadas. Como lo expresan Zan y Di Martino (2007), el estudio de categorías como la actitud se dificulta por la falta de claridad del concepto; la actitud y creencias son conceptos de la psicología social que presentan esta complicación al estudiarlas.

Relacionado con las anticipaciones hipotéticas planteadas, estas fueron demostradas en parte. En general, los datos aportaron factores que se los preveía, pero también otros que enriquecieron y complejizaron el análisis de las creencias y actitudes.

Las conclusiones conducen a formular dos recomendaciones. La primera surge de la interesante evidencia acerca de que las mujeres tienen una capacidad más desarrollada para expresar y visibilizar sus emociones vinculadas a su autoconfianza con la matemática en comparación con los varones. Ello propone un estudio más profundo sobre la afectividad como fundamento de prácticas docentes, y dado que hay mayor dispersión en mujeres que en varones en ansiedad matemática, el estudio de casos aislados de mujeres que exclusivamente aman u odian esta asignatura brindaría información sobre la relación entre la afectividad y el aprendizaje matemático, y aportaría a mejorar la docencia.

La segunda se levanta desde la confirmación de que un currículo oculto del sistema educativo influye sobre el interés de los varones en el cultivo de sus habilidades matemáticas, modificando las percepciones de las mujeres sobre las suyas. Tal constatación sugiere a la universidad y a la facultad de educadores de preescolar difundir estos resultados para generar un debate y concientización sobre las creencias y actitudes vinculadas al género y la educación matemática; además de considerarlos en el currículo de la carrera a través de la asignatura de didáctica de las relaciones lógico-matemáticas. Puesto que las estudiantes demuestran compromiso en su rol, se vislumbra un pronóstico favorable para la erradicación de prácticas que reproducen la inequidad de género y el mejoramiento de la actitud por la matemática; cuestión que a la postre fortalecerá la educación inicial.

Bibliografía

Aron, A. y Aron, E. (2001). *Estadística para psicología*. Brasil: Pearson Educación.

Baker, D. y Jones, D. (1993). Creating gender equality: Cross-national gender stratification and mathematical performance. *Sociology of education*. 66 (2), 91-103.

Balderrama, M. (1989). *Investigación para educación: Guía para educadores y educandos*. Quito: Editorial Latinoamericana.

Baroody, A. (1997). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Beck, A., Rush, A., Shaw, B. y Emery, G. (1983).*Terapia cognitiva de la depresión*. Bilbao-España: Editorial Desclee de Brouwer, S.A.

Beilock, S., Gunderson, E., Ramírez, G. y Levine, S. (2009). Female teachers´ math anxiety affects girls´ math achievement. *PNAS*, Vol. 107, No. 5, 1860-1863.

Bekdemir, M. (2010).The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational studies in mathematics*. 75 (3), 311-328.

Bloch, H., Chemama, R., Gallo, A., Leconte, P., Le Ny, J., Postel, J., Moscovici, S., Reuchlin, M. y Vurpillot, E. (1996). *Gran diccionario de Psicología*. Madrid: Ediciones del Prado.

Carpenter, T., Hiebert, J. y Mose, J. (1983). The effects of instruction on children´s solutions of aditions and substraction Word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14 (2), 55-72.

Censo Estudiantil. (2011). *Caracterización de los estudiantes de la ULVRG*. Guayaquil: Departamento de Investigación de la Universidad Laica Vicente Rocafuerte.

Daskalogianni, K. & Simpson, A. (2000). Towards a definition of attitude: the relationship between the affective and the cognitive in pre-university students. Proceedings of PME 24, vol.2, 217-224, Hiroshima, Japan.

Díaz Barriga, F. y Hernandez, G. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. México: Mcgraw-hill.

Eccles, J. (1974). *Self perceptions*. Morristown: N.J. General Learning Press.

Fennema, E., & Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. *JSAS: Catalog of selected documents in psychology*, 6*(*1), 31 (Ms. No. 1225).

Gil-Pérez, D.; Carrascosa, J., Furió, C. y Martínez-Torregosa, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Barcelona: HORSORI.

González Rey, F. (1985). *Psicología de la personalidad*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Guerrero, E.; Blanco, L. J. y Vicente, F. (2002). Trastornos emocionales ante la educación matemática. En J. N. García (Coord.), *Aplicaciones a la Intervención Psicopedagógica,* (pp. 229-237). España. Ediciones Pirámide.

Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. En Mc Leod & Adams (Eds.) *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp.37-45). New York. Springer Verlag.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista P. (2010). *Metodología de la investigación*. Chile: McGraw Hill.

Hyde, J., Fennema, E. y Lamon, S. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*. 107 (2), 139-155.

Inda-Caro, M., Rodríguez, C., y Peña-Calvo, V. (2010). PISA 2006: La influencia del género en los conocimientos y competencias científicas. *Revista Iberoamericana de Educación RIE digital*. 51 (2), 1-12.

Jackson, C. D. y Leffingwell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *The Mathematics Teacher*, 92(7), 583-586.

Leder, G., & Forgasz, H. (2002). Two new instruments to probe attitudes about gender and mathematics. ERIC. Resources in Education (RIE) [ERIC document number. ED 463312].

Leontiev, A. (1984). *La actividad en psicología*. La Habana: Editorial Pueblo y educación.

Lizana, V. (2008). Representaciones sociales sobre feminidad de los/las estudiantes de Pedagogía, en los contextos de formación docente inicial. *Revista Estudios Pedagógicos*, 34 (2), 115-136.

Malinsky, M., Ross, A. Pannells, T. y McJunkin M. (2006). Math anxiety in pre-service Elementary school teachers. *Education*, 127, No. 2. Wint, 274-279.

Markovitz, Z. (2010). Beliefs hold by pre-school prospective teachers toward mathematics and its teaching. *Procedia-Social and Behavorial Sciences*. 11, 117-121.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D.Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.575-596). New York: McMillan Publishing Company

Mialaret G. (1986). *Las matemáticas: Como se aprenden, como se enseñan*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Molina (2012). Factores de la actitud y ansiedad al aprendizaje de la matemática en estudiantes adolescentes de la ciudad de Milagro: La relación de la estructura familiar y el rendimiento académico. *Revista Unión*. 1 (29), 109-120.

Monsalve, N. y García, C. (2002). Sexismo y “Guía práctica de actividades para niños preescolares” (GPP). *Revista Educere*. 6 (17), 43-54.

Morgan, D. (1998). *Focus group as qualitative research*. Londres: Sage.

OECD. (2010). PISA 2009 Results: *What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)* http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en

Pérez, C. (2009). *Técnicas de muestreo estadístico*. México D.F.: Garceta Grupo Editorial.

Tobias, S. (1993). *Overcoming math anxiety, revised and expanded*. Tucson: Norton & Company.

Weiner, B. (1986). *An attributional theory of motivation and emotions.* New York: Springer Verlag.

Wollstonecraft, M. (1998). *Vindicación de los derechos de la mujer*. Madrid: Editorial Debate.

Zan R. y Di Martino P. (2007). Attitude toward mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast. Monograph* 3, 157-168.

Molina Morán. Profesor y Psicólogo. Comisión de Educación de la Sociedad Ecuatoriana de Matemática (SEDEM). edo_molina@yahoo.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 153-163

Salarios y calidad de vida: Una experiencia de aula en Educación Matemática Crítica

Christian Camilo Fuentes Leal

Fecha de recepción: 13/03/2017
Fecha de aceptación: 04/05/2017

Resumen	En el texto se presenta una experiencia de educación matemática crítica en la cual se estudia la relación entre los salarios mínimos y la calidad de vida en el contexto latinoamericano y nacional, con un grupo de estudiantes de grado séptimo de un colegio de carácter oficial en la ciudad de Bogotá, por medio del uso del proyecto de aula como metodología de clase, por medio de esta experiencia se reflexionó sobre el papel del contexto social del estudiante en el aprendizaje de las matemática y la comprensión la realidad. **Palabras clave**: Proyecto de aula, Educación Matemática Crítica, Estadística, Proporcionalidad.
Abstract	This paper presents an experience of critical mathematical education in which the relationship between minimum wages and the quality of life in the Latin American and national context, with a group of students of seventh grade from an official school in the City of Bogota, using the classroom project as a class methodology, through this experience we reflected on the role of the student's social context in learning mathematics and understanding the reality. **Keywords**: Classroom Project, Critical Mathematics Education, Statistics, Proportionality.
Resumo	No texto se apresenta uma experiência de educação matemática crítica em que se estuda a relação entre os salários mínimos e a qualidade de vida no contexto latino americano e nacional, com um grupo de alunos da sétima série de uma escola oficial em Bogotá, por meio do uso de projeto de aula como metodologia de classe, por essa experiência se refletiu sobre o papel do contexto social do estudante na aprendizagem da matemática e a compreensão da realidade. **Palavras-chave:** Projeto de sala de aula, Educação Matemática Crítica, Estatística, Proporcionalidade.

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas está enmarcado en un contexto social, histórico y económico, este elemento es aún más evidente en Latinoamérica que se caracteriza por tener altos niveles de desigualdad social y pobreza, todos estos fenómenos inciden en las dinámicas y el cotidiano de la vida escolar. Esta situación hizo reflexionar y elaborar propuestas educativas a pedagogos latinoamericanos como Paulo Freire, sin embargo, el área de educación matemática durante mucho tiempo brillo por su ausencia en la elaboración de reflexiones y líneas de investigación que incluyeran estos elementos, pues consideraba como centro de del aprendizaje de las matemáticas las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Latinoamérica al centrarse en lo disciplinar y lo cognitivo, ha negado e ignorando sus problemáticas sociales, económicas e históricas de su contexto generando un divorcio entre el conocimiento matemático y la realidad social del estudiante, además de hacer los estudiantes pierdan el sentido del aprender matemáticas, pues se presenta al conocimiento matemático como algo ajeno a sus problemáticas, contexto e historia de los estudiantes.

Irónicamente Latinoamérica tuvo que esperar que países como Dinamarca presentaran propuestas de educación matemática que tuvieran en cuenta lo social, económico y político en el aula, con los aportes de autores como Skovsmose (1999) que presenta las matemáticas como un conocimiento no neutral, capaz de empoderar y fortalecer competencias democráticas en los ciudadanos, además de mostrar las relaciones que hay entre el contexto social de la escuela y el aprendizaje de las matemáticas.

Aunque el contexto Danés dista mucho del Latinoamericano, es necesario repensar y reinterpretar este tipo de propuestas, buscando rescatar, integrarlo a nuestro contexto.

En el presente documento presenta una experiencia de aula con un grupo de estudiantes de séptimo grado del Colegio Paulo VI en la ciudad de Bogotá en el cual se indagó sobre los salarios y el costo de vida de Colombia con respecto a diferentes países de Latinoamérica, por medio de la utilización del concepto de ambientes de aprendizaje propuesto por Skovsmose (1999) como una estrategia de relación entre el conocimiento matemático y el contexto social y económico de los estudiantes.

2. Marco de referencia

Las propuestas de enseñanza de las matemáticas están influenciadas por el contexto histórico social y político de la sociedad en la cual este, en el caso de Latinoamérica la existencia de fenómenos como la extrema desigualdad social, exclusión social, regímenes autoritarios, dictaduras y explotación laboral generaron la necesidad de generar propuestas pedagógicas que abordaran estas problemáticas, autores como Freire (1980) quien presenta la educación como una oportunidad de reflexión y transformación de problemáticas sociales, con respecto a la educación matemática autores como D´ambrosio (2003) muestra las matemáticas como una herramienta de emancipación ante la opresión, por medio de la presentación de las matemáticas como una actividad social, cultural es decir humana. Para el autor todos los grupos sociales construyen sus propias ideas matemáticas para desenvolverse en su entorno, desde esta perspectiva los conocimientos matemáticos de un grupo no se pueden concebir como mejores o más avanzados que otros, simplemente son los usados de acuerdo a las necesidades de dicho grupo, esta premisa es muy potente pues genera empoderamiento de comunidades que históricamente han sido marginadas, excluidas y explotadas como comunidades indígenas, inmigrantes, grupos de campesinos, obreros y grupos laborales.

En el contexto europeo la propuesta de la educación matemática crítica (EMC) busca implementar el aprendizaje de las matemáticas como un espacio de reflexión colectiva sobre problemáticas sociales, esta propuesta considera importante los intereses, expectativas, esperanzas y aspiraciones de los estudiantes, reevaluando la creencia que contenidos temáticos deben ser el centro de las propuestas pedagógicas, a este conjunto de intereses y expectativas Skovsmose (2005) lo llama foreground[1], éste contempla las condiciones económicas de los estudiantes, procesos de inclusión y exclusión socioeconómicos, oportunidades, valores culturales y tradiciones, entre otros.

Otro elemento importante que presenta esta propuesta es la noción de background, la cual se caracteriza como el conjunto de experiencias previas que involucran el contexto cultural, social y político de una persona.

Estas dos nociones se integran en un espacio llamado escenarios de aprendizaje propuesto por Skovsmose (2000) como una propuesta alternativa a las propuestas cognitivistas que han dominado en educación matemática, a continuación se caracterizará la propuesta de ambientes de aprendizaje.

2.1 Los ambientes de aprendizaje

Skovsmose (1999) caracteriza la propuesta de ambientes de aprendizaje en dos contextos, el paradigma del ejercicio el cual privilegia los algoritmos, y los escenarios de investigación los cuales implican un contexto más amplio, cada uno de estos escenarios se puede llevar a cabo a partir de diferentes aproximaciones, desde las matemáticas puras cuando el estudiante construye una demostración o una hipótesis matemática, la semirealidad cuando se habla de una realidad hipotética y la vida real cuando relaciona su contexto social con las matemáticas.

Con respecto a los tres tipos de referencia, las matemáticas puras describen al estudio de las matemáticas sin referencia a las aplicaciones prácticas que pudieran derivarse, se caracterizan por trabajar de una forma abstracta, utilizando axiomas, formulas, algoritmos con criterios matemáticos rigurosos.

En segundo lugar, la semirealidad entendida como una realidad construida, es una realidad virtual construida por el docente, con respecto a la referencia de la vida real, en ésta se muestran las situaciones que son propias de la realidad y del

[1] La noción de foreground posteriormente servirá para proponer los obstáculos de aprendizaje como un fenómeno político, causado por la exclusión social y la desigualdad.

contexto cercano a los estudiantes, las uniones de estos ambientes constituyen la propuesta de los ambientes de aprendizaje.

A continuación, se profundizará en los ambientes de aprendizaje tipo 4 y 6 los cuales son los más trabajados en la presente propuesta, caracterizándolos con base a lo presentado en Skovsmose (2000).

En el ambiente tipo 4 hay referencias a una semirealidad, pero en esta no se usa como una fuente para la formulación de ejercicios sino una invitación para que los estudiantes exploran y explican.

En el ambiente tipo 6 se desarrollan escenarios de investigación con un mayor grado de realidad y construyendo un significado para las actividades, los estudiantes realizan cálculos reales, en este ambiente el docente adquiere el rol de supervisor y mediador en el proceso de aprendizaje y propone cuestionamientos que orienten al estudiante, construyendo una reflexión crítica sobre las matemáticas y sobre la modelación de la respuesta al escenario.

Formas de organización de la actividad de los estudiantes		
Tipo de referencia	Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Matemáticas pura	(1)	(2)
Semirealidad	(3)	(4)
Vida real	(5)	(6)

Tabla 1. Ambientes de aprendizaje presentados en Skovsmose (2012)

En la propuesta de ambientes de aprendizaje confluyen diferentes elementos, por un lado las situaciones problemas, las cuales son situaciones abiertas que contienen aplicaciones intra o extramatemáticas, además de ejercicios, este elemento constituye un primer elemento que induce a la actividad matemática.

Un segundo elemento que está presente en esta propuesta son los conceptos en los cuales están dotados mediante definiciones, técnicas o acciones del estudiante con respecto a las matemáticas, el tercer elemento son las propiedades o proposiciones, las cuales comprenden atributos de los objetos matemáticos.

El cuarto elemento son los procedimientos los cuales comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculos y modos de ejecutar acciones, el quinto elemento son los argumentos los cuales son usados para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problemas, estos pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucra conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de éstos.

El último elemento que confluye en esta propuesta es el lenguaje, el cual se puede caracterizar como el conjunto de términos, expresiones, notaciones, gráficos, éste incluye el lenguaje oral, natural, gráfico, numérico.

El docente deberá poner en juego todos los elementos comentados anteriormente para la planeación, diseño, aplicación y evaluación de una propuesta de escenario de aprendizaje, este será un proceso de aprendizaje para el mismo profesor, pues hará uso de sus conocimientos disciplinares, didácticos y pedagógicos para que el escenario fluya y cumpla con los objetivos planteados.

3. Metodología

La presente propuesta metodológica quiere presentar la práctica pedagógica como una acción que busca establecer compromisos éticos y políticos generando alternativas diferentes a la domesticación o subordinación del conocimiento, por medio del rol investigador del docente y el uso de métodos cualitativos para comprender la realidad escolar y social de los estudiantes y su contexto.

Para esta propuesta se consideró usar el proyecto de aula como una metodología que ayudaría a implementar el ambiente de aprendizaje, autores como Schroeder (2001) presenta los proyectos como una forma didáctica que busca que los estudiantes aprendan a interesarse y a tomar parte de la vida cultural y social de su comunidad; mediante proyectos los estudiantes pueden aprender a descubrir que la realidad social es variable y a trabajar por los intereses comunes de su comunidad.

Los proyectos enseñan normalmente en forma integral e interdisciplinar, haciendo que el contexto de los estudiantes sea el principal insumo de esta propuesta. Desde esta perspectiva la matemática no sería sólo un sistema lógico y formal para contar, sino un medio de comunicación intercultural y una herramienta de reconstrucción de la realidad social, haciendo que en las clases los estudiantes descubran, comprendan y empleen la matemática como un medio de reflexión, comprensión y comunicación en situaciones cercanas a su realidad.

3.1 Contextualización

El Colegio Paulo VI está ubicado al sur occidente de la ciudad de Bogotá, es una institución de carácter oficial que alberga a una población estudiantil de aproximadamente 1500 estudiantes de niveles socioeconómicos bajos y medios de la ciudad. La presente experiencia muestra el proceso tenido con 30 estudiantes el curso 703 en el marco del segundo periodo académico del año 2016 en el espacio de estadística la cual tenía una intensidad horaria de 1 hora semanal, durante este periodo se estudió el costo de vida y salario básico en diferentes países como un espacio de reflexión sobre el costo y la calidad de vida en el contexto Colombiano.

3.2 Planteamiento del proyecto

El objetivo principal del proyecto fue comprender las relaciones entre la calidad de vida y los salarios en las familias de los estudiantes del gado 703, por medio del uso de conocimientos matemáticos y estadísticos como tabulación, gráfica y análisis de datos.

Para esto inicialmente como una estrategia de sensibilización y contextualización de la temática del proyecto se presentó una noticia de un periódico local en la cual se discutía la calidad de vida en la ciudad de Bogotá[2] la cual fue leída y discutida por los estudiantes, fruto de las reflexiones formaron grupos de trabajo de 4 o 5 estudiantes en los cuales se identificaron algunas categorías que para los estudiantes hacen que la calidad de vida sea mejor o peor, algunas éstas fueron el acceso a servicios públicos, estado de las vías, la seguridad, la posibilidad de empleo, el costo de la canasta básica, los salarios, el acceso a salud y el acceso a actividades culturales y de ocio.

En el momento de la elaboración de las categorías surgió la necesidad de analizar la relación entre los salarios y la calidad de vida, enfocando así el objetivo inicialmente planteado.

3.3 Conociendo los salarios mínimos y su relación con la calidad de vida

Para establecer la relación entre los salarios y la calidad de vida, inicialmente fue necesario presentar a los grupos de trabajo una lectura[3] en la cual se presentan los salarios mínimos de diferentes países latinoamericanos, en este momento surgió de manera natural el uso de las matemáticas como una herramienta para analizar y comprender el mundo real.

En esta ocasión para comprender la información presentada en el texto fue necesario hacer la conversión de los salarios mínimos que estaban presentados en dólares a pesos colombianos, teniendo en cuenta que 1 dólar equivale a 3.100 pesos, para elaborar esta conversión los estudiantes hicieron uso de la proporcionalidad.

Una vez fueron elaboradas estas conversiones surgió la necesidad de elaborar una tabla para organizar la información de menor a mayor salario en pesos colombianos, para posteriormente hacer un análisis inicial de la información presentada en la tabla, algunos elementos encontrados por los estudiantes estuvieron relacionados con el establecimiento del menor y el mayor salario además de establecer relaciones entre éstos.

[2] http://www.elespectador.com/noticias/bogota/bogota-una-ciudad-poca-calidad-de-vida-articulo-476109
[3] http://salariominimo.com.mx/comparativa-salario-minimo-latinoamerica/

Pais	Salario minimo en dolares	Salario en pesos Colombianos
Colombia	215	$ 645.000
Panama	744	$ 2232000
Costa Rica	512	$ 1'536.000
Argentina	448	$ 1'344000
Cuba	23	$ 69.000
Chile	350	$ 1'050.000
Mexico	120	$ 360.000
Uruguay	338	$ 1'014.000
Ecuador	365	$ 1'098000
Venezuela	34	$ 102.000
Brasil	212	$ 636.000
Rep Dominicana	288	$ 864000
Perú	255	$ 765000
Salvador	238	$ 714.000
Bolivia	115	$ 345000
Nicaragua	341	$ 1'023000
Paraguay	320	$ 960.000
Guatemala	369	$ 1'107.000

Figura 1. Tabulación de los datos de uno de los grupos de trabajo

Posteriormente surgió la necesidad que los grupos de trabajo representaran los valores de forma gráfica para esto se hizo uso del plano cartesiano por medio de un diagrama de barras, en este proceso los estudiantes debieron hacer uso de la escala en el eje Y, además de organizarlos de mayor a menor de tal forma que se pudiera hacer un mayor análisis a las cifras presentadas en el documento y en la tabla anteriormente construida.

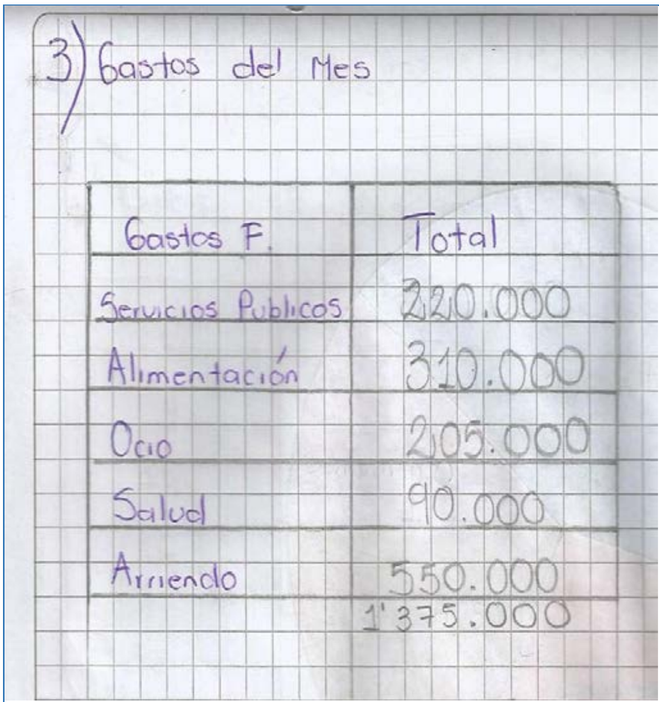
Figura 2. Representaciones gráficas y tabulares elaboradas con los estudiantes de grado 703

Fruto del análisis de la gráfica los grupos de trabajo pudieron identificar que el salario mínimo en Colombia el sexto más bajo de toda Latinoamérica, sólo superado por Cuba, Venezuela, Bolivia, México y Brasil, de igual forma los estudiantes pudieron identificar que el salario mínimo más alto de Latinoamérica es el Panameño, el cual es más de tres veces mayor que el salario mínimo en Colombia.

Éstos análisis de los grupos de trabajo los llevaron a reflexionar sobre qué incidencia tenía en sus vidas que el salario mínimo Colombiano fuera el sexto más bajo de Latinoamérica, generando así otro momento del proyecto.

3.4 Relacionando la canasta familiar con los salarios en el contexto de los estudiantes

En esta parte del proyecto los grupos de trabajo se acercaron al concepto de canasta familiar por medio de una lectura[4] en la que se presentaba su definición y sus características, posteriormente se le solicitó a cada grupo de trabajo consiguiera las facturas de servicios públicos y gastos de la canasta básica de una de las familias de uno de los integrantes de un grupo de trabajo.


3) Gastos del Mes

Gastos F.	Total
Servicios Publicos	220.000
Alimentación	310.000
Ocio	205.000
Salud	90.000
Arriendo	550.000
	1'375.000

Figura 3. Gastos de una familia de uno de los integrantes de un grupo de trabajo

Para esto cada grupo de trabajo hizo el cálculo de los gastos familiares, representándolo en tablas, graficas de barras, para esto se hizo uso de la estructura aditiva y multiplicativa, además del uso de del plano cartesiano, proporcionalidad y la escala en el eje Y.

Después de este proceso los estudiantes hicieron un análisis de la información representada en la tabla y el diagrama de barras, como por ejemplo en Bogotá se gasta casi un salario mínimo sólo para el pago de renta de un apartamento, de igual forma que en promedio una familia necesita de 3 o 4 salarios mínimos para cubrir las necesidades básicas de una familia de 3 o 4 integrantes, de igual forma esta

[4] http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/ayudadetareas/economia/canasta_familiar

información sirvió para identificar las necesidades económicas y características sociales de las familias de los estudiantes.

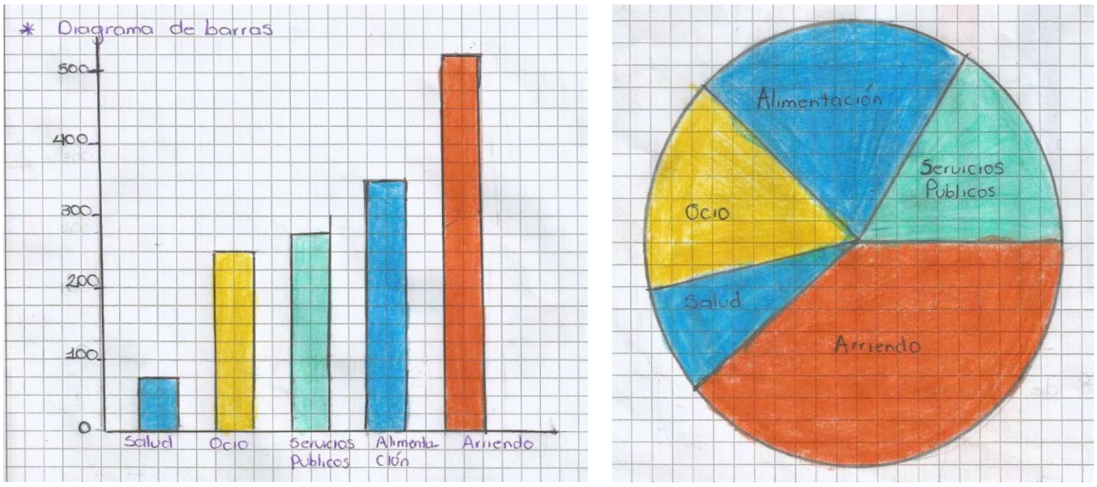


Figura 4. Representación de los gastos de la familia de uno de los integrantes del grupo

En la última parte del proyecto se basó en la búsqueda de una representación que mostrara los gastos mensuales de una familia teniendo como referencia una unidad, en este momento surgió la necesidad de elaborar un diagrama circular para poder evidenciar la distribución de los gastos de una familia promedio en Colombia, para esto fue necesario estudiar en conjunto el procedimiento para elaborar graficas circulares, en este proceso los estudiantes comprendieron el algoritmo para poder elaborar dicha gráfica por medio del uso de la proporcionalidad directa.

Una vez los grupos de trabajo elaboraron los diagramas circulares se hizo una exposición en la cual cada grupo presentó en carteleras la distribución de los gastos, posteriormente se encontraron elementos comunes como el mayor rubro dedicado por las familias es a renta la cual oscila entre 1 y 2 salarios mínimos, seguido de alimentación la cual oscila entre medio y 1 salario mínimo.

Este tipo de análisis sirvió como un espacio de reflexión sobre la relación entre los salarios y la calidad de vida en Colombia, además de necesidades para el contexto Colombiano como el déficit de inversión en vivienda de interés social en Bogotá y la necesidad del incremento del salario mínimo como una estrategia para tener mejor calidad de vida, mostrando así la importancia de las matemáticas como una herramienta para comprender y analizar la realidad de los estudiantes, uno de los principales objetivos de la educación matemática critica.

4. Consideraciones finales

La presente propuesta buscó presentar algunos elementos que buscaban cambiar las dinámicas hegemónicas de la clase de matemáticas, presentando las matemáticas como una herramienta para problematizar y analizar la realidad del estudiante por medio de un proyecto cercano a su contexto social.

En esta propuesta se quiso hacer un análisis de la realidad desde lo macro (salarios mínimos y calidad de vida en Latinoamérica) hasta llegar al contexto cercano al estudiante (salarios mínimos y calidad de vida en su familia) buscando generar diferentes espacios de reflexión sobre varias realidades por medio del uso del conocimiento matemático, la representación y análisis de datos.

A continuación, se presentarán algunos elementos que se pudieron identificar en el proceso de diseño, ejecución y análisis del ambiente de aprendizaje ejecutado en el grado 703 del Colegio Paulo VI I.E.D.

Con respecto a la metodología implementada, el uso de proyectos fue una estrategia para presentar la clase de matemáticas de una forma alternativa a la usualmente trabajada en la escuela, en la cual las clases no giran en torno una temática sino al análisis de situaciones del contexto social del estudiante.

Un elemento que preocupa a los docentes de matemáticas es el cubrimiento de temáticas y aspectos cognitivos, sin embargo, en la presente propuesta se pudo evidenciar que el planteamiento de proyectos cercanos al contexto de los estudiantes pueden dirigirse de tal forma que se puedan estudiar las temáticas de forma natural y relacionadas entre sí, todo esto depende de la dinámica y las situaciones que presente el docente en clase.

Otro elemento que preocupa al docente es la evaluación, pues su rendimiento a veces puede ser medido de acuerdo al desempeño de sus estudiantes en evaluaciones externas, en esta experiencia la evaluación fue un proceso en el cual se acompañaba a cada grupo de trabajo, en el cual el docente mencionaba los errores identificados en los procedimientos para resolver situaciones del proyecto, por medio del reconocimiento del error y su posterior modificación los estudiantes identificaban elementos a tener en cuenta para próximas oportunidades.

En este proyecto la evaluación fue concebida como una herramienta continua para la mejora de la comprensión de los conceptos trabajados, las fortalezas y aspectos a mejorar de los grupos de trabajo, éstos hasta aspectos estaban relacionados no sólo con aspectos cognitivos como el aprendizaje de la proporcionalidad y la escala para graficar los datos sino también aspectos como el trabajo en grupo, la comunicación y la colaboración.

Finalmente se considera que este tipo de propuestas aportan en la creación un pensamiento crítico ante la realidad, mostrando la no neutralidad del pensamiento matemático, en el cual los estudiantes hacían uso del conocimiento matemático para cuestionar y argumentar sobre problemáticas como la deficiencia habitacional y la baja calidad de vida ante los bajos salarios en Colombia.

Con respecto al pensamiento crítico se considera debe aportar en la creación de capacidades de análisis y dominación de la información que caracterizan un contexto social por medio del acercamiento a los estudiantes a este tipo de escenarios.

De igual forma se considera que el pensamiento crítico puede aportar a los estudiantes herramientas para conocer qué tipo de conocimiento que deben utilizar en determinada situación, además juzgar la consistencia de los razonamientos de los argumentos que son enunciados ante una situación de su contexto, buscando el uso la interpretación, el análisis, la evaluación, la inferencia, la explicación y la auto regulación.

Finalmente se considera que la construcción de actitudes críticas deben ser un proyecto a largo plazo para esto los estudiantes deben tener diferentes experiencias que aporten en este proceso, buscando reflexionar sobre los problemas y asuntos que entran dentro del rango de sus experiencias, el conocimiento (matemático) y el uso de métodos de indagación y razonamiento en clase.

Bibliografía

D´Ambrosio, U. (2003). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. *Revista Números* 43(90), pp. 439-442.

Freire, P. (1980). Le educación como práctica de la libertad. Madrid, España : Siglo XXI. Disponible en https://asslliuab.noblogs.org/files/2013/09/freire_educaci%C3%B3n_como_pr%C3%A1ctica_libertad.pdf_-1.pdf

Schroeder, J. (2001). Hacia una didáctica intercultural de las matemáticas. en: Lizarzaburu, A. & Zapata. G. *Pluriculturalidad y aprendizaje de las matemáticas*. pp.192- 214. Madrid, España: Morata.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA.*(6) 1, pp. 3-26. Universidad de los Andes.

Skovsmose, O. (2005). Foregrouds and politics of learning obstacles*. For the learning of Mathematics*, 25, pp. 4-10. FLM Publishing Association. Disponible en http://flm-journal.org/Articles/5B7F579B6B72D19BC3C629D03A5B83.pdf

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* pp. 109-130. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

Christian Camilo Fuentes Leal. Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, Magíster en Educación (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), Máster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (Universidad de Huelva). Profesor Secretaría Educación de Bogotá. ccfuentes@unal.edu.co

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Páginas 164-166

Reseña del Libro: Estrellas en la Sagrada Familia

Serapio García Cuesta

El Servicio de Publicaciones de la FESPM ha publicado el interesante libro "Estrellas en la Sagrada Familia", cuya autora es María de los Desamparados López de Briñas Ferragut. La obra es fruto de dos años de investigación concienzuda y laboriosa sobre la arquitectura y algunos de los contenidos de geometría que se encuentran en la Sagrada Familia. Con un importante apoyo gráfico, nos desvela la importante y variada presencia de poliedros estrellados en la obra cumbre de Gaudí.

La Sagrada Familia es el monumento más conocido y característico de Barcelona, como máximo exponente de la arquitectura modernista creada por Gaudí. Este Templo es una iglesia monumental iniciada el 19 de marzo de 1882 a partir del proyecto del arquitecto diocesano Francisco de Paula del Villar (1828-1901). A finales de 1883, se encargó a Gaudí la continuación de las obras, labor que no abandonó hasta su muerte, en 1926. A partir de entonces, varios arquitectos han continuado la obra siguiendo la idea original de Gaudí. El templo siempre ha sido expiatorio; es decir, desde sus inicios, hace ahora más de 135 años, se construye a partir de donativos. En este sentido, el propio Gaudí dijo: "El Templo Expiatorio de la Sagrada Familia lo hace el pueblo y se refleja en él. Es una obra que está en las manos de Dios y en la voluntad del pueblo”. Lo que resulta evidente es que la arquitectura del templo de la Sagrada Familia tiene un fuerte apoyo en las matemáticas y esto se pone de manifiesto en el texto que presentamos.

El libro es un ensayo donde la autora hace un estudio pormenorizado de los poliedros utilizados en la Sagrada Familia. Es de enorme interés, pues suele atribuirse a su arquitecto una huida de las *formas rectas*, recurriendo a los poliedros en contadas ocasiones. Sin embargo, el presente trabajo es un ejemplo que contradice dichas tesis. Además, la autora consigue transmitir la emoción del descubrimiento matemático con gran agudeza, siguiendo la estela iniciada por “*Los sólidos Pitagórico-Platónicos”* de D. Pedro Miguel González de Urbaneja que ya iniciara la colección “La Dimensión Cultural de la Matemática” en la que ahora se publica este libro.

Por otro lado, la investigación que se hace es muy interesante y los descubrimientos sobre los poliedros en la obra de Gaudí es algo muy novedoso a lo que se le debería dar difusión, ya que muestra todo el proceso de ensayo y error seguido hasta llegar al resultado final. En otras palabras, Estrellas en la Sagrada Familia presenta un contexto novedoso para estudiar los poliedros y sus propiedades.

Asimismo, en el apartado final, ofrece una serie de actividades asociadas, con un enfoque didáctico para ser desarrolladas con los alumnos. Las actividades son interesantes, especialmente para montar un taller de poliedros.

En definitiva, creo que los contenidos de este libro nos ayudan a comprender la 'Dimensión cultural de la Matemática' y permiten ilustrar y reflexionar sobre las mejores características que han de reunir las actividades que los profesores usemos en nuestras clases, para el aprendizaje de las matemáticas, su formulación en los distintos niveles educativos y su gestión en el aula. Al mismo tiempo, nos sugiere que las actividades matemáticas no surgen de manera aislada, sino que se enmarcan en un determinado contexto. Todo ello con la finalidad de que nuestros alumnos, cualquiera que sea su edad, se interesen por el mundo en el que viven y por el conocimiento generado por la humanidad y quieran plantearse y resolver problemas.

Desde el Servicio de Publicaciones de la FESPM nos sentimos muy orgullosos de poder presentar libros como éste que, además de su calidad, representan una fuente de inspiración de actividades para las clases de matemáticas.

Serapio García Cuesta

Servicio de Publicaciones FESPM

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 50. Agosto 2017
Página 167-174

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Esbozar los gráficos de las funciones f + g, f – g y fg , conociendo únicamente los gráficos de las funciones afines[1] *f y g.*

No se conocen las expresiones algebraicas de f ni de g y sus gráficos se muestran en un mismo sistema de coordenadas cartesianas, en los que no están explícitas las unidades.

La solución de este problema evidencia relaciones entre propiedades aritméticas y propiedades geométricas. En la perspectiva de los registros de representación semiótica de Duval, mostramos que mediante conversiones y tratamientos, considerando los registros gráfico y algebraico, se simplifica el esbozo de gráficos de funciones obtenidas mediante operaciones con funciones afines, a partir de los gráficos de dos funciones afines dadas. En una perspectiva matemática, usamos la estrecha relación entre las estructuras algebraicas del conjunto de las funciones afines con las operaciones de adición y multiplicación, y del conjunto de los números reales, con operaciones similares.

El problema surgió en una clase sobre funciones afines en un curso para alumnos del primer ciclo de profesorado de secundaria, en la que se había ilustrado que las gráficas de funciones afines son rectas en el plano y que la suma de funciones afines es también una función afín. Habíamos resuelto problemas de hallar expresiones algebraicas – como funciones afines – correspondientes a rectas graficadas en un sistema de coordenadas. Se tenían en la pizarra, en un mismo sistema de coordenadas los esbozos de gráficos de dos rectas, que asumimos eran esbozos de gráficos de sendas funciones *f* y *g*, cuyas expresiones algebraicas no se conocían. En los ejes coordenados no estaban indicadas las unidades, como se muestra en la Figura 1.

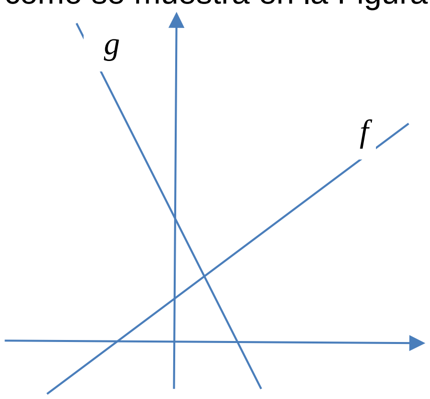


Figura 1

[1] Funciones afines, reales de variable real, son las de la forma $f(x) = ax + b$, con a y b constantes. Se dan detalles sobre estas y la suma de ellas en el anexo de este artículo (al final).

En lugar de marcar unidades en los ejes para encontrar expresiones algebraicas para las funciones afines correspondientes a tales rectas, surgió la idea de esbozar el gráfico de la función $f + g$. ¿Sería posible hacerlo en tales condiciones?

¿Cómo esbozamos el gráfico de la función $f + g$?

Observemos los puntos de intersección con el eje de abscisas, de los gráficos de f y g mostrados. Para mayor facilidad en las referencias, llamemos a tales puntos A y B respectivamente (Figura 2). Como todos los puntos que están en el eje de abscisas tienen ordenada 0, la abscisa de A será algún número real a y su ordenada será 0, de modo que $f(a) = 0$. Análogamente, la abscisa de B será algún número real b y su ordenada será cero, de modo que $g(b) = 0$.

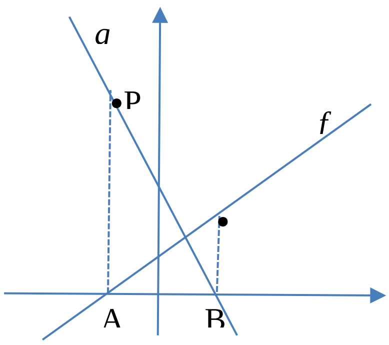


Figura 2

Observemos que un punto del gráfico de la función $f + g$ será

$$(a;\ (f\ +\ g)(a))$$

El valor de $g(a)$ será algún número real, y por ser $f(a)$= 0, se tendrá

$$(f + g\ )(a)\ =\ f(a)\ +\ g(a)\ =\ g(a).$$

Así, ya tenemos un punto del gráfico de la función $f\ +\ g$: el punto cuyas coordenadas son $(a;\ g(a))$, que en la figura 2 lo llamamos P.

Con razonamiento similar obtenemos el punto Q del gráfico de la función $f\ +\ g$, cuyas coordenadas son $(b;\ f(b))$, pues siendo $g(b)$ = 0,

$$(f\ +\ g\ )(b)\ =\ f(b)\ +\ g\ (b)\ =\ f(b)$$

Como la función $f\ +\ g$ también es una función afín y en consecuencia su gráfico es una recta, teniendo los puntos P y Q de su gráfica, ya podemos graficar la recta que pasa por esos puntos, que es el gráfico de la función $f\ +\ g$ (Figura 3)

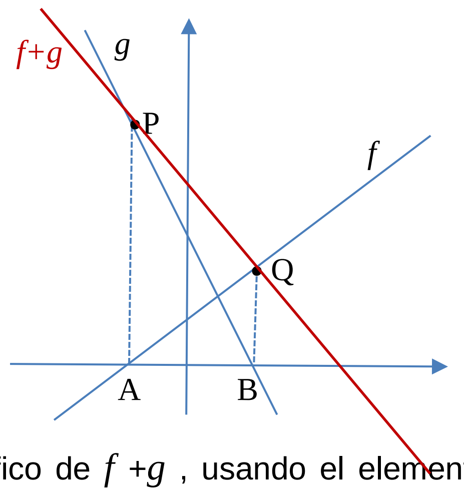


Figura 3

Esta manera de obtener un esbozo del gráfico de $f + g$, usando el elemento neutro aditivo de la adición, los estudiantes la encontraron más sencilla e ilustrativa, que hacerlo sumando ordenadas de puntos cualesquiera de f y g , o recurriendo a las expresiones algebraicas. A modo de verificación, usamos este último procedimiento, para lo cual, observando la figura 1, asignamos unidades del mismo tamaño en los ejes coordenados y consideramos que

$$f(x) = 1 + x \quad \text{y} \quad g(x) = 3 - 2x \tag{1}$$

En consecuencia, $(f + g)(x) = 4 - x$.

El gráfico de esta función $f + g$ es una recta de pendiente -1, que interseca al eje de ordenadas en el punto (0; 4) y al eje de abscisas en el punto (4; 0), lo cual es coherente con la recta que pasa por los puntos P y Q graficada en la figura 3.

Indagaciones y resultados

Luego de haber "descubierto" esta forma de graficar sumas de funciones afines, conociendo solamente los gráficos de las funciones que se suman, se les pidió a los alumnos, formar grupos e indagar y crear problemas relacionados con este procedimiento. Resumo algunas indagaciones y resultados obtenidos.

Un grupo propuso

"*indagar por qué cuadrante o cuadrantes **no** pasaría la gráfica de f + g, sabiendo que f es creciente y de término independiente positivo y que g es decreciente y de término independiente también positivo*".

Hicieron sus indagaciones examinando gráficamente diversos casos y concluyeron que podría ocurrir que la gráfica de f + g no pase por el tercer o por el cuarto cuadrante. Fue interesante notar que el análisis gráfico luego se compatibilizó con el análisis algebraico encargado a otro grupo, pues el término independiente de la expresión algebraica correspondiente a f + g es positivo, pero el coeficiente del término lineal (pendiente de la recta) puede ser positivo, negativo o nulo. En el primer caso no pasa por el cuarto cuadrante, en el segundo caso no pasa por el tercero, y en el tercer caso no pasa por ninguno de los dos.

Otro grupo propuso

"indagar cómo construir gráficamente funciones afines f y g, para que la gráfica de f + g sea una recta horizontal".

Concluyeron que esto ocurría si las rectas son perpendiculares y de pendientes 1 y – 1, pero otro grupo encontró que bastaba que los gráficos de f y de g sean rectas que contengan, respectivamente, a las diagonales de un rectángulo con un lado en el eje de abscisas y otro lado paralelo al eje de ordenadas. Sugerí seguir indagando y relacionar las indagaciones hechas por los diversos grupos.

Graficar funciones obtenidas con otras operaciones con funciones afines

Como parte de las socializaciones, resultó planteada la pregunta

¿Hay un procedimiento similar para graficar funciones obtenidas con otras operaciones con funciones afines?

Consideramos los casos de $f - g$ y fg. Examinamos solo ligeramente el caso f/g, para percibir su mayor complejidad, por no tratarse de una función afín y sobre todo por la necesidad de usar asíntotas, que no era tema conocido por los estudiantes ni a tratarse en el curso.

- *Graficar $f - g$*

Consideremos las funciones afines f y g graficadas en las figuras 1 y 2.

Un primer punto de partida es que

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

y por ser f y g funciones afines, $f - g$ también lo es. Consecuentemente, su gráfico es una recta.

Observamos que las coordenadas de los puntos del gráfico de $f - g$ son de la forma $(x; (f - g)(x))$. En consecuencia, el punto Q = $(b; f(b))$ es un punto del gráfico de $f - g$, pues, como ya lo hicimos notar, en B se tiene que $g(b) = 0$. Así,

$$(f - g)(b) = f(b) - g(b) = f(b)$$

Nos falta obtener otro punto. Ciertamente, es importante analizar gráficamente lo que ocurre con $f - g$ en relación al punto A, pues en tal punto se tiene $f(a) = 0$ y así

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a) = -g(a).$$

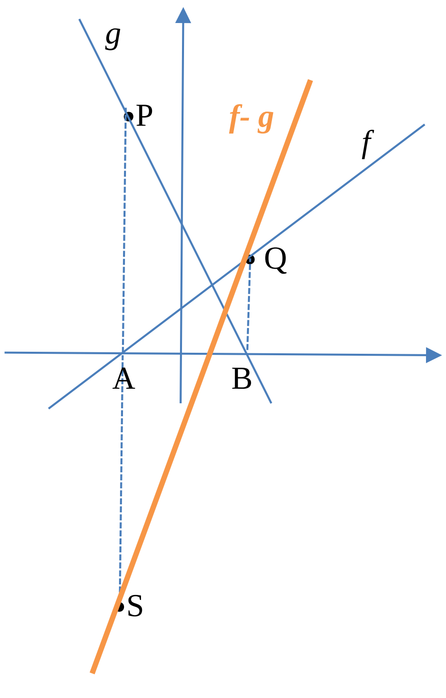


Figura 4

De esta observación concluimos que un punto del gráfico de $f - g$ tiene coordenadas $(a, -g(a))$, que es el simétrico del punto P, respecto al eje de abscisas. En la figura 4, llamamos S a tal punto y mostramos la recta que pasa por S y Q, que es el gráfico de $f - g$.

Otra manera de obtener el gráfico de $f - g$ es hacer el gráfico de $-g$ (recta simétrica a la recta del gráfico de g, respecto al eje de abscisas, y usar los mismos criterios que se usaron para graficar una suma de funciones afines, teniendo en cuenta que

$$f - g = f + (-g)$$

- *Graficar **f g***

En primer lugar, recordemos que el producto de las funciones afines f y g se define como

$$(f\,g)(x) = f\,(x)\;g(x),\ \text{ para todo número real } x \qquad (2)$$

También, que las coordenadas de los puntos del gráfico de fg son de la forma

$$(x;\,(fg)(x)),$$

y que

- o las coordenadas del punto A son $(a;\, f(a))$, con $f(a) = 0$;
- o las coordenadas del punto B son $(b;\, g(b))$, con $g(b) = 0$.

Ahora analicemos observando la figura 5, que es la figura 2 sin los puntos P y Q.

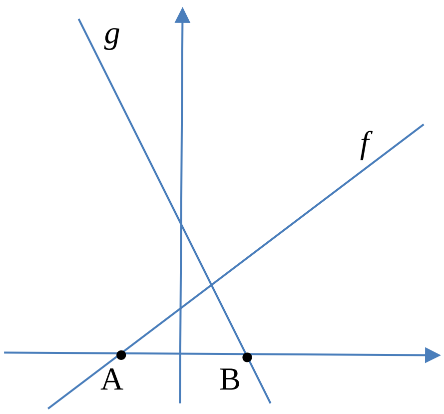


Figura 5

Como en A tenemos

$$(fg)(a) = f(a)g(a) = 0.g(a) = 0,$$

concluimos que $(a;\, 0)$ (o sea A) es un punto del gráfico de fg.

Análogamente, como en B tenemos

$$(fg)(b) = f(b)g(b) = f(b).0 = 0,$$

concluimos que $(b;\, 0)$ (o sea B) es un punto del gráfico de fg.

Así, A y B son puntos del gráfico de la función fg.

Ahora bien, ¿cómo es el gráfico de fg para valores menores que a (a la izquierda del punto A)? Podemos ver que

- o los valores $f(x)$ son menores que cero (por debajo del eje de abscisas)
- o los valores $g(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores menores que a, el producto $f(x)\;g(x)$ es menor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por debajo del eje de abscisas.

Por otro lado, ¿cómo es el gráfico de fg para valores entre a y b (a la derecha del punto A y a la izquierda del punto B)? Podemos ver que

- o los valores $f(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)
- o los valores $g(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores entre a y b, el producto $f(x)\;g(x)$ es mayor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por encima del eje de abscisas.

Finalmente, ¿cómo es el gráfico de fg para valores mayores que b (a la derecha del punto B)? Podemos ver que

- los valores $f(x)$ son mayores que cero (por encima del eje de abscisas)
- los valores $g(x)$ son menores que cero (por debajo del eje de abscisas)

En consecuencia, para valores mayores que b, el producto $f(x)\ g(x)$ es menor que cero y esta parte del gráfico de fg estará por debajo del eje de abscisas.

Como conclusión del análisis anterior, con ideas intuitivas sobre continuidad de la función fg, se llegó a la idea que parte de su gráfico es una curva con puntos cuyas ordenadas toman valores negativos y crecientes hasta llegar al punto A= (a ; 0). Como el gráfico pasa también por el punto B = (b ; 0), se intuye que los valores positivos que toman las ordenadas para x en el intervalo $]a\,;\,b[$ son crecientes en un subintervalo de la izquierda y luego decrecientes en un subintervalo de la derecha. Para $x > b$, el gráfico tiene puntos cuyas ordenadas toman valores negativos y decrecientes.

En resumen, observando los gráficos de f y g, se intuye que la gráfica de fg es una curva que

- pasa por los puntos $(a;\ 0)$ y $(b\,;\ 0)$
- es creciente hasta cierto punto del intervalo $]a\,;\,b[$.(Podemos llamar M a tal punto)
- es decreciente desde el punto M.

Luego del convencimiento de esta percepción intuitiva del gráfico de fg, usamos GeoGebra con las expresiones algebraicas atribuidas a f y g en (1) para obtener un gráfico específico y compararlo con el intuido. Se celebró con entusiasmo al observar en la pantalla lo que se muestra en la figura 6. Notamos que como se consideró $f(x) = 1 + x$, la abscisa del punto A es a = -1; y como $g(x) = 3 – 2x$, la abscisa del punto B es b = 1,5. Además, el punto M aludido anteriormente, es el vértice de la parábola mostrada.

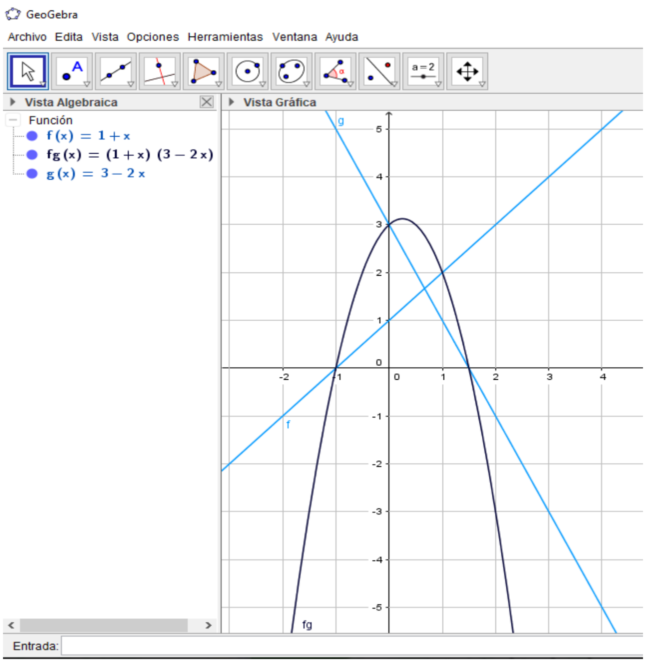


Figura 6

Evidentemente el gráfico de fg no es el gráfico de una función afín, sino de una función cuadrática, pues en el segundo miembro de (2) tendremos el producto de dos polinomios de primer grado, que es un polinomio de segundo grado.

Comentarios

1. En las clases se examinó en grupos, con tareas grupales e intergrupales, los procedimientos descritos para graficar sumas, restas y productos de funciones afines, considerando problemas propuestos por los mismos alumnos, con rectas paralelas, rectas ambas crecientes, rectas ambas decrecientes y rectas que pasan por el origen.

   Una vez más, destacamos la importancia de dar oportunidades a los alumnos a que ellos mismos hagan indagaciones e inventen problemas y a que disfruten resolviéndolos y pidiendo a sus compañeros que los resuelvan.
2. Los estudiantes percibieron con claridad una aplicación de la existencia del elemento neutro de la adición en el conjunto de los números reales, para simplificar la obtención del gráfico de una suma de funciones afines.
3. También percibieron una aplicación de las propiedades del producto de dos números reales en relación a los signos de los factores y a que uno de los factores sea cero, para obtener un esbozo intuitivo de la gráfica del producto de dos funciones afines.
4. Los estudiantes observaron que el procedimiento seguido para esbozar el gráfico del producto de dos funciones afines, sirve también para esbozar el gráfico de funciones cuadráticas definidas por expresiones algebraicas factorizables en el conjunto de números reales.
5. El problema desarrollado y comentado es intramatemático y henos mostrado sus potencialidades, trabajando en los registros gráfico y algebraico. Los lectores quedan invitados a encontrar problemas extramatemáticos en los que resulten útiles los procedimientos descritos.

Anexo

Función afín y suma de funciones afines

1. Una función h, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyos valores son números reales, se llama *afín* cuando existen números reales fijos a, b tales que $h(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Las funciones lineales son un caso particular de las afines, cuando $b = 0$.

   (Una exposición matemática amplia, se puede encontrar en el capítulo de funciones afines del libro escrito por Elon Lages Lima y colaboradores (2000)).

2. Si f y g son funciones reales de variable real, con dominio en $\mathbb{R}$, la función $f + g$ se define como

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo número real x ($\forall x \in \mathbb{R}$).

3. Si f y g son funciones afines, podemos establecer que

$$f(x) = a_1x + b_1 \quad \text{y} \quad g(x) = a_2x + b_2.$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son números reales fijos. Así, con lo definido en el punto 2, resulta que

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= (a_1x + b_1) + (a_2x + b_2)\\ &= (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2).\end{aligned}$$

Como en los paréntesis tenemos números reales, por ser suma de números reales, concluimos que la función $f + g$ también es una función afín.

Por razonamiento similar, $f - g$ también es una función afín.

Referencia

Lages Lima, E., Pinto Carvalho. P., Wagner, E., & Morgado, C. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media. Volumen 1*. Lima: IMCA.