UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 2

Junio de 2005

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tendrá una periodicidad trimestral, de modo que se publicarán cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 3 - 14
ISSN: 1815-0640

La alimentación y salud. Las matemáticas como herramienta para establecer conexiones

Margarita González Hernández

Resumen

En este trabajo se utilizan las matemáticas para intentar que los alumnos establezcan conexiones entre la alimentación y la salud. Se trata de que reconozcan el problema, lo analicen y saquen conclusiones sobre lo que pueden hacer. Se hace a partir de una serie de actividades en las que se utiliza información real, obtenida a través de Internet, en la que aparecen tablas, gráficos, porcentajes. Los contenidos matemáticos que se trabajan son: la interpretación y construcción de tablas y gráficos, los conceptos de muestra y población, las encuestas y los cálculos de algunos parámetros útiles para procesar la información o para construir los gráficos. La información que aparece en las actividades es del momento en que empecé este trabajo. Sería interesante que los alumnos buscaran por si mismos información actualizada con la que se podrían plantear actividades similares.

Introducción

Recientemente, los medios de comunicación han puesto de manifiesto un aumento alarmante en el porcentaje de obesidad en niños entre 10 y 12 años. La importancia del problema ha hecho que llegue incluso a los debates parlamentarios.

Ya en diciembre de 2003, el periódico El País publicó un artículo, con motivo de la octava edición del Día de la Persona Obesa, en el que informaba de que según Juan Soler, presidente de la Sociedad Española de Endocrinología y Nutrición, “la falta de conocimientos sobre alimentación y nutrición y la escasa información sobre el etiquetado de los productos alimenticios...conducen a una dieta hipercalórica e irregular, que combinada con un exceso de sedentarismo conduce a la aparición de la obesidad y de otros muchos procesos asociados a ella (hipertensión, alteraciones de los lípidos, diabetes)”.

El mismo artículo señala que el bajo nivel cultural y el escaso acceso a la información son factores de riesgo, entre otros, para sufrir exceso de peso. Según Basilio Moreno, presidente de la Sociedad Española para el Estudio de la Obesidad, esta realidad pone de manifiesto que la información es una importante arma en la lucha contra la obesidad y es necesario plantearse introducir en los colegios conocimientos básicos de nutrición.

La incidencia de algunas de las patologías que se asocian al tipo de alimentación es anormalmente alta en Canarias.

En particular, según el documento 2 de la serie Plan de Salud del Servicio Canario de Salud, “en Canarias, la prevalencia de Diabetes Mellitus es de 0,9% para el grupo de edad de 6 a 24 años, ascendiendo hasta 20,9% para el grupo de edad de 65 a 75 años. Estas cifras superan los valores conocidos para la mayoría de las regiones europeas, que sitúan la prevalencia de este trastorno entre un 2% y un 5% de la población”.

En el mismo documento se señala que “Canarias presenta el mayor porcentaje de personas (12 % de hombres y 14,4 % mujeres) de todo el Estado con un índice de Quetelet (o de masa corporal) mayor de 30”, que es el valor que marca el límite de la obesidad.

Toda la información anterior, así como la referente a otras enfermedades como la anorexia y la bulimia, que representan una preocupación importantísima para muchas familias con hijos adolescentes, está plagada de conceptos matemáticos: porcentajes, tablas, gráficos, números en general. Sin el manejo de estos conocimientos es imposible erradicar de nuestros centros ese factor de riesgo que es la falta de información.

Por otra parte, la edad de nuestros alumnos de Secundaria los hace especialmente vulnerables a los medios que nuestra sociedad tiene para inducirlos al consumo y otros hábitos de vida nocivos.

En el Centro donde trabajo, situado en una zona rural, el nivel sociocultural de las familias es bajo, aunque no siempre el económico. Por otra parte, muchos alumnos disponen de dinero que obtienen trabajando en bares de la zona. Resulta alarmante, al llegar al Centro, observar la cantidad de dinero de la que los alumnos disponen para gastar en el bar, así como el tipo de productos en los que lo utilizan. Por otro lado, los casos de anorexia y bulimia van en aumento.

Debido a estas características, el eje transversal de Educación para la Salud es prioritario en el Centro. Se lleva a cabo un programa de educación afectivo - sexual, se ha trabajado, y sigue siendo tema continuo de preocupación, el alcoholismo, la anorexia y la bulimia, el sida etc. Por tanto, este trabajo representa un aspecto más dentro de la línea de actuación del Centro.

Todo esto, junto con en convencimiento personal de que desde todas las áreas tenemos la responsabilidad de trabajar los ejes transversales, ha hecho que me planteara en este trabajo hacer que los alumnos utilicen las matemáticas para analizar ellos mismos la relación entre alimentación y salud, así como sus propios hábitos alimenticios y los cambios que pueden introducir en ellos para mejorar su salud.

Se pretende, por un lado, que el alumnado tome conciencia de la importancia que tienen los hábitos alimenticios para su salud individual y colectiva, y para el bien general de la sociedad, pues actualmente la lucha contra enfermedades como la obesidad, la diabetes, etc. están ocupando gran parte de los recursos económicos de la Consejería de Sanidad y, por otro lado, que los alumnos sean conscientes de la necesidad de las matemáticas para hacer un análisis riguroso de la realidad que nos permita sacar conclusiones y, en el caso de los poderes públicos, diseñar líneas de actuación, tanto en la prevención como en el tratamiento de los problemas derivados de la alimentación.

Este trabajo está pensado para llevarlo a cabo de forma interdisciplinar con el departamento de Ciencias Naturales, y en tercer curso de ESO. La colaboración con el Departamento de Ciencias Naturales es fundamental para que los alumnos puedan entender sin problemas el planteamiento de las actividades y para que tengan los conocimientos necesarios en el desarrollo de las mismas. El momento adecuado para trabajarlo puede ser el de la introducción de la Estadística, pues permite una formación del alumno como “usuario”, es decir, una persona capaz de analizar y sacar conclusiones de la información que aparece en los medios de comunicación, especialmente la información dada en forma de tablas o gráficos.

El trabajo se presenta a los alumnos con el formato de un “Cuaderno para el alumno”, con una introducción sobre el problema a estudiar y la metodología a utilizar, y con un total de dieciséis actividades, algunas de las cuales pueden llevarse a cabo en la clase de Ciencias Naturales, con una presentación de la problemática a estudiar y las explicaciones necesarias para llevarlas a cabo, aunque no con los contenidos teóricos, que el profesor irá explicando oportunamente. Puesto que el trabajo está hecho para llevar a cabo en un Centro de Tenerife, se ha procurado al máximo que la información que se utilice sea la disponible sobre datos en Canarias. Expondré las actividades que, por la problemática que plantean, pienso que interesan más al alumnado, que son las referentes a la Obesidad y a los llamados Trastornos de la Conducta Alimenticia. El resto se refieren a la Diabetes, que también tiene una incidencia muy alta en Canarias, a la Hipertensión y, finalmente a la elaboración por parte de los alumnos de dietas que sean equilibradas y que nos ayuden a evitar las patologías citadas.

Las actividades están secuenciadas respecto a los dos aspectos que tratan:

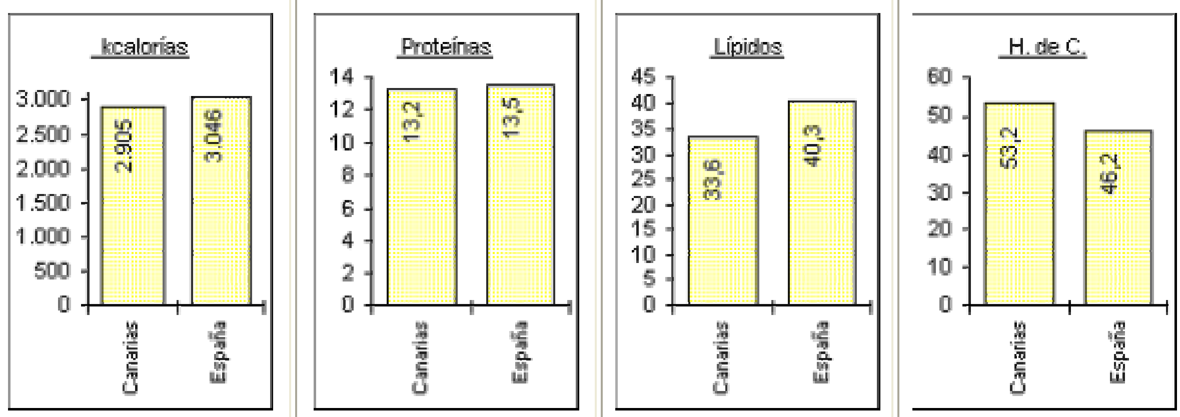
El eje transversal de educación para la salud. Se han agrupado teniendo en cuenta los distintos problemas que pueden ocasionar los malos hábitos alimenticios.

Los contenidos matemáticos. Se empieza por actividades en las que los alumnos observan las tablas y gráficos, pidiéndole información que tiende a comprobar que los entienden, para luego ir poco a poco haciendo otros cálculos, construyendo gráficos de distintos tipos y sacando conclusiones.

Actividad 1

En la introducción al Plan Canario de Salud se dice que “la alimentación determina en gran medida el grado de salud de las personas y comunidades, incidiendo en la morbilidad y en la mortalidad de las mismas; produciendo, en consecuencia, un elevado coste social y económico.”

Gráfico 192. Distribución de la energía según la ingesta de macronutrientes (en porcentajes), por persona y día. Canarias-España.



El gráfico 192 ilustra los patrones alimenticios de Canarias y de España en general:

a) Busca información sobre cuáles son, por término medio, las cantidades que se consideran adecuadas para una dieta equilibrada de los diferentes nutrientes. (Seguramente lo has trabajado en Ciencias Naturales). Infórmate también del número aproximado de kcal por día que necesita un adulto de complexión media y trabajo moderado. Traza, en los gráficos dados, una línea horizontal a la altura de las cantidades consideradas aconsejables, o dos líneas señalando un intervalo en el que estén estas cantidades. Esto te servirá para comparar las cantidades aconsejadas con las que aparecen en el gráfico.

b) ¿Están los datos de Canarias y de España dentro de los límites aconsejados? ¿Cuál es el principal problema que observas?

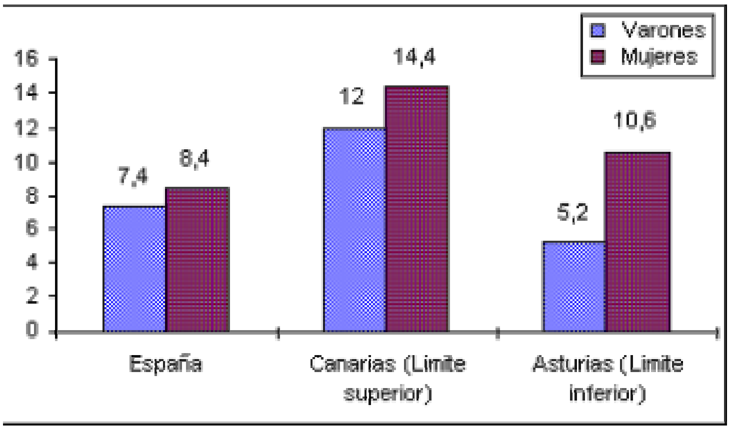
c) ¿Hay diferencias significativas entre Canarias y España en general? ¿Tienes alguna explicación para la respuesta?

Actividad 2

Según el documento ya citado, publicado por el Servicio Canario de Salud, “diferentes estudios han demostrado que el patrón de consumo en las islas favorece la alta incidencia de enfermedades degenerativas (obesidad, diabetes mellitus y enfermedades cardiovasculares, entre otras)”.

Según la información recogida en la "Encuesta Nacional de Salud de 1987", Canarias presenta el mayor porcentaje de personas (12 % de hombres y 14,4 % mujeres) de todo el Estado con un índice de Quetelet (o de masa corporal) mayor de 30 (gráfico 193)".

Gráfico 193. Población con Índice de Masa Corporal mayor de 30, por CC.AA., según sexo, tasas ajustadas por 100, 1987.



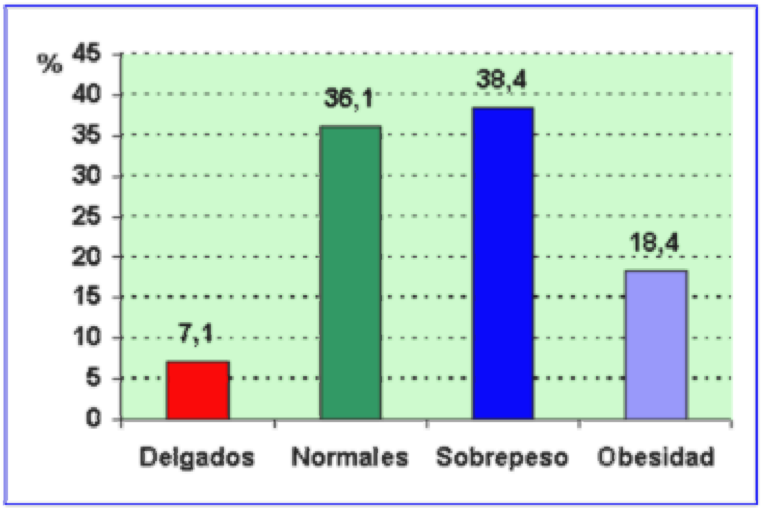
a) ¿Sabes qué es el índice de masa corporal (IMC) y para qué se utiliza? Calcula el tuyo. ¿Por qué crees que se separan los gráficos por sexos?

b) En la actividad anterior veíamos que la cantidad de calorías que se consumen en Canarias es similar, incluso un poco menor, que la media española. ¿Se te ocurre alguna razón que justifique los datos sobre el IMC que aparecen en el gráfico? Piensa lo que puede significar el "patrón de consumo" de las islas. Infórmate sobre cómo actúan sobre la obesidad los distintos tipos de grasas.

Actividad 3

En Canarias la distribución de la población según su índice de masa corporal es la siguiente:

Figura 10. Prevalencia de sobrepeso y obesidad en la Comunidad Autónoma Canaria



Población: 18 a 75 años

a) Vamos a recoger de forma anónima en una tabla los índices de masa corporal de toda la clase obtenidos en la actividad anterior.

Sabiendo que se consideran delgadas, o de bajo peso, aquellas personas cuyo IMC es menor de 18’5, normales las que tienen un índice entre 18’5 y 24’9, con sobrepeso, entre 25 y 29’9 y obesas las que tienen un índice de masa corporal a partir de 30, vamos a hacer un recuento por intervalos de los índices de la clase y luego, construye un gráfico comparativo de la clase y de Canarias en general. Comenta las semejanzas y las diferencias que encuentres.

b) ¿Podría considerarse la clase como una muestra del total de alumnos de 3º de ESO? Vamos a ampliar el estudio a todos los grupos de tercero, que constituirán una población. Prepara una pequeña hoja informativa sobre la definición de índice de masa corporal y para qué sirve, así como sobre cuál va a ser el objetivo de nuestro estudio, que hay que concretar muy bien. En la misma hoja pediremos a cada alumno/a peso y talla, o índice de masa corporal, según creamos más conveniente, y todos los datos que necesitemos, como edad, sexo... Necesitamos plantearnos si es preferible que las respuestas sean anónimas o no (es un tema delicado para algunas personas), o si es más fiable organizarnos para tomar estos datos que pedirlos, es decir, pesar y medir a los compañeros y calcular nosotros luego el índice de masa corporal, o pedirlo.

Cuando tengamos decidido lo que queremos hacer y lo que necesitamos preguntar y lo hayamos plasmado en la hoja, nos organizaremos para pasarla a todo el alumnado y luego recogerla. Finalmente nos organizaremos para hacer el recuento y expresar, mediante un tipo de gráfico similar al del enunciado, los resultados.

Antes de hacer el trabajo, ¿piensas que el resultado se parecerá más al general de Canarias o al de la clase? ¿Por qué?

c) Después de terminado el trabajo, ¿piensas que se puede utilizar la información obtenida en una clase como muestra de lo que ocurre en todo tercero? ¿Y en todo el Centro?

d) ¿Se te ocurre una manera mejor de elegir un grupo de alumnos que constituyan una muestra que nos permita generalizar la información obtenida?

Actividad 4

En un artículo aparecido en 2002 en la Revista Española de Economía de la Salud, en el que califica la obesidad como uno de los principales problemas de salud a los que se enfrenta la sociedad actual, aparece la siguiente tabla que ilustra cómo influye el índice de masa corporal en el porcentaje de personas que padecen determinadas enfermedades:

Tabla 1.2. Prevalencia de las patologías asociadas a la obesidad según IMC y sexo

Patología	18,5-24,9		25-29,9		30-34,9		>40	
	H%	M%	H%	M%	H%	M%	H%	M%
Diabetes Mellitus 2	**2,03**	**2,38**	**4,93**	**7,12**	**10,10**	**7,24**	**10,65**	**19,89**
E. Cardiovascular	**8,84**	**6,87**	**9,60**	**11,13**	**16,01**	**12,56**	**13,97**	**19,22**
Hipertensión arterial	**23,47**	**23,26**	**34,16**	**38,77**	**48,95**	**47,95**	**64,53**	**63,16**
Osteoartritis	**2,59**	**5,22**	**4,55**	**8,51**	**4,66**	**9,94**	**10,04**	**17,19**

Fuente: NHANES III, 1998-1994

a) ¿Qué ocurre con los porcentajes de personas que sufren cada una de las enfermedades a medida que aumenta el índice de masa corporal?

b) Dibuja un gráfico comparativo por sexos en el que se reflejen los datos de esta tabla. Haz una gráfica de líneas y, a partir de ella, comenta en qué tramos de valores del IMC es mayor el crecimiento de los distintos porcentajes. ¿Hay algún intervalo de decrecimiento?

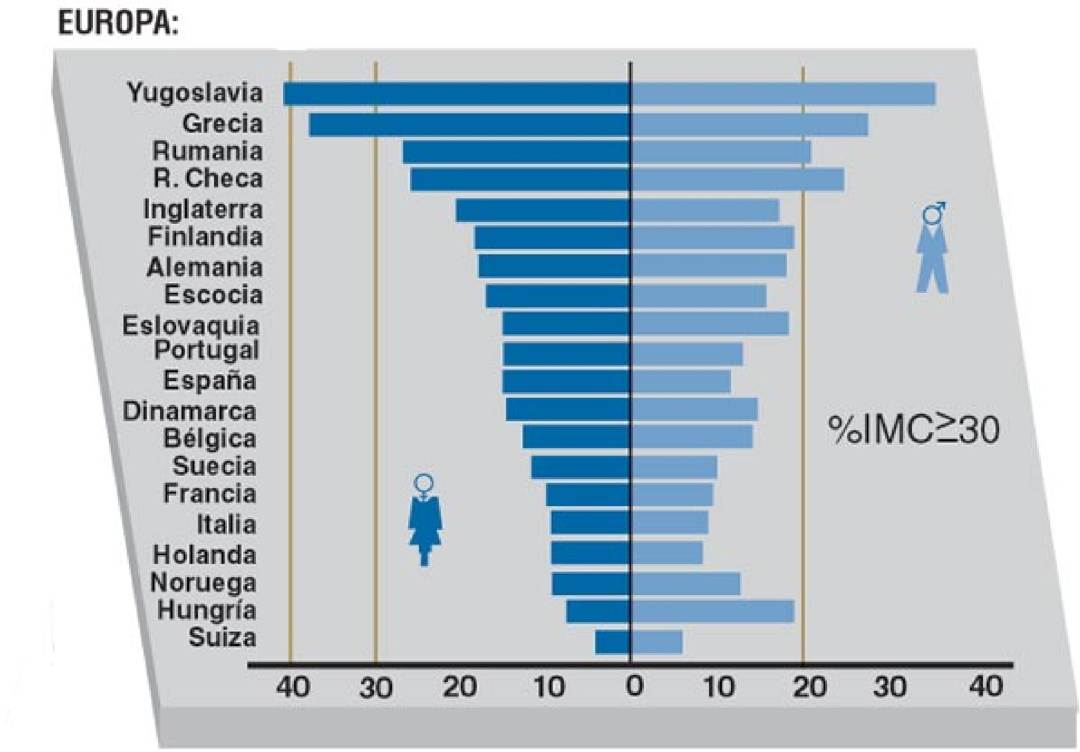
c) Halla, tanto para hombres como para mujeres, el incremento de los porcentajes de una persona de peso normal a una de grado I de obesidad (IMC entre 30 y 34,9, ¿o debería ser 39,9? La tabla aparece así; son los problemas que nos encontramos cuando consultamos datos reales; en muchos casos desaparece el rigor y la exactitud a la que estamos acostumbrados cuando trabajamos en matemáticas, pero la realidad está ahí y debemos hacer un esfuerzo por analizarla, por ejemplo decidiendo una interpretación). Construye una tabla con estos incrementos expresados en tanto por ciento. ¿Para qué enfermedad y en qué intervalo hay mayor porcentaje de incremento en hombres? ¿y en mujeres?.

d) ¿Hay alguna diferencia significativa en la influencia del IMC en hombres y en mujeres?

Actividad 5

El gráfico de la figura 1.1 refleja el problema de la obesidad en nuestro entorno Europeo.

Figura 1.1. NIVELES DE OBESIDAD PARA VARONES Y MUJERES



Fuente: International Obesity Task Force.

¿Has visto en algún otro sitio este tipo de gráficos? ¿Cómo se llaman? Se utilizan con frecuencia en Ciencias Sociales y también en otros campos como la ecología y el medioambiente. Aparecen con frecuencia en los medios de comunicación para representar datos sobre poblaciones.

De manera general ¿a quiénes afecta más la obesidad, a los hombres o a las mujeres? Hay algunas excepciones ¿cuáles? Comenta los factores que crees que pueden influir en el hecho de que determinados países tengan niveles de obesidad superiores a otros.

En actividades anteriores tratamos la obesidad en Canarias y en España. El gráfico anterior refleja lo que ocurre en Europa. El problema es aún peor en Estados Unidos. Lógicamente, este problema no existe en el llamado Tercer Mundo, donde la obesidad aparece casi exclusivamente en las clases altas. La obesidad es, por tanto, también un problema económico que, como todos, afecta más a los más desfavorecidos, pues es un dato contrastado que con el dinero que gastan los países desarrollados en luchar contra la obesidad y sus consecuencias (sólo en España son 2.507 millones de euros), bastaría para erradicar el hambre en todo el mundo.

Vamos ahora a centrarnos en otro problema no menos importante, pero en el que la población canaria presenta un comportamiento similar al de otras zonas de nuestro entorno. El problema de los Trastornos de la Conducta Alimenticia.

En un artículo aparecido en una revista médica sobre trastornos de la conducta alimenticia en España dice: “algunas actividades y conductas relacionadas con el cuerpo y la alimentación de los adolescentes españoles, indudables factores de riesgo para la anorexia y la bulimia nerviosas, son muy semejantes a las de sus coetáneos occidentales. La anorexia nerviosa en nuestro país, como en otros de nuestro entorno socioeconómico, está alcanzando proporciones epidémicas entre mujeres de 12 a 25 años”.

En Canarias no hay estudios epidemiológicos publicados sobre anorexia y bulimia pero la creencia es que los datos no difieren mucho de los del resto de las comunidades autónomas.

Actividad 6

En una publicación sobre la anorexia leemos: la edad promedio de inicio de la anorexia nerviosa es 17 años, aunque algunos datos sugieren la existencia de picos bimodales a los 14 y 18 años.

¿Sabes, o puedes suponer por el contexto, qué significa la expresión “picos bimodales”?

Actividad 7

En un artículo sobre epidemiología de los Trastornos de la Conducta Alimenticia en España, que aparece en la web psiquiatría.com y que utiliza como fuente el "Congreso Virtual Interpsiquis 2002", se dice que en un estudio realizado en Asturias durante el curso 97/98 a una muestra de 835 jóvenes de 13 a 21 años, alumnos de Secundaria, 415 chicos y 401 chicas (parece que faltan alumnos, otra vez debemos decidir qué datos utilizar), de los 72 "posibles casos" de anorexia o bulimia, 63 son chicas y 9 chicos.

a) ¿Cuál es el porcentaje total de posibles casos de Trastorno de la Conducta alimenticia en esta muestra?

Representa en un diagrama de sectores los porcentajes de chicos y de chicas, respecto del total de la muestra, con Trastornos de Conducta Alimenticia.

b) Por otro lado, aparecen los siguientes datos de Zaragoza: En una muestra de 4047 alumnos, representativa de los adolescentes de 12 a 18 años escolarizados en 61 centros de Enseñanza Secundaria el año 1997, encontramos que un 16'32% de las 2.193 chicas y un 3'3% de los 1.854 chicos pueden calificarse como con riesgo de Trastornos de Conducta Alimenticia.

¿Qué significa una muestra representativa?

c) ¿Podemos comparar directamente, prescindiendo de la diferencia de las edades, los porcentajes de esta muestra con la de Asturias? Calcula los porcentajes necesarios para hacer la comparación y representa un diagrama de sectores que permita visualizar esta comparación. Compara y saca conclusiones sobre mayor o menor incidencia de estas enfermedades en general y en chicos y chicas por separado.

Actividad 8

En la publicación citada en la actividad anterior, aparece la siguiente "Tabla de Estudios en muestras clínicas españolas", que muestra la proporción de mujeres y hombres afectados de trastornos de conducta alimenticia en distintos estudios, hechos en ciudades distintas y con poblaciones de distintas edades.

Analiza bien todos los datos y mira si hay alguno especialmente llamativo, que incluso pueda ser una equivocación. A pesar de los diferentes medios de diagnóstico, de los diferentes intervalos de edad y las distintas fechas de los estudios, vamos a utilizar esta información, conscientes de que estas diferencias limitan la fiabilidad de los resultados, y de que, como en la actividad anterior, esto ocurre con frecuencia cuando tratamos de obtener información a partir de datos procedentes de otras disciplinas.

Autor	Ciudad	Fecha	Edad	Diagnóstico	Mujeres	Varones
Tomás y cols	Barcelona	1968-1988	10-21	A.N.DSM-IIIR	48/53	5/53
San Sebastián y cols	Madrid	1987-1989	12-15	A.N. DSM-III	7/9	2/9
De la Serna	Madrid	1978-1988	12-38	A.N. DSM-IIIR	53/63	10/63
Gómez y cols	Madrid	1990	Media=18 más/menos 5.	A.N. DSM-III	19/23	4/23
Turón y cols	Barcelona	1975-1990	12-33	A.N.DSM III-R	103/107	4/107
Toro y cols	Barcelona	1985-1991	11-26	A.N.DSM-IIIR	204/221	17/221
Lázaro y cols	Barcelona	1984-1993	Media= 15 10-17	A.N. DSM-III A.N. DSM-IIIR	98/108	10/108
Velilla y cols	Zaragoza	1975-1994	Adolescentes	A.N. O.M.S.	12/118	106/118
Quintanilla y cols	Zaragoza	1981-1985 1991-1995	Media=15,19 Media=15,57 Media=15,62	A.N. CIE-9 A.N. CIE-10 B.N. CIE-10	28/30 70/76 13/14	2/30 6/76 1/14
Cervera, Quintanilla	Pamplona	1995	Media=19,17	A.N. Feighner.	48/50	2/50
Mirón y cols	Salamanca	1994-1997	Media=17	A.N. CIE-10	20/23	3/23
Bueno y cols	Zaragoza	1976-1997	Adolescentes	A.N. CIE-10 B.N. CIE-10	286/313	27/313
De la Serna	Madrid	1998	17-32	B.N. CIE-10	40/45	5/45
Pérez del Yerro y cols	Algeciras	1992-1997	Media=16,1	A.N. B.N. T.C.A.N.E.	35/40	5/40
Padierna y cols	Vizcaya	1999	14-65	A.N. DSM IV B.N. DSM IV Binge Eating	137/141	4/141

a) Calcula la media de las proporciones de anorexia en los dos sexos. ¿Necesitas calcularlas las dos?

b) Con los datos obtenidos, ¿se corrobora la idea que aparece normalmente en los medios de comunicación de que la anorexia afecta a un varón por cada 10 mujeres?

c) Calcula también la proporción media de la bulimia.

Actividad 9

Un aspecto importante a tener en cuenta para diseñar estrategias de prevención es la prevalencia de la llamada población de riesgo, que es la que presenta varios síntomas pero sin llegar a constituir un caso de anorexia o bulimia. Según las conclusiones de un "encuentro sobre epidemiología y prevención de los TCA (trastornos de la conducta alimenticia)" realizado en Mahón en septiembre de 2001, esta población se sitúa en un 8%.

En un estudio reciente realizado en la provincia de Teruel, basado en cuestionarios anónimos pasados a los alumnos de 14 centros públicos de la provincia, entre urbanos y rurales, el 9'59% de los turolenses escolarizados de 8 a 14 años se consideran con riesgo, 120 de 996 en Primaria y 26 de 257 en Secundaria, no habiendo diferencias significativas en los entornos rural y urbano, contrariamente a la creencia popular que limitaba los trastornos de conducta alimenticia a las clases altas urbanas.

Haz una tabla y el diagrama que te resulta más adecuado para representar la proporción de alumnos que se consideran con riesgo, según el nivel educativo.

Si estás interesado en el tema, busca información sobre los síntomas y plantéate, a nivel personal, si puedes estar entre la población de riesgo. En ese caso deberías buscar algún tipo de ayuda. Seguro que tus profesores o el Orientador del Centro te pueden ayudar.

Bibliografía

- Consejo Escolar de Canarias, Plan de objetivos y contenidos prioritarios. Canarias, 2003.
- DECRETO 51/2002, de 22 de abril, (BOC nº 55 de 30/04/2002), por el que se establece el currículo de la E,S.O. en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Canarias.
- Grupo Azarquiel. Curso inicial de Estadística en el Bachillerato. Colección Monografías del I.C.E. Univ. Autónoma de Madrid. Madrid, 1985.
- Grupo Azarquiel. Proyecto Azarquiel. Matemáticas 3º de E.S.O. De la Torre. Madrid, 2000.
- Sánchez, J. L. y otro. Matemáticas 3º de E.S.O. Libro del profesor. Proyecto Exedra. Oxford Educación. Madrid, 2002.
- Sanchís, C. y otros. Hacer Estadística. Biblioteca de Recursos Didácticos Alambra. Madrid, 1987.
- Seminario de Matemáticas de Santillana. Örbita 2000. Guía y Recursos. Matemáticas 3º de E.S.O. Madrid, 1999.
- Páginas de Internet, utilizando el buscador Google, con las palabras clave, alimentación, nutrición, salud, Canarias, gráficos, tablas, diabetes, anorexia, bulimia, nutrientes... con las combinaciones oportunas.

Margarita González Hernández es profesora de Enseñanza Secundaria en el IES Sabino Berthelot de Ravelo (El Sauzal), en la isla de Tenerife (Canarias, España). Ha sido profesora asociada en el área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna y tiene otras publicaciones en colaboración con profesores de dicho Departamento.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 15 - 32
ISSN: 1815-0640

El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos

Nuria Gil, Lorenzo J. Blanco y Eloísa Guerrero.

Resumen

El dominio afectivo en el aprendizaje matemático es un concepto relativamente reciente. Desde la década de los setenta, numerosas investigaciones centradas en los procesos de aprendizaje de Matemáticas comenzaron a centrarse en la dimensión afectiva. En ellas, se ponía de manifiesto que las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que algunas de ellas están muy arraigadas en el sujeto y no son fácilmente desplazables por la instrucción. En este trabajo pretendemos revisar y profundizar en su significado y en la influencia que la afectividad ejerce en el aprendizaje de las matemáticas. Así, abordamos los principales descriptores básicos del dominio afectivo, las creencias, actitudes y emociones, y cómo los afectos van a condicionar el éxito y/o fracaso del estudiantado a la hora de enfrentarse a esta disciplina.

Abstract

The affective domain in mathematics learning is a relatively recent concept. Beginning in the late 1970s, much of the research into mathematics education shifted its focus towards the affective. It was found that affective elements play an essential role in mathematics teaching-learning, and that some of them are deeply ingrained in the and not easily displaced by the instruction in the subject. We here review in depth the significance and the influence of affect in mathematics teaching-learning. In particular, we consider the main basic descriptors of the affective domain, beliefs, attitudes, and emotions, and how affects condition students' success or failure in this discipline.

1. Introducción

Tradicionalmente, dentro de la investigación escolar, el aprendizaje se viene midiendo por los logros académicos de los aspectos cognitivos. Aún reconociendo que las cuestiones afectivas procedentes de la metacognición y dimensión afectiva del individuo determinan la calidad del aprendizaje, a menudo este aspecto se ha dejado de lado.

Desde la década de los setenta, un número importante de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre los procesos de aprendizaje comenzaron a centrarse en estos aspectos (Gómez-Chacón, 2001). Este nuevo enfoque de la dimensión afectiva, auspiciado en gran medida por los trabajos de McLeod (1988, 1992, 1994), pone de manifiesto que las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que algunas de ellas están fuertemente arraigadas en el sujeto y no son fácilmente desplazables por la instrucción (Gómez-Chacón, 2000).

No obstante, el estudio de las actitudes positivas y negativas hacia una variedad de aspectos matemáticos ha gozado de una mayor tradición que el análisis de las creencias y emociones, que sólo recientemente se ha incluido en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática.

La relevancia de la importancia de las cuestiones afectivas ha sido puesta de relieve en los últimos años en otros trabajos como los de Salovey y Mayer (1990) y Goleman (1996), los cuales plantean una transformación orientada hacia lo que estos autores denominan *"alfabetización emocional".* En Educación Matemática esta línea está orientada hacia la educación de los afectos, creencias, actitudes y emociones, como determinantes de la calidad de los aprendizajes (Goldin, 1988a, 1988b; Gómez-Chacón, 1997, 1998; McLeod, 1989a, 1989b, 1992).

En este artículo abordaremos el concepto de dominio afectivo en Matemáticas y sus descriptores básicos, esto es, las creencias, actitudes y emociones, dada la relevancia que en las últimas décadas se está dando a estos factores en Educación Matemática, por ser factores claves en la comprensión del rendimiento en la materia.

2. Dominio afectivo: concepto central

Siguiendo a Gómez-Chacón (2000), un problema persistente en la comprensión del afecto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido encontrar una definición clara de qué es el afecto o el *dominio afectivo*.

La definición más comúnmente utilizada es la propuesta por el equipo de educadores de Taxonomía de los objetivos de la educación: ámbito de la afectividad (Krathwohl, Bloom y Masia, 1973), en donde el dominio afectivo incluye actitudes, creencias, apreciaciones, gustos y preferencias, emociones, sentimientos y valores.

Aiken (1970), Kulm (1980) y Reyes (1984), utilizaron esta definición, aunque se centraron más en el estudio de las actitudes que en analizar y describir los componentes del dominio afectivo.

McLeod (1989b, 245) se refiere al mismo como *"un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo), que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones"*.

En el ámbito francófono, Lafortune y Saint-Pierre (1994, 45) se refieren al dominio afectivo como *"una categoría general donde sus componentes sirven para comprender y definir el dominio. Los componentes son: las actitudes y los valores, el comportamiento moral y ético, el desarrollo personal, las emociones (entre las cuales sitúan la ansiedad) y los sentimientos, el desarrollo social, la motivación y, finalmente, la atribución"*.

Por su parte, Gómez-Chacón (1997) utiliza el término *dimensión afectiva* tal como lo definen McLeod (1992) y Krathwohl et al. (1973), pero, además, añade en su definición que no sólo se consideran los sentimientos y las emociones como *descriptores básicos,* sino también las creencias, actitudes, valores y apreciaciones.

3. Descriptores básicos: creencias, actitudes y emociones

Distintos investigadores han puesto de manifiesto que los afectos (emociones, actitudes y creencias) de los estudiantes son factores claves en la comprensión de su comportamiento en matemáticas. En este sentido, la relación que se establece entre los afectos y el aprendizaje es cíclica: de una parte, la experiencia que tiene el estudiante al aprender matemáticas le provoca distintas reacciones emocionales e influye en la formación de creencias; por otra, las creencias que sostiene el sujeto tienen una consecuencia directa en su comportamiento en situaciones de aprendizaje y en su capacidad para aprender.

El estudiante, al aprender matemáticas, recibe continuos estímulos asociados con las matemáticas: problemas, actuaciones del profesor, mensajes sociales, etc., que le generan cierta tensión. Ante ellos reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa. Esta reacción está condicionada por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si el individuo se encuentra con situaciones similares repetidamente, produciéndole la misma clase de reacciones afectivas, entonces la activación de la reacción emocional (satisfacción, frustración, etc.) puede ser automatizada, y se “solidifica” en actitudes. Estas actitudes y emociones influyen en las creencias y colaboran a su formación (Gómez-Chacón, 1997).

En nuestra revisión, nos vamos a centrar en los tres descriptores básicos en el dominio afectivo (creencias, actitudes y emociones) que considera McLeod (1989b): (Véase Figura 1):

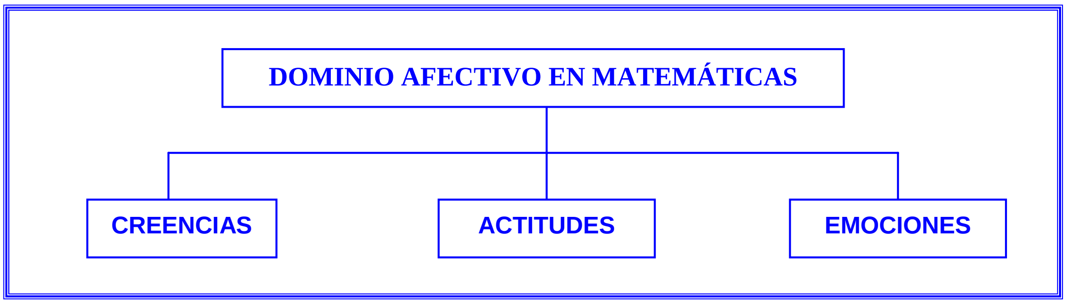


Figura 1: Dominio afectivo en Matemáticas y descriptores básicos.

3.1. Creencias

En la literatura reciente sobre el aprendizaje de las matemáticas, las investigaciones sobre la influencia de las creencias ocupan un lugar destacado (Thompson, 1992; Pehkonen y Törner, 1995).

Los estudios sobre sistemas de creencias se centran, principalmente, en cuatro áreas de interés (Gómez-Chacón, 2000):

- Identificar y describir las creencias del sistema de creencias del individuo.
- Determinar las influencias de los sistemas de creencias.
- Conocer cómo se originan y desarrollan los sistemas de creencias.
- Buscar condiciones para propiciar un cambio de creencias.

Las *creencias matemáticas* son una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo (basado en la experiencia) sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Las concepciones que se entienden como creencias conscientes son distintas de las creencias básicas, que son a menudo inconscientes y cuya componente afectiva está más enfatizada. Se definen, por tanto, en términos de experiencias y conocimientos subjetivos del estudiante y del profesor.

Bermejo (1996), distingue dos grandes categorías de creencias en los estudiantes de matemáticas:

- *Creencias sobre las mismas matemáticas, en las que intervienen menos los afectos*. Los alumnos creen, en general, que las matemáticas son importantes, difíciles y basadas en reglas. Esto provoca determinadas reacciones motivadas por estas creencias. Precisamente, la percepción de la utilidad de las matemáticas correlaciona con el rendimiento y su predicción. Estas creencias surgen en general del contexto escolar, de la clase, del sistema educativo, etc.

- *Creencias de los alumnos en relación con las matemáticas, que dependerían más de los afectos* (creencias relacionadas con el autoconcepto, la confianza, etc.). El autoconcepto constituye un buen predictor para el rendimiento matemático, tanto en tareas familiares como no familiares. Por otra parte, el rendimiento en matemáticas parece ser una de las fuentes de la autoeficacia, siendo ésta el mejor predictor.

Por su parte, McLeod (1992), en su estudio sobre la influencia de los afectos (emociones, actitudes y creencias) en la Educación Matemática, diferencia cuatro ejes con relación a las creencias, que pueden observarse en la Figura 2:

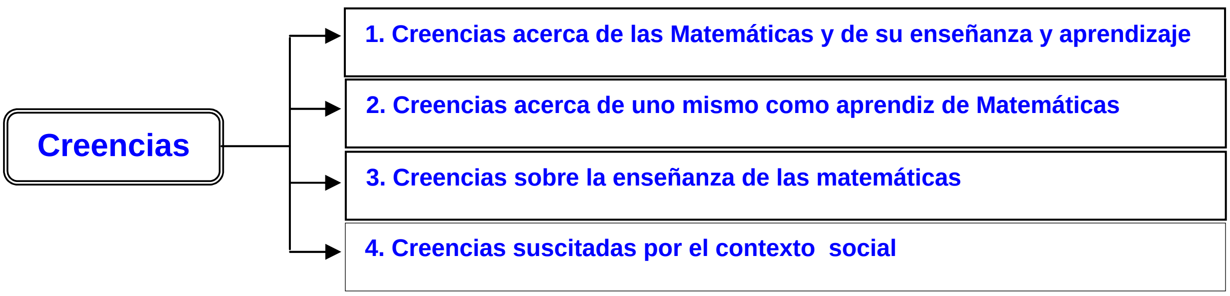


Figura 2: Ejes en relación con las creencias en Educación Matemática, según McLeod (1992).

Gómez-Chacón (1997) señala que las creencias acerca de uno mismo en relación con la Educación Matemática tienen una fuerte carga afectiva e incluyen creencias relativas, al autoconcepto, a la atribución causal del éxito y fracaso escolar y a la confianza.

Siguiendo a McLeod (1989a, 1992), el autoconcepto del alumno como aprendiz de matemáticas debe concebirse como una subestructura derivada de la estructura de creencias que, a la vez, es uno de los descriptores básicos del dominio afectivo en matemáticas y tiene una estrecha relación con las emociones, las actitudes, las atribuciones, motivaciones y las expectativas personales.

Atendiendo al estilo atribucional del sujeto, la representación y evaluación de sí mismo y los patrones atribucionales de éxitos y fracasos con los que el alumno se enfrenta al aprendizaje son algunos de los principales aspectos que determinan la dimensión afectiva y emocional del aprendizaje escolar (Mira, 2001). Según esta autora, el patrón atribucional más favorable frente al aprendizaje es aquel en que el alumno atribuye tanto sus éxitos como sus fracasos a causas internas, variables y controlables: esfuerzo personal, planificación y organización del trabajo.

Cuando el estudiante atribuye sus éxitos a factores externos e incontrolables (por ejemplo, la suerte) y sus fracasos a su escasa capacidad (factor interno, estable e incontrolable), disminuye su motivación y rendimiento, pues al percibirse con baja capacidad y sin posibilidad de modificar o controlar las causas a las que atribuye el resultado reduce las expectativas futuras y provoca sentimientos de baja autoestima y actitudes negativas hacia el aprendizaje (Núñez y González-Pienda, 1994).

Otra de las variables que influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la *confianza en sí mismo*. En los estudios sobre actitudes se ha incluido de forma sistemática la componente de confianza en sí mismo (Aiken, 1976; Hart y Walker, 1993). La confianza en la disposición y habilidad de querer aprender matemáticas tiene un papel esencial para el alumnado de cara a sus logros matemáticos (McLeod, 1992; Reyes, 1984).

Para González-Pienda y Núñez (1994), en lo que respecta a la confianza en sí mismo y a las expectativas de autoeficacia, la implicación activa del sujeto en el proceso de aprendizaje aumenta cuando se siente competente, es decir, cuando confía en sus propias capacidades y tiene altas expectativas de autoeficacia, valora las tareas y se siente responsable. Es más, las creencias de autoeficacia influyen sobre las actividades en las que se implican, sobre la cantidad de esfuerzo a emplear, sobre la perseverancia ante la ausencia de obstáculos, sobre la capacidad de superación o adaptación a situaciones adversas, sobre el nivel de estrés y ansiedad experimentado ante la realización de la tarea, sobre las expectativas de resultados y sobre el proceso de autorregulación.

3.2. Actitudes

Una de las áreas del conocimiento dentro de la que se han analizado de forma más sistemática las actitudes de los alumnos es la de las matemáticas. Desde hace mucho tiempo, se resalta la importancia de las actitudes en el aprendizaje matemático.

En opinión de Gómez-Chacón (2000), las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas se ponen de manifiesto en la forma en que se acercan a las tareas (sea con confianza, deseo de explorar caminos alternativos, perseverancia o interés) y en la tendencia que demuestren al reflejar sus propias ideas. Asimismo, van a estar determinadas por las características personales del estudiante, relacionadas con su autoimagen académica y la motivación de logro, condicionando su posicionamiento hacia determinadas materias curriculares y no otras.

Los educadores matemáticos han usado el concepto actitud con una definición menos clara que los psicólogos. Se puede observar, a través de los instrumentos de medida, que éstos son diseñados para medir componentes específicos de la actitud (McLeod, 1989a):

- Percepción del estudiante ante la utilidad de las matemáticas.
- Autoconcepto del alumno o confianza respecto a las matemáticas.
- Percepción de las matemáticas desde el punto de vista del alumnado, de sus padres, del profesorado (no tiene componente emocional).
- Ansiedad (fuerte componente emocional).

La *actitud* se define como una predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta, por lo tanto, de tres componentes: una cognitiva, que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud; una componente afectiva, que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de la materia; y una componente intencional o de tendencia hacia un cierto tipo de comportamiento. Ahora bien, si el objeto es la Matemática, se pueden distinguir dos grandes categorías (Callejo, 1994; NCTM, 1991):

- Actitudes hacia la Matemática: que se refieren a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva; aquélla se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc., que pueden referirse a cualquiera de los siguientes aspectos:

    - Actitud hacia la Matemática y los matemáticos (aspectos sociales de la matemática).
    - Interés por el trabajo matemático, científico.
    - Actitud hacia las matemáticas como asignatura.
    - Actitud hacia determinadas partes de las matemáticas.
    - Actitud hacia los métodos de enseñanza.

- Actitudes matemáticas: por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes para el trabajo matemático.

La mayoría de los estudios desarrollados desde los años setenta incidirán en las actitudes de los alumnos acerca de las matemáticas y de su aprendizaje, suelen partir de la conceptualización de las actitudes como repuestas a estímulos exteriores.

Los trabajos de Callahan (1971), Leder (1982), Haladyna, Shaughnessy y Shaughnessy (1983) y Wolleat, Ponte, Becker y Fennema (1980) constituyen algunos de los ejemplos de los estudios realizados al final de los años setenta que marcan el inicio del crecimiento de la preocupación sobre la relación de las actitudes de los alumnos con respecto a las matemáticas.

Otros estudios sobre actitudes hacia las matemáticas son los que se recogen en el Figura 3:

Autores	**Año**	**Investigación efectuada**
Whitley	1979	Efectos de un programa de enseñanza individualizada y las actitudes hacia las matemáticas.
Hannafin	1981	La autorregulación de metas en los grupos escolares y las actitudes hacia las matemáticas.
Schofield	1982	Las relaciones entre las actitudes hacia las matemáticas y las características de los estudiantes y del curso que tomaban en la escuela elemental.
Minato	1983	Elaboró una escala de diferencial semántico, retomando la escala de actitud de Dutto (DAS), tipo Thurstone, para medir las actitudes hacia la Aritmética desde la prospectiva de los maestros de escuela elemental.
Smith	1985	Realizó un experimento para investigar los comportamientos que puede tener el profesor al presentar la clase de matemáticas, estableciendo la relación que tienen estas variables con los resultados obtenidos por los alumnos.
Gairín	1990	Analizó las relaciones existentes entre las actitudes de los alumnos y el aprendizaje matemático, concluyendo que los factores personales, familiares y curriculares estaban relacionados con las actitudes hacia las matemáticas.
Mohd Yusof	1994	Puso de manifiesto que las actitudes de los alumnos (actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas) estaban muy influenciadas por factores como la naturaleza misma de la disciplina matemática; las características individuales: motivación, intereses, expectativas, etc., y el método del profesor.
Camacho, Hernández y Socas	1995	Realizaron un trabajo descriptivo sobre las concepciones y actitudes de los futuros profesores de Secundaria hacia las matemáticas y su enseñanza, centrado en las matemáticas como ciencia objeto de estudio, métodos propios de la matemática, su papel en la sociedad y en las ciencias, con relación a su uso y sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Autores	Año	Investigación efectuada
Carbonero, Martín y Arranz	1998	Investigación sobre las expectativas ante las matemáticas de alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria, con la que trataban de analizar las actitudes y expectativas ante las matemáticas del alumnado de esta etapa educativa.
Hernández y Socas; Hernández, Palarea y Socas	1999 2001	Analizaron las concepciones, creencias y actitudes hacia matemáticas de los alumnos que empiezan la Diplomatura de Maestro, extrayendo como conclusiones que: más de la mitad de los encuestados afirmaron que se sentían poco seguros al hacer matemáticas; la mitad consideraba que esta disciplina era la más repulsiva de las materias; un 80% pensaba que su comprensión resultaba esencial hoy para los ciudadanos, y sólo un 38% que son un medio para entender el entorno.
Cubillo y Ortega	2002	Investigación sobre la influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las matemáticas, durante los cursos 94-95 y 95-96 con estudiantes de 1º de BUP.
Aiken Informe Cockcroft Gómez-Chacón	1976 1985 1997	Llegaron a la conclusión de que existe una relación pequeña, pero significativa, entre las actitudes hacia la matemática y el rendimiento académico.
Gil	2003	Investigación sobre la influencia de las creencias, actitudes y reacciones emocionales del alumnado de ESO hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Los resultados obtenidos indican que el género influye en los afectos del estudiantado hacia esta materia, pero no en sus creencias acerca de su autoconcepto matemático.

Figura 3: Resumen de las investigaciones llevadas a cabo en el campo de las actitudes hacia las Matemáticas.

3.3. Emociones

Si son escasos los estudios sobre dimensión afectiva y aprendizaje de las matemáticas, aún son más raros los relativos al estudio de la emoción. Las razones que parecen estar en la base de esta ausencia de trabajos son, por un lado, la gran dificultad de su diagnóstico y el no disponer de instrumentos adecuados para ello, y, por otro, la dificultad de ubicarlo en un marco teórico (Gómez-Chacón, 2000).

Siguiendo a McLeod (1990, p. 21), *"la falta de atención a la emoción es probablemente debida al hecho de que la investigación en cuestiones afectivas, en su mayor parte, ha buscado factores actitudinales que son estables y que se pueden medir mediante cuestionarios. No obstante, ha habido algunos estudios dirigidos a los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas que han prestado atención a las emociones... Sin embargo, nunca han jugado un papel relevante en las investigaciones sobre el dominio afectivo en matemáticas. El mayor problema ha sido la falta de un marco teórico dentro del cual interpretar el rol de las emociones en el aprendizaje de las matemáticas. La teoría de Mandler puede ser un buen punto de partida para construir ese marco teórico..."*.

Las emociones aplicadas al ámbito matemático han sido analizadas primeramente por Debellis y Goldin (1991, 1993), por Goldin (1988a), por el sociocognitivo Mandler (1989a) y por McLeod y Adams (1989).

Las *emociones* son respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo lo fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial. Surgen en respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para el individuo. La clase de valoraciones relacionadas con el acto emocional sigue al acontecimiento de alguna percepción o discrepancia cognitiva en la que las experiencias del sujeto se infringen. Tales expectativas son expresiones de las creencias de los estudiantes acerca de la naturaleza de la actividad matemática, de sí mismos, y acerca de su rol como estudiantes en la interacción en la clase. Las creencias de los estudiantes, que parecen ser un aspecto crucial en la estructuración de la realidad social del aula, dentro de la que se enseña y aprende, hacen derivar el significado de los actos emocionales. (Gómez-Chacón, 1997).

Por tanto, las emociones son respuestas afectivas fuertes que no son sólo automáticas o consecuencia de activaciones fisiológicas, sino que serían el resultado complejo del aprendizaje, de la influencia social y de la interpretación (Gómez-Chacón, 2000).

Desde la perspectiva cognitiva de la emoción en la Educación Matemática, los autores más representativos en Educación Matemática y afecto son Mandler y Weiner.

La **teoría de Mandler** (1984, 1985, 1988, 1989a y b) hace referencia al aspecto psicológico de la emoción, teniendo como punto central la resolución de problemas, con el propósito de comprender mejor en qué medida influyen las emociones en el proceso de resolución de problemas de matemáticas y cómo se relaciona con la formación de creencias acerca de uno mismo como aprendiz, pues el autoconcepto matemático es un aspecto fundamental que incide en el aprendizaje del alumnado.

Desde este enfoque Mandler trata de integrar la activación fisiológica y el proceso de evaluación cognitiva, siendo la emoción una interacción compleja entre sistema cognitivo y sistema biológico.

Así, atendiendo al estudio de la emoción en la resolución de problemas, Mandler lo sintetiza de esta forma:

Problema planteado

Esquema activado, plan escogido

Interrupción, bloqueado ante la solución

Reacción afectiva

Intentos de hacer cambios en el problema o abandonar frustrado

Su *teoría de la discrepancia* explica la forma en que las creencias de los estudiantes y su integración con situaciones de resolución de problemas conducen a respuestas afectivas. Señala que cuando la instrucción en la clase es totalmente diferente de lo que los alumnos esperan, ellos experimentan discrepancia entre sus expectativas y sus experiencias, y estas discrepancias son el resultado de fuertes respuestas emocionales. Además, si las reacciones emocionales resultan de discrepancias entre qué se espera y qué es actualmente experienciado, debería ser posible rastrear y localizar las reacciones afectivas desde las creencias y expectativas que las originan. La comprensión y expectativas que los estudiantes traen a la clase de matemáticas podrían ser un primer paso en el aprendizaje para tratar de forma efectiva su afecto durante el desarrollo del proceso de resolución de problemas.

Mandler (1989a) presenta dos aproximaciones para el estudio de las emociones en la resolución de problemas:

1. Macroanálisis (centrado en las diferencias individuales y la eficacia cognitiva).
2. Microanálisis (que se da en la interacción del individuo con la tarea de resolución de problemas).

Como forma eficiente para trabajar el afecto en resolución de problemas, Mandler (1989a) destaca una información adecuada sobre estrategias de resolución de problemas:

“Para manejar el estrés y el afecto de forma eficiente en la tarea de resolver un problema, el individuo tiene que estar equipado con un conocimiento adecuado del problema, de la tarea y de los diferentes caminos posibles de resolverlo. En otras palabras, la información inadecuada conduce al estrés, pero el individuo bien informado puede usar el estrés de forma constructiva” (Mandler, 1989a, 15).

En definitiva, el análisis de Mandler permite comprender que el estudio de la emoción no está restringido a escenarios simples (tareas de procesamiento, errores, reacción emocional y vuelta a la tarea), sino que este análisis permite también comprender qué está ocurriendo en escenarios de la vida real, por ejemplo, cuando una persona está involucrada en una tarea, comete errores y, en vez de intentarlo de nuevo, abandona y entra sin darse cuenta en fantasías de su propia incompetencia (autocompasión, mecanismos de defensa).

La **teoría de la atribución de Weiner** (1986), trata de explicar el comportamiento social, sus atribuciones causales y aquellas explicaciones que se basan en el sentido común.

Weiner (1986) aplicó esta teoría para explicar la motivación y la emoción. Con respecto a la emoción, este autor propone un punto de vista atributivo (por tanto cognitivo) para el proceso emocional y no intenta hacer una teoría general sobre la misma.

Este autor propone el siguiente proceso de cognición-emoción: tras el resultado de un acontecimiento, hay una reacción general positiva o negativa (una emoción “primitiva”), basada en el éxito y fracaso percibido sobre el resultado (la “valoración primaria”). Estas emociones se consideran dependientes del resultado e independientes de la atribución, y las dos reacciones más frecuentes son: la de felicidad, por el éxito y la frustración, por el fracaso. Sin embargo, tras la valoración del resultado y la inmediata reacción afectiva, se buscará una adscripción causal en función de la atribución o atribuciones elegidas y se generarán una serie de emociones diferentes: sorpresa, serenidad, orgullo, tristeza, frustración, etc.

Asimismo, analiza siete emociones (autoestima, ira, compasión, culpabilidad, vergüenza, gratitud y desesperación) y las relaciona con las dimensiones causales. La figura 4 recoge la interpretación atribucional de las emociones según este autor:

- **Ira**: resultado negativo y atribución de ausencia de control (con atribución de conducta arbitraria al otro).
- **Culpabilidad**: resultado negativo, con atribución de causas controlables y falta de esfuerzo propio.
- **Vergüenza**: resultado negativo, con atribución de causas controlables, pero con falta de capacidad.
- **Desesperanza**: resultado negativo y atribución de causas estables.
- **Orgullo y autoestima positiva**: resultado positivo y atribución causal interna.
- **Autoestima negativa**: resultado positivo y atribución causal externa.
- **Compasión**: está relacionada con la ausencia de control.
- **Gratitud**: sólo si se atribuye a la conducta del otro el carácter de volitiva y dirigida a beneficiarnos.

Figura 4: Interpretación atribucional de las emociones, según Weiner (1986).

Así, las dimensiones causales tienen consecuencias psicológicas, relacionándose tanto con las expectativas como con el afecto (que se supone el valor de alcanzar la meta). Por lo tanto, las emociones se pueden interpretar como consecuencias postcognitivas, resultado de las atribuciones de causalidad que se llevan a cabo al analizar los resultados de una acción. Las cogniciones preceden y determinan las reacciones afectivas. Como el propio Weiner señala, más que una teoría sobre la emoción, se trata de una interpretación de algunos fenómenos emocionales, al extrapolar la teoría de la atribución a este campo.

En esta misma línea, autores como Guerrero y Blanco (2004) han diseñado un *programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*.

Pretenden mostrar la relación entre la dimensión afectiva y emocional y la influencia que ésta ejerce en el aprendizaje de las Matemáticas, fundamentalmente en la resolución de problemas. Partiendo de la hipótesis de que las actitudes, las creencias, los pensamientos y las emociones explican una gran parte del resultado y rendimiento ante las Matemáticas, proponen el diseño de un programa de intervención de corte psicopedagógico que se desarrollará en diez sesiones. Está inspirado en los modelos de Polya (1985) sobre resolución de problemas y el modelo de inoculación de estrés de Meichenbaum (1985), siendo sus principales objetivos resolver problemas de Matemáticas, adiestrar al alumno en el afrontamiento de situaciones ansiógenas y manejar las emociones. Se detallan algunos instrumentos útiles para la evaluación y se describe, sesión a sesión, cómo tendría que llevarse a cabo la implementación del programa de intervención.

En la figura 5 reproducimos el modelo de resolución de problemas y entrenamiento en autoinstrucciones que describen en el trabajo.

Modelo de resolución de problemas	Entrenamiento en autoinstrucciones
1. Analizar y comprender el problema ¿Qué es lo que desconoces?, ¿cuáles son los datos? ¿cuáles son las condiciones?, ¿es posible cumplir las condiciones del problema?, ¿son suficientes, insuficientes, contradictorios para cumplir los objetivos el problema?, ¿qué conceptos y procesos matemáticos están implicados en el problema?, ¿los dominas?,	***1. Autoinstrucciones antes del suceso. Fase de preparación*** Preocuparse no cambia el problema Piensa qué has de hacer exactamente Tú puedes conseguirlo. Es más fácil una vez que se ha empezado. Estarás bien No te dejes llevar por pensamientos negativos. Respira y relájate
2. Buscar una estrategia de solución ¿Has visto este problema anteriormente, otro igual o parecido?, ¿conoces alguno relacionado, algún teorema que pueda ser útil?. observando el planteamiento del problema, intenta pensar sobre problemas que tengan la misma o similar incógnita. en estas condiciones, ¿hay algún problema que has resuelto?, ¿podrías usarlo?, ¿podrías usar su resultado o su método?	***2. Autoinstrucciones al comienzo del suceso: Fase de confrontación*** Cálmate, puedes controlarlo Piensa qué has hecho en otras ocasiones. Sólo tienes que dar un paso cada vez. Si no piensas en el miedo no lo sentirás Concéntrate en lo que tienes que hacer, no en el miedo. Esto sólo es una señal para relajarse.
3. Llevar a cabo el plan y examen. Comprobar que los pasos son correctos. Registrar todos los cálculos, resaltar los logros intermedios, actuar con orden, con precisión y explicar el estado de la ejecución.	***3. Autoinstrucciones durante la tarea: Fase de afrontamiento*** Respira profundamente, haz una pausa y relájate. ¿Cuál es el paso siguiente?. Concéntrate en él. El miedo es natural, surge, persiste pero no es peligroso Esto terminará enseguida, no puede durar siempre, cosas peores podrían pasar. He sobrevivido otras veces y a cosas peores Concéntrate en lo que estás haciendo
4. Revisión de la solución y del proceso Haremos al alumno las siguientes preguntas: ¿sabes analizar el resultado, examinar los argumentos?, ¿sabes obtener estos resultados de diferente modo?, ¿podría resolverlo de un vistazo?, ¿puede usar el resultado para otro problema?	***4. Fase de reforzamiento del éxito*** Lo hiciste!!. Conseguiste el objetivo. No fue tan malo. Lo hice bien. Tus pensamientos eran peores que la realidad. La próxima vez será más fácil. Poco a poco lo conseguirás.

Figura 5. Modelo de resolución de problemas y entrenamiento en auto-instrucciones (Guerrero y Blanco, 2004)

4. Conclusiones

A tenor de lo expuesto anteriormente, siguiendo a Gómez-Chacón (2000), la abundancia de fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, en diversas edades y niveles educativos, puede explicarse, en gran parte, por la aparición de actitudes negativas originadas por factores ambientales y personales, cuya detección constituiría el primer paso para tratar de contrarrestar su influencia negativa con efectividad.

Por ello, consideramos que los altos índices de fracaso escolar en el área de matemáticas exigen el estudio de la influencia de los factores afectivos y emocionales en el aprendizaje matemático, ya que pueden explicar la ansiedad que siente el alumno ante la resolución de problemas, su sensación de malestar, de frustración, de inseguridad, el bajo autoconcepto que experimenta, etc., que, frecuentemente, le impiden afrontar con éxito y eficacia las tareas matemáticas.

Cabe destacar que muchos estudiantes creen que las matemáticas son una ciencia abstracta, rigurosa y exacta que desarrolla el razonamiento lógico, asumiendo una concepción de las matemáticas como ciencia por excelencia que obliga a pensar y que favorece la formación intelectual del individuo. En consonancia con la creencia de que la Matemática es creada por gente prestigiosa, muy inteligente y creativa (Gómez-Chacón, 2000) y reforzada por su experiencia escolar, los alumnos tienen la imagen de que los mejores estudiantes en clase de matemáticas son los más preparados y los más inteligentes del grupo. Por tanto, y teniendo cuenta lo anterior, su experiencia como aprendices de matemáticas conforma en ellos una idea negativa de la enseñanza de las mismas (aburrida, mecánica, sin sentido) y del aprendizaje matemático al que consideran útil, pero complicado y difícil. Como consecuencia de esto, piensan, aunque no lo explicitan, que es inaccesible para muchos, lo que refuerza una baja autoestima en relación con la actividad matemática (Blanco y Guerrero, 2002).

En el Informe Cockcroft (1985) se pone de manifiesto hasta qué punto la necesidad de emprender una simple y fácil tarea matemática podía provocar sentimientos de ansiedad, impotencia, miedo e incluso culpabilidad.

Para Blanco y Guerrero (2002), la historia repetida de fracasos lleva a los alumnos a dudar de su capacidad intelectual en relación con las tareas matemáticas y llegan a considerar sus esfuerzos inútiles, manifestando sentimientos de indefensión o pasividad. Por ello, se sienten frustrados y abandonan rápidamente ante la dificultad. Esta situación determina nuevos fracasos que refuerza la creencia de que efectivamente son incapaces de lograr el éxito, desarrollándose una actitud negativa que bloquea sus posteriores posibilidades de aprendizaje.

Toda esta situación hace que el “contexto en el que se desarrolla el afecto”, indicado por Gómez-Chacón (1997), se reproduzca provocando así que las creencias y actitudes, normalmente negativas, hacia las matemáticas sigan encontrando un campo propicio para su generación y desarrollo en las matemáticas escolares. Además, hay que considerar que diferentes estudios coinciden en señalar que la actitud positiva de los alumnos hacia las matemáticas disminuya a medida que avanzan escolarmente (Gairín, 1990; Hernández y Socas, 1999).

En síntesis, conviene desarrollar "Programas de Alfabetización Emocional en Educación Matemática", con el fin de promover el cambio de actitudes, creencias y emociones de los estudiantes hacia las Matemáticas y su aprendizaje. Además, una mejora de las actitudes hacia esta disciplina ha de pasar necesariamente por un cambio de la imagen de la misma, a la que consideramos no es ajena la metodología didáctica que se utiliza en el aula, así como una mejora de las interacciones entre profesores y alumnos.

También, sería necesario fomentar las relaciones de colaboración y cooperación entre los profesores de Matemáticas y los psicopedagogos en el campo del dominio afectivo, debido, como se ha podido apreciar, a su influencia en la calidad del aprendizaje escolar, a través de la puesta en marcha y desarrollo de proyectos y programas de prevención e intervención en dificultades de aprendizaje en Matemáticas y de educación emocional en esta área de conocimiento, que favorezcan la atracción y gusto por la disciplina, mejoren las actitudes, creencias y reacciones emocionales que experimentan los alumnos hacia ella y su aprendizaje.

Bibliografía

- Aiken, L.R. (1976). Update on attitudes and other affective variables in learning mathematics. Review of Educational Research, 46 (2), 293-311.
- Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), Psicología de la Instrucción I. (pp. 256-279). Madrid: Síntesis.
- Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2002). Profesionales de las Matemáticas y psicopedagogos. Un encuentro necesario. En Mª C. Penalva, G. Torregosa y J. Valls (Coords.), Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 121-140). Actas del V Simposio de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Alicante.
- Callahan, J. (1971). Adolescent Attitudes Toward Mathematics. Mathematics Teacher, 9 (1), 751-755.
- Callejo, M.L. (1994). Un club matemático para la diversidad.
- Camacho, M., Hernández, J. y Socas, M.M. (1995). Concepciones y actitudes de futuros profesores de Secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En L.J. Blanco y V. Mellado, La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal (pp. 81-97). Servicio de publicaciones Diputación Provincial de Badajoz.
- Carbonero, M.A., Martín, L.J. y Arranz, E. (1998). Expectativas ante las matemáticas de alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria. Revista de Psicodidáctica, 6, 17-26.
- Cockcroft, Informe (1985). Las matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC.
- Cubillo, C. y Ortega, T. (2002). Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las matemáticas. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 31, 57-72.

- Debellis, V.A. y Goldin, G.A. (1991). Interactions between cognition and affect in high school students' individual problem solving. En R.G. Underhill (Ed.), Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting on the Psychologv of Mathemtics Education, North Americam Chapter of Internatioal Group. (Vol I, pp. 29-35). Virginia: Polytechnic Institute and State University.
- Debellis, V.A. y Goldin, G.A. (1993). Analysis of interactions between affect and cognition in elementary school children during problem solving. En J.R. Becker y B.J. Pence (Eds.), Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting on the Psychologv of Mathemtics Education, North Americam Chapter of Internatioal Group. (Vol II, pp. 56-62). Pacific Grove, CA, USA.
- Gairín, J. (1990). Las actitudes en educación. Un estudio sobre la Educación Matemática. Barcelona: Boixareu Universitaria.
- Gil, N. (2003). Creencias, actitudes y emociones en el aprendizaje matemático. Memoria de Proyecto de investigación de Doctorado. Departamento de Psicología y Sociología de la Educación. Universidad de Extremadura.
- Goldin, G.A. (1988a). Affective representation and mathematical problem solving. En M-J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheler (Eds.), Proceedings of the Tenth Annual Meeting on the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter of International Group (pp. 1-7). North Illinois University: DeKalb, IL.
- Goldin, G.A. (1988b). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation. En A. Borbás (Ed.), Proceedings of the Twelfth International Conference on the Psychology of Mathematics Education.(Vol. II, pp. 358-365). Hungary: University of Hungary.
- Goleman, D. (1996). Inteligencia emocional. Barcelona: Kairós.
- Gómez-Chacón, I.M. (1997). Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Inédita.
- Gómez-Chacón, I.M. (1998). Creencias y contexto social en matemáticas. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 17, 83-103.
- Gómez-Chacón, I.M. (2000). Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.
- Gómez Chacón, I. (2001). The emotional dimesion in mathematics education: a Bibliography. Statistical Education Research Newsletter vol. 2, nº 2. International Association for Statistical Education.
- González-Pienda, J.A. y Núñez, J.C. (1997). Determinantes personales del aprendizaje y rendimiento académico. En J.N. García (Ed.), Instrucción, Aprendizaje y rendimiento académico (pp. 89-104). Barcelona: Ediciones L.U.
- Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación, Nº 33/5(25 - 07 – 04). http://www.campus-oei.org/revista/psi_edu13.htm
- Haladyna, T., Shaughnessy, J. y Shaughnessy, J.M. (1983). A Casual Analysis of Attitude Toward Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 14 (1), 19-29.
- Hannafin, M.J. (1981). Effects of Teacher and Student Goal Setting and Evaluations on Mathematics Achievement and Student Attitudes. Journal of Educational Research, 74 (5), 68-79.

- Hart, L.E. y Walker, J. (1993). The role of affect in teaching and learning mathematics. En D.T. Owens (Eds.), Research ideas for the classroom: Middle grades mathematic (pp. 22-38). New York: Macmillan.
- Hernández, J., Palarea, M.M. y Socas, M.M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales, Formación del profesorado e investigación en educación matemática II (pp. 115-124). Departamento de Análisis matemático. Universidad de la Laguna.
- Hernández, J. y Socas, M.M. (1999). Las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales, Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática I (pp.105-114). Departamento de Análisis matemático. Universidad de la Laguna.
- Krathwohl, D.R., Bloom, B.S. y Masia, B.B. (1973). Taxonomía de los objetivos de la educación: Clasificación de las metas educativas: Ámbito de la afectividad. Vol. II. Alcoy: Marfil.
- Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. En R.J. Shumway (Ed.), Research in mathematics education (pp. 356-387). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lafortune, L. y Saint-Pierre, L. (1994). La pensée et les émotions en mathematiques. Mètacognition et affectivité. Quebec: Les Editions Logiques.
- Leder, G.C. (1982). Mathematics Achievement and Fear of Success. Journal for Research in Mathematics Education, 13 (2), 124-135.
- Mandler, G. (1984). Mind and body: Psychology of emotion and stress. New York: Norton.
- Mandler, G. (1985). Cognitive psychology: An essay in cognitive science. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mandler, G. (1988). Historia y desarrollo de la Psicología de la emoción. En L. Mayor (Comp.), Psicología de la emoción (Teoría básica e investigaciones) (pp. 9-17). Valencia: Promolibro.
- Mandler, G. (1989a). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective (pp. 3-19). New York: Springer-Verlang.
- Mandler, G. (1989b). Affect and learning reflections and prospects. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective (pp. 49-58). New York: Springer-Verlang.
- McLeod, D.B. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 134-141.
- McLeod, D.B. (1989a). The role of affect in mathematical problem solving. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective (pp. 20-36). New York: Springer-Verlang.
- McLeod, D.B. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective (pp. 245-258). New York: Springer-Verlang.
- McLeod, D.B. (1990). Information-processing theories and mathematics learning: the role of affect. International Journal of Educational Research, 14, 13-29.

▪McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning (pp. 575-598). New York: Macmillan.
▪McLeod, D.B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. Journal for Research in Mathematics Education, 25 (6), 637-647.
▪McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds.) (1989). Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. New York: Springer-Verlag.
▪- Meichenbaum, D. (1985). Manual de inoculación de estrés. Madrid: Martínez Roca.
▪Minato, S. (1983). Some Mathematical Attitudinal Data on Eighth Grade Students in japan Measured by a Semantic Differential. Educational Studies in Mathematics, 14 (1), 19-54.
▪Mira, M. (2001). Afectos, emociones, atribuciones y expectativas: el sentido del aprendizaje escolar. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), Desarrollo Psicológico y Educación. II. Psicología de la Educación Escolar (pp. 309-329). Madrid: Alianza.
▪Mohd, Y. (1994). Camping attitudes to mathematics through problem solving. En J. P. Da Ponte y J.F. Matos (Eds.), Proceeding of 18th Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Vol I, 401-409. Lisboa.
▪National Council Teachers Mathematics NCTM (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. S.A.E.M. Thales.
▪Núñez, J.C. y González-Pienda, J.A. (1994). Determinantes del rendimiento académico. Oviedo: SPU.
▪Pehkonen, E. y Törner, G. (1995). Mathematical beliefs systems and their meaning for the teaching and learning of mathematics. En G. Törner (Ed.), Current state of research on mathematical beliefs, Proceedings of the MAVI Workshop. University of Duisburg.
▪- Polya, G. (1985). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.
▪Reyes, L.H. (1984). Affective variables and mathematics education. Elementary School Journal, 84, 558-581.
▪Salovey, P. y Mayer, J.D. (1990). Emotional intelligence. Imagination, Cognition and Personality, 9 (30), 185-211.
▪Schofield, H. (1982). Sex, Grade Level, and the Relationship between Mathematics Attitude and Achievement in Children. The Journal Educational Research, 75 (2), 280-284.
▪Smith, L. R. (1985). Presentational Behaviors and Student Achievement in Mathematics. Journal of Educational Research, 78 (5) 292-298.
▪Thompson, A.G. (1992). Theachers' Beliefs and conception: A synthesis of research. En D.A. Grows (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 127-146). New York: Macmillan.
▪Weiner, B. (1986). An Attributional Theory of Motivation and Emotion. New York: Springer-Verlag.
▪Whitley, T.W (1979). The effects of individualized instruction on the attitudes of middle school pupils. Journal of Educational Research. Washington, pp. 188-193.

- Wolleat, P., Ponte, J., Becker, A.y Fennema, E. (1980). Sex Differences in Higth School Students Causal Attributions of Performance in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 11 (5), 356-366.

Nuria Gil Ignacio (Badajoz, 1976) es Diplomada en Educación Social y Licenciada en Psicopedagogía (2003) por la Universidad de Extremadura. Su tesis doctoral se refiere a la influencia de las creencias, actitudes y reacciones emocionales en el aprendizaje de las Matemáticas.

Lorenzo J Blanco Nieto es Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Extremadura. Centra su investigación en la formación inicial y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en primaria y secundaria, habiendo publicado diferentes trabajos sobre ello.
lblanco@unex.es

Eloísa Guerrero Barona es Profesora Titular de Universidad en el Departamento de Psicología y Sociología de la Educación de la Universidad de Extremadura. Es Licenciada en Psicología y especialista en Logopedia. Experto en Terapia Cognitivo-Conductual en Ansiedad. Doctora en Psicopedagogía por la Universidad de Extremadura. Ha trabajado sobre estrés laboral, psicopatalogías profesionales, síndrome de burnout en el profesorado y estrés, emociones y salud.
eloisa@unex.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 33 - 46
ISSN: 1815-0640

La motivación de la belleza

R Elena Ortega, Inés Ortega, Tomás Ortega y Cecilia Crespo Crespo.

Resumen

En el presente artículo se exponen dos métodos generales para dibujar rosetones de forma exacta. Ambos tienen su origen en el "método directo", que se basa en la relación de las longitudes de los radios de las circunferencias que los determinan, y que surge del análisis directo de las figuras geométricas. Una conexión de éste con el séptimo problema de Apolonio da lugar al "método de las tangentes", que es menos rico en argumentación que el primero, pero más fácil de aplicar. Cuando el número de lados del polígono regular aumenta el método directo deja de ser aplicable en la realidad, pero las relaciones métricas de los radios proporcionan el "método métrico de las proporciones". Ambos métodos se pueden aplicar a polígonos regulares de cualquier número de lados de forma muy sencilla, aunque el conocimiento de la relación métrica que sustenta al segundo requiere un nivel de razonamiento superior.

Abstract

In this paper we expound two general methods to draw rose windows in an exact manner. Both have their origin in the "direct method", which, on the one hand, is based upon the relation of the lengths of the radios of the circumferences which determine them, and, on the other, arises from the analysis of the geometric figures. A connection of this with Apolonius's seventh problem gives way to the "tangents' method", which is less rich in argumentation than the first, but easier to apply. When the number of sides of the regular polygon increases, the direct method stops being applicable, but the metric relations of the radios provide the "metric method of proportions". Both methods can be applied to regular polygons of any number of sides in an easy manner, though the knowledge of the metric relation that sustains the second one requires a higher level of reasoning.

Resumo

O presente artigo apresenta dois métodos gerais para desenhar rosetas de forma exata. Ambos têm a sua origem no "método direto", que se baseia na relação das longitudes dos raios das circunferências que os determinam, e que surge da análise direta das figuras geométricas. Uma conexão deste com o sétimo problema de Apolônio dá lugar ao "método das tangentes", que é menos rico em argumentação que o primeiro, porém mais fácil de aplicar. Quando o número de lados do polígono regular aumenta, o método direto deixa de ser aplicável na realidade, mas as relações métricas dos raios proporcionam o "método métrico das proporções". Ambos os métodos podem ser aplicados a polígonos regulares de qualquer número de lados de forma muito simples, ainda que o conhecimento da relação métrica que sustenta o segundo requer um nível superior de raciocínio.

Introducción

En el paso del románico al gótico se comenzaron a hacer dibujos (planos) de los edificios que se pretendían construir y los conocimientos de Geometría se ponen al servicio de la Arquitectura para elaborar los proyectos de las edificaciones. En esta época surgen los rosetones como elementos arquitectónicos que, además de proporcionar una mayor iluminación interior, aportaban una ornamentación muy elegante, tanto en la fachada como en el interior, donde a la belleza de la forma geométrica se añade el efecto de la luminosidad exterior. Por supuesto que consideramos rosetones basados en polígonos regulares y que se pueden dibujar de forma exacta con regla y compás. A estos rosetones los denominamos gaussianos, en lo que sigue sólo haremos referencia a ellos y las posibilidades de construcción están limitadas por el teorema de Gauss.

Se puede y se debe enfocar la enseñanza de los conceptos matemáticos desde diferentes perspectivas, de las que deben destacarse aquellas que tengan que ver con la motivación. La enseñanza sin el aprendizaje carece de sentido y uno de los primeros principios de la Didáctica de la Matemática es conseguir que el alumno quiera aprender. Desde la Geometría se pueden establecer preciosas conexiones con el Arte que, sin duda, son muy motivadoras para los alumnos por diversos motivos: en primer lugar, porque se muestra una aplicación de la matemática; en segundo lugar, porque se sale del contexto propio de la disciplina y se proporciona una visión más amplia de la matemática; en tercer lugar, porque el proceso de enseñanza-aprendizaje se vuelve más interesante para los alumnos y, en particular, se muestran más participativos en las tareas que tienen que ver con aplicaciones reales; finalmente, también se debe destacar la conexión entre el simbolismo algebraico y el dibujo geométrico, así como el razonamiento y argumentación que están fundamentados en el análisis didáctico de las propiedades de los elementos que componen las figuras.

Por todo lo anterior, resulta evidente que conviene crear situaciones (Brousseau, 1986) que propicien estas conexiones con el objetivo fundamental de despertar el interés de los alumnos por el aprendizaje de la Geometría, y el tema que aquí nos ocupa, la construcción de rosetones, reúne todas estas condiciones.

En el trabajo que se presenta se utilizan tres métodos de dibujo que permiten construir los rosetones de forma exacta con regla y compás. El primero, método directo, se basa en la determinación de forma directa de los radios de las tres circunferencias que intervienen en la construcción de los rosetones (circunferencia circunscrita, circunferencia de centros y circunferencia de tangentes). Este método surge directamente al analizar las relaciones métricas de los elementos implícitos en las figuras de los rosetones, es muy rico en argumentación, en el sentido de Ibañes, M. y Ortega, T. (2004), pero las dificultades de aprendizaje se sitúan en el cuarto nivel de Van Hiele (Gutiérrez, J. y Jaime, A., 1990), ya que la obtención de las longitudes de los radios de la circunferencia de centros y tangente de las circunferencias de tangencias son auténticos teoremas, aunque en la descripción que se hace después no se enuncien. Al aplicar este método a la construcción del rosetón de cuatro pétalos se establece una conexión con el séptimo problema de tangencias de Apolonio, y surge de manera natural el método de las tangencias, que se puede aplicar para construir de forma exacta rosetones, sea cual fuere su número de pétalos. Es precisamente el aumento del número de pétalos lo que hace que el método directo no se pueda aplicar como tal y, buscando una solución a esta problemática, surge de forma natural el método métrico de las proporciones, que se basa en la determinación de la "tercia proporcional" de la relación métrica que expresa el radio de la circunferencia tangente en función del radio de la circunferencia circunscrita. Este método también permite el diseño de rosetones de forma exacta, independientemente del número de lados. Por otra parte conviene tener presente que, aunque la aplicación del mismo sí que es sencilla, el aprendizaje de la deducción del método añade un paso más al método directo y, por tanto, la obtención del método se sitúa en el cuarto nivel de Van Hiele y, al igual que en el estudio que hacen Ortega, I y Ortega, T. (2004) sobre los diez problemas de Apolonio, la aportación gráfica del análisis de los elementos de las figuras geométricas es mucho más rica e interesante que la aportación que procede de la manipulación del simbolismo algebraico.

El rosetón de cuatro pétalos. El método de tangencias

Como puede verse en Crespo Crespo, C. (2005), las relaciones entre el radio de la circunferencia del rosetón de cuatro pétalos, R_e, con el radio de los centros, R_c, y con el radio de las cuatro circunferencias tangentes que dibujan los pétalos, R_t, que son muy fáciles de obtener, son éstas:

$$R_c = (2-\sqrt{2})R_e$$

$$R_t = (\sqrt{2}-1)R_e$$

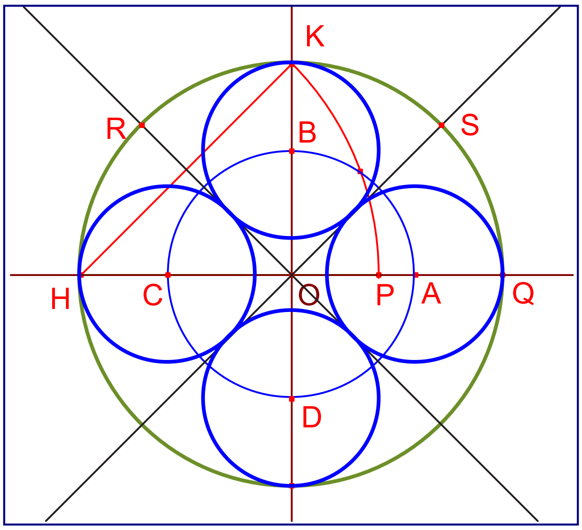


Figura 1. Rosetón de 4 pétalos I.

La construcción gráfica de este rosetón es muy sencilla. La figura 1 se ha hecho con CABRI partiendo de la circunferencia de radio R_e, pues se pierde generalidad si se supone que es la unidad.

Considerando la figura 1, en la que *OH=OK=1,* es claro que $HK = HP = \sqrt{2}$ y, por tanto $R_c = PQ = 2-\sqrt{2}$ y $R_t = OA = \sqrt{2}-1$. Es evidente que los puntos de tangencia están en las bisectrices *OR* y *OS* y en las rectas que unen los centros *AB*, *BC*, *CD* y *DA*. Esta construcción también se podría haber resuelto como en Ortega, I. y Ortega, T. (2004), ya que se puede considerar que se trata del séptimo problema de Apolonio (circunferencia tangente a dos rectas y a otra circunferencia dada), pero el problema que nos ocupa es un caso particular del problema de Apolonio, ya que el centro de la circunferencia es el punto de corte de las dos rectas. Aquí la solución es aún más sencilla, ya que, por ser el radio *OL* perpendicular a la recta tangente a la circunferencia, *PQ*, en el punto de tangencia, *L,* el problema se reduce a determinar la circunferencia inscrita al triángulo *OPQ*, cuyo centro, *A*, es el punto común de las bisectrices. La construcción geométrica se ultima trazando la circunferencia de los centros de las circunferencias tangentes. Figura 2.

Método de las tangencias: El procedimiento gráfico que se acaba de describir es genérico y "exacto", y se puede aplicar a los polígonos regulares de cualquier número de lados, y las diferencias de trazado de unos casos a otros sólo se diferencian en el número de circunferencias tangentes, cosa que carece de importancia, y en la construcción del propio polígono, que es donde reside la complejidad. Considerando la figura 2 como soporte de la descripción, este método gráfico de tangencias se puede enunciar así: Se considera un radio OL en el que va a estar situado el centro de la circunferencia tangente; partiendo de este lado se considera el triángulo isósceles POQ formado por la recta tangente a la circunferencia dada en el punto L, que es el extremo del radio considerado, y las rectas que son mediatrices de los lados LK y LM del polígono base. Finalmente se traza a uno de los ángulos iguales; el punto de corte de esta bisectriz con el radio OL es el centro de la circunferencia de tangencias, A, el segmento AL es su radio y el segmento OA es el radio de la circunferencia de centros.

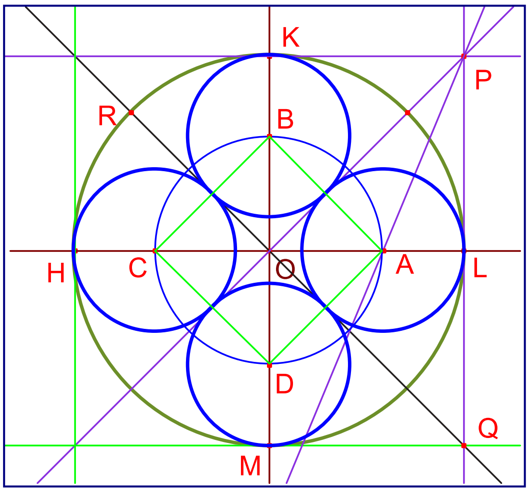


Figura 2. Rosetón de 4 pétalos II.

El rosetón de seis pétalos

Un análisis similar al anterior sobre el rosetón de seis pétalos de la figura 3 permite establecer las siguientes relaciones métricas entre el radio exterior, R_e, el radio de la circunferencia de centros, R_c, y el radio de las circunferencias tangentes que dibujan los pétalos, R_t:

$R_e=3R_t$ y $R_c=2R_t$

Estas relaciones permiten dibujar el rosetón de la figura 3, una vez que se ha construido el hexágono regular, como se hizo en la figura 1: El hexágono regular es un polígono muy sencillo de construir, ya que las longitudes del radio, *OP*, y del lado, *PQ*, son

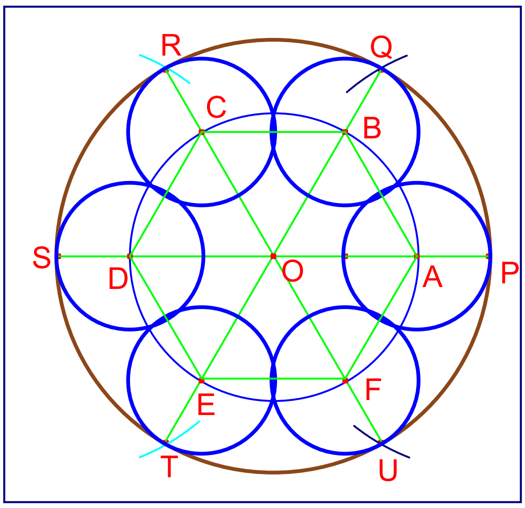


Figura 3. Rosetón de 6 pétalos I.

iguales. Aplicando el teorema de Tales, ahora, dividiendo *OP* en tres partes iguales se obtiene el radio de la circunferencia de centros, R_c=*OA*, y el radio de las circunferencias tangentes, R_t=*AP*.

El procedimiento general de tangencias descrito en el apartado anterior es muy sencillo de aplicar y el rosetón que muestra la figura 4 se ha construido utilizando este procedimiento. La primera circunferencia tangente, que describe el primer pétalo, y que tiene centro *A* se dibuja teniendo en cuenta que es la circunferencia inscrita al triángulo *OMN*. En consecuencia *A* es la intersección de las bisectrices y este punto determina con *O* el radio de la circunferencia de centros y con *P* el radio de las circunferencias que determinan los pétalos. Aunque en la figura 4 no se ha dibujado, la bisectriz del ángulo *OMN* contiene al lado AB del hexágono regular inscrito en la circunferencia que contiene a los centros. Esta propiedad se justifica por el hecho de que el triángulo *OMN* es equilátero y las bisectrices coinciden con las mediatrices. Se puede elaborar una argumentación más completa, en el sentido de Ibañes y Ortega (2004), tratando de que sea convincente y explicativa. Para ello hay que combinar las representaciones gráfica, simbólica y verbal, y justificar todas las afirmaciones, como por ejemplo, ¿por qué *OMN* es equilátero?

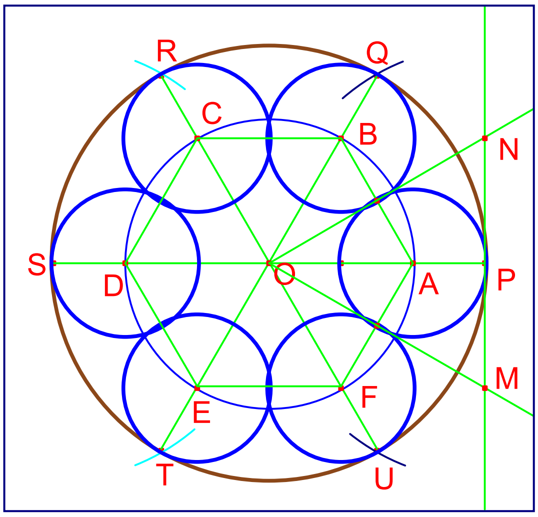


Figura 4. Rosetón de 6 pétalos II.

El rosetón de tres pétalos

El análisis directo que permite construir este rosetón es un poco más complicado, pero merece la pena hacerlo por las relaciones métricas que aparecen en él. Examinando la figura 5 no es difícil, establecer la relación entre el lado del triángulo, l_t, inscrito en una circunferencia de radio R_e y este radio, $l_t = \sqrt{3}R_e$, que se deduce del triángulo rectángulo *LVR*. Por otra parte, un

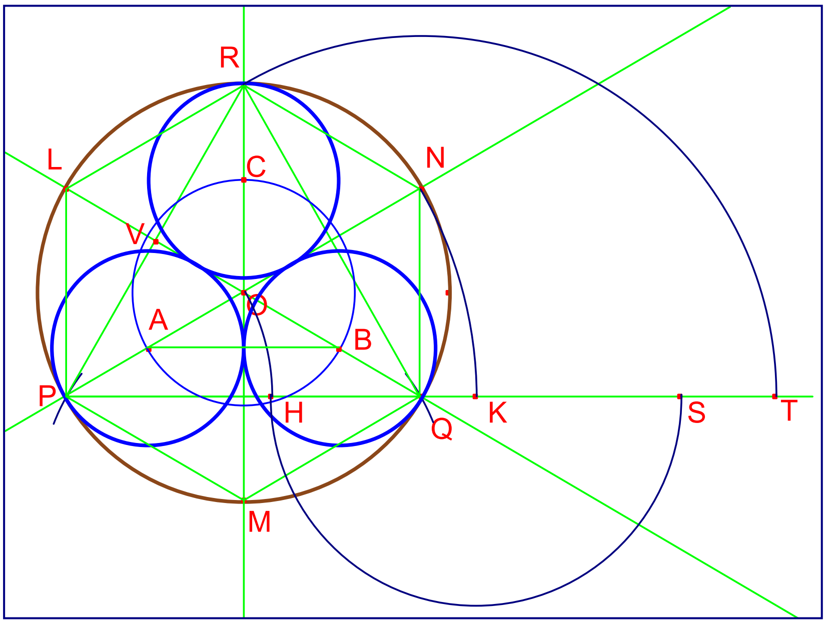


Figura 5. Rosetón de 3 pétalos I.

nuevo análisis de la figura 5, permite expresar el radio de la circunferencia de centros mediante el segmento ST, pero esto no es inmediato.

Analizando la figura 5 es fácil ver que los triángulos *OAB* y *OPQ* son semejantes y, por tanto, se verificará la relación

$$\frac{\sqrt{3}R_e}{2R_t} = \frac{R_e}{R_c}$$

que es equivalente a esta otra

$$\frac{\sqrt{3}}{2R_t} = \frac{1}{R_e - R_t}$$

De esta última relación ya es muy fácil deducir que es $R_t = (2\sqrt{3} - 3)R_e$ y considerando que R_e=1, entonces $R_t = 2\sqrt{3} - 3$ y que $R_c = 4 - 2\sqrt{3}$.

Como *PH=HK=KS=*R_e y *PQ=QT=*l_t, es claro que *ST=* R_c, igualdad que se verifica para cualquier longitud de *Re*, y cuando este radio es la unidad, $R_t = 2\sqrt{3} - 3$.

Por otra parte, es claro que si se considera el procedimiento gráfico general la construcción del rosetón de tres pétalos es mucho más sencilla. La figura 6 muestra este procedimiento: la circunferencia inscrita en el triángulo *OST* representa al primer pétalo, la circunferencia de centro *O* radio *OA* es la circunferencia de los centros y, ahora, el trazado de los otros dos pétalos es trivial.

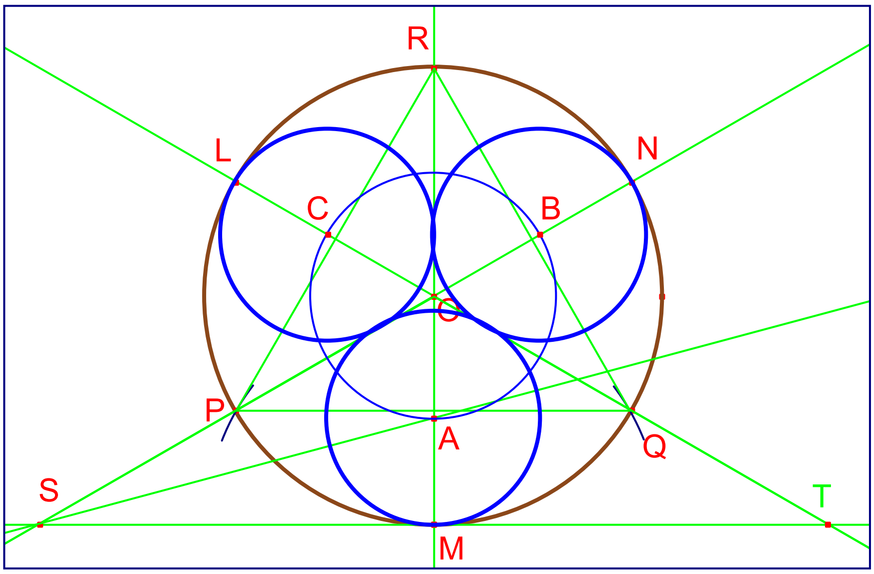


Figura 6. Rosetón de 3 pétalos. Método de las tangentes.

Rosetón de cinco pétalos. El método métrico de la proporción

Su construcción está ligada a la del pentágono regular, que ya los Pitagóricos sabían dibujarlo con regla y compás de forma exacta. La construcción que aquí se presenta está basada en un análisis sobre la figura 7.

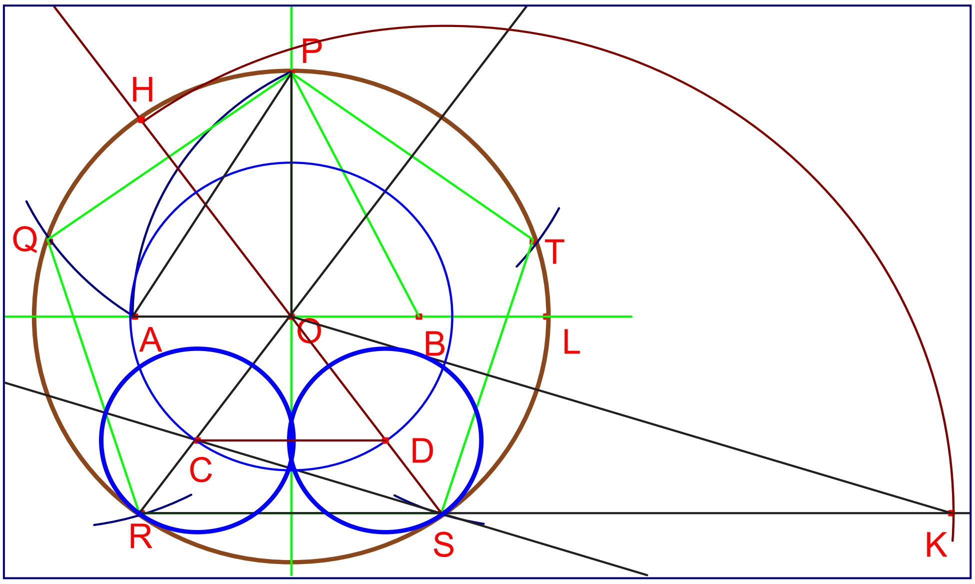


Figura 7. Rosetón de 16 pétalos construido por el método general

Es bien conocido que los lados del triángulo *AOP* contienen las longitudes de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia de centro *O* y radio *OL* de 5, 6 y 10 lados (Boyer, 1999, pág. 222). Esto permite dibujar de forma exacta el pentágono regular PQRST y determinar la longitud de su lado, l_p, en función del radio de la circunferencia circunscrita, R_e, que verifica la siguiente relación:

$$l_p = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} R_e$$

Considerando las relaciones métricas derivadas de la semejanza de los triángulos *OCD* y *ORS* y denotando por R_t y R_c a los radios de las circunferencias tangentes y de los centros, como viene siendo usual, se tiene:

$$\frac{l_p}{2R_t} = \frac{R_e}{R_c}$$

De la expresión anterior se obtiene que

$$R_t = \frac{l_p R_e}{2R_e + l_p},$$

y R_t se puede determinar por cuadraturas, como se ha hecho en los rosetones anteriores, pero los cálculos se complican en exceso y, en esta ocasión, considerando que $R_e=1$,

$$R_t = \frac{l_p}{2+l_p}$$

Ahora optamos por determinar R_t aplicando el teorema de Tales, y para ello sólo hay que calcular la tercera proporcional de la siguiente igualdad:

$$\frac{l_p}{2+l_p} = \frac{x}{1}$$

Considerando que $RO=1$, que $RS= l_p$ y que $RK=2+l_p$, la paralela a *OK* por *S* determina el punto *C* y con él el radio de la circunferencia tangente, que es *CR*. La circunferencia de centro *O* y radio *OR* determina los centros de las demás circunferencias tangentes y el trazado de éstas termina la construcción.

Método métrico de la proporción: El procedimiento que se acaba de utilizar constituye un método general métrico “exacto” y, considerando la figura 7 como guía, se puede enunciar así: a uno de los lados del polígono, *RS*, se le añade un diámetro de circunferencia, *SH*, para formar el segmento *SK* sobre la semirrecta *RK* que contiene al lado *RS*, considerando ahora el radio de la circunferencia exterior, *OR*, se une *K* con *O* y se traza la paralela a *OK* por *S*. El punto de corte de esta paralela con *OR* es el centro de la circunferencia de tangencias, *C*, y el segmento *CR* es su radio.

Una vez dibujado el pentágono regular la construcción basado en el procedimiento de tangencias se aplicaría exactamente igual que en los casos anteriores y por esta razón ya no se considera en este apartado.

Aunque cuando se duplica el número de lados, es conocido (Ortega, T., 2005) que la longitud del lado del polígono regular de *2n* lados, l_{2n}, se expresa en función de la longitud del lado del polígono regular de *n* lados, l_n, mediante la siguiente relación, conocida como igualdad de Von Ceulen

$$l_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-l_n{}^2}}$$

el análisis de las relaciones métricas de los rosetones se va complicando en exceso, y lo mismo ocurre con las expresiones explicitas de las relaciones entre los radios de las circunferencias que los determinan. Sin embargo, la construcción de polígonos que tienen el doble del número de lados que uno dado es muy sencilla y el diseño del rosetón correspondiente también es fácil aplicando el método que se acaba de describir. La figura 8, muestra la construcción del rosetón de 16 pétalos. Una vez que se ha dibujado el polígono regular de 16 lados, al lado *IJ* se le adjuntan dos radios de circunferencia para obtener *IK*, uniendo *K* con *O* y trazando la paralela a *OK* por *J* se obtiene el segmento *TI*, que es el radio de las circunferencias tangentes.

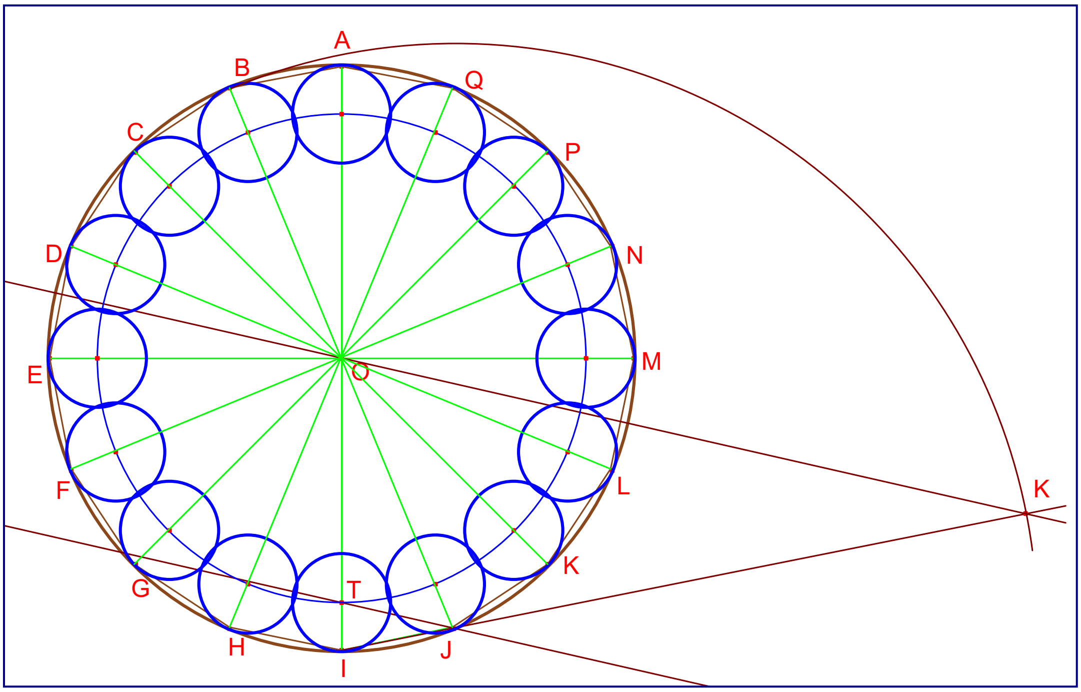


Figura 8. Rosetón de 16 construido por el procedimiento métrico general.

Rosetones gaussianos

Los rosetones que más abundan en las catedrales son los de tres, cuatro y seis pétalos, porque son los más fáciles de construir; también son frecuentes los de ocho y doce pétalos, que se obtienen fácilmente a partir de los anteriores; los de cinco y diez pétalos están menos presentes, sin duda porque la construcción del pentágono regular, que es el polígono básico, no es tan evidente; los rosetones de mayor tamaño tienen dieciséis, veinte o veinticuatro pétalos, son muy ornamentales, suelen estar ubicados en las fachadas principales, y se obtienen a partir de los polígonos regulares de ocho, diez y doce lados duplicando este número. No aparecen rosetones con mayor número de pétalos y la razón es la siguiente: al aumentar el número, el radio de la circunferencia de centros, R_c, está muy cercano al radio de la circunferencia exterior, R_e, y, en consecuencia, las circunferencias de los pétalos se tornan diminutas, son difíciles de tallar y, además, pierden belleza, aunque se suelen combinar con rosetones interiores concéntricos y con la mitad de pétalos.

Como señala Crespo Crespo (2005), el radio de la circunferencia de centros, R_c, se puede determinar de forma aproximada a partir del radio exterior, R_e, mediante la siguiente relación:

$$R_c = \frac{R_e}{1 + sen(\pi / n)}$$

Sin embargo, las posibilidades matemáticas no son las mismas que las del dibujo geométrico y, además de las limitaciones impuestas por el número de pétalos, la imposibilidad de dibujar ciertos polígonos regulares de forma exacta con regla y compás, sin duda, ha impedido que se construyeran rosetones basados en polígonos regulares no construibles de forma exacta. El teorema de Gauss especifica qué polígonos regulares se pueden diseñar con regla y compás de forma exacta, y cuáles no. El enunciado es éste:

Un polígono regular de M lados se pueden construir "de forma exacta" con regla y compás sí y sólo sí:

- $M=2^k$
- *M es un número primo de la forma* $M=2^k+1$

M es un número compuesto de factores diferentes del tipo anterior, es decir, $M=2^k\cdot(2^r+1)\cdot(2^s+1)\cdot\ \ldots$, *siendo* 2^r+1, 2^s+1, … *números primos diferentes.*

Nosotros denominamos rosetones gaussianos a aquellos que se construyen sobre un polígono regular que se puede dibujar con regla y compás de forma exacta, y teniendo en cuenta el teorema de Gauss el número de pétalos de estos rosetones tiene que ser alguno de los de la siguiente sucesión: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24,... Salvo un rosetón de siete pétalos, que se encuentra en Notre Dame de París, no aparecen rosetones de 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22 y 23 pétalos, y la razón es obvia: No se pueden construir de forma exacta lo polígonos regulares de este número de lados. Sin embargo, los rosetones de 15 y 17 pétalos, que son gaussianos y, por tanto, se pueden construir, tampoco aparecen en las catedrales góticas, aunque por razones diferentes. Por una parte, es casi seguro que los pitagóricos ya supieran construir el pentadecágono regular, ya que su ángulo central es 24º, y este se obtiene como la diferencia entre el doble de la amplitud del ángulo central del pentágono y el ángulo central del triángulo equilátero, pero seguramente, lo mismo que sucede hoy en día, esta construcción, que se reproduce en la figura 9, no era lo suficientemente popular como para aplicarla, y aunque los canteros de la época la conocieran, también es razonable pensar que no lo hicieron porque el trazado del rosetón de 16 pétalos es mucho más sencillo, y las diferencias del efecto ornamental y luminoso se consideraran inapreciables. Un rosetón de 15 pétalos aparece en la fachada principal de la iglesia de St. Saviour's de Dublín, pero esta iglesia se construyó a finales del siglo XVIII.

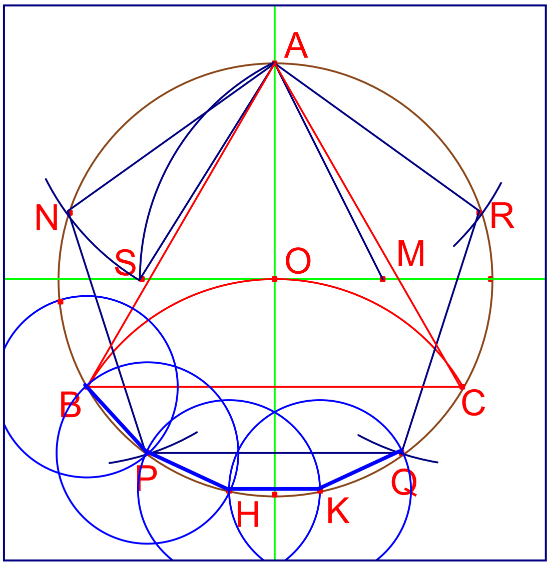


Figura 9. Pentadecágono regular.

Por otra parte, la razón de que no aparezcan rosetones de 17 lados es otra, pero también muy simple: En esa época no se sabía construir estos polígonos regulares de forma exacta con regla y compás. Así, por ejemplo, la primera piedra de la catedral de Burgos se puso el 20 de julio de 1221, mientras que el primer polígono regular de 17 lados lo construyó Gauss en 1796.

Tomando como referencia esta catedral (una de las más bellas del mundo, que tiene un esquema de cruz latina con unos 108 metros de longitud y 61 de anchura, y un claustro de planta cuadrada de unos 40 metros de lado) en ella se encuentran rosetones de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, y 20 pétalos distribuidos por: la fachada principal (Puerta de Santa María), las fachadas laterales (Puerta del Sarmental, de la Coronería y de la Pellejería) y el claustro; la nave principal, las dos naves laterales y el crucero; el transepto (crucero) y varias de las 19 capillas que están incrustadas de forma radial en el cuerpo de la cruz latina y en el claustro. De ellos hay dos que se distinguen por su tamaño y belleza:

- El de la fachada principal es un rosetón compuesto, que consta de dos coronas circulares de 12 pétalos cada una, y que da luz a la nave central: los pétalos de la exterior son a su vez rosetones de cuatro pétalos y la interior de tres pétalos, de los que salen unos nervios que forman una estrella de David, en la que se inscribe un rosetón de 6 pétalos.
- En la fachada de la Puerta del Sarmental aparece otro rosetón compuesto, que tiene dos coronas de 20 pétalos y otras dos de 10.

En la fotografía de la figura 10 se puede apreciar el gran rosetón que está situado bajo la bóveda del crucero, en la fachada de la Puerta del Sarmental. Este rosetón es muy ornamental e ilumina la nave del transepto sur, mide seis metros de diámetro y aporta una intensa iluminación al interior del crucero, como se puede apreciar en la fotografía. Debajo del gran rosetón se muestran dos arcadas, de las 38 que tiene el triforio y que circundan la nave central y el crucero, que están decoradas con tres rosetones de tres pétalos y cuatro rosetones de cuatro pétalos. En esta fotografía también se pueden apreciar dos de las trompas que transforman la planta cuadrada en la base octogonal sobre la que se apoya el cimborrio, el arranque de éste y la suntuosidad del templo. Esta catedral es Patrimonio de la Humanidad y se pueden ver imágenes suyas, que sin duda serán motivadoras por su belleza, en muchas webs, ésta es una de ellas:

www.archiburgos.org/catedral/visita.htm

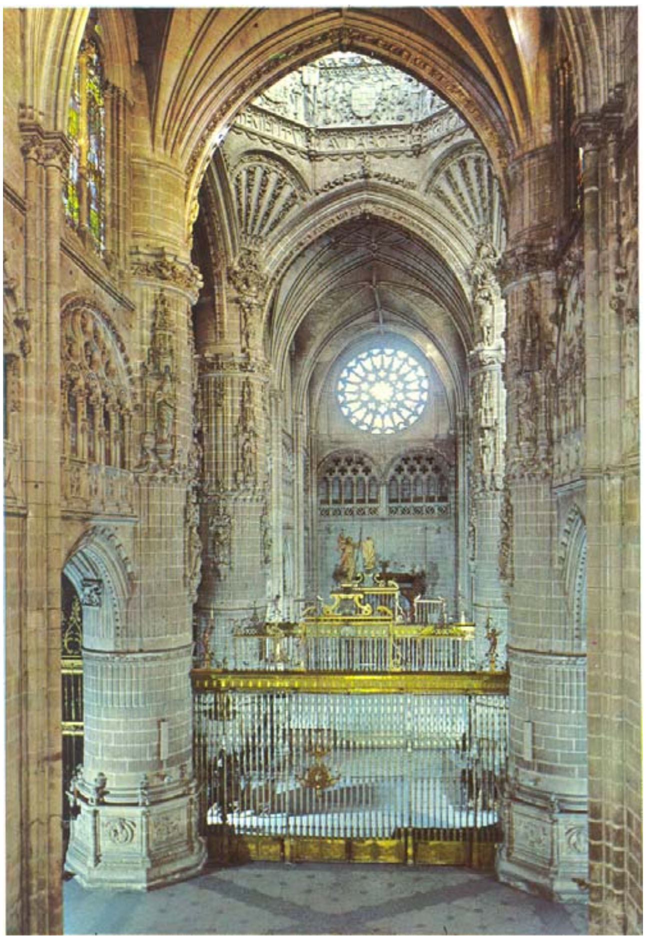


Figura 10. Rosetón en la fachada de la Puerta del Sarmental. Catedral de Burgos.

Conclusiones

Tras la descripción que se acaba de realizar sobre la construcción de los rosetones gaussianos y de las razones históricas e impedimentos de construcción, cabe destacar la importancia que tienen estas construcciones geométricas dentro de la instrucción formativa que se lleva a cabo tanto en Dibujo Técnico como en Matemáticas, ya que las dimensiones histórica, artística y aplicada implican que estos contenidos sean motivadores por sí mismos y, en consecuencia se puedan producir aprendizajes de Geometría más significativos. Por otra parte, se descubren y se describen dos procedimientos generales de construcción de rosetones (el método de las tangencias y el método métrico de la proporción) que son aplicables a polígonos regulares de cualquier número de lados. La aplicación de cualquiera de ellos es muy sencilla, si bien la obtención del segundo método requiere establecer unas relaciones métricas un poco más complicadas, y la dificultad intrínseca de la obtención del método estaría en el cuarto nivel de Van Hiele como indican Gutiérrez y Jaime (1990). Finalmente, se establece el concepto de rosetones gaussianos y se describe una discusión explicativa sobre las posibles causas de la construcción real de estos rosetones en las catedrales góticas.

Bibliografía

- Boyer, C.B. (1999): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.
- Brousseau, G. (*1986*): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7.2, 33-115.
- Castelnuovo, E. (1981): La Geometría. Barcelona: Ketres Editora.
- Clemens, D.H. y Battista, M. T. (1992): Geometry and Spatial Reasoning. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grows Edt. Macmillan Publishing COMPANY. NEW YORK.
- Crespo Crespo, C. (1999): La historia de la geometría como elemento motivador y ejemplificador en la enseñanza. Panel presentado en CAREM I (I Conferencia Argentina de Educación Matemática) Buenos Aires.
- Crespo Crespo, C. (2005): La geometría en el arte: los vitrales de las catedrales góticas. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (Vol. 18). México. (En prensa)
- Euclides (1991): Elementos. Libros I-IV. Madrid: Gredos.
- Gieseck, F.E. (1995): Dibujo Técnico. Limusa. México
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la Geometría: el modelo de Van Hiele. En Teoría y práctica en Educación Matemática. S. Llinares y M.V. Sánchez. Alfar. Utrera, Sevilla.
- Heilbron, J. L. (1998): Geometry Civilized. Oxford: Claredon Press.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2002): Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. Enseñanza de las Ciencias. ISNN0212-4521, Nº 21 (1), pp. 49-63. Barcelona.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2004): Textos argumentativos. UNO. Vol. 35, Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.
- Lozano, R. L. (1987): El problema de Apolonio. Bol. Soc. Cast. Nº 14, pp. 13-41.

Madrid.
- Ortega, I. y Ortega, T. (2004): Los diez problemas de Apolonio. SUMA. Vol. 46 pp. 59-70 Madrid. ISSN:1130-488X
- Ortega, T. (2005): Conexiones Matemáticas y dinamizadores de aprendizajes. Grao. Barcelona (En prensa).
- Pérez, J. (1985): La catedral de Burgos. Artes Gráficas Santiago Rodríguez, S.A. Burgos (España).ISBN: 84-7138-436-1.
- Puig, P. (1976): Curso de Geometría Métrica. Herederos de Pedro Puig Adam. Editor: Biblioteca MATEMÁTICA, S.L. MADRID. ISBN 84-7029-024-X.
- Ramos, C. M. (2004, junio): Félix Bunge: El Señor de los vitrales. En Revista de La Nación. (pp.67-70) Buenos Aires, Argentina: La Nación.
- Rodríguez, F. J. y Álvarez, V. (1990): Dibujo Técnico. Editorial Donostiarra. San Sebastián.
- Socas, M. (1997): Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. En La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria. Edit. Rico, L. y otros. Cap. V, pp. 125-154 Hórsori Editorial. Barcelona.

Tomás Ortega del Rincón, es Licenciado y Doctor en Matemáticas y Catedrático de Institutos Nacionales de E. Media.
Desde 1975 hasta 1990 ha trabajado en Institutos Nacionales de Enseñanza Media y, a partir de ese año en la Universidad de Valladolid en las titulaciones de: Físicas, Educación y Psicopedagogía.
Ha participado en más de 20 cursos de posgrado, en 14 proyectos subvencionados y asistido a más de 30 congresos.
Ha dirigido tres Tesis Doctorales, impartido más de 20 conferencias, cursos o Seminarios y es miembro de doce tribunales de tesis y emisión de informes de experto.
Ha sido miembro de Comisiones, en tres casos al cuerpo de Titulares de Escuela Universitaria y en otros tantos al cuerpo de Catedráticos de Escuela Universitaria.
Tiene más de 90 publicaciones y trabajos de Investigación y reviewer de artículos de 20 trabajos. Ha ejercido numerosos cargos en la dirección de Sociedades, miembro de la Comisión de Educación de la RSME, director del IICE de la Universidad de Valladolid y miembro del Comité Científico de varios Simposios.
Dpto. Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática.
Facultad de Educación.
Campus Miguel Delibes.
47011-Valladolid. Tfno. 983.184.472.
Email: ortega@am.uva.es

Inés Ortega Cubero, es Licenciada en Bellas Artes e Historia del Arte por la Universidad de Salamanca y Profesora de Educación Secundaria.
Master en Museología (Fundación Carolina y Universidad de Valladolid.
En la actualidad está desarrollando la investigación de su tesis doctoral en Didáctica de la Educación Plástica. Ha publicado cuatro artículos.
IES Giner de los Ríos (Segovia).
Didáctica de la expresión musical. Plástica y corporal.
E. U. Virgen de la Fuencisla (Segovia).
Email: inesplicable@hotmail.com

Elena Ortega Cubero, es Arquitecto Superior por la Univesidad de Valladolid.
Tiene dos publicaciones
C/ San Luis 7, 8º Izq. 47004-Valladolid
Email: elenao@usuarios.retecal.es

Cecilia Crespo Crespo, es Profesora titular de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires (Argentina). Ha asistido a numerosos congresos nacionales e internacionales presentando comunicaciones y talleres de matemáticas. Tiene numerosos ensayos y artículos de investigación.
Email: ccrespo@sinectis.com.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 47 - 52
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

Introducción

Presentamos hoy una actividad que sabemos que se hace, con variantes, en muchos centros, pero todas con un objetivo común: ofrecer a los alumnos y alumnas actividades que complementen lo que hacemos en nuestras clases, explicando el currículo que la sociedad nos encomienda.

Se trata de un concurso-juego para ser desarrollado en poco tiempo y de una forma competitiva, aunque sabemos que no todos los profesores comparten la idea de competición. En este caso, esos aspectos se pueden minimizar o incluso hacerlos desaparecer.

Además de esa característica competitiva que estimula a algunos, en nuestro centro se ha logrado "enganchar" a un amplio conjunto de alumnos de Enseñanza Secundaria (12-17 años) ofreciendo a todos un premio que consiste en una visita a un parque acuático que existe en la Isla y que constituye una delicia para ellos y para los profesores que les acompañan. Como puede verse en las bases que presentamos, tratamos de lograr la mayor participación posible, si bien en algún curso tuvimos que restringirla para que no "se nos fuera de las manos"

El campeonato, que llamamos TOJUMAT, sacado de TOrneo de JUegos MATemáticos, lo anunciamos en el mes de enero (recuérdese que en estas latitudes el curso se inicia en el mes de septiembre y acaba en junio) colocando carteles en los lugares destinados a ello, comunicándolo a los alumnos en las clases de Matemáticas y animándoles a formar los equipos que han de ser de dos o tres personas. Cada equipo elige un nombre por el que se les reconocerá a partir del momento en que se inscriba, se reúne a los participantes para explicarles las reglas del juego y, una vez elegido el día de comienzo, se realiza la primera partida. Hacemos una partida por semana en la media hora del recreo y así durante cinco semanas. La gran final se juega el 12 de mayo, día escolar de las Matemáticas en España. Al final del curso, ¡hala! todos al parque acuático y hasta el curso siguiente.

Ofrecemos en esta revista las bases por las que se rige el campeonato, (que cada cual lo debe adaptar a sus circunstancias) y un conjunto de cuatro pruebas por si alguien se anima a empezar a llevarlo a cabo. En próximos números presentaremos más pruebas. Tratamos de combinarlas para que respondan a distintos modelos.

Departamento de Matemáticas
IES Viera y Clavijo
La Laguna – Tenerife

TOJUMAT

(**TO**rneo de **JU**egos **MAT**emáticos)

El torneo más divertido

Normas generales y compromisos

1.- En este Torneo se compite con la inteligencia, no con la fuerza.

2.- Las pruebas se realizarán siempre durante el recreo de los miércoles.

3.- La prueba de cada partida se explicará, en general, el mismo día de la competición. Cuando el juego de la semana siguiente se explique la anterior, los equipos pueden entrenar a lo largo de la semana para estar "en forma" el día de la competición.

4.- Para que el equipo quede constituido el día de Torneo, basta con que esté presente uno de sus componentes.

5.- Puesto que el tiempo de competición es limitado, si un equipo se retrasa más de cinco minutos, perderá la prueba si el otro equipo está presente y éste se anotará los tres puntos en juego.

6.- Los equipos que rivalizan en cada prueba no lo sabrán hasta el momento de iniciarse el juego.

7.- Hay un Comité de Competición encargado de resolver los problemas que puedan ir surgiendo. Ellos serán los árbitros de las pruebas. Si algún equipo no está de acuerdo con alguna de sus decisiones, lo comunicará por escrito al Departamento de Matemáticas que será quien resuelva tras escuchar a las partes.

8.- Si un equipo no se presenta en dos ocasiones (no necesariamente seguidas), quedará eliminado de la competición.

9.- Para la primera prueba, cada equipo ha de construir un tablero, de las características que se le indique, con sus correspondientes fichas. Se da libertad a la creatividad de cada equipo. Los equipos que presenten tablero, ganarán un punto y el Comité de Competición otorgará otros tres puntos a los dos que considere más originales.

10.- Después de cada prueba se pondrá en el Tablón de Matemáticas las puntuaciones que tienen acumuladas cada uno de los equipos. El que gane la prueba, sumará tres puntos, si empatan, un punto para cada equipo.

12.- Se agradece a todos los jugadores su participación pero no debemos perder de vista que se trata de pasar un rato agradable por lo que no se permitirán actitudes que no sean deportivas.

13.- Al final del Torneo habrá al menos una sorpresa para los participantes que lleguen al final de la competición.

La Laguna, enero de 2005

Prueba 1

El solitario es un buen juego para empezar. Sus reglas son sencillas y es estimulante el reto que supone para cada equipo. Además se presta a que se pida a los equipos participantes que preparen un tablero y aporten las fichas para jugar. Se les anuncia desde una semana antes, indicándoles cómo es el tablero y dejando a la creatividad de cada equipo los materiales, adornos y el tipo de ficha que vayan a utilizar el día de la prueba. El Comité de Competición toma nota de los equipos que han traído el tablero y sólo por eso les sumará un punto en la clasificación pero, además, elegirá aquellos tableros más originales o elaborados y anotará tres puntos al equipo autor, como si hubieran ganado una prueba.

Departamento de Matemáticas
IES Viera y Clavijo
La Laguna – Tenerife

TOJUMAT(TOrneo de JUegos MATemáticos)

El solitario inglés completo. Un juego para pensar

No se conoce con certeza el origen de este juego, pero sus reglas son tan simples que hacen sospechar que se jugaba desde tiempos antiguos, aunque, tal vez, no en las versiones que hoy se conocen. La primera referencia escrita del juego tal y como se practica actualmente la hizo Leibnitz (1646-1716) en 1710. Dice del juego que “sirve para perfeccionar el arte de pensar”

Te lo ofrecemos hoy para que perfecciones tu arte de pensar.

Normas para el desarrollo de la prueba

1.- Cada equipo jugará tres veces alternativamente en el tablero que está en la mesa.
2.- Se dispone de tres minutos como máximo para cada jugada que serán controlados por el otro equipo.
3.- Al final de cada partida se contarán las fichas que queden en el tablero y se anotan en el **Cuadro de Control**
4.- Al final de las tres partidas se suman las fichas de cada equipo.
5.- Gana la prueba el equipo que haya obtenido MENOS puntos.

Equipo A: ………………………………………………
Equipo B: ………………………………………………
Cuadro de Control

	Equipo A	Equipo B
Primera partida		
Segunda partida		
Tercera partida		
Total		

Equipo Ganador: ………………………………………………
Firma de los participantes:

Prueba 2

Departamento de Matemáticas
IES Viera y Clavijo
La Laguna – Tenerife

TOJUMAT (**TO**rneo de **JU**egos **MAT**emáticos)

SUMA 100

Normas para el desarrollo de la prueba

1.- Se sortea qué equipo empieza la partida. El sorteo se hace al comienzo de cada una de las cinco partidas de que consta la prueba.
2.- El equipo que empieza escoge un número del 1 al 8 (inclusive) y lo coloca en la columna de la primera partida.
3.- El otro equipo escoge un número entre el 1 y el 8 (inclusive), lo coloca en la columna de la primera partida y a la derecha pone el resultado de sumarlo con el anterior
4.- Se continúa alternativamente siempre sumando el número elegido a la suma anterior

¿Qué equipo gana la partida?
El primero que llegue al 100

¿Qué equipo gana la Prueba?
El que gane al menos tres de las 5 pruebas

Equipo A: ……………………………….… Equipo B: …………………………………..

Equipos	1ª Partida		2ª Partida		3ª Partida		4ª Partida		5ª Partida	
	1er equipo=		1er equipo=		1er equipo=		1er equipo=		1er equipo=	
	Nº	SUMA	Nº	SUMA	Nº	SUMA	Nº	SUMA	Nº	SUMA
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										
1º										
2º										

Ganadores:

Primera Partida	Segunda Partida	Tercera Partida	Cuarta Partida	Quinta Partida	Equipo ganador

Prueba 3

Departamento de Matemáticas
IES Viera y Clavijo
La Laguna – Tenerife

TOJUMAT (**TO**rneo de **JU**egos **MAT**emáticos)

2005 año del cuarto centenario de El Quijote

(Para esta prueba puedes usar una calculadora)

El enamorado don Quijote quiere imitar a uno de sus héroes de los libros de caballería: el famoso Amadís de Gaula que, según dice nuestro hidalgo, fue uno de los más perfectos caballeros. Y para dejar clara su admiración continúa diciendo: *No he dicho "fue uno"; fue el solo, el primero, el único, el señor de todos cuantos hubo en su tiempo en el mundo*.

Pues bien, en el capítulo XXVI de la primera parte, tras encomendar a su escudero que lleve una carta suya a Dulcinea, él se queda en la Sierra Morena para, entre otras cosas, rezar y rezar, igual que hizo su héroe.

Improvisó un rosario con una tira que cortó a las faldas de la camisa y rezó un millón de avemarías.

Obviamente, tal cantidad de avemarías no se rezan en un plis-plas por muy deprisa que lo haga. Suponiendo que tarde diez segundos en rezar un avemaría, la siguiente prueba consiste en averiguar:

¿Cuántos días y horas tardará don Quijote en hacer ese rezo suponiendo que lo haga sin parar?

Si suponemos que para un total de siete horas y treinta minutos cada día para comer y dormir, ¿cuánto tardará entonces?

Primer resultado: ………..   Segundo resultado: ………..

Nombre del equipo: ………………………………………………………

Prueba 4

Departamento de Matemáticas
IES Viera y Clavijo
La Laguna – Tenerife

TOJUMAT (**TO**rneo de **JU**egos **MAT**emáticos)

Entretenimiento con los números cafres

Definición: ***Un número se llama cafre si la cuarta parte de su mitad es múltiplo de 7***

Normas para el desarrollo de la prueba

1.- A continuación se da un conjunto de números y cada equipo debe señalar cuáles son cafres.

400	111	144	221	168	156	280
360	1040	661	336	560	421	448
248	2072	5808	56	8232	49781	
6610	472	98	4480	1120	672000	

2.- Se dispone de diez minutos. Prohibida la calculadora.

3.- ¿Qué equipo gana la prueba? Aquel que acabe antes, sin cometer ningún error.

Si se acaba el tiempo y ninguno de los equipos ha terminado, entonces ganará el que más números cafre tenga conseguidos. Si tienen el mismo número de cafres descubiertos, entonces se considerará empatada la prueba (un punto para cada equipo).

4.- Todas las operaciones que se necesiten hacer tienen que estar en el papel que se les ha dado.

5.- Cuando se haya terminado, mostrar el resultado a algún miembro del Comité de Competición para hacer la comprobación y adjudicar los puntos al equipo ganador.

Nombre del equipo: ………………………...

Resultado obtenido: ……………..

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 53 - 90
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

La Educación Matemática en Chile

Ismenia Guzmán Retamal

Presidenta Nacional de la Sociedad Chilena de Educación Matemática

Vicepresidenta de FISEM

1. Presentación del Sistema Escolar de Chile

El sistema educacional chileno tiene una organización descentralizada de los establecimientos escolares, la administración esta a cargo de instituciones municipales y particulares que ante el Estado tienen la responsabilidad de mantener en funcionamiento el sistema.

De este modo el sistema está formado por establecimientos subvencionados (municipales y particulares), particulares pagados y de corporaciones de administración delegada. Atiende alumnos de todos los niveles, es decir, educación parvularia, general básica y media.

En 1998 el país contaba con 10 621 establecimientos de los cuales, el 59.6% correspondía a establecimientos municipales, el 28.8% a establecimientos particulares subvencionados, el 10.9% a establecimientos particulares pagados y el resto a establecimientos de corporaciones de administración delegada. Como se constata el mayor esfuerzo lo hace el estado, manteniendo el 89% de los establecimientos del país, los privados no alcanzan a mantener el 11% de ellos.

2. Niveles de enseñanza

Como ya mencionamos, los niveles de enseñanza son tres, Enseñanza Parvularia, Enseñanza Básica (con dos ciclos de 4 años cada uno) y Enseñanza Media (4 años).

La Enseñanza Parvularia está destinada a niños (as) hasta 5 años de edad y no es obligatoria. Comprende tres grados: educación parvularia propiamente tal, transición menor y mayor. Ella es impartida, por un lado, por establecimientos subvencionados, establecimientos municipales y establecimientos particulares pagados; por otro lado, por la Junta Nacional de Jardines Infantiles (JUNJI) que depende del Ministerio de Educación y la Fundación Nacional para el Desarrollo Integral del Menor (INTEGRA), que depende del Ministerio del Interior (reciben bebés desde 84 días).

La Enseñanza Básica es obligatoria, comprende ocho años (6 a 14 años de edad), el primer ciclo básico de 1º a 4º año. Y el segundo ciclo de 5º a 8º. La Enseñanza Media (14 a 18 años), cuatro años de duración, también es obligatoria y presenta dos modalidades: humanístico-científico y técnico-profesional.

El sistema educacional chileno posee una alta cobertura, la Enseñanza Básica, en 1998 alcanzó un 98.3% y la educación media alcanzó un 86.9%.

En 1997 comenzó a implementarse la extensión de la jornada escolar cuyo objetivo es la redefinición del tiempo de duración de la jornada escolar de los establecimientos subvencionados, así como la organización interna de ésta en períodos de trabajo y descanso a lo largo del día.

La eficiencia interna del sistema se aprecia por indicadores que se refieren a la tasa de aprobación, reprobación y abandono. Respecto a estos indicadores en 1998. La Educación Básica alcanzó la tasa de aprobación de 95%, la tasa de reprobación un 3.5% y la tasa de abandono un 1.5%.

En la Enseñanza Media, la tasa de aprobación fue igual a 87.1%, la de reprobación equivalente a un 7.9% y la de abandono a un 5%. El tiempo promedio de egreso de los alumnos de la Educación Básica, entre 1988–1998, fue de 9.6 años. En la Educación Media humanista-científica entre 1993–1998, en promedio el tiempo de egreso alcanzó los 5.2 años.

La escolaridad promedio de la población es de 9.9 años, existiendo una diferencia en este indicador entre personas de distinto sexo. Así, los hombres presentan una escolaridad promedio de 9.6 años y las mujeres de 10.6 años (información de 1998).

En Chile laboran en el sistema escolar alrededor de 135 mil docentes: el 85% de ellos se desempeña en el sector subvencionado, el restante 15% en el sector particular. Desde el punto de vista legal, una ley de 1996, norma los requisitos, deberes, derechos y obligaciones de carácter profesional para todos los profesionales de la educación del sector subvencionado. Los profesores del sector particular se rigen por las normas del Código del Trabajo.

Una de las prioridades de la Reforma Educacional se refiere al fortalecimiento de la profesión docente.

3. Planes y Programas de Matemáticas

Los programas de matemáticas tanto en Educación Básica como Media contienen una presentación, los objetivos fundamentales, los contenidos mínimos del nivel, los aprendizajes esperados. También contienen actividades genéricas, sugerencias metodológicas y bibliografía.

En Enseñanza Básica las actividades genéricas contemplan cuatro ejes temáticos: números, operaciones aritméticas, formas y espacio y resolución de problemas. La implementación didáctica del programa requiere una articulación permanente de los contenidos de los cuatro ejes, para promover aprendizajes interrelacionados, que correspondan a una visión integrada del quehacer matemático.

El eje **Resolución de problemas** tiene un carácter transversal y está desarrollado a lo largo de los tres ejes restantes. A partir del quinto año básico se trabaja por unidades.

A continuación exponemos un resumen de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios por cursos.

3.1 Programa de Educación Matemática para la Enseñanza Básica

Recordemos que la Enseñanza Básica en Chile tiene una duración de 8 años. Y está dividida en dos ciclos: El ciclo básico contiene los niveles NB1 y NB2, el segundo ciclo va del Quinto Año al Octavo año Básico.

El nivel NB1 corresponde a los cursos Primero y Segundo Año Básico, la edad es de 6 y 7 años, siempre que se hayan cumplido los 6 años antes del mes de marzo. Así en este nivel hay niños entre los 6 y 8 años.

En este trabajo daremos un resumen de los Objetivos Fundamentales y de los Contenidos Mínimos obligatorios de cada curso.

Objetivos Fundamentales Verticales del Nivel NB1: Primero y Segundo Año Básico

Números

- Identificar e interpretar la información que proporcionan los números presentes en el entorno y utilizar números para comunicar información en forma oral y escrita, en situaciones correspondientes a distintos usos.

- Comprender el sentido de la cantidad expresada por un número de hasta 3 cifras, es decir, relacionar estos números con la cantidad que representan a través de acciones de contar, medir, comparar y estimar, en situaciones significativas.
- Reconocer que los números se pueden ordenar y que un número se puede expresar de varias maneras, como suma de otros más pequeños.
- Apropiarse de características básicas del sistema de numeración decimal:
  - leyendo y escribiendo números en el ámbito del 0 al 1 000, respetando las convenciones establecidas
  - reconociendo, en números de dos y tres cifras, que cada dígito representa un valor que depende de la posición que ocupa.

Operaciones aritméticas

- Identificar a la adición (suma) y a la sustracción (resta) como operaciones que pueden ser empleadas para representar una amplia gama de situaciones y que permiten determinar información no conocida a partir de información disponible.
- Realizar cálculos mentales de sumas y restas simples, utilizando un repertorio memorizado de combinaciones aditivas básicas y estrategias ligadas al carácter decimal del sistema de numeración, a propiedades de la adición y a la relación entre la adición y la sustracción.
- Realizar cálculos escritos de sumas y restas en el ámbito de 0 a 1 000, utilizando procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números y en la relación entre la adición y la sustracción, usando adecuadamente la simbología asociada a estas operaciones.
- Formular afirmaciones acerca de las propiedades de la adición y de la relación entre adición y sustracción, a partir de regularidades observadas en el cálculo de variados ejemplos de sumas y restas.

Formas y espacio

- Reconocer la existencia de una diversidad de formas en los objetos del entorno y representar algunas de ellas de manera simplificada mediante objetos geométricos, que pueden ser curvos o rectos, de una dimensión (líneas), de dos dimensiones (figuras planas) o de tres dimensiones (cuerpos geométricos).
- Utilizar la imaginación espacial para anticipar y constatar formas que se generan a partir de otras, mediante procedimientos tales como yuxtaponer y separar diversas formas geométricas.
- Identificar y comparar cuadrados, triángulos, rectángulos, cubos y prismas

rectos, manejando un lenguaje geométrico básico.

- Comunicar e interpretar información relativa al lugar en que están ubicados objetos o personas (posiciones) y dar y seguir instrucciones para ir de un lugar a otro (trayectoria).

Resolución de problemas

- Manejar aspectos básicos de la resolución de problemas, tales como: formular el problema con sus propias palabras, tomar iniciativas para resolverlo y comunicar la solución obtenida.
- Tener confianza en la propia capacidad de resolver problemas.
- Resolver problemas relativos a la formación y uso de los números; a los conceptos de adición y sustracción, sus posibles representaciones, sus procedimientos de cálculo; a las características y relaciones de formas geométricas de dos y tres dimensiones; y a la ubicación y descripción de posiciones y trayectorias.
- Resolver problemas, abordables a partir de los contenidos del nivel, con el propósito de profundizar y ampliar el conocimiento del entorno natural, social y cultural.

Contenidos mínimos NB1

Números

a) Lectura de números: nombres, secuencia numérica y reglas a considerar (lectura de izquierda a derecha, reiteraciones en los nombres).

b) Escritura de números: formación de números de dos y tres cifras y reglas a considerar (escritura de izquierda a derecha, la posición de cada dígito).

c) Usos de los números en contextos en que sirven para identificar objetos, para ordenar elementos de un conjunto, para cuantificar, ya sea contando, midiendo o calculando.

d) Conteo de cantidades: de uno en uno, y formando grupos, si procede (de 10, de 5, de 2).

Los temas anteriores se ven en los 4 semestres.

e) Medición de longitud, volumen, masa (peso) y reconocimiento de unidades correspondientes a cada una de estas magnitudes (metro, centímetro; litro, centímetro cúbico; kilogramo, gramo).

f) Comparación de números y empleo de las relaciones "igual que", "mayor que" y "menor que".

g) Estimación de una cantidad o medida, a partir de la visualización y manipulación tanto de conjuntos de objetos como de magnitudes físicas.

h) Comparación de cantidades y de medidas utilizando relaciones de orden entre los números correspondientes.

i) Transformación de números por aplicación reiterada de una regla aditiva y estudio de secuencias numéricas para determinar regularidades (Ej: números terminados en 0 o en 5, números pares e impares).

j) Descomposiciones aditivas de un número y representación con objetos concretos o dibujos. (Ej: 9 como 4 + 5, como 3 + 6, etc., 23 como 19 + 4, como 10 + 13, etc.).

k) Variación del valor de un dígito de acuerdo a la posición que ocupa: centenas, decenas, unidades y transformación de un número por cambio de posición de sus dígitos.

l) Composición y descomposición aditiva de un número en un múltiplo de 100, un múltiplo de 10 y unidades. (Ej: 324 = 300 + 20 + 4).

Nota:

El tema e) se ve a partir del 2º semestre.
El tema i) se ve en el 2º y 4º semestre.
El tema i) se ve en el 1º y 2º semestre.
El tema j) se ve en el 2º y 4º semestre.
El tema l) se ve a partir del 2º semestre.
El resto de los temas se ven durante los 4 semestres, es decir, en los cursos de 1º y 2º Básico.

Operaciones Aritméticas

a) Simbología asociada a adiciones y sustracciones escritas.

b) Cálculo escrito de sumas y restas con números de dos y tres cifras, con complejidad creciente de las relaciones entre ellos:

- para la adición, utilizando estrategias como la descomposición aditiva de cada sumando. Ej. 40 +1 3 = 40 + 10 + 3; 57 + 38 = 50 + 30 + 7 + 8.

En forma similar al sumar números con tres cifras.

Ej. 125 + 24 = 100 +20 + 5 + 20 + 4; 237 + 452 = 200 + 30 + 7 + 400 + 50 + 2.

- para la sustracción, completando decenas y centenas a partir del sustraendo. Ejemplos: 54 - 30 como 30 + = 54 ; 30 + 20 + 4 = 54; 50 - 28 como 28 + = 50 ; 28 + 2+ 20 = 50.

c) Estimación de resultados de adiciones y sustracciones a partir del redondeo de los términos involucrados.

d) Comparación de variados ejemplos de adiciones con el mismo resultado, correspondientes a cambio de orden de los sumandos (conmutatividad) y a la secuencia en que se realizan las adiciones de más de dos sumandos (asociatividad) y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de estas propiedades.

e) Comparación de variados ejemplos de adiciones y sustracciones en que uno de los términos es 0 (elemento neutro) y formulación de afirmaciones respecto al comportamiento del 0 en sumas y restas.

f) Comparación de variados ejemplos de adiciones y sustracciones que corresponden a acciones inversas como agregar 5 y quitar 5 y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de la relación inversa entre adición y sustracción.

Nota:

El tema a) se ve en el 2º y 4º semestre.
El tema b) en el 3º y 4º semestre.
El tema c) en el 4º semestre.
El tema d) en el 2º y 4º semestre.
Los temas e) y f) en el 3º semestre.

Formas y Espacio

a) Asociación entre objetos del entorno y formas geométricas (líneas curvas y rectas, cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, cubos, prismas rectos, cilindros y esferas), utilizando los nombres geométricos correspondientes.

b) Número de dimensiones de las formas geométricas: distinción entre líneas (una dimensión), figuras planas (dos dimensiones) y cuerpos (tres dimensiones).

c) Reconocimiento del carácter curvo o recto en las formas geométricas de una y dos dimensiones y del carácter curvo o plano, en las formas de tres dimensiones.

d) Identificación de lados, vértices, ángulos, en una figura plana y descripción de cuadrados, rectángulos y triángulos considerando número y longitud de los lados y presencia de ángulos rectos.

e) Exploración de figuras planas empleando materiales de apoyo (varillas, geoplanos, redes de puntos y otros); trazado y armado de cuadrados, rectángulos y triángulos.

f) Formación y transformación de figuras planas mediante yuxtaposición y corte de formas cuadradas, triangulares y rectangulares.

g) Identificación de caras, aristas y vértices en cuerpos geométricos y descripción de cubos y prismas rectos con bases de distintas formas, considerando número de aristas y de vértices, número y forma de las caras y percepción de la perpendicularidad entre ellas.

h) Exploración de cuerpos geométricos; modelado y armado de cubos y prismas rectos.

i) Transformación de cuerpos geométricos mediante yuxtaposición y separación de cubos y prismas rectos.

j) Posiciones y trayectorias de objetos: descripción considerando referentes, direcciones y cambios de dirección.

Nota:

Los temas a), b) y c) se ven en el 1º semestre.

Los temas d), e) y f) en el 3º semestre.

Los temas g), h) e i) se ven en el 4º semestre.

El tema j) se ve en el 2º semestre.

Resolución de Problemas

En relación con la formulación de problemas atingentes a los contenidos

a) Descripción del contenido de situaciones problemáticas mediante: relatos, dramatizaciones, acciones con material concreto, dibujos.

b) Formulación e identificación de preguntas asociadas a situaciones problemáticas dadas.

c) Búsqueda de procedimientos y aplicación consistente de ellos en la resolución de problemas.

d) Identificación de resultados como solución al problema planteado.

e) Explicitación de procedimiento y soluciones.

Nota:

Los temas a), b), c) y d) se ven en los 4 semestres.
El tema e) en 3º y 4º semestre.

En relación con los problemas atingentes a los contenidos del nivel

a) Problemas relativos a la formación de números de 2 y 3 cifras, a la transformación de números por cambio de posición de sus dígitos, y a la observación de regularidades en secuencias numéricas.

b) Problemas en que sea necesario contar, comparar, estimar cantidades y medir magnitudes, para conocer aspectos de la realidad.

c) Problemas de adición y sustracción:

- en los que la incógnita ocupa distintos lugares;
- que implican una combinación de ambas operaciones;
- que permiten diferentes respuestas;
- que consisten en inventar situaciones a partir de una adición o sustracción dada;
- que implican la corrección de procedimientos de cálculo;
- que sirven para ir introduciendo las operaciones de multiplicación y división;
- que contribuyen al conocimiento del entorno.

d) Problemas en que sea necesario dibujar, modelar, armar, representar, reproducir, combinar y descomponer formas geométricas.

Nota:

Los temas a), b) y d) se ven en los 4 semestres.
El tema c) se ve en el 3º y 4º semestre.

Objetivos Fundamentales Verticales del NB2

Números

- Interpretar la información que proporcionan números de hasta seis cifras, presentes en situaciones de diverso carácter (científico, periodístico u otros) y utilizar números para comunicar información en forma oral y escrita.
- Interpretar y organizar información numérica en tablas y gráficos de barra.
- Comprender el sentido de la cantidad (orden de magnitud) expresada por números de hasta seis cifras, a través de la realización de estimaciones, redondeos y comparaciones de cantidades y medidas.
- Reconocer que un número se puede descomponer multiplicativamente.
- Ampliar la comprensión del sistema de numeración decimal:
  - extendiendo las reglas de formación de los números de una, dos y tres cifras a los números de cuatro, cinco y seis cifras;
  - determinando el valor que tiene cada dígito, de acuerdo a su posición, en un número de hasta seis cifras;
  - reconociendo que la lógica del sistema permite, con sólo 10 símbolos, escribir números cada vez mayores;
  - relacionando el sistema de numeración decimal con el sistema monetario nacional y con sistemas de medida de carácter decimal.
- Utilizar fracciones para interpretar y comunicar información relativa a partes de un objeto o de una unidad de medida; reconocerlas como números que permiten cuantificar esas partes y compararlas entre sí y con los números naturales.

Operaciones aritméticas

- Aplicar las operaciones de adición y sustracción a situaciones más complejas que en el nivel anterior, y extender los procedimientos de cálculo a números de más de tres cifras, consolidando estrategias de cálculo mental y desarrollando procedimientos resumidos de cálculo escrito.
- Identificar a la multiplicación y a la división como operaciones que pueden ser empleadas para representar una amplia gama de situaciones y que permiten determinar información no conocida a partir de información disponible.
- Realizar cálculos mentales de productos y cuocientes exactos, utilizando un repertorio memorizado de combinaciones multiplicativas básicas y estrategias ligadas al carácter decimal del sistema de numeración, a propiedades de la multiplicación y de la división y a la relación entre ambas.
- Realizar cálculos escritos de productos y de cuocientes y restos, utilizando

procedimientos basados en la descomposición aditiva de los números, en propiedades de la multiplicación y de la división y en la relación entre ambas, usando adecuadamente la simbología asociada a estas operaciones.

- Estimar resultados de las operaciones aritméticas, a partir del redondeo de los términos que intervienen en ella.
- Utilizar la calculadora para determinar sumas, restas, productos y cuocientes, cuando la complejidad de los cálculos así lo requiera.
- Formular afirmaciones acerca de propiedades de las operaciones de multiplicación y división, a partir de regularidades observadas en el cálculo de variados ejemplos de productos y cuocientes.
- Comparar las operaciones estudiadas en cuanto a su significado y a las propiedades utilizadas en los cálculos.

Formas y espacio

- Caracterizar y comparar polígonos de tres y cuatro lados, manejando un lenguaje geométrico que incorpore las nociones intuitivas de ángulo y de lados paralelos y perpendiculares. Trazar polígonos de acuerdo a características dadas.
- Percibir lo que se mantiene constante en formas geométricas de dos dimensiones sometidas a transformaciones que conservan su forma, su tamaño o ambas características.
- Caracterizar y comparar prismas rectos, pirámides, cilindros y conos: utilizar el nombre geométrico; designar sus elementos como caras, aristas y vértices; armar cuerpos de acuerdo a características dadas.
- Identificar y representar objetos y cuerpos geométricos en un plano.
- Interpretar y elaborar representaciones gráficas de trayectorias.

Resolución de problemas

- Manejar aspectos básicos de la resolución de problemas, tales como: el análisis de los datos del problema, la opción entre procedimientos para su solución, y la anticipación, interpretación, comunicación y evaluación de los resultados obtenidos.
- Afianzar la confianza en la propia capacidad de resolver problemas y estar dispuestos a perseverar en la búsqueda de soluciones.
- Resolver problemas relativos a la formación y uso de los números en el ámbito correspondiente al nivel; a los conceptos de multiplicación y división, sus posibles representaciones, sus procedimientos de cálculo y campos de aplicación; a las relaciones y uso combinado de las cuatro operaciones

estudiadas; al análisis, trazado y transformación de figuras planas, al armado y a la representación bidimensional de cuerpos geométricos; y al empleo de dibujos y planos para comunicar ubicaciones y trayectorias.

- Resolver problemas, abordables a partir de los contenidos del nivel, con el propósito de profundizar y ampliar el conocimiento del entorno natural, social y cultural.

Contenidos mínimos. Tercero y Cuarto Año Básico

Números naturales: del 0 al 1 000 000

a) Lectura de números: nombres, tramos de secuencia, consideración del cero en distintas posiciones, regularidades (reiteración de los nombres de los números de una, dos y tres cifras a los que se agrega la palabra “mil” para nominar números de cuatro, cinco y seis cifras).

b) Escritura de números: formación de números de cuatro, cinco y seis cifras a partir de los ya conocidos, a los que se agrega una, dos y tres cifras según se trate de miles, decenas de miles o centenas de miles, respectivamente.

c) Representación de números, cantidades y medidas en una recta graduada y lectura de escalas en instrumentos de medición.

d) Uso de tablas, cuadros de doble entrada, gráficos de barra para seleccionar y organizar datos.

e) Usos de los números en situaciones diversas, tales como: comunicar resultados, responder preguntas, relatar experiencias.

f) Procedimiento para comparar números, considerando el número de cifras y el valor posicional de ellas y para redondear números a distintos niveles de aproximación (a decenas, a unidades de mil, etc.) y uso de los símbolos asociados al orden de los números.

g) Estimación y comparación de cantidades y medidas, directamente, por visualización o manipulación, o mediante redondeo de acuerdo al contexto de los datos.

h) Transformación de números por aplicación reiterada de una regla aditiva y estudio de secuencias numéricas constituidas por múltiplos de un número.

i) Descomposición multiplicativa de un número, representación con objetos concretos o dibujos y exploración de distintas descomposiciones de un mismo número (Ejemplo: 24 como 12 x 2, como 8 x 3, como 6 x 4, etc.).

j) Valor representado por cada cifra de acuerdo a su posición en un número expresado en unidades y transformación de un número de más de 3 cifras por cambio de posición de sus dígitos.

k) Composición y descomposición aditiva y multiplicativa de un número en unidades y múltiplos de potencias de 10. (Ejemplo: 2 384 = 2 x 1 000 + 3 x 100 + 8 x 10 + 4).

l) Sistema monetario nacional: monedas, billetes, sus equivalencias y su relación con el sistema de numeración decimal.

m) Unidades de medida: de longitud (kilómetros, metros, centímetros), de superficie (metros cuadrados, centímetros cuadrados), de volumen (litros, centímetros cúbicos), de masa o "peso" (toneladas, kilogramos, gramos), equivalencias dentro de unidades de medida para una misma magnitud y su relación con el sistema de numeración decimal. Unidades de medida de tiempo: días, horas, minutos, segundos, como ejemplos de un sistema de medida no decimal.

Nota:

Los temas a), b), c), e), g) y m) se ven en los 4 semestres.
Los temas e) y n) se tratan en el 2º, 3º y 4º semestre.
El tema h) se ve en el tercer semestre.
El tema i) se trata en el tercero y cuarto semestre.
Los temas f), j) y k) se ven en el 1º, 2º y 3º semestre.

Números racionales: las fracciones

a) Situaciones de reparto equitativo y de medición que dan lugar a la necesidad de incorporar las fracciones.

b) Fraccionamiento en partes iguales de objetos, de unidades de medida (longitud, superficie, volumen) mediante procedimientos tales como, dobleces y cortes, trazado de y coloreo de partes, trasvasamientos. Reconstrucción entero a partir de las partes, en cada caso.

c) Lectura y escritura de fracciones: medios, tercios, cuartos, octavos, décimos y centésimos, usando como referente objeto, un conjunto de objetos fraccionables o una de medida.

d) Uso de fracciones: en la representación de cantidades medidas de diferentes magnitudes, en contextos cotidianos.

e) Familias de fracciones de igual valor con apoyo de material concreto.

f) Comparación de fracciones mediante representación gráfica y ubicación en tramos de una recta numérica graduada en unidades enteras.

Nota:

El tema a) se ve en el 1º y 3º semestre. Los temas b) y c) se ven en el 3º semestre. El tema d) se ve en el 3 y 4º semestre. Los temas e) y f) se ven en el 4º semestre.

Operaciones Aritméticas

a) Adiciones y sustracciones en situaciones que: implican una combinación de ambas operaciones; contienen la incógnita distintos lugares; permiten diferentes respuestas.

b) Generalización de combinaciones aditivas básicas a múltiplos de 1 000 (Ejemplos: 3 000 + 4 000; 30 000 + 40 000; 300 000 + 400 000) y empleo de estrategias de cálculo mental conocidas (Ejemplo: 25 + 7 como 25 + 5 + 2) en números de la familia de los miles; Ejemplo: 25 000 + 7 000 como 25 000 + 5 000 + 2 000).

c) Procedimientos de cálculo escrito de adiciones y sustracciones que, partiendo de la descomposición aditiva de los sumandos y completando decenas y centenas, gradualmente se van resumiendo hasta llegar a alguna versión de los algoritmos convencionales. Aplicación de estos procedimientos en el ámbito de los números conocidos.

d) Asociación de situaciones correspondientes a una adición reiterada, un arreglo bidimensional (elementos ordenados filas y columnas), una relación de proporcionalidad (correspondencia uno a varios), un reparto equitativo y una comparación por cuociente, con las operaciones de multiplicación y división.

e) Utilización de multiplicaciones y divisiones para relacionar información disponible (datos) con la información no conocida (incógnita), al interior de una situación de carácter multiplicativo.

f) Descripción del significado de resultados de multiplicaciones y divisiones en el contexto de la situación en que han sido aplicadas.

g) Manipulación de objetos y representación gráfica de situaciones multiplicativas y utilización de técnicas tales como adiciones o sustracciones reiteradas, para determinar productos y cuocientes.

h) Combinaciones multiplicativas básicas: memorización paulatina de multiplicaciones con factores hasta 10 (Ejemplo: 4 x 3 = 12), apoyada en manipulaciones y visualizaciones, con material concreto. Deducción de las divisiones respectivas (Ejemplo: 12 : 4 = 3 y 12 : 3 = 4).

i) Multiplicación de un número por potencias de 10 (Ejemplo: 23 x 1 000= 23 000) y las divisiones respectivas (Ejemplo: 23 000 : 1 000 = 23).

j) Cálculo mental de productos y cuocientes utilizando estrategias tales como: descomposición aditiva de factores (Ejemplo: 25 x 12 como 25 x 10 + 25 x 2), descomposición multiplicativa de factores (Ejemplo: 32 x 4 como 32 x 2 x 2), reemplazo de un factor por un cuociente equivalente (Ejemplo: 48 x 50 como 48 x 100 : 2).

k) Simbología asociada a multiplicaciones y divisiones escritas.

l) División con resto distinto de 0 y establecimiento de igualdades del tipo: 29 = 7 x 4 + 1 que proviene de la división 29 : 4.

m) Prioridad de la multiplicación y la división sobre la adición y la sustracción en la realización de cálculos combinados (Ejemplo: 16 – 4 x 2 = 16 – 8).

n) Cálculo escrito de productos en que uno de los factores es un número de una o dos cifras, algún múltiplo de 10, 100 y 1 000 ; y de cuocientes y restos en que el divisor es un número de una cifra:

- para la multiplicación, utilizando inicialmente estrategias basadas en la descomposición aditiva de los factores y en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición, que evolucionan hasta llegar a alguna versión del algoritmo convencional;
- para la división, basándose en la determinación del factor por el cual hay que multiplicar el divisor para acercarse al dividendo, de modo que el resto sea inferior al divisor.

o) Uso de la calculadora en base a consideraciones tales como, cantidad de cálculos a realizar, tamaño de los números, complejidad de los cálculos.

p) Técnicas de estimación y redondeo para controlar la validez de un cálculo y detectar eventuales errores.

q) Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones con resultado constante y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de las propiedades en juego, correspondientes a:

- cambio de orden de los factores (conmutatividad);
- secuencia en que se realizan las multiplicaciones de más de dos

factores (asociatividad);
- productos en los que uno de los factores es una suma (distributividad de la multiplicación respecto a la adición).

r) Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones y divisiones en las que intervienen el 0 y el 1 (Ejemplos: 24 x 1 = 24; 84 x 0 = 0; 18 : 0 no está definida), y formulación de afirmaciones respecto del comportamiento del 0 y el 1 en multiplicaciones y divisiones.

s) Comparación de variados ejemplos de multiplicaciones y divisiones que corresponden a situaciones inversas como: repartir equitativamente entre 5 y luego volver a juntar lo repartido, y formulación de afirmaciones que implican un reconocimiento de la relación inversa entre la multiplicación y la división.

Nota:

Los temas a), b), c), d), e), f), h) i) y k) se ven en los 4 semestres.
El tema g) se ve en el 1º y 2º semestre.
Los temas tema j) y n) se ven el 3º y 4º semestre.
Los temas p) q) y r) se ven en 2º, 3º y 4º semestre.
Los temas m) y s) se ven en el 4º semestre.

Formas y Espacio

a) Elementos geométricos en figuras planas: rectas paralelas y rectas perpendiculares (percepción y verificación); clasificación de ángulos en rectos, agudos (menor que el ángulo recto), y obtusos (mayor que el ángulo recto).

b) Exploración de diversos tipos de triángulos y clasificación en relación con:

- la longitud de sus lados (3 lados iguales, sólo 2 lados iguales, 3 lados desiguales);
- la medida de sus ángulos (1 ángulo recto, sólo ángulos agudos, 1 ángulo obtuso);
- el número de ejes de simetría (con 0, con 1 o con 3 ejes de simetría). Trazado de triángulos pertenecientes a las clases estudiadas.

c) Cuadriláteros. Exploración de diversos tipos de cuadriláteros y clasificación en relación con: la longitud de sus lados (todos los lados iguales, todos los lados diferentes y 2 pares de lados iguales); el número de pares de lados paralelos (con 0, con 1 o con 2 pares); el número de ángulos rectos (con 0, con 2 o con 4); el número de ejes de simetría (con 0, con 1, con 2, con 4). Trazado de cuadriláteros pertenecientes a las clases estudiadas.

d) Realización de traslaciones, reflexiones y rotaciones manipulando dibujos de objetos y de formas geométricas, para observar qué características cambian y cuáles se mantienen.

e) Ampliación y reducción de dibujos de objetos y de formas geométricas para observar qué características cambian y cuáles se mantienen.

f) Prismas rectos, pirámides, cilindros y conos: Exploración y descripción en relación con: el número y forma de las caras, el número de aristas y de vértices, Armado de estos cuerpos en base a una red.

e) Representación plana de objetos y cuerpos geométricos, e identificación del objeto representado y de la posición desde la cual se realizó.

f) Representación gráfica de trayectorias: dibujar considerando referentes, direcciones y cambios de dirección e interpretación que permita ejecutar la trayectoria representada.

Nota:

El tema a) se trata en 1º, 3º y 4º semestre.
El tema b) se ve en el 2º semestre.
Los temas c) y e) se tratan en 3º semestre.
El tema d) se ve en el 1º y 3º semestre.
Los temas f), g) y h) secretan en el 2º y 4º semestre.

Resolución de Problemas

a) Habilidad para resolver problemas:

Representación mental de la situación, comprensión del problema, identificación de preguntas a responder y anticipación de resultados.

Distinción y búsqueda de relaciones entre la información disponible (datos) y la información que se desea conocer.

Toma de decisiones respecto de un camino de resolución, su realización y modificación si muestra no ser adecuado. Revisión de la pertinencia del resultado obtenido en relación al contexto.

Comunicación de los procedimientos utilizados para resolver el problema y los resultados obtenidos.

Formulación de otras preguntas a partir de los resultados obtenidos.

b) Tipos de problemas atingentes a los contenidos del nivel:

Problemas relativos a la formación de números de 4, 5, 6 y más cifras, a la transformación de números por cambio de posición de sus dígitos, a la observación de regularidades en secuencias numéricas, a la localización de números en tramos de la recta numérica.

Problemas de estimación y comparación de cantidades y medidas, que contribuyan a ampliar el conocimiento del entorno, en particular utilizando dinero y las unidades de medida de uso habitual.

c) Problemas de fracciones:

Comparación de fracciones unitarias; ubicación de fracciones mayores que la unidad en la recta numérica; so de fracciones para precisar la descripción de la realidad.

d) Problemas de multiplicación y división

En los que la incógnita ocupa distintos lugares; que implican una combinación de ambas operaciones; que permiten diferentes respuestas; que consisten en inventar situaciones a partir de una multiplicación o división dada; que implican la evaluación de procedimientos de cálculo; que contribuyen al conocimiento del entorno.

e) Problemas variados, relativos a combinaciones de las 4 operaciones

Conocidas, que dan cuenta de los sentidos, de los procedimientos de cálculo y de las diferentes aplicaciones de estas operaciones y que permiten ampliar el conocimiento de la realidad.

f) Problemas de formas y espacio:

Manipulación y trazado de figuras planas; armado de cuerpos con condiciones dadas; anticipación de características de formas que se obtienen luego de traslaciones, reflexiones y rotaciones; identificación de cuerpos geométricos en base a representaciones planas; selección de caminos a partir de información representada en un plano, de acuerdo a determinadas condiciones.

Nota:

Los problemas referidos a los temas a), b) y f) se tratan en los 4 semestres.
Los problemas referidos al tema c) se ve en 3º y 4º semestre.
Los problemas referidos al tema d) se ve en 2º, 3º, y 4º semestre.
El tema e) se ve en el 4º semestre.

Ismenia Guzmán

Segundo Ciclo Básico. Quinto a Octavo Año Básico

Las edades de los alumnos de este Ciclo van de los 10-11 a los 13-14 años.

Presentamos a continuación un resumen de los objetivos fundamentales de los cursos que componen este segundo ciclo.

Quinto Básico NB3 (Edad 10-11 años)

Objetivos Fundamentales

- Procesar información cuantitativa, expresada con números de más de 6 cifras.
- Programar y administrar el uso del tiempo personal.
- Resolver problemas de diversos tipos, referidos a situaciones multiplicativas.
- Seleccionar una forma de cálculo -oral, escrito o con calculadora- a partir de las relaciones entre los números y las exigencias del problema a resolver.
- Aplicar el cálculo aproximado en la evaluación de situaciones y el control de resultados.
- Reconocer la multiplicidad de formas que puede asumir un valor fraccionario.
- Utilizar planos para orientarse en el espacio físico.
- Distinguir elementos de un cuerpo geométrico y establecer correspondencias entre un cuerpo y su representación plana.
- Reconocer elementos en una figura geométrica y analizar los cambios que se producen en la figura al variar la medida de sus ángulos internos.
- Distinguir perímetro y área como elementos uni y bidimensionales en una figura geométrica.
- Percibir la significación de las fórmulas, en tanto medio para expresar relaciones entre magnitudes variables.

Contenidos Mínimos Obligatorios

Números naturales

Hasta 1000:

- descomponer números en forma multiplicativa identificando sus factores;

- identificar múltiplos de un número;
- interpretar los factores de un número como sus divisores;
- descomponer números en sus factores primos.

Extensión a la clase de los millones:

- leer, escribir y ordenar números.

En la vida diaria:

- utilizar el calendario para determinar fechas y calcular duraciones, estableciendo equivalencias entre días, semanas, meses y años;
- leer y escribir números utilizando como referente unitario los miles, los millones o los miles de millones.

Multiplicación y división

Determinar resultados en situaciones correspondientes a otros significados (relación proporcional más compleja, comparar...).

Cálculo oral

El redondeo, como estrategia para el cálculo aproximado de sumas, restas, productos y cuocientes.

Cálculo escrito

Utilizar algoritmos de cálculo de productos, con factores menores que 100 y de cuocientes y restos, con divisores de una o dos cifras.

Cálculo con apoyo de calculadora

- utilizar calculadora para determinar sumas, restas y productos en la resolución de problemas;
- utilizar calculadora para determinar el cuociente entero y el resto, en divisiones no exactas.

Fracciones

En situaciones correspondientes a diversos significados (partición, reparto, medida...):

- lectura y escritura;

- comparar y establecer equivalencias;
- ubicar una fracción entre dos naturales, utilizando la recta numérica;
- ordenar e intercalar fracciones, con referencia a la recta numérica;
- encontrar familias de fracciones equivalentes;
- adición y sustracción: realizar cálculos, sustituyendo fracciones por otras equivalentes, cuando sea necesario.

Orientación en el espacio

- interpretar planos urbanos y de caminos, utilizando los puntos cardinales como referencia;
- identificar y crear códigos para comunicar diversos tipos de información, al interior de un plano.

Cuerpos geométricos (cubo, prismas y pirámides)

- armar cuerpos, a partir de sus caras;
- construir redes para armar cubos;
- identificar y contar el número de caras, aristas y vértices de un cuerpo y describir sus caras y aristas.

Figuras geométricas

- diferenciar cuadrado, rombo, rectángulo y romboide a partir de modelos hechos con varillas articuladas;
- identificar lados, vértices y ángulos en figuras poligonales;
- distinguir tipos de ángulos, con referencia al ángulo recto.

Perímetro y área

- utilizar centímetros para medir longitudes, y cuadriculados y centímetros cuadrados, para medir superficies;
- calcular perímetros y áreas en cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos, y en figuras que puedan descomponerse en las anteriores;
- reconocer las fórmulas para el cálculo del perímetro y del área del cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, como un recurso para abreviar el proceso de cálculo;
- distinguir perímetro y área, a partir de transformaciones de una figura en la que una de estas medidas permanece constante.

Sexto año básico. NB4

Objetivos Fundamentales

Establecer nexos entre las operaciones básicas en los números naturales y reconocer la posibilidad de sustituir unas por otras.

- Conocer prácticas del mundo adulto en las que intervienen números y cálculos y confiar en la propia capacidad para incorporarlas en la resolución de problemas.
- Fundamentar procedimientos de cálculo -orales, escritos y con calculadora- basados en regularidades de los números y en propiedades de las operaciones.
- Resolver problemas que involucren unidades de medida de peso, capacidad y longitud, utilizando las equivalencias entre unidades, expresando los resultados de manera adecuada a la situación.
- Operar con cantidades no enteras utilizando, de acuerdo a la situación, números decimales o fracciones.
- Planificar el trazado de figuras sobre la base del análisis de sus propiedades, utilizando los instrumentos pertinentes.
- Comprender los efectos que provoca en el perímetro o el área de cuadrados y rectángulos la variación de la medida de sus lados y recurrir a las razones para expresarlas.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional, y comunicar resultados.

Contenidos Mínimos Obligatorios

Números en la vida diaria

Resolución de problemas, utilizando la calculadora, que impliquen:

- monedas de otros países, valores de cambio y sus equivalencias;
- uso de documentos y formularios bancarios y comerciales.

Nexos entre las operaciones aritméticas

Desarrollo de razonamientos que conduzcan a reemplazar un procedimiento operatorio por otro equivalente, apoyándose en el carácter inverso de la sustracción respecto de la adición, el carácter inverso de la división respecto de la multiplicación, la interpretación de la multiplicación como adición iterada y la interpretación de la división como sustracción iterada.

Divisibilidad

Aplicación de criterios de divisibilidad (por 2, 3, 5, 9 y 10).

Multiplicación y división de fracciones en situaciones habituales

Análisis de las relaciones entre factores y productos y entre los términos de una división y el cuociente en diferentes casos, cuando intervienen cantidades menores que 1.

Fracciones y decimales en la vida diaria

- Cálculo del 50% y del 25% como la mitad y la cuarta parte de una cantidad.
- Expresión del 50%, del 25% y del 10% como: 50/100, 25/100 y 10/100; 1/2, 1/4 y 1/10; y 0,5, 0,25 y 0,1, respectivamente.
- Uso de unidades del sistema métrico decimal en situaciones habituales.

Números decimales

- Identificación de las fracciones con denominador 10, 100 y 1000, con los décimos, centésimos y milésimos.
- Transformación de fracciones con denominador 10, 100 y 1000 a números decimales y viceversa, en situaciones de medición.
- Extensión del sistema de numeración a décimos, centésimos y milésimos en situaciones cotidianas y/o informativas que permitan:
- leer, escribir e interpretar números decimales;
- establecer equivalencias;
- ordenar e intercalar decimales;
- estudiar familias de números decimales, establecer patrones y comparaciones con los números naturales.
- Cálculo de adiciones y sustracciones en contextos situacionales, interpretando resultados, aproximando resultados; estimando antes de calcular; utilizando la calculadora para confirmar resultados estimados.

Figuras y cuerpos geométricos

- Reproducción y creación de figuras y de representaciones planas de cuerpos geométricos, usando regla, compás y escuadra.

- Estudio de cuadriláteros: características de sus lados y de sus ángulos.
- Trazado de cuadriláteros a partir de sus ejes de simetría.
- Combinación de figuras para obtener otras previamente establecidas.

Perímetro y área

- Cálculo de perímetro y área de figuras compuestas por cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos.
- Ampliación y reducción de cuadrados y rectángulos en papel cuadriculado, expresando como razones las variaciones de los lados, el perímetro y el área.
- Análisis del perímetro y el área de familias de cuadrados y rectángulos, generadas a partir de la variación de sus lados.

Tratamiento de la información

Recopilación y análisis de información: comparación de datos, promedio y valor más frecuente.

Séptimo año básico. NB5

Objetivos Fundamentales

Reconocer diferencias fundamentales entre el sistema de numeración y medición decimal y otros sistemas de numeración y medición.

- Apreciar el valor instrumental de las matemáticas en la apropiación significativa de la realidad.
- Atribuir y expresar el significado de grandes y pequeños números utilizando diferentes recursos tanto gráficos como numéricos.
- Anticipar resultados -aproximando y/o acotando a partir del análisis de las características de los números involucrados en los problemas y de las condiciones de éstos.
- Utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver problemas numéricos y geométricos.
- Analizar familias de figuras geométricas para apreciar regularidades y simetrías establecer criterios de clasificación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados; seleccionar formas de presentar la información y resultados de acuerdo a la situación.

Contenidos Mínimos Obligatorios

Números en la vida diaria

- Interpretación y expresión de resultados de medidas, grandes y pequeñas, apoyándose en magnitudes diferentes (una décima de segundo en la cantidad de metros que avanza un atleta en ese tiempo; grandes cantidades de dinero en UF, por ejemplo).

Sistema de numeración decimal

- Comparación de la escritura de los números en el sistema decimal con la de otros sistemas de numeración en cuanto al valor posicional y a la base (por ejemplo, egipcio, romano, maya).
- Comparación de la escritura de números, hasta 100, en base diez y en base dos (sistema binario).

Potencias de base natural y exponente natural

- Interpretación de potencias de exponentes 2 y 3 como multiplicación iterada.
- Asociación de las potencias de exponente 2 y 3 con representaciones en 2 y 3 dimensiones respectivamente (áreas y volúmenes).
- Investigación de algunas regularidades y propiedades de las potencias de exponente 2 y 3.

Multiplicación y división de números decimales

- Cálculo escrito, mental aproximado y con calculadora en situaciones problemas.
- Análisis de relaciones entre factores y producto y entre los términos de la división y el cuociente para establecer regularidades cuando intervienen cantidades menores que 1.

Proporcionalidad

- Resolución de situaciones problemas, estableciendo razones entre partes de una colección u objeto y entre una parte y el todo.
- Interpretación y uso de razones expresadas de diferentes maneras.
- Resolución de problemas, elaborando tablas correspondientes a:
  - situaciones de variación no proporcional.
  - situaciones de variación proporcional directa e inversa.

- Identificación y análisis de las diferentes razones y parejas de razones que se pueden establecer entre los datos de tablas correspondientes a variación proporcional directa e inversa.
- Comparación de tablas correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa, para establecer diferencias.
- Interpretación y expresión de porcentajes como proporciones, y cálculo de porcentajes en situaciones cotidianas.

Figuras y cuerpos geométricos

- Estudio de triángulos: características de sus lados y de sus ángulos.
- Construcción de alturas y bisectrices en diversos tipos de triángulos.
- Investigación sobre aplicaciones prácticas del teorema de Pitágoras.
- Uso de instrumentos (regla, compás, escuadra), para la reproducción y creación de triángulos y para la investigación de las condiciones necesarias para dibujar un triángulo.
- Redes para armar prismas y pirámides. Armar cuerpos geométricos a partir de otros más pequeños.

Perímetro y área

- Medición y cálculo de perímetros y de áreas de triángulos de diversos tipos en forma concreta, gráfica y numérica.
- Investigación de las relaciones entre medidas de altura y base y el área correspondiente, en familias de triángulos generadas al mantener dichas medidas constantes.

Tratamiento de información

- Presentación de información en tablas de frecuencias relativas y construcción de gráficos circulares.
- Análisis de información: utilizando como indicador de dispersión el recorrido de la variable, y como medidas de tendencia central, la moda, la media y la mediana.

Octavo año básico

Objetivos Fundamentales

- Utilizar sistemáticamente razonamientos ordenados y comunicables para la resolución de problemas numéricos y geométricos.
- Percibir las posibilidades que ofrece el sistema de numeración decimal para expresar cantidades cualesquiera, por grandes o pequeñas que éstas sean.
- Resolver problemas utilizando las potencias para expresar y operar con grandes y pequeñas cantidades.
- Reconocer que una amplia gama de problemas se pueden expresar, plantear y resolver utilizando expresiones algebraicas simples.
- Estimar y acotar, de manera pertinente y razonable, resultados de operaciones con decimales positivos y negativos; expresarlos en fracciones según posibilidades y conveniencia de acuerdo a la situación.
- Recolectar y analizar datos en situaciones del entorno local, regional y nacional y comunicar resultados, utilizando y fundamentando diversas formas de presentar la información y los resultados del análisis de acuerdo a la situación.
- Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos).
- Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas

Contenidos Mínimos Obligatorios

Sistema de numeración decimal

- Asociación de una potencia de base 10 con exponente positivo o negativo a cada posición en el sistema de numeración.
- Interpretación y expresión de resultados como sumas ponderadas de potencias de 10 en situaciones problemas.

Números enteros

- Interpretación del uso de signos en los números, en la vida diaria, en contextos ligados a: la línea cronológica (AC, DC), la medición de temperatura (bajo 0, sobre 0), la posición respecto del nivel del mar.

- Comparación de números enteros con apoyo en la recta numérica.
- Resolución de problemas que impliquen realizar adiciones y sustracciones, con y sin apoyo en la recta numérica.

Ecuaciones de primer grado

- Noción de igualdad de expresiones algebraicas.
- Traducción de situaciones problemas a ecuaciones con una incógnita.
- Creación de diversos problemas con sentido a partir de ecuaciones con una incógnita.
- Uso de propiedades de los números y de las operaciones para encontrar soluciones.

Potencias de base natural y exponente entero

- Análisis y comparación de la representación gráfica de a2 y de a-2.
- Interpretación de a-2 y de a-3 como 1/a2 y 1/a3 respectivamente.
- Potencias como multiplicación iterada.
- Análisis de situaciones de crecimiento y de decrecimiento exponencial.
- Investigación de regularidades y propiedades de operaciones con potencias a partir de la resolución de problemas.

Números decimales y fracciones

- Resolución de situaciones problemas en las que sea necesario y pertinente expresar como fracciones números decimales finitos y decimales periódicos.
- Aproximaciones convenientes con números decimales periódicos, semi periódicos.
- Uso de la calculadora para investigar y establecer patrones en familias de números decimales.

Proporcionalidad

- Elaboración de tablas y gráficos correspondientes a situaciones de variación proporcional directa e inversa.
- Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa mediante un producto constante y un cuociente constante, respectivamente.
- Resolución de problemas geométricos de proporcionalidad (producir figuras semejantes).

- Realización e interpretación de planos de tipo esquemáticos a escala.
- Cálculo de porcentajes y elaboración y análisis de tablas de aumentos y descuentos en un porcentaje dado, utilizando calculadora.

Figuras y cuerpos geométricos

- Investigación sobre la suma de los ángulos interiores de polígonos y el número de lados de estos; construcción de polígonos por combinación de otros.
- Investigación de las relaciones entre los ángulos que se forman al intersectar dos rectas por una tercera. Resolución de problemas.
- Análisis de los elementos de una circunferencia (radio, diámetro) en la reproducción y creación de circunferencias con regla y compás.
- Construcciones de redes para armar cilindros y conos.

Perímetro, área y volumen

- Experimentación de diversos procedimientos (gráficos y concretos) para medir el perímetro y el área de circunferencias.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo de perímetro y área de circunferencias y de polígonos.
- Estimación y cálculo del volumen de cuerpos geométricos regulares expresándolos en las unidades pertinentes.
- Relaciones de equivalencia entre unidades de volumen de uso corriente.
- Interpretación y uso de fórmulas para el cálculo del volumen de cilindros, conos y prismas rectos.

Tratamiento de información

- Análisis de tablas y gráficos estadísticos habitualmente utilizados en la prensa.
- Lectura y análisis de resultados de encuestas de opinión.

3.2 Programas de Matemáticas de Enseñanza Media (Humanista)

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Primer a Cuarto Año Medio en Matemática

Objetivos Fundamentales

Primer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.

2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones, con precisión.

3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.

4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.

5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.

6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

Segundo Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.

2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.

3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.

4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.

5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

Tercer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.

2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.

3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.

4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.

5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

Cuarto Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.

2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.

3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.

4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.

5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continua desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

Contenidos Mínimos

I Números y Proporcionalidad

Números

a. Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.

b. Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.

c. Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.

d. Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.

e. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.

Proporcionalidad

a. Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad.

Tablas y gráficos

b. Proporcionalidad directa e inversa. Constante de proporcionalidad. Gráfico cartesiano asociado a la proporcionalidad directa e inversa (primer cuadrante).

c. Porcentaje. Lectura e interpretación de información científica y publicitaria que involucre porcentaje. Análisis de indicadores económicos y sociales. Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multiplicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.

Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Construcción de tablas y gráficos asociados a problemas de proporcionalidad directa e inversa. Resolución de ecuaciones con proporciones. Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa. Relación entre la proporcionalidad directa y cocientes constantes y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

II. Algebra y Funciones

a. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. Múltiplos, factores, divisibilidad. Transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables.

b. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

c. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis.

d. Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.

e. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. Interpretación geométrica de los productos notables.

f. Ecuación de primer grado. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

III. Geometría

Congruencia

a. Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.

b. Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.

c. Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia.

d. Aporte de Euclides al desarrollo de la Geometría.

Transformaciones

a. Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados. Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

b. Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.

c. Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.

d. Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.

Segundo Año Medio

I. Álgebra y Funciones

Lenguaje algebraico

a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.

b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.

c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso de paréntesis.

Funciones

a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramos de consumo, por ejemplo, de agua, luz, gas, etc. Variables dependientes e independientes. Función parte entera. Gráfico de la función.

b. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.

c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad.

d. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las soluciones. Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

e. Función valor absoluto; gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.

f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.

b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales.

Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.

c. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

d. Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.

e. Uso de algún programa computacional geométrico que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.

III. Estadística y Probabilidad

a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

b. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

c. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.

Tercer Año Medio

I. Algebra y Funciones

Algebra

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. Intervalos en los números reales. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita.

Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.

Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

Funciones

a. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$y = x^2$

$y = x^2 + a,\ a > 0$

$y = (x + a)^2,\ a > 0$

$y = ax^2 + bx + c$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

b. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$.

Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentario sobre el Teorema de Fermat.

c. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Demostración de los Teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

III. Estadística y Probabilidad

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

Cuarto Año Medio

I. Algebra y Funciones

a. Función potencia: $y=ax^n$, a > 0, para n = 2, 3, y 4, y su gráfico correspondiente. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a.

b. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.

c. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético, y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.

e. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.

b. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

III. Estadística y Probabilidad

a. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.

b. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.

c. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.

d. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Junio de 2005, Número 2, páginas 91 - 110
ISSN: 1815-0640

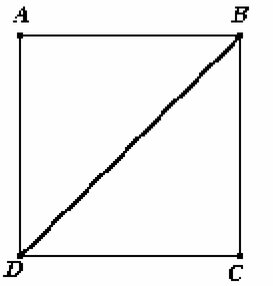
As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método de exaustão»

Vincenzo Bongiovanni

PUC-SP

Introdução

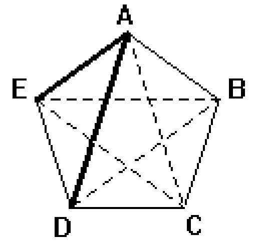
Para os pitagóricos, todas as grandezas (comprimento, área, volume,...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. Admitiam que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, segmentos quaisquer de reta. Dados dois segmentos, supunham que existia sempre um segmento que "cabia" um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Nesse caso, os segmentos eram comensuráveis. Em notação moderna, dizer que os dois segmentos AB e CD são comensuráveis significa dizer que existe um segmento u e dois naturais m e n tais que AB=nu e CD=mu. Num dado momento da história, descobriu-se a existência de grandezas incomensuráveis. Essa descoberta marcou profundamente o desenvolvimento da matemática grega. Vitruvius (século I a.C), na sua obra *Dez livros de arquitetura*, o mais antigo texto sobre a história da matemática que chegou até os nossos tempos em sua versão original, atribui a Pitágoras e a seus discípulos a descoberta de grandezas incomensuráveis. Mais tarde Proclus (420-485 D.C) no prólogo do livro *Os comentários sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides* atribui também tal descoberta à escola pitagórica. Esse fato destruiu a crença de que o universo era governado por números inteiros. Alguns historiadores associam o aparecimento de grandezas incomensuráveis com a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em que a hipotenusa é a diagonal de um quadrado e os catetos são os lados do quadrado.



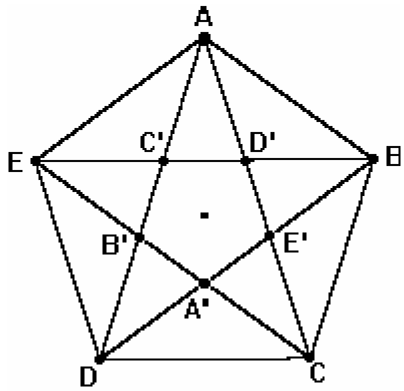
Aristóteles refere-se a uma demonstração onde se supõe que a diagonal e o lado do quadrado são comensuráveis para se chegar num absurdo com a conclusão que um mesmo inteiro é par e ímpar. A idéia do raciocínio por absurdo que segue foi provavelmente concebido no meio da escola pitagórica.

Vamos supor que o lado AB e a diagonal DB sejam segmentos comensuráveis. Logo existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que AB = mu e DB = nu. Portanto o segmento AB mede m e o segmento DB mede n. Pelo teorema de Pitágoras $n^2 = m^2 + m^2$, *ou seja,* $n^2 = 2m^2$. *Portanto* $(n/m)^2=2$. *Seja a/b uma fração irredutível tal que n/m=a/b. Como* $(a/b)^2=2$ *então* $a^2=2b^2$. *Portanto* a^2 *é par e conseqüentemente a é par. Como a/b é irredutível, b deve ser ímpar. Como a é par, existe um inteiro k tal que a=2k. Como* $a^2=2b^2$ *então* $4k^2=2b^2$. *Logo* b^2 *é par. Conclui-se que b também é par. Absurdo pois b é ímpar.*

O artigo de K.von Fritz *A descoberta da incomensurabilidade por Hipasus de Metapontum* introduziu uma nova dimensão ao problema. Ele desloca radicalmente a questão da incomensurabilidade para a divisão de um segmento em média e extrema razão. Von Fritz observa que apesar de Proclus atribuir a Pitágoras a descoberta dos incomensuráveis, todos os outros textos se referem a Hipasus de Metapontum nascido por volta de 500 a.C. Segundo ele essa descoberta pode ter sido feita por volta de 450 a.C e está relacionada com as faces pentagonais de um dodecaedro regular e com o pentagrama (emblema dos pitagóricos). Uma possibilidade de justificar que o lado do pentágono regular e o lado do pentagrama são incomensuráveis é a seguinte:



Vamos supor que o lado AE e a diagonal AD do pentágono regular ABCDE sejam comensuráveis. Logo existe um segmento u e inteiros positivos m e n tais que AE = mu e AD = nu com n > m pois AD é maior que AE. As diagonais do pentágono regular ABCDE determinam um novo pentágono regular A'B'C'D'E'.



Como AD - AE = B'E'com AD = nu e AE = mu então B'E'=(n-m)u.
Como AE-B'E'=A'B', conclui-se que A'B'= mu-(nu - mu)=(2m-n)u
Logo se houver um segmento u que seja submúltiplo comum da diagonal AD e do lado AE do pentágono regular inicial então o mesmo segmento u será submúltiplo dos segmentos E'B' e A'B', ou seja, da diagonal e do lado do novo pentágono regular A'B'C'D'E'.
O mesmo argumento que permitiu passar do pentágono inicial ABCDE ao pentágono A'B'C'D'E' pode ser repetido para se chegar a um outro pentágono menor ainda. Após um número finito de repetições teremos um pentágono de lado a_n e diagonal d_n comensuráveis com relação ao segmento u e com $a_n < u$, o que é uma contradição. Logo o lado e a diagonal do pentágono inicial são incomensuráveis.

Conseqüências dessa descoberta?

Os diálogos de Platão mostram que os matemáticos ficaram profundamente perturbados com essa descoberta que destruía a generalidade da teoria das proporções pois que todas as demonstrações eram baseadas no número como coleção de unidades. O segmento já não podia mais ser considerado indivisível, mas infinitamente divisível. Surgia então a necessidade de se **criar uma teoria sobre razões** envolvendo grandezas comensuráveis e incomensuráveis. As demonstrações começavam a **utilizar cada vez mais raciocínios associados a áreas**.

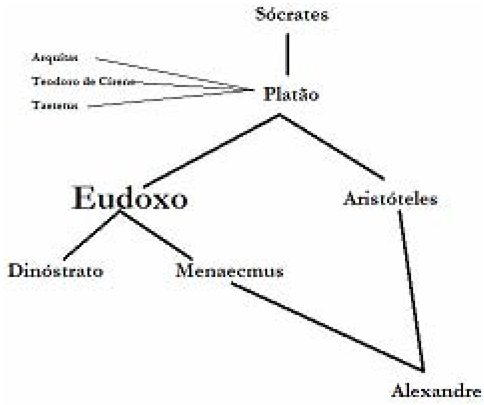
Outra conseqüência dessa descoberta foi a necessidade de se elaborar uma **teoria de divisibilidade mais ampla do que a teoria do par e ímpar.**

Por volta da mesma época em que se dava a devastadora descoberta dos incomensuráveis, Zenão de Eléia apresentava paradoxos onde mostrava que considerar grandezas divisíveis infinitamente levava a contradições e considerar grandezas indivisíveis levava também a contradições.

Boyer no livro *A história do cálculo e seu desenvolvimento conceitual diz: "Aristóteles e outros filósofos gregos procuraram responder a esses paradoxos, mas o fizeram de maneira tão pouco convincente, que os matemáticos da época concluíram que era melhor* ***evitar totalmente os processos infinitos***".

Quem foi Eudoxo de Cnido ?

Pouco se sabe da vida de Eudoxo. Foi discípulo de Platão e parece ter sido o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis construindo uma **teoria das proporções** que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis. Essa teoria encontra-se exposta no livro V de Euclides.



Credita-se também a Eudoxo o chamado **método de exaustão** que eliminava o infinito da matemática grega. Esse método permite comparar áreas e volumes e segundo afirma Arquimedes, no prefácio de seu livro *Sobre a esfera e o cilindro*, foi utilizado por Euclides no livro XII.

A partir dessas novas idéias que reabilitaram a geometria, a concepção atomista (que preconizava a existência dos indivisíveis) foi adotada para **números** e a concepção continuísta (que imaginava o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis infinitamente) para **grandezas.** Os números eram considerados finitamente divisíveis e as grandezas infinitamente divisíveis.

A definição de proporção de Eudoxo sem a utilização dos números

Hoje, quando dizemos que os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ são tais que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ estamos tratando com as medidas dos segmentos AD, DB, AE e EC e portanto com números reais. Eudoxo encontrou um modo de definir a igualdade de duas razões sem utilizar números (reais) mas apenas inteiros positivos. Antes de apresentar a definição de Eudoxo vamos utilizar a linguagem moderna para visualizar a idéia de Eudoxo.

Na igualdade $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ temos dois casos a considerar: AD e DB comensuráveis ou incomensuráveis. Se AD e DB forem comensuráveis, isto é, se $\frac{AD}{DB}$ for racional então existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$ e $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$. Podemos portanto escrever as igualdades na forma de um enunciado que envolve números inteiros:

se m.DB=n.AD então m.EC=n.AE

Supondo que os segmentos AD e DB sejam incomensuráveis, podemos considerar que:

Se m e n são inteiros positivos e $\frac{m}{n}<\frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n}<\frac{AE}{EC}$

Se m e n são inteiros positivos e $\frac{m}{n}>\frac{AD}{DB}$ então $\frac{m}{n}>\frac{AE}{EC}$

Podemos escrever as duas implicações na forma de um enunciado que envolve números inteiros:

se m.DB<n.AD então m.EC<n.AE e se m.DB>n.AD então m.EC>n.AE

E o que fez Eudoxo?

Eudoxo evitou a discussão sobre a natureza dos irracionais e sobre a validade dos processos infinitos e definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa. Esta definição se encontra no livro V (definição 6) dos Elementos de Euclides e fixa o critério de razões idênticas:

> *«Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondentes»*

Utilizando a linguagem moderna e considerando como grandezas os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ (comensuráveis ou não), para Eudoxo, dizer que $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ significava dizer que para todo m e n inteiros positivos, as condições a seguir eram verificadas:

Se m.DB<n.AD então m.EC<n.AE

Se m.DB>n.AD então m.EC>n.AE

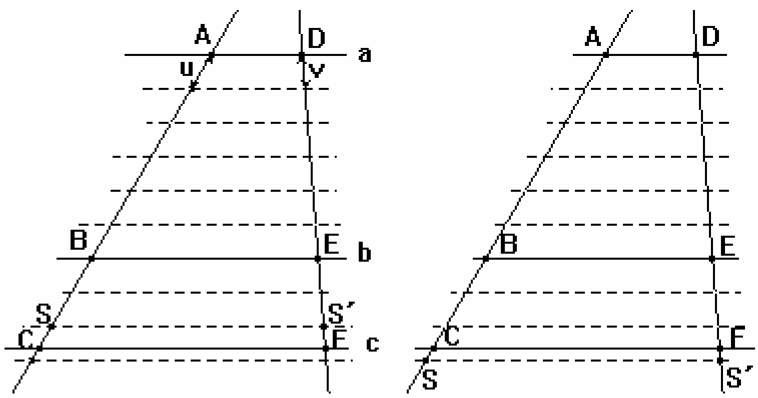
Se m.DB=n.AD então m.EC=n.AE

Mais tarde, essa definição válida para grandezas quaisquer foi fonte de inspiração para a criação dos números reais.

Como exemplo do uso dessa definição voltaremos ao teorema de Tales e apresentaremos uma demonstração completa (para grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis) pela teoria das proporções de Eudoxo.

Supondo a//b e b//c, vamos provar que AB/BC=DE/EF
Sejam n e m dois números naturais qualquer. Vamos dividir AB em n partes iguais. Logo existe um segmento u tal que AB=n.u
Vamos marcar m vezes u em BC. Sendo S a extremidade do último segmento contido em BC temos 3 casos possíveis:

a) S está entre B e C
b) C está entre B e S
c) C=S (nesse caso AB e BC são comensuráveis)



1° caso Vamos supor S entre B e C

Logo BS=mu. De cada ponto de divisão de AB e BC tracemos paralelas às retas a,b e c. Essas retas interceptarão DE e EF em pontos que dividirão DE em n partes iguais a v e ES´ em m partes iguais a v. Logo DE=nv e ES´=mv. De AB=nu vem que mAB=mnu e de BS=mu vem que nBS=nmu. Como $BS<BC$ então $mAB=nBS<nBC$. Portanto $mAB<nBC$.
De DE=nv vem que mDE=mnv e de ES´=mv vem que nES´=nmv. Como $ES'<EF$ então $mDE=nES'<nEF$. Portanto $mDE<nEF$. Conclusão $mAB<nBC \Rightarrow mDE<nEF$

2°caso Vamos supor C entre B e S
De AB=nu vem que mAB=mnu. De BS=mv vem que nBS=nmv. Como $BS>BC$ então $mAB=nBS>nBC$. Portanto $mAB>nBC$.
De DE=nv vem que mDE=mnv e de ES´=mv então nES´=nmv. Como $ES'>EF$ então $mDE=nES'>nEF$. Portanto $mDE>nEF$. Conclusão $mAB>nBC \Rightarrow mDE>nEF$

3°caso C=S
De AB=nu vem que mAB=mnu e de BS=mv vem que nBS=nmv. Logo mAB=nBS
De DE=nv vem que mDE=mnv e de EF=mv vem que nEF=nmv. Logo mDE=nEF
Conclusão $mAB=nBS \Rightarrow mDE=nEF$

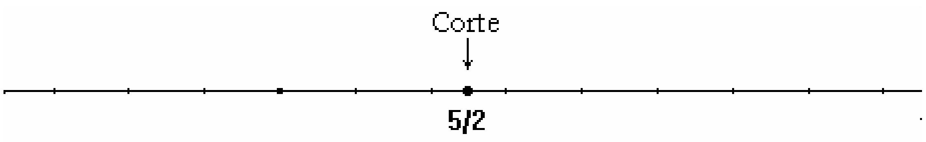
Eudoxo e Dedekind

Desde a crise provocada pela descoberta das grandezas incomensuráveis na Antiga Grécia, os matemáticos levaram vinte séculos para construir um objeto matemático cujo quadrado seja 2. Sabiam que nenhum número racional ao quadrado dava 2, sabiam que a diagonal de um quadrado de lado unitário podia ser construída com régua e compasso e que portanto existia, mas não sabiam como definir e operar com esses novos números. Foi somente no século XIX que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou.

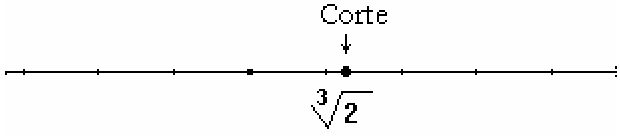
Galileu e Leibniz julgavam que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade, isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existir sempre um terceiro. Mas só isto não bastava para caracterizar esses objetos pois os números racionais também têm essa propriedade e não formam um "continuum". Se representarmos todos os números racionais sobre uma reta, não teremos preenchido totalmente os pontos da reta; restarão inúmeros "buracos".

Dedekind (1831-1916) se voltou para a questão do preenchimento dos "buracos" da reta desde 1858 quando dava aulas de cálculo. Refletindo sobre a questão, Dedekind se perguntou: O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? **E foi buscar a inspiração na teoria das proporções de Eudoxo (IV A.C)**. Dedekind chegou à conclusão que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes. *"Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado"* escreveu Dedekind. A grosso modo a sua idéia era a seguinte : Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional. Portanto, por meio dos cortes de Dedekind, amplia-se o conjunto Q introduzindo os números irracionais.

Por exemplo, os conjuntos $A=\{x \in Q / x<5/2\}$ e $B=\{x \in Q / x \geq 5/2\}$ determinam o corte que define o número real 5/2. Observe que nesse caso, B tendo menor elemento, o corte define um número real racional



Os conjuntos $A=\{x \in Q / x^3<2\}$ e $B=\{x \in Q / x^3>2\}$ determinam o corte que define o número real que usualmente denotamos por $\sqrt[3]{2}$. Observe que nesse caso, A não tendo um maior elemento e B não tendo menor elemento, o corte define um número real irracional.



Do mesmo modo, os conjuntos $A=Q_- \cup \{x \in Q_+ / x^2<2\}$ e $B=\{x \in Q_+ / x^2>2\}$ determinam o corte que define o número real irracional indicado por $\sqrt{2}$

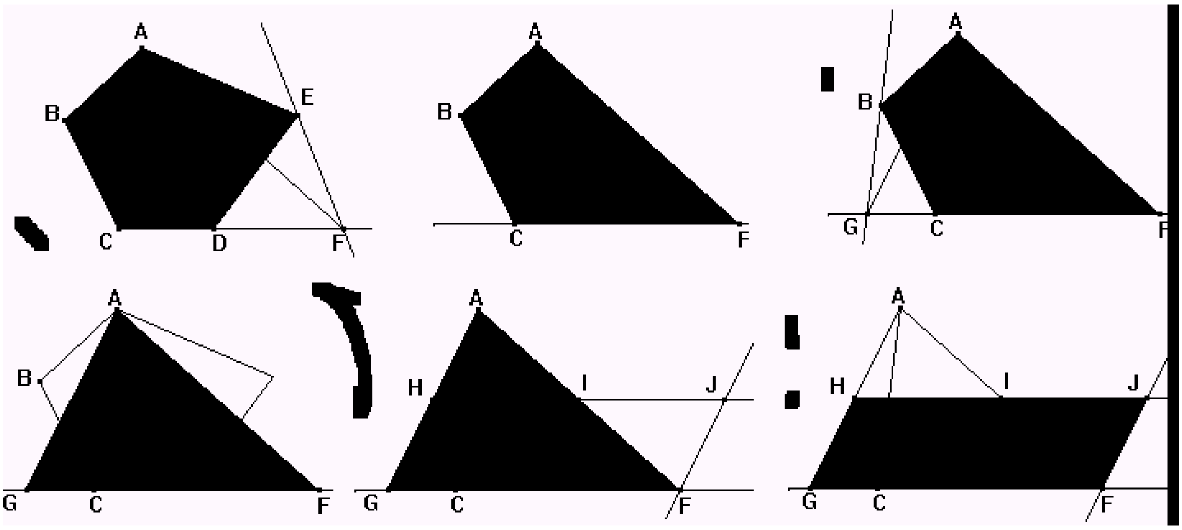
Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os "buracos" de Q e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais.

No começo do século vinte, uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russell (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes A e B é univocamente determinada pela outra, uma só bastava para a determinação de um número real. A partir daí, não sendo necessário considerar as duas classes de cada corte, começou-se a trabalhar somente com a classe da esquerda ou somente com a classe da direita. Assim, um número real passa a ser definido somente por uma das classes.

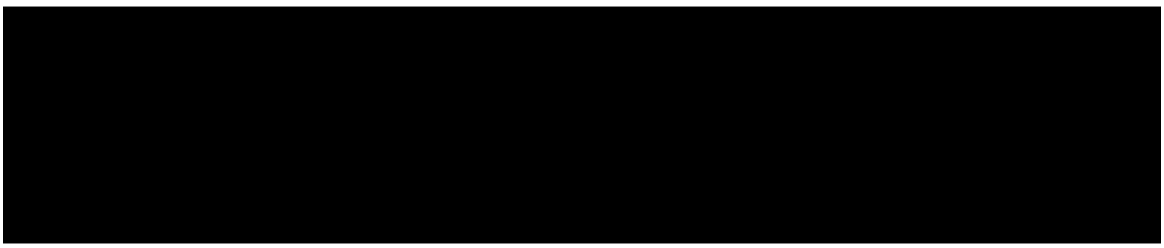
Relacionando a definição de Eudoxo com a de Dedekind podemos dizer que duas razões são iguais segundo Eudoxo se e somente se elas definem cortes iguais segundo Dedekind.

O princípio de exaustão : A negação do infinito

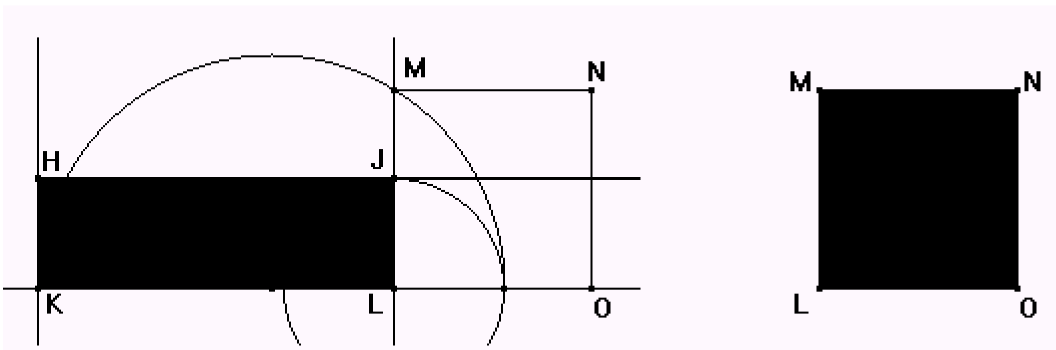
Os gregos sabiam comparar figuras poligonais. Todo polígono podia ser transformado num quadrado equivalente. Essa operação era chamada de quadratura. Fazer a quadratura de uma figura plana significava construir um quadrado equivalente à figura dada. O exemplo abaixo mostra um pentágono ABCDE sendo transformado num quadrilátero equivalente ABCF que por sua vez é transformado num triângulo equivalente AGF. A partir dos pontos médios H e I dos lados do triângulo obtém-se o paralelogramo equivalente GFJH.



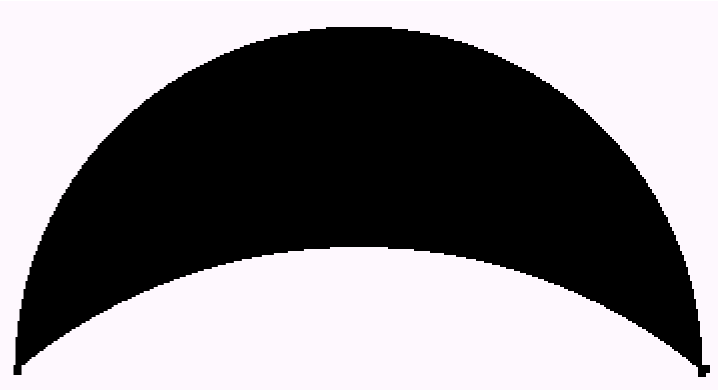
O paralelogramo é em seguida transformado no retângulo equivalente KLJH.



E finalmente o retângulo é transformado no quadrado equivalente LONM a partir da construção de uma média geométrica.



Os gregos sabiam fazer também a quadratura de certos tipos de lúnulas mas não tinham um método para comparar figuras quaisquer (curvilíneas ou não) em geral.



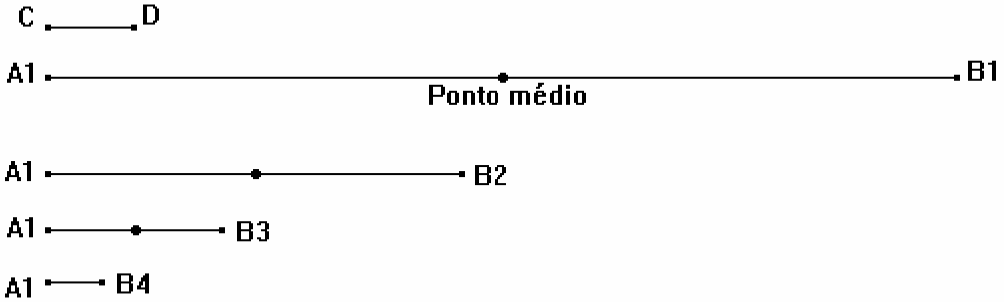
Uma lúnula é uma figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes.

Eudoxo sugeriu uma abordagem que permitia comparar figuras curvas com figuras poligonais.

No **coração desse método está a proposição I do livro X de Euclides chamada mais tarde de princípio de exaustão**:

> *«Dadas duas grandezas de mesma espécie, se retirarmos da maior uma parte maior que sua metade e do resto retirarmos uma parte maior que sua metade e assim por diante, obteremos após um número finito de etapas uma grandeza menor que as duas grandezas consideradas.»*

No desenho abaixo temos como grandezas dois segmentos CD e A1B1. Se do maior A1B1 retirarmos um parte maior que a sua metade obteremos A1B2. Se continuarmos o processo retirando do maior A1B2 uma parte maior que sua metade obteremos A1B3. Se retirarmos de A1B3 uma parte maior que a sua metade chegaremos a uma grandeza A1B4 que é menor que as duas grandezas consideradas e que são CD e A1B1.

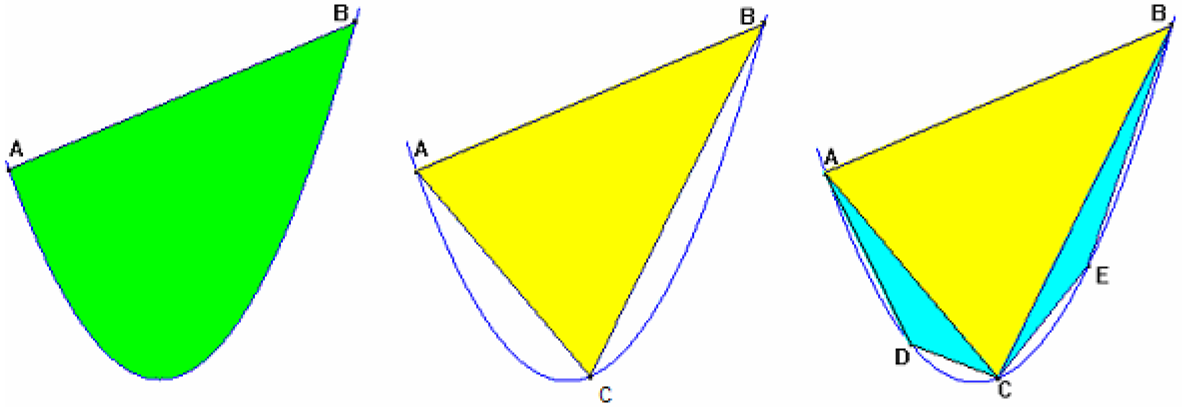


O método de exaustão de Eudoxo

O método de exaustão não é um método de descoberta. Por exemplo, para comparar a área A de um segmento parabólico com uma outra área B precisamos inicialmente descobrir uma superfície equivalente ao segmento parabólico. Em seguida provamos que as duas superfícies A e B têm áreas iguais procedendo da seguinte maneira: supõe-se que A>B, obtém-se a diferença A-B e aplicando o princípio de exaustão deve-se chegar a um absurdo. Em seguida procede-se da mesma maneira supondo que A<B, obtendo a diferença B-A que deve levar a uma segunda contradição. Conclui-se finalmente que A=B.

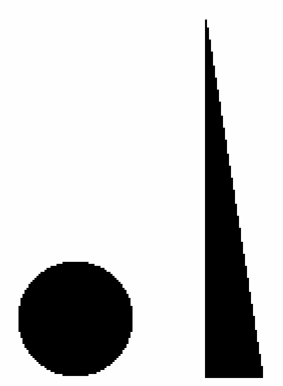
Até o final do século XVI as demonstrações eram sempre feitas por esse método do absurdo duplo.

Arquimedes descobriu inicialmente que a área do segmento de parábola é equivalente a 4/3 da área do triângulo ABC (a reta que passa por C é paralela à reta AB). Observe que podemos construir uma sucessão de polígonos com um número crescente de lados até **exaurir** a área do segmento parabólico. Em seguida pelo método de exaustão provou por duplo absurdo que as duas áreas eram iguais.



Ilustraremos o método de exaustão com a proposição I do livro *a medida do círculo* **de Arquimedes**. Apresentaremos a demonstração utilizando a notação moderna.

«Um círculo é equivalente (igual em área) a um triângulo retângulo no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro igual ao comprimento da sua circunferência.»



Para mostrar a área do círculo é igual à área do triângulo utilizaremos na primeira parte da demonstração polígonos regulares inscritos com número crescente de lados e chegaremos num absurdo e na segunda parte utilizaremos polígonos regulares circunscritos com número crescente de lados para chegar num segundo absurdo.

Indiquemos por **A a área do círculo** e **T a área do triângulo**. Temos 3 possibilidades: A>T, A<T e A=T.

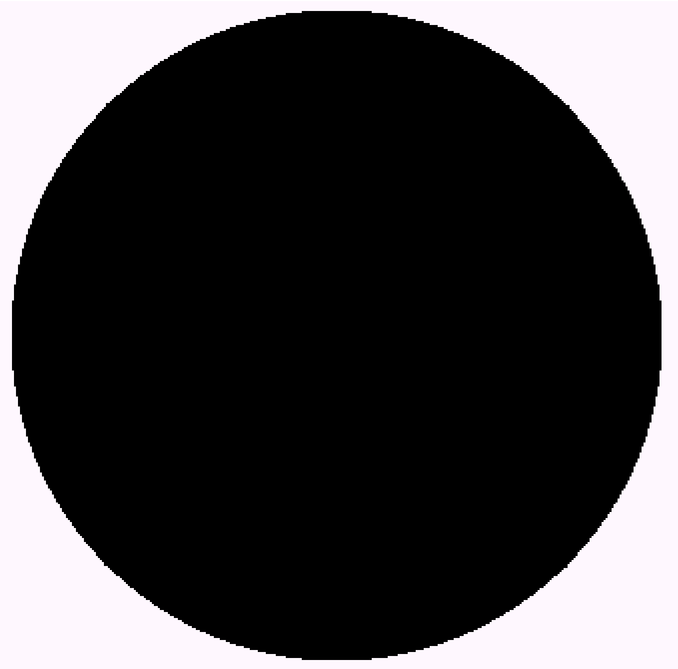
Suporemos inicialmente A>T (logo a diferença A–T corresponde a uma área)

Aplicaremos o princípio de exaustão às grandezas A e A–T.

Vamos retirar da maior que é A, um quadrado inscrito cuja área é L4 (a área L4 é maior que a metade da área A do círculo)

Retiro o quadrado de área L4.

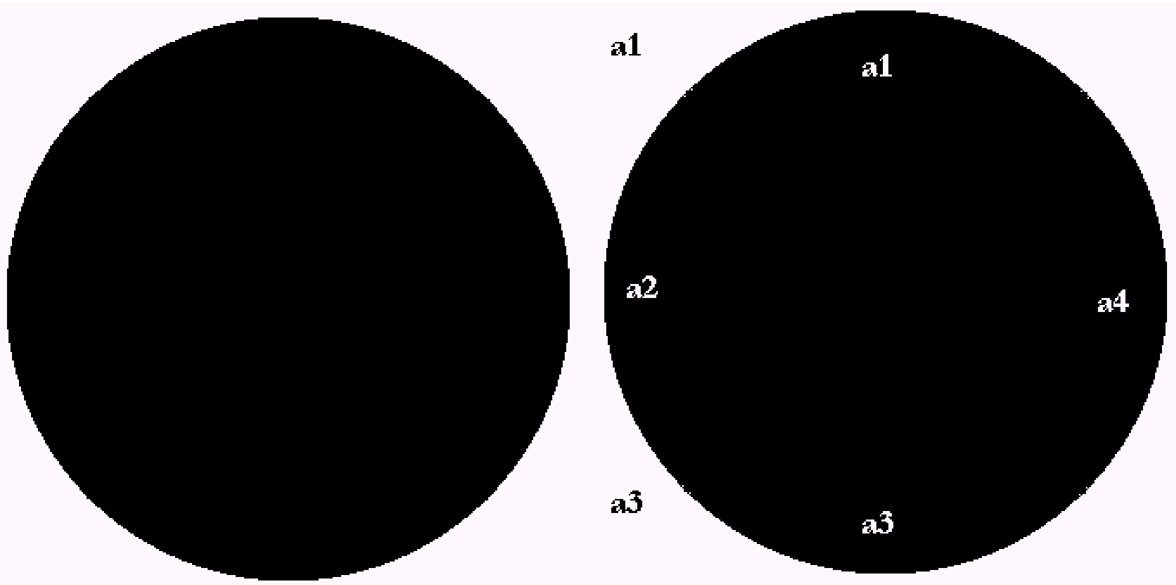
Sobrará: A – L4 (L4 á a área de um polígono regular de 4 lados)



Retiraremos do que sobra A–L4, uma parte maior que sua metade (a1+a2+a3+a4)

Sobrará: (A – L4) – (a1+a2+a3+a4) = A – (a1+a2+a3+a4+L4)=A – L8

(L8 é a área de um polígono regular de 8 lados)

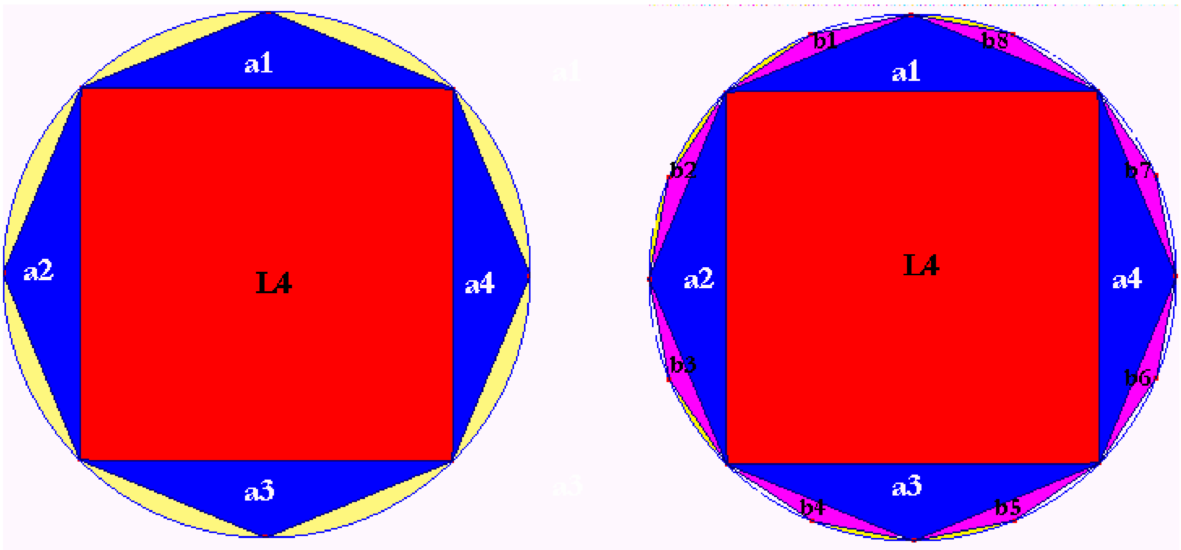


Retiraremos do que sobra A–L8, uma parte maior que sua metade b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8

Sobrará:(A–L8) – (b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8)=

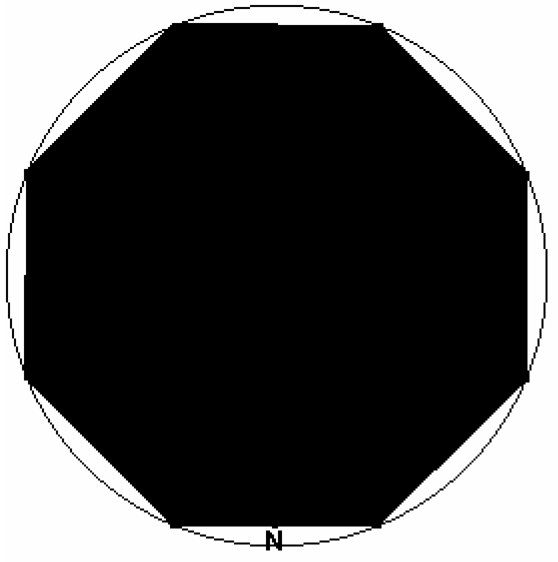
A–(b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8+a1+a2+a3+a4+L4)=A–L16

(L16 é a área de um polígono regular de 16 lados)



Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área Ln tal que A–Ln é menor que as duas grandezas A e A–T consideradas. Logo A–Ln < A–T. Donde T<Ln

Considere um polígono regular de área Ln inscrito no círculo de área A
O apótema ON é menor que R
O perímetro do polígono regular é menor que o comprimento C da circunferência.
ON. perímetro do polígono <R.C
ON.perímetro do polígono/2 < R.C/2. Mas ON. Perímetro/2=Área Ln do polígono e R.C/2 é igual à área do triângulo T. Logo Ln < T (Absurdo)

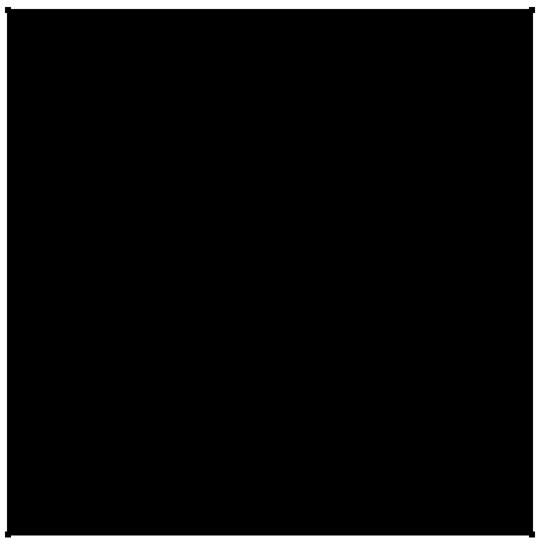


Vamos supor A<T (Logo T–A corresponde a uma área)

Seja L4 a área do quadrado circunscrito ao círculo

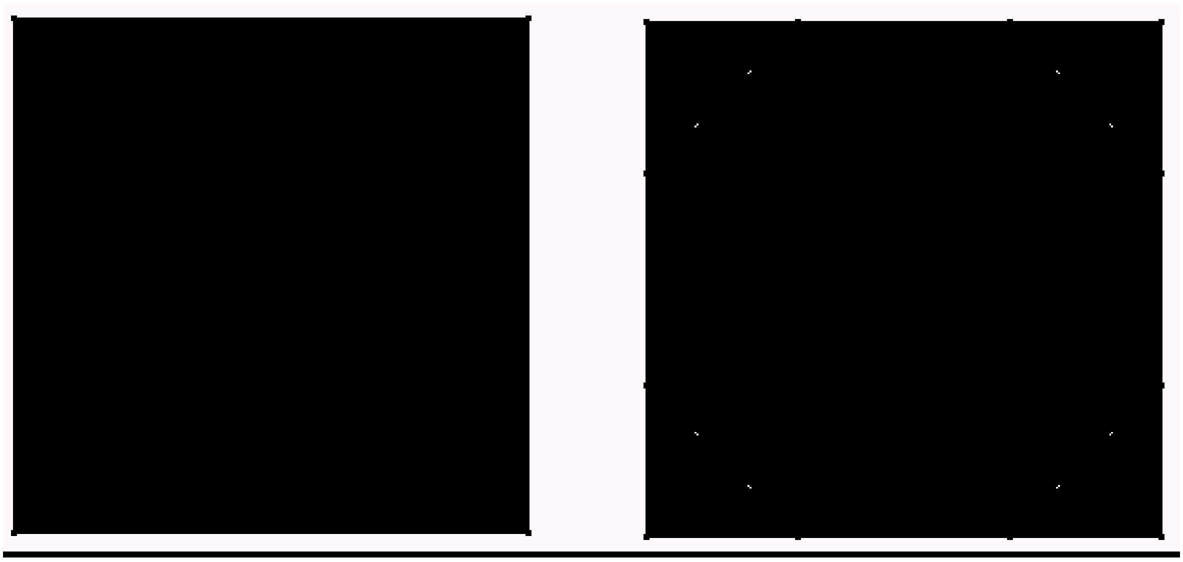
Vamos aplicar o princípio de exaustão às grandezas L4 e T–A

Vamos retirar da maior, quadrado circunscrito de área L4 uma parte maior que a sua metade. Sobra: L4 – A



Retiraremos do que sobra L4–A, uma parte maior que a sua metade a1+a2+a3+a4

Sobrará: (L4 – A) – (L4 – L8) = L8 – A (L8 é a área de um polígono regular de 8 lados)

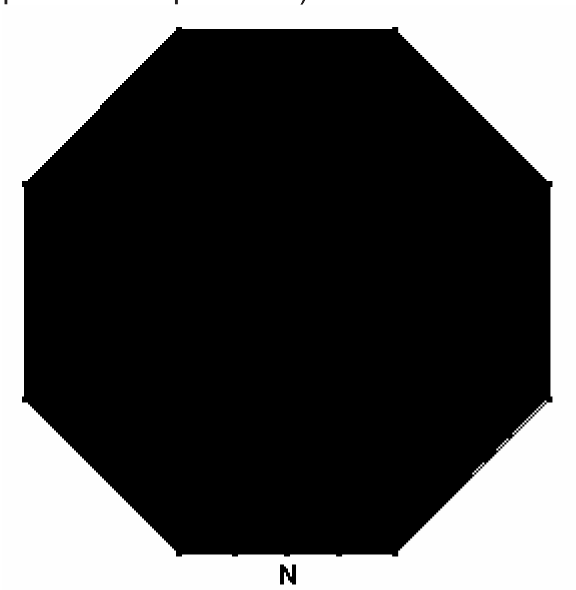


Retiraremos do que sobra L8 - A, uma parte maior que a sua metade b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8

Sobrará : (L8 - A) - (L8 - L16) = L16 – A

Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área Ln tal que Ln-A é menor que as duas grandezas. Logo Ln-A < T-A. Donde Ln<T

Considere um polígono regular de área Ln circunscrito ao círculo de área A e ON = R
O perímetro do polígono é maior que o comprimento C da circunferência. Logo
ON. perímetro do polígono > R.C. Dividindo por 2 os dois membros teremos:
ON.perímetro do polígono/2 > R.C/2. Mas ON. Perímetro do polígono/2=Ln e RC/2=T
Logo Ln > T (Absurdo pois vimos que Ln<T)



Como A>T levou a um absurdo e A<T levou a um outro absurdo, conclui-se que A=T.

Bibliografía

- Caveing, M. L´irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu´à Euclide, Presses universitaires, Paris,1998
- Euclide. Les Éléments Volume 3, Livre X, Presses Universitaires de France, 1998, traduction Bernard Vitrac.
- Baron,M.E. A matemática Grega, Editora Universidade de Brasília,1985
- Gardies, J.L. L´héritage épistémologique d´Eudoxe de Cnide, Paris, Librairie philosophique J.Vrin, 1988
- Polcino, F.C. A geometria na Antiguidade Clássica. São Paulo: FTD,1999
- Boyer, C. B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- Boyer, C. B. A The history of the calculus and its conceptul development. New York, Dover publications, 1959.

- Proclus de Lycie, les Commentaires sur le premier livre des Éléments d´Euclides, IREM de Lille, 1948.
- Nobre, S. Introdução à História da História da Matemática. Revista Brasileira de História da Matemática, vol 2 N°3
- Avila, G. RPM 7 pg 5 a 10

Vincenzo Bongiovanni, Professor do Programa.

E-mail: *valente@pucsp.br*

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 111 - 117
ISSN: 1815-0640

Cronoludia Matemática
Ismael Roldán y José Muñoz

Leyes de Murphy para matemáticos

2ª Entrega

Sobre demostraciones:

Conjetura de Gervasio

Si ha entendido entera la demostración es que algo importante se le ha pasado por alto.

Ley inversa de la demostración

Mientras más evidente sea un teorema, más complicado es demostrarlo de una forma que se entienda.

Lema de Sebastián

Es fácil explicar matemáticas de forma complicada, pero es muy complicado explicarlas de forma sencilla.

Lema de la planificación

Si no tiene idea de por donde empezar, dibuje muchas curvas, normalmente no sirve para resolver el problema, pero relaja.

Principio Nóbel de Rudnicki

Sólo alguien que entiende algo en profundidad es capaz de explicarlo de tal forma que no lo entienda nadie.

Principio de contradicción

La capacidad para explicar un concepto difícil es inversamente proporcional al conocimiento que se tenga de esa materia.

Paradoja de Murphy

Siempre es más fácil hacerlo de la forma más difícil.

Corolario de Diedonne

Sobre todo en la enseñanza de las matemáticas.

Regla de la presentación engañosa

Si el problema parece fácil, será difícil de resolver. Si parece difícil, no hay quien le hinque el diente.

Axioma de la abstracción

Cuando cree que por fin va a entenderlo, alguien lo convertirá en más abstracto.

Axioma de Priori

Sólo después de haber demostrado con muchas dificultades una nueva teoría descubrirá un libro donde hace años que se demostró lo mismo.

Corolario

Y además de una forma más fácil que la suya.

Principio de la conservación del error

Si arregla un error, se le estropeará otro cálculo correcto.

Teorema de Gonvield

No importa el cuidado con el que haga todos los pasos, el resultado siempre será erróneo.

Corolario de Huyntig

Siempre hay alguien que ya se había dado cuenta, pero no le había dicho nada porque creía que usted lo sabía.

Cita de Grossman

Los problemas complejos tienen soluciones erróneas sencillas y fáciles de entender.

Postulado de Pieter

Con un poco de esfuerzo, cualquier resultado simple puede explicarse con tal complejidad que no se entienda.

Sobre enseñanza:

Ley de Cajón

Por muy fácil que usted explique un concepto, siempre habrá alguien que no lo entienda.

Corolario de Wort

Mientras más explique lo mismo, mayor será la confusión de quien le escucha.

Axioma de Peano

Aunque usted no lo crea, repetir una demostración exactamente igual a quien no la ha entendido antes suele conducir al mayor de los fracasos.

Lema del estudio de la matemática

Si usted llega a la Universidad sin aborrecer las matemáticas, no se preocupe, aún le queda la Topología.

Postulado de Crastarin

Si sabe mucho sobre un tema dedíquese a su investigación, si sabe poco dedíquese a su enseñanza.

Observación de Einstein

En tanto los teoremas matemáticos están relacionados con la realidad, no son seguros; en cuanto son seguros, no tienen nada que ver con la realidad.

Postulado de Buell

Todo teorema relacionado con la realidad es casi imposible de demostrar, todo teorema que pueda ser demostrado deja de tener relación con la realidad.

Ley de Finman sobre las Matemáticas

Nadie quiere leer las fórmulas de otro.

Ley de Vile para los educadores

Nadie atiende en clase hasta que usted mete la pata.

Sobre errores:

Segunda ley de Scott

Cuando se ha detectado y corregido un error, se suele descubrir que no era un error.

Corolario de la ley de Scott

Después de la corrección, será imposible volver a poner en la ecuación la cantidad original.

Tercera ley de Finagle

En cualquier grupo de datos, la cifra que evidentemente es correcta, sin ninguna necesidad de comprobación, es la errónea.

Ley de la perseverancia del error o Ley del Fatuo

Ese error que usted ha sido incapaz de descubrir en su demostración a pesar de los múltiples repasos (nos queremos demasiado), será inmediatamente descubierto por cualquiera que le eche un vistazo a la demostración aún sin pedírselo.

Ley de Grelb sobre los errores

En cualquier serie de cálculos, los errores tienden a aparecer justo en el punto opuesto a aquél en el que usted empieza a comprobar si existen errores.

Ley de la falta de fiabilidad

Errar es humano pero, para liar las cosas de verdad, hace falta un ordenador.

Sobre estadística y azar:

Ley de Gumperson

La probabilidad de que algo suceda es inversamente proporcional a lo que quiera que suceda.

Aforismo de Aristóteles

Siempre se debe preferir el imposible probable al posible improbable.

Ley de la probabilidad pesimista

Si tiene que apostar póngase siempre en lo peor, tiene más probabilidades de acertar.

Segunda Ley de Levy

Sólo Dios puede hacer una selección aleatoria.

Ley de Willians y Holland

Si se reúnen suficientes datos, se puede demostrar cualquier cosa con ayuda de la estadística.

Ley de Maier

Si los hechos no se ajustan a la teoría, tendrá que deshacerse de ellos.

Corolarios:

1. *Cuanto más amplia sea una teoría, mejor.*
2. *Se puede considerar que el experimento ha sido un éxito cuando (para que se ajuste a su teoría) no hay que eliminar más del 50 por 100 de las medidas.*

Ley del tercio excluido

Si para un ajuste lineal toma tres datos y estos no están en línea, elimine cualquiera de ellos y quédese con los dos restantes.

Sobre publicaciones:

Ley de Johnson

Si se le pasa por alto un artículo de una revista, será éste el que explicaba lo que usted tenía más ganas de leer.

Corolario

Y sus amigos lo han perdido o lo han tirado.

Ley de la revista Harper

No descubrirá que había un artículo interesante hasta que no lo haya tirado.

Ley de la publicación

Si no tiene claro algún paso de su teoría no dude en publicarla en una revista especializada, las cartas criticándola pueden darle la pista que le falta.

Axioma de la publicación

El trabajo más importante de un investigador es encontrar que parte de su teoría es fácilmente publicable.

Sobre trabajo en equipo:

Teorema del trabajo en grupo

En un grupo de trabajo, mientras mayor sea el número de alumnos menor será el rendimiento de dicho grupo.

Axioma del trabajo en equipo

El tiempo necesario para encontrar y resolver un error en una nueva teoría es directamente proporcional al número de personas del departamento que se reúnen para estudiarlo.

Corolario de Pérez

En realidad el tiempo aumenta exponencialmente.

Otras leyes dispersas:

Principio del atasco circulatorio

La línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, pero en la conducción no suele ser la más rápida ni estar exenta de catástrofes.

Primer postulado del Isomurphysmo

Las cosas que no son iguales a otra, son iguales entre sí.

Segundo postulado del Isomurphysmo

Las cosas que deberían ser iguales no hay forma ni de que se parezcan.

Ley de Edwards sobre el esfuerzo/tiempo

Esfuerzo x Tiempo = Constante

A. Dado un tiempo inicial grande para hacer algo, el esfuerzo inicial será pequeño.

B. A medida que el tiempo se aproxima a cero, el esfuerzo tiende al infinito.

Corolario

Si no fuera por el último minuto, no se haría nada.

La regla de las reglas

La línea recta no existe.

Corolario tecnológico

Para demostrarlo intente cortar cualquier papel en línea recta con unas tijeras.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, páginas 119 - 121
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Carlitos está jugando con tres amigos y deciden comprar chocolates. Entre todos reúnen 4 soles[1] *y deciden que Carlitos vaya a comprar los chocolates a la bodega del barrio, con el encargo muy claro que debe gastar todo el dinero reunido y comprar el mayor número posible de chocolates. Carlitos acepta el encargo, pero en la bodega encuentra que sólo hay chocolates de 50 céntimos y de 30 céntimos. ¿Cuál es el mayor número de chocolates que puede comprar Carlitos?*

Como el problema que expuse en el número anterior, éste es otro problema sencillo de optimización, que también puede ser planteado en diversos niveles educativos, con los requerimientos básicos de manejar las operaciones aritméticas con números enteros y números decimales.

Para quienes tienen menos información matemática, el camino más natural y exitoso es el ensayo y error, acompañado de la intuición; pero no es extraño que quienes tienen mayor información matemática se pierdan entre ecuaciones y criterios de programación lineal.

Es pertinente referir el hecho anecdótico que surgió al plantear este problema en un taller para profesores de matemáticas, tutores de las delegaciones para la fase final de la olimpiada nacional de matemáticas en el Perú. También estaban presentes en el taller algunas madres de familia –amas de casa, no profesionales– y dada la sencillez del problema, les entregamos igualmente las hojas con el enunciado. Lo que ocurrió corroboró lo manifestado en el párrafo anterior, pues fue en la mesa de ellas que surgió más rápidamente de manera explícita el criterio que "*para comprar el mayor número de chocolates hay que comprar más del más barato*". Haciendo uso de este criterio, vieron que 13 es el mayor número de chocolates de 30 céntimos que podrían comprar, pero les sobrarían 10 céntimos; entonces fueron reduciendo este número hasta reunir con lo que queda lo suficiente para comprar chocolates de 50 céntimos. Así, por ensayo y error, o mejor por "tanteo inteligente", concluyeron que la solución es comprar 10 chocolates de 30 céntimos y 2 chocolates de 50 céntimos; es decir, el mayor número de chocolates que se puede comprar es 12, gastando los 4 soles (o sea los 400 céntimos).

[1] Unidad monetaria peruana.

Como es de imaginarse, un gran porcentaje de los profesores planteó la ecuación 0,3 x + 0,5 y = 4, la transformó en 3 x + 5 y = 40 y luego, examinando posibles valores de las variables llegó también a la conclusión que el mayor número de chocolates que puede comprar Carlitos es 12, siendo 10 de 30 céntimos y 2 de 50 céntimos; sin embargo, estos profesores no usaban el criterio intuitivo de comprar más del más barato y por ello no empezaban dando a x el valor 13, que sería el mayor valor admisible de esta variable, en este contexto. Muchos empezaron dando a x el valor cero, lo cual significa asumir como posibilidad optimizante no comprar chocolates de 30 céntimos, lo cual jamás estuvo en la mente de las madres de familia, que no plantearon la ecuación.

Los hechos narrados nos hacen pensar en qué medida para resolver problemas, en muchos casos nos dejamos llevar por los recursos matemáticos, sin detenernos a pensar en criterios intuitivos o tanteos inteligentes. Ciertamente, esto es consecuencia de los hábitos para resolver problemas, adquiridos desde la escuela; por ello, como profesores debemos ser muy cuidadosos de facilitar a nuestros estudiantes el desarrollo de su intuición científica y en particular de su intuición matemática. Es muy importante darles tiempo para que busquen sus propios métodos de solución de problemas y estimular su creatividad y sus iniciativas.

Espero que los lectores no piensen que estoy en contra del uso de las herramientas matemáticas. Lo importante es no desligar las herramientas de la intuición y aprovechar más las potencialidades que dan las herramientas. Por ejemplo en el problema que estamos analizando, usando adecuadamente la ecuación planteada, podemos hacer una demostración contundente de que 12 es el máximo número de chocolates que Carlitos puede comprar, pues considerándola simultáneamente con la ecuación x + y = k, (k representa el número total de chocolates) siendo x, y y k enteros no negativos, obtenemos $y = 20 - \frac{3k}{2} \geq 0$, lo cual implica que k debe ser un número par menor que 13; es decir $\mathbf{k} \in \mathbf{\{8,\ 10,\ 12\}}$. Como k debe ser el mayor posible, se concluye que k = 12 y en consecuencia y = 2 y x = 10.

Modificando el problema

- En un grupo de trabajo, luego de obtener la respuesta correcta al problema de Carlitos y siguiendo la sugerencia de hacer algunas modificaciones al problema, cambiaron los 4 soles por 44 soles, manteniendo los precios de los chocolates. Para encontrar la solución a este nuevo problema, observaron que 44 es 11 veces 4 y en consecuencia, la solución en este caso debería ser 11 veces la solución obtenida para el problema original; es decir, 22 chocolates de 50 céntimos y 110 chocolates de 30 céntimos, lo que da un total de 132 chocolates. Verificaron que el total de lo gastado de esa manera es 44 soles.

Invitamos al lector a examinar si este “razonamiento lineal” es correcto.

- Considerando la representación gráfica de la ecuación –que con frecuencia se hace al buscar la solución del problema– podemos formular un problema de geometría analítica, equivalente al de Carlitos:

Encontrar el punto (a, b) de la recta 3x + 5y = 40, tal que a y b sean enteros no negativos y a + b sea el número mayor posible.

Este problema puede resolverse visualmente, examinando una gráfica hecha con cuidado en papel cuadriculado.

- Ya en el campo de la geometría analítica, podemos plantearnos otros problemas a partir de éste:

1. *¿La existencia de un punto de coordenadas enteras en la ecuación de una recta, nos garantiza la existencia de otros puntos de coordenadas enteras en tal recta?*
2. *¿Cómo garantizar que una recta tiene puntos de coordenadas enteras?*

En los talleres con profesores de matemáticas y con estudiantes universitarios de ciencias que se plantearon estos problemas, surgieron discusiones y soluciones muy interesantes, llegando a recordar aspectos teóricos y prácticos de las ecuaciones diofánticas.

Veremos con mucho agrado que nuestros lectores nos escriban haciéndonos llegar sus comentarios o soluciones.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Libros

Junio de 2005, Número 2, páginas 123 - 129
ISSN: 1815-0640

M. Alcalá, J.M.a Aldana, Claudi Alsina, A.J. Bishop y otros.

Matemáticas Re-creativas

GRAÓ, Barcelona, 2004.

159 páginas. ISBN: 84-7827-342-5

Al asomarnos al contenido de *Matemáticas re-creativas* encontramos sugerentes ideas y propuestas concretas que invitan al lector interesado, al profesor, a introducir juegos y otros recursos didácticos al objeto de implicar al alumnado en el aprendizaje de las matemáticas como si de una aventura se tratara, aventura de emoción y conocimiento, de afectos y actitudes, de igualdad e integración, educativa en suma. El libro está organizado en 4 partes: la primera presenta artículos de fondo, mientras que las segunda, tercera y cuarta se centran, respectivamente, en temas de educación infantil, primaria y secundaria. Como suele ocurrir en las compilaciones, la orientación de los artículos es heterogénea, algunos se quedan más en la presentación de ideas, mientras que otros son más concretos, pero esto no desmerece su lectura.

En el primer artículo de fondo, *El juego matemático, juego de investigación*, se ofrece una perspectiva dinámica del aprendizaje matemático, se aboga por una enseñanza que plantee situaciones problemáticas al alumnado, de modo que lo capacite para actuar en la sociedad actual. Discute lo que significa hoy en día la alfabetización matemática. De esta forma propicia la reflexión del lector sobre los modos de enseñar y aprender matemáticas, así como el papel de éstas en la sociedad. Asimismo alerta del peligro del abandono del cálculo: no se trata de relegar el cálculo, sino de dotarlo de significado. Finalmente, se extrae la idea de que el aprendizaje de las matemáticas debe conectarse con las necesidades y los gustos de los estudiantes.

El papel de los juegos en educación matemática presenta el juego como punto de encuentro entre niños en situaciones multiculturales, al tiempo que resalta su valor como promotor de aprendizaje. Refiere características del juego, considerando la acción de jugar como una forma de la actividad social, existente en todas las culturas. Desde la etnomatemática, clarifica que lo universal en las matemáticas son las actividades en las que éstas se implican, no las ideas matemáticas. Estas actividades matemáticas, que producen las ideas matemáticas, son: contar, localizar, medir, dibujar, jugar y explicar. Acaba el artículo opinando que casi todo tipo de juegos puede ofrecer una buena situación para aprender matemáticas y para fortalecer el razonamiento matemático, y enfatizando la utilidad y la conveniencia del juego para aprender matemáticas. Asimismo comenta el significado de *recreation* no sólo como juego sino como re-creación.

Frente al desencanto profesional por el hecho de que los alumnos estudian cada vez menos y se aburren más, el autor de *¿Xornadas de matemática recreativa…? Sí…, por favor…* propone una formación en los centros al objeto de afrontar los problemas concretos. En esta formación hay que incluir buenas dosis de imaginación y la atención a las aportaciones de los especialistas, e intercambio de ideas entre los profesores. Ofrece una amplia caracterización de matemática recreativa en la que incluye no sólo los juegos, sino cualquier actividad que propicie aprender matemáticas y tenga carácter lúdico. Justifica su uso en que favorece la conexión entre distintas partes de la matemática y con otras áreas, así como habilidades y actitudes deseables en la resolución de problemas, y facilita la adecuación de la actividad al nivel de cada alumno y la creación de un buen clima de trabajo. Presenta las Jornadas de matemática recreativa como medio para que los profesores intercambien sus ideas y experiencias sobre cómo desarrollar actividades recreativas en la clase de matemáticas, actividades que motivan a los alumnos a implicarse en el aprendizaje de unas matemáticas que les parecen más cercanas a sus gustos e intereses.

El último artículo de fondo, *Matemática para todos, todos para las matemáticas*, presenta varios motivos para enfocar la enseñanza de las matemáticas partiendo de lo cotidiano, entre los que se incluyen los valores de crítica, juicio y deducción, acordes con los valores propios de la democracia y la ciencia. Plantea este enfoque como popularización de las matemáticas y propone aprestarnos a aumentar la audiencia (TV *share*). A continuación analiza varios ejemplos de actividades para dar respuesta a preguntas clave: ¿cómo modelizar en la educación primaria, ¿cómo hacer resolución de problemas sin saber calcular?, ¿hasta dónde se puede investigar con 14 o 15 años? El primer ejemplo, sobre el análisis de una foto de una ciudad, saca a la luz las diferencias entre una geometría de la calle débil y una en profundidad. Mientras que en la primera los procesos que aparecen son la observación simple, la contextualización, la descripción y la construcción dirigida, en ésta tenemos visualización, integración, justificación, diseño, verbalización, contraste, predicción, descripción, control, cambio de representación, construcción conceptualizada, interrogación y esquematización. El ejemplo de las sombras propone la consideración del aula como un grupo de investigadores sobre modelización, incluyendo los errores como algo natural entre investigadores. El autor establece un símil entre la relación entre estas actividades y el tradicional trabajo del teorema de Thales y los ángulos, de un lado, y la actitud ante una nueva lavadora, que plantea nuevos retos, frente a la actitud ante la lavadora de siempre, de la que sabemos cómo trabaja pero que en unos años no servirá, pues no habrá repuestos para ella, de otro lado. Además, presenta un cuadro del plan *renove* didáctico en el que compara los viejos productos con las nuevas marcas de calidad. Luego pasa a considerar los intereses de los clientes e insiste, aportando ejemplos, en que desde los 6 años pueden plantearse preguntas relacionadas con propiedades matemáticas, usando cuentos, ritmos, psicomotricidad, música, el entorno, los aparatos científicos, la cultura de la calle, lo social, lo económico y lo histórico. Las necesidades comunicativas y las ventajas de la reflexión subyacen a estos ejemplos. Finaliza el artículo mencionando el control de calidad, donde, entre otras cosas, se incite a los profesores a profundizar en las actividades que proponen en clase: no basta presentar algo atractivo, hay que sacarle partido para aprender matemáticas.

Pasando a la sección dedicada a la educación infantil, el primer artículo, *Aprender a apreciar las matemáticas*, alude a la facilidad que tienen los niños de disfrutar de los que les resulta atractivo, frente al usual desencanto que les produce paulatinamente la enseñanza de las matemáticas. Considera que el aprecio por las matemáticas es el paso previo para entrar en ellas, no el resultado de su conocimiento. Propone favorecer la curiosidad para llegar al conocimiento y afirma que esto es posible. Se refiere a continuación a interesantes experiencias que desarrollan la motivación matemática, preguntándose si los profesores no implicados en su diseño las apoyan. Recomienda la lectura de Canals (2000) por ofrecer un camino claro a los profesores de educación infantil interesados en acompañar la enseñanza de las matemáticas de juegos, canciones, dramatización, etc. Presenta una receta para difundir estas ideas renovadoras: que los maestros aprecien las matemáticas, olvidándose de recuerdos negativos y adquiriendo confianza en lo que han de enseñar y en cómo han de enseñarlo; y prestar tanta atención al cómo hacer las matemáticas como al qué hacer en ellas. Finaliza diciendo que en estos días saber y apreciar deben caminar unidos.

Los juegos de puntería: una propuesta lúdica para el aprendizaje de la numeración, se fundamenta en la necesidad de relacionar la matemática (la numeración en particular) con el entorno y en el hecho de ver la numeración como algo perceptivo, ligado a cosas y lugares concretos, paso previo a la abstracción y a la comprensión de los algoritmos. La autora propone los juegos de puntería porque implican el conocimiento físico y aspectos básicos del razonamiento numérico y su representación. Asimismo permiten que los niños se organicen por sí solos, favoreciendo su autonomía. Se trata de una experiencia llevada a cabo durante 3 años sucesivos con niños de 3 a 5 años. Decidieron agrupar a los niños en pequeños grupos para que no se impacientaran. La comunicación de las decisiones de cada grupo favoreció la interacción. A continuación se presentan los distintos momentos del juego y su evolución hacia un desarrollado estructurado. En un primer momento no hay reglas, se molestan entre sí, algunos no pueden jugar (previamente se preparó una caja con la cara de un payaso pintada con la boca grande, y cada alumno pintó su bola de papel). En un segundo momento se acuerdan normas en asamblea (distancia de tiro, número de tiros…). En el tercer momento se van anotando los resultados (unos hacen dibujos, otros usan números), las discusiones en asamblea van mejorando las representaciones, y se diversifican los materiales (lanzan anillas a las patas de una silla puesta boca abajo, etc). En el último momento, correspondiente al final de 3º de infantil, se copian los datos en una tabla organizada, y anotando aciertos y desaciertos se trabaja el cálculo mental y las descomposiciones. También se valoran las actitudes en las asambleas al ver que algunos grupos molestan a otros impidiéndoles tirar. En la valoración de la experiencia se aprecia un progreso individual en todos los niños. Subyace a esto la consideración del error como fuente de aprendizaje, la adecuación de las actividades al nivel de cada niño, la necesidad de que ellos resuelvan conflictos y de que sean conscientes de su aprendizaje y de lo que pueden aprender de los demás, entre otras cosas.

Las autoras de *Materiales y recursos matemáticos en educación infantil* organizan las actividades de los niños en rincones, talleres y grupos y consideran que casi cualquier actividad cotidiana que realizan los niños implica conocimientos matemáticos. Centran el trabajo en actividades lúdicas pues opinan que los niños aprenden jugando con objetos e interactuando con sus compañeros. Presentan un recurso, el *Calendario mágico*, que se desarrolla en gran grupo. Se trata de actividades (una por día) que los niños han de resolver. Este calendario es semanal en infantil de 3 años y mensual en 4 y 5 años. De 3 a 5 años se va dando cada vez más importancia a la formulación de preguntas y menos a lo descriptivo. El *Vagón viajero* es una actividad en la que colaboran los padres. Los niños llevan a casa una caja decorada como un vagón de tren donde hay un problema e instrucciones para los padres. El problema se resuelve en familia y el niño explica en clase su solución. Además de trabajarse contenidos como la seriación, la medida o el cálculo, se trabaja la verbalización y se fomenta la participación de la familia. Finalmente, aportan un ejemplo para trabajar en pequeños grupos: los rincones lúdicos. En concreto, se trata de un juego de imitación donde el niño va a comprar alimentos y luego los cocina. Se trabaja numeración, cálculo mental, medidas de peso y capacidad e iniciación a la suma.

Empezar jugando. Juegos y trucos numéricos es el primer artículo de la sección dedicada a educación primaria. El autor coincide con Martin Gardner en que el juego es una buena forma para hacer que las matemáticas interesen a los niños. Aparte de abordar contenidos matemáticos, el juego favorece la socialización y desarrollar el razonamiento lógico. Se centra en juegos numéricos por la importancia de los números en la educación primaria. Presenta el juego de los números mágicos, trucos numéricos basados en las propiedades de ciertos números. Lo ejemplifica con el 10101. Al escribir un número de 2 cifras 3 veces seguidas y dividirlo sucesivamente por 37, 13, 7 y 3 se obtiene el número de partida. Se echa en falta una mayor pormenorización del juego que no lo haga parecer tan mecánico. ¿Cómo se llega a que los niños descubran la propiedad (10101 = 37 x 13 x 7 x 3; “ababab” = “ab” x 10101). Otro ejemplo es el número diana (hay que obtener un número a partir de otros y operaciones), que está bien desarrollado y ofrece variantes, siendo útil para el cálculo mental. Luego pasa a los cuadrados numéricos (cuadrados 4x4 de números de una serie), cuya explicación, según se dice, no corresponde a los alumnos de primaria. ¿Cuál es, pues, la utilidad de este juego en primaria? ¿Interesa que las matemáticas aparezcan como algo inalcanzable? El último ejemplo es "A la carta", clásico juego de adivinación de los números de 2 cartas (o dados) a los que somete a varias operaciones para obtener un número final indicativo de dichos números. Sirve para trabajar la notación posicional, pero hay que tener cuidado de no convertirlo en un juego mecánico.

El siguiente artículo de esta sección, *"El jarrón mágico": el juego de la multiplicación*, fundamentándose en la necesidad y la capacidad de los niños para describir, justificar y compartir cosas, presenta una experiencia de trabajo en matemáticas a través de un cuento en el que la cantidad de agua de un jarrón se convierte en protagonista. Se trabaja la idea del tanto por uno, esencial para comprender la multiplicación. Asimismo se abordan los efectos amplificadores de la multiplicación con un sentido crítico. Los niños lo viven como una verdadera aventura matemática y dotan de significado a la situación. La experiencia está detallada, pudiéndose ver los diferentes pasos que se dan en la clase para que los niños vayan haciéndose con las cantidades que se van obteniendo (incluyendo diálogos con la maestra). La comparación con *El gato tragón*, donde la relación es aditiva, es muy oportuna para comparar los dos tipos de crecimiento. La autora defiende el planteamiento de contextos complejos por la posibilidad de integrar varios contenidos.

Los autores de *Un buen recurso: hacer matemáticas* reconocen el interés de los niños por descubrir cosas y cómo se va mermando a lo largo de su educación. Afirman que esta situación se agrava en el caso de las matemáticas por sus dificultades propias y por las concepciones sociales que la ven como materia de mayor complejidad y reservada para unos pocos, así como por una metodología escasamente motivadora. Proponen potenciar la motivación, la manipulación y la difusión de la cultura matemática. Para la manipulación, para *hacer* matemáticas proponen trabajar con materiales y recursos, de modo que se rompa la rutina de ejercicios, se estimule la lógica y se desarrollen ciertas capacidades y actitudes frente al conocimiento matemático. A continuación presentan algunos ejemplos: observación de ilusiones ópticas, colorear dibujos de figuras imposibles (que recuerda a Escher), dividir en partes iguales (con lo que trabajan isometrías en el plano), el tangram (con el que abordan la construcción de polígonos cóncavos y convexos, cálculo de áreas y perímetros. Luego muestran algunos juegos: bingo (con tarjetas de operaciones), puzzle (operaciones y resultados), atraviesa el panal (juego por pareja de operaciones). Relacionados con la magia matemática, presentan la multiplicación por 11 y el cuadrado de los números terminados en 5. Se echa en falta algún comentario didáctico. En relación con la consideración de la matemática como cultura, los autores presentan un poema, otro de Gloria Fuertes (Canción de multiplicar) y otro sobre π. Luego proponen un acercamiento crítico a la prensa, frente a la manipulación televisiva. Medir y comparar medidas, buscar formas, ordenar, etc. son acciones que sugieren, aunque no describen cómo trabajarlas. Finalmente, proponen trabajar el vídeo: la patrulla matemática (para las operaciones aritméticas básicas) y Alicia en el País de las Transformaciones Geométricas.

La sección de educación secundaria comienza con *Los juegos de conocimientos: un recurso para enseñar matemáticas*. Su autora considera el juego como herramienta que puede motivar al alumno para aprender matemáticas, siempre que se presente de forma motivadora, que sus reglas sean sencillas, los contenidos matemáticos adecuados, represente un reto y que duren aproximadamente una sesión. Se centra en juegos que implican conocimiento de tópicos clásicos, pero entiende que también se pueden trabajar estrategias con estos juegos. El primer ejemplo es el *Chinchón algebraico*, baraja de ecuaciones donde se trabajan destrezas en la resolución de ecuaciones de primer grado. Luego nos ofrece *Tirar el dado*, que se emplea para introducir el concepto de probabilidad. Es muy interesante esta aportación, pues normalmente los juegos se usan sólo para reforzar, no para introducir conceptos. También presenta *La cadena geométrica*, para afianzar propiedades de los polígonos, tomado del Grupo Azarquiel. Finalmente, en *Suma de letras* ejemplifica el abordaje de estrategias (observar regularidades, conjeturar, etc.) en estos juegos de conocimientos sobre resolución de sistemas.

En *Las operaciones con fracciones en el primer ciclo de la ESO*, su autor propone trabajar la comprensión, no la simple memorización, aunque se necesite más tiempo, pues el aprendizaje memorístico es *efímero por ser epidérmico*. Parte de la hipótesis de que *las operaciones con fracciones se aprenden como las operaciones con naturales y, por tanto, conviene afrontarlas como una extensión de las operaciones con naturales*. Esto le lleva a la manipulación de material físico y a la reflexión personal, con la intención de obtener el código operatorio (simbología y normas operatorias) y aplicar el modelo a la resolución de problemas. Su planificación se apoya en que los alumnos conocen la noción de equivalencia y la generalización de las estructuras operatorias del sistema métrico decimal. Sugiere actuar sobre materiales inicialmente en una primera fase para luego acercarse a la algoritmización. Presenta 10 problemas para trabajar con cuartillas que se subdividen, cartas y dominós. La operación concreta da paso a la operación como patrón numérico. Se abandona la comprobación empírica y el algoritmo muestra su eficacia. Finalmente, se abordan las fracciones con números negativos y la potenciación y radicación de fracciones. El autor da mucha importancia al contexto, que debe ser de investigación colectiva en clase.

El último artículo del libro es *De la calle al ordenador*. Su autor es consciente de la dificultad de relacionar la tecnología y la realidad y propone que a tal efecto se parta de situaciones ricas en conocimientos, de una experiencia acumulada y de la herramienta informática adecuada. Cita el Cabri II para simular fenómenos reales en geometría, pues permite el movimiento, así como elementos variables e introduce el color, y aprende con el usuario. Presenta el ejemplo del triángulo de base variable con Cabri II y lo relaciona con diversos aparatos: el gato elevador, la puerta levadiza, el motor de explosión y el hinchador de pie. Afirma que así se fomenta el aprendizaje de la geometría dinámica y conecta las matemáticas con la tecnología.

En resumen, un libro variopinto que nos muestra la colorida variedad de juegos y recursos que pueden emplearse en la enseñanza de las matemáticas para hacer de ellas una materia atractiva.

José Carrillo

Universidad de Huelva

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2005, Número 2, página 131
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, letra tipo **aria**l, y tamaño **12 puntos**, interlineado sencillo, márgenes de 2,5 cm. en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 10 páginas, incluyendo figuras. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.