UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XVII – Número 61 – Abril 2021

http://union.fespm.es/index.php

ÍNDICE

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 61. Abril 2021

Páginas 1-3

EDITORIAL

Estimados lectores

¡Ha llegado el primer número publicado del año 2021!

Este es para nosotras, además, un número especial ya que comenzamos con la nueva dirección de la revista, como continuación del trabajo de las directoras Celina Abar y Sonia Camargo Igliori (Brasil), quienes llevaron a cabo esa tarea desde el 2015 a 2020. Ellas nos acompañaron en las tareas vinculadas con la transición de la dirección y, en este número, nos complacen con un artículo que se puede leer en la sección de "Firma Invitada".

Con relación a la dirección de la revista, nuestro objetivo es mantener la relevancia y la reconocida trayectoria que tiene UNIÓN. Este espacio colabora con la comunicación en las diferentes líneas de investigación en Educación Matemática, en todos los niveles educativos, con el gran compromiso y la responsabilidad que implica llevar adelante tal tarea.

En cuanto a la organización mantendremos las **secciones**:

●Créditos

●Editorial

●Firma Invitada: destinada a la publicación del material de una persona que represente a la Educación Matemática en cada uno de los países miembro de FISEM y de otros lugares.

●Artículos: destinada a la publicación de artículos de investigación y de experiencias educativas, en Educación Matemática en todos los niveles educativos.

●Propuestas áulicas: en la que se ofrecen recursos motivadores para utilizar en forma creativa que surgen de las aportaciones recibidas.

●El Rincón de los Problemas: en este espacio a cargo del profesor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú) se ofrece en cada número una situación problemática y sus formas de abordarlo.

Además, en consideración con la propagación, el avance y el progreso que ha tenido el software GeoGebra en todo el mundo como recurso educativo, en especial en matemática, es que hemos creado desde este número una nueva sección a la que llamamos: “**GeoGebra en UNIÓN**”.

En esta sección contaremos con la colaboración de Alejandro Gallardo (Licenciado en Matemática por la Universidad de Málaga) en la que se invitará a un profesor/investigador a presentar novedades, problemas, actividades, entre otras, que vinculen GeoGebra con los procesos educativos en matemática. De todos modos, también se continúa recibiendo artículos de investigación y/o experiencias áulicas en las que se utilice el software GeoGebra, que serán destinadas a las secciones: Artículos y Propuestas Áulicas. En esta oportunidad Agustín Carrillo de Albornoz Torres relata el desarrollo y el éxito que ha logrado en estos últimos años el Club GeoGebra Iberoamericano.

Próximamente, en el sitio web de UNIÓN se encontrará disponible el acceso a un formulario mediante el cual el usuario podrá enviarnos información acerca de actividades y eventos relacionados con la Educación Matemática. Luego, se compartirá en una pestaña denominada Novedades, de libre acceso.

En relación con la administración de la plataforma OJS, en la que se aloja la revista, hemos trabajado para hacer cambios que permitan proporcionar mayor visibilidad y difusión a los artículos publicados, mejorar la interfaz para lectores y usuarios, y modificamos cuestiones referidas al aspecto general del sitio web, entre otras cosas. Todo esto con el objetivo de adecuarse a los estándares internacionales de revistas científicas.

En este sentido, se incluirán en las publicaciones: ORCID de los autores, título, resumen y palabras clave en español y en portugues, referencias bibliográficas visibles en la página del artículo.Gracias a la mejora de los metadatos de cada artículo, los algoritmos recolectores de esta información tendrán un mejor acceso y esto garantizará una mayor visibilidad de la publicación. También, incluimos en la portada una nube de palabras clave que direcciona a artículos de la revista vinculados con estas.

En este número, en la sección Artículos, se publican doce trabajos de investigadores de Argentina, Brasil, Colombia, Chile, España, México, Perú y Venezuela, vinculados con investigaciones que problematizan y reflexionan sobre las prácticas en el aula y las experiencias diseñadas para desarrollar actividades con los estudiantes. Esto brinda nuevas y diversas propuestas para considerar en la enseñanza de la matemática en la actualidad, así como en la formación de futuros docentes en matemática.

En la sección Rincón de los Problemas, el profesor Uldarico Victor Malaspina Jurado, nos comparte la propuesta: Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas. En Propuestas Áulicas, Bernat Ancochea Millet, José Manuel Arranz San José y José Muñoz Santonja, nos presentan una actividad sobre cómo trabajar en el aula superficies de revolución con GeoGebra, utilizando los conocimientos de geometría y análisis.

Para los próximos números, además de los artículos en las temáticas habituales que recibe la revista, se esperan contribuciones que proporcionen nuevas herramientas para abordar los distintos escenarios que surjan a causa de los cambios producidos a nivel mundial, y en la Educación Matemática en particular, a causa de la pandemia por el COVID-19. Estos nuevos escenarios han modificado las modalidades de enseñanza y de aprendizaje que están siendo recién investigadas. Surgen preguntas del estilo: *¿Qué cambios ha provocado en la Educación Matemática la pandemia? ¿Serán permanentes? ¿Cuáles recursos la han favorecido? ¿A partir de los distintos modos de enseñanza, están los estudiantes desarrollando nuevas habilidades al aprender matemática? ¿Y los profesores? ¿Se ha modificado el modo de evaluar los aprendizajes? ¿Qué nuevos retos han surgido para profesores, estudiantes y/o padres en tiempos de pandemia?* Estos son algunos de los interrogantes que se abren, pero quedan pendientes muchos otros, que seguramente no mencionamos e invitamos a explorar y compartir aquí sus aportes, estimamos que estos serán de interés para la sociedad actual.

Nos despedimos de ustedes, esperando tengan buena lectura, además de agradecer a los revisores de los artículos, cuya labor es invaluable, y a los autores que han elegido esta revista para difundir sus trabajos.

Karina y Viviana

ISSN: 1815-0640

Número 61. Abril 2021

Páginas 1-3

EDITORIAL

Caros leitores

A primeira edição publicada do ano 2021 chegou!

Este é também um número especial para nós, pois demos início à nova direção da revista, dando continuidade ao trabalho das diretoras Celina Abar e Sonia Camargo Igliori (Brasil), que realizaram essa tarefa de 2015 a 2020. Elas acompanharam -nos nas tarefas relacionadas com a transição da liderança e, neste número, agradam-nos com um artigo que pode ser lido na secção "Assinatura do Convidado".

Em relação à direção da revista, nosso objetivo é manter a relevância e reconhecida trajetória da UNIÓN. Este espaço colabora com a comunicação nas diferentes linhas de investigação em Educação Matemática, a todos os níveis de ensino, com o grande empenho e responsabilidade envolvidos na realização de tal tarefa.

Quanto à organização, manteremos as seções:

- Creditos
- Editorial
- Assinatura do Convidado: destina-se à publicação do material de uma pessoa que represente a Educação Matemática em cada um dos países membros do FISEM e em outros lugares.
- Artigos: destina-se à publicação de artigos de pesquisa e experiências educacionais em Educação Matemática em todos os níveis de ensino.
- Propostas de sala de aula: nas quais são oferecidos recursos motivadores para serem usados de forma criativa, oriundos das contribuições recebidas.
- O Canto dos Problemas: neste espaço do professor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú), cada questão apresenta uma situação problemática e suas formas de abordá-la.

Além disso, considerando a difusão, avanço e progresso que o software GeoGebra tem tido em todo o mundo como recurso educacional, especialmente em matemática, a partir deste número criamos uma nova seção que chamamos de: "GeoGebra na UNIÃO".

Nesta secção teremos a colaboração de Alejandro Gallardo (Licenciado em Matemática pela Universidade de Málaga) na qual um professor / investigador será convidado a apresentar novidades, problemas, actividades, entre outros, que liguem o GeoGebra aos processos educativos em matemática. De qualquer forma, continuamos recebendo também artigos de pesquisa e / ou experiências em sala de aula em que seja utilizado o software GeoGebra, que serão alocados nas seções: Artigos e Propostas de Sala de Aula. Na ocasião, Agustín Carrillo de Albornoz Torres relata o desenvolvimento e o sucesso que o Clube Ibero-americano do GeoGebra alcançou nos últimos anos.

Em breve, estará disponível o acesso a um formulário no site da UNIÓN por meio do qual o usuário poderá nos enviar informações sobre atividades e eventos relacionados à Educação Matemática. Em seguida, será compartilhado em uma aba chamada Notícias, de livre acesso.

Em relação à administração da plataforma OJS, onde a revista está hospedada, temos trabalhado para fazer alterações que nos permitam dar maior visibilidade e divulgação aos artigos publicados, melhorar a interface para leitores e usuários, e modificar dúvidas sobre o aspecto geral do site, entre outras coisas. Tudo isso com o objetivo de se adequar aos padrões internacionais de periódicos científicos.

Nesse sentido, serão incluídos nas publicações: ORCID dos autores, título, resumo e palavras-chave em espanhol e português, referências bibliográficas visíveis na página do artigo Graças ao aprimoramento dos metadados de cada artigo, os algoritmos de coleta dessas informações terão melhor acesso e isso garantirá maior visibilidade da publicação. Além disso, incluímos uma nuvem de palavras-chave na capa que direciona para artigos de revistas relacionados a elas.

Neste número, na seção Artigos, são publicados doze trabalhos de pesquisadores da Argentina, Brasil, Colômbia, Chile, Espanha, México, Peru e Venezuela, vinculados a pesquisas que problematizam e refletem sobre práticas e experiências de sala de aula destinadas a desenvolver atividades com alunos . Isso fornece novas e diversas propostas a serem consideradas no ensino de matemática hoje, bem como na formação de futuros professores de matemática.

Na seção Canto dos Problemas, o professor Uldarico Victor Malaspina Jurado, compartilha a proposta: Triângulos em um retângulo. Situação, atividades, questões e problemas. Nas Propostas Áulicas, Bernat Ancochea Millet, José Manuel Arranz San José e José Muñoz Santonja, apresentam-nos uma atividade sobre como trabalhar superfícies de revolução com o GeoGebra em sala de aula, utilizando os conhecimentos de geometria e análise.

Para os próximos números, além das reportagens sobre os temas habituais que a revista recebe, são esperadas contribuições que forneçam novas ferramentas para enfrentar os diferentes cenários que surgem devido às mudanças produzidas em todo o mundo, e na Educação Matemática em particular. Pandemia do covid19. Esses novos cenários modificaram as modalidades de ensino e aprendizagem recentemente investigadas. Surgem questões do estilo: Que mudanças a pandemia causou na Educação Matemática? Eles serão permanentes? Que recursos o favorecem? A partir dos diferentes modos de ensino, os alunos estão desenvolvendo novas habilidades ao aprender matemática? E os professores? A forma de avaliar a aprendizagem mudou? Que novos desafios surgiram para professores, alunos e / ou pais em tempos de pandemia? Estas são algumas das questões que se abrem, mas permanecem muitas outras, que certamente não mencionamos e os convidamos a explorar e a partilhar aqui as suas contribuições, acreditamos que estas serão do interesse da sociedade de hoje.

Nos despedimos de você, desejando uma boa leitura, além de agradecer aos revisores dos artigos, cujo trabalho é inestimável, e aos autores que escolheram esta revista para divulgar seus trabalhos.

Karina y Viviana

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-14

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

Um Ensaio sobre as Potencialidades de Constructos Teóricos da Educação Matemática

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Sonia Barbosa Camargo Igliori

Resumen

Este artículo presenta un ensayo para reflexionar sobre las potencialidades de los constructos teóricos de la educación matemática, a través de la reanálisis, de dos actividades de investigación en esta área. Estos constructos teóricos son la *situación didáctica* de Brousseau, el *recurso y el documento* de Gueudet y Trouche. El ensayo pretende suponer que ciertos constructos teóricos de la educación matemática tienen alcance y condición consensuadas. Esta potencialidad se expresa en el vigor teórico de los constructos para la comprensión de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. Las autoras consideran la necesidad de la zona demostrada por los teóricos en la búsqueda de consenso. Para ellos se trata de constructos con esta condición, pero no las únicas, otras deben ser consideradas. El objetivo de este ensayo es abrir el debate sobre este tema. La forma ensayista se consideró adecuada en la fase de requisitos metodológicos y cumple con el propósito teórico del artículo. La convicción de que tal hipótesis debe ser tratada más rigurosamente autoriza su consideración. El estudio se llevó a cabo sobre la base de reanálisis de investigaciones en curso y ya realizadas.
Palabras clave: Teoría. Educación matemática. Construcciones teóricas. Consenso

Abstract

This article presents an essay to reflect on the potentialities of theoretical constructs of mathematical education, through reanalysis, of two research activities in this area. These theoretical constructs are Brousseau's *didactic situation*, Gueudet and Trouche's *resource and document*. The essay aims to hypothesis that certain theoretical constructs of mathematical education have consensual scope and condition. This potentiality is expressed in the theoretical vigor of constructs for the understanding of teaching and learning phenomena in mathematics. The authors consider the need for the area demonstrated by theorists in the search for consensus. For them these are constructs with this condition, but not the only ones, others should be considered. The aim of this essay is to open the discussion on this theme. The essayist form was considered adequate in the phase of methodological requirements and meets the theoretical purpose of the article. The conviction that such a hypothesis should be treated more rigorously authorizes its consideration. The study was conducted based on reanalysis of ongoing and already conducted research.
Keywords: Theory. Mathematics Education. Theoretical Constructs. Consensus

Resumo

Neste artigo é apresentado um ensaio com vistas a refletir sobre potencialidades de constructos teóricos da educação matemática, por meio de reanálises, de duas atividades de pesquisa nessa área. Esses constructos teóricos são a situação didática de Brousseau, recurso e documento de Gueudet e Trouche. O ensaio tem como objetivo colocar como uma hipótese que certos constructos

teóricos da educação matemática têm abrangência e condição consensual. Essa potencialidade se expressa no vigor teórico dos constructos para a compreensão de fenômenos de ensino e aprendizagem em matemática. As autoras consideram a necessidade da área demonstrada por teóricos na busca de consensos. Para elas, esses são constructos com essa condição, mas não os únicos, outros devem ser considerados. O objetivo deste ensaio é abrir a discussão sobre essa temática. A forma ensaísta foi considerada adequada em fase de exigências metodológicas e atende ao propósito teórico do artigo. O convencimento de que uma tal hipótese deve ser tratada de modo mais rigoroso autoriza sua consideração. O estudo foi realizado a partir de reanálises de pesquisas em andamento e já realizadas.
Palavras-chave: Teoria. Educação Matemática. Constructos Teóricos. Consenso

Introdução

Este artigo é resultado de uma questão comum proposta pelas autoras quando há realização de estudos diferentes. Elas perceberam a potencialidade de constructos teóricos de teorias da educação matemática que transpareceram na análise de fenômenos de ensino, de aprendizagem e de formação de professores sem que tivessem sido clamados *a priori*. E com essa percepção se propuseram a transformar essa questão, que, nas palavras de Trouche, era uma pergunta motivada em uma hipótese de pesquisa. As definições metodológicas e características teóricas da questão/hipótese as levaram a escrever um ensaio. As ideias desenvolvidas têm seus fundamentos na necessidade da educação matemática perceber e considerar noções abrangentes e consensuais. E devem ocupar o interesse de pesquisadores no entendimento de constructos que possam indicar características epistemológicas de abrangência e consenso. É nessa perspectiva que se apresentam os dois estudos do artigo.

Abar, considerando que a exploração da matemática com o GeoGebra, entre outras possibilidades, permite a criação de atividades com *feedback* automático, aquí compreendendo *feedback* como toda informação pós-resposta que é fornecida a um aluno para informá-lo sobre seu estado real de aprendizado ou desempenho, desenvolve um projeto pelo *Google Meet* com professores atuantes no ensino básico e superior. Ela percebeu que propostas apresentadas e em construção pelos participantes tinham, como subjacentes, concepções da Teoria das Situações Didáticas-TSD criada e desenvolvida por Guy Brousseau, educador matemático francês que, em 2003, recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento de sua teoria. A necessidade de um aporte teórico que pudesse sustentar as propostas dos participantes e serem analisadas posteriormente foi reconhecida em aspectos da TSD. Podemos considerar um *feedback* automático, construído no GeoGebra, como uma situação adidática, de acordo com Brousseau, e planejada visando uma aprendizagem. Ao realizar atividades com *feedback* automático, o aluno vivencia momentos adidáticos, favorecendo o processo de construção de conhecimento. Também, no desenvolvimento do projeto há que se considerar possíveis erros apresentados pelos alunos e identificados pelos participantes para um *feedback* construtivo. Segundo Brousseau (1983), o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de percepções espontâneas, ou reconstruídas, que, integradas a uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos. Deste modo, o professor precisa intervir efetivamente na aprendizagem dos alunos, visando a superação desses obstáculos, o que está sendo proposto no projeto, por meio da tecnologia, com a utilização dos recursos do GeoGebra, procurando garantir as condições e meios pedagógico-didáticos para que os alunos sejam estimulados em seus estudos e compreendam os erros cometidos.

Igliori vai considerar em seu estudo a Abordagem Documental do Didático-ADD de Trouche e Gueudet, uma teoria da didática da matemática, cujo principal objetivo é compreender o desenvolvimento profissional dos professores por meio do estudo de suas interações com os recursos, seus usos e projetos em/para seu ensino.

Na ADD, um *recurso* é um livro didático digital/tradicional ou outras modalidades de materiais digitais, ou não, usados por professores e alunos nas interações com a matemática, dentro e fora da sala de aula. E no uso de um recurso específico ou de um conjunto de recursos, o professor desenvolve *esquemas de utilização* específicos, os quais dependem de seus hábitos e conhecimentos.

Completa a tríade de constructos a noção de *documento* desenvolvido por um determinado professor para um determinado objetivo, no decorrer de uma gênese documental; trata-se de uma entidade híbrida composta de um *conjunto de recursos* e de *um esquema de utilização*.

Para Igliori as potencialidades desses constructos teóricos está no estado especial para a criação da ADD, aquela das mudanças da natureza do material de apoio ao professor para o ensino, acontecidas nos últimos anos, em que havia necessidade importante no que tange a compreensão de fenômenos do ensino e aprendizagem da matemática. Essa teoria aparece e propõe uma mudança de paradigma ao passar a analisar o trabalho dos professores concentrando-se em “recursos” para e no ensino. E mais que isso, passa-se a estudar o trabalho dos professores pelas interações com os recursos, em uma concepção ampliada do desenvolvimento profissional dos professores.

Os Dois Estudos: Abar e Igliori

Abar

O projeto aprovado nas instâncias da Universidade[1] “*O GeoGebra como Estratégia para Ensino Remoto: criando atividades com Feedback Automático*” e em desenvolvimento com professores do Instituto Federal de Alagoas tem como objetivo colaborar para a inserção da tecnologia na prática docente, aprimorando os estudos e as análises no que diz respeito à tecnologia no contexto da educação matemática.

---

[1] Este projeto tem apoio de auxílio financeiro concedido pelo Programa de Internacionalização da Pós-Graduação – PIPRINT PG 2020 - PUC-SP.

Considera-se o GeoGebra como um instrumento para a prática do professor, pois nessa interação ocorrem a reorganização e a modificação dos esquemas de utilização do *software*, fatos que permitem a estruturação da ação do professor, colaborando para sua formação e aprimoramento de conceitos matemáticos.

Com as mudanças tecnológicas no ensino, atualmente, obrigando o ensino remoto nas escolas, os trabalhos estão direcionados para os recursos da atuação do professor de matemática na sua prática docente neste contexto. Assim, estuda-se, durante os encontros realizados a partir de janeiro de 2021, o uso do GeoGebra para as possibilidades de *feedback* automático, ajustado aos interesses, às necessidades e aos problemas que enfrentam tais professores e a possibilidade de uso destes materiais no contexto da escola e o seu efeito na possível melhoria dos resultados dos estudantes em suas propostas de avaliação.

Pesquisas já desenvolvidas indicam que a exploração da Matemática com o GeoGebra é fundamental para o apoio ao levantamento de conjeturas e para a demonstração em matemática, além de possibilitar seu uso em ensino remoto e a criação de atividades com *feedback* automático. Espera-se que os professores utilizem o GeoGebra em sua prática docente e sejam criadores de processos de avaliação automática permitidos pelo *software*.

A avaliação, bem como encaminhamentos feitos a partir da análise de seus resultados, são dificuldades a serem enfrentadas na prática de ação pedagógica para garantir as condições e meios pedagógico-didáticos para que os alunos sejam estimulados em seus estudos, sem necessidade de intimidação, e compreendam os erros cometidos.

Cury (2008) salienta que, ao avaliar atividades de matemática, é preciso não somente apontar os erros cometidos pelos alunos, ignorando os acertos como se esses fossem esperados, já que toda e qualquer resolução, sejam aquelas que são esperadas apenas uma resposta, sejam aquelas que indicam a criatividade do estudante, permite detectar como o aluno pensa e que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. A análise dos erros e acertos de uma avaliação permite a possibilidade de entender como se dá a apropriação do saber pelos estudantes e, desse modo, construir processos de avaliação automática adequados.

Ter conhecimento dos possíveis erros dos alunos, em determinados conteúdos de matemática, é de fundamental importância na construção de propostas de atividades com *feedback* automático.

Dias e Santos (2011) afirmam que:

> Quando, no desenvolvimento de uma tarefa, o aluno parte de hipóteses erradas, o *feedback* torna-se eficaz quando, durante o processo de resolução, consegue levar o aluno não só a conseguir rejeitar essas hipóteses, mas também ao desenvolvimento de estratégias mais eficientes que permitam entender a informação dada. (DIAS; SANTOS, 2011, p. 127).

No desenvolvimento do trabalho há momentos de reflexões teóricas, atividades práticas e encontros remotos com os professores participantes pelo *Google Meet* e, desse modo, lançamos um olhar sobre os encontros realizados e sobre as propostas de atividades, ainda em construção pelos participantes, à luz da Teoria das Situações Didáticas -TSD criada e desenvolvida por Guy Brousseau, educador matemático francês que, em 2003, recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento de sua teoria.

Brousseau (2008) apresenta uma *situação* como:

> O modelo de interação de um sujeito com um meio determinado. O recurso de que esse sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável nesse meio é um leque de decisões que dependem do emprego de um conhecimento específico. (BROUSSEAU,2008, p. 21).

E a *situação matemática como todas aquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem a intervenção do professor.* (Brousseau, 2008, p. 21).

Apresenta-se aqui uma análise de momentos adidáticos, a luz da TSD proposta por Brousseau (2008).

> Uma situação adidática caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. (FREITAS, 2008, p. 84).

Na situação adidática, o professor deve proceder de forma a não dar a resposta ao aluno, que aprende adaptando-se a um meio, no qual o professor provoque as adaptações desejadas (exemplo: uma seleção sensata dos problemas que propõe).

Freitas (2008, p. 86) afirma que “as situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento”.

Podemos considerar um *feedback* automático, construído no GeoGebra, e pela luz da teoria TSD de Brousseau como uma situação adidática, planejada, visando uma aprendizagem. Ao realizar atividades com *feedback* automático, o aluno vivencia momentos adidáticos favorecendo o processo de construção de conhecimento.

No desenvolvimento do projeto há que se considerar possíveis erros apresentados pelos alunos para um *feedback* construtivo. Segundo Brousseau (1983), o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de percepções espontâneas, ou reconstruídas, que, integradas a uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos.

Deste modo, o professor precisa intervir efetivamente na aprendizagem dos alunos visando a superação desses obstáculos. De acordo com esta teoria o papel do professor não se limita a simples comunicação de um conhecimento, mas à devolução de um bom problema.

> A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ele aceita participar desse desafio intelectual e se ele consegue sucesso nesse seu empreendimento, então inicia-se o processo da aprendizagem. (FREITAS, 2008, p.83).

Numa perspectiva epistemológica há a necessidade de identificação de obstáculos pelos professores, pois, a partir dessa constatação, poderão organizar propostas específicas que possibilitem a superação desses.

Igliori (2008) considera que os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso, fazendo uso do conceito de desequilíbrio desenvolvido por Piaget.

Brousseau (2008) considera que:

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos ‘problemas’ que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, que o aluno atue, fale, reflita e evolua. (BROUSSEAU, 2008, p. 34-35).

Em uma situação em que o aluno trabalha de maneira independente, ele toma o problema como se fosse seu e essa atitude foi chamada por Brousseau (2008) de devolução. A partir do momento em que ocorre a devolução, pode-se dizer que fica caracterizado uma situação adidática (FREITAS, 2008). Cabe ao professor criar meios e desafiar os alunos de tal forma que estes aceitem o problema como seu.

A devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação adidática de aprendizagem. Nesse caso, devolver as soluções depende da motivação do aluno, o que vincula às questões psicoafetivas.

Na situação didática ocorre um contexto mais amplo em que a situação ou um problema escolhido pelo professor envolve o aluno e o seu meio.

Brousseau associa sua teoria a quatro vertentes norteadoras: ação, formulação, validação e institucionalização.

Ação: momento da tomada de decisões por parte do aluno, os saberes são colocados em prática com o objetivo de resolver os problemas propostos. Gera uma interação entre os alunos e o meio físico. Os alunos devem tomar as decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução do problema formulado.

Formulação: o conhecimento implícito é transformado em explícito, as estratégias usadas são explicadas. O objetivo é a comunicação de informações entre alunos. Para isto, devem modificar a linguagem que utilizam habitualmente, precisando-a e adequando-a às informações que devem comunicar.

Nas ações acima é o que se espera em uma proposta de *feedback* automático.

Validação: a estratégia apresentada precisa ser provada dentro de um determinado contexto, na qual tenta-se convencer a um ou vários interlocutores da validade das afirmações que são feitas. Neste caso, os alunos devem elaborar provas para demonstrá-las. Em um *feedback* automático é o momento no qual o aluno ultrapassou e venceu seus obstáculos.

Institucionalização: *ocorre a validação da atitude matemática. É um resumo de todo o processo que foi construído* durante o trabalho e o professor faz uma retomada de tudo que foi realizado e sistematiza esse saber. *São destinadas a estabelecer convenções sociais. Nestas situações busca-se que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber* *que foi elaborado por eles mesmos, em situações de ação, de formulação e de validação.*

BROUSSEAU (2008) relata em seus estudos a existência de um sistema didático composto pelo professor, aluno e pelo objeto de conhecimento em questão: *"Em síntese, trata-se de colocar os alunos diante de uma situação que evolua de forma tal, que o conhecimento que se quer que aprendam seja o único meio eficaz para controlar tal situação"* (p. 33).

Apresenta-se aqui uma análise dos momentos adidáticos, à luz da teoria das situações didáticas proposta por Brousseau (2008), vivenciados pelos participantes na tentativa de criar atividades com *feedback* automático.

Podemos considerar questões como:

Que interpretação faz o professor diante dos possíveis erros dos alunos em um contexto matemático? Como intervém, o que pedirá aos alunos, que *feedbacks* irá considerar?

Para que serve o *feedback* automático, em que momentos intervém no processo de aprendizagem, sob que formas?

Compreendemos que a TSD pode criar uma visão diferenciada sobre o erro no sentido de considerá-lo apenas como um obstáculo e caminhar para a obtenção do saber, apresentando condições que devem ser consideradas em uma proposta de *feedback* automático.

Sobre Feedback e o uso do GeoGebra

De acordo com as definições cibernéticas e experimentais, uma definição geral para *feedback* em contextos instrucionais pode ser a seguinte: *feedback* é toda a informação pós-resposta que é fornecida a um aluno para informá-lo sobre seu estado real de aprendizado ou desempenho.

Quanto às boas práticas de *feedback*, Nicol e Macfarlane-Dick (2006) apresentam sete princípios que orientam seu desenvolvimento: ajuda a esclarecer o bom desempenho; facilita o desenvolvimento da autoavaliação (reflexão) na aprendizagem; fornece informações de alta qualidade aos alunos sobre sua aprendizagem; incentiva o diálogo entre professores e pares em torno da aprendizagem; incentiva crenças motivacionais positivas e autoestima; oferece oportunidades para diminuir a distância entre o desempenho atual e o desejado; fornece informações aos professores que podem ser usadas para ajudar a moldar o ensino. (retroalimentação).

Os momentos vivenciados nos encontros com os participantes e apresentado um exemplo a seguir, seguem um modelo de formação no contexto do GeoGebra considerando diferentes tópicos de Matemática e serviram de reflexão para a construção de atividades com *feedback* automático. Nos diferentes momentos dos encontros e no contexto em que trabalham, diferentes atividades foram desenvolvidas.

Os participantes são cinco professores do Instituto Federal de Alagoas e um professor da escola básica em Maceió. O projeto teve início em janeiro de 2021 após a organização do grupo por um dos participantes. Foram realizados quatro encontros até este momento nos quais são discutidas as propostas enviadas por eles e construídas no GeoGebra.

As discussões envolvem aspectos teóricos sobre a qualidade dos *feedbacks* tanto do ponto de vista do conteúdo matemático quanto as considerações teóricas que dão suporte ao desenho das construções dos tipos de *feedback* considerado.

Embora presente na literatura alguns tipos de *feedback*, indicamos nos momentos dos encontros com os participantes que a construção de *feedback* deve atender a proposta dos princípios de qualidade já descritos acima e, também, indicações da TSD para que possam superar tanto os obstáculos epistemológicos como os de origem didática e, se possível, de origem ontogenética.

Nos encontros iniciais, em uma das propostas de *feedback* apresentadas (Figura1) foram analisadas as possibilidades de aprimoramento de acordo com as indicações já mencionadas acima.

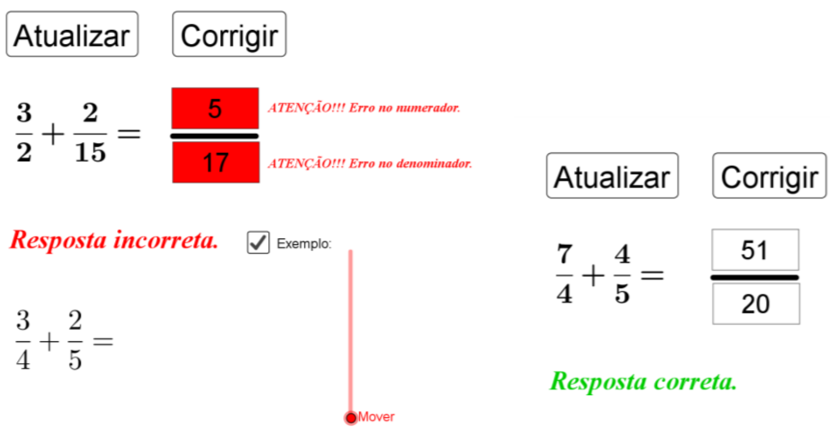


Figura 1. Construção de *feedback* sobre adição de frações de um participante
Fonte: Abar (2021).

A partir do mês de março de 2021 foi formado um grupo no *WhatsApp* por onde os links das propostas são indicados e, assim, os participantes enviam as respectivas propostas para o ambiente de materiais do GeoGebra, permitido na internet, e nos encontros posteriores as possibilidades de aprimoramento são discutidas.

As propostas vão, aos poucos, sendo aprimoradas com indicação de compreensão pelos participantes da importância de um *feedback* construído com base nos obstáculos identificados e que permita ao aluno a sedimentação de seu conhecimento.

Igliori

As reflexões aqui apresentadas tomam por referência uma reanálise de elementos de duas teses de doutorado. Essa reanálise foi apoiada nas noções de recurso e documento da ADD. As duas teses trabalharam em um tema comum, formação de professores da escola básica, porém, com abordagens metodológicas distintas: uma utilizou a engenharia didática de 2a geração (Perrin-Glorian, 2009) e a outra utilizou a modelagem. O foco neste artigo é conferir, em ambas investigações, o papel desempenhado pelos recursos e documentos dos sujeitos de pesquisa no ensino de conceitos matemáticos, nessas duas pesquisas de formação. Conferir em que medida a extensão desses recursos e documentos interferiam a ação dos formadores.

A reanálise é realizada considerando-se como essencial da ADD seus constructos que possibilitam entender o desenvolvimento profissional dos professores, isto é, para esse entendimento estudam-se as interações com os recursos que eles usam e produzem em suas ações em sala ou fora da sala de aula, para seu ensino. Entendendo dessa forma, a proposta é investigar se e como os recursos e documentos dos professores interferiam nas referidas pesquisas de formação.

A primeira tese intitula-se "A formação continuada, por meio de engenharia didática, de professoras polivalentes com o foco em conhecimentos e práticas pedagógicas referentes ao conceito de número" (Lomasso, 2019). Nela, as sessões da engenharia didática continham em especial atividades visando a avaliar/formar conhecimento das abordagens de (Piaget e Szeminska, 1975) sobre o conceito de número natural, e como elas abordavam o conceito de número em suas aulas. Essa investigação acontecia em observações do cotidiano da sala de aula do professor sobre o ensino do número natural, pois a engenharia de 2ª geração se desenvolve dessa forma. E nessas sessões de ensino do conceito de número, mesmo que o pesquisador/formador não tivesse a intenção *a priori*, a cada momento entrava em jogo a análise de recursos, de esquemas de utilização, de documentos dos professores, sujeitos da pesquisa/formação.

Pode-se intuir que os recursos que o professor preparava e utilizava em sua aula, interferia sim na formação, pois eles, utilizando básicamente o livro didático e anotações de aulas anteriores, deixavam transparecer que desconheciam propriedades da abordagem genética de Piaget sobre a conservação numérica (invariância do número), operações lógicas de classificação (como classe de inclusão) e a seriação das relações assimétricas (ordenação de grandezas). O professor observado, utilizava a correspondencia, termo a termo, e demonstrava dificuldade de entendimento nas relações entre valor cardinal e determinação do princípio ordinal.

Outra condição que transparecia era a limitação de seus esquemas de utilização dos recursos: ela era caracterizada pela ação de repetição, isto é, a realização de ditados. Esses esquemas apoiam-se em uma concepção de que os alunos aprendem pela repetição. Outro esquema observado estava na consideração de que tudo começava do zero, parecendo que os alunos não têm conhecimentos prévios. Apresentavam também esquemas de explicações minunciosas de um assunto, ou mesmo aquela forma de começar uma afirmação deixando o final para o aluno dizer.

Podia-se perceber numa suposição de que os alunos têm sempre dificuldades de aprender assuntos considerados complicados como o caso do número. O professor em ação, no decorrer da formação, indicava uma visão estereotipada de um aluno, demonstrava, em geral, considerá-los incapaz de aprender. Esses esquemas de utilização eram recorrentes entre os professores, faziam parte de uma cultura. Suas atitudes começaram a ser alteradas na atuação da engenharia didática. Considera-se que a razão disso está em que a engenharia didática:

> [...] é responsável pela criação de modelos consistentes e relevantes e pela realização de dispositivos de ensino de um conhecimento específico, destinados a descrever ou prever, e explicar os acontecimentos observáveis de um determinado episódio de ensino (situações ou currículo) observado ou previsto (BROUSSEAU, 2013, p. 3, tradução nossa).

Em uma releitura dessa citação pode-se considerar criação de modelos consistentes e realização de dispositivos de ensino como a documentação do professor. Essa documentação, a escolha de recursos (modelos consistentes e dispositivos de ensino) pode interferir nos esquemas de utilização de um recurso do professor.

Na primeira fase da Engenharia Didática, nas análises prévias, era possível observar os recursos do professor para suas aulas. Esses recursos eram estruturados pelos parâmetros curriculares adotados pela secretaria municipal da cidade. Os esquemas de utilização tinham as marcas culturais das professoras relacionadas à situação de dificuldades sociais dos envolvidos. Isto é, escrita na lousa concomitantemente à exposição oral. Utilização de situações repetitivas e muito detalhadas, sobrando pouco para o aluno fazer.

No decorrer da formação continuada, novos recursos para o ensino do número natural foram introduzidos pelo formador e problematizou-se culturas e crenças sobre o ensino e a aprendizagem do número, os conhecimentos matemáticos e didáticos necessários para a ampliação de possibilidades aos professores envolvidos. Consideramos que a formação docente estava acontecendo com a apresentação de outras fontes de recursos e outros possíveis modos de tratamento deles.

Após essas ações, os docentes constataram que os materiais organizados a partir da conceituação teórica de número foram relevantes. Perceberam que outros modos de ensinar poderiam ser utilizados. O caráter manipulativo, de atividades da formação foi considerado pelas professoras apropriado à faixa etária dos(as) alunos(as) do 1° ciclo do ensino fundamental. Destaca-se aqui a preferência por esquemas manipulativos entre essas professoras, considerando-os estratégias de ensino profícuos para a aprendizagem. De fato, facilitavam para elas a compreensão do conceito complexo de número.

As professoras deixavam transparecer recursos e esquemas de utilização durante as discussões na formação, específicamente relacionados ao ensino do número natural. Diziam elas que pouco poderia ser feito, pois havia uma grande quantidade de alunos, de conteúdos e tempo reduzido para apresentá-los; que faltava material mais compatível para a faixa etária, como, por exemplo, material concreto. Diziam que as crianças chegavam sem conhecimentos prévios, não indicando quais, se questionadas. Elas faziam referência também à qualidade de suas formações iniciais, indicando falta de condições de escolha de recursos variados, para além de livro didático, materiais de aulas anteriores ou de manuais da secretaria da educação.

As professoras evidenciaram que se surpreenderam com as experiências piagetianas apresentadas e apontaram o quanto elas podem contribuir no cotidiano escolar, no que se refere ao ensino do número natural. Três professoras desenvolveram com seus (suas) alunos (as) as atividades apresentadas na sequência didática. A ampliação do sistema de recurso dessas professoras levou-as a perceber que novos recursos contribuem com o desenvolvimento do aprendizado, e as experiências com atividades piagetianas as levaram a produzir novos esquemas enriquecidos por reflexões pedagógicas e didáticas no ensino do número natural.

A outra tese revisada é intitulada “Investigação Sobre a Formação Continuada de Professores do Ensino Fundamental I: Modelagem Matemática” (Santos, 2020). Nela destacam-se duas fases: uma diagnóstica em que os meios de coleta de dados foram questionários, gravações de áudio, vídeo e fotografias para conhecer as práticas profissionais dos sujetios de pesquisa.

A segunda, o pesquisador/formador na condução da fase de consolidação de dados, experimentações de modelagem desenvolvidas em sala de aula com os alunos, discutia com os professores o uso de novos recursos que demonstrava trazer segurança ao professor e, em consequência, propiciar a ele, a inclusão de novos recursos pedagógicos que implicava na constituição de esquemas mais favoráveis ao envolvimento dos alunos na aprendizagem. Isso porque percebeu-se, nas observações, que os professores trabalhavam de forma menos rígida, com improvisações, o que muitas vezes implicava em atribuir significado para seus alunos dos conceitos matemáticos.

Os esquemas de utilização dos recursos em muitas situações da prática dos professores podem representar entraves ao desenvolvimento profissional, é o que se pode observar em (Santos, 2020) dificuldades ao uso de modelagem em sala de aula, falta de domínio de conteúdos matemáticos e a insegurança de professores em sala de aula. Eles expressam que “a realização de atividades de modelagem em sala de aula envolve várias ações não previsíveis” (ibdem, p.20). Entendemos essas ações não previsíveis como quebra nos esquemas de utilização de recursos. Santos apresenta resultados de estudos que podem ser observados como a relação intrínseca entre recursos e desenvolvimento profissional. Diz Santos:

> Autores apontam que são recorrentes os debates acerca da insegurança que a modelagem matemática pode proporcionar ao professor, pois, em certos momentos da atividade, os professores sentem-se desestabilizados por não terem apoio e conforto de um livro didático para seguir. (SANTOS, 2020, p.20).

Pode-se inferir que essa insegurança pode implicar em limitação de recursos criados pelos docentes. O livro didático é um recurso seguro e deve ser, por isso, o preferido.

Durante a pesquisa, a professora ia demonstrando a percepção da necessidade de ampliar seu sistema de recursos de modo a permitir a utilização de uma metodologia de modelagem com temas do cotidiano para estudar conceitos matemáticos. A coordenadora, por sua vez, considerava difícil cumprir o cronograma usando essa metodologia, porque ela exige tempo. Com essa consideração, destacamos a limitação da escola no incentivo de mudança de postura de professores na ampliação do sistema de recursos e na mudança de estratégias de ensino. (Santos, 2020).

A releitura desta tese, investigando o papel dos recursos e esquemas de utilização na formação de professores nos despertou a atenção de que mesmo professores mais experientes e com formação matemática mais sólida, não demonstravam uma variedade de recursos em suas aulas e nem mesmo se sentiam a vontade para introduzir novas estratégias de ensino. Eles tomavam o livro didático como principal recurso, e seus esquemas eram uso de lousa para o ensino de conceitos. Mas, pode-se perceber que incentivados pelo formador eles se dedicaram para encontrar recursos que auxiliassem o tratamento de temas cotidianos modelados em sala de aula. É importante relacionar o envolvimento da busca de recursos novos e adaptados ao desenvolvimento das aulas com o avanço de estratégias de motivação dos estudantes. Logo, o processo de desenvolvimento profissional desses docentes relacionou-se à organização de recursos para a aula de modelagem e foi possível perceber certos esquemas de utilização se formando nessa nova fase. Reconheceu-se um esquema de direcionamento de atenção ao que demonstravam seus estudantes durante a organização das relações entre fenômeno e matemática no ato de modelar.

Considerações finais

Pesquisas já consolidadas e outra em andamento foram objetos, neste artigo, de reanálises com vistas a refletir sobre potencialidades de constructos teóricos de teorias da educação matemática, com a conjectura de que, considerados nos respectivos contextos de cada pesquisa, outras situações, não estimadas *a priori* em seu desenvolvimento, poderiam transparecer evidenciando aspectos importantes do ponto de vista epistemológico.

O tratamento metodológico ensaísta foi considerado adequado para atingir os objetivos, com a prospecção de que as ideias desenvolvidas neste artigo devem prosperar com outros constructos teóricos.

Abar, considerando que a exploração da matemática com o GeoGebra permite a criação de atividades com *feedback* automático, desenvolve um projeto pelo *Google Meet*, com professores atuantes no ensino básico e superior. Na construção das propostas com *feedback* automático, apresentadas pelos participantes, transparecia aspectos da Teoria das Situações Didáticas -TSD de Guy Brousseau e foi reconhecida como uma situação adidática, de acordo com Brousseau, planejada visando uma aprendizagem.

Na situação adidática, o professor deve proceder de forma a não dar a resposta ao aluno, que aprende adaptando-se a um meio, no qual o professor provoque as adaptações desejadas e são, de acordo com Freitas (2008, p. 86), "...os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento".

Igliori fez suas inferências a partir da reanálise de dados de duas teses de doutorado sobre a formação de professores, as quais indicaram a forte relação entre recursos e desenvolvimento profissional de professores, mesmo sem que eles tivessem sido *a priori* escolhidos como aportes teóricos. Os estudos dos recursos, esquemas e documentos se apresentaram com frequência como condutores de formação de professores, revelando conhecimentos pedagógicos, didáticos e conceituais dos sujeitos de pesquisa.

As bases para o estudo sobre recurso e documento para Igliori estão na sua epistemologia que, segundo seus autores, a ADD está ancorada em conceitos centrais como "situação didática, restrição institucional e esquema, e abrange uma perspectiva sociocultural, incluindo, em particular, a noção de mediação (Vygotsky 1978) como componente de qualquer processo cognitivo e apoiada em aspectos constitutivos da educação matemática dos dias atuais, como, uso de tecnologias; desenvolvimento profissional de professores; e arquitetura da informação. É importante ressaltar a influência da ergonomia cognitiva, desenvolvida por Rabardel (1995).

Referências

BROSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. *Introduction à l´engénierie didactique.* Laboratoire, Cultures, Education, Sociétés (LACES). Université Bordeaux 2. Disponível em: http://guy-brousseau.com/2760/introduction-a-l´engenierie-didactique-2013.

BROUSSEAU, Guy. *Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathématiques*. Grenoble, Recherches en didactique des mathematiques. 1983, v.4, n.12. p.165-198.

CURY, Helena Noronha. *Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

DIAS, Sônia e SANTOS, Leonor. O Feedback e os Diferentes Tipos de Tarefas Matemáticas. *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática-SIEM*. Associação de Professores de Matemática-APM. Lisboa, 2011, p.126-136.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Teoria das Situações. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC, 2008, p. 77-111.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. *Educação Matemática – uma (nova) introdução.* Machado, S. (Org.) São Paulo: EDUC, 2008.

LOMASSO, Emerson Bastos. *Uma formação continuada, por meio de engenharia didática de professoras polivalentes com o foco em conhecimentos e práticas pedagógicas referente ao conceito de número natural.* Tese de doutorado. PUC-SP. 157 p. 2019.

NICOL, David. J., MACFARLANE-DICK, Debra. Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, 31(2), 199-218, 2006.

PERRIN-GLORIAN Marijane. *L´engénierie didactique à L´interface de la Recherche avec l´enseignement vers une Engénierie Didactique de Deuxieme Generation?* Laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot, Université Artois.pp.1-20. 2009.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. *A gênese do número na criança.* Tradução Christian Monteiro Oiticica. Ed.2. Rio de Janeiro/RJ/Zahar. 1975.

RABARDEL, Pierre. *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin, 1995.

SANTOS, Douglas Borreio Maciel. *Uma Investigação sobre a formação continuada de professores do ensino fundamental I: O uso da modelagem matemática*. Tese de doutorado. PUC-SP, 2016.

TROUCHE, Luc; GEUDEUT, Ghislaine e PEPIN Birgit. Adaptação ao português: Cibelle Assis e Katiane Rocha. Revisor: Sonia Igliori. *A abordagem documental do didático*. ,https://hal.archives-ouvertes.fr/DAD-MULTILINGUAL, 2020.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. *Thought and language*. Cambridge: MIT Press (Original work published 1934). 1978.

Autoras:

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar- abarcaap@pucsp.br
https://orcid.org/0000-0002-6685-9956

Sonia Barbosa Camargo Igliori – sigliori@pucsp.br
https://orcid.org/0000-0002-6354-3032

Professoras do Programa de Estudos PósGraduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologías. Rua Marquês de Paranaguá, 111. Consolação – São Paulo – SP - Brasil

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-18

Uma abordagem dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas

Rannyelly Rodrigues de Oliveira

Fecha de recepción: 16/11/2019
Fecha de aceptación: 8/04/2021

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (TSD). Para isso, foram concebidas situações-problema, cujo campo epistêmico-matemático é o modelo de Fibonacci e sua complexificação a partir da abrangência dos números hipercomplexos: os Quaternions. Nesse viés, são exploradas algumas propriedades matriciais desses números, seguida, de uma extensão para índices inteiros. Essa discussão é organizada de acordo com as fases da TSD: ação, formulação, validação e institucionalização. Além do mais, pode-se compreender que os conceitos e as representações estudadas neste artigo, oportunizam a ampliação do repertório de relações complexas do modelo de Fibonacci.

Palavras-chave: Didática da Matemática, Teoria das Situações Didáticas, Situações-problema, Quaternions de Fibonacci.

Resumen

Este trabajo presenta un abordaje de los Cuaternions de Fibonacci con enfoque en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Para ello, se han concebido situaciones-problema, cuyo campo epistémico-matemático es el modelo de Fibonacci y su complejidad a partir del alcance de los números hipercomplejos: los Cuaternions. En este sesgo, se exploran algunas propiedades matriciales de estos números, a continuación, de una extensión a índices enteros. Esta discusión se organiza de acuerdo con las fases de la TSD: acción, formulación, validación e institucionalización. Además, se puede comprender que los conceptos y las representaciones estudiadas en este artículo, oportunizan la ampliación del repertorio de relaciones complejas del modelo de Fibonacci.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas, Teoría de las Situaciones Didácticas, Situaciones-problema, Quaternions de Fibonacci.

Abstract

This work presents an approach of the Fibonacci Quaternions focusing on Theory of Didactic Situations (TSD). For this, problem situations were conceived, whose epistemic-mathematical field is the Fibonacci model and its complexification from the comprehension of the hypercomplex numbers: the Quaternions. In this bias, some matrix properties of these numbers are explored, followed by an extension for integer indices. This discussion is organized according to the phases of the TSD: action, formulation, validation and institutionalization. Moreover, it can be understood that the concepts and representations studied in this article allow the expansion of the repertoire of complex relations of the Fibonacci

model.
Key-words: Didactics of Mathematics, Theory of Didactic Situations, Problematic Situations, Fibonacci Quaternions.

1. Introdução

A Didática da Matemática abordada neste trabalho segue o paradigma francês, propugnada por Artigue (2009), que oportuniza a realização e concepção de situações de ensino com a finalidade de envolver o aluno, professor e conhecimento matemático, de modo que sejam articulados os elementos de ordem epistemológica, didática e cognitiva, durante a compreensão e construção de relações matemáticas. Recentemente, essa tendência vem sendo estudada pelos pesquisadores Pais (2002), Almouloud (2007), Almouloud (2016), Alves (2016a, 2016b, 2016c), Silva e Almouloud (2018).

Essa vertente didática permite a inserção de teorias de ensino que se preocupam com uma temática epistemológica em ambientes de ensino. Nesse sentido, este trabalho tem como campo epistêmico-matemático o modelo de Fibonacci. Esse modelo foi originado a partir da situação-problema, proposto por Leonardo Pisano, que abrange a reprodução de pares de coelhos. *A priori*, esse modelo é representado pela recorrência unidimensional $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, válida no conjunto dos Naturais (Alves e Catarino, 2016).

Nos trabalhos de Brother (1965), Koshy (2001) e Alves e Oliveira (2017), pode-se identificar a existência de um processo evolutivo do modelo de Fibonacci com a extensão da sequência para índices inteiros e representações polinomiais e matriciais. À vista disso, foi feito um levantamento bibliográfico dos artigos de Horadam (1993), Halici (2012, 2013), Sangwine, Ell & Biham (2011), Flaut & Shpakivskyi (2013) com a finalidade de discutir os Quaternions, definidos para o modelo de Fibonacci, com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008). Para isso, neste trabalho, são elaboradas e propostas situações-problema que direcionam uma dialética descrita em: ação, formulação e validação manifestadas na compreensão de propriedades matriciais e da extensão de uma determinada aplicação para índices inteiros.

Além do mais, os Quaternions são números hipercomplexos, ou seja, uma extensão do número complexo denotado por $z = a + bi$, onde a, b ϵ R tal que se definem a parte real $\mathrm{Re}(z) = a$ e a parte imaginária $\mathrm{Im}(z) = b$. De modo análogo, de acordo com Halici (2012, 2013), os Quaternions são determinados pela equação $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ onde (q_0, q_1, q_2, q_3) é a parte escalar Real e a base, no R^3, (e_1, e_2, e_3) é a parte vetorial, além disso, vale que $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$. Além disso, o Quaternion de Fibonacci é definido por meio da equação: $Q_n = F_n + F_{n+1}.i + F_{n+2}.j + F_{n+3}.k$, com $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

À vista disso, este trabalho tem o objetivo de discutir os Quaternions de Fibonacci através de uma proposição de situações-problema em aulas de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Vale informar ao leitor que, por tradição, os Quaternions não fazem parte da ementa do curso de Licenciatura em Matemática (com base na ementa dos cursos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE). Todavia, esse conteúdo matemático foi escolhido com o intuito de levar para aulas de História da Matemática um modelo matemático não-trivial.

Essa iniciativa tem a intenção de instigar o aluno a refletir nas definições e relações matemáticas que são dispostas nos livros clássicos de História da Matemática e oportunizar o compreendimento de que a Matemática é um corpo teórico inacabado. Pois, os livros, comumente, adotados na disciplina de História da Matemática permitem tratar a sequência de Fibonacci (apenas em sua representação original) mas não mostram sua extensão complexa e a generalização de suas relações, ou seja, não apresentam seu processo histórico-evolutivo.

Contudo, nessa abordagem histórica, é dada ênfase à evolução epistemológica, das estruturas matemáticas referentes às propriedades oriundas do modelo de Fibonacci originado em 1202, que, no caso, parte de um conjunto matricial dos Quaternions adaptado ao modelo de Fibonacci complexificado. Para isso, considera-se que a parte escalar dos Quaternions é composta pelos termos da sequência de Fibonacci. Desse modo, não será discutida, pormenorizadamente, o contexto do período histórico em que tais relações foram desenvolvidas. Doravante, tem-se o referencial teórico assumido.

2. A Teoria das Situações Didáticas e as situações-problema

A Didática da Matemática tem sua gênese na França por volta de 1970 e é marcada pela reforma da Matemática Moderna e criação dos Institutos de Pesquisa sobre Ensino da Matemática (IREMs). Nesse âmbito, as teorias de desenvolvimento ganham atenção dos pesquisadores-educadores matemáticos, tendo em vista que, segundo Pais (2002, p. 11), a Didática da Matemática é uma vertente oriunda do campo da Educação Matemática, além disso, seu campo epistêmico abrange a formulação de conceitos matemáticos articulada com teorias de ensino.

Alves (2016a, p. 133) explica que o contexto descrito, anteriormente, instigou uma avaliação da prática docente e da atuação do aluno no cenário que envolve o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, o que oportunizou a concepção de teorias de ensino que investigam a relação entre professor, aluno e conhecimento matemático. Isso permitiu a delimitação científica de uma área de pesquisa, a Didática da Matemática, que busca explorar os "processos de transmissão, modificação e veiculação de saberes matemáticos". Além do mais, a Didática da Matemática tem como objeto de estudo a transposição didática (Chevallard, 1998) dos conceitos matemáticos numa temática epistemológica que possibilita a compreensão de conceitos e a construção de relações matemáticas. Assim, vale ressaltar que:

> A transformação do conteúdo de saber em uma versão didática desse objeto de saber, mais apropriadamente, é chamado de *transposición didáctica stricto sensu*. Mas, o estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da Didática da Matemática) implica tendo em conta a transposição didática *sensu lato*,

> representada pelo esquema: objeto de saber $\Rightarrow$ objeto para ensinar $\Rightarrow$ objeto$\Rightarrow$ de ensino. O primeiro elo que marca a passagem do implícito para o explícito, da prática à teoria, do pré-construído para construído. (Chevallard, 1998, p.45).

À vista disso, a transposição didática é realizada com aporte teórico em uma ou mais teorias de ensino que, no contexto da vertente francesa, destaca-se a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau em 1986, a fim de investigar as situações de ensino, de modo a compreender como os elementos: docente, aluno e conhecimento matemático estão inseridos no cenário educacional e como eles articulam-se na efetivação do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, conforme Almouloud (2016, p. 113), o objetivo dessa teoria é:

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis e que têm potencial para provocar modificações em um conjunto de comportamentos dos alunos. Essas modificações são características da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos/saberes, de ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Com isso, Artigue (2009, p.4) explica que a construção de conhecimento ocorre de forma significativa, quando o aluno passa por uma adaptação ao *milieu*. Desse modo, Silva e Almouloud (2018, p.117) descrevem o *milieu* “como um sistema que interage com o aluno de forma antagônica desafiando-o, por intermédio da reflexão sobre suas ações, a encontrar respostas para as situações-problema a ela propostas”. Destarte, o objeto principal dessa teoria de ensino é a situação didática que abrange o aluno, saber e *milieu*. Nesse viés, Brousseau (2008, p. 53) afirma que uma “interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra interação de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)”.

Nesse sentido, a situação didática envolve a “situação adidática” que é realizada com uma intenção, implícita, de ensino, mas que de fato, essa situação é concebida e elaborada pelo docente, com finalidade didática, a fim de oportunizar um processo de ensino e aprendizagem. Assim, as “situações adidáticas” são compostas por situações-problema, as quais são questões/problemas abertas (os), com enunciados objetivos, ou fechadas (os) concebidas (os) “em um contexto mais ou menos matematizado”, cuja “função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema” (Almouloud, 2016, p.116). Logo:

> Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de **conhecimentos e saberes**, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (Almouloud, 2016, p.113).

Uma proposta de modelização das situações didáticas é a concepção e aplicação de situações-problema com enfoque na Teoria das Situações Didáticas, pela qual é possível oferecer ao aluno condições para que ele possa mobilizar seu pensamento, que, *a priori*, pode ser intuitivo não descartando o uso de um conhecimento prévio de natureza teórica, em direção ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial e generalizador. Para isso, Almouloud (2007, p. 36) explica que a Teoria das Situações Didáticas é organizada em quatro fases consecutivas: ação, formulação, validação; realizadas principalmente pelos alunos; e a quarta etapa final de institucionalização proporcionada pelo docente.

É relevante compreender que a Teoria das Situações Didáticas incorpora aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, de modo que esses elementos estão associados a fim de oportunizar a apropriação e o aprendizado de conceitos e relações matemáticas. Assim, de acordo com Alves (2016c, p. 62), a fase de ação é caracterizada pela iniciativa do estudante em resolver a questão proposta, nesse momento, o pensamento intuitivo, imediato e operacional é mobilizado. Posteriormente, na fase de formulação, o aluno passa a sugerir possíveis soluções para o problema através da elaboração de conjecturas escassas da formalidade matemática. Essa etapa é responsável pela passagem do pensamento intuitivo para o raciocínio inferencial.

Por conseguinte, na fase de validação, acontece a avaliação das hipóteses levantadas, a fim de validá-las ou refutá-las. Para isso, são usados argumentos mais elaborados com fundamentação teórica, como definições, recorrendo a relações e métodos de demonstrações matemáticas. De fato, Brousseau (1976, p. 110) acentua que "para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação".

Finalmente, tem-se a fase de institucionalização realizada pelo professor. Nesse momento, as produções dos alunos são corrigidas, tal que se pretende observar o desempenho dos alunos durante a construção de conceitos e generalização de relações matemáticas, a fim de formalizar o conhecimento aprendido (Alves, 2016c, p. 62). Esse processo de construção possibilita, no contexto didático, uma abordagem epistemológica, ou seja, um estudo da composição dos conceitos matemáticos desde sua gênese até suas representações generalizadas (Almouloud, 2007, p. 149).

Dessa forma, o campo epistêmico-matemático deste trabalho é o modelo de Fibonacci com ênfase nos Quaternions, que são definidos dentro de um processo de complexificação do modelo. A seguir, numa perspectiva evolutiva, serão apresentadas algumas definições e relações que servirão de aporte para uma discussão dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas.

3. Os Quaternions de Fibonacci

Nesta seção, serão apresentadas as definições e relações inerentes aos Quaternions e sua representação no modelo de Fibonacci. Desse modo, numa temática epistemológica, King (1963, p.16) explica que a gênese do modelo de Fibonacci é inspirada na situação-problema, "*Rabbit Problem*", proposta por Leonardo Pisano em 1202 na obra *Liber Abbaci. A priori*, a sequência gerada por esse problema satisfaz à recursividade unidimensional $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, para todo n natural, para $F_0=0$ e $F_1=1$ (Alves e Catarino, 2016).

Quanto à evolução do modelo de Fibonacci, compreende-se um processo de generalização da Sequência de Fibonacci, inicialmente, discutida por Brother (1965) por meio da extensão da sequência para o conjunto dos números inteiros, Koshy (2001) propõe uma abordagem dos termos de Fibonacci para índices inteiros através da identidade $F_{-n}=(-1)^{n+1}.F_n$. Halici (2013) apresenta os números complexos de Fibonacci através de $C_n=F_n+i.F_{n+1}$, com $i^2=-1$. Além disso, o modelo de Fibonacci também é discutido através de polinômios complexos (Alves e Catarino, 2016) e na variável complexa (Alves e Oliveira, 2017).

Seguindo nesse sentido de ampliação do repertório de representações do modelo Fibonacciano, este trabalho dá ênfase a sua complexificação a partir da definição dos Quaternions para o modelo de Fibonacci. Os Quaternions são números hipercomplexos que possuem uma parte escalar Real (q_0,q_1,q_2,q_3) e uma parte vetorial com base (e_1,e_2,e_3), valendo as igualdades $(e_1)^2=(e_2)^2=(e_3)^2==e_1.e_2.e_3=-1$. Por definição, um Quaternion é descrito pela equação $q=q_0 1+q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3$. Analogamente, um Quaternion de Fibonacci possui uma parte escalar Real composta pelos números de Fibonacci $(F_n,F_{n+1},F_{n+2},F_{n+3})$ e a mesma base vetorial (e_1,e_2,e_3). Assim, são descritos pela equação $Q_n=F_n+F_{n+1}e_1+F_{n+2}e_2+F_{n+3}e_3$ (Halici, 2012, 2013).

Halici (2012) define os conjuntos: $H=\{Q_n:Q_n=(F_n,F_{n+1},F_{n+2},F_{n+3})$, onde $F_n:=$ número de Fibonacci$\}$ e $H'=\left\{P_n: P_n=\begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w}\end{pmatrix}, \text{para } w, z \in C\right\}$. Halici (2012) assume a existência de isomorfismo entre H e H', de modo que através de uma aplicação $Q_n\to P_n$, obtém-se o teorema 1. Além do mais, é necessário considerar as definições e a identidade a seguir, a fim de se ter aporte teórico para explorar as situações-problema propostas posteriormente.

Definição 1: o número complexo de Fibonacci é definido por: $C_n=F_n+i.F_{n+1}$, com $i^2=-1$ (Halici, 2013).

Definição 2: o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação: $Q_n=F_n+F_{n+1}e_1+F_{n+2}e_2+F_{n+3}e_3$ (Halici, 2013).

Definição 3: o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação: $Q_n=F_n+F_{n+1}.i+F_{n+2}.j+F_{n+3}.k$, onde $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ (Halici, 2012).

Identidade 1: a extensão da sequência de Fibonacci para índices inteiros é dada por $F_{-n}=(-1)^{n+1}.F_n$ (Koshy, 2001).

Demonstração: partindo da recursividade $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, para todo n natural e por indução, podem-se avaliar os termos da sequência de Fibonacci para índices inteiros. Veja:

$$\begin{cases} F_{-1} = F_1 - F_0 = 1 - 0 = 1 \\ F_{-2} = -1 = -F_2 \\ F_{-3} = 2 = f_3 \\ F_{-4} = -3 = -F_4 \\ F_{-5} = 5 = F_5 \\ F_{-6} = -8 = -F_6 \\ F_{-7} = 13 = F_7 \\ \quad \vdots \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot F_1 \\ F_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot F_2 \\ F_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot F_3 \\ F_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot F_4 \\ F_{-5} = 5 = (-1)^{5+1} \cdot F_5 \\ F_{-6} = -8 = (-1)^{6+1} \cdot F_6 \\ F_{-7} = 13 = (-1)^{7+1} \cdot F_7 \\ \quad \vdots \quad \vdots \\ F_{-(n-1)} = (-1)^n . F_{n-1} \\ F_{-n} = (-1)^{n+1} . F_n \\ F_{-(n+1)} = (-1)^{n+2} . F_{(n+1)} \end{cases}$$

Diante desses casos descritos, pode-se observar que a identidade 1 é válida para $n = 1$: $F_{-1} = (-1)^{1+1} . F_1 = 1$. E em, $F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2$ e $F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -3$, pode-se ver que os termos são gerados a partir do seguinte raciocício: $F_{-(n+1)} = F_{-(n-1)} - F_{-n}$. Logo, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} F_{-(n+1)} &= F_{-(n-1)} - F_{-n} \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n . F_{n-1} - (-1)^{n+1} . F_n \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n . F_{n-1} + (-1)^n . F_n \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n . [F_{n-1} + F_n] \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n . F_{n+1} \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^{n+2} . F_{n+1} \end{aligned}$$

Teorema 1: $P_n = F_n E + F_{n+1} I + F_{n+2} J + F_{n+3} K = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$, onde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n \geq 0$.

Demonstração: da aplicação $Q_n \to P_n$, tem-se que $P_n = F_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + F_{n+1} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + F_{n+2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + F_{n+3} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Com isso, pode-se escrever:

$$n=0: P_0 = F_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 + i.F_1 & -F_2 - i.F_3\\ F_2 - i.F_3 & F_0 - i.F_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_0 & -C_2\\ \overline{C_2} & \overline{C_0}\end{pmatrix}$$

$$n=1: P_1 = F_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1 + i.F_2 & -F_3 - i.F_4\\ F_3 - i.F_4 & F_1 - i.F_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1 & -C_3\\ \overline{C_3} & \overline{C_1}\end{pmatrix}$$

$$n=2: P_2 = F_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_2 + i.F_3 & -F_4 - i.F_5\\ F_4 - i.F_5 & F_2 - i.F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_2 & -C_4\\ \overline{C_4} & \overline{C_2}\end{pmatrix}$$

$$n=3: P_3 = F_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_6\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_3 + i.F_4 & -F_5 - i.F_6\\ F_5 - i.F_6 & F_3 - i.F_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_3 & -C_5\\ \overline{C_5} & \overline{C_3}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n: P_n = F_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_n + i.F_{n+1} & -F_{n+2} - i.F_{n+3}\\ F_{n+2} - i.F_{n+3} & F_n - i.F_{n+1}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_n & -C_{n+2}\\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n}\end{pmatrix}$$

$$n+1: P_{n+1} = F_{n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{n+1} + i.F_{n+2} & -F_{n+3} - i.F_{n+4}\\ F_{n+3} - i.F_{n+4} & F_{n+1} - i.F_{n+2}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_{n+1} & -C_{n+3}\\ \overline{C_{n+3}} & \overline{C_{n+1}}\end{pmatrix}.$$

Com efeito, pode-se ver que, para $n=1$ e $n=2$, tem-se respectivamente: $P_1 = F_1E + F_2I + F_3J + F_4K$ e $P_2 = F_2E + F_3I + F_4J + F_5K$. Por hipótese de indução, assume-se que $P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K$ vale para P_n e P_{n-1}, de maneira que se pode escrever $P_{n+1} = P_{n-1} + P_n$. Logo, considerando que $P_{n-1} = F_{n-1}E + F_nI + F_{n+1}J + F_{n+2}K$ e $P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K$, pode-se escrever:

$$P_{n+1} = P_{n-1} + P_n$$
$$P_{n+1} = (F_{n-1} + F_n)E + (F_n + F_{n+1})I + (F_{n+1} + F_{n+2})J + (F_{n+2} + F_{n+3})K$$
$$P_{n+1} = F_{n+1}E + F_{n+2}I + F_{n+3}J + F_{n+4}K.$$

Isto posto, pode-se ver que os conjuntos H e H' definidos por Halici (2012), através de uma aplicação $Q_n \to P_n$ que considera a parte escalar composta pelos números de Fibonacci, permitem uma representação matricial dos quaternions de Fibonacci por meio de uma matriz quadrada de ordem 2, onde os termos são números complexos de Fibonacci C_n. A partir desse campo epistêmico, a seguir, serão discutidas três situações-problema que designam a verificação de propriedades matriciais para o conjunto H' e uma extensão dessa aplicação para índices inteiros.

4. Situações-problema

Nesta seção, serão discutidas três situações-problema concebidas durante uma investigação nos trabalhos de Halici (2012, 2013) e de Callioli, Domingues e Costa (1990). O objetivo dessas questões é de oportunizar uma discussão dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas, ou seja, de descrever as resoluções seguindo as fases consecutivas: ação, formulação e validação. E, pretende-se, com as situações propostas, instigar o desenvolvimento de um raciocínio inferencial e a percepção dos alunos em relação à evolução do modelo de Fibonacci com as representações matriciais complexas e de sua extensão para índices inteiros. Desse modo, têm-se as seguintes situações-problema:

Situação-problema 1: após, avaliar a matriz gerada na aplicação $Q_n \to P_n$ entre os conjuntos H e H', escreva uma matriz para representar a inversa da matriz gerada. Em seguida, discuta com seus colegas se a matriz (gerada), de fato, admite inversa. Justifique sua resolução verificando se essa última matriz (proposta) satisfaz às condições matriciais para se constituir como matriz inversa.

Situação-problema 2: seja P_n^{-1} uma possível notação da inversa da matriz P_n, avalie as seguintes igualdades: $\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = 1$, $(P_n^{-1})^{-1} = P_n$ e $(P_n.P_n^{-1})^{-1} = P_n.P_n^{-1}$. Essas igualdades são verdadeiras? Elas satisfazem às condições matriciais pertinentes à definição de matriz inversa? Apresente a discussão algébrica usada para justificar sua resolução e, se necessário, descartar a solução de um colega.

Situação-problema 3: verifique se

$$P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix},$$

onde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n \geq 0$, admite uma discussão nos índices inteiros. Caso haja uma extensão para índices inteiros, quais argumentos algébricos foram utilizados?

Na situação-problema 1, sugere-se que os estudantes escrevam matrizes com o objetivo de construir a matriz inversa da matriz gerada. Nesse caso, espera-se que os alunos discutam as matrizes propostas pela turma e verifiquem se elas são ou não matrizes inversas. Essa validação/refutação deve ser feita com argumentos matemáticos já aceitos na comunidade científica.

Na resolução da primeira situação-problema, na fase de ação e formulação, espera-se que os alunos identifiquem a matriz $P_n = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$ e sugiram a determinação da matriz inversa P_n^{-1} por meio da definição $P_n.P_n^{-1} = I_2 = P_n^{-1}.P_n$ onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2 (Callioli, Domingues e Costa, 1990). Desse modo, desenvolvendo a equação $P_n.P_n^{-1} = I_2$ tem-se que: $\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} C_n.a_{11} - C_{n+2}.a_{21} & C_n.a_{12} - C_{n+2}.a_{22} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{11} + \overline{C_n}.a_{21} & \overline{C_{n+2}}.a_{12} + \overline{C_n}.a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de onde se obtém os sistemas:

$$\begin{cases} C_n.a_{11} - C_{n+2}.a_{21} = 1 \Rightarrow a_{11} = \dfrac{1 + C_{n+2}.a_{21}}{C_n} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{11} + \overline{C_n}.a_{21} = 0 \Rightarrow a_{11} = -\dfrac{\overline{C_n}.a_{21}}{\overline{C_{n+2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n.a_{12} - C_{n+2}.a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} = \dfrac{C_{n+2}.a_{22}}{C_n} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{12} + \overline{C_n}.a_{22} = 1 \Rightarrow a_{12} = \dfrac{1 - \overline{C_n}.a_{22}}{\overline{C_{n+2}}} \end{cases}$$

Resolvendo-os, são encotrados:

$$a_{11} = \frac{1 + C_{n+2}.a_{21}}{C_n} = -\frac{\overline{C_n}.a_{21}}{\overline{C_{n+2}}} \Rightarrow a_{21} = \frac{-\overline{C_{n+2}}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$$

e $a_{11} = \dfrac{\overline{C_n}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$, $a_{12} = \dfrac{C_{n+2}.a_{22}}{C_n} = \dfrac{1 - \overline{C_n}.a_{22}}{\overline{C_{n+2}}} \therefore a_{22} = \dfrac{C_n}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$

e $a_{12} = \dfrac{C_{n+2}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$. Logo, tem a inversa: $P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_{n+2}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_n}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det(P_n)} . \begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}$. Na fase de validação, deve ser feita a verificação de $P_n^{-1}.P_n = I_2$. Veja que: $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$, assim, segue o seguinte produto matricial: $(P_n^{-1}).P_n = \dfrac{1}{\det(P_n)} . \begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{\det(P_n)} . \begin{pmatrix} \overline{C_n}.C_n + C_{n+2}.\overline{C_{n+2}} & -\overline{C_n}.C_{n+2} + C_{n+2}.\overline{C_n} \\ -\overline{C_{n+2}}.C_n + C_n.\overline{C_{n+2}} & \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + C_n.\overline{C_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Na segunda situação-problema, espera-se que cada aluno busque verificar a validade das igualdades. Em seguida, as resoluções dos alunos devem ser discutidas entre os alunos, os quais devem validar ou refutar as resoluções propostas pelos colegas fundamentando-se nas condições pertinentes à matriz inversa. *A priori*, a fase de ação é caracterizada pela organização das equações da seguinte forma:

$$\text{(i) } \det(P_n).\det\left(P_n^{-1}\right) = 1$$

$$\text{(ii) } \left(P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n$$

$$\text{(iii) } \left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.P_n^{-1}.$$

Desse modo, para resolver o item (i), na etapa de formulação, espera-se que os alunos calculem os determinantes das matrizes P_n e P_n^{-1}, encontrando $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}$ e $\det(P_n^{-1}) = \left(\dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right)$. Em seguida, na validação, os valores dos determinantes devem ser substituídos na equação (i), tal que, possa verficar: $\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = (\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}).\left(\dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right) = 1.$

O item (ii), ainda na etapa de ação, espera-se que os estudantes observem que eles precisam calcular a inversa da matriz P_n^{-1}. Na formulação, eles devem argumentar a verificação da igualdade $(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 = (P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1})$ no sentido de "se somente se". Assim, de modo análogo à resolução da situação-problema 1, deve-se fazer $(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n}.b_{11} + C_{n+2}.b_{21} & \overline{C_n}.b_{12} + C_{n+2}.b_{22} \\ -\overline{C_{n+2}}.b_{11} + C_n.b_{21} & -\overline{C_{n+2}}.b_{12} + C_n.b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (P_n^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} = P_n.$$

Em consequência, na validação, deve ocorrer a avaliação do produto $(P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1})$, assim, segue que $(P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1}) = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ \overline{-C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2} - C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_{n+2}}.\overline{C_n} - \overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + \overline{C_n}.C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$ Portanto, constata-se que a igualdade (ii) $\left(P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n$ é válida.

No item (iii), ainda como ação, os alunos devem sugerir o cálculo da matriz inversa $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}$ e a avaliação da equação $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.P_n^{-1}$ no sentido de "se somente se". Dessa forma, na formulação, primeiramente, deve-se fazer $P_n.P_n^{-1} =$

$$=\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2}-C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}-\overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} & \dfrac{0}{\det(P_n)} \\ \dfrac{0}{\det(P_n)} & \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, tem que ser determinada a inversa $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}$, ou seja, a inversa da matriz identidade. Assim, a Identidade deve satisfazer $(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1}=I_2=(P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1})$. De onde, pode-se obter a seguinte igualdade: $(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow(P_n.P_n^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e verificar $(P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Na solução do item (iii), consegue-se obter $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}=I_2$. Logo, na etapa de validação, deve se verificar

$$P_n.P_n^{-1}=\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2}-C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_{n+2}}.\overline{C_n}-\overline{C_n}\,\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}+\overline{C_n}.C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Portanto, verifica-se a validade de $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}=P_n.P_n^{-1}$.

Finalmente, na solução da situação-problema 3, na fase de ação, é necessário que se defina os conjuntos: $H^*=\{Q_{-n}:Q_{-n}=(F_{-n},F_{-n+1},F_{-n+2},F_{-n+3}),\ F_{-n}:=\text{número de Fibonacci}\}$ e $H''=\left\{P_{-n}: P_{-n}=\begin{pmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix},\text{para } w,z\in\mathbb{C}\right\}$, tendo em vista que se pretende explorar o teorema 1 para índices inteiros. Na fase de formulação, deve-se conjecturar uma aplicação $Q_{-n}\to P_{-n}$, de modo que se possa escrever $P_{-n}=F_{-n}E+F_{-n+1}I+F_{-n+2}J+F_{-n+3}K=\begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix}$, com $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Na validação, pode-se avaliar P_{-n}, recorrendo à indução matemática. Veja:

$$n=0:\ P_0 = F_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 + i.F_1 & -F_2 - i.F_3\\ F_2 - i.F_3 & F_0 - i.F_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_0 & -C_2\\ \overline{C_2} & \overline{C_0}\end{pmatrix}$$

$$n=1:\ P_{-1} = F_{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-1} + i.F_0 & -F_1 - i.F_2\\ F_1 - i.F_2 & F_{-1} - i.F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-1} & -C_1\\ \overline{C_1} & \overline{C_{-1}}\end{pmatrix}$$

$$n=2:\ P_{-2} = F_{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-2} + i.F_{-1} & -F_0 - i.F_1\\ F_0 - i.F_1 & F_{-2} - i.F_{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-2} & -C_0\\ \overline{C_0} & \overline{C_{-2}}\end{pmatrix}$$

$$n=3:\ P_{-3} = F_{-3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-3} + i.F_{-2} & -F_{-1} - i.F_0\\ F_{-1} - i.F_0 & F_{-3} - i.F_{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-3} & -C_{-1}\\ \overline{C_{-1}} & \overline{C_{-3}}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$n:\ P_{-n} = F_{-n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-n} + i.F_{-n+1} & -F_{-n+2} - i.F_{-n+3}\\ F_{-n+2} - i.F_{-n+3} & F_{-n} - i.F_{-n+1}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_{-n} & -C_{-n+2}\\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}}\end{pmatrix}$$

$$n+1:\ P_{-n+1} = F_{-n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-n+1} + i.F_{-n+2} & -F_{-n+3} - i.F_{-n+4}\\ F_{-n+3} - i.F_{-n+4} & F_{-n+1} - i.F_{-n+2}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_{-n+1} & -C_{-n+3}\\ \overline{C_{-n+3}} & \overline{C_{-n+1}}\end{pmatrix}.$$

A seguir, têm-se a discussão da quarta fase da Teoria das Situações Didáticas: a institucionalização que deve ser realizada pelo professor, a fim de apresentar alguns resultados derivados da proposição didática.

5. Institucionalização

A institucionalização é a etapa final da simulação de uma situação didática. Nesse momento o atuante é o docente que avalia as produções dos alunos, descartando erros e/ou selecionando estratégias de soluções, as quais serão reestruturadas e formalizadas a fim de compor o repertório de conhecimentos científicos dos alunos. Nesse contexto, as situações-problema propostas descritas nos parágrafos anteriores, oportunizam a formalização de relações matemáticas oriundas da aplicação $Q_n \rightarrow P_n$ (teorema 1).

INSTITUCIONALIZAÇÃO: RELAÇÕES FORMALIZADAS		
Propriedades matriciais para os Quaternions de Fibonacci com $n \geq 0$		
$\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = 1$	$(P_n^{-1})^{-1} = P_n$	$(P_n.P_n^{-1})^{-1} = P_n.P_n^{-1}.$
Extensão da aplicação $Q_n \rightarrow P_n$ para índices inteiros		
$P_{-n} = F_{-n}E + F_{-n+1}I + F_{-n+2}J + F_{-n+3}K = \begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix}$, com $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$		
$P_{-n} = (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + i.F_{n-1}) & (F_{n-2} - i.F_{n-3}) \\ (-F_{n-2} - i.F_{n-3}) & (-F_n - i.F_{n-1}) \end{pmatrix}$, com $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$		

Tabela 1. Institucionalização: relações formalizadas para os Quaternions de Fibonacci.
Fonte: elaboração da autora.

Pode-se ver que a aplicação $Q_n \rightarrow P_n$ gera um conjunto matricial $P_n = F_n E + F_{n+1} I + F_{n+2} J + F_{n+3} K = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$, onde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n \geq 0$, tal que seus elementos são os números complexos de Fibonacci $C_n = F_n + i.F_{n+1}$ (definição 1) e seus respectivos conjugados, isso ocorre quando se assume a parte escalar $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$. Na situação-problema 2, as matrizes P_n e P_n^{-1} admitem inversas, logo, foram verificadas que valem as propriedades matriciais presentes na tabela 1. Além do mais, é possível avaliar o teorema 1 para uma representação com índices inteiros. E, essa representação pode ser descrita recorrendo à $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$ (identidade 1). Observe que: $P_{-n} =$

$$= \begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-n} + i.F_{-n+1} & -F_{-n+2} - i.F_{-n+3} \\ F_{-n+2} - i.F_{-n+3} & F_{-n} - i.F_{-n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n + i.(-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} - i.(-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ (-1)^{n-1}.F_{n-2} - i.(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n - i.(-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + i.F_{n-1}) & (F_{n-2} - i.F_{n-3}) \\ (-F_{n-2} - i.F_{n-3}) & (-F_n - i.F_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Considerações finais

Neste trabalho, foi discutido o modelo de Fibonacci, numa abordagem didática articulada a uma temática epistemológica que enfatiza propriedades matriciais e uma extensão para índices inteiros de um conjunto matricial definido para os Quaternions de Fibonacci. Isso foi possível a partir da fundamentação na Teoria das Situações Didáticas, específicamente, através da proposição de situações-problema que permitiram a discussão de demonstrações matemáticas através de etapas categorizadas em ação, formulação e validação. Isso permite a compreensão e percepção de um processo evolutivo do modelo de Fibonacci.

Finalmente, pretende-se com o trabalho exposto, instigar trabalhos futuros, no âmbito da Didática da Matemática, que vislumbram a inserção de uma concepção epistemológica, na formação inicial de professores de Matemática, no que concerne à História da Matemática. De modo, a contribuir com a ampliação do repertório de definições e relações atinentes à complexificação do modelo de Fibonacci, que direciona a uma tendência de representações matriciais quadradas de orden superior a dois com a consideração dos números reais e complexos de Fibonacci na composição dos Quaternions.

Bibliografía

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Almouloud, S. A. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT.* Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141.

Alves, F. R. V. (2016a). Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educ.,* Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150.

Alves, F. R. V. (2016b). Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, 68(1), 1 – 5. *[*en línea], 29. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=view&path[]=198

Alves, F.R.V. (2016c). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, v. 5, n. 2, p. 59-68.

Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2016). A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema,* v. 14, n. 2, p. 112-136.

Alves, F. R. V.; Oliveira, R. R. (2017). Sobre o modelo de Fibonacci na variável complexa: identidades generalizadas. *REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA*, v. 11, p. 116-135.

Artigue, M. (2009). DIDACTICAL DESIGN IN MATHEMATICS EDUCATION. o appear in C. Winsløw (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08.* Sense Publ.

Brother, U. A. (1965). *Introduction fo Fibonacci Discovery*. California: Santa Clara University.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.* Louvain-la-Neuve, p. 101-117.

Brousseau, G. (2008). *Conteúdos e Métodos de Ensino.* In: SILVA, Benedito Antônio da. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p.

Callioli, C. A.; Domingos, H. H.; Costa, R. C. F. (1990). *Álgebra Linear e aplicações*. 6. ed. rev. São Paulo: Atual.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* 3. ed. Argentina: Aique.

Flaut, C.; Shpakivskyi. V. (2013). Real matrix representations for the complex quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 23(3), 657-671.

Halici, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 22(2), 321-327.

Halici, S. (2013). On Complex Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 23, 105-112.

Horadam, A. F. (1993). Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quaterly,* 2, 23-33.

King, C. (1963). Leonardo Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 4, p. 15–19.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications*. New York: Wiley and Sons publications.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Sangwine, S. J.; Ell, T. A.; Bihan, N. L. (2011). Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 21, 607-636.

Silva, C. V.; Almouloud, S. A. (2018). Uma articulação entre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 20, n. 1, p.111-129.

Autora:

Rannyelly Rodrigues de Oliveira. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Mestra em Ensino de Ciências e Matemática (IFCE). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Fortaleza/Brasil. E-mail: ranny.math.06@gmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-17

Situación de contraejemplo y su utilidad en la actividad de enseñanza de la Matemática

Edgardo Locia Espinoza, Armando Morales Carballo, Héctor Merino Cruz, Efrén Marmolejo Vega

Fecha de recepción: 2/12/2019
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	En este artículo se reportan los resultados de un estudio exploratorio acerca de la noción de *situación de contraejemplo* y sobre los usos didácticos que un grupo de profesores de Matemáticas en servicio atribuye al contraejemplo. El trabajo fue sustentado teórica y metodológicamente por los aportes de la noción y utilidad del contraejemplo en los procesos de enseñanza – aprendizaje, lo que posibilitó dos diseños de exploración. Del análisis de las producciones, se identificó que los profesores tienen un conocimiento intuitivo de los usos didácticos del contraejemplo y los perciben en función de su inserción en un contexto. **Palabras clave**: Contraejemplo, refutación, validación, enseñanza.
Abstract	In this paper we report the results of an exploratory study about the notion of counterexample situation and about the didactic uses that a group of mathematics teachers attribute to the counterexample. This research was theoretically and methodologically supported by the contributions of the notion and utility of the counterexample in the teaching - learning processes, which allowed two exploration designs. From the analysis of the results was identified that the teachers have an intuitive knowledge of the didactic uses of the counterexample and perceive them according to their insertion in a context. **Keywords**: Counterexample, refutation, validation, teaching.
Resumo	Neste artigo relatamos os resultados de um estudo exploratório sobre a noção de contraexemplo e sobre os usos didáticos que um grupo de professores de matemática em serviço atribui ao contraexemplo. O trabalho foi apoiado teoricamente e metodologicamente pelas contribuições da noção e utilidade do contraexemplo nos processos de ensino - aprendizagem, que permitiram dois desenhos de exploração. A partir da análise das produções, identificou-se que os professores possuem um conhecimento intuitivo dos usos didáticos do contraexemplo e os percebem de acordo com sua inserção em um contexto. **Palavras-chave:** Contra-exemplo, refutação, validação, ensino.

1. Introducción

Los trabajos que reportan Arnal-Bailera & Oller-Marcén (2017), Lee, (2016), Lozano (2015), Stylianou, Chae, & Blanton (2006) coinciden en que uno de los principales problemas por los cuales tanto estudiantes como profesores presentan dificultades para la demostración en Matemáticas, recae en las dificultades sobre la argumentación y la prueba, y esto repercute en la comprensión de conceptos y sus definiciones, las propiedades y las relaciones lógicas entre las partes que estructuran la axiomática matemática.

En particular, las investigaciones relativas a la demostración en la enseñanza de la matemática reportadas por Arsac (1988), Antibi (1988), Hersh (1993) y Mitchell (1996) sostienen que, si bien es cierto que en Matemáticas el concepto de demostración es fundamental, hay muchos estudiantes, e incluso profesores, que no alcanzan a entender por qué los matemáticos dan a la demostración un estatus privilegiado, otros no identifican entre argumentos empíricos y argumentos deductivos. En particular, se ha identificado que en los profesores existe dificultad para aplicar correctamente definiciones, teoremas y fórmulas, confunden entre condiciones necesarias y suficientes, utilizan conclusiones no verificadas que con frecuencia resultan falsas.

En el campo de la Matemática, si se asume la *ley del tercero excluido* se posibilitan dos herramientas para poner a prueba la verdad de una afirmación: se demuestra, y con ello se establece que es verdadera, o se exhibe un contraejemplo para refutarla. Sin embargo, según Arsac (1987), este principio no es "natural" en el razonamiento que se utiliza fuera de las matemáticas, lo que constituye una fuente de dificultades para el desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes. A pesar de que el uso sistemático de contraejemplos para refutar afirmaciones no se encuentra presente en el proceso de enseñanza, los trabajos que reportan Morales (2008) y Locia (2000) establecen que una buena comprensión de los mecanismos de validación debe necesariamente pasar por un análisis cuidadoso del funcionamiento de las refutaciones, en general, y de la utilización de los contraejemplos, en particular.

Desde el punto de vista puramente matemático, el contraejemplo tiene un estatus bien definido. Cuando se aborda esta noción en el ámbito de la lógica, se propone un enunciado lógico cerrado del tipo $\forall x, p(x)$. Para demostrar su invalidez, se tiene que demostrar, por la ley del tercero excluido, que el enunciado $\neg(\forall x, p(x))$ es verdadero, es decir, se debe producir un x_0, tal que $\neg p(x_0)$. Así, la *regla del contraejemplo* se enuncia en los siguientes términos: *para demostrar que un enunciado de carácter universal es falso, es suficiente con exhibir un contraejemplo* (Arsac & Mante, 1997).

Con este antecedente, en este trabajo se indagó sobre la concepción didáctica acerca del contraejemplo en un grupo de quince de profesores en servicio de nivel secundaria, preuniversitario, universitario y en formación. En particular, se exploró sobre las siguientes concepciones:

1. Los profesores reconocen los contraejemplos solo cuando están completa y formalmente presentes en las condiciones estándar que hemos identificado: *In extenso*: si un enunciado cerrado del tipo $\forall x, p(x)$ es propuesto, los alumnos deben declarar su invalidez $\neg(\forall x, p(x))$, producir un x_0, tal que $\neg p(x_0)$ e indicar que esto demuestra aquello.

2. Los profesores reconocen los contraejemplos en situaciones más amplias, menos rigurosas e incompletas, lo que demostrará una concepción didáctica diferente de la concepción lógica.

2. Elementos teóricos-metodológicos

2.1 Identificación del objeto contraejemplo

Consideremos y analicemos la definición dada por Kleene:

> "Una fórmula F del cálculo de predicados no es válida exactamente si F es *falsable* en el sentido siguiente: existe un dominio no vacío D y una asignación en D de los parámetros de F que da el valor $\mathfrak{f}$ (falso). Tal asignación será llamada asignación *falsificante* para F en D y F será llamada falsable en este D […]
> El sistema formado por este D y esta asignación podrá ser designado como constituyendo un contraejemplo a F.
> Remplazando $\mathfrak{f}$ por $\mathfrak{t}$ (verdadero) obtenemos las nociones de *satisfacible*, de asignación que satisface, […] y de ejemplo". (Kleene, 1967, p. 284).

1. Se observa inmediatamente que el término "contraejemplo" no está definido como un término del cálculo de predicados, ni incluso de la teoría de modelos del cálculo de predicados. Se trata de un término "metalingüístico", intermediario entre el lenguaje del constructor y el lenguaje construido. Remite a cierta organización de un conjunto de fórmulas del cálculo de predicados constituido en elemento de "demostración".
2. En esta definición se dice que un contraejemplo es una pareja (D, δ) formada de un dominio D y de una asignación δ (es decir una *n*-tupla de valores de los parámetros de F), pero de hecho para que esta pareja sea un ejemplo o un contraejemplo, es necesario remitirla al argumento F: por consecuencia (D, δ, F) forman un contraejemplo si $\delta \epsilon D$ y si $\delta(F)$ toma el valor $\mathfrak{f}$ y un ejemplo si $\delta \epsilon D$ y si $\delta(F)$ toma el valor $\mathfrak{t}$. La formulación cotidiana en Matemáticas se transforma en "δ es el contraejemplo de F en el dominio D". En este caso el uso pone el acento sobre la asignación δ, que se transforma en "el contraejemplo", mientras que los otros dos términos son relegados al segundo plano como condiciones e incluso se funden en el contexto.
3. En lógica, la noción de contraejemplo solo aparece en la teoría de modelos. Ahí la validez de fórmulas se examina por medio de las asignaciones de sus variables a diversos dominios. En la teoría de la demostración esta noción no aparece. Lo que podría corresponderle sería la producción de dos enunciados cerrados contradictorios tales como $\forall x, p(x)$ y $\neg(\forall x, p(x))$, es decir $\exists x, \neg p(x)$. Pero x no se "exhibe" puesto que no hay dominio de realización a considerar y el vocabulario de los "ejemplos" no tiene entonces objeto.

   Sin embargo, en la práctica matemática, sobre todo a nivel elemental, los lenguajes y los métodos de las dos teorías son utilizados simultáneamente (el concepto de consecuencia válida se confunde con el de deducción, por ejemplo).

4. En la definición de Kleene, solo las fórmulas F que no son formalmente cerradas pueden ser el objeto de un contraejemplo, puesto que deben poseer al menos una asignación δ en al menos un dominio D. Ahora bien, el contraejemplo va de hecho a utilizarse para refutar la validez de fórmulas cerradas. Es decir, si se da una fórmula cerrada cualquiera P del cálculo de predicados y un dominio D, este dominio determina las asignaciones posibles de algunos de los parámetros de P. Consideremos el predicado F (deberíamos decir $F(P)$) obtenido al suprimir en P los cuantificadores relativos a esos parámetros. Es este F el que es susceptible de recibir ejemplos y/o contraejemplos en D.

2.2 Los contraejemplos en la construcción del conocimiento matemático

2.2.1 Las heurísticas del descubrimiento matemático. El trabajo de Polya

En sus estudios sobre las heurísticas del descubrimiento matemático, G. Polya trata la cuestión de las estrategias para llegar a nuevos conocimientos (Polya, 1958). Afirma que, si bien es cierto que las Matemáticas acabadas, presentadas bajo una forma definitiva, parecen puramente demostrativas al comportar solo teoremas y demostraciones, no sucede lo mismo para las Matemáticas en gestación. En la construcción de conocimientos matemáticos nuevos, es necesario combinar las observaciones y fiarse de las analogías. Es necesario intentar llegar a conjeturas y adivinar sus demostraciones. Polya analiza, a partir de ejemplos concretos, las estrategias de búsqueda basadas en los procesos de inducción, analogía, generalización y particularización y dice que tales procesos son casos particulares de un tipo de razonamiento muy utilizado en Matemáticas: el *razonamiento plausible*. El esquema de tal razonamiento es el siguiente: se llega a una conjetura A (que se cree que es verdadera) y a partir de A se puede deducir una afirmación B. Si B es falsa es inmediato que A es falsa. Pero si B es verdadera, entonces la confianza en que A sea verdadera aumenta, A se vuelve más plausible.

Aunque los trabajos de Polya no estén centrados en la utilización de contraejemplos en matemáticas, lo que es importante subrayar es el procedimiento que propone, basado en las interacciones entre el ensayo y el error para conjeturar y probar. La detección de un error, de una contradicción o de una omisión es bienvenida como un paso importante en la construcción de la prueba.

2.2.2 La lógica del descubrimiento matemático. El trabajo de Lakatos

El libro de I. Lakatos (Lakatos, 1976) es una notable presentación del funcionamiento del contraejemplo en la lógica del descubrimiento matemático. El autor presenta la metodología del descubrimiento matemático mediante la lógica de pruebas y refutaciones, a través de un debate ficticio entre un profesor y sus alumnos en una clase en la que se discute la conjetura de Euler. Esta conjetura pretende establecer una relación entre el número de caras, el número de aristas y el número de vértices de un poliedro. Es conveniente mencionar que las etapas de este debate son reales: son todas aquellas por las cuales pasaron los matemáticos en la búsqueda de una prueba definitiva del teorema de Euler.

La conjetura de Euler y propuesta de una prueba. El análisis que Lakatos lleva a cabo sobre la lógica del descubrimiento matemático comienza con la búsqueda de una relación entre el número V de vértices, el número A de aristas y el número C de caras de un poliedro, análoga a la que existe entre el número V de vértices y el número A de lados de un polígono, es decir $V = A$. Después de varios ensayos y errores uno de los participantes en el debate presenta al grupo la conjetura de Euler: En todo poliedro $V - A + C = 2$.

A falta de una prueba definitiva, Lakatos muestra cómo se puede someter una conjetura a lo que él llama “un experimento mental” o “cuasi experimento”, caracterizado fundamentalmente por la descomposición de la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas que abren nuevas instancias de crítica y de contrastación. Así, el experimento mental al que es sometida la conjetura de Euler consta de los siguientes lemas o subconjeturas (esta prueba está inspirada en aquella dada por Cauchy en 1813 (Cauchy, 1813)):

1. Se aplana un poliedro quitando una de sus caras. Nos remitimos así a establecer $V - A + C = 1$ para un grafo plano.

2. Se triangula el gráfico plano trazando diagonales en las caras que no son triángulos. En esta operación se agrega, en cada paso, una cara y una arista a la vez, por lo tanto $V - A + C$ permanece constante;

3. Se eliminan, uno por uno, los triángulos con la ayuda de una de las dos operaciones siguientes: Eliminar un lado o eliminar dos lados y un vértice. Así, si $V - A + C = 1$ antes de una de las dos operaciones, entonces $V - A + C = 1$ después. Al final de este procedimiento, queda solo un triángulo para el cual $V - A + C = 1$, por lo tanto puede pretenderse que la conjetura queda probada.

Los contraejemplos y la dialéctica de la prueba y la refutación. A partir de esta prueba, Lakatos ilustra el funcionamiento de la Matemática desde la formulación de conjeturas, hasta la confirmación o refutación de las mismas. Narra cómo van apareciendo ejemplos que no encajan con la conjetura o con la prueba (contraejemplos), mostrando su función de falsación o refutación. El criterio de rigor que da Lakatos es que, si ningún contraejemplo viene a refutar la conjetura o su prueba, esta (la conjetura) debe ser aceptada como verdadera. Llama *contraejemplo global* a aquel contraejemplo que refuta la conjetura y *contraejemplo local* a aquel que refuta su prueba (o alguno de sus lemas). Un contraejemplo local tiene características que hacen que la prueba no sea válida para ese caso, pero que sin embargo verifica la proposición conjeturada. Estos refutan uno de los lemas, sin refutar la conjetura; critican la prueba puesto que en dicho ejemplo no se cumple una propiedad que se suponía válida. Lo que queda refutado es un lema implícito y por tanto, la prueba. Por otra parte, la presencia de contraejemplos globales del teorema produce un conflicto entre el concepto, la conjetura y su prueba. Este conflicto involucra a la conjetura o a la prueba, y puede resolverse de distintas maneras, incluso ajustando la definición del concepto o determinando el abandono de la conjetura. Un contraejemplo global puede ser al mismo tiempo local, es decir, refutar un lema (o subconjetura) de la prueba; puede ser que este solo refute a la conjetura, es decir, que sea global pero no local. Este caso es tratado de una manera especial por Lakatos. Todo esto permite establecer distintos métodos de trabajo con el objetivo de la validación. Según estos métodos, los contraejemplos pueden llevar respectivamente a tratar de revisar la conjetura, los términos en ella implicados o su prueba: Método de la rendición, de exclusión de monstruos, de ajuste de monstruos, de exclusión de excepciones, y de incorporación de lemas.

Lakatos muestra así, cómo el debate sobre las demostraciones incompletas o las primeras tentativas de demostración de un resultado, es uno de los elementos preponderantes del progreso en el descubrimiento matemático. Sobre todo, cuando las supuestas demostraciones comportan implícitos, recurren a la evidencia ("lemas ocultos"), utilizan nociones que no están definidas totalmente, donde es posible que se disimulen errores y contradicciones. Es justamente la existencia de estos errores y de estas contradicciones la que es productiva. El hecho de superarlas se transforma en fuente de progreso. La presentación de un contraejemplo para poner en evidencia una contradicción puede conducir a interrogarse sobre la prueba buscando los "lemas ocultos" que dan lugar al contraejemplo. Así, en la interacción de la prueba y del contraejemplo, este último no solo sirve para poner en evidencia el error, sino que conduce a retomar ideas de objetos definidos implícitamente (los cuales en vista de las necesidades de su utilización estaremos obligados a precisar poco a poco para explicitar sus definiciones), y a darse cuenta de las diversas significaciones de los términos que se utilizan para expresar las demostraciones.

2.2.3. El papel de los contraejemplos en la producción de conocimientos matemáticos

Lakatos señala que los contraejemplos juegan un papel mucho más importante en la búsqueda de resultados en Matemáticas que lo que nos hace creer su lugar en la presentación clásica (axiomática) de estos mismos resultados. Se ha identificado cómo, en su proyecto de oponer las características de las Matemáticas hechas con las de la actividad matemática, el contraejemplo juega el papel de un revelador. Le permite mostrar que la dialéctica de la investigación no está bien representada por el orden y por los medios de la exposición clásica y de la demostración.

Más precisamente, Lakatos muestra el papel motor de las tentativas de prueba y de las refutaciones en la elaboración de una teoría matemática y el papel de los contraejemplos en esta dialéctica. Su modelación del debate a propósito de la conjetura de Euler permite comprender bien los diferentes empleos del contraejemplo como medio de control de la validez de las conjeturas, las demostraciones, las condiciones de validez, como medio de elegir definiciones, entre otros, y esta modelación muestra también cómo, progresivamente, el proceso de matematización esconde y elimina estos contraejemplos por: relegación de excepciones, incorporación de lemas, entre otros.

Una vez que el trabajo de construcción está terminado, el andamiaje de los contraejemplos desaparece del texto; este solo puede ser restablecido -al menos en parte- por el lector, como actividad de interrogación y de comprensión del texto. Esta restauración, evidentemente es muy parcial.

2.2.4. El papel de los contraejemplos en la Didáctica de las Matemáticas

Distinguimos en la enseñanza de las Matemáticas una doble necesidad. Por una parte, la necesidad de comunicar inmediatamente como una herencia (y por lo tanto como un texto) los conocimientos matemáticos de una época. Por otra, la necesidad de hacerlos producir, al menos en parte, como resultante de una actividad humana en la cual se quiere iniciar a los alumnos. Desde este punto de vista, el aporte de Lakatos es de una importancia capital.

De lo anterior, podemos en efecto deducir que:

- Si los procesos de producción matemática por los alumnos deben parecerse (aunque sea en lo mínimo) a los utilizados por los matemáticos, entonces no se parecerán mucho a los textos por los cuales las Matemáticas se manifiestan a ellos y a sus profesores.

- Por consecuencia, provocar, manejar e interpretar actividades matemáticas de los estudiantes, exigirá de sus profesores dos tipos de conocimientos irreductiblemente muy diferentes, uno relativo a los textos, el otro relativo a los conocimientos matemáticos.

Es necesario subrayar que esta diferencia es inherente a las Matemáticas reales, formadas de textos y de actividades y que ella no debe casi nada a la Psicología, incluso si esta última se encarga de mostrar la necesidad de la actividad en el aprendizaje y la comprensión de los textos, así como la existencia y el papel de los procesos cognitivos. La diferencia no podrá por lo tanto ser reducida, incluso ni por dispositivos psicológicos.

2.2.5 Los contraejemplos en el contexto escolar

En el campo de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática se han desarrollado trabajos relativos a la formulación de conjeturas y al empleo del contraejemplo para el tratamiento de conceptos, propiedades y relaciones matemáticas, entre los que podemos mencionar los reportados por Weber (2009), Komatsu (2010), Ko & Knuth (2013), Giannakoulias, Mastorides, Potari, & Zachariades (2010), Komatsu, Jones, Ikeda & Narazaki (2017), García & Morales (2013), Klymchuk, (2010), Zazkis & Chernoff (2008), Huang (2014). Se se ha identificado que estás investigaciones están centradas en los estudiantes, profesores en servicio y en formación, y en estudiantes de posgrados. En cada una de ellas, se pone de manifiesto que el contraejemplo es una herramienta didáctica que favorece los procesos de validación y comprensión del conocimiento matemático.

Del análisis de los estudios reportados en los trabajos anteriormente citados, respecto al uso del contraejemplo; identificamos las siguientes implicaciones metodológicas: 1) Permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje: esta implicación se identificó en los trabajos de investigación centrados en el alumno en los niveles escolares (primaria, secundaria, bachillerato, licenciatura y posgrado) al tratar contenidos específicos de la Matemática tales como: aritmética, álgebra, geometría, teoría de números, cálculo y análisis, entre otras; 2) Permite la estructuración funcional de los razonamientos lógico-matemáticos: esta implicación fue identificada en las propuestas relacionadas con el estudio de la prueba y la producción del contraejemplo para la validación de resultados; 3) Favorece la reflexión de los estudiantes en aspectos esenciales de las Matemáticas, al poner de manifiesto la importancia de las reglas, principios, teoremas y propiedades asociadas a los objetos matemáticos: esta implicación fue identificada en la actividad del alumno, del profesor y del profesor en formación; 4) Permite identificar a través del proceso constructivo del conocimiento las características y propiedades básicas e invariantes de los objetos matemáticos: esta implicación se identificó a partir de propuestas de contraejemplos que favorecieron la refutación de conjeturas sobre definición de conceptos de objetos matemáticos en temas concretos de aritmética, geometría, álgebra, cálculo, teoría de números, entre otras; 5) Revela conceptos erróneos, y obliga a prestar atención a cada detalle del proceso mejorando la comprensión de los conceptos y propiedades matemáticas: esta implicación se identificó al concebir el contraejemplo en su connotación semántica y su uso como herramienta didáctica para favorecer los procesos de validación; y en dicho proceso, la refutación mediante la propuesta de contraejemplos fue fundamental.

En las secciones anteriores hemos visto que, en Matemáticas, la palabra contraejemplo tiene un significado y un estatus bien definido y que su papel en la construcción del conocimiento matemático a través de la dialéctica de la prueba y la refutación es de una gran importancia a pesar de que, una vez que las teorías matemáticas han sido terminadas y presentadas de una manera axiomática, los contraejemplos desaparecen completamente de los textos matemáticos. Consideramos que este hecho debe tener consecuencias en la enseñanza: por ejemplo, los profesores propondrán problemas y solicitarán a sus alumnos demostraciones y razonamientos que se parecerán a los textos matemáticos y que, por lo tanto, subutilizarán y ocultarán el papel de los contraejemplos. De esta manera el contraejemplo no será un objeto de enseñanza. Sin embargo, como en sus propios razonamientos, los profesores utilizan a veces los contraejemplos, exigirán también de sus alumnos su uso espontáneo y por lo tanto la noción tendrá un perfil difuso.

3. Método

El trabajo es de tipo descriptivo con carácter interpretativo, como se estableció antes. Nos propusimos explorar cómo perciben los profesores la noción de contraejemplo y cuál es el papel que juega esta noción en su enseñanza. Esta fue una primera aproximación al estudio del funcionamiento del contraejemplo en el contexto escolar.

Cabe señalar que no se llevó a cabo la validación de los cuestionarios de modo explícito, ya que el planteamiento que se hizo en cada cuestionario surgió en el contexto de los seminarios a los que asistió un grupo de 15 profesores en servicio de distintos niveles (secundaria, preuniversitario, universitario) y en formación, y en el que se discutieron problemas sobre la enseñanza de la Matemática y de su dominio, en los niveles indicados, y en ese marco emergió el planteamiento acerca del contraejemplo y de sus usos. Tal proyecto se desarrolló en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero y estuvo coordinado y dirigido por los autores de esta investigación.

3.1. Primer cuestionario. De este primer cuestionario, se planteó a los profesores la siguiente pregunta: Según usted, ¿qué se entiende por situación de contraejemplo?

Precisiones: Este cuestionario fue propuesto a 3 grupos: uno de 3, otro de 5, y un tercer grupo de 7 profesores que participaban en el seminario. Se les pidió responder a la pregunta espontáneamente porque lo que interesaba era saber cuál es la primera idea que les viene a la mente cuando piensan en la noción de situación de contraejemplo. Ningún límite de tiempo fue impuesto pero la mayor parte de los participantes tomaron entre 10 y 15 minutos para responder.

Respuestas que produjeron los profesores

Hemos agrupado las respuestas que produjeron los profesores en diferentes patrones según el tipo de funcionalidad que los autores otorgan a los contraejemplos. En específico, hemos agrupado las respuestas en las categorías: Lógica, ¿implicación verdadera?, efecto de sorpresa, necesidad de las hipótesis, ampliación de conjunto.

Lógica: En la categoría lógica agrupamos todas las respuestas que ponían el acento sobre el aspecto del contraejemplo en tanto que método de demostración de la falsedad de una afirmación. Desde nuestra visión, consideramos que esto corresponde a la situación estándar de la definición lógica del contraejemplo.

Concepciones del contraejemplo que emergieron

- *Se trata de una situación que permite mostrar un ejemplo que pone en evidencia la falsedad de una afirmación.*
- *Es una manera de demostrar que un razonamiento es erróneo*
- *Es cuando se puede probar que una afirmación (o una propiedad) es falsa con la ayuda de un ejemplo.*

Aplicación de la concepción anterior

- *Los múltiplos de 3 son los números que terminan en 0, 3, 6 o 9. Contraejemplo: 12 es un múltiplo de 3 pero no termina en 0, 3, 6, o 9. Ahora bien, 43 termina en 3 pero no es un múltiplo de 3.*

¿Implicación verdadera?: En esta categoría se agrupan las respuestas cuya idea principal de contraejemplo es la de poner en evidencia la falsedad de una afirmación bajo forma de implicación.

Situaciones que emergieron

- *Una situación en la que se quiere mostrar que la proposición* $(A \Longrightarrow B)$ *es falsa: se busca un objeto tal que* A *y no-*B.
- *Se está en una situación de contraejemplo cuando aquello que se nos pide demostrar es falso.*

Se cita entonces un ejemplo en el cual los datos son verdaderos con una conclusión que no es la que fue propuesta.

Efecto de sorpresa: Son respuestas en las que el autor da a los contraejemplos la virtud de producir cierta sorpresa en el momento de poner en evidencia la falsedad de un enunciado que previamente pudo haberse creído verdadero. Estas respuestas se caracterizan por la utilización de expresiones tales como “creer verdadera una afirmación”, “pensar que un enunciado es verdadero”, etc.

Respuestas de los profesores

- *Situación en la cual se prueba, por la consideración de un ejemplo, que un enunciado que pudiera creerse verdadero, es falso.*
- *Hacer buscar un ejemplo que va al contrario de lo que parece admitido en el momento presente.*
- *Una situación de contraejemplo permite contradecir una verdad aparente*.

Necesidad de las hipótesis: Se trata de respuestas en las que la función principal del contraejemplo es la de poner a prueba que ninguna de las hipótesis de un teorema dado es superflua, es decir, las hipótesis son todas necesarias.

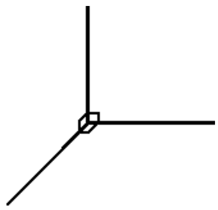
Respuestas de los profesores

- *Una "situación" (teorema en general) estando perfectamente demostrado a partir de hipótesis* $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ *mostrar por un ejemplo que si una de las hipótesis no se cumple, el teorema no es verdadero, el ejemplo en cuestión es entonces un contraejemplo.*
- *Es una situación que muestra que cuando una de las hipótesis de un teorema no se cumple, la conclusión puede ser falsa*.

Ampliación de conjunto: En esta categoría la idea principal es de poner en evidencia, por medio de un ejemplo, la falsedad de una afirmación que es producida ampliando el dominio de aplicación de un teorema o de un resultado previamente establecido. El ejemplo dado por uno de los participantes puede ayudarnos a comprender mejor esta idea.

Ejemplo

- *En geometría del espacio, los alumnos piensan que, como en el plano, si dos rectas son perpendiculares a una misma tercera entonces son paralelas. El contraejemplo*:



Reflexiones en torno a la clasificación de los tipos del contraejemplo

- Las categorías no son excluyentes las unas de las otras, ya que ciertas respuestas dadas por los profesores encuestados comportan aspectos de dos o más categorías mencionadas antes. El criterio de clasificación que hemos seguido en estos casos es el de clasificarlas respecto a la idea que, en nuestra opinión, era la más fuerte. Así, el ejemplo de respuesta dado en la categoría "ampliación de conjunto" la idea más fuerte es la de transferir un resultado válido para la geometría del plano a un resultado "más general" relacionado con la geometría del espacio. Sin embargo, esta respuesta comporta también aspectos relativos a las categorías "efecto de sorpresa" (la expresión "…los alumnos piensan que…") y de "¿implicación verdadera?" (el enunciado bajo la forma "si… entonces …").

- Desde el punto de vista matemático la categoría "necesidad de las hipótesis" es equivalente a la categoría "ampliación de conjunto". En efecto, cada vez que se suprime una de las hipótesis de un teorema se extiende su dominio de aplicación y, recíprocamente, cada vez que se generaliza un resultado (ampliación de conjunto), los elementos a los cuales se quiere aplicar la propiedad en cuestión satisfacen un número más pequeño de condiciones (hipótesis). Pero del punto de vista didáctico estas dos categorías conciernen a dos maneras diferentes de hacer funcionar un contraejemplo.

- Es importante señalar que ninguno de los profesores que han realizado este cuestionario mencionó el lenguaje conjuntista, es decir la utilización de los contraejemplos para permitir poner en evidencia la falsedad de una afirmación relativa a la inclusión de un conjunto en otro, es decir: ¿es cierto que $A \subset B$?

Resultados cuantitativos

En la tabla siguiente, se presentan los resultados cuantitativos de este primer cuestionario:

Tipos de contraejemplo	Lógica	¿Implicación verdadera?	Efecto de sorpresa	Necesidad de las hipótesis	Ampliación de conjunto
Número de respuestas	4	3	4	1	1

Tabla 1. Número de respuestas dadas por los profesores y su clasificación en las categorías identificadas.

Como se observa en la Tabla 1, 13 profesores produjeron respuestas y estas se clasificaron en algunos de los tipos identificados. Cabe destacar que se identificaron otras dos categorías, las cuales se denominaron "incómodo" y "diversos". La primera se refiere a la respuesta de un profesor que ha manifestado explícitamente que estaba incómodo por la yuxtaposición de los términos "situación" y "contraejemplo". Al respecto, el profesor explicó:

> *El término situación, me vuelve confusa esta expresión. Yo conozco: demostración por contraejemplo, citar un contraejemplo, etc. pero no situación de contraejemplo*.

Un profesor solamente está en esta rúbrica, sin embargo, para la mayoría de los profesores, "situación de contraejemplo" tiene un significado.

En la clasificación de "diversos" se ubicó la siguiente respuesta:

> *Para demostrar algo. Se encuentra un ejemplo concreto que muestra lo contrario.*
> *¿Podemos llamar a esto una situación de "contra"-ejemplo* (sic)*?*
> *"El hombre es mortal"*
> *"Dios es inmortal" (¿Citas o definiciones?)*
> *"Dios se hizo hombre" (Posición de la iglesia católica)*
> *¿Conclusión?*

A pesar del aspecto lógico del contraejemplo, no se pueden soslayar las otras ideas que la expresión "situación de contraejemplo" evoca en los profesores. Es el "efecto de sorpresa" que está en igualdad de importancia con el aspecto lógico.

3.2. Segundo cuestionario. Hemos considerado que las respuestas dadas por los profesores al primer cuestionario revelaban usos diferentes del contraejemplo desde el punto de vista didáctico. Quisimos precisar con otro cuestionario si podíamos, por diversas formulaciones de un mismo problema, identificar estos diferentes usos de la noción de contraejemplo. Este cuestionario comporta tres partes

3.2.1. Primera parte. Para cada uno de enunciados siguientes, diga si corresponde a una situación de contraejemplo:

1. Encontrar un múltiplo de 1240 que no sea un múltiplo de 2480		
SÍ	NO	NO SÉ
2. Considere la propiedad verdadera siguiente: "Si un número es múltiplo de 2480, entonces es un múltiplo de 1240". ¿Es verdadera la recíproca de esta afirmación?		
SÍ	NO	NO SÉ

<table>
<tr><td colspan="3">3. ¿Existe un múltiplo de 1240 que no sea múltiplo de 2480?</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>NO</td><td>NO SÉ</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Mostrar que el conjunto de los múltiplos de 1240 no es igual al conjunto de los múltiplos de 2480.</td></tr>
<tr><td>SÍ</td><td>NO</td><td>NO SÉ</td></tr>
</table>

3.2.2 Segunda parte. Si puede, explique sus respuestas a las preguntas anteriores.

3.2.3. Tercera parte. En el caso en el que, según usted, varios enunciados correspondan a una situación de contraejemplo, indique: aquel que corresponda más a una situación de contraejemplo y aquel que corresponda menos a una situación del tipo indicado.

Precisiones: Este cuestionario fue propuesto a los profesores que habían respondido al test del parágrafo precedente. Para la primera parte, se les recordó que no era necesario responder los ejercicios presentados en cada enunciado, sino que había que responder a la pregunta planteada al inicio, encerrando, en cada caso, la respuesta útil. Ningún límite de tiempo se impuso, pero la mayoría de las personas tomaron alrededor de 20 minutos para responder.

Análisis a priori de la primera parte

Enunciado 1. La respuesta que esperamos para esta pregunta es NO. No se considera este problema como una situación de contraejemplo porque no comporta explícitamente un enunciado conjetural. Cuando la solicitud es encontrar un número con ciertas características, se asume que este número existe. De hecho, más que un contraejemplo, lo que se pide es encontrar un ejemplo de algo.

Enunciado 2. Se considera que este enunciado constituye una situación de contraejemplo. Lo que se pide es responder a una pregunta sobre la veracidad de una frase afirmativa (la recíproca de una propiedad verdadera). Al inicio no se sabe si esta afirmación es verdadera o falsa pero su falsedad puede demostrarse con la exhibición de un contraejemplo. La respuesta esperada es entonces SÍ.

Enunciado 3. En este caso, como en el anterior, se trata también de una conjetura. Aquí, lo que es conjeturado es la existencia de un número que satisface dos propiedades. Es decir, no se trata de una conjetura universal. Por lo tanto la situación a la cual da lugar, no es una situación de contraejemplo. La respuesta esperada es NO.

Enunciado 4. Se trata de un problema a demostrar (terminología utilizada por Polya (1958)). Un problema del cual se conoce la respuesta. Lo que hay que demostrar es la existencia de un número que satisface ciertas condiciones. En este caso particular, el problema es equivalente al problema presentado en el enunciado 1, la existencia puede demostrarse dando un ejemplo particular. Le respuesta esperada es entonces NO. Así, desde la visión de los autores del trabajo, el único enunciado que corresponde a una situación de contraejemplo es el enunciado 2.

Resultados cuantitativos de la primera parte. Se presentan los resultados de la primera parte en la tabla siguiente:

	Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4
Respuestas				
NO	80% (12)	7% (1)	47% (7)	20% (3)
SÍ	13% (2)	86% (13)	40% (6)	73% (11)
NO SÉ	7% (1)	7% (1)	13% (2)	7% (1)

Tabla 2. Respuestas a la primera parte del segundo cuestionario.

El número que está entre paréntesis en cada una de las celdas es el número de respuestas que han sido clasificadas en los diferentes tipos de contraejemplo.

Análisis de las respuestas

▪ La tabla muestra que los enunciados 1 y 2 han planteado menos dificultad para ser clasificados por los profesores. Esto significa que hay muy pocas dudas, por parte de los profesores, sobre el hecho de que el enunciado 1 no representa una situación de contraejemplo. De la misma manera, como previmos, aparece muy claramente que el enunciado 2 representa, para la mayoría de los profesores, una situación de contraejemplo.

▪ En el enunciado 3, las opiniones son verdaderamente muy compartidas. Es tal vez porque el enunciado está planteado en forma de conjetura que encontramos cierto titubeo por parte de los profesores para definir una posición uniforme. Esto parece indicar que, en casos de este tipo, las nociones de ejemplo y contraejemplo no son verdaderamente diferenciadas.

▪ El enunciado 4 obtuvo el número más grande de respuestas “SÍ”.

Antes de hacer hipótesis sobre los orígenes de estas respuestas, vamos a analizar las justificaciones dadas en la segunda parte del cuestionario.

Segunda parte

Acerca de las respuestas: 2 de 15 personas interrogadas no dieron explicación alguna, una no establece diferencia alguna entre los cuatro enunciados (este profesor respondió “SÍ” para los 4 enunciados), 2 señalan que, para ellos es “intuitivo” o “evidente”, 4 profesores escriben algo, pero no hay explicación.

Algunas descripciones que realizaron los profesores

- *Yo no entiendo bien qué se entiende por situación de contraejemplo* (este profesor responde “NO SÉ” salvo para el enunciado 1 para el cual su respuesta es “NO”).
- *Yo no encuentro situación de contraejemplo en el sentido en el que yo lo entiendo, sino preguntas con respuestas a encontrar* (este profesor responde “NO” a los dos primeros enunciados, “SÍ” a los dos otros).
- *El contraejemplo serviría para responder a una pregunta expresada de manera general. Él niega el enunciado de una propiedad general.*
- *Yo hago la diferencia entre ejemplo y contraejemplo.*
- *Yo respondo “SÍ” cuando se trata de mostrar que una propiedad no es verdadera (siendo la pregunta 4 la misma que la 2).*

- *Un contraejemplo no está formulado de manera universal.*
- *¿El enunciado está ligado o no a un contexto?*
- *Me parece que yo hablo de contraejemplo cuando se enuncia una frase afirmativa y que una pregunta acerca de su veracidad se plantea, como en 2. Es por lo tanto contradecir una afirmación, exhibiendo un contraejemplo.*

Análisis

Solo seis profesores proponen verdaderamente una explicación. Sin embargo, solo un profesor responde "NO SÉ" para los enunciados 1, 2, 4 y dos para el enunciado 3. Parece entonces que la mayor parte de respuestas se apoyan esencialmente sobre la experiencia de los profesores. Esta segunda parte del cuestionario no permitió identificar la razón de las elecciones de las argumentaciones de los profesores interrogados.

Tercera parte

En las tablas siguientes se presentan los resultados:

Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4	No supo
2	9	0	1	3

Tabla 3. Corresponden más a una situación de contraejemplo

Enunciado 1	Enunciado 2	Enunciado 3	Enunciado 4	No supo
3	1	0	4	7

Tabla 4. Corresponden menos a una situación de contraejemplo

Análisis

La Tabla 3 confirma que, para el enunciado 2, la tendencia es clara: los profesores lo sitúan a la cabeza en la categoría "situación de contraejemplo". El enunciado 3, para el cual las opiniones eran compartidas en la parte 1 del cuestionario, no recoge aquí ningún sufragio. Teniendo en cuenta el número importante de respuestas "NO SÉ", la Tabla 4 no proporciona informaciones importantes.

4. Conclusiones de la investigación

De acuerdo al trabajo presentado y a los resultados obtenidos, establecemos las siguientes conclusiones principales: Los profesores tienen un conocimiento al menos intuitivo de los usos didácticos de los contraejemplos y los perciben en función de su inserción en un contexto, tal y como se reflejó en los datos cuantitativos; la mayoría de ellos no está en posibilidad de precisar qué es una situación de contraejemplo, pero tiene una idea de ello y puede decir si una situación dada lo es o no; para algunos la diferencia entre ejemplo y contraejemplo no es clara. Las respuestas encontradas al responder el primer cuestionario favorecieron una primera clasificación de las situaciones de contraejemplo.

5. Reflexiones finales

- En la actividad matemática profesional los contraejemplos tienen un papel muy importante. Sin embargo este rol no se encuentra presente en la presentación axiomática de los conocimientos.

- El sesgo así introducido en la transposición didáctica de las Matemáticas, tiene consecuencias en la enseñanza en la que los contraejemplos tienen un rol modesto, poco representativo del que tienen en la actividad matemática profesional. Así los contraejemplos son métodos de razonamiento más que objetos de enseñanza.

- La clasificación generada acerca de las situaciones de contraejemplo, puede ser el punto de partida para trabajos futuros en la dirección de considerar los contraejemplos como herramienta didáctica.

- Actualmente se encuentra en desarrollo la capacitación y actualización del grupo de profesores con los que se trabajó la exploración que se reporta en este trabajo, y en particular se trabajan los proyectos: el papel de los contraejemplos en los procesos de construcción de definiciones matemáticas y estudio de la variación de las funciones en el que se utiliza el contraejemplo como una herramienta didáctica. Estas actividades toman como base la clasificación generada en este trabajo, y se pretende aportar herramientas al profesor para su formación y para su actividad de enseñanza en los niveles educativos indicados.

Bibliografía

Antibi, A (1988). *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite: reflexions, propositions*. PhD thesis, Toulouse. Universidad Paul Sabatier.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A. M. (2017). Formación del Profesorado y Demostración Matemática. Estudio Exploratorio e Implicaciones. *Bolema,* 31, 57,135-157. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0135.pdf

Arsac, G (1987). L'origine de la démostration: essai d'épistemologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 8(3): 267-312.

Arsac, G (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentisage de la démonstration et les phénoménes de validation en France. *Recherches* en didactique des mathématiques, 9(3): 247-280.

Arsac, & Mante, M (1997). Situations d'initiations au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathemtics*, 33 (1): 247-280.

Cauchy, L. A. (1813). Recherche sur les polyèdres - premier mémoire. *Journal de l'École Polytechnique '9'*. 66-86.

García, O. y Morales, L. (2013). El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 13, 161-175. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo14.pdf

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studing teachers' mathematical argumentation in the contexto of refuting students invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior,* 29, 160-168. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312310000386

Huang, Ch. (2014). Engineering students' generating counterexample of calculus concepts. *Global Journal of Engineering Education,* 16(2), 93-97 Recuperado de http://www.wiete.com.au/journals/GJEE/Publish/vol16no2/06-Huang-C-H.pdf

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaning. *Educational studies in Mathematics*, 2(4): 389-399.

Kleene, S. (1967) *Logique mathématique*. Amsterdam. North-Holland Publishing Company.

Klymchuk, S. (2010). Counterexamples in Cálculus. *Mathematical Association of América. Resource Materials.* United States of América.

Ko, W. & Knuth, E. J. (2013). Validating Proofs and Counterexamples Across Content Domains: Practices of Importance for Mathematics Majors. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32, 20-35. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312312000363

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for Refinement of Conjectures and Proofs in Primary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 29(1), 1-10.* Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312310000040

Komatsu, K., Jones, K., Ikeda, T., & Narazaki, A. (2017). Proof validation and modification in secondary school geometry. *The Journal of Mathematical Behavior.* 47, 1-15. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316300980

Lakatos, I. (1976). *Preuves et refutations: essai sur la logique de la decouverte mathématique*. Herman, París.

Lee, K. (2016). Students' proof schemes for mathematical proving and disprovong of propositions. *The Journal Mathematical Behavior,* 41, 26-44. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312315300134

Locia, E. (2000). *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathematiques.* Tesis doctoral no publicada, Universidad Paul Sebatier. Touluse, Francia.

Lozano, M. D. (2015). Argumentación abductiva y prueba en problemas de geometría analítica utilizando geogebra. *Tercer Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.* México.

Mitchell, T. (1996). On examples, counterexamples, and proof by example. *General Economics and Teaching 9607001, University Library of Munich,* Germany.

Morales, A. (2008). *El papel que juega el contraejemplo en la construcción de las definiciones en matemáticas: El caso de la función convexa.* Tesis inédita de Maestría. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Polya, G (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. París. Gauthier-Villar.

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: a closer look at what characterizes students' proof conceptions en Alatorre*, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., & Méndez, A. (Eds.). Proceedings of the TwentyEighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.* 2, 54-60.

Weber, K. (2009). How Syntactic Reasoners can Develop Undertstanding, Evaluate Conjetures, and Generate Counterexamples in Advanced Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 28,* 200-208. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S073231230900039X

Zazkis, R. & Chernoff, E. (2008). ¿What Makes a Counterexample Exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68,* 195-208.

Autores:

Locia Espinoza Edgardo. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Licenciado y Master en Matemática Educativa, Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad Paul Sabatier (Toulouse III). Email: lociae999@hotmail.com

Morales Carballo Armando. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Licenciado en Matemáticas: Área Enseñanza de la Matemática y Computación, Maestría y Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México. Email: armando280@hotmail.com

Merino Cruz Héctor. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en Matemáticas: Área Enseñanza de la Matemática y Computación, Maestría y Doctorado en Matemáticas. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México. Email: hmerinoc@gmail.com

Marmolejo Vega Efrén. Profesor Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Licenciado en Matemática Educativa, Maestría y Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Email: efrenmarmolejo@yahoo.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-18

www.fisem.org/web/union

Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia: la formación de profesores de matemáticas para secundaria

Reginaldo Fernando Carneiro

Fecha de recepción: 26/02/2020
Fecha de aceptación: 8/04/2021

Resumen	El objetivo de este artículo es reflexionar sobre las posibilidades y retos del Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia –PIBID– para la formación de profesores de matemáticas en educación secundaria en Brasil. Analizamos 14 investigaciones realizadas entre 2012 y 2016 y los resultados mostraron que el PIBID permitió que los estudiantes se incorporaran a la escuela antes de las prácticas y que pasaran más tiempo en este contexto, que sería posteriormente su ambiente de trabajo. La participación en el PIBID posibilitó también aprendizajes acerca de la problematización y reflexión sobre las prácticas en el salón de clase, la planeación y el desarrollo de actividades con los escolares, la recapitulación de los contenidos matemáticos, etc. **Palabras clave**: formación de profesores, matemáticas, educación secundaria, Brasil.
Abstract	The purpose of this article is reflect on the possibilities and challenges of the Scholarships Institutional Program for Initiation in Teaching -PIBID- for the education of mathematics teachers of Middle School in Brazil. We have analyzed 14 investigations development between 2012 and 2016. The analysis has showed that the PIBID allowed introducing the students at school before the practices and that they had more time in that context that will be their work environment. It also made it possible to learn how to problematize and reflect on classroom practices, plan and develop activities with students, remember mathematical content, etc. **Keywords**: teacher education; mathematics; Middle School; Brazil.
Resumo	O objetivo deste artigo é refletir sobre as possibilidades e desafios do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência –PIBID– para a formação de professores de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil. Analisamos 14 pesquisas realizadas entre 2012 e 2016. A análise evidenciou que o PIBID permitiu que os estudantes se inserissem na escola antes dos estágios e que tivessem mais tempo nesse contexto que será seu ambiente de trabalho. Possibilitou também aprendizagens como problematizar e refletir sobre as práticas em sala de aula, planejar e desenvolver atividades com os alunos, recordar os conteúdos matemáticos, etc. **Palavras-chave:** formação de professores; matemática; Ensino

	Fundamental; Brasil.

1. Introducción

Actualmente, la educación secundaria en Brasil comprende del 6° al 9° año (niños de 11 a 14 años) y se conoce como años finales de la Enseñanza Fundamental; la formación de profesores para este nivel se lleva a cabo en los programas de licenciatura en Matemáticas.

En los últimos años, el gobierno brasileño ha creado diferentes programas de formación que son ofrecidos tanto para los futuros profesores (que todavía están en licenciatura) como para aquellos que ya trabajan en las escuelas. El PIBID es un programa de formación docente que concede becas a estudiantes de licenciatura y a profesores de universidad y de escuela que participan en proyectos de inducción a la docencia desarrollados por las universidades en colaboración con escuelas públicas de educación básica.

Los principales objetivos del PIBID son los de incentivar la formación de profesores en nivel superior para la educación básica, inserir a los estudiantes en lo cotidiano de las escuelas públicas proporcionándoles oportunidades de creación y participación en experiencias metodológicas, tecnológicas y de prácticas docentes y, por último, contribuir en la articulación entre teoría y práctica, necesaria para la formación de profesores.

Así, el objetivo de este artículo es reflexionar sobre las posibilidades y retos del Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia –PIBID– para la formación de profesores de matemáticas en educación secundaria en Brasil.

2. Marco teórico

En 2009, el gobierno brasileño publicó un decreto que instituyó la Política Nacional de Formación de Profesionales del Magisterio de la Educación Básica (Brasil, 2009), la cual tiene como objetivo la organización de la formación inicial y continuada de los profesores.

En los principios de esta política se señala que debe haber una articulación entre la formación inicial y continuada para que profesores, futuros profesores y estudiantes actúen en conjunto, lo que se constituye en una posibilidad de integración entre teoría y práctica y reconoce a la escuela como un lugar privilegiado de formación.

Para Gatti, Barreto y André (2011), los estudios sobre la formación inicial docente muestran que las licenciaturas no enfatizan las conexiones entre los componentes curriculares y la formación en la escuela, ni tampoco evidencian la relación entre teoría y práctica. Del mismo modo, la formación propedéutica en la que la teoría está disociada de las experiencias y conocimientos en la práctica, ya no responde más a las necesidades reales. Sin embargo, todavía existen licenciaturas basadas en la racionalidad técnica, en las que primero se adquieren los conocimientos teóricos para después aplicarlos en la práctica.

Así, la formación inicial del profesor es muy importante porque es la base de la actividad educativa en la escuela y también favorece el desarrollo de la profesionalización y la constitución de la identidad docente (Gatti, Barreto y André, 2011).

Para Mizukami (2006), la formación inicial debe “ofrecer a los futuros profesores una sólida formación teórica y práctica, que desarrolle y alimente los procesos de aprendizaje y desarrollo profesional a lo largo de su trayectoria docente” (p. 216).

Imbernón (2006) también propone una formación capaz de proporcionar al profesor un “bagaje sólido en los ámbitos científico, cultural, contextual, psicopedagógico y personal, que debe capacitarlo para asumir la tarea educativa en toda su complejidad, actuando de forma reflexiva y con la flexibilidad y el rigor necesarios” (p. 60).

Este autor destaca la necesidad de una formación que genere la actitud, motivada por los cambios constantes, de buscar y valorizar la actualización durante toda la carrera docente. También afirma que el docente necesita aprender a convivir con las limitaciones y frustraciones del contexto en el que está inserido.

Así, la formación inicial del profesor no puede promover solamente el aprendizaje de los conocimientos técnicos, pues la profesión es mucho más compleja y comprende otros aspectos que también deben ser abordados.

A partir de las discusiones, se considera que el PIBID puede contribuir con la formación docente y con el desarrollo profesional, que se consideran como un continuum que empieza durante la trayectoria escolar y continúa durante toda la carrera (Mizukami, Reali, Reyes, Martucci, Lima, Tancredi & Mello, 2003; García, 1992).

Para estos autores, el aprendizaje de la docencia es complejo y este proceso se ve afectado por aspectos tales como los afectivos, cognitivos, éticos, etc. Para Mizukami, Reali, Reyes, Martucci, Lima, Tancredi y Mello (2003, p. 16), existe la necesidad de “establecer un hilo conductor que genere el sentido y explicite los significados a lo largo de la vida del profesor, garantizando al mismo tiempo la conexión entre la formación inicial, la continuada y las experiencias vividas”. Este hilo conductor debe interrelacionar las experiencias en los programas de formación con aquellas vividas en el salón de clase, promoviendo la reflexión en y sobre la práctica.

Sin embargo, muchos programas de formación en Brasil no consideran la perspectiva de desarrollo profesional como un continuum y, según García (2011), “tenemos la sensación de asistir a una especie de ceremonia donde se asume con facilidad que basta que existan ocasiones en las que los profesores son capacitados formalmente para que se produzca el proceso de transferencia del aprendizaje en el salón de clase” (p. 12).

Se considera que el aprendizaje del profesor es un proceso que se compone, no solo de la agregación de nuevos conocimientos, sino también de la (re)significación y (re)construcción de los conocimientos. Es importante que los profesores participen de diversos espacios formativos tales como cursos cortos, congresos, presentaciones, talleres, cursos de posgrado, grupos de estudio, espacios de formación en la escuela, etc.

Muchos de los espacios de formación ofrecidos a los docentes son puntuales, de corta duración y están planeados o desarrollados por personas que no conocen ni a los profesores ni sus necesidades; por tal motivo, no se generan cambios en la práctica docente ya que no se reconoce la complejidad del aula y de la escuela.

Estas reflexiones hacen pensar que la formación del profesor no es un proceso de causa y efecto; o en otras palabras, la participación en un programa de formación no cambiará de repente la práctica, pues "hay que tener tiempo suficiente para aplicar las nuevas ideas" (García, 2011, p. 15) y el profesor debe estar siempre en formación durante toda la carrera y en diferentes espacios formativos.

García (2011) enfatiza que los programas de formación organizados por profesores de universidad, lejos de las necesidades de la escuela, de duración limitada y con poca aplicación práctica, no van a cambiar las creencias y las prácticas docentes. Los futuros profesores necesitan aprender cómo aprender a través de la práctica y el PIBID los pone en contacto directo con la complejidad del salón de clase y de la escuela.

Así, en este proceso formativo es fundamental considerar los diferentes espacios de formación tales como la universidad y la escuela, así como también las dimensiones personales, las experiencias, los aprendizajes, las creencias, etc.

3. Metodología

Para discutir las posibilidades y retos del Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia –PIBID– para la formación de profesores de matemáticas en educación secundaria en Brasil, desarrollamos una investigación cualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) en la que utilizamos el análisis documental como instrumento de recolección de datos.

La investigación se basó en los estudios realizados sobre el PIBID y seleccionamos aquellos realizados en programas de posgrado brasileños y que fueron publicados en el BDTD entre 2012 y 2016.

Las palabras clave que utilizamos como criterios de búsqueda en el BDTD fueron PIBID y matemáticas. En total, encontramos 35 investigaciones de las cuales excluimos 21 porque no se enmarcaban en la temática del artículo; por ejemplo, en este grupo había investigaciones sobre la formación de profesores de química, física, biología, ciencias y educación primaria. Así, analizamos 14 investigaciones que enfatizan la formación de profesores de matemáticas para secundaria.

Autor	Titulación	Título	Objetivo
Porto (2012)	Máster	Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia: enseñar y aprender matemáticas	Comprender cómo el grupo de estudiantes del PIBID de Matemáticas de la Universidad Federal de Río

			Grande – UFRG percibe su actividad docente.
Pranke (2012)	Máster	PIBID I/UFPEL: talleres pedagógicos que contribuyeron a la autorregulación del aprendizaje y la formación docente de los becarios en matemáticas	Analizar si los talleres desarrollados en el PIBID promovieron la autorregulación del aprendizaje y la formación docente de los becarios en matemáticas.
Benites (2013)	Máster	Formación de profesores de matemáticas: dimensiones presentes en la relación PIBID y comunidad de práctica	Investigar algunas dimensiones del proceso de formación de profesores de matemáticas participantes de un trabajo entre universidad y escuela bajo la perspectiva de comunidad de práctica como contexto formativo.
Largo (2013)	Doctorado	El PIBID y las relaciones del saber en la formación inicial de profesores de matemáticas	Comprender las relaciones establecidas entre enseñanza, saber y aprendizaje que fueron desarrolladas por los estudiantes que participaron por dos años en el programa y sus aprendizajes docentes.
Moura (2013)	Máster	El Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia – PIBID en la formación inicial de profesores de matemáticas	Comprender el espacio de formación proporcionado por el Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia para un grupo de estudiantes de licenciatura en Matemáticas.
Ribeiro (2013)	Máster	Percepciones de los estudiantes sobre las contribuciones del PIBID – Matemáticas	Analizar las percepciones de los estudiantes inseridos en el Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia –PIBID– de Matemáticas sobre las contribuciones al proceso formativo del futuro profesor.
Correa (2014)	Máster	Una mirada “pibidiana” sobre el desarrollo profesional de profesores-supervisores	Analizar las contribuciones del programa para el desarrollo profesional de los profesores-supervisores
Neves (2014)	Máster	Prácticas de iniciación a la docencia: un estudio en el PIBID/IFPI/Matemáticas	Describir y analizar las prácticas de iniciación a la docencia en el PIBID del Instituto Federal de Ciencias y Tecnología del Piauí

Silva (2014)	Máster	Proceso de iniciación a la docencia de profesores de matemáticas: miradas de egresados del PIBID/UFSCar	Comprender el proceso de iniciación a la docencia de los egresados del PIBID en el área de matemáticas de la Universidad Federal de San Carlos.
Vieira (2014)	Máster	Un estudio sobre las contribuciones del PIBID-FURB para la formación inicial de profesores de matemáticas	Comprender cómo el Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia (PIBID) de la Universidad Regional de Blumenau – FURB, contribuye a la formación inicial de profesores de matemáticas.
Zaqueu (2014)	Máster	El Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia (PIBID) en la formación de profesores de matemáticas - perspectivas de ex becarios	Comprender los significados que los ex becarios del PIBID atribuyen a las acciones del programa en su formación.
Canteiro (2015)	Máster	Impactos del Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia (PIBID) en la formación inicial de los profesores de matemáticas	Investigar, junto con los estudiantes becarios del proyecto de matemáticas, si la estructura y el funcionamiento del programa impactan en la formación inicial de los profesores de matemáticas.
Reisdoerfer (2015)	Máster	Sobre las acciones del PIBID/matemáticas en la constitución de saberes docentes de los ex becarios del programa de la Universidad Federal de Santa María	Analizar la influencia de las acciones desarrolladas por el PIBID en la constitución de saberes docentes de los ex becarios.
Vicente (2016)	Máster	Programa Institucional de Becas de Iniciación a la Docencia – PIBID – y la formación inicial de profesores	Investigar las contribuciones del PIBID al proceso de formación inicial y al aprendizaje de la docencia de estudiantes de licenciatura en Matemáticas

Tabla 1. Investigaciones sobre el PIBID Matemáticas

Comprendemos que un documento es toda fuente de información que ya existe y que “aporta informaciones directamente: los datos están ahí, es necesario hacer una selección y criticarlos, es decir, juzgar su calidad en función de las necesidades de la investigación, codificarlos o categorizarlos” (Laville & Dionne, 1999, p. 167).

De acuerdo con Lüdke y André (2014), el análisis documental trata de identificar informaciones a partir de cuestiones o hipótesis. En nuestra investigación buscamos las posibilidades y retos del PIBID en la formación de profesores. Los documentos son una fuente importante de la que se pueden obtener evidencias que apoyan las conclusiones y afirmaciones del investigador.

Según Calado y Ferreira (2004), los documentos pueden jugar un papel central en una investigación, pues "los documentos son el centro del estudio por sí mismos" (p. 2) o pueden ser usados para complementar las informaciones obtenidas por otros instrumentos de recolección de datos tales como cuestionarios o entrevistas. En este estudio, los documentos tuvieron un papel central.

La investigación documental corresponde básicamente a dos momentos: la recolección de los documentos y el análisis de los datos.

El primer momento se refiere a la ubicación de los documentos, la naturaleza de los datos y su selección. La ubicación de los documentos es muy variada y la investigación es la que determina la orientación hacia determinadas fuentes, de manera que es fundamental conocer el tipo de registro y las informaciones que contienen. En nuestro caso y con el objetivo de reflexionar sobre las investigaciones, hicimos la búsqueda en el BDTD. En este estudio, los documentos utilizados son denominados fuentes primarias y su selección viene determinada por aspectos propios de la investigación tales como el tiempo, ya que frecuentemente hay una gran cantidad de material y el investigador tiene que decidir qué va a seleccionar y analizar (Calado & Ferreira, 2004).

El segundo momento es el análisis de los datos que, para Calado y Ferreira (2004, p. 3), "implica un conjunto de transformaciones, operaciones y verificaciones a partir de los mismos [documentos] con el fin de atribuirles un significado relevante para el problema de investigación".

Para el análisis de datos de este artículo nos basamos en la teoría de análisis de contenido, la cual se refiere a un "conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones que busca obtener -por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes- indicadores (cuantitativos o no) que permitan la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción de estos mensajes" (Bardin, 1977, p. 44).

El análisis de contenido es sólido y busca descifrar los mensajes ocultos entrelíneas. No se puede únicamente describir el contenido, sino que para tener relevancia teórica, los elementos necesitan estar relacionados a otros datos por medio de la teoría. El investigador es como un arqueólogo que trabaja con vestigios y "toma partido en el tratamiento de los mensajes que manipula para inferir (de manera lógica) conocimientos que extrapolen el contenido manifiesto de los mensajes" (Franco, 2008, p. 29).

El análisis se hizo a partir de recortes, agregación y enumeración hasta llegar a una representación del contenido en la que tomamos el tema como unidad de registro y realizamos la categorización por analogía de elementos, con el fin de componer un conjunto agrupando los mensajes por medio de criterios preestablecidos.

4. Resultados y discusión

A partir del análisis de contenido llegamos a las siguientes categorías de análisis: el aprendizaje de los futuros profesores, el PIBID en la formación de profesores, la inducción a la docencia y la formación continuada de profesores.

4.1 El aprendizaje de los futuros profesores

Cinco estudios hacen parte de la primera categoría denominada “el aprendizaje de los futuros profesores”, en la cual se agrupan las investigaciones que abordan los aprendizajes de los estudiantes que participaron en el PIBID.

La investigación de Porto (2012) tuvo como objetivo comprender cómo percibieron su actividad docente los estudiantes que participaron en el PIBID de matemáticas en la Universidad Federal de Río Grande. Los estudiantes se dividieron en tres grupos; cada grupo fue destinado a una escuela para realizar sus actividades y fue orientado por un supervisor. El investigador realizó un estudio cualitativo en el que utilizó dos cuestionarios y dos entrevistas.

Según Porto (2012, p. 36), “la actividad docente es comprendida desde el proceso de observación en la escuela, el planeamiento y ejecución de los talleres y la reflexión sobre las acciones desarrolladas”.

En la dinámica del PIBID de esta universidad, los estudiantes, supervisores y coordinadores tenían que trabajar 20 horas semanales en las actividades del proyecto, las cuales incluían reuniones semanales para tratar asuntos generales y reuniones por equipos en donde los estudiantes escribían lo que veían en clase y hacían un portafolio en el que problematizaban sus vivencias. Además, se organizaban talleres para desarrollar con los escolares; estos talleres se enfocaban en un contenido matemático elegido a partir de las conversaciones con el profesor sobre las dificultades de los escolares.

Los resultados muestran que “la propuesta de formación inicial y continuada imbricadas, como ocurre en el PIBID, es una oportunidad para problematizar las prácticas pedagógicas y el significado de conceptos durante la actuación de los estudiantes como profesores” (Porto, 2012, pp. 77-78). Asimismo, estas prácticas posibilitan que el futuro profesor experimente la docencia y reflexione sobre ella promoviendo un espacio de aprendizaje mutuo, al facilitar el diálogo de los estudiantes con profesores que tienen mayor experiencia (el supervisor y el profesor de los escolares).

Pranke (2012) analizó si los talleres desarrollados en el PIBID de matemáticas de la Universidad Federal de Pelotas promovieron la autorregulación del aprendizaje y la formación docente de los becarios. La autora comprende la autorregulación como “un proceso que estimula a los sujetos a crear objetivos y desarrollar estrategias de aprendizaje para lograr las metas proyectadas” (p. 7). En el PIBID, los estudiantes realizaron actividades de tutoría a los escolares, talleres y proyectos.

El trabajo se orientó hacia una investigación cualitativa bajo la perspectiva de estudio de caso. Tres estudiantes de licenciatura en Matemáticas y tres escolares participaron en la investigación; se analizaron los documentos escritos por estos estudiantes y se realizaron entrevistas a todos ellos.

El análisis mostró que los estudiantes no solo organizaron estrategias de aprendizaje y desarrollaron acciones colaborativas y competencias auto regulatorias para el planeamiento, ejecución y evaluación de los talleres sino que también reflexionaron sobre la práctica.

El programa proporcionó un “espacio para que aprendieran y construyeran experiencias profesionales relacionadas con la docencia. Los estudiantes reflexionaron sobre las actividades realizadas y buscaron nuevas metodologías que contribuyeran al aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares” (Pranke, 2012, p. 102). Además, de acuerdo con Pranke (2012), los estudiantes tomaron conciencia y control de las decisiones al elegir las actividades, diseñar los planeamientos, desarrollar los talleres y evaluar todo el proceso de aprendizaje de los escolares.

En su tesis de doctorado, Largo (2013) investigó las relaciones establecidas entre enseñanza, saber y aprendizaje en los estudiantes que participaron durante dos años en el PIBID, así como también sus aprendizajes de la docencia. El investigador realizó un trabajo basado en entrevistas grabadas en audio y video con los estudiantes.

El PIBID de matemáticas buscó inserir a los futuros profesores en la escuela y contribuir a su formación. Para ello, se intentó trabajar tanto la teoría como la práctica mediante la promoción de experiencias relacionadas con la gestión escolar y la participación de los estudiantes en las reuniones de profesores y en el planeamiento pedagógico.

El análisis mostró que los estudiantes estaban interesados en comprender la enseñanza de las matemáticas en el contexto real -el salón de clase-, y por tanto, consideraban las opiniones del supervisor, la relación del profesor con los escolares y su práctica. Además, el PIBID promovió la entrada más temprana de los estudiantes participantes del programa en la escuela, lo que podría minimizar las tensiones del comienzo de la carrera docente.

Según Largo (2013, p. 179) el programa ha creado situaciones de aprendizaje sobre la docencia porque “en lo cotidiano de la escuela los estudiantes están envueltos en situaciones diversas, haciendo que vuelvan a los contenidos matemáticos que no recuerdan para enseñárselos a los escolares; es decir, establecen relaciones del saber con su propio aprendizaje”.

Ribeiro (2013) investigó las percepciones de los futuros profesores sobre las contribuciones del PIBID en matemáticas a su proceso formativo. Para ello, analizó los relatos escritos de 22 estudiantes de licenciatura en Matemáticas que participaron del programa.

El PIBID presenta una propuesta para mejorar la formación de profesores que incluye acciones compartidas entre los formadores de profesores, los estudiantes, los profesores de escuela y los escolares. Se creó un ambiente de constante formación y aprendizaje que se ajusta a una dinámica en la que al principio, y teniendo en cuenta los documentos de la escuela, los estudiantes son orientados para que conozcan la estructura y funcionamiento de la misma. A continuación, se entrevistó a los profesores y a los escolares, y solo después de esto, los estudiantes desarrollaron actividades guiadas por el supervisor. Así, se buscó que los futuros profesores conocieran el contexto para después actuar.

La finalidad principal fue la de aproximar al estudiante a la realidad de la escuela a través de diferentes experiencias y para ello, el PIBID hace que el futuro profesor "experimente la profesión, conozca las condiciones de trabajo, la organización de los tiempos y espacios escolares, las relaciones escuela-familia, alumno-profesor, alumno-alumno, profesor-profesor" (Ribeiro, 2013, p. 84).

Según Ribeiro (2013), el PIBID benefició a los futuros profesores posibilitando la reflexión sobre la práctica docente, la integración entre Universidad y Escuela, y la experiencia en docencia.

El objetivo de la investigación de Zaqueu (2014) fue el de comprender los significados que los becarios del PIBID atribuyeron a las acciones del programa para su formación. En su trabajo, utilizó la historia oral como metodología de estudio y desarrolló un taller de difusión de conocimientos buscando la producción de narrativas sobre la participación, la evaluación y los resultados del PIBID.

El autor considera que el programa es un nuevo modelo de formación de profesores en el que todos –formadores de profesores, estudiantes y profesores de la escuela– son responsables por el proceso formativo y que la escuela es un ambiente de formación y de investigación.

Uno de los problemas del PIBID discutido por Zaqueu (2014, p. 194) expone que el programa fue creado como otros programas de formación de profesores en Brasil, en los que "se busca la valorización y la inducción a la docencia, pero que al ser implementados de forma apresurada no permitieron que ni la escuela, ni la universidad, ni los estudiantes, ni los profesores conocieran detalladamente la propuesta y por lo tanto, no percibieron algunos de sus aspectos más importantes".

Otro aspecto destacado por la autora es que todos los estudiantes hacen las prácticas pero no todos participan en el PIBID porque hay un número limitado de becas; sin embargo, sería fundamental que todos los futuros profesores conocieran el programa y su proceso de formación.

El PIBID es un programa de formación de profesores diferente de los que se han desarrollado en Brasil porque se ha mantenido durante un largo período; por el contrario, los programas anteriores siempre fueron cortos y puntuales y, como lo indica García (2011), es necesario disponer de tiempo para generar cambios en las creencias y prácticas docentes.

Según las investigaciones, el programa permitió que el futuro profesor entrara en la escuela antes de las prácticas y tuviera más tiempo de inmersión en el contexto que sería su ambiente de trabajo. También posibilitó importantes aprendizajes como la problematización y reflexión sobre las prácticas en el salón de clase, las experiencias sobre la docencia, el actuar como profesor antes de terminar la licenciatura, la planeación y el desarrollo de actividades con los escolares, etc., siempre bajo la guía del supervisor y del coordinador.

Las características descritas anteriormente son fundamentales porque cuando el profesor empieza su carrera en Brasil, generalmente no tiene el auxilio de sus compañeros y muchas veces se siente aislado; incluso, hay estudios que muestran que esa falta de acompañamiento lleva al profesor a abandonar la carrera. Además, el participante del programa tiene la oportunidad de conocer cómo funciona una escuela real, las condiciones del trabajo docente, la organización escolar y la relación profesor-alumno y escuela-familia.

El PIBIC también mejora otro aspecto sobre el aprendizaje de los futuros profesores. En Brasil, las licenciaturas en matemáticas no enfatizan la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos de la educación básica; por ello, los futuros profesores tienen que recordar los contenidos que tendrán que enseñar; así, los aprendizajes evidenciados por los estudios son importantes para el futuro profesor.

Sin embargo, el PIBID presenta algunos problemas que necesitan ser discutidos tales como el hecho de ser un programa en el que no todos los futuros profesores pueden participar y que fue creado sin la preocupación de que las universidades y escuelas conocieran en profundidad sus detalles y estructura.

4.2 El PIBID en la formación de profesores

Seis investigaciones abordan la formación de profesores en el programa PIBID.

Benites (2013) investigó algunas dimensiones del proceso de formación docente en matemáticas de estudiantes que participaron en un trabajo que aproximó a Universidad y Escuela bajo la perspectiva de comunidad de práctica (Wenger, 2001) como un contexto formativo. En su maestría, ella desarrolló una investigación cualitativa en la que acompañó los encuentros presenciales y virtuales de los participantes del PIBID y realizó observación participante y entrevistas.

A partir de la teoría de comunidad de práctica, la investigadora identificó en el PIBID algunas de sus características, como por ejemplo, “el Dominio, como la constitución profesional del profesor de matemáticas y la Práctica, como las actividades y acciones compartidas de la comunidad” (Benites, 2013, p. 166). También discutió sobre la aproximación entre Universidad y Escuela, la que identificó como un proceso complejo que exigió el compromiso de todos y una relación de confianza que para funcionar bien requiere de la consonancia entre las dos instituciones. Finalmente, destacó que el PIBID es un modelo de formación interesante y promisor.

Moura (2013) investigó el espacio de formación propuesto por el PIBID para los estudiantes de licenciatura en Matemáticas que realizaron actividades en una escuela pública. El autor desarrolló una investigación cualitativa con características de estudio etnográfico en la que la recolección de datos se hizo a través de observación participante, anotaciones, fotografías, grabaciones en video, documentos, cuestionarios y entrevistas.

Según Moura (2013), los estudiantes tenían muchas ideas sobre la escuela pública que habían sido inculcadas por sus profesores en la universidad y que fueron desterradas al iniciar su participación en el programa. El investigador también señala que "la discusión sobre la realidad o el proceso de conocer, analizar y comprender la realidad es una necesidad del trabajo docente y no se restringe a un semestre ni a cumplir una reglamentación, sino que es una cuestión de concepción en la que los becarios y la universidad también aprenden con la escuela" (p. 180).

La formación de los futuros profesores en el PIBID promovió conocimientos sobre el planeamiento de la organización de la clase, los contenidos matemáticos abordados en el salón de clase, la elaboración de materiales de apoyo y las diferentes metodologías –trabajo con proyectos, resolución de problemas, modelos matemáticos, juegos, tecnologías y robótica-.

La investigación de Vieira (2014) buscó comprender como el PIBID en la Universidad Regional de Blumenau – FURB – contribuyó a la formación inicial de profesores de matemáticas. Para ello, desarrolló una investigación cualitativa exploratoria en la que utilizó la entrevista con cinco estudiantes de licenciatura en Matemáticas como instrumento para la recolección de datos.

Los estudiantes indicaron expectativas y motivaciones sobre su participación en el programa, referentes a la posibilidad de aprender sobre la profesión docente y de tener contacto con la escuela antes de las prácticas. Además, las actividades del programa contribuyeron a la constitución de la identidad profesional de los futuros profesores y a promover "el contacto de los estudiantes con la realidad y con el contexto escolar; la posibilidad de estar en un ambiente escolar sin tener aún el compromiso profesional y, principalmente, la aproximación entre la Universidad y la Escuela que no sería posible sin el PIBID" (Vieira, 2014, p. 71).

Vieira (2014) muestra que esa aproximación posibilita el surgimiento de saberes docentes durante la formación y que la integración de todos los participantes del PIBID – estudiantes, coordinadores, supervisores – permitió la construcción de la identidad profesional de los futuros profesores. Aún sobre ese aspecto, el autor indica que los estudiantes obtuvieron una mirada hacia la realidad de la profesión. "La profesión de profesor se constituyó como un ambiente propio y complejo. Otro factor relevante es que, a partir de la participación en el programa, la mirada de los sujetos de investigación cambió en el sentido de que realmente necesitan mejorar su práctica pedagógica" (p. 72).

Canteiro (2015) investigó el impacto de la estructura y del funcionamiento del PIBID en la formación inicial de profesores de matemáticas. Los participantes de la investigación fueron 149 estudiantes de licenciatura en Matemáticas de tres universidades públicas. Se desarrolló un estudio basado en el análisis de cuestionarios y entrevistas a cinco estudiantes.

El análisis de datos evidenció que "la participación en el PIBID promueve el aprendizaje para ser profesor en el estudiante de matemáticas, por la problematización de las cuestiones que relacionan el contexto escolar, la enseñanza y el aprendizaje" (Canteiro, 2015, p. 76).

Los estudiantes participaron y desarrollaron diferentes actividades en el programa que posibilitaron los aprendizajes tales como conocer el proyecto pedagógico de la escuela, participar en las reuniones pedagógicas y observar la clase de los profesores. Así, compartieron experiencias con el profesor supervisor y con los otros estudiantes que participaron en el PIBID, dieron clases y también realizaron investigaciones. Según Canteiro (2015, p. 76), "esas vivencias permiten reflexionar sobre la práctica docente en el salón de clase y analizar las posibilidades de toma de decisiones en las diferentes situaciones que se presentan en el proceso de aprender y enseñar".

La investigadora también destacó que el PIBID es una posibilidad de formación continuada para el profesor de escuela porque promueve el diálogo y la interacción con el estudiante, futuro profesor, sobre la reflexión de la práctica docente y promueve la aproximación entre Universidad y Escuela.

El estudio de Reisdoerfer (2015) investigó la influencia de las acciones del PIBID en la constitución de saberes docentes de sus ex becarios. Para ello, entrevistó a tres estudiantes del programa y también analizó los documentos del PIBID.

El análisis de datos mostró que el PIBID contribuyó a la constitución de saberes, pues los estudiantes desarrollaron muchas actividades relacionadas a la actuación docente. Los estudiantes elaboraron actividades que fueron realizadas en las escuelas y en las que había objetivos generales y específicos, justificaciones, metodologías de trabajo y marcos teóricos, considerados saberes profesionales por Reisdoerfer (2015). Los saberes pedagógicos emergen en el planeamiento y desarrollo de las acciones en las que utilizaron diferentes estrategias de enseñanza como juegos, materiales como el tangram y tecnologías.

Reisdoerfer (2015) también indicó que los estudiantes adquirieron saberes de la experiencia porque tuvieron contacto con la escuela, con el salón de clase y con los profesores en situaciones prácticas que muchas veces fueron inesperadas. Asimismo, el conocimiento de la rutina de trabajo de la escuela fue importante para la constitución de este saber.

Vicente (2016) investigó las contribuciones del PIBID en la formación inicial y en el aprendizaje de la docencia de los estudiantes de licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de una universidad.

Para la recolección de datos, Vicente realizó entrevistas a 17 participantes del programa y observó los momentos en los cuales las actividades fueron elaboradas y desarrolladas por los estudiantes en las escuelas y en las reuniones en la universidad.

"A lo largo de su participación en el PIBID, los estudiantes fueron marcados por aprendizajes, crisis y dificultades, que en pocos momentos, eran resueltas por otros participantes del programa como universidad, escuela, profesores con más experiencia, otros estudiantes o en las reuniones" (Vicente, 2016, p. 141). Sin embargo, no se ha dedicado tiempo suficiente para reflexionar sobre el planeamiento y elaboración de las actividades, sobre la práctica de los estudiantes en el salón de clase, sobre el diálogo con la coordinadora y sobre aspectos particulares como los problemas encontrados durante la investigación.

Por otra parte, el PIBID posibilitó que los estudiantes aprendieran mucho sobre la práctica docente y así "es evidente la necesidad real de crear contextos específicos de reflexión sobre la acción docente, así como también la creación de momentos prácticos que aproximen a los profesores en formación a situaciones de la realidad vivida en lo cotidiano de las escuelas para que puedan ser autores de su propia práctica" (Vicente, 2016, pp. 142-143). Así, la participación en el programa permitió a los futuros profesores una mirada crítica hacía la realidad de la educación.

Los aspectos presentes en las investigaciones indicaron las posibilidades del PIBID en la formación inicial y continuada de los profesores. Todos los aprendizajes contribuyeron para constituir la identidad docente, pues se elaboraron y desarrollaron actividades en contextos y con alumnos reales.

La licenciatura necesita proporcionar situaciones que aproximen la realidad del salón de clase, creando simulaciones para que los futuros profesores tengan contacto con las características propias del contexto educativo, sin la responsabilidad de ser el profesor (Pérez Gómez, 1992). El PIBID posibilitó que los futuros profesores experimentaran las actividades docentes en el ambiente escolar sin el compromiso profesional y en situaciones reales vivieron la complejidad, la incerteza y la singularidad del salón de clase.

4.3 La inducción a la docencia

Dos de las investigaciones consultadas enfatizan el aspecto de la inducción a la docencia del PIBID.

Neves (2014) describe y analiza las prácticas de inducción a la docencia realizadas en el PIBID del Instituto Federal de Piauí en Teresina. El investigador analizó los documentos elaborados por los participantes del programa y entrevistó a los coordinadores y profesores supervisores.

En el análisis de los datos, Neves (2014) destacó algunas características que considera importantes en la formación de profesores, tales como el aprender a aprender, la innovación, la aplicación de la teoría a la práctica, la movilización y el trabajo colectivo y conjunto. También resaltó que las prácticas de los estudiantes con juegos, materiales manipulativos y tecnologías estuvieron presentes en las actividades y que son importantes en la enseñanza de las matemáticas y en la formación de profesores.

El programa no propone modelos acerca de cómo debe ser la inducción a la docencia en las universidades, pero da la autonomía para que cada una proponga sus propias prácticas. El PIBID investigado definió sus prácticas a partir de los documentos brasileños oficiales que orientan la formación de profesores para la educación básica.

Silva (2014) estudió el proceso de inducción a la docencia de los ex becarios del PIBID de matemáticas en la Universidad Federal de San Carlos.

Su investigación se basó en tres momentos. En el primero, la autora realizó una búsqueda de los ex estudiantes que participaron en el programa con el fin de trazar el perfil de los estudiantes; de esta forma, encontró 35 becarios que contestaron un cuestionario sobre su formación inicial, su formación en el PIBID y sus experiencias profesionales e identificó también a 5 profesores que siguieron en la docencia y habían sido becarios. En la siguiente etapa, Silva (2014) analizó los escritos reflexivos de estos 5 profesores con el objetivo de evidenciar las principales actividades desarrolladas en el PIBID. Por último, entrevistó a los sujetos que participaron en su estudio buscando sus percepciones sobre su formación, inserción y perspectivas en la docencia.

El proyecto de matemáticas del PIBID tenía el objetivo de promover la "comprensión de las relaciones entre la matemática escolar y la académica, reflexionar sobre las diferentes metodologías, proporcionar estudios colectivos y planeamientos y desarrollar prácticas pedagógicas de acuerdo con las necesidades de las escuelas" (Silva, 2014, p. 139).

Los resultados indicaron que el PIBID proporcionó una mirada hacia la docencia en diferentes espacios y contextos escolares y aproximó a la Escuela y a la Universidad como ambientes de producción.

Los individuos mostraron características propias de profesores en el principio de la docencia tanto durante su participación en el PIBID como en su práctica como docentes. Sin embargo, "la experiencia en el programa contribuyó para que ellos desarrollaran mecanismos de superación. En particular, sobre la dificultad de socialización docente evidenciada en ambos momentos, durante la carrera lograron manejar mejor las situaciones al evitar el aislamiento mediante la búsqueda de apoyo, lo cual es un reflejo de la contribución de las vivencias en el PIBID" (Silva, 2014, p. 141).

Los estudios indicaron que el PIBID permitió que los futuros profesores iniciaran la docencia antes del término de la licenciatura, pues ya estaban inseridos en la escuela y desarrollaron características importantes para la profesión tales como el aprender a aprender, la capacidad de unir teoría y práctica y el trabajo en equipo; al mismo tiempo, conocieron también estrategias y metodologías para la enseñanza de las matemáticas tales como juegos, materiales y tecnologías.

Asimismo, la entrada en la carrera docente es muy compleja, llena de miedos e inseguridades, pero también de muchos aprendizajes. Se caracteriza por la distancia entre los ideales de la formación inicial y la realidad de las escuelas y por la dificultad de enseñar los contenidos, pero también por la satisfacción de tener sus propios grupos de alumnos (Huberman, 1995). La inducción a la docencia presente en el PIBID hizo que los profesores minimizaran ese momento problemático de la carrera, aunque estaban presentes algunas de sus características.

4.4 La formación continuada de profesores

La última categoría – "la formación continuada de profesores" – fue abordada únicamente en una investigación. En su estudio, Correa (2014) analizó las contribuciones del PIBID en el desarrollo profesional de los profesores supervisores e indagó si las posibilidades de acciones y estudios teóricos constituyeron un proyecto de formación continuada.

El investigador realizó entrevistas a 12 supervisores para la recolección de datos y utilizó la teoría de análisis textual discursivo (Moraes & Galiazzi, 2011) para el análisis. Las entrevistas constaban de preguntas abiertas que permitieron que los supervisores hablaran libremente de sus experiencias en el PIBID.

Para Correa (2014, p. 57) “el análisis textual discursivo es una metodología de análisis de naturaleza cualitativa con la finalidad de producir nuevas comprensiones de los fenómenos y discursos y que representa un movimiento interpretativo de carácter hermenéutico”.

Los resultados indicaron que el PIBID contribuyó en el desarrollo profesional de los supervisores y sus acciones constituyeron una formación continuada. Además, los supervisores destacaron la aproximación entre Universidad y Escuela como un evento fundamental en la formación de todos los participantes. Esta aproximación evidenció el trabajo colaborativo que permitió el compartir experiencias, la interacción entre los saberes, los estudios y el trabajo en equipo.

Los profesores de la escuela que se desempeñaron como supervisores indicaron que el PIBID es un proyecto de formación continuada y que ellos también participan en la formación de los futuros profesores, orientándolos en las actividades que desarrollan en la escuela. En Brasil, a diferencia de otros países, no hay políticas públicas de acompañamiento y asesoría para los nuevos profesores; sin embargo, el PIBID facilita ese acompañamiento durante la formación inicial, el cual es realizado por un profesor con más experiencia profesional que se encarga de orientar al estudiante.

5. Conclusiones

Las investigaciones analizadas mostraron las reflexiones de sus autores sobre diferentes aspectos del PIBID en la formación del profesor de matemáticas.

Los aprendizajes que los futuros profesores experimentaron gracias a la vivencia de los retos de la profesión antes del término de la licenciatura en Matemáticas y la posibilidad de recibir tutorías por parte de los supervisores hicieron que estos estudiantes estuvieran más preparados para la inserción en la carrera.

El PIBID tiene características que ubican al profesor como sujeto activo durante el aprendizaje de la docencia, así como lo destacan Gatti, Barreto y André (2011). Estos autores indican que las políticas de formación deben pautarse bajo la participación activa de los profesores quienes necesitan ser incentivados a desarrollarse personal y profesionalmente, así como también a enriquecer su práctica a través de la reflexión constante.

Otro aspecto único de este programa es que todos los participantes reciben una beca que sirve como incentivo, aunque lo más importante es el proceso formativo en el que todos aprenden unos de otros. Asimismo el PIBID intenta disminuir el abismo que existe entre Universidad y Escuela.

Bibliografía

Bardin, L. (1977). *Análise do conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Benites, V. C. (2013). *Formação de professores de matemáticas: dimensões presentes na relação PIBID e comunidade de prática*. Máster, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brasil. (2009). Ministério da Educação. *Instituí a Política Nacional de Formação de Profissionais do Magistério da Educação Básica*. Brasília: CNE. Decreto nº 6.755, de 29 de janeiro de 2009.

Calado, S, S. & Ferreira, S. C. R. (2004). *Análise de documentos: método de recolha e análise de dados.* Disponible en: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi1/analisedocumentos.pdf. (consultado 02 de septiembre de 2011).

Canteiro, D. C. S. (2015). *Impactos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID) na formação inicial de professores de Matemáticas*. Máster, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Correa, M. R. N. (2014). *Um olhar "pibidiano" sobre o desenvolvimento profissional de professores-supervisores*. Máster, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS, Brasil.

Franco, M. L. P. B. (2008). *Análise de conteúdo*. Brasília: Liber livros.

García, C. M. (1992). A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. En A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e sua formação*, pp. 51-76. Lisboa: Don Quixote.

García, C. M. (2011). La evaluación del desarrollo profesional docente. In C. M. García (Ed.). *La evaluación del desarrollo profesional docente,* pp. 11-21. La Coruña: Editorial Da Vinci.

Gatti, B. A.; Barreto, Elba S. S. & André, M. E. D. A. (2011). *Políticas docentes no Brasil: um estado da arte*. Brasília: UNESCO.

Huberman, M. (1995). O ciclo de vida profissional dos professores. En A. Novoa (Ed.), *Vidas de professores*, pp.31-61. Porto: Porto Editora.

Imbernón, F. (2006). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.* São Paulo: Cortez.

Largo, V. (2013). *O PIBID e as relações de saber na formação inicial de professores de matemáticas*. Tesis, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil.

Laville, C. & Dionne, J. (1999). *A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas.* Porto Alegre: Artmed.

Lüdke, M. & André, M. E. D. A. (2014). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo.

Mizukami, M. G. N. (2006). Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos y práticas pedagógicas. En A. M. Nacarato & M. A. V. Paiva (Eds.), *A formação do professor que ensina matemáticas: perspectivas e pesquisas*, pp. 213-231. Belo Horizonte: Autêntica.

Mizukami. M. G. N.; Reali, A. M. M. R.; Reyes, C. R.; Martucci, E. M.; Lima, E. F.; Tancredi, R. M. S. P. & Mello, R. R. (2003). *Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação*. São Carlos: EdUFSCar.

Moraes, R.; Galiazzi, M. C. (2011). *Análise textual discursiva*. Ijuí: Unijuí.

Moura, E. M. (2013). *O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID na formação inicial de professores de matemáticas*. Máster, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Neves, R. M. S. (2014). *Práticas de iniciação a docência: um estudo no PIBID/IFPI/Matemáticas*. Máster, Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, Brasil.
Pérez Gómez, A. (1992). O pensamento prático do professor. En A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação*, pp. 93-114. Lisboa: Dom Quixote.
Pranke, A. (2012). *PIBID I/UFPEL: oficinas pedagógicas que contribuíram para a autorregulação da aprendizagem e formação docente dos bolsistas de matemáticas*. Máster, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, RS, Brasil.
Porto, R. T. (2012). *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência: ensinar e aprender matemáticas*. Máster, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, Brasil.
Reisdoerfer, C. (2015). *Sobre as ações do PIBID/Matemáticas na constituição de saberes docentes de ex-bolsistas desse programa da Universidade Federal de Santa Maria*. Máster, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil.
Ribeiro, S. S. (2013). *Percepções dos estudantes sobre as contribuições do PIBID – Matemáticas*. Máster, Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG, Brasil.
Silva, D. F. (2014). *Processo de iniciação a docência de professores de matemáticas: olhares de egressos do PIBID/UFSCar*. Máster, Universidade Federal de San Carlos, San Carlos, SP, Brasil.
Vicente, M. F. (2016). *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência – PIBID – e a formação inicial de professores*. Máster, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, SP, Brasil.
Vieira, A. C. (2014). *Um estudo sobre as contribuições do PIBID-FURB para a formação inicial de professores de matemáticas*. Máster, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC, Brasil.
Wenger, E. (2001). Comunidades de Práctica: Aprendizaje, Significado e Identidad – Cognición e Desarrollo Humano. Paidós: Barcelona.
Zaqueu, A. C. M. (2014). *O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência (PIBID) na formação de professores de Matemáticas - perspectivas de ex-bolsistas*. Máster, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil.

Autor:

Reginaldo Fernando Carneiro: Doctor en Educación y Licenciado en Matemática por la Universidad Federal de San Carlos, UFSCar, Brasil. Profesor de la Facultad de Educación, del Programa de Pos-Grado en Educación y del Programa de Pos-Grado en Educación Matemática de la Universidad Federal de Juiz de Fora, UFJF, Brasil.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

https://union.fespm.es

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-20

Acrisolado de tipologías de errores en demostraciones geométricas de futuros profesores en matemática

Marcela Götte, Ana María Mántica

Fecha de recepción: 2/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	Se detectan y analizan errores de los alumnos del profesorado en Matemática en el trabajo con demostraciones geométricas que involucran particularmente los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. A partir del acrisolado de categorías anteriores se redefinen y agrupan en cuatro tópicos. Uno de ellos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otros dos referidos a las cuestiones de la prueba en matemática (los fundamentos de la acción de demostrar y la demostración en sí misma) y por último uno que expone cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico. **Palabras clave**: errores, geometría 3D, futuros profesores, paralelismo, perpendicularidad
Abstract	Errors of the students of the teacher in Mathematics are detected and analyzed, in the work with geometric proofs that particularly involve the concepts of parallelism and perpendicularity. Refining previous categories we redefine them and group them into four topics. One of them addresses general issues related to writing in mathematical language, two others referred to the issues of the proof in mathematics (the basis of the action to demonstrate and the demonstration itself) and finally one that raises issues relating to the use of analogies in geometric work. **Keywords**: errors, 3D geometry, prospective teachers, parallelism, perpendicularity
Resumo	Detectam-se e analizam-se erros dos alunos do professor em Matemática, no trabalho com demonstrações geométricas que envolvem particularmente os conceitos de paralelismo e perpendicularidade. A partir do acrisolado de categorias anteriores redefinem-se e agrupam-se em quatro tópicos. Um deles atende questões gerais referidas à escritura em linguagem matemáticas, outros dois referidos às questões da prova de matemática (os fundamentos da ação de demonstrar e a demonstração em sim mesma) por último um que expõe questões referidas ao uso de analogias no trabalho geométrico. **Palavras-chave**: erros, geometría 3D, futuros professores, paralelismo, perpendicularidade

1. Introducción

> Euclid has been the evil genius particularly for the history of mathematics and for the teaching of mathematics, both on the introductory and the creative levels. I. Lakatos

La enseñanza de la geometría tridimensional, en niveles avanzados, es posterior a la geometría plana y esto trae aparejado la extensión de conceptos y propiedades que se verifican en dos dimensiones (2D), pero no siempre son válidas en la geometría en tres dimensiones (3D). Particularmente este estudio se centra en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad.

Volkert (2008) sostiene que una de las cuestiones a destacar, además del orden de la geometría plana y espacial a lo largo de la escolaridad que comienza con un trabajo intuitivo de la geometría del espacio, es que las relaciones de paralelismo y perpendicularidad ya no son sólo entre rectas.

Previo al estudio que se presenta en este artículo, se realiza un análisis exploratorio, de comparar los conceptos de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 2D y 3D; de categorizaciones obtenidas de registros sistemáticos de las investigadoras y de referentes teóricos. Se produce, a partir de este análisis, una categorización de errores que consta de siete tipos. Se expresa la tipología en términos del error en lugar de señalar la o las causas que lo provocan ya que, como lo afirma Radatz (1979), es muy difícil hacer una clara separación entre las posibles causas de un error, dado que hay una estrecha interacción entre las mismas.

El trabajo que se expone en este artículo tiene como objetivo detectar y analizar errores cometidos por futuros profesores de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales y categorizarlos.

Para construir dicha categorización se diseña un instrumento con dos problemas que involucran los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D, se analizan las producciones escritas y el audio de las grabaciones realizadas por pares de estudiantes en el marco de un taller al resolver dicha tarea y se catalogan los errores detectados.

Para contribuir a la validez del estudio se realiza una consulta a 4 docentes investigadores universitarios que se desempeñan en profesorados en matemática. El propósito de la misma es determinar si lo que observa el investigador es realmente lo que ocurre.

A partir de los aportes de los referentes teóricos y de las devoluciones de los expertos se purifica la categorización obteniendo una que consta de cuatro tópicos.

Los errores detectados en este estudio corresponden en algunos casos a un conocimiento inacabado y en otros casos son juzgados como lo que se aleja de la resolución correcta, como la manifestación de una práctica que no coincide con lo aceptado por la comunidad matemática. Por esto, es que se considera al error como una práctica que lleva inherente conceptos equivocados o procedimientos inacabados, que se visualizan a través de la producción de los estudiantes.

Marco metodológico

Esta es una investigación cualitativa, "es un estudio en profundidad con el uso de técnicas cara a cara para la recogida de los datos en su entorno natural" (McMillan y Schumacher, 2005: 620). Estos autores sostienen que el estudio cualitativo ayuda a los lectores a entender las perspectivas múltiples de la situación según las personas estudiadas por lo cual es de índole etnográfico, lo que implica que se busca tener en cuenta la subjetividad en el análisis e interpretación de los datos.

Una característica de este tipo de investigación es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. Un empleo cuidadoso, de estos datos, proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000). Según McMillan y Schumacher (2005) la investigación cualitativa utiliza principalmente razonamiento inductivo para sugerir una interpretación de una situación particular.

En esta investigación se emplean los datos producidos por estudiantes de la cátedra Geometría Euclídea Espacial, asignatura del primer cuatrimestre de tercer año del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Los alumnos tienen además de los conocimientos previos de la escolaridad obligatoria, experiencias en este nivel en temas de geometría Euclídea y en métodos de demostraciones deductivas proporcionados por cátedras cursadas anteriormente, de esta carrera estructurada cuatrimestralmente en cinco años.

En una **primera etapa** de la investigación se realiza una categorización a partir del análisis de documentos, exámenes parciales individuales escritos de los alumnos de la cátedra Geometría Euclídea Espacial (GEE), y tipologías disponibles sobre errores. Esta consta de los siguientes tipos:

Imprecisión en la redacción de la demostración o notación matemática o geométrica en particular (TI): se redactan incorrectamente los pasos de una demostración o se utilizan símbolos o relaciones de la teoría de conjunto en forma incorrecta o simbología propia o se emplean incorrectamente los cuantificadores lógicos.

Determinación incorrecta de la hipótesis o tesis de una proposición (TII): se explicitan incorrectamente la tesis o la hipótesis.

Tratamiento incorrecto de teoremas o propiedades (TIII): errores lógicos, casos en que se utiliza un teorema ya probado, pero se debilitan las condiciones del mismo agregando hipótesis que no se tienen; se considera el recíproco o la inversa de la propiedad que se debería utilizar o se establece un círculo vicioso o se afirma que una proposición es verdadera y falsa sin trabajar con reducción al absurdo.

Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones (TIV): se intenta demostrar un axioma, se lo modifica o se lo contradice o no se respeta una definición acordada.

Demostraciones incompletas (TV): no se justifica un paso de la demostración (agujeros); no se demuestra todo lo que hay que demostrar; se consideran casos accidentales o extremos; se agregan condiciones a los elementos que no se tienen por hipótesis o, se justifica que un objeto no existe porque no se puede hallar por el método por el que se está tratando de construir.

Uso defectuoso de representaciones gráficas en las demostraciones (TVI): se extraen relaciones o emplean elementos de una representación gráfica en la demostración sin justificación o se realiza un dibujo que no representa la situación planteada.

Extrapolación de relaciones a distintos conceptos o propiedades a distintos contextos (TVII): se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que no lo son cuando los elementos que intervienen no están en un mismo plano. También cuando se mantienen las relaciones (paralelismo, perpendicularidad, incidencia, etc.) que establece un teorema, pero se modifican los elementos (punto, recta, plano) entre los que se establecen esas relaciones.

En una **segunda etapa** se diseña un instrumento con problemas que involucran específicamente a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D. Se analizan los documentos escritos entregados por pares de estudiantes que realizan un taller en el marco de la cátedra GEE y el análisis del audio de las grabaciones realizadas a dos binomios de estudiantes que resuelven dicha tarea. Los problemas del instrumento son:

1. Sea la siguiente proposición: “Dadas **a** y **b** rectas cualesquiera y A un punto tal que A $\notin$ **a** y A $\notin$ **b**, existe por A un único plano paralelo a las rectas **a** y **b**”. Determinar si es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla.

2. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si un plano α contiene a una recta **a** perpendicular a otra recta **r**, entonces el plano α es perpendicular a la recta **r**.

b) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

c) Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.

d) Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano α, es perpendicular al plano α.

e) En un tetraedro regular, las aristas alabeadas son perpendiculares.

f) Dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Se emplea la tipología presentada para catalogar los errores en las producciones escritas de los dos binomios con el fin de refinarla.

Se realiza, en una **tercera etapa**, una consulta a 4 expertos, docentes investigadores universitarios que se desempeñan en profesorados en matemática y que se vinculan de distintas maneras a la temática de esta investigación. Esta consulta se realiza para determinar si lo que observa el investigador es realmente lo que ocurre, es decir que el error que se establece realmente corresponde a la tipología en la que se encuadra, o si existen errores que no fueron establecidos en la investigación. Estas cuestiones contribuyen a la validez del estudio.

Con las contribuciones realizadas por los expertos, el acrisolado de categorizaciones previas y los aportes de los referentes teóricos se establece una jerarquización en la tipificación de los errores obteniendo una nueva categoría. Ésta no intenta establecer generalizaciones universales, sino que, como toda investigación cualitativa, presenta generalizaciones ligadas al contexto en que se desarrolla (McMillan y Schumacher, 2005).

3. Marco de referencia

En este apartado se seleccionan algunas ideas que sirven de fundamento a este trabajo, específicamente teniendo en cuenta algunas particularidades del quehacer matemático y otras referidas al tratamiento de la geometría tridimensional y de los conceptos geométricos.

3.1. Particularidades del hacer matemático

Respecto a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos Socas (2000) manifiesta que se presentan conflictos entre el uso del lenguaje ordinario y el lenguaje matemático. Un conflicto señalado es el que provoca el uso de términos que tienen un significado en el lenguaje común que difiere del significado en el lenguaje matemático, o cuando el significado del lenguaje común y el matemático es el mismo.

Por otra parte, Radillo Enríquez y Varela (2007) también refieren a la relación entre el lenguaje matemático y el cotidiano y afirman que hay términos que tienen significados que son próximos en ambos lenguajes y otros que son diferentes lo que provoca dificultades en el uso por parte de los estudiantes. Sostienen que el lenguaje “posee un vocabulario, una sintaxis y una notación propia” (p. 265). Además, consideran que realizar una demostración “requiere el pasaje de un planteamiento verbal a una representación gráfica y simbólica” (p. 267). También, que hay términos del lenguaje matemático que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente.

Asimismo, respecto a la cuestión del lenguaje matemático, Ortega y Ortega (2001) manifiestan que en el “lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin permitir ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta” (p. 3). Exponen que la escritura matemática emplea signos que la caracterizan y debe ser conocida por los estudiantes para poder interpretar lo que se quiere expresar con ella.

Dentro de los aspectos notacionales, Weber (2013) resalta que habitualmente los estudiantes ignoran como cuantificar las distintas variables en una proposición. Señala que el estudiante suele recibir mensajes mixtos, dado que en general los libros de texto matemáticos ofrecen en algunos casos una explicación intuitiva, en otros un ejemplo y en otros casos una prueba rigurosa para justificar una proposición, aunque la transición entre pensamiento intuitivo, empírico y riguroso no está explícitamente marcada, esto puede explicar parcialmente por qué los estudiantes presentan argumentos informales como pruebas en cursos avanzados.

Asimismo, Weber (2013) expresa que, aunque los estudiantes estén en un nivel académico en el que saben lo que constituye una prueba y pueden razonar deductivamente, recitar y manipular definiciones, y hacer inferencias válidas, no garantiza que puedan construir nada más que pruebas muy triviales. En sus investigaciones encuentra que los estudiantes universitarios para probar una afirmación B a menudo intentan encontrar algún teorema de la forma *A implica B*, incluso cuando el antecedente no es coherente o no es pertinente en el contexto que se utiliza.

Para Polya (1970)

> la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya el conjunto limitado. […] la particularización consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño -o incluso de un solo objeto- contenido en el conjunto dado (p. 97).

Respecto de los errores provocados por las analogías, De Castro (2012) advierte los peligros de establecer analogías entre dos situaciones diferentes basadas en características superficiales.

Asimismo, Zaslavsky y Ron (1998) realizan un trabajo en el que exploran la forma en que los estudiantes usan los contraejemplos para refutar una proposición matemática, cómo consideran el empleo de los contraejemplos, de qué manera establecen contraejemplos y cuáles son las dificultades que encuentran al refutar una proposición mediante un contraejemplo. Encontraron que los estudiantes no comprenden que un contraejemplo es suficiente para refutar una proposición y que si una proposición es válida en casos específicos (incluso si son infinitos) esto no garantiza que sea correcta para todos los casos.

Por su parte Selden y Selden (2003) detectan que un error de razonamiento clásico y extremadamente persistente es el uso del inverso del teorema a demostrar. Este error consiste en equiparar una implicación y su contraria. La base de este concepto erróneo parece ser la imprecisión del lenguaje cotidiano. Las personas a menudo usan la construcción "si, entonces" cuando quieren decir "si y solo sí". Cuando alguien dice "si llueve, no iré", a menudo también quiere decir, pero no dice explícitamente, "y si no lo hace, lo haré", que es lógicamente equivalente a lo contrario. Los autores de libros de texto pueden reforzar esta confusión cuando establecen definiciones usando "si", pero en realidad significa "si y solo sí".

3.2. Particularidades del trabajo en geometría

Existen posturas diversas con respecto a si la enseñanza de la geometría del espacio debe preceder a la del plano o viceversa. Freudenthal (1983) ha defendido en múltiples ocasiones la iniciación en geometría a partir de los sólidos. Enuncia diferentes razones: una de ellas es que, tradicionalmente en el nivel elemental, se comienza por la enseñanza intuitiva de la geometría de los sólidos. La otra razón es por considerar a los sólidos como aproximación para las figuras planas. En el análisis fenomenológico de “planos” y “rectas” considera que el entorno figura como contexto a partir del que se pueden constituir objetos mentales iniciales, sobre estos conceptos y sus relaciones como, por ejemplo, el paralelismo y la perpendicularidad.

Alerta sobre las consecuencias que tiene en los estudiantes ejercitarlos sólo en la geometría plana que va en detrimento de la imaginación espacial.

Volkert (2008) propone empezar con un curso de "geometría intuitiva" tomando los objetos tridimensionales de la realidad (pelotas, cajas, envases, etc.) y a partir de ellos determinar las figuras planas (aristas, caras y secciones de los objetos tridimensionales). Esta propuesta es la única manera de conectar las experiencias de los estudiantes con los hechos básicos necesarios para hacer geometría y es completamente al revés de la presentación propuesta por Euclides. Esto se debe a que propone un trabajo intuitivo contrariamente al sistemático formulado por Euclides. El problema se presenta cuando posterior a una enseñanza propedéutica, de manera intuitiva, en estudios superiores se requiere una sistematización de la geometría sólida. Surgen así dificultades intrínsecas de la geometría sólida que obstaculizan esa enseñanza sistemática.

Según Volkert (2008) la geometría sólida es mucho más complicada que su contraparte en el plano dado que, por ejemplo, en la geometría del plano hay sólo un tipo de ángulos mientras que en la geometría sólida hay tres tipos. Así también, la relación de perpendicularidad en el plano se define entre rectas mientras que en la geometría sólida se define entre rectas, entre rectas y planos y entre planos. Alega que la enseñanza de la geometría sólida en la escuela es un tema peligroso. La decisión de Euclides del rigor y del ordenamiento de temas puso a la geometría sólida en el final de los temas tratados, generando una separación estricta entre la geometría del plano y la sólida.

Por otro lado, Cohen (2000) afirma que los conceptos básicos como recta y plano y los conceptos de interrelación entre ellos, como perpendicularidad y paralelismo, son generalmente conocidos en el contexto de la geometría plana. Su extensión al espacio tridimensional no cambia su significado básico, pero se amplía la variedad de posibles relaciones entre ellos. Estas nuevas posibilidades necesitan una capacidad de visualización, que es a menudo bastante limitada en los estudiantes que están acostumbrados a ver todo en un plano. Incluso si los estudiantes son conscientes de la existencia de diferentes planos y direcciones, tienden a ver sólo un plano a la vez. Este tipo de conflictos suele ser un terreno en el que podrían surgir fácilmente conceptos erróneos.

Por otro lado, Vinner (1991) sostiene que cuando escuchamos el nombre de un concepto conocido muy rara vez viene a nuestra mente la definición del concepto, sino que esta palabra nos hace evocar “algo” formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” es lo que este autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que recuerdan como ejemplo de este concepto junto con el conjunto de propiedades que asocian al mismo.

Para Vinner (1991) la imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes. En la formación de la imagen de un concepto juegan un papel importante, la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente.

Expresa que la actividad de los estudiantes está basada sólo en sus imágenes del concepto y que la definición es inactiva o no existe.

4. Análisis y resultados

4.1. Consulta a expertos

La producción escrita del cuestionario presentado en la segunda etapa, realizado por dos pares de estudiantes de la cátedra GEE, se envía a cuatro expertos. Además, se anexa un recorte de la tipología presentada, particularizando los tipos de errores que se quiere discernir, dado que hay categorías que no presentan demasiados inconvenientes para distinguirlas y con el fin de no hacer excesiva la tarea de los expertos. Se envían sólo tres de las siete categorías, a saber, la TIII, TV y TVII, informándoles que la categorización completa consta de siete. Además, un archivo que contiene los valores de verdad de las proposiciones del cuestionario.

Se presenta a continuación una tabla que contiene la síntesis del tipo de error detectado por cada uno de los expertos en cada problema del cuestionario.

	E1(M)	E2(MS)	E3(G)	E4(F)	E5	%
P1	III	III		III	III	75
	V	V	V	V	V	100
	VII			VII	VII	50
P2a	**No responde a estos ítems.**		**III**		**III**	**33**
		V		**V**		**0**
						-
P2b			**III**	**III**	**III**	**66**
		V		**V**	**V**	**66**
		VII	**VII**	**VII**	**VII**	**100**
P2c		**III**	**III**	**III**		**0**
		V			**V**	**33**
						-
P2d		**III**		**III**	**III**	**66**
			V		**V**	**33**
						-
P2f				**III**	**III**	**33**
		V	**V**			**0**
		VII			**VII**	**33**

Tabla 1. Cuadro síntesis de respuestas de expertos

Cada columna corresponde a un experto, caracterizado con la inicial de su nombre, que se numeran del 1 al 4. La columna 5 corresponde a la categorización realizada por las autoras y la última columna es el porcentaje de coincidencia entre lo obtenido por los expertos y las autoras. Cada fila corresponde a cada uno de los problemas del cuestionario.

Al analizar las respuestas de los expertos y el resumen de la tabla se visualizan las siguientes cuestiones:

- Los errores considerados por los expertos coinciden con los de la tipología propuesta. Los expertos explicitan errores que no se les dio de la tipología, como por ejemplo el TI (errores de notación) y TIV (tratamiento incorrecto de definiciones).

- En el problema 2a y 2f los expertos exponen que se presenta el error TV y en el problema 2c suponen el error TIII el cual no ha sido considerado de este modo la categorización enviada. Respecto al problema 2a los dos expertos que consideran TV aluden en los comentarios al mal uso de la definición de recta perpendicular a un plano. El error al que aluden referido al mal empleo de las definiciones corresponde a TIV de la tipología, el cual no estaba disponible en la categoría entregada a los expertos, no obstante, por los comentarios explicitados se infiere qué error están considerando. Este error está en la categorización propuesta. En el problema 2f los dos expertos que consideran TV aluden a que es un caso particular por considerar rectas secantes, lo que podría encuadrarse en un caso particular del recíproco de la proposición dada. En el problema 2c los estudiantes justifican que la proposición es falsa empleando un teorema, es decir, consideran que para que sea verdadero deben tenerse las hipótesis de un teorema dado en la cátedra. Los expertos consideran este error proveniente de cuestiones lógicas y en nuestra categorización se considera una justificación incompleta.
- Uno de los expertos manifiesta utilizar otra definición de paralelismo entre rectas y planos (las rectas incluidas en un plano las considera paralelas al plano) lo cual le ocasionó inconvenientes para catalogar los errores dados.
- Otro de los expertos cuestiona el teorema de perpendicularidad entre recta y plano: *Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a toda recta de éste.* Pregunta si las rectas consideradas deben pasar por el pie de la perpendicular.
- El tratamiento incorrecto de teoremas y propiedades (TIII) en algunos casos es considerado por los expertos como demostraciones incompletas (TV), lo cual se manifiesta en los comentarios realizados.

Con los aportes de los expertos y de las categorizaciones presentadas hasta el momento se decide revisar, depurar, reorganizar y perfeccionar la tipología. No se contemplan nuevos errores dado que los expertos no lo proponen y además no se considera necesario. Sin embargo, se establece una jerarquización en la tipificación de los errores atendiendo particularmente a los comentarios realizados por los expertos y al acrisolado generado en las etapas anteriores.

4.2. La tipología

A partir de sucesivas revisiones de las categorías anteriores se vuelven a redefinir, agrupándolas en cuatro tópicos con subtipos en cada una. Uno de ellos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otros dos referidos a las cuestiones de la prueba en matemática - por un lado, a los fundamentos de la acción de demostrar y por otro a la demostración en sí misma- y por último uno que expone cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico.

- ✓ El lenguaje matemático. T1
    - Redacción incorrecta. T1.a
    - Uso incorrecto de la simbología matemática. T1.b
- ✓ Lo fundamental de la *demostrabilidad*. T2
    - Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis. T2.a

- Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones. T2.b

✓ Lo esencial de la demostración. T3
- Ejemplijismo. T3.a
- Quasilogismo. T3.b
- Cuasisofisma. T3.c

✓ Las analogías entre conceptos o propiedades. T4
- Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D. T4.a
- Falsos dilemas. T4.b
- Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades. T4.c

Dado que un mismo problema puede dar lugar a errores de diferentes fuentes y el mismo error puede surgir de diferentes procesos de resolución del problema es que se intenta hacer hincapié en la descripción del error en la forma lo más fiel posible.

T1. El lenguaje matemático

Se considera dentro de este tipo a los errores de redacción o escritura en las demostraciones o el uso erróneo del lenguaje propio de las matemáticas. Se recalca que los estudiantes son alumnos avanzados del profesorado en matemática por lo que no es sólo una cuestión formal considerar estos errores sino de adecuación al nivel académico en que se encuentran. Se toman como elementos característicos los siguientes dos subtipos:

T1.a. Redacción incorrecta

Se señala dentro de esta categoría la redacción incorrecta de algunos pasos o fragmentos de una demostración o utilización de escritura propia (no convencional) sin aclararla o uso de expresiones del lenguaje común que no se corresponden en el matemático. De la lectura completa de la escritura puede interpretarse lo que el estudiante quiere establecer, aunque se considera que no es la forma apropiada.

- Por ejemplo, se establece que una recta es perpendicular a otra porque está incluida en un plano que *contiene* a todas las perpendiculares a esa recta. Es incorrecto decir que el plano contiene a todas las perpendiculares sin enunciar que todas tienen un punto en común.
- Se evidencia el uso de notaciones propias sin aclararlas previamente (indican que las rectas **r** y **a’** son secantes escribiendo **r**$\cap$**a’**).
- Emplean la frase *no tienen ningún punto en común* para indicar la relación entre dos rectas cruzadas. Esta expresión se refiere al lenguaje común ya que desde el lenguaje especializado (en lógica) es lo mismo que decir que las rectas son coincidentes, contrario a lo que afirman.

T1.b. Uso incorrecto de la simbología matemática

Se incluye en esta categoría la consideración en forma incorrecta de relaciones de pertenencia, inclusión, etc. También se considera en este subtipo el uso incorrecto de los cuantificadores lógicos, tanto su escritura o falta de ellos como la interpretación de su significado.

- Por ejemplo, se escribe simbólicamente que una recta pertenece a un plano, que un plano está incluido en una recta o que un punto está incluido en una recta respectivamente.
- Se emplea incorrectamente el cuantificador lógico *para todo*, ya que de la proposición: existen *infinitos* planos que pasan por la recta **a** y son perpendiculares a un plano π se deduce que *todo* plano que pasa por la recta **a** es perpendicular al plano π. Se considera como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*.

T2. Lo fundamental de la *demostrabilidad*

Se utiliza el término "*demostrabilidad*" aludiendo a los cimientos de la acción o proceso de demostrar. Se consideran aquí como bases de esta acción: hipótesis y tesis de la proposición, axiomas y definiciones acordadas.

Se toman los siguientes dos subtipos:

T2.a. Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis

Muchas veces las proposiciones están enunciadas en términos de una implicación, donde la primera parte es la hipótesis y la segunda es la tesis, pero en otras ocasiones no es directo establecer estos elementos por el lugar que ocupan en la proposición. Se consideran errores de este tipo cuando se explicitan incorrectamente las hipótesis o la tesis de la propiedad que se pide demostrar o cuando no se distingue entre la hipótesis y la tesis. También cuando no se utiliza la hipótesis ya que esto denota que no se reconoce su función en el proceso de demostrar o cuando no se demuestra todo lo requerido en la proposición. Asimismo, se incluye dentro de esta categoría a las justificaciones en las que se debilitan las condiciones de la hipótesis de un teorema.

Por ejemplo, se ignora en la demostración parte de la tesis de la propiedad. O se escribe en la hipótesis '**a**, **b** rectas' y en la tesis '**a** y **b** son perpendiculares si por **a** o por **b** se puede trazar un plano perpendicular a **b** o a **a** respectivamente'. Se evidencia que no se distingue cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

T2.b. Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones

Los conceptos trabajados en Geometría Euclídea forman parte de una amplia red de relaciones que los ligan, lo que conlleva una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos. Los axiomas y definiciones pueden variar de un texto a otro, pero una vez establecidos no deben quebrantarse. Respecto al tratamiento de los axiomas, se detallan errores donde no se respeta su condición, ya sea porque se los quiere demostrar o se los contradice. Se considera también en este subtipo la transgresión de definiciones acordadas.

T3. Lo esencial de la demostración

Se considera como *lo esencial de la demostración* a la resolución del problema dado y a la justificación del encadenamiento realizado para justificar la validez del razonamiento. Se incluye en esta categoría de errores a aquellos que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración en el nivel académico de los estudiantes, particularmente en lo referido al empleo de los ejemplos en la justificación de las afirmaciones, a las inferencias y a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Se consideran tres subtipos:

T3. a. Ejemplijismo

Esta palabra surge de relacionar el término espejismo (apariencia engañosa de algo) con ejemplo y decidir. Por un lado, al no poder encontrar un ejemplo para decidir la existencia de un objeto, los estudiantes exponen que el objeto no existe y por otro lado sostienen que una proposición es falsa citando un teorema con otra tesis, en lugar de utilizar un contraejemplo.

T3.b. Quasilogismo

Esta palabra surge para considerar los argumentos que en apariencia corresponden a una ley lógica. Se considera en este subtipo a los errores en que se realizan razonamientos que no son válidos. Por un lado, se toman los casos en los que se vulnera alguna regla de inferencia o ley lógica y por otro donde se produce un círculo vicioso. Se incluye también en este subtipo al error de considerar el recíproco de la propiedad dada, ya que, si bien no se vulnera una ley de inferencia, se considera que se desconocen las equivalencias entre una proposición y las asociadas a ella (contrarrecíproco, recíproca e inversa).

T3.c. Cuasisofisma

Esta palabra surge para considerar los argumentos que son exiguos para justificar un razonamiento. Se considera un error de este tipo cuando hay un “agujero” en la demostración, es decir, falta justificar algún paso en el encadenamiento lógico. En ocasiones, aunque no se justifique, la implicación es correcta si bien queda en manos del lector establecer las razones por lo cual esto es así, mientras en otras la implicación es válida en ciertos casos excepcionales. Por esta razón también se incluye aquí a los casos particulares, es decir, casos donde no se tienen en cuenta todas las condiciones relativas entre los conceptos que se involucran o donde se ignora una parte de la tesis. También se considera dentro de esta categoría a los errores donde el estudiante utiliza una representación gráfica para justificar una proposición, haciendo referencia explícita a un dibujo o evocando a uno, sin otra justificación formal.

T4. Las analogías entre conceptos o propiedades

Muchos aprendizajes extraescolares se realizan por semejanzas, buscando parecidos, aplicando lo que funciona en una “cosa” a otra “cosa” similar. También en la escuela se utiliza esta metodología de anclar a las estructuras conocidas los conceptos nuevos para sentirse seguro. Las analogías favorecen la habilidad para transferir conocimientos de unos dominios a otros, pero a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando interpretaciones inadecuadas. Se consideran tres subtipos dentro de esta tipología:

T4.a. Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D

Se cataloga a errores como de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que cuando los elementos que intervienen no están en un plano dejan de serlo. Por ejemplo, en el plano, por un punto existe una única recta perpendicular a otra, en cambio en el espacio existen infinitas rectas perpendiculares a otra por un punto. Similar a esta propiedad es la unicidad de la mediatriz de un segmento que es válido en el plano, pero no en las tres dimensiones. También en el plano si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas, pero en 3D no es verdadera esta propiedad.

T4.b. Falsos dilemas

Se toma la expresión *falso dilema* cuando se considera en la demostración una proposición alternativa, que no se corresponde con la proposición a demostrar. Se considera dentro de esta categoría a los errores en los cuales se suplanta la proposición a demostrar por otra que involucra relaciones o conceptos similares pero que no es lógicamente equivalente a la dada. Por ejemplo en varios casos, ante el requerimiento de demostrar que “dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra”, se reemplaza por la propiedad “Dadas dos rectas cruzadas **r** y **s**, si por una de ellas **r** se puede trazar un plano α perpendicular a **s**, por ésta se puede trazar un plano β perpendicular a **r**” que es un teorema que se presenta y demuestra en el libro de texto, que tiene elementos similares a los de la proposición dada pero que no es equivalente a la misma.

T4.c. Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades

Se incluye en esta categoría a los errores donde se extrapolan sin control o sin justificación propiedades que cumple una parte o subconjunto al todo o universo o viceversa, es decir, del todo a cada una de las partes. Asimismo, se considera un error de este tipo cuando se extiende la demostración a otros casos similares sin analizar su adecuación. Por ejemplo, se asevera que una recta es perpendicular a un plano por ser perpendicular a una recta incluida en dicho plano, extendiendo la propiedad de un subconjunto del plano (una recta) a todo el plano. Algo similar ocurre al considerar que si un punto es exterior a dos rectas coplanares es exterior al plano que éstas determinan.

5. Conclusiones y perspectivas

Retomando el objetivo de este artículo que es categorizar los errores cometidos por estudiante del profesorado en matemática al resolver problemas de geometría en 3D comenzamos expresando la relación entre las dos tipologías que se presentan.

		TI.	TII.	TIII.	TIV.	TV.	TVI.	TVII.
T1	**A**	✓						
	B	✓						
T2	**A**		✓			✓		
	B				✓			
T3	**A**					✓		
	B			✓				
	C					✓	✓	
T4	**A**							✓
	B			✓				
	C							✓

Tabla 2. Relación entre tipologías

Teniendo en cuenta los referentes considerados en el marco de referencia y el análisis del instrumento presentado, se exponen conclusiones y discusiones referidas a las cuestiones particulares que se toman en la tipología final de este estudio. Se consideran para ello tres apartados, uno referido a lo que involucra al *lenguaje matemático*, otro referido a la *prueba en matemática* y finalmente una concerniente a las *analogías en el trabajo geométrico*. Estos apartados se originan en función de ordenar la lectura de estas conclusiones, no obstante, se finaliza estableciendo relaciones entre ellos ya que hay cuestiones que los atraviesan.

5.1. Respecto a El lenguaje matemático

Se evidencian dos aspectos referidos a la estructura propia del lenguaje matemático. Un aspecto refiere al empleo de los términos propios de la disciplina y otro a la estructura y a la presentación de los contenidos.

Socas (2000), Radillo Enríquez y Varela (2007), Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) destacan la particularidad de la simbología matemática que permite expresar sin ambigüedades, con precisión y rigurosidad las afirmaciones de esta disciplina. Señalan que los símbolos en matemática tienen un significado preciso que debe ser conocido por los estudiantes, lo cual no siempre ocurre. El deficiente uso de esta característica se presenta en la tipología final como *uso incorrecto de la simbología matemática.*

En el estudio se evidencia el mal uso de los símbolos en cuanto a la relación entre *elementos* y *conjuntos* o entre *conjuntos* tanto en la escritura simbólica como coloquial. Además, respecto del uso de cuantificadores se visualiza por un lado la omisión y por otro el mal uso de ellos.

Se detecta, asimismo, que algunos sujetos consideran como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo* (Zaslavsky y Ron, 1998). Por otro lado, Radillo Enríquez y Varela (2007) señalan que hay conceptos matemáticos que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente. En la proposición "dos rectas **r** y **s** son perpendiculares si por una de ellas **r**, se puede trazar un plano β perpendicular a la otra **s**", considerada por los estudiantes involucrados en esta investigación, está implícito que existe un plano β que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s.** Al expresar esta propiedad los alumnos omiten considerar este cuantificador existencial y de lo escrito, se establece que cualquier plano que contenga a la recta **r** será perpendicular a la recta **s**, lo cual es incorrecto.

En cuanto a la precisión del lenguaje y a la rigurosidad de la presentación de los enunciados, Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) señalan que ambas están supeditadas al nivel académico de los estudiantes. En esta investigación, los sujetos son estudiantes avanzados del profesorado en matemática, por lo cual es pertinente tener especialmente en cuenta este aspecto en la tipología.

Otra característica destacada por Socas (2000) y por Radillo Enríquez y Varela (2007) es que en el lenguaje usual hay términos que tienen el mismo significado y otros que tienen diferente significado al matemático, lo cual provoca un conflicto ya sea para distinguirlos o para determinar que el significado es efectivamente el mismo. El lenguaje ordinario no requiere de la misma precisión que el lenguaje matemático para ser comprendido. Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la escritura de las demostraciones y la influencia del lenguaje cotidiano sobre el uso que hacen los estudiantes del lenguaje matemático se presentan en la tipología final bajo la denominación de *redacción incorrecta*.

En el estudio se encuentra la expresión *rectas cruzadas* con un significado del lenguaje común, distinto al que refiere el libro de texto de la cátedra para denominar a las rectas alabeadas. Usualmente los estudiantes emplean este término para designar, por ejemplo, a calles que se cortan. En matemática este término refiere a rectas no coplanares y por tanto que no se intersecan.

Asimismo, a la expresión -*no tienen ningún punto en común*- para indicar la relación entre dos rectas cruzadas, los estudiantes la emplean según la acepción del lenguaje común. Desde el lenguaje de la lógica esta expresión indica que las rectas son coincidentes, pues es una doble negación, contradiciendo el concepto de rectas cruzadas.

Además, el vocablo “un” es interpretado en ocasiones como artículo y en otras ocasiones como pronombre numeral cardinal. Este error se evidencia cuando los estudiantes deducen que dos rectas con *un* punto en común son secantes. El “un” que los estudiantes utilizan es pronombre numeral cardinal y ellos lo emplean como artículo, dado que dos rectas con un punto común (*un* con acepción artículo) pueden ser coincidentes dado que, según esta acepción, podrían tener más de uno.

5.2. Respecto a la *Prueba en matemática*

Weber (2013) presenta a la prueba como un problema a resolver por los estudiantes universitarios pues sostiene que éstos necesitan estrategias y heurísticas que le ayuden a decidir cómo encararlas. Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la prueba en matemática se consideran en la tipología final bajo la denominación de *lo fundamental de la demostrabilidad*, que refiere a los fundamentos de la acción de demostrar, y de *lo esencial de la demostración*, que refiere a la demostración en sí misma.

Para resolver un problema de demostrar una proposición es necesario mostrar de un modo concluyente la exactitud de la proposición enunciada. Para esto, es imprescindible determinar los elementos estructurales que son la premisa y la conclusión, es decir, establecer hipótesis y tesis. Si bien no es requerimiento de la consigna explicitar hipótesis y tesis en los problemas de los instrumentos analizados, se vislumbran los errores en torno a esta cuestión a través del análisis de la demostración o de lo escrito, si lo hacen.

En el estudio se presentan errores donde se ignora en la demostración parte de la tesis de una propiedad o donde hipótesis y tesis enunciadas no se corresponden con la proposición dada o donde no se puede distinguir cuál es la hipótesis y cuál es la tesis. También se encontró que parte de la hipótesis no se utiliza en la resolución del problema.

Se considera también en este punto el aspecto referido al uso defectuoso de definiciones y de axiomas o postulados (Weber, 2013 y Selden y Selden, 2003).

En un concepto confluyen imágenes, impresiones, experiencias, representaciones, ejemplos, propiedades intrínsecas y la definición. La definición establece condiciones necesarias y suficientes que quedan ocultas muchas veces en las definiciones al emplear el “si” cuando en realidad significa “sí y sólo sí”. Todas estas características generan tensiones en el uso del concepto al punto que muchas veces los estudiantes no pueden describir el concepto con sus propias palabras o no pueden presentar ejemplos o transgreden o contradicen las definiciones como se evidencia en este trabajo.

Específicamente la definición que algunos alumnos toman de rectas, recta y plano o planos paralelos no condice con la definición acordada al considerar que la intersección puede no ser vacía. En este sentido, uno de los expertos consultados manifiesta el esfuerzo demandado al catalogar los errores ya que considera una definición (respecto al paralelismo) distinta a la convenida. Es habitual que ambas definiciones coexistan en los textos de geometría de nivel superior. Considerar una u otra definición puede modificar las condiciones que se deben imponer al establecer el valor de verdad de una de las proposiciones analizadas en los instrumentos de esta investigación. En ocasiones, los estudiantes consideran las representaciones disponibles que pueden no coincidir con la definición acordada.

También dentro de los errores que surgen en este trabajo están los referidos al uso incorrecto de axiomas. Se encuentra que los estudiantes en unos casos contradicen o transgreden los axiomas o los desconocen o intentan demostrarlos. Este error se visualiza entre otros, en el caso de un alumno que determina un plano tomando una recta y un punto de ella, ignorando el axioma de determinación del plano o en otro alumno que pretende demostrar que dos puntos están alineados.

Para el segundo aspecto, lo *esencial de la demostración,* se consideran errores que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración según el nivel académico en el que se realiza este estudio. Se consideran particularmente tres subtipos, uno que refiere al empleo de los ejemplos en la justificación de las proposiciones, otro a las inferencias y por último el que alude a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Weber (2013) sostiene que los estudiantes universitarios no pueden construir una prueba sin solicitar ayuda al profesor, aunque se les brinde una sugerencia para comenzar. Sus estrategias, en general, son ineficaces y rudimentarias. Se instituyen en este trabajo los términos ejemplijismo, quasilogismo y cuasisofisma con el fin de englobar distintas acciones sobre aspectos propios de la demostración.

En el análisis realizado se detecta que los estudiantes concluyen que un objeto buscado no existe dado que intentan construirlo por un método y no lo logran. Se presenta el caso en que dicen que no hay plano paralelo a dos rectas cruzadas ya que no pueden construir un plano con dichas rectas. Así la imposibilidad de determinar ese plano lo alegan a la imposibilidad de existencia del plano determinado por esas rectas cruzadas.

En algunos casos, en los instrumentos analizados en este estudio, para justificar que una proposición es falsa no se emplea un contraejemplo, sino que la justifican aludiendo a un teorema en el que coincide la conclusión, aunque las premisas consideradas no son coherentes con las premisas de la proposición a justificar (Weber, 2013). Cuando se pretende fundamentar que no todas las rectas alabeadas son perpendiculares, se justifica con la condición que deben cumplir dos rectas alabeadas para ser perpendiculares. Los estudiantes no consideran la especificidad del contraejemplo como forma de refutar una proposición (Zaslavsky y Ron, 1998).

Se consideran, por otro lado, en la tipología final, errores que vulneran leyes lógicas (Zaslavsky y Ron, 1998; Weber, 2013 y Selden y Selden, 2003). Se presenta, en ocasiones, el empleo incorrecto de la regla de inferencia Modus Ponens donde se afirma el consecuente para concluir el antecedente lo cual es un razonamiento fallido, tanto con proposiciones cuantificadas como no cuantificadas. Asimismo, utilizan en una demostración una propiedad que es posterior a la dada, lo que algunos de estos autores denominan círculo vicioso o tautología. Por otra parte, los estudiantes presentan un error de razonamiento clásico y muy persistente como es el probar el recíproco del teorema que se debe demostrar.

Se manifiestan también errores que refieren a argumentos que son exiguos para justificar los pasos de un razonamiento (Zaslavsky y Ron, 1998)

Respecto a los agujeros en las demostraciones, es decir, cuando basan una demostración en proposiciones implícitamente admitidas en el razonamiento y no son previamente establecidas, hay distintos tipos. Por un lado, cuando no se justifica un paso en una demostración puede ocurrir que la implicación sea correcta, porque es válida, pero en otros casos la implicación no es válida. En el primer caso, el agujero puede pasar desapercibido en la lectura o corrección de esa demostración. Consideramos también dentro de los cuasisofismas los casos particulares. Este tipo de agujero en la demostración se presenta ya que se omite demostrar algún caso o no se justifica por qué se seleccionan éstos y no otros.

Los estudiantes usan argumentos intuitivos y empíricos para probar todo tipo de proposiciones. Se basan en ejemplos y casos individuales, por ello se considera dentro de esta particularidad, el error cuando se hace referencia explícita a un dibujo realizado.

5.3. Respecto a las *Analogías en el trabajo geométrico*

Las analogías, procedimientos que usualmente se emplean para adquirir prácticas o experiencias de la vida cotidiana, favorecen la habilidad para transferir conocimientos de un dominio fuente a un dominio meta. En esta transferencia a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando recuperaciones o extrapolaciones inadecuadas. Las generalizaciones o particularizaciones en lo referido a la geometría en 2D y 3D se realiza, en ocasiones, sin la debida vigilancia conceptual lo que provoca errores que en esta tipología se consideran bajo los aspectos de *aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D*, *falsos dilemas* y *extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades* (De Castro, 2012; Polya, 1970; Volkert, 2008; Cohen, 2000)

Respecto a las propiedades de perpendicularidad entre rectas, los alumnos en general las visualizan en un plano. La propiedad -*Por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a otra recta*- es válida en cada uno de los infinitos planos que existen, pero los estudiantes ignoran que están en ese contexto tridimensional (se quedan en el plano), no logran una real fusión entre el concepto de perpendicularidad y las imágenes disponibles. Esto muestra que la experiencia y la intuición son inherentes a la geometría aún en niveles avanzados de estudio y el hábito de trabajar tantos años en 2D es muy fuerte y hace que los estudiantes no puedan desapegarse de este concepto de rectas perpendiculares.

Lo mencionado sintoniza con lo que se consideran *falsos dilemas* dado que hasta el momento de comenzar el estudio de la geometría en 3D, tercer año de la carrera, las rectas perpendiculares siempre fueron rectas secantes y esta relación de perpendicularidad se estableció sólo entre rectas. Cohen (2000) sostiene que la extensión en el espacio tridimensional del concepto de perpendicularidad no cambia su significado base, pero amplía las posibles relaciones entre ellos. Subraya además que la capacidad de visualización muchas veces es limitada y es propio con lo que los estudiantes están acostumbrados a ver en el plano.

5.4 Respecto a *cuestiones transversales*

El nivel académico de los estudiantes que forman parte de este estudio exige una geometría sistemática. La sistematización de la geometría genera polémica entre diversos autores respecto a la pertinencia de comenzar el estudio de la geometría 2D antes que la 3D o viceversa.

Autores como Volkert (2008) y Freudenthal (1983) recomiendan comenzar la enseñanza por una geometría intuitiva tomando objetos tridimensionales de la realidad y a partir de ellos ir a la geometría 2D. Cuando posterior a esa enseñanza intuitiva se requiere de una sistematización de la geometría tridimensional aparecen conflictos propios de ésta, respecto a su enseñanza formal. En este estudio se presenta esta particularidad ya que la pluralidad de las posibles relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre elementos, que se amplía en 3D, hace que aparezca exacerbado el uso de propiedades similares, equivalentes o no, donde intervienen los elementos y relaciones pero que no respetan hipótesis o tesis de la proposición dada.

El ordenamiento habitual para la enseñanza superior comienza con la geometría 2D y separada de la del espacio. Esto afecta a definiciones de algunos conceptos geométricos particularmente referidos a la relación de paralelismo pues al definir rectas paralelas se establece que estas rectas tienen intersección vacía, pero es tácito, en general, que son coplanares dado que no puede suceder otra posibilidad en el plano. En 3D, esta condición tácita genera conflictos con la definición de rectas paralelas y rectas alabeadas.

Por otro lado, la formación de los conceptos geométricos se ve atravesada por diversos aspectos, en particular las definiciones por expresiones que no se corresponden con el lenguaje cotidiano. En especial, el empleo de la expresión *sí* en el lenguaje cotidiano se interpreta como *sí y solo sí,* aunque no lo sea. En una definición formal, en ocasiones se refuerza esta interpretación incorrecta dado que se utiliza la expresión *sí* cuando en realidad significa *sí y solo sí.* Este empleo erróneo se extiende en proposiciones que no son bicondicionales y son tomadas como tal o en el empleo equivocado del recíproco de la propiedad dada (Selden y Selden, 2003).

Asimismo, es habitual que los estudiantes consideren que si una proposición es válida en casos específicos lo es para todos los casos, es decir extienden la propiedad que cumple un conjunto de objetos al todo. Esto se evidencia cuando se consideran expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*. Es decir, el mal uso de los cuantificadores lleva a generalizaciones que no siempre son correctas (Zaslavsky y Ron, 1998; Polya, 1970).

El interés por el estudio de las particularidades de la enseñanza de la geometría tridimensional es una temática en agenda de investigación en educación matemática. Se destacan, por ejemplo, los estudios de Ramírez Uclés, Flores Martínez y Ramírez Uclés (2018) que identifican errores específicos de la argumentación visual y derivados del uso incorrecto de los elementos de razonamiento, contenidos y procedimientos matemáticos.

Algunas líneas con las que se puede continuar profundizando en temáticas derivadas de esta investigación son:

- Estudiar las relaciones entre dificultades y errores.
- Realizar una categorización detallada de las dificultades de estudiantes de profesorado en matemática que surgen en geometría 3D.
- Analizar en forma minuciosa las definiciones y sus implicaciones. Establecer definiciones equivalentes.

Bibliografía

Cohen, N. (2000). Misconceptions in 3-D Geometry Basic Concepts. En P*roceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychological of Mathematical Education*. Hiroshima: Japan.

De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. https://www.researchgate.net/publication/280132066

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Mc Knight, C., Magid, T., Murphy, E. & Mc Knigt, M. (2000). Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician. Rhode Island: American Mathematical Society.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual*. Madrid: Pearson Educación.

Ortega, J. F. y Ortega, J. A. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? Rect@. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA Recuperado el 8 de febrero de 2016.de https://doaj.org/article/983f0ead221340a084f82d2f87012d9b

Polya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Radatz, H. (1979). Error analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics*, *6*, 163-172.

Radillo Enríquez, M. y Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*, 263-280. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Ramírez Uclés, R; Flores Martínez, P, y Ramírez Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 21 (1), 29-56. http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-21/numero-21-1/351-201802a

Selden, A. & Selden, J. (2003). Errors and misconceptions in college level theorem proving. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf
Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*,125-154. Barcelona: Horsori.
Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Volkert, K. (2008). *The problem of solid geometry.* Recuperado el 7 de julio de 2011de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/VOLK.pdf controlar.
Weber, K. (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8 recuperado el 12 de febrero de 2016 de https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof.
Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understandings of the role of counter-examples. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 225 – 232.

Autores:

Primer autor: **Götte, Marcela**
Profesora de las cátedras Geometría Euclídea Espacial y Matemática Discreta I y II en el Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Argentina. Magister en Didácticas Específicas. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones sobre la temática en distintas revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: marcelagotte@gmail.com

Segundo autor: **Mántica, Ana María**:
Profesora en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, en el profesorado en Matemática. Magister en Didácticas Específicas, mención en matemática. Docente investigadora en temas referidos a la enseñanza de la matemática en distintos niveles del sistema educativo que ha realizado publicaciones en revistas especializadas nacionales e internacionales.
Dirección Electrónica: ana.mantica@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-22

https://union.fespm.es

Recursos virtuales para la enseñanza del álgebra: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19

Nataly Pincheira Hauck, Claudia Vásquez Ortiz

Fecha de recepción: 6/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen	El estudio del álgebra permite explorar, establecer relaciones, modelizar situaciones y realizar predicciones a partir del manejo de la información. El normal desarrollo de dichos procesos se ha visto interrumpido por el estado de pandemia de la COVID-19. Desde esta perspectiva, dado el impacto que han sufrido las orientaciones curriculares chilenas teniendo que poner en marcha la implementación de un currículo de emergencia, se presenta un análisis de la priorización curricular respecto de los objetivos de aprendizaje que se plantean en el eje de álgebra. Así como, una colección de recursos virtuales interactivos como herramienta de apoyo hacia el profesorado y la enseñanza del álgebra escolar. **Palabras clave**: enseñanza del álgebra, priorización curricular, recursos virtuales, COVID-19.
Abstract	The study of algebra allows us to explore, establish relationships, model situations and make predictions from the handling of information. The normal development of these processes has been interrupted by the COVID-19 pandemic. From this perspective, given the impact suffered by the Chilean curricular orientations having to implement the implementation of an emergency curriculum, an analysis of the curricular prioritization with respect to the learning objectives proposed in the algebra axis is presented. As well as a collection of interactive virtual resources as a support tool for teachers and the teaching of school algebra. **Keywords**: teaching algebra, curricular prioritization, virtual resources, COVID-19.
Resumo	O estudo de álgebra permite explorar, estabelecer relações, modelar problemas e fazer previsões por meio da gestão da informação. O desenvolvimento normal desses processos foi interrompido em função da pandemia da Covid-19. A partir dessa perspectiva, dado o impacto nas diretrizes curriculares chilenas que tiveram que executar a implantação de um currículo emergencial, apresenta-se uma análise de priorização curricular respeito aos objetivos de aprendizagem propostos ao eixo de álgebra. Assim como, um conjunto de recursos virtuais interativos como ferramenta de apoio aos professores e ao ensino de álgebra escolar. **Palavras-chave:** ensino de álgebra, priorização curricular, recursos virtuais, COVID-19.

1. Introducción

Diversos países han visto afectados fuertemente sus sistemas educativos producto de la pandemia provocada por la COVID-19, que ha llevado al cierre de un gran número de instituciones educacionales a nivel mundial y con ello, la consecuente paralización de las clases presenciales, que han sido reemplazadas por una educación remota.

Esta nueva modalidad de trabajo ha implicado que el profesorado deba adecuar sus metodologías de enseñanza a este nuevo contexto, utilizando diversas herramientas digitales (*whatsapp*, *slack*, correo electrónico, *google classroom*, *google meet*, *zoom*, *skype*, entre otros) para la comunicación, y así continuar impartiendo las clases y gestionar los aprendizajes, ya sea de manera sincrónica o asincrónica.

En el caso de Chile, cerca de tres millones y medio de estudiantes, de las etapas pre-escolar, escolar básica y media, se han visto afectados por el cierre de los establecimientos educativos. En respuesta a esta situación de crisis sanitaria, el Ministerio de Educación chileno [MINEDUC] ha definido un *currículum transitorio para la emergencia* (MINEDUC, 2020a) válido por dos años (2020 y 2021), pues considera la emergencia en el vigente año y la pos-emergencia. De esta manera, en marzo del año 2022 se espera poder retomar el currículum que se encontraba vigente hasta antes de esta pandemia (MINEDUC, 2012, 2016, 2019).

A través de este currículum para la emergencia, se busca mitigar el impacto de la pandemia de la COVID-19 en la educación. Con este propósito el MINEDUC ha realizado una priorización curricular de los objetivos de aprendizaje (OA) más esenciales y sobre los cuales se funda o se construye cada disciplina. En este sentido, dicha priorización es entendida como "un marco de actuación pedagógica, que define objetivos de aprendizaje, secuenciados y adecuados a la edad de los estudiantes, procurando que puedan ser cumplidos con el máximo de realización posible en las circunstancias en que se encuentra el país" (MINEDUC, 2020a, p. 6).

Uno de los principales propósitos de este currículum para la emergencia es resguardar que no aumenten de forma desmedida la brecha y las desigualdades educacionales ya existentes en el país, y que se podrían ver fuertemente impactadas por las brechas digitales que en el escenario actual se han convertido en un nuevo espacio de aprendizaje (Propuestas Educación Mesa Social Covid-19, 2020). En este sentido, es necesario proporcionar andamios al profesorado que les permitan hacer frente a la implementación de la priorización curricular en el escenario de educación remota producto de la pandemia de la COVID-19. Sobre todo, si consideramos los resultados de la recientemente aplicada encuesta a nivel país La Mirada de los Docentes (Miradadocentes, 2020), en la que queda en evidencia la necesidad de contar con orientaciones curriculares y estrategias pedagogías para llevar a cabo el proceso de enseñanza bajo la modalidad de educación remota. De igual manera queda de manifiesto que dentro de las mayores preocupaciones de los docentes respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje, se encuentra la poca autonomía de los estudiantes que podría interferir en los resultados de aprendizaje bajo esta modalidad. Razón por la cual en muchos casos declaran utilizar con mayor frecuencia recursos virtuales como medio para interactuar y fortalecer la autonomía de los estudiantes.

Por tanto, resulta primordial que en la asignatura de matemática se desarrollen OA que permitan explorar, establecer relaciones, modelizar situaciones y realizar predicciones a partir de la información que se maneja en la actualidad. Desde esta perspectiva, fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes constituye un rol fundamental en esta asignatura, dado que el álgebra conforma una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones, para promover una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Carpenter, Franke y Levi 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 1998, 2000).

Así pues, para promover el desarrollo del pensamiento algebraico es necesario "capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58), lo que permitirá alcanzar una comprensión profunda y compleja de las matemáticas escolares, de tal manera que estos modos de pensamiento trasciendan a otros bloques del contenido matemático, como lo es numeración, geometría, estadística, etc. Desde este prisma, el estudio del álgebra busca promover en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, a través de tareas matemáticas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas (Blanton y Kaput, 2005), por lo que se debe propiciar ambientes de aprendizaje donde los alumnos exploren, modelicen, argumenten, hagan predicciones y comprueben ideas. Esto último, constituye un desafío dadas las condiciones en que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje producto de la situación sanitaria que se vive en la actualidad.

Es en este contexto, y con el propósito de brindar apoyo a los profesores responsables de conducir la enseñanza del álgebra y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en la Educación Básica y Educación Media en tiempos de pandemia, en este artículo -que es continuidad del trabajo presentado en Vásquez, Ruz y Martínez (2020)- se presenta, en primer lugar, una visión panorámica de los OA de álgebra priorizados, por el currículum de emergencia en Chile; para luego presentar una colección de recursos virtuales interactivos seleccionados para fomentar e impulsar el progreso de los objetivos priorizados, los cuales conciernen un alto grado de idoneidad didáctica.

Así pues, el estudio pretende indagar en *¿cómo promover el pensamiento algebraico a la luz de los objetivos priorizados en tiempos de pandemia?, ¿qué recursos virtuales podemos utilizar para apoyar esta tarea?* En este sentido, se espera que dichos recursos puedan ser utilizados por el profesorado para promover en sus estudiantes el desarrollo del pensamiento algebraico como base para alcanzar una comprensión profunda y compleja de las matemáticas, facilitando el desarrollo de otros ejes del currículo escolar, como lo es números, estadística, probabilidad, entre otros, permitiéndoles entender y establecer relaciones de acuerdo a la situación sanitaria que se vive en la actualidad.

2. El álgebra en el currículo escolar de emergencia en Chile

A mediados del mes de mayo de 2020, el MINEDUC presenta el currículum transitorio para la emergencia (MINEDUC, 2020a), que ofrece una priorización curricular en el contexto de la emergencia COVID-19, a partir de la selección de objetivos esenciales provenientes de las progresiones de aprendizaje de las directrices vigentes, proponiendo una ruta que organiza la enseñanza de manera flexible, de acuerdo con los siguientes criterios:

- *Imprescindibles*: se refiere a los OA que tienen un contenido que es fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Bajo este criterio se busca responder a la pregunta *¿cuál es el aprendizaje fundamental que necesita desarrollar el estudiante para avanzar en los dominios de la asignatura?*
- *Integradores*: se definen como aquellos OA que tienen un contenido necesario para otras áreas del conocimiento. Este criterio busca responder si *¿el objetivo permite al estudiante relacionar conocimientos de otras asignaturas o con otros ejes al interior de la misma asignatura?*
- *Significativos*: entendidos como aquellos OA que tienen un contenido necesario para el desarrollo de la persona en la sociedad actual. Este criterio se basa principalmente en el uso frecuente y cotidiano de la matemática, estos contenidos se caracterizan por ser necesarios para el día a día, es un conocimiento para la vida no necesariamente profesional. Por tanto, a través de este criterio se busca responder si *¿el objetivo permite al estudiante adaptarse activamente a la sociedad?*

Así, en función de la reducción del tiempo lectivo producto del cierre de los establecimientos educativos y de los criterios antes expuestos, se priorizan los objetivos de aprendizaje, lo que “involucra comprender que el fin de la educación no solo yace en preparar a los estudiantes para el futuro, sino también en apoyarlos para lidiar con los desafíos del presente” (Propuestas Educación Mesa Social Covid-19, 2020, p. 11). Lo que lleva a definir niveles de priorización:

Nivel 1: considera aquellos OA que son terminales del año y esenciales, es decir, imprescindibles para continuar el aprendizaje del año siguiente*;*

Nivel 2: estos OA permiten complementar los OA imprescindibles, y son considerados altamente integradores y significativos puesto que permiten generar aprendizajes para integrarse como sujetos activos frente a los desafíos sociales, así como desarrollar aprendizajes integradores para transitar por distintas áreas del conocimiento.

En lo que respecta a la priorización para la asignatura de matemática (MINEDUC, 2020b), ésta se organizó para mantener un equilibrio entre los distintos ejes temáticos (números, álgebra y funciones, geometría y medición, estadística y probabilidad). De esta forma, se espera que el estudiante pueda construir el conocimiento básico, desarrollar las habilidades (resolver problemas, argumentar, comunicar, modelar, representar) y actitudes fundamentales para los ciudadanos del siglo XXI, necesarias para comprender, usar y valorar la matemática en diferentes contextos.

En relación al eje temático vinculado al estudio del álgebra, se presenta la progresión de los OA (Tabla 1) en los distintos niveles educativos de acuerdo al currículum que se encontraba vigente (MINEDUC, 2012, 2016, 2019) previo a la pandemia de la COVID-19. Dicha progresión, considera también la priorización de los OA atendidos en el Nivel 1 (imprescindibles) y Nivel 2 (integradores y significativos) por el currículum de emergencia, correspondiente a este bloque de contenido.

Nivel educativo	OA de álgebra vigente hasta antes de la pandemia COVID-19	OA de álgebra priorizados		OA de álgebra NO priorizados
		Nivel 1	Nivel 2	
1º básico	- Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos…) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo.	x		
	- Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual $(=)$.			x
2º básico	- Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo.		x	
	- Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual $(=)$ y los símbolos no igual $(>,<)$	x		
3º básico	- Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo.	x		
	- Resolver ecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.			x
4º básico	- Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo.	x		
	- Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción			x
5º básico	- Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones.	x		
	- Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.			x
6º básico	- Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.		x	
	- Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como:			

	- usando una balanza - usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación - y aplicando procedimientos formales de resolución	x		
7º básico	- Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones.		x	
	- Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz, a , c \in Z$			x
	- Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: - realizando tablas de valores para relaciones proporcionales - graficando los valores de la tabla - explicando las características de la gráfica - resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas	x		
	- Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: - $ax + b = c; \frac{x}{a} = b;\ a, b\ y\ c \in N; a \neq 0$ - $ax + b < c; ax + b > c; \frac{x}{a} < b; \frac{x}{a} > b;\ a, b\ y\ c \in N; a \neq 0$		x	
8º básico	- Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas: - representándolas de manera pictórica y simbólica - relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos determinando formas factorizadas			x
	- Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - utilizando tablas - usando metáforas de máquinas - estableciendo reglas entre x e y - representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo		x	
	- Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: - $ax = b; \frac{x}{a} = b, a \neq 0$ - $ax + b = c;\ \frac{x}{a} + b = c;\ ax = b + cx;\ a(x + b) = c$ - $ax + b = cx + d;\ a, b, c, d, en\ Q$		x	
	- Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones			x

	gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.			
	- Mostrar que comprenden la función afín: - generalizándola como la suma de una constante con una función lineal - trasladando funciones lineales en el plano cartesiano - determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo - relacionándola con el interés simple - utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	x		
I medio	- Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: - transformando productos en sumas y viceversa - aplicándolos a situaciones concretas - completando el cuadrado del binomio - utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas	x		
	- Resolver sistemas de ecuaciones lineales $(2x2)$ relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.	x		
	- Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in Q$ (decimales hasta la décima)			x
II medio	- Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c : (a \neq 0)$ - reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas - representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo - determinando puntos especiales de su gráfica - seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda	x		
	- Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas,		x	

	ecuaciones cuadráticas donde de la forma: - $ax^2 = b$ - $(ax + b)^2 = c$ - $ax^2 + bx = 0$ - $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$)			
	- Mostrar que comprenden la inversa de una función: - utilizando la metáfora de una máquina - representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con software educativo - utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano - calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas			x
	- Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: - por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas - identificándolo con el interés compuesto - representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo - expresándolo en forma recursiva $f(t+1) - f(t) = a \cdot f(t)$ - resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas			x
III medio	- Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.		x	
IV medio	- Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencias de exponente entero y trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.		x	

Tabla 1. Progresión de OA de álgebra en el currículum vigente previo a la pandemia y en el currículum de emergencia.

La Tabla 1 evidencia que la priorización de los OA se ha manifestado a través de todos los niveles educativos. Los OA priorizados como imprescindibles (Nivel 1) se encuentran por sobre los OA priorizados como integradores y significativos (Nivel 2) en la Educación Básica, mientras que en la Educación Media se observa un equilibrio en su distribución de priorización.

Por otra parte, los OA no priorizados en Educación Básica tiene relación con la descripción y registro de igualdad y desigualdad, resolución de ecuaciones e inecuaciones, reducción y operatoria de expresiones algebraicas. En Educación Media los OA no priorizados se vinculan al gráfico de funciones lineales, comprensión de la función inversa y cambio porcentual.

La Fig. 1 muestra la distribución de los OA priorizados y no priorizados en la Educación Básica y Media.

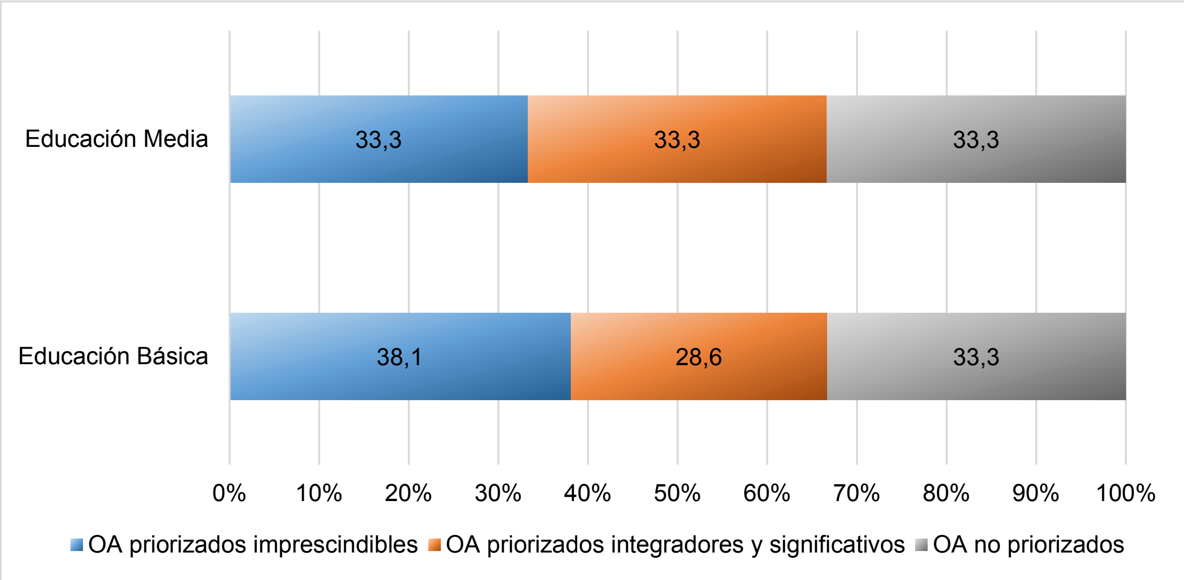


Figura 1. Distribución de los OA priorizados y no priorizados en el Eje de Álgebra.
Fuente: Elaboración propia

A partir de la Fig.1, se observa que en Educación Básica los OA priorizados como imprescindibles (Nivel 1) se encuentran por sobre los OA priorizados como integradores y significativos, con un 38,1%, es decir, aquellos que requieren ser abordados por los estudiantes para avanzar en el dominio de la matemática y que debiesen dominar al finalizar el año escolar. Mientras que la Educación Media la distribución de los OA priorizados como imprescindibles e integradores y significativos, así como aquellos no priorizados es equitativa. No obstante, en Educación Media existe un mayor porcentaje de OA priorizados como integradores y significativos (33,3%) que, en Educación Básica. Estos OA pertenecientes al Nivel 2, permiten a los estudiantes establecer conexiones tanto al interior de la asignatura de matemáticas como en otras asignaturas del currículo. Por otra parte, resulta importante no descuidar aquellos OA que no han sido priorizados, los cuales, tanto para la Educación Básica como para la Educación Media, corresponden a un 33,3%. Los OA no priorizados, de acuerdo con el MINEDUC (2020a) podrían ser desarrollados a través de otro OA que haya sido priorizado, o bien ser desarrollados en contextos informales de aprendizajes por los estudiantes, sin embargo, es importante considerar que estos OA no serían abordados de forma explícita y/o prioritaria en las escuelas, en el corto plazo.

3. Selección de recursos virtuales para la enseñanza del álgebra

En este trabajo usamos la denominación *recursos virtuales para la enseñanza*, que entendemos como objetos digitales con los cuales es posible crear ambientes virtuales o remotos, para asistir o reforzar el aprendizaje. Una de las principales características de estos recursos es que requieren de la tecnología o acceso a internet para lograr su propósito y están constituidos por al menos tres componentes internos: contenido, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización.

Para realizar la selección de los recursos, en primer lugar, revisamos diversos servidores disponibles en línea como por ejemplo: el repositorio de recursos *Illuminations* del *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (https://illuminations.nctm.org/) para los estándares de álgebra en todos los niveles K-12, o los recursos sugeridos por NRICH de la Universidad de Cambridge (https://nrich.maths.org); y los recursos disponibles en Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales de la Universidad de Utah (http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html) que pudieran ser utilizados en los niveles K-12. Para los OA no cubiertos por ausencia o falta de adecuación de los recursos disponibles, finalizamos realizando una búsqueda directa en buscadores de internet, ingresando combinaciones de palabras clave (en español e inglés) que incluyeran los elementos principales de los OA restantes en conjunto con el término "*applet*" o "recurso digital".

Tras su identificación, los recursos fueron clasificados según los OA priorizados mencionados previamente (Tabla 1) y elegidos según demostraran una mayor *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005), pues consideramos que esta herramienta de la Didáctica de la Matemática nos permite seleccionar aquellos recursos más idóneos para cada OA. Esta noción, aplicada al caso de los recursos virtuales, se entiende como el "grado en que dicho recurso reúne ciertas características que permitan clasificarlo como óptimo o idóneo para conseguir la adaptación en los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos (enseñanza)" (Ruiz-Reyes, Contreras, Ruz y Molina-Portillo, 2019, p. 3). Para la selección de los recursos hemos adaptado al eje de Álgebra los siguientes indicadores de idoneidad didáctica descritos en la Tabla 2.

Idoneidad	Descripción
Epistémica	Referida al grado en que el uso del recurso represente algún significado institucional pretendido o implementado respecto de un significado de referencia. ¿La información contenida en el recurso es correcta, es decir, no presenta errores conceptuales?
Cognitiva	Grado en que los significados pretendidos e implementados en el recurso están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. ¿Las tareas propuestas dentro del recurso son adecuadas para los objetivos pretendidos? (grados donde se propone el uso del recurso).
Afectiva	Representa el grado con que el recurso se implica con los intereses y motivaciones de los estudiantes. ¿El recurso incluye herramientas o elementos que motiven el interés del estudiante?
Interaccional	Refleja el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas donde interviene el recurso, identifican y resuelven conflictos semióticos potenciales. ¿El recurso incluye posibles interacciones o feedback para acompañar el proceso de aprendizaje del estudiante?
Mediacional	Expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos

	materiales y temporales necesarios para el aprendizaje. ¿El recurso es de fácil acceso y usabilidad para los estudiantes a los que está destinado?
Ecológica	Representa el grado en que el recurso se ajusta al proyecto educativo institucional y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. ¿El recurso incluye contextos cercanos a la realidad chilena?

Tabla 2. Indicadores de idoneidad didáctica aplicados a la valoración de recursos virtuales.
Fuente: Elaboración propia según Ruiz-Reyes et al. (2019).

3.1. Recursos virtuales seleccionados

Considerando los criterios mencionados anteriormente, seleccionamos una colección de recursos virtuales interactivos, que tienen la capacidad de potenciar positivamente el eje temático de álgebra, facilitando la implementación del currículo de emergencia chileno. Desde este prisma se plantea el uso de herramientas virtuales como alternativa educativa, favoreciendo la mediación pedagógica del proceso de enseñanza y aprendizaje (Rojas, 2015). De este modo, el uso de herramientas tecnológicas favorece un entorno interactivo de aprendizaje centrado en el estudiante y no en el profesor (UNESCO, 2004)

La Tabla 3, señala una serie de recursos digitales altamente idóneos en términos didácticos para el desarrollo de cada uno de los OA priorizados.

Nivel educativo	OA de estadística y probabilidad priorizados	Link de acceso a recurso virtual asociado al OA
1º básico	Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos…) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo. (Nivel 1)	Repetición de patrones utilizando el modelado de figuras: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Creating,-Describing,-and-Analyzing-Patterns/ Continuación de patrones repetitivos: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Extending-Pattern-Understanding/ Creación de patrones: https://es.ixl.com/math/1-primaria/crear-un-patr%C3%B3n Completación de series numéricas hasta el 20: https://www.matematicasonline.es/pequemates/anaya/primaria/primaria1/01_t/actividades/numeros/05.htm
2º básico	Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo. (Nivel 2)	Continuación de patrones numéricos de progresión: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349638793 Representación de patrones numéricos: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349650014
	Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual $(=)$ y los símbolos no igual $(>,<)$. (Nivel 1)	Identificación de igualdades y desigualdades utilizando símbolos (>, <, =): http://genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=1&pos=241 Comparar y ordenar números hasta el 10: https://es.ixl.com/math/1-

		primaria/comparar-n%C3%BAmeros-hasta-10 Comparación de números y cantidades: http://ares.cnice.mec.es/matematicasep/a/1/ca1_07.html
3º básico	Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo. (Nivel 1)	Registro de patrones numéricos: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Learning-about-Number-Relationships/ Descripción de patrones numéricos utilizando estrategias en tablas del 100: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Displaying-Number-Patterns/ Registro y descripción de series numéricas determinando el número que falta: http://genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=1&pos=243
4º básico	Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo. (Nivel 1)	Descripción de patrones numéricos por medio de tablas: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Patterns-to-100-and-Beyond/ Identificación de patrones numéricos a partir de una operación: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349677795
5º básico	Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones. (Nivel 1)	Completar y descubrir de secuencia numérica aritmética: https://es.ixl.com/math/5-primaria/completar-una-secuencia-num%C3%A9rica-aritm%C3%A9tica Completar y descubrir la secuencia numérica geométrica: https://es.ixl.com/math/5-primaria/completar-una-secuencia-num%C3%A9rica-geom%C3%A9trica
6º básico	Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones. (Nivel 2)	Uso de expresiones algebraicas para representar relaciones numéricas: https://www.matematicasonline.es/cidead/1esomatematicas/1quincena7/index1_7.htm Representación de generalizaciones entre números naturales: http://www.educa3d.com/ud/exp-alg2/story_html5.html
	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: - usando una balanza - usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación - y aplicando procedimientos formales de resolución. (Nivel 1)	Resolución de ecuaciones de primer grado: https://www.thatquiz.org/tq-0/math/algebra/ Uso de balanza en la representación de ecuaciones de primer grado: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Pan-Balance----Shapes/ Resolución de ecuaciones de primer grado utilizando balanza: https://www.matematicasonline.es/flash/balanza/balanza1.htm Resolución de ecuaciones de primer grado utilizando descomposición y

		correspondencia entre los términos de la ecuación: http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=14&pos=27
7º básico	Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones. (Nivel 2)	Utilización del lenguaje algebraico para construir y plantear ecuaciones de primer grado: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349650610 Uso de expresiones algebraicas para establecer relaciones numericas y construir ecuaciones: http://refip.accionmatematica.cl/page-recursos-interactivos-algebra-expresiones-algebraicas.php
	Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: - realizando tablas de valores para relaciones proporcionales - graficando los valores de la tabla - explicando las características de la gráfica - resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. (Nivel 1)	Resolución de problemas aplicando proporcionalidad directa: http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=14&pos=20 http://www.ceiploreto.es/sugerencias/ecuador/matematicas/5_proporcionalidad_directa/index.html Situaciones para comprender y aplicar proporcionalidad directa e inversa: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349629621 Uso de tablas de valores de proporcionalidad inversa: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1571379887386
	Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: - $ax + b = c; \frac{x}{a} = b, a, b\ y\ c\ \in N; a \neq 0$ - $ax + b < c\ ; ax + b > c\ ; \frac{x}{a} < b; \frac{x}{a} > b, a, b\ y\ c\ \in N;\ a \neq 0$. (Nivel 2)	Resolución de problemas utilizando ecuaciones: http://www.educa3d.com/ud/ecu-pri-pro-eda/story_html5.html Modelar situaciones de la vida diaria utilizando ecuaciones lineales: http://www.educa3d.com/ud/fun-lin-pro/story_html5.html
8º básico	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: - utilizando tablas - usando metáforas de máquinas - estableciendo reglas entre x e y - representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo. (Nivel 2)	Análisis de la función lineal por medio de tablas y gráfica: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8440033/datos/08/03.html Representación de una función: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8430033/datos/U11/ar_p241/index.html

	Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales (Nivel 2)	Resolución de problema sutilizando ecuaciones lineales: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8430033/datos/U11/ar_p240/index.html Modelar situaciones usando ecuaciones lineales: http://www.educa3d.com/ud/fun-lin-pro/story_html5.html
	Mostrar que comprenden la función afín: - generalizándola como la suma de una constante con una función lineal - trasladando funciones lineales en el plano cartesiano - determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo - relacionándola con el interés simple - utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas. (Nivel 1)	Representaciones gráficas de la función afín: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8430033/datos/U11/ar_p241/index.html Aplicación de la función afín en la resolución de problemas: http://www.educa3d.com/ud/fun-afi-pro/story_html5.html Traslación de funciones lineales en el plano cartesiano: https://www.matematicasonline.es/terceroeso/geogrbra/Pendiente-de-una-recta/index.html
I medio	Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: - transformando productos en sumas y viceversa - aplicándolos a situaciones concretas - completando el cuadrado del binomio - utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas. (Nivel 1)	Explorar el cuadrado de binomio a partir de su representación pictórica: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/A-Geometric-Investigation-of-(a-_-b)%5E2/ Desarrollo de productos notables: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8430033/datos/U05/ar_p122/index.html
	Resolver sistemas de ecuaciones lineales $(2x2)$ relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo. (Nivel 1)	Resolución de sistema de ecuaciones mediante representación simbólica: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Name-Letters/ Resolución de sistema de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349630132 Resolución de problemas utilizando sistema de ecuaciones: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8440033/datos/06/09.html

II medio	Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c : (a \neq 0)$ - reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas - representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo - determinando puntos especiales de su gráfica - seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda. (Nivel 1)	Explorar la representación gráfica de la función cuadrática: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Representational-Relationships-of-Lines-and-Parabolas/ Aplicación de la función cuadrática en la resolución de problemas; representación gráfica y análisis de puntos especiales: https://www.matematicasonline.es/EDUCAREX/CUARTO/funciones_cuadraticas/index.html Análisis de la gráfica de la función cuadrática: https://www.matematicasonline.es/terceroeso/geogrbra/parabolas/index.html
	Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas donde de la forma: - $ax^2 = b$ - $(ax + b)^2 = c$ - $ax^2 + bx = 0$ - $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$). (Nivel 2)	Resolución de ecuaciones cuadráticas completas: http://www.educa3d.com/ud/ecu-seg-amp/story_html5.html Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas: http://www.educa3d.com/ud/ecu-seg-inc/story_html5.html Resolución de ecuaciones de segundo grado con ayuda: http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/8440033/datos/05/04.html
III medio	Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales. (Nivel 2)	Aplicación de modelos matemáticos utilizando función logarítmica y exponencial: http://procomun.educalab.es/es/ode/view/1416349622475 Aplicación de función exponencial: https://www.geogebra.org/m/mddScAKR Modelado matemático con función exponencial y logarítmica: https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-15-19_RESOURCE/U18_L4_T2_text_final_es.html
IV medio	Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencias de exponente entero y trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda,	Aplicación de las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$: https://www.geogebra.org/m/S6NbmMht http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/unit_circle/unit_circle_right.xhtml Modelado matemático con funciones trigonométicas: http://quiz.uprm.edu/tutorials_master/fn_trig_mod/fn_trig_mod.html

	selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales. (Nivel 2)	

Tabla 3. Recursos virtuales según OA priorizados.

En la Tabla 3, podemos observar una diversidad de recursos disponibles en línea para acompañar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Cabe destacar, que la búsqueda de los recursos virtuales, ha traído consigo una sobrecarga de información para determinar qué recursos son más idóneos como materiales de clase, lo que podría resultar una tarea compleja para el profesorado. A continuación, a modo de ejemplo, se presenta el proceso de valoración de la idoneidad didáctica para algunos de los recursos propuestos, con el objetivo de esclarecer el método utilizado en la selección de recursos virtuales de calidad.

3.2. Idoneidad didáctica de los recursos

En el primer ciclo de Educación Básica, para abordar el objetivo del 1º año "Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos…) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo", priorizado en el nivel 1, se ha seleccionado el tablero interactivo Creating, Describing, and Analyzing Patterns, propuesto por el NCTM (Fig. 2). Esta herramienta plantea dos modos de uso, como es el caso de explorar con patrones de repetición (Fig. 2a) y/o atender al desafío que plantea la herramienta al reconocer un patrón predeterminado (Fig. 2b).

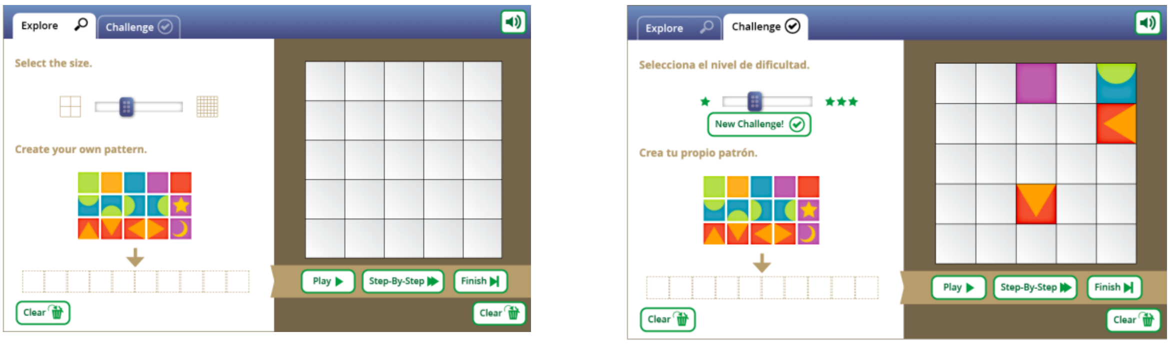


Figura 2. Tablero interactivo para crear, describir y analizar patrones: (a) modo explorar; b) modo desafío. Fuente: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Creating,-Describing,-and-Analyzing-Patterns/

Este recurso posee un alto grado de *idoneidad epistémica* pues propicia la interacción de patrones repetitivos por medio de figuras de manera correcta, utilizando el razonamiento espacial y modelado geométrico para su creación en un tablero de animación. Así también, el recurso propone crear, describir y analizar patrones que tiene estrecha relación con el OA propuesto, lo que conforma una alta *idoneidad cognitiva*. En cuanto a la *idoneidad mediacional*, el recurso es altamente competente dado que su interacción y uso es accesible para estudiantes de 1º año (6-7 años), considerando botones de acción de fácil entendimiento (seleccionar y ubicar las fichas en el tablero, reestablecer el tablero de animación) pese a que se encuentren en otro idioma (inglés), para la ejecución de este recurso en ambos modos de uso (Fig. 2a y 2b) se puede seleccionar el nivel de dificultad. De acuerdo a la *idoneidad interaccional,* esta se clasifica como alta, pues el recurso incluye interacciones de modo tal, que se pueden identificar y resolver conflictos semióticos en la creación de patrones, es decir, en caso de que el estudiante reconozca de forma errónea el patrón predeterminado que plantea la sección del desafío (Fig. 2b), el recurso identifica la falta, permitiendo al estudiante reestablecer el tablero de animación e intentarlo nuevamente. En términos afectivos, consideramos que el recurso el altamente idóneo, pues permite la interacción en el uso de patrones por medio de fichas (figuras) simulando un juego, lo que compromete el interés de los estudiantes en su desarrollo. Finalmente, la idoneidad ecológica se clasifica como medio-baja, dado que el recurso no incluye contextos cercanos a la realidad de los estudiantes, es decir, el desarrollo de la tarea se plantea sin un contexto definido.

Por otra parte, en el segundo ciclo de Educación Básica, para abordar el OA "Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: realizando tablas de valores para relaciones proporcionales", priorizado en el nivel 1 para al 7º año, se ha seleccionado un fichero interactivo (Fig. 3). Con esta herramienta es posible resolver problemas de magnitudes directamente proporcionales, en el contexto de determinar los ingredientes necesarios para el desarrollo de una receta, y luego ingresar los resultados obtenidos.

Figura 3. Fichero interactivo para el desarrollo de la proporcionalidad directa. Fuente: http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=14&pos=20

El recurso responde a una alta idoneidad epistémica, puesto que permite el desarrollo de contenido vinculado a la proporcionalidad representando de manera adecuada la relación entre magnitudes y la constante de la proporcionalidad directa. La idoneidad cognitiva es potencialmente alta, pues el tratamiento del recurso permite mostrar comprensión de la proporcionalidad directa por medio de tablas de valores para establecer relaciones proporcionales, lo que se considera adecuado para el OA propuesto. En relación a la idoneidad interaccional, se clasifica como alta, puesto que la herramienta promueve la interacción o feedback entre el recurso y los estudiantes, esto aplica al ingresar los resultados luego de resolver el problema de proporcionalidad y posteriormente realizar su comprobación, ya que el recurso señala los resultados erróneos y el número de intentos/aciertos, lo que permite al estudiantado llevar un registro de sus respuestas a modo de retroalimentación y autoevaluación. Por otra parte, el recurso presenta un uso sencillo y es de fácil tratamiento para los estudiantes a los que está destinado, lo que se considera como una alta idoneidad mediacional. En términos afectivos, el recurso presenta un idoneidad media-baja dado que no plantea elementos consistentes que motiven el interés del estudiantado. No obstante, esto dependerá de la dinámica con que se gestione la clase, puesto que el profesor puede plantear el problema como un desafío para los estudiantes, lo que podría desarrollar un mayor grado de interés. En cuanto a la idoneidad ecológica, se considera alta, pues el recurso se ajusta adecuadamente al currículo y se desarrolla en un contexto cotidiano, cercano a la realidad de los estudiantes.

En la Educación Media, más específicamente en II medio, se requiere abordar el OA priorizado en el nivel 1, "Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$: representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo". Para implementar este OA se ha seleccionado el recurso interactivo Representational Relationships of Lines and Parábolas, propuesto por el NCTM (Fig. 4). Este recurso permite explorar el efecto de coeficientes y constantes de funciones lineales y cuadráticas. En nuestro caso ahondaremos en el desarrollo de la función cuadrática.

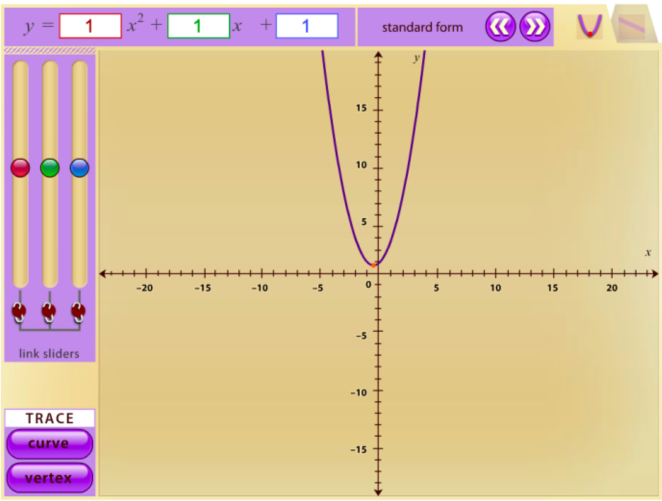


Figura 4. Relaciones representativas de líneas y parábolas. Fuente: https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Representational-Relationships-of-Lines-and-Parabolas/

En lo que respecta al análisis de idoneidad que consigue este recurso, en términos epistémicos es alta, dado que explora de manera correcta el gráfico de la función cuadrática al hacer variar los coeficientes de la función y reflejar el comportamiento de la parábola. La idoneidad cognitiva, esta también es alta, puesto que por medio del recurso es posible visibilizar la comprensión de la función cuadrática a través del análisis de su representación gráfica. En términos mediacionales, el recurso es altamente idóneo, pues su uso es de fácil manipulación a pesar de encontrarse en inglés los botones de interacción, su ejecución resulta bastante intuitiva para estudiantes de II medio (15-16 años). Por otra parte, la idoneidad interaccional que presenta el recurso es media-baja, dado que no presenta herramientas de apoyo que promuevan la interacción o feedback entre éste y los estudiantes. Sin embargo, esta situación puede ser atendida por el profesor a medida que gestiona el desarrollo de la clase. Finalmente, consideramos que tanto la idoneidad afectiva como ecológica que presenta el recurso es alta en ambos casos, ya que, por una parte, la interacción que genera el recurso en el cambio de valores de los coeficientes de la función cuadrática y las características observables de manera inmediata en la gráfica de la misma, resulta de interés para los estudiantes. Por otra parte, el recurso se ajusta de manera adecuada al currículo, permitiendo interactuar y comprender las distintas variaciones de la gráfica de la función cuadrática (concavidad, vértice, eje de simetría, valor mínimo o máximo).

4. Consideraciones finales

En este artículo hemos presentado la priorización curricular correspondiente al eje de álgebra del currículum de emergencia que está siendo implementado en Chile. A partir de dicha priorización se observa un esfuerzo por mantener los contenidos de álgebra y considerar OA priorizados en todos los niveles educativos del currículo escolar, dado que, tanto en Educación Básica como Educación Media, se han priorizado el 66,7% de los OA.

Si bien, en este escenario de cambio curricular se han priorizado contenidos esenciales para, modelizar situaciones, establecer relaciones entre números y realizar predicciones, lo que resulta beneficioso para avanzar hacia la orientación en la toma decisiones e interpretación de información en el contexto de pandemia mundial, es necesario, no descuidar en el futuro aquellos contenidos que no han sido priorizados, pese a que podrían ser abordados por otros OA priorizados. Esto último plantea un verdadero desafío para el profesorado, quienes deberán velar por una enseñanza idónea del álgebra en el ámbito escolar para lograr alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, pues el álgebra conforma una manera de pensar promoviendo una comprensión de las matemáticas (Kaput, 2000).

En este contexto, resulta primordial incentivar la enseñanza del álgebra por medio de estrategias que permitan aplicar los contenidos propuestos en este eje temático a través del uso de la tecnología y los recursos virtuales que ésta ofrece, más aún si este bloque de contenido se encuentra presente de manera longitudinal en el currículo escolar. Para ello, en este nuevo escenario de cambio en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los docentes deben contar con herramientas tanto disciplinares como didácticas que les permitan seleccionar e introducir de manera progresiva recursos idóneos, de acuerdo a las características que definen cada nivel educativo.

En este sentido, hemos realizado un análisis de acuerdo a la priorización curricular realizada en el eje de Álgebra y además aportado en la selección de recursos virtuales interactivos que buscan promover la enseñanza del álgebra tanto en la Educación Básica como en la Educación Media, dada su capacidad de adaptación a los contextos educativos que se viven en la actualidad.

Agradecimientos

Beca de doctorado en el extranjero Nº 72200447 y proyecto FONDECYT Nº 1200356, ambos financiados por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID).

Bibliografía

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth, England: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2), 1-26.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Click, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp.47-70). Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers.

MINEDUC. (2012). Bases Curriculares Matemática 1º a 6º de Educación Básica. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago, Chile.

MINEDUC. (2016). Bases Curriculares Matemática 7º de Educación Básica a II de Educación Media. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago, Chile.

MINEDUC. (2019). Bases Curriculares Matemática III y IV de Educación Media. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago, Chile.

MINEDUC. (2020a). *Fundamentos Priorización Curricular*. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago, Chile.

MINEDUC. (2020b). *Priorización Curricular Matemáti*ca. Unidad de Curriculum y Evaluación: Santiago, Chile.

Miradadocentes (2020). *Docencia durante la crisis sanitaria: la mirada de los docentes. ¿Cómo está abordando la educación remota los docentes de las escuelas y liceos de Chile en el contexto de crisis sanitaria?* Recuperado de: http://www.miradadocentes.cl/Informe-de-Resultados_Docencia_Crisis_Sanitaria.pdf

Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2020). Didácticas para la proximidad: aprendiendo en tiempos de crisis. Santiago de Chile.

Rojas, C. (2015). *Objetos virtuales de aprendizaje como herramienta para la enseñanza del álgebra en el grado de octavo de la institución educativa Ana de Castrillón.* Tesis de maestría. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Ruiz-Reyes, K., Contreras, J. M., Ruz, F. y Molina-Portillo, E. (2019). Recursos virtuales para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria. En J. M. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y Molina-Portillo, E. (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística (pp. 1-10)*. Universidad de Granada.

Vásquez, C., Ruz, F., y Martínez, M. V. (2020). Recursos virtuales para la enseñanza de la estadística y la probabilidad: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19. Tangram – Revista de Educação Matemática, Dourados - MS –*3*(2), 159-183.

Autores:

Pincheira Hauck, Nataly Goreti: Estudiante de Doctorado en la Universidad de Girona (España). Sus líneas de investigación están centradas tanto en la formación del profesorado como en la enseñanza y aprendizaje del ágebra temprana. Email: nataly.pincheira@udg.edu

Vásquez Ortiz, Claudia Alejandra: Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (España). Actualmente es Profesora Asociada de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la formación del profesorado, y la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Ha participado en numerosos proyectos de investigación sobre formación del profesorado, y didáctica de la probabilidad y la estadística. Email: cavasque@uc.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-23

Una propuesta multirregistro para la enseñanza de los números irracionales

Diana Marcela Lourido Guerrero, Teresa Pontón Ladino

Fecha de recepción: 26/08/2020
Fecha de aceptación: 15/02/2021

Resumen

Este estudio tuvo como propósito, identificar, analizar y describir los procesos de articulación de distintos registros de representación semiótica en una propuesta de enseñanza alrededor de la aproximación racional de números irracionales algebraicos. El diseño metodológico tomó como referencia elementos de la *ingeniería didáctica* en la concepción y análisis de la propuesta de enseñanza. Las variables didácticas que definieron el diseño, surgen de la revisión minuciosa de investigaciones en el campo de la educación matemática alrededor de los irracionales, así como del análisis de los elementos de la perspectiva semiótico-cognitiva. Se encontró que la coordinación en una propuesta de enseñanza de los registros numéricos y simbólicos con los registros unidimensional y cartesiano permite a los estudiantes construir razonamientos frente a la diferencia entre el valor exacto y el valor redondeado de un número, siendo esto último, condición necesaria para discriminar la diferencia entre números racionales e irracionales.

Palabras clave: pensamiento numérico, números irracionales, sistema de numeración decimal, registros de representación semiótica.

Abstract

The purpose of this study was to identify, analyze and describe the articulation processes of different semiotic representation registers in a teaching proposal around the rational approximation of algebraic irrational numbers. The methodological design took as reference elements of didactic engineering in the conception and analysis of the teaching proposal. The didactic variables that defined the design arise from the meticulous review of research in the field of mathematics education around irrationals, as well as from the analysis of the elements of the semiotic-cognitive perspective. It was found that the coordination in a teaching proposal of the numeric and symbolic registers with the one-dimensional and Cartesian registers allows students to construct reasoning against the difference between the exact value and the rounded value of a number, the latter being a necessary condition to discriminate the difference between rational and irrational numbers.

Keywords: number thinking, irrational numbers, decimal number system, registers of semiotic representation.

Resumo

O objetivo deste estudo foi identificar, analisar e descrever os processos de articulação de diferentes registros de representação semiótica em uma proposta de ensino em torno da aproximação racional de números irracionais algébricos. O desenho metodológico tomou como referência

elementos da engenharia didática na concepção e análise da proposta de ensino. As variáveis didáticas que definiram o design surgem da revisão meticulosa de pesquisas no campo da educação matemática em torno dos irracionais, bem como da análise dos elementos da perspectiva semiótico-cognitiva. Verificou-se que a coordenação em uma proposta de ensino dos registros numéricos e simbólicos com os registros unidimensionais e cartesianos permite aos alunos construir raciocínios contra a diferença entre o valor exato e o arredondado de um número, sendo este último uma condição necessária. para discriminar a diferença entre números racionais e irracionais.
Palavras-chave: pensamento numérico, números irracionais, sistema de numeração decimal, registros de representação semiótica.

1. Introducción

Aceptar que el reto de la enseñanza en la educación básica y secundaria consiste en brindar a los estudiantes los medios para comprender por sí mismos, implica pensar en aproximaciones a la educación que centren la mirada en el desarrollo de las capacidades de pensamiento de los sujetos. En este sentido, la perspectiva de la semiótica-cognitiva centra el interés de indagación más que en la apropiación de conceptos, en asistir a los estudiantes en la construcción de la autonomía intelectual a partir del desarrollo y capacidades de razonamiento, análisis y visualización. Por ejemplo, en la búsqueda por entender las dificultades asociadas a la comprensión de las matemáticas, el enfoque semiótico-cognitivo tiene como rasgo característico, determinar inicialmente el funcionamiento subyacente a los procesos matemáticos (Duval, 2016).

En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, pretender acercarse a cumplir el reto así descrito, implica aceptar como parte constitutiva de la naturaleza de esta ciencia, su aporte en términos de herramientas y procesos que permiten comprender situaciones por dentro y por fuera de ellas Niss (1997).

En consecuencia, cuando se quiere abordar el componente numérico, eje transversal en la educación matemática, estas reflexiones resultan fundamentales. Obando (2015) reconoce que el estudio de lo numérico implica un campo de problemas tan amplio, que incluso tiene que ver con el proceso humano de comprender el mundo, dicho de otra manera, el trabajo con sistemas numéricos puede impactar el desarrollo cognitivo de los estudiantes, a partir de los métodos que aporta para atender los aspectos cualitativos y cuantitativos del entorno.

Existen diferentes aproximaciones frente la investigación en el desarrollo del pensamiento numérico (Véase Konic, 2011; Reina & Wilhelmi, 2012; Romero, 1995; Romero & Rico, 1999). Estas por lo general, se enfocan en mostrar los contenidos asociados a la enseñanza de los sistemas numéricos y dan cuenta de cómo introducirlos a partir de las complejidades estructurales que estos vinculan. Si bien en estos trabajos se indaga sobre la apropiación del objeto matemático, éstos solo se quedan en la interpretación del concepto per se, descuidando el desarrollo de procesos de razonamiento numéricos (Duval, 1999).

Alrededor de la enseñanza de los irracionales, es notable la presencia de investigaciones focalizadas en el análisis de la correspondencia entre el desarrollo histórico de la noción de irracional y la aceptación por parte de los estudiantes de la existencia de estos números (Calderón, 2014; García, 2017; Reina & Wilhelmi, 2012; Sánchez & Valdivé F., 2011). En estas se aborda la red de conceptos matemáticos vinculados al tratamiento en la escolaridad de la irracionalidad, a partir de la noción de inconmensurabilidad. En consecuencia, el acercamiento a los problemas asociados a la comprensión de los números irracionales, se da a partir del análisis de las complejidades particulares de los contenidos a enseñar.

Otras investigaciones centran la mirada en el papel que juegan las representaciones en el aprendizaje de los números irracionales, cuyos resultados dejan ver que los estudiantes, incluidos los universitarios, tienen problemas para distinguir un número irracional de uno racional, dificultad que se relaciona con las comprensiones acerca de la expresión decimal de los irracionales (Sirotic & Zazkis, 2007; Zazkis & Sirotic, 2010). Desde luego, dichas dificultades se pueden comprender desde la perspectiva de Brousseau (2007) como obstáculos epistemológicos que arrastra la construcción de los decimales tanto racionales como irracionales.

En este estudio se asume el reto de considerar la enseñanza de los números irracionales a partir de la complejidad no solo de la construcción de los saberes, sino de los *modos de* funcionamiento cognitivo (Duval, 1999). De ahí que, se diseñen actividades de aprendizaje que buscan direccionar la construcción de razonamientos por parte de los estudiantes. Con lo cual se considera que la comprensión tiene como condición absolutamente necesaria, una enseñanza explicita de los distintos registros de representación, en los cuales se movilizan los objetos matemáticos, por ejemplo, aquellos asociados a los irracionales.

En el caso de las dificultades inherentes al aprendizaje de los números irracionales Adjiage (1999) las ubica como obstáculos epistemológicos, producto de la construcción hecha de los números racionales y reconoce al menos cinco de ellos. Tal identificación se realiza en términos del funcionamiento cognitivo asociado a los registros de representación semiótica movilizados en el aprendizaje de los sistemas numéricos.

- Aceptar que los números pueden funcionar como operadores y como medida.
- Reconocer la propiedad de la *densidad* en los números racionales como una posibilidad de realizar intercalaciones recursivas, de manera tal que se llegue a aproximaciones tan finas como se desee.
- Renunciar a la posibilidad de expresar eficazmente todos los números mediante una escritura posicional cifrada (*Sistema de Numeración Decimal*)
- Confusión entre valores exactos y valores redondeados de un número, expresado en el uso de *igualdades abusivas* ($3{,}14 = \pi$)

- Indicar la infinitud de las cifras no enteras de algunas representaciones numéricas.

El primer obstáculo hace referencia al significado de los números en relación con sus representaciones, es necesario entonces un trabajo específico sobre las representaciones semióticas de manera que los estudiantes no confundan el número como objeto matemático con su representación. Con relación a la *densidad*, se requiere pensar en situaciones que, relacionadas con los números racionales, le permitan al estudiante ver en esta propiedad, la posibilidad de acercarse tanto como se quiera a un número dado sea un número racional o irracional. El obstáculo asociado a la escritura decimal (propias del sistema semiótico de numeración decimal) tiene que ver con el hecho que, este sistema es solamente uno de los distintos registros disponibles para dar cuenta de los números racionales o irracionales. Los dos últimos obstáculos, se asocian con las expresiones decimales infinitas y la posibilidad de aproximarlas, como fuente de confusión para los estudiantes en relación al redondeo, en particular la posibilidad de escribir tantos decimales cómo se quiera cuando la expresión decimal es infinita.

El análisis de estos obstáculos, evidencia la necesidad de privilegiar un acercamiento a los números irracionales desde la articulación de distintos registros de representación semiótica, en el mismo sentido que existen propuestas multirregistro para la enseñanza de los números racionales tales como la de García (2016) y Pontón (2008).

Se habla de propuestas multirregistros al asumir que el aprendizaje de las matemáticas tiene la particularidad de movilizar actividades cognitivas como el razonamiento y la visualización. En virtud de la utilización de registros de representación como la lengua natural, las notaciones simbólicas y algebraicas, los variados sistemas de escritura para los números y los gráficos cartesianos. Cabe destacar que, desde esta perspectiva se denominan operaciones cognitivas como tratamiento y conversión a los procedimientos que ocurren al interior (tratamiento) y entre los registros movilizados (conversión) (Duval, 1999).

De acuerdo con lo anterior, en el desarrollo de este estudio, se centró la atención en el análisis de la necesaria articulación de los distintos registros de representación semiótica, en la enseñanza de los números irracionales algebraicos con énfasis en la propiedad de la densidad.

Estos presupuestos permiten formular el siguiente interrogante de investigación:

¿Cuáles registros de representación semiótica es posible articular en el diseño de una propuesta de enseñanza que promueva en los estudiantes una comprensión a la aproximación racional de números irracionales algebraicos?

2. Marco teórico

De acuerdo con Duval (2006), el modo de acceso a los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos de otros campos de conocimiento científico o contextos cotidianos, nunca puede ser directo mediante la percepción u otro sentido, o desde la utilización instrumental, sino necesariamente semiótico.

> La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: la lengua natural, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **significaciones** diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro (Duval, 2017, p. 59) [Negrita en el original].

El autor hace énfasis en la operación cognitiva de conversión porque busca comprender el papel de las *semiosis* en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos a partir del recurso a la variedad de los tipos de signos que pueden ser utilizados. En este sentido, al considerar la diversidad de los tipos de signos como recurso fundamental de la semiosis, se evidencian las relaciones posibles entre los diferentes sistemas semióticos y la posibilidad de convertir una representación formada en un sistema de representación en otro sistema.

Por otro lado, considerar los sistemas productores de representaciones semióticas tales como la escritura algebraica y los gráficos cartesianos resulta pertinente cuando se considera un acercamiento a los números irracionales algebraicos, pues las significaciones diferentes a las que alude Duval (2017), tienen que ver con la descripción cualitativa y cuantitativa de figuras-forma que puede hacerse en virtud del funcionamiento del registro cartesiano. Por ejemplo, cuando se asocia un número a la distancia entre un par de puntos o cuando se describen las coordenadas de un punto interesante de la curva (puntos de corte con los ejes). A continuación, se presenta en la *Tabla 1* un análisis a partir de los elementos teóricos de la perspectiva semiótica-cognitiva aspectos vinculados con la enseñanza de los números irracionales.

		OPERACIONES COGNITIVAS		
		Formación	**Transformación**	**Objetivación**
REGISTROS SEMIÓTICOS	**Numérico decimal**	Las marcas corresponden a los dígitos que se organizan a partir del valor posicional. El infinito se marca con puntos suspensivos	Al interior del registro *el redondeo*, aparece como un tratamiento en un solo sentido y funciona respetando las reglas del valor posicional.	Significante operatorio de un número irracional.
	Numérico fraccionario	La escritura en fracción continua se da a partir de infinitas sumas parciales en el denominador. El infinito se marca con puntos suspensivos	Posibilita la conversión al registro numérico decimal al permitir que se pueda escoger una suma parcial y con esto se obtiene un valor aproximado del número irracional.	Aritmetización de los procesos infinitos.
	Algebraico	Números y letras que representan variables, que se combinan mediante los símbolos +, -, ^, * indicando operatividad	Permite encontrar expresiones equivalentes al interior del mismo registro (tratamiento) mediante factorizaciones y descomposiciones.	Continuo numérico. Análisis de las funciones de valor real.

	Las unidades significantes de la representación algebraica se constituyen en variables categoriales que permiten describir en el *registro cartesiano* características de las figuras-forma	Raíces de una ecuación

Tabla 1. Análisis de las operaciones cognitivas promovidas por registros semióticos asociados a la aprehensión de los números irracionales. Fuente: Elaboración propia.

Otro aspecto interesante que conviene señalar es que de acuerdo con Adjiage (1999; 2007) los *truncamientos* y *el redondeo* principales tratamientos del sistema de numeración decimal resultan de la conversión asociada a las dilataciones o variaciones sobre la *escala* de una línea graduada (*registro unidimensional*). Con lo cual la asociación punto-número resulta de procedimientos finitos en el sentido expresado por Coriat y Scaglia (2000).

En últimas, lo que se quiere establecer es que la escritura de los números, según el significante operatorio al cual se quiera se hacer referencia, dependen sobre todo de las posibilidades de los sistemas en el cual estos números se representan, no tanto del número mismo.

3. Diseño Metodológico

Al considerar las particularidades que implica un proyecto centrado en la enseñanza se requirió tomar algunos elementos de *la ingeniería didáctica* asociados a las fases expuestas por Artigue et al. (1995), metodología ampliamente usada en la investigación en educación matemática. Este acercamiento permitió en el ejercicio investigativo, establecer la ruta metodológica del diseño de la propuesta de enseñanza. De los *análisis preliminares* se tomó en consideración *la dimensión cognitiva y* la fase de *concepción y análisis a priori*.

De acuerdo con Artigue et al. (1995) en el análisis a priori “se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado” (p. 45). Por esta razón en este punto se describieron los razonamientos que se esperaban de los estudiantes en la solución de las tareas propuestas, intentando mostrar con esto que la aparición de tales razonamientos o comportamientos plausibles, es producto de la puesta en práctica de los conocimientos contemplados por la situación. En la construcción del análisis *a priori*, se determinaron variables de diseño orientadas a hipótesis sobre la funcionalidad cognitiva de los elementos que componen las situaciones y tareas. A partir del análisis de estudios anteriores y con base al marco teórico de referencia, se definieron cinco categorías para el diseño, las cuales permitieron establecer los criterios de funcionalidad cognitiva y el alcance disciplinar de la propuesta de enseñanza.

Categorías	Descripción de las variables asociadas
Aspectos disciplinares: Conceptos matemáticos	Sistema de numeración decimal Números racionales Propiedad de la densidad en Q y R Números irracionales algebraicos
Naturaleza de la recta numérica	Tratamientos sobre el registro unidimensional que permiten establecer la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de un número real. Encajonamientos y completitud.

	Conmensurabilidad e Inconmensurabilidad.
Entrada algebraica	Significados de los números irracionales que emergen del análisis cualitativo de relaciones y funciones.
Funcionalidad cognitiva	El rol que cumplen los procesos de transformación de representaciones en la comprensión de los estudiantes.
Coordinación de distintos registros de representación semiótica	Registros: unidimensional, numérico, simbólico algebraico, cartesiano y lengua natural.

Tabla 2. Categorías seleccionadas para el diseño de las situaciones.

4. Resultados

La propuesta de enseñanza diseñada permite a los estudiantes ir construyendo comprensiones acerca del *sistema de numeración decimal* (escritura posicional cifrada), *los números racionales, la propiedad de la densidad y los números irracionales*. Se espera que la construcción de las comprensiones mencionadas, surja como producto de la *funcionalidad cognitiva* asociada a la *coordinación de los registros numéricos y simbólicos, con los registros unidimensional y cartesiano*.

Situaciones	Propósitos	Aspectos disciplinares	Tareas e ítems asociados
S1: Identificando la escala y las características de la expresión decimal	Establecer la relación existente entre la escala de la recta y las características de las expresiones decimales de los números ubicados sobre ella	Sistema de numeración decimal Números racionales Propiedad de la densidad en Q Encajonamientos Conmensurabilidad	S1T1: 4 consignas S1T2: 3 consignas
S2: Dilatación sobre líneas rectas graduadas	Ampliar comprensiones acerca del SND al introducir encajonamientos sobre rectas cuya escala es una potencia de 10.		S2T1: 2 consignas S2T2: 2 consignas
S3: Distintas escalas y redondeo	Definir criterios para establecer el valor redondeado de un número	Propiedad de la densidad en Q	S3T1: 4 consignas
S4: Aproximaciones y relaciones	Reconocer que las aproximaciones racionales a los números irracionales emergen de tratamientos sobre registros numéricos y algebraicos	Números irracionales algebraicos Relaciones Inconmensurabilidad	S4T1: 2 consignas S4T2: 5 consignas S4T3: 4 consignas
S5: Aproximaciones y funciones	Reconocer que los números irracionales pueden describir características de funciones cuadráticas	Funciones Encajonamientos	S5T1: 2 consignas S5T2: 2 consignas S5T3: 3 consignas S5T4: 1 consignas

Tabla 3. Descripción de la propuesta de enseñanza

A continuación, se describen y analizan algunas de las tareas que componen la propuesta diseñada.

4.1. Situación 1: identificando la escala y las características de la expresión decimal

Consigna 1 de la tarea 1 (S1T1-1). Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

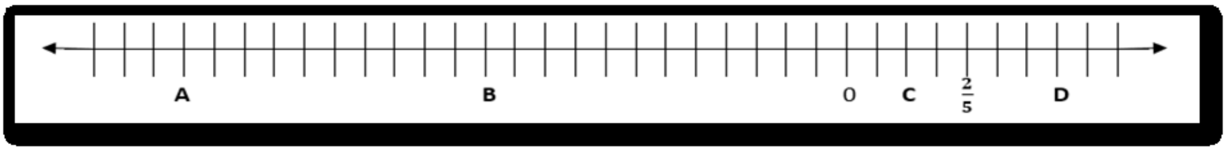


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que "$\frac{1}{10}$" tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina "escala".

Se ilustra el procedimiento en la

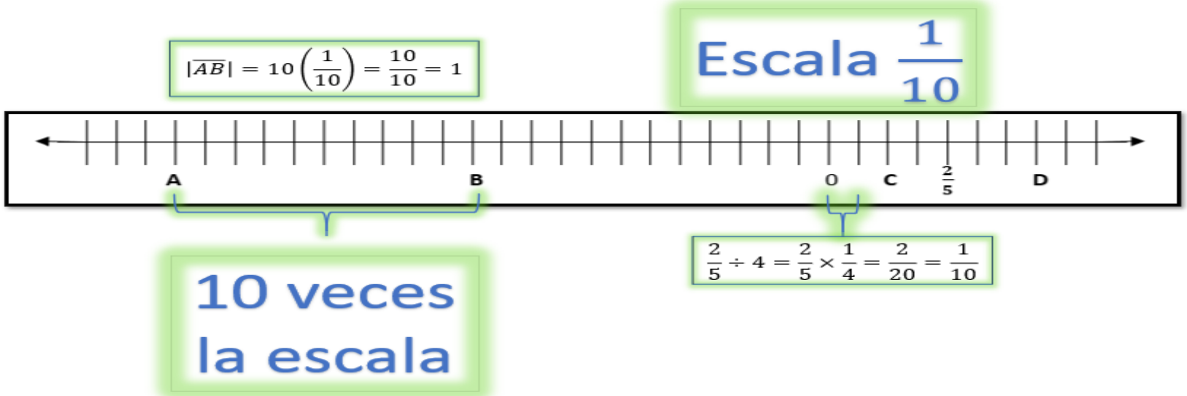


Figura 2.

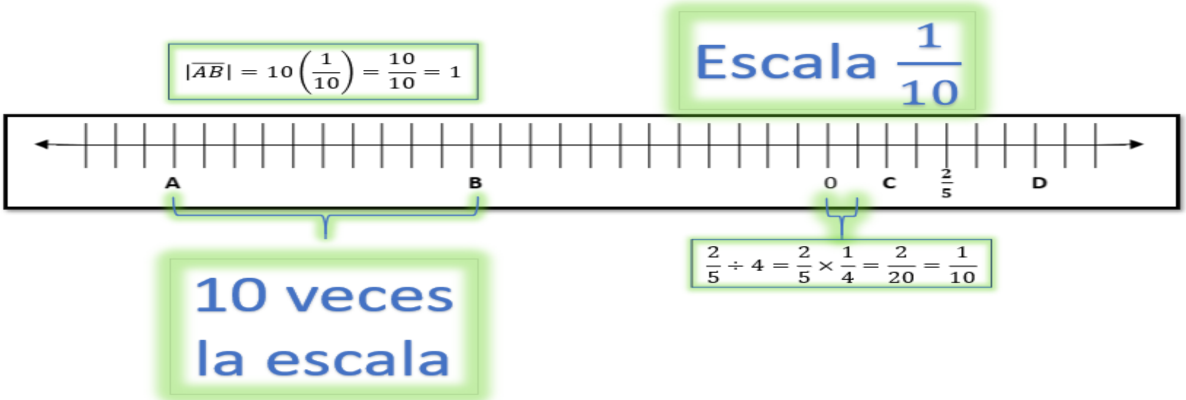


Figura 2 Procedimiento S1T1-1

Conviene señalar que los estudiantes pueden elegir representaciones numéricas decimales para realizar los tratamientos aquí mencionados, debido a la finitud de tales representaciones decimales, la exactitud de los resultados sería equivalente.

Consigna 3 tarea 1 (S1T1-3). Con el desarrollo de esta actividad se hace énfasis en la necesidad de encontrar equivalencias, con el fin de establecer las representaciones numéricas que pueden ubicarse de manera exacta sobre las graduaciones de la recta (Consigna 1 **de la tarea 1 (S1T1-1).** Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

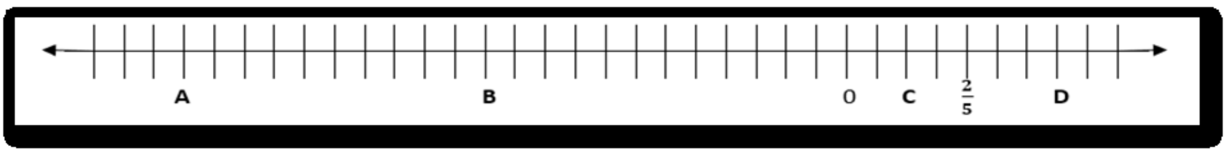


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que “$\frac{1}{10}$” tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina “escala”.

Se ilustra el procedimiento en la

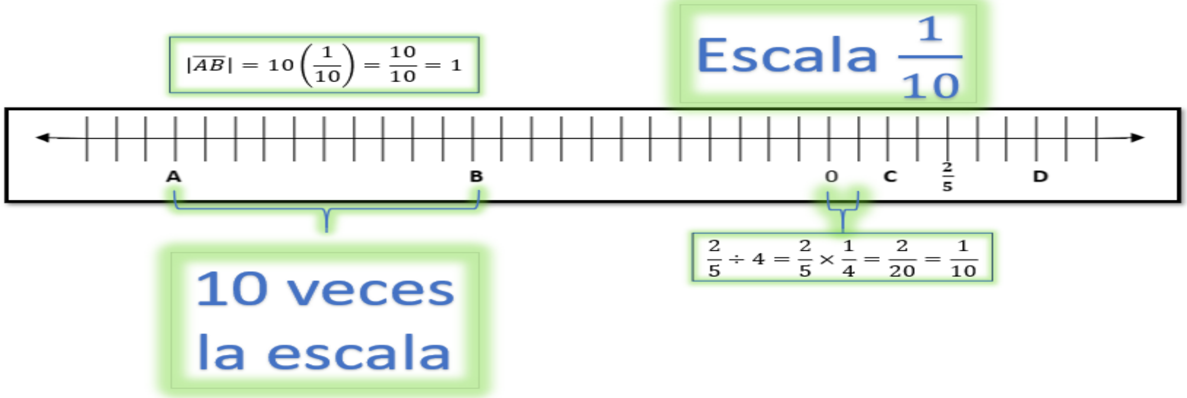


Figura 2.

), para ello se dan representaciones numéricas en distintos registros ($-2\frac{3}{5}$; $tres\ centésimas$; 0.20; $-2{,}3$ ...; $\sqrt{\frac{64}{100}}$; 6×10^{-4}; $\frac{6}{4}$).

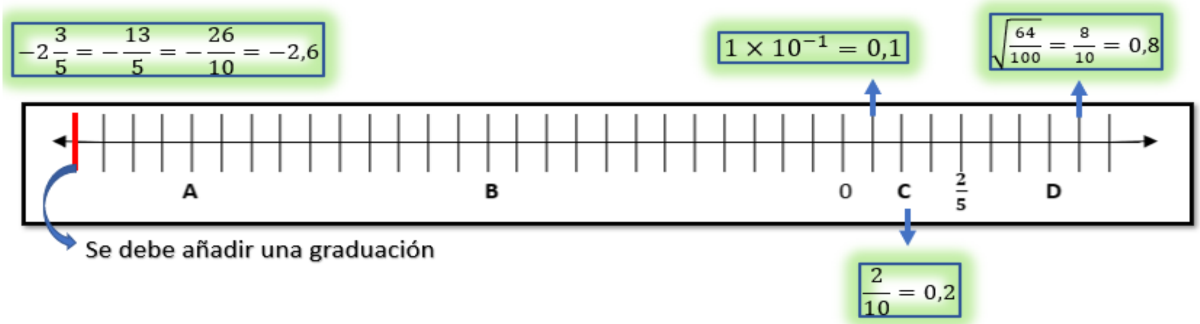


Figura 3. Equivalencias S1T1-3

Por ejemplo, $\sqrt{\frac{64}{100}}$ puede ubicarse de manera exacta sobre la recta porque al hacer el tratamiento numérico se encuentra una representación fraccionaria que coincide con la escala de la recta dada. No es el caso, de *tres centésimas* dado que su representación numérica decimal no corresponde a un número entero de veces de la escala.

Consigna 4 tarea 1 (S1T1-4). Esta actividad que cierra la tarea 1, busca que los estudiantes concluyan acerca de las características de las representaciones numéricas decimales de los puntos asociados a las graduaciones.

En este punto se espera que el estudiante haya comprendido que la escala de la recta depende tanto de las graduaciones sobre la recta, como de los puntos de referencia dados. Lo cual significa que las representaciones numéricas, encontradas a partir de una relación multiplicativa con la escala (número entero de veces la escala) tienen la misma forma que la representación numérica decimal de la escala o tienen la misma forma de los puntos de referencia.

Para el caso de la recta que nos ocupa (**Consigna 1 de la tarea 1 (S1T1-1).** Con esta actividad se tiene la intención que los estudiantes tomen consciencia del hecho, que una vez que se tiene la escala, puede encontrarse la distancia entre pares de puntos dados.

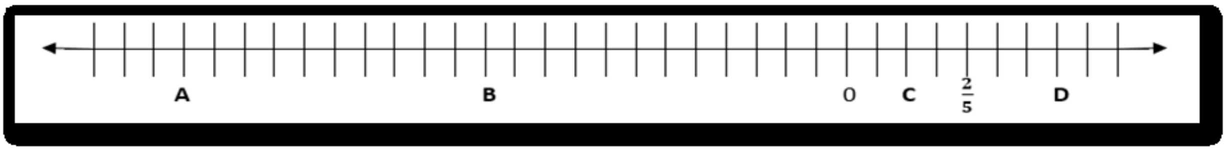


Figura 1 Recta graduada S1T1

Al analizar la recta (**Figura 1**), se observa que los segmentos que gradúan la línea recta determinan particiones congruentes, si cuatro de están particiones corresponden a $\frac{2}{5}$, la medida correspondiente a una partición se encuentra dividiendo $\frac{2}{5}$ entre 4. Con este resultado, se obtiene la escala determinada por las graduaciones ($\frac{2}{5} \div 4 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$). Teniendo la medida de la escala, es posible establecer las distancias entre los puntos dados, aplicando una relación multiplicativa, $\frac{1}{10}$ veces las particiones que pueden contarse de un punto a otro.

Nótese que "$\frac{1}{10}$" tiene múltiples significados. Uno de ellos refiere a la longitud de un segmento; otro refiere al número asociado a un punto; el último, refiere a lo que acá se denomina "escala".

Se ilustra el procedimiento en la

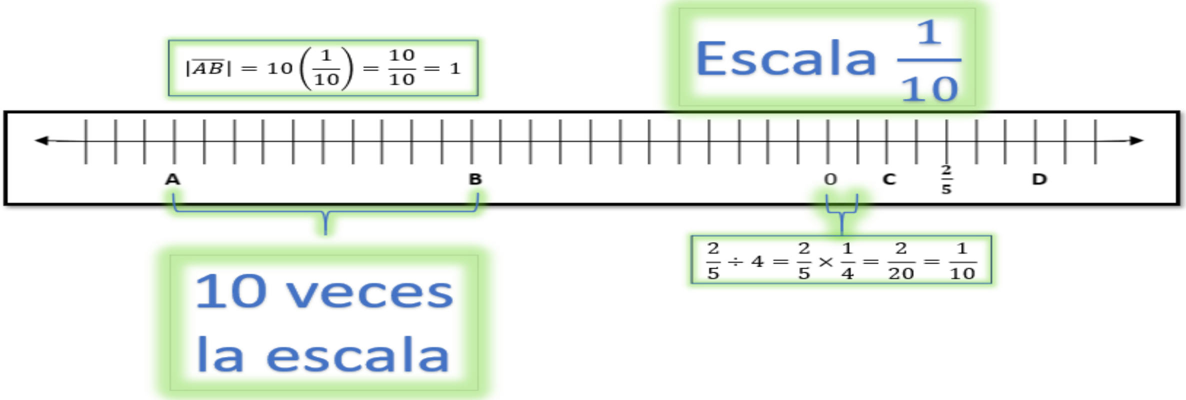


Figura 2.

) se espera que el estudiante pueda concluir que todas las representaciones numéricas ubicadas de manera exacta sobre las graduaciones son enteras (caso del 0 como punto de referencia) o tienen solo una cifra decimal no entera (caso de la escala 0,1).

Situación 1 tarea 2 (S1T2). Se aborda el estudio de las representaciones numéricas decimales infinitas y periódicas.

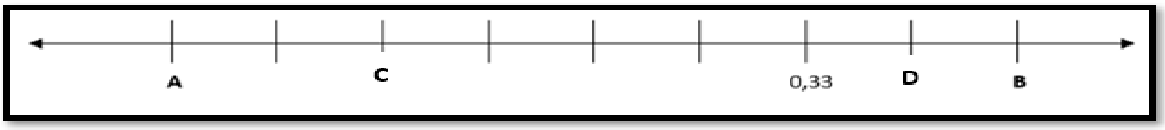
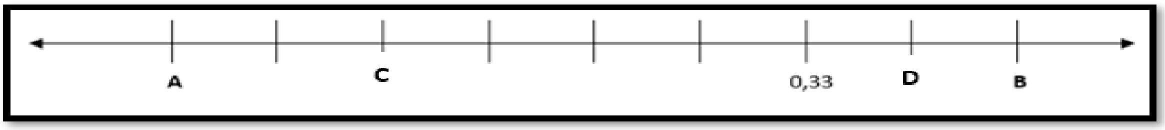


Figura 4. Recta graduada S1T2

Consignas 1, 2 y 3 tarea 1 (S1T2-1, S1T2-2, S1T2-3). En estas consignas se asigna -2 como el número que corresponde al punto A en la primera consigna se solicita a encontrar la medida de la escala, en la segunda consigna se pide encontrar las representaciones numéricas fraccionarias y decimales de los *puntos B, C* y *D* de la recta



(***Figura*** **3**) usando para ello la escala determinada. la tercera y última consigna de esta tarea tiene que ver con las conclusiones acerca de las características de las representaciones numéricas decimales de los números ubicados sobre las graduaciones de la recta.

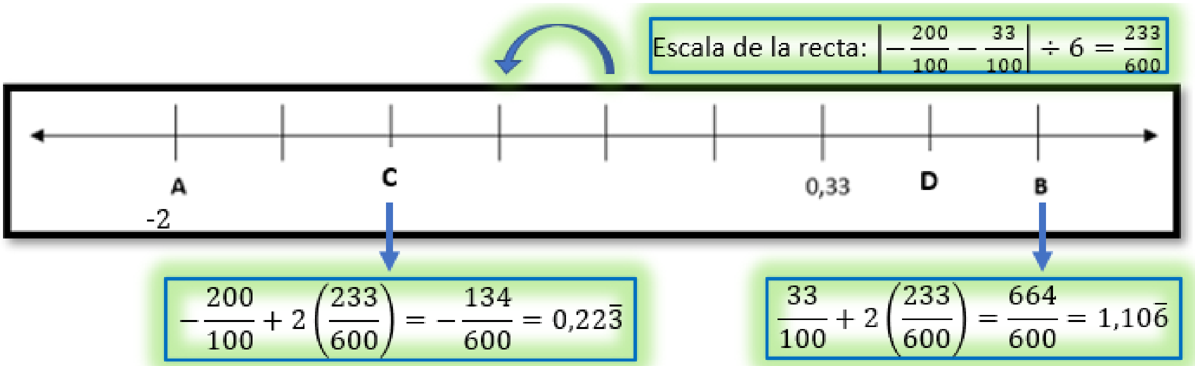
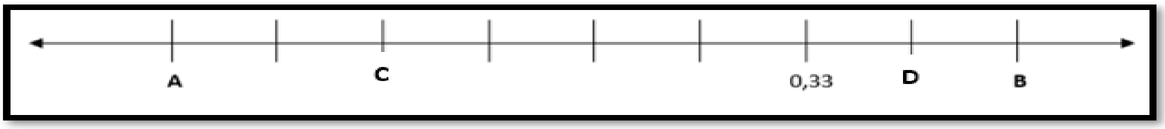


Figura 5. Procesos de homogenización S1T2

Dar respuesta a esta tarea, implica poner en juego procesos de homogenización, debido a que la medida de la escala resulta al dividir entre 6 (cantidad de particiones congruentes de un extremo a otro) el valor absoluto de la diferencia entre -2 y $0{,}33$. Como la representación numérica decimal de la medida de esta escala ($\frac{233}{600}$) tiene infinitas cifras no enteras, se espera que los estudiantes encuentren más pertinente realizar los tratamientos aritméticos con las representaciones numéricas fraccionarias para dar cuenta y razón de la segunda consigna. La ausencia del 0 como punto de referencia hace que los signos negativo o positivo de las representaciones numéricas surjan de los tratamientos aritméticos.

Todas las representaciones numéricas de los puntos indicados sobre la recta



(Figura) se encuentran adicionando o sustrayendo de alguno de los puntos de referencia $(-2\ o\ 0{,}33)$, tantas veces la escala como particiones haya entre el punto

de referencia y el punto del cual se desea encontrar su representación numérica. Tal es el caso de la representación numérica del punto B, que puede encontrarse adicionando a $0{,}33$ dos veces la medida de la escala

$(0{,}33 + 2\left(\frac{233}{600}\right) = \frac{33}{100} + \frac{167}{300} = \frac{266}{300} = 0{,}88\bar{6})$.

En cuanto a las características de las representaciones decimales se puede afirmar que, solo son finitas las representaciones que corresponden a los puntos de referencia dados. Como se pudo evidenciar en la operación anterior, las demás representaciones numéricas son infinitas periódicas mixtas.

4.2. Situación 2: Dilatación sobre líneas rectas graduadas

Situación 2 tarea 1 (S2T2-1). En esta tarea se diseñaron dos consignas asociadas a la búsqueda de un número que está entre otro par de números. Se presentan tres rectas con particiones que definen graduaciones, visualmente similares, pero con escalas distintas.

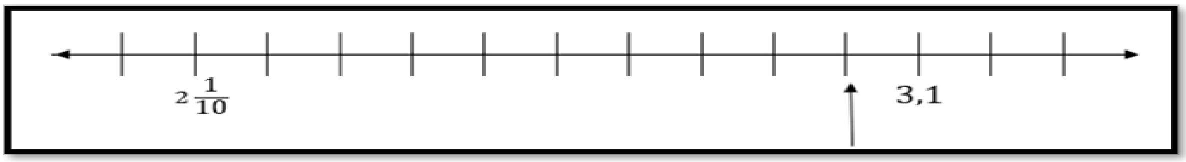


Figura 3

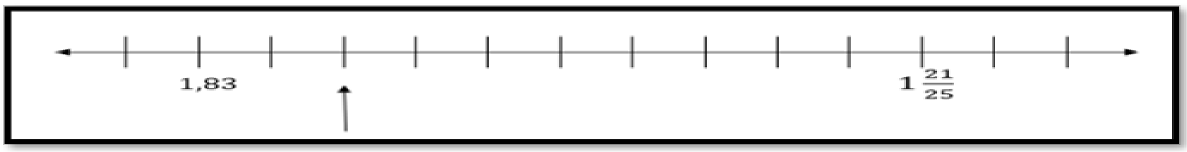


Figura 4

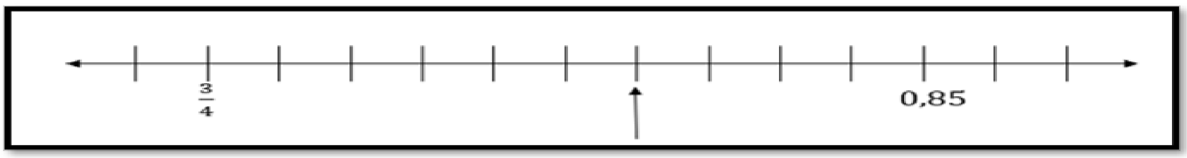


Figura 5

Figura 6. Rectas graduadas con distintas escalas (S2T1)

Se espera que, en el desarrollo de esta tarea, emerja la necesidad de encontrar las equivalencias que hacen homogéneas las representaciones numéricas de los extremos. Al igual que en la situación 1, las representaciones numéricas de los puntos indicados por flechas se pueden asignar adicionando o sustrayendo del extremo correspondiente, tantas veces la escala como particiones hay entre el extremo y el punto indicado por la flecha.

4.3. Situación 3: distintas escalas y redondeo

Esta situación pone en un primer plano la propiedad de la densidad de los números racionales, al presentarla como la posibilidad recursiva de hacer aproximaciones tan finas como se quiera de acuerdo a las escalas dadas o creando una nueva por subdivisión.

Figura 7. Dos escalas en una misma recta (S3T1)

Consigna 1 tarea 1 (S3T1-1). En esta consigna se espera que los estudiantes encuentren las representaciones numéricas correspondientes a los puntos A y B. El procedimiento para hacerlo, es el mismo que se aplicó en tareas anteriores. Sin embargo, encontrar la medida de la escala determinada por los puntos, supone que el estudiante sea capaz de reconocer que el segmento ($\overline{AB}$) cuyos extremos son los puntos A y B es congruente el segmento que tiene como extremo inicial el punto correspondiente a 1 y extremo final el punto A; al igual que es congruente con el segmento cuyo extremo inicial es el punto B y su extremo final es el punto correspondiente al número 2.

Conviene señalar aquí, que el hecho de que no haya puntos sobredimensionados correspondientes a los números 1 y 2 dificulta la consigna en tanto se hace necesaria una discriminación visual que omita el "ruido" producido por la graduación en segmentos y además se establezca la congruencia entre las particiones definidas por los puntos.

Consignas 2 y 3 tarea 1 (S3T1-2, S3T1-3). En estas consignas se solicita encajonar a los puntos A y B respectivamente, entre el par de puntos más próximos indicados por la graduación en segmentos.

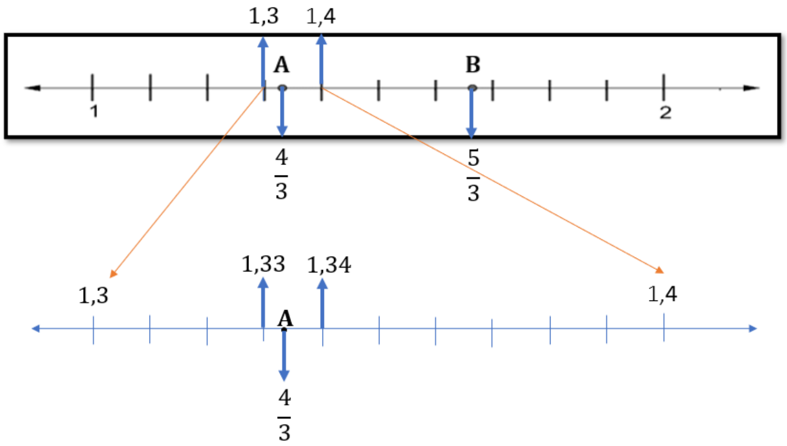


Figura 8. Tratamiento de dilatación para encajonar el punto A

Nótese que mediante este tratamiento se consigue una aproximación a las décimas de la expresión decimal correspondiente a $\frac{4}{3}$. Las consignas se orientaron a

que los estudiantes produjeran este tipo de razonamientos para los puntos A y B con el fin de ir construyendo la idea de la diferencia entre el valor exacto y el valor redondeado de un número.

Debido a que la escala indicada por los segmentos es $0{,}1$, encajonar los puntos

A y B de esta forma equivale a aproximar por exceso y por defecto, puntos cuya representación numérica decimal es infinita y periódica, saber $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$.

Consigna 4 tarea 1 (S3T1-4). En esta última consigna de la tarea 3 se solicita hacer un tratamiento de dilatación, subdividiendo la escala en diez partes de igual medida, con la intención de determinar si esta nueva graduación permite ubicar de manera exacta el punto B. Con esta subdivisión se puede obtener una aproximación por exceso y por defecto de la representación numérica del punto B en las centésimas tal encajonamiento exhibe que en esta nueva graduación de la recta el punto B no puede quedar ubicado de manera exacta.

4.4. Situación 4: aproximaciones y relaciones

En esta situación se agrupan tres tareas en las cuales se estudian de forma explícita representaciones numéricas que corresponden a números irracionales. Como su nombre lo indica el énfasis se da, en las aproximaciones racionales a los números irracionales que emergen de tratamientos en registros numéricos y algebraicos.

Situación 4 tarea 1 (S4T1). Esta tarea que se compone de dos consignas hace énfasis en tratamientos al interior de registros numéricos en la primera consigna se pone en consideración el funcionamiento del sistema de numeración decimal al mostrar el comportamiento de las cifras decimales no enteras de números irracionales. Mientras que, la segunda consigna centra la mirada en los razonamientos que permiten asociar representaciones numéricas de racionales e irracionales a puntos sobre la recta.

Consigna 1 tarea 1 (S4T1-1). En esta consigna se indica un tratamiento al interior del registro numérico que permite aproximar por exceso y por defecto al número $\sqrt{2}$, se pide usar el mismo tratamiento para encontrar un encajonamiento similar para los números $\sqrt{3}$ y $\sqrt{18}$.

	Encajonamiento ($\sqrt{2}$)
A menos de una décima	$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
A menos de una centésima	$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
A menos de una milésima	$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
A menos de una diezmilésima	$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
A menos de una cienmilésima	$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$
…	…

Tabla 4. Encajonamiento a las cienmilésimas de $\sqrt{2}$

Este tratamiento numérico resulta de reconocer a $\sqrt{2}$ como la representación del número real positivo cuyo cuadrado es 2. Para encontrar las "unidades de orden inferior" que corresponden a las cifras no enteras de la representación numérica decimal, es necesario ir elevando al cuadrado el número redondeado (a las décimas, centésimas, etc.) para encontrar los extremos del intervalo que encajona a $\sqrt{2}$ respectivamente. Lo anterior se puede en evidenciar en la ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**4** el extremo inferior del encajonamiento a las milésimas tiene a 4 y no a 3 en su última cifra no entera, justamente porque al elevar al cuadrado $1,414$ se obtiene un número menor que $\sqrt{2}$ pero más cercano a este, que si se elevara al cuadrado $1,413$. Los puntos suspensivos al final de la tabla indican que este proceso de acotación numérica puede seguir desarrollándose desde las diferentes subunidades del sistema de numeración decimal, identificándose cada vez nuevas cifras no enteras en la representación numérica decimal y por tanto es una forma de hacer referencia a las infinitas cifras decimales que tiene la representación numérica de $\sqrt{2}$.

Situación 4 tarea 3 (S4T3). Esta tarea corresponde a la entrada algebraica de los números irracionales. Se compone de cuatro consignas que tienen la intención de asignar el significado de distancia entre puntos a los números irracionales. Continua el estudio del sistema de numeración decimal, al hacer referencia a medidas aproximadas y caracterizar la representación numérica decimal de un número irracional.

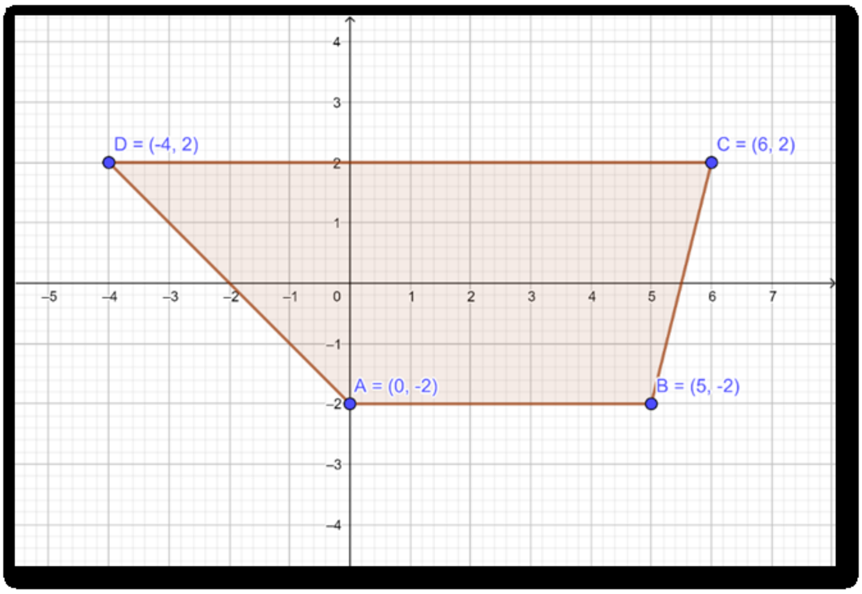


Figura 9. Trapecio ABCD correspondiente a S4T3

Destaca la figura-forma trapecio ABCD sobre el fondo cuadriculado. De acuerdo con el funcionamiento del registro cartesiano, las coordenadas de los puntos A, B, C y D, permiten hacer uso de tratamientos algorítmicos para encontrar la medida de la longitud de los lados del trapecio.

Consigna 2 tarea 3 (S4T3-2). Esta consigna permite indagar por la exactitud de las medidas encontradas correspondientes a los lados del trapecio $ABCD$. Las longitudes de los lados paralelos del trapecio tienen representaciones numéricas decimales enteras, debido a que la medida de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se puede expresar como una cantidad entera de veces de la escala del eje X (correspondiente a una unidad como se había establecido en la consigna anterior) por tanto, sus medidas son exactas.

La longitud de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ corresponden a números irracionales, como se podrá apreciar en la **Figura** .

$$d(A,D) = \sqrt{(0-(-4))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2(16)} = \mathbf{4\sqrt{2}} \approx \mathbf{5,6}$$

$$d(B,C) = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \mathbf{\sqrt{17}} \approx \mathbf{4,1}$$

Figura 10. Tratamiento para encontrar las distancias S4T3-2

A partir de los análisis precedentes se podrá concluir que, la exactitud depende la representación numérica elegida para referirse a la medida de cada lado del trapecio y en consecuencia del perímetro del mismo.

4.5. Situación 5: aproximaciones y funciones

En esta situación que agrupa cuatro tareas, se aborda el significado de número irracional algebraico como abscisa de los puntos de corte con el eje X del grafo de una función cuadrática. En consecuencia, el énfasis se da en los tratamientos algebraicos, que permiten encontrar representaciones numéricas de las coordenadas de los puntos que describen características de las funciones cuadráticas.

Consigna 1 tarea 2 (S5T2-1). En esta consigna se pide encontrar la forma canónica de la representación simbólica algebraica correspondiente a tres funciones cuadráticas de las cuáles se dan las representaciones cartesianas además de la representación simbólica algebraica polinómica ($q(x) = x^2 - 7x + 12$, $r(x) = 6x^2 - 3x - 3$, $s(x) = 18x^2 - 9x - 2$).

Consigna 2 tarea 2 (S5T3-2). Aquí se piden las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y se solicita establecer si las representaciones numéricas correspondientes a las abscisas de estos puntos de corte son aproximadas o exactas. Cabe anotar que todas las abscisas de estos puntos corte son números racionales.

Debido a que cuentan con la representación simbólica algebraica en su forma canónica, se espera que en la solución de este punto se dé un tratamiento de orden algebraico. Sin embargo, el acceso a las representaciones gráficas constituye un soporte que permite decidir cuándo es necesario emplearlo. Para ilustrar este aspecto a continuación se presenta los razonamientos esperados en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

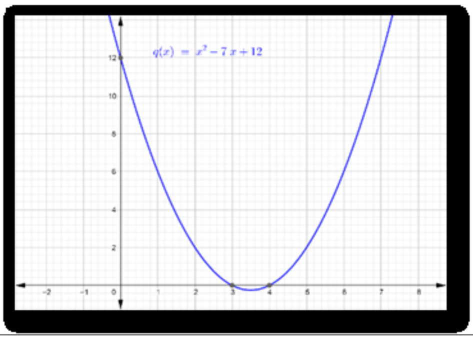
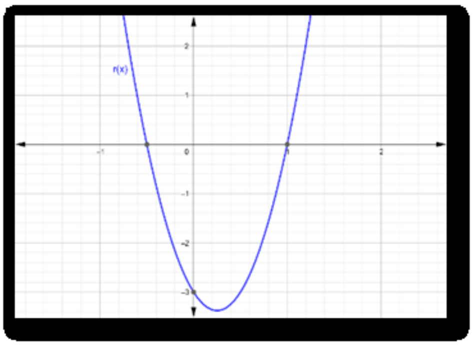
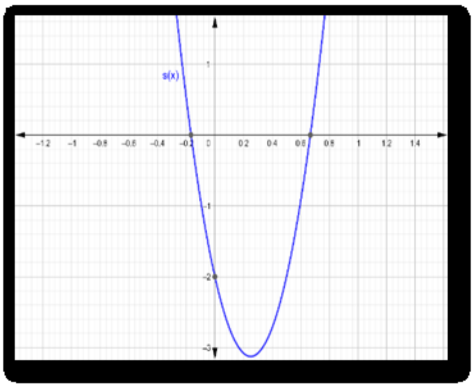
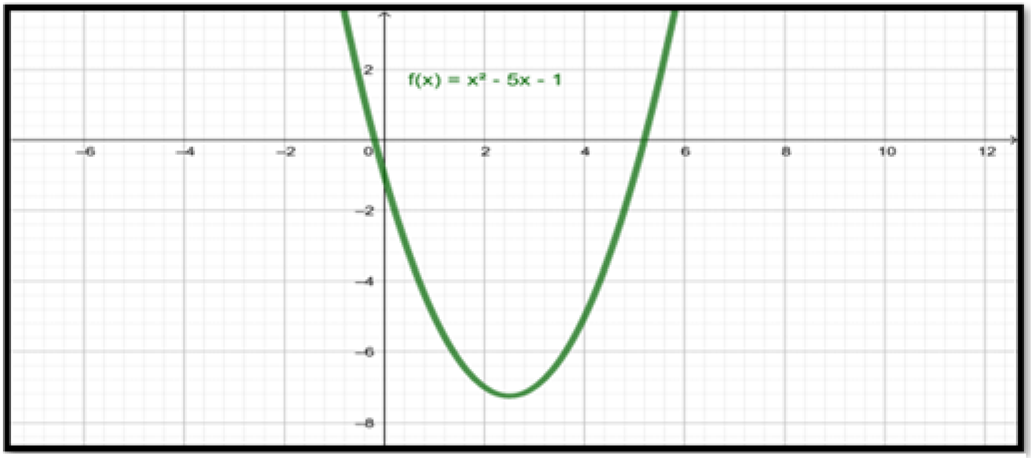
Grafo de la función cuadrática	Representación algebraica y razonamientos esperados
	Los puntos sobredimensionados del grafo de la figura-forma coinciden sobre el eje X de manera exacta sobre 3 y 4. En consecuencia se puede establecer que los puntos de corte de q son (3, 0) y (4, 0).
	Un punto sobredimensionado del grafo de la figura forma coincide con el eje X de manera exacta sobre 1. El otro punto sobredimensionado de la figura-forma que coincide con el eje X, divide al segmento unidad (ubicado a la izquierda de cero) en dos partes congruentes; con lo cual las coordenadas de los puntos de corte de r) son $(-\frac{1}{2}, 0)$ y (1,0).
	Cabe anotar que esta figura-fondo presenta una característica visual novedosa con respecto al resto. La graduación del eje X se designa mediante representaciones numéricas decimales con cifras no enteras. En consecuencia, invita a caracterizar como aproximada la representación numérica decimal correspondiente a la abscisa de ambos puntos corte. Tratamiento algebraico $s(x) = 18\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ De $s(x) = 0$ se obtienen las abscisas de los puntos de corte: $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{3}$

Tabla 5. Razonamientos correspondientes al ítem S5T3-2

Situación 5 tarea 3 (S5T3). Las tres consignas que componen esta tarea, se refieren al uso específico de tratamientos algebraicos, para encontrar los puntos de corte con el eje x de una función cuadrática de la cual se tiene su representación simbólica algebraica en forma canónica y su representación cartesiana. La particularidad en esta tarea es que las abscisas de los puntos cortes pedidos son números irracionales. En el caso de la abscisa positiva su significado se asocia al número de oro. Finaliza esta tarea con la solicitud de las características de la representación numérica decimal de las abscisas de los puntos de corte encontrados.

Conviene señalar que en las características de la figura-fondo no aparecen indicadores, distintos a la cuadricula, que inviten a pensar sobre la posibilidad de acercarse a un razonamiento visual para dar cuenta de la tarea.

Situación 5 Tarea 4. En la única consigna que compone esta tarea, se solicita encontrar la fracción continua de las raíces positivas de tres ecuaciones ($x^2 - 2x - 1 = 0$, $x^2 - 3x - 1 = 0$, $x^2 - 4x - 1 = 0$). También, se solicita, usar la fracción encontrada para establecer una aproximación de la raíz correspondiente, teniendo en cuenta hasta el tercer nivel de la fracción continua.



$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5\ldots}}}}}$$

$$x^2 - 5x - 1 = 0$$
$$x^2 - 5x = 1$$
$$x(x-5) = 1$$
$$x - 5 = \frac{1}{x}$$
$$x = 5 + \frac{1}{x}$$

Del gráfico (figura 17) observamos que x≠0

Como puedes ver este proceso continuará indefinidamente, porque x está escrito en términos de si mismo.
Tomemos por ejemplo una aproximación que tome en cuenta hasta el tercer nivel, allí tendríamos

$$5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$$

$$5 + \frac{6}{31} = \frac{161}{31}$$

$$5 + \frac{31}{161} = \frac{836}{161} \approx 5{,}1925\ldots$$

Figura 11 Tratamiento algebraico para encontrar la fracción continua S5T4

La complejidad de esta tarea se encuentra en la conversión del registro numérico fraccionario al registro decimal, pues como se evidencia en, la Figura 9 deben "omitirse" los demás niveles para adicionar al número entero el reciproco de la fracción que corresponde al tercer nivel, luego hallar el reciproco de esa adición y adicionarlo con el entero del nivel superior, hasta llegar al primer nivel. Pese a la complejidad de esta conversión decidió incluirse en el diseño una actividad que permitiera el acercamiento a este registro fraccionario, pues puede aportar en la comprensión del comportamiento de las cifras decimales no enteras de la representación numérica decimal de irracionales algebraicos.

Bibliografía

Adjiage, R. (1999). *L ' expression des nombres rationnels et leur enseignement initial* (Université Louis Pasteur). Recuperado de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012146

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149–175. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (1a ed.; D. Fregona, Ed.). Libros Zorzal.

Calderón R., N. O. (2014). *Diferentes construcciones del número real* (Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/46409/

Coriat, M., & Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *18*(1), 25–34.

Duval, R. (1999). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (2da ed.; M. I.D., Ed.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *91*(1), 143–168.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Traducción). Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Duval, R., & Saénz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas seleccionadas*. Editorial Universidad Distrital

Francisco José de Caldas.

García, H. (2016). *Propuesta Multirregistro para la conceptualización de los procesos de homogenización y equivalencia de las representaciones fraccionarias*. Universidad Nacional de Colombia sede Palmira.

García Moreno, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. Universidad del Valle.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Universidad de Granada.

Niss, M. (1997). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 7–16). Recuperado de http: //ued. uniandes. edu.co

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3*. Universidad del Valle.

Pontón Ladino, T. (2008). *Una Propuesta Multirregistro para la Conceptualización Inicial de las Fracciones*. Universidad del Valle.

Reina, L., & Wilhelmi, M. R. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97.

Romero , I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. (Tesis doctoral) Universidad de Granada.

Romero, I., & Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA*, *4*(2), 117–151.

Sánchez, J. C., & Valdivé F., C. (2011). El número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *TEACS*, *4*(1), 31–45. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4735446

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line - Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(4), 477–488. https://doi.org/10.1080/00207390601151828

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). *Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link*. https://doi.org/10.1090/cbmath/016/01

Lourido Guerrero Diana Marcela: Estudiante de maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, sede Palmira, Colombia. Correo electrónico: dmlouridog@unal.edu.co. ORCID: 0000-0002-4146-1837.

Pontón Ladino Teresa: Dra. en Educación, Universidad del Valle, Colombia. Correo electrónico: tpontonl@unal.edu.co. ORCID: 0000-0003-2399-7715.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-20

Uso do *smartphone* na investigação sobre propriedades de quadriláteros notáveis

Rita de Cássia da Costa Guimarães, William Vieira, Roberto Seidi Imafuku, Emanoel Fabiano Menezes Pereira

Fecha de recepción: 2/11/2020
Fecha de aceptación: 10/03/2021

Resumen	Este artículo analiza los resultados de una secuencia de tres actividades sobre exploración de propiedades de cuadriláteros notables utilizando la aplicación Geogebra para teléfonos móviles realizadas por dos estudiantes brasileños de 16 años. Los instrumentos de recolección de datos fueron las grabaciones de las pantallas y audios de los celulares de los estudiantes y las fichas de actividades. Los objetivos de la investigación fueron verificar si el uso de esta aplicación contribuye al levantamiento de conjeturas y clasificar las justificaciones dadas por los participantes. Se observó que el uso de GeoGebra para teléfonos celulares presenta posibilidades para el aprendizaje de la Geometría, ya que permitió a los estudiantes elaborar definiciones, conjeturas y justificaciones a partir de las manipulaciones realizadas. **Palabras clave:** Cuadriláteros notables, GeoGebra para móviles, Justificaciones matemáticas.
Abstract	This article discusses the results of a sequence of three activities on exploration of properties of notable quadrilaterals using the GeoGebra mobile phone application carried out by two 16-year-old Brazilian students. The data collection instruments were the recordings of the screens and audios of the students' cell phones and the activity sheets. The objectives of the investigation were to verify whether the use of this application contributes to the survey of conjectures and to classify the justifications given by the participants. It was observed that the use of GeoGebra for cell phones presents possibilities for learning Geometry, as it allowed students to elaborate definitions, conjectures and justifications based on the manipulations performed. **Keywords:** Notable quadrilaterals, GeoGebra for mobile, mathematics justifications.
Resumo	Neste artigo discute-se os resultados de uma sequência de três atividades sobre exploração de propriedades de quadriláteros notáveis com o uso do aplicativo GeoGebra para celular realizada por dois estudantes brasileiros de 16 anos. Os instrumentos de coleta de dados foram das gravações das telas e áudios dos celulares dos estudantes e as fichas de atividades. Os objetivos da investigação foram o de verificar

	se o uso deste aplicativo contribui para o levantamento de conjecturas e de classificar as justificativas dados pelos participantes. Observou-se que a utilização do GeoGebra para celular apresenta possibilidades para a aprendizagem de Geometria, pois permitiu aos estudantes elaborarem definições, conjecturas e justificativas a partir das manipulações realizadas. **Palavras-chave:** Quadriláteros notáveis, GeoGebra para celular, Justificativas matemáticas.

1. Introdução

Discussões sobre o papel e a inserção de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática têm sido realizadas com cada vez mais frequência por educadores brasileiros e internacionais nos últimos anos. Alguns exemplos que corroboram essa perspectiva são as pesquisas referentes às políticas públicas de implementação de tecnologias digitais em escolas de Educação Básica e as produções acadêmicas que abordam o tema da utilização nas aulas de Matemática (Borba & Lacerda, 2015), trabalhos que discutem aspectos históricos da inclusão de tecnologias nas escolas brasileiras, as implicações do uso de tecnologias no ensino e os impactos na formação de professores (Valente, 1999; 2005) e estudos como o de Balacheff (2000) que indicou que a incorporação das tecnologias digitais nas aulas de Matemática pode tornar o processo de ensino mais completo, possibilitando que os professores controlem a situação de ensino, ao mesmo tempo que permite aos alunos desenvolverem seus próprios métodos de aprendizagem.

Mas apesar das discussões sobre o uso de tecnologias digitais na educação estarem cada vez mais presentes no meio acadêmico, o que se observa na Educação Básica brasileira é que as tecnologias digitais ainda não estão inseridas de maneira efetiva, como apontado por Javaroni, Zampieri e Oliveira (2014). As pesquisadoras indicam um “(...) descompasso entre a integração das tecnologias digitais no ambiente escolar e a prática das aulas de Matemática para estudantes” (Javaroni, Zampieri & Oliveira, 2014, p. 971).

Para investigar os motivos da não integração das tecnologias digitais nas aulas de Matemática, Chinellato (2014) realizou entrevistas com professores da Educação Básica brasileira e o estudo apontou que a maior parte dos entrevistados não faz uso do computador como recurso para o ensino de Matemática, apesar dos programas de incentivo propostos pelos governos locais. A precarização das salas de aula de informática e a falta de preparação dos professores para lidar com as tecnologias digitais são algumas das justificativas apresentadas pelo pesquisador para explicar essa realidade.

Como uma alternativa para superar as dificuldades com a precariedade das salas de informática Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) defendem o uso de celulares em sala de aula, mas ponderam que as maneiras e os limites deste uso devem ser discutidos. Borba (2012) aponta que os celulares inteligentes (smartphones) são tecnologias que já fazem parte de diversos coletivos de seres-humanos-com-mídias, situação que indica que esse tipo de tecnologia é mais facilmente acessível para diversos grupos sociais.

Neste trabalho, apresentamos uma avaliação da inserção de aplicativos de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem desta disciplina, explorando a construção de definições e a elaboração de justificativas para propriedades observadas no estudo de quadriláteros notáveis. Para isso, foi aplicada uma sequência de três atividades sobre o trapézio e o paralelogramo, com o uso do aplicativo GeoGebra para celular, para oito estudantes de 16 anos de idade de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo. Apresentamos, neste trabalho, a análise do desenvolvimento de uma dupla de participantes, escolhida por uma análise prévia dos protocolos, no decorrer da aplicação das três atividades. Todas as atividades realizadas com o smartphone foram gravadas com o aplicativo AZ Screen Recorder. Antes do início das atividades os aplicativos foram instalados nos celulares dos estudantes.

A seguir apresentamos uma revisão sobre trabalhos que exploraram atividades de ensino envolvendo a elaboração de conjecturas e de justificativas, e o uso de aplicativos de geometria dinâmica.

Saorín-Villa, Torregrosa-Gironés & Quesada-Vilella (2019) desenvolveram uma investigação com o objetivo de identificar relações sobre a maneira com que os estudantes constroem um discurso escrito (resposta), o status das afirmações matemáticas estabelecidas que o compõe e os resultados do raciocínio desenvolvido que permitem resolver com sucesso problemas de demonstrações em um contexto geométrico. Para tal, aplicaram uma atividade envolvendo problemas de demonstrações geométricas para estudantes de 17 anos de idade de uma escola na Espanha. Segundo os autores, a argumentação desempenha um papel importante como elo entre os diferentes ciclos de apreensões de raciocínio configural, que é a coordenação dos processos de visualização e o discurso escrito gerado pela solução de problemas geométricos que envolvem prova.

Os pesquisadores destacam que uma mudança no status de declarações matemáticas que compõem o raciocínio podem levar a uma conjectura sem demonstração, permitindo aos alunos darem uma solução para o problema, independentemente da validade, com base em suposições não confirmadas ou erradas (Saorín-Villa, Torregrosa-Gironés & Quesada-Vilella, 2019).

A fim de investigar aspectos da aprendizagem em Geometria durante o processo de resolver tarefas em ambientes touchscreen com geometria dinâmica, Assis e Bairral (2019) conduziram experimentos de ensino sobre isometria com estudantes de 15 a 17 anos de idade de uma instituição do Rio de Janeiro. O processo de análise foi baseado principalmente nos vídeos dos estudantes utilizando o GeoGebra App e o Geometric Constructer, nas produções escritas para cada tarefa, no uso de uma ficha em que os participantes poderiam descrever a função de cada ícone do dispositivo e na gravação das telas dos celulares dos estudantes, o que possibilitou aos pesquisadores fazer a observação de detalhes na utilização do dispositivo. Sobre as atividades elaboradas, os autores destacam que essas devem ser pensadas para permitir o desenvolvimento do pensamento matemático pelos estudantes e que a maneira como o dispositivo touchscreen é utilizado também influencia no design dos processos de resolução das tarefas de modo substancial.

Mata-Pereira e Ponte (2017) projetaram quatro princípios para auxiliar os professores a melhorar o raciocínio matemático dos estudantes e conduziram uma intervenção com base nesses princípios. Segundo os autores, os princípios indicam que as tarefas devem incluir problemas e questões exploratórias, e perguntas que induzam generalizações e que exigem justificativa de respostas. Apontam ainda, que a partir das atividades de generalizar e justificar, os estudantes desenvolvem seu raciocínio matemático e podem estar mais bem equipados para lidar posteriormente com provas matemáticas.

Essas pesquisas evidenciam as possibilidades do uso de dispositivos touchscreens, a importância de trabalho com justificativas nas aulas de Matemática e a necessidade da promoção do ensino de geometria, promovendo uma reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Seguimos com a apresentação das ideias de De Villiers (1994; 2001; 2004) e Balacheff (1987) que constituem os referenciais teóricos adotados em nossas análises.

2. Referencial teórico

2.1. Softwares de Geometria Dinâmica, definições, conjecturas e provas

Uma das principais tarefas relacionadas ao ensino de Matemática na atualidade está em fazer com que estudantes da Educação Básica entendam a necessidade de se provar as afirmações matemáticas. Segundo Guerato (2016), estudantes costumam questionar professores sobre o porquê se demonstrar resultados geométricos, posto que estes lhes parecem óbvios ou facilmente verificáveis empiricamente. De Villiers (2001), sustenta que os alunos não demonstram porque não entendem a função da demonstração em Matemática.

Em busca de resolver este dilema, De Villiers (1999), coloca e responde a questão: "Que funções têm a demonstração na própria Matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?”. Ele destaca que uma demonstração não pode ser encarada apenas como uma forma de convencer incrédulos de que um teorema é verdadeiro e defende que, mais relevante do que provar uma conjectura, são as tentativas de fazê-lo, pois estas podem fomentar a elaboração de novas conjecturas e favorecer o desenvolvimento da Matemática. Sustenta ainda que softwares de geometria dinâmica são aliados no processo de convencimento de que uma conjectura é verdadeira e que também podem iluminar um caminho para se demonstrar um resultado.

Em relação aos softwares de geometria dinâmica, diversos pesquisadores também destacam a contribuição que a utilização desses softwares pode trazer para os processos de ensino e aprendizagem de Geometria, como é o caso de Ingraham (2013), que propôs a utilização de iPads em um projeto de geometria, e em suas conclusões destacou que “quando as ferramentas tecnológicas são usadas efetivamente, os estudantes são motivados e tornam-se participantes ativos no processo de aprendizagem” (Ingraham, 2013, p. 31, tradução nossa).

Os pesquisadores Arzarello, Bairral e Danè (2014) realizaram uma pesquisa com 5 estudantes italianos de 15 a 16 anos para explorar os processos de resolução de problemas utilizando um software de Geometria Dinâmica chamado Geometric Constructer para dispositivos móveis com touchscreen. Em suas análises, os investigadores observaram que “o uso de dispositivos com touchscreen podem proporcionar novas questões pedagógicas para o ensino de Matemática” (Arzarello, Bairral & Danè, 2014, p. 49, tradução nossa).

Também explorando as contribuições que a utilização de softwares de geometria dinâmica traz para os processos de ensino e aprendizagem de Matemática, Abdelfatah (2011) realizou um estudo com o objetivo de preparar os estudantes para compartilhar ideias no processo de elaboração de conjecturas e experenciar as provas geométricas como um processo que vai além de validar afirmações geométricas. O pesquisador destaca que a utilização de softwares de geometria dinâmica proporcionou uma experiência engajadora para os estudantes em relação a exploração de conceitos geométricos e teoremas. Ademais, Abdelfatah (2011) propõe que essa utilização pode aproximar os estudantes da geometria e das provas geométricas.

Com relação às provas, De Villiers (2001) considera que existem diferentes níveis de rigor envolvidos, e define seis funções para uma demonstração: verificação, que se constitui em testes empíricos que devem anteceder uma demonstração e que podem auxiliar e diminuir a chance de erros e inconsistências; explicação, métodos empíricos e experimentais podem auxiliar no processo de convencimento da veracidade de uma conjectura, mas apenas uma prova pode explicar porque ela é verdadeira. Neste caso, a demonstração não apenas verifica a validade de uma afirmação, mas explica porque isso acontece; descoberta, muitos resultados em Matemática têm origem em processos puramente dedutivos, por isso, podemos entender a demonstração também como uma maneira de explorar, avaliar e descobrir novos resultados; sistematização, por mais vastos e diferentes que sejam os exemplos e experimentos empíricos realizados sobre um resultado matemático, somente uma demonstração poderá atestar sua validade, e a sistematização cumpre esse papel; comunicação, os matemáticos comunicam suas ideias por meio de demonstrações e, ao fazê-lo, permitem que sua comunidade científica possa avaliar o trabalho, verificar se existem inconsistências nas conclusões e pensar em contraexemplos ou reformulações que possam levar a novos resultados e ideias; desafio intelectual, demonstrar um teorema ou proposição em Matemática equivale a montar um quebra-cabeça, e a realização de um feito como este confere ao seu elaborador grande satisfação e alegria.

Em relação ao estudo de definições, os pesquisadores Usiskin e Griffin (2008) apontam que muitos estudantes não compreendem a necessidade de as definições em geometria serem econômicas, ou seja, não conterem informações desnecessárias e a possibilidade de haver diferentes definições para um mesmo objeto matemático.

Como uma das possíveis causas desse problema, De Villiers (2004) aponta para os métodos de ensino de definições nas escolas, nos quais os estudantes são apresentados a elas prontas. O pesquisador ressalta que é importante que o processo de definir conceitos geométricos seja uma atividade engajadora para os estudantes para que possam compreender as definições geométricas, defendendo que é necessário que as definições se desenvolvam naturalmente a partir de conhecimentos anteriores, modelos ou experiências reais que o estudante possa relacionar.

Para ajudar no processo de construção de definições, De Villiers (2004) defende que o uso de softwares de Geometria Dinâmica pode não apenas melhorar a compreensão da definição, mas também melhorar a habilidade dos estudantes em definir conceitos geométricos de forma independente; e define três tipos de definições: definição correta, definição incorreta e definição incompleta.

- Definição correta é uma descrição (definição) que contém condições suficientes (propriedades). Existem duas definições corretas: econômica e não-econômica. As econômicas trazem apenas elementos necessários e suficientes e não contém informações redundantes. As definições não-econômicas contêm mais informações do que o necessário (De Villiers, 2004).
- Definição incorreta é uma definição que possui alguma propriedade incorreta ou se ela contém propriedades insuficientes (De Villiers, 2004).
- Definição incompleta é uma definição que contém propriedades necessárias, mas insuficientes. Dessa forma, uma definição incompleta também é considerada uma definição incorreta (De Villiers, 2004).

As ideias apresentadas por De Villiers (1999; 2001; 2004) foram levadas em consideração na elaboração das atividades e na análise das produções dos participantes.

2. 2. Sobre os níveis de prova em Matemática

A partir de uma investigação com estudantes franceses sobre as propriedades de polígonos, Balacheff (1987) define uma tipologia de provas em Matemática, que são caracterizadas em provas pragmáticas e provas intelectuais. Dessa classificação, este autor estabelece quatro níveis para uma prova, que são definidos em empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental (Caldato et al., 2017).

No empirismo ingênuo enquadram-se situações em que um aluno se convence da veracidade de uma conjectura a partir de alguns exemplos simples e específicos, sem questionar a particularidade dos casos verificados. A experiência crucial envolve a verificação de um exemplo particular que atesta a verdade de uma proposição, mas com características de generalização, algo não presente no empirismo ingênuo. Estes dois níveis de prova compõem as provas pragmáticas (Caldato et al., 2017).

No exemplo genérico, as conclusões e validações de resultados são extraídas de um representante genérico de uma classe de objetos considerados. Neste caso, por meio de manipulações, explicitam-se as razões que sustentam uma propriedade específica. Este nível de prova está localizado na transição entre provas pragmáticas e provas intelectuais (Caldato et al., 2017).

Já na experiência mental, o raciocínio lógico-dedutivo garante a validade de propriedades de maneira geral, que não está mais baseada em exemplos ou casos particulares. Neste caso, é dentro de uma teoria que está sustentada a veracidade de uma proposição. Este nível de prova está enquadrado nas provas intelectuais (Caldato et al., 2017).

Utilizando o quadro teórico colocado por Balacheff (1987), Marradez e Gutiérrez (2000) realizaram uma pesquisa sobre as possibilidades da utilização de *softwares* de geometria dinâmica para melhorar o entendimento dos estudantes a respeito de provas matemáticas e suas habilidades de provar. Os pesquisadores apresentaram dois estudos de caso no qual 16 estudantes, com idades de 15 a 16 anos, utilizaram o software Cabri-Géomètre para resolver problemas estruturados de geometria em uma sequência de ensino composta por 30 atividades. Em suas conclusões, Marradez e Gutiérrez (2000) destacam que "os softwares de geometria dinâmica permitem que os estudantes façam explorações empíricas antes de tentar produzir uma justificativa dedutiva, fazendo representações significativas de problemas, experimentando e obtendo retorno imediato" (Marradez & Gutierrez, 2000, p. 119, tradução nossa).

Além disso, os pesquisadores também apontam que a função de arrastar dos softwares auxilia os estudantes a procurar, por exemplo, propriedades, casos especiais e contraexemplos, podendo contribuir para a elaboração de conjecturas e de justificativas. Marradez e Gutierrez (2000) ainda destacam que no decorrer das atividades alguns estudantes melhoraram as suas habilidades de justificar, embora tenham proposto somente justificativas empíricas. Ademais, as conclusões enunciadas pelos pesquisadores indicam que "ao desenvolver uma sequência de atividades organizada e dar aos estudantes tempo suficiente para trabalhar nelas, é possível fazer com que os estudantes avancem em direção a tipos mais complexos de justificativa" (Marradez & Gutierrez, 2000, p. 120, tradução nossa).

Assim como Marradez e Gutiérrez (2000), consideramos as classificações estabelecidas por Balacheff (1987) nas análises das produções dos participantes.

3. Procedimentos metodológicos

A investigação foi realizada no ano de 2019 e para ela foi elaborada uma sequência de três atividades sobre quadriláteros notáveis, sendo uma atividade de exploração do trapézio, uma atividade formativa e uma atividade de exploração do paralelogramo, que envolveram o uso do aplicativo GeoGebra para celular (Graphing Calc).

As atividades foram aplicadas para oito estudantes de 16 anos de idade de uma instituição pública de ensino de São Paulo. As atividades foram realizadas em duplas, tiveram duração de uma hora e meia e aconteceram na instituição de ensino em que os participantes estudam, fora do horário das aulas regulares. Os participantes instalaram o aplicativo GeoGebra para celular e o aplicativo de gravação de tela e áudio AZ Screen Recorder em seus celulares e estavam familiarizados com uso dos aplicativos. Antes do início das atividades, foram feitas algumas intervenções pontuais, por parte dos pesquisadores, sobre configurações específicas do GeoGebra para celular. O critério adotado para a seleção dos participantes foi o de apresentar bom rendimento e interesse nas aulas de Matemática.

Na primeira atividade, os estudantes utilizaram o GeoGebra para construir e explorar o trapézio para, em seguida, definir e elaborar conjecturas sobre propriedades deste quadrilátero. A atividade formativa (segunda atividade) trazia quatro tipos de justificativas para a soma dos ângulos internos de um trapézio e três questionamentos e os participantes precisavam escolher qual justificativa seria mais adequada para cada questionamento proposto. Na terceira atividade, foi proposto que fizessem a construção e exploração do paralelogramo com o GeoGebra para, em seguida, apresentar uma definição e levantar conjecturas sobre este quadrilátero.

Os responsáveis pelos estudantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). A investigação respeita os códigos de ética brasileiros e os participantes são tratados por apelidos nas análises dos dados coletados.

Ao final das atividades, uma análise prévia dos protocolos foi realizada e decidimos convidar uma das duplas para uma entrevista semiestruturada (Boni & Quaresma, 2005), com o propósito de aprofundar a interpretação das produções realizadas e entender as percepções destes participantes sobre a metodologia adotada na realização das atividades propostas. Por isso, concentramos nossas análises nas produções desta dupla de participantes. As atividades foram respondidas em fichas fornecidas pelos pesquisadores. Estes materiais, as gravações das telas e áudios dos celulares dos participantes e os dados obtidos na entrevista são os protocolos utilizados nas análises.

No que segue, discutimos os dados fornecidos pela dupla Samantha e João nas três atividades.

4. Discussão dos resultados

No início do primeiro encontro, antes que a ficha da primeira atividade fosse entregue, foi solicitado que os estudantes construíssem um trapézio no GeoGebra usando seus conhecimentos, e que comunicassem aos pesquisadores quando essa construção tivesse sido terminada. Em poucos minutos, a dupla Samantha e João apresentou a imagem destacada à esquerda na Figura 1. Um dos pesquisadores, então, fez uma manipulação, obtendo a imagem à direita na Figura 1.

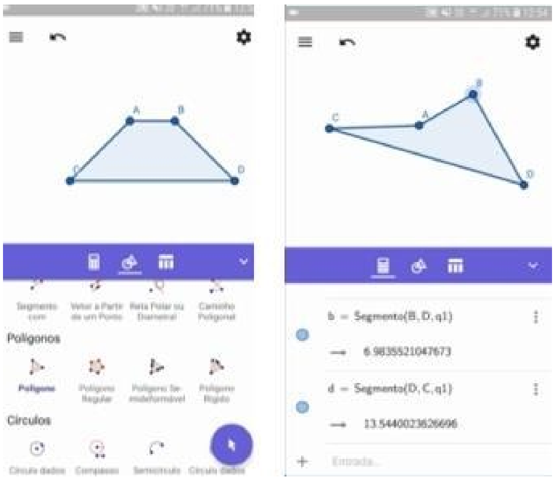


Figura 1. Desenho da dupla Samantha e João.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Durante essa intervenção dos pesquisadores, houve o seguinte diálogo:

Pesquisadora (P): Como é que vocês fizeram a construção?

Samantha (S): A gente marcou os pontos, aí depois a gente usou a ferramenta de segmento e depois usou a ferramenta de polígono.

P: Posso mexer? S: Sim.

Então, a pesquisadora movimenta um dos vértices da figura, deforma o desenho original da dupla e pergunta se a nova figura continua sendo um trapézio. Ao responderem negativamente, a dupla recebeu uma explicação de que uma construção em geometria dinâmica precisa ser rígida, ou seja, as propriedades que caracterizam a figura precisam se manter quando esta é manipulada. Como pode ser observado na primeira imagem da Figura 1, os participantes desenharam uma figura que se assemelhava a um trapézio, porém com a movimentação dos vértices da figura, obteve-se um outro quadrilátero, que não conserva as características de um trapézio, não sendo, dessa forma, uma construção rígida.

A dupla foi novamente desafiada a construir o trapézio, todavia não obteve êxito. Ao mostrar desistência da atividade, os pesquisadores entregaram uma ficha de atividades com um roteiro para a construção do trapézio (Figura 2).

1ª ATIVIDADE: Propriedades do trapézio

a) Crie o segmento AB usando a ferramenta .

b) Construa uma reta paralela a AB, passando por um ponto C não pertencente a AB com .

c) Marque o ponto D sobre a reta paralela a AB com a ferramenta .

d) Trace o segmento CD usando .

Figura 2. Roteiro de construção do trapézio.
Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

A dupla, então, construiu um trapézio e explorou a construção, conforme destacado na Figura 3.

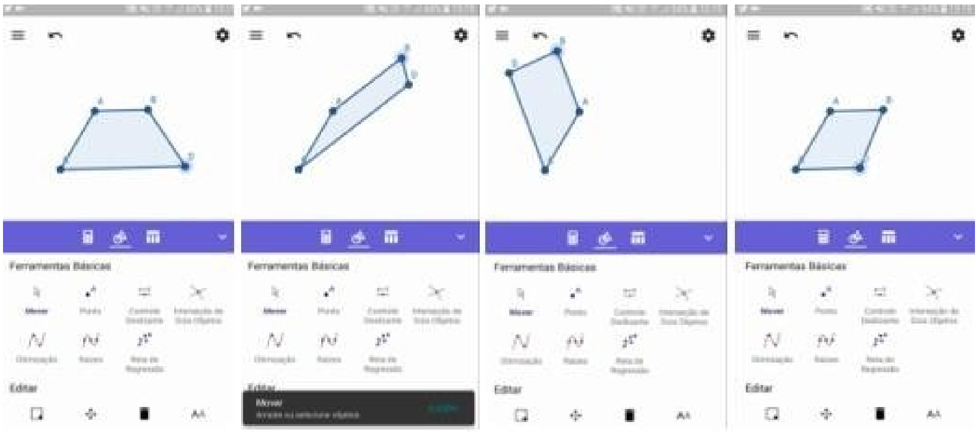


Figura 3. Construção e exploração do trapézio.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em seguida, a dupla discutiu sobre a definição a ser apresentada para o trapézio e chegou a um consenso (Figura 4), porém Samantha demonstrou preocupação com o fato de a definição estar concisa, como mostra o diálogo:

Samantha (S): Então, dê uma definição de trapézio… A gente pode escrever que trapézio é um quadrilátero…

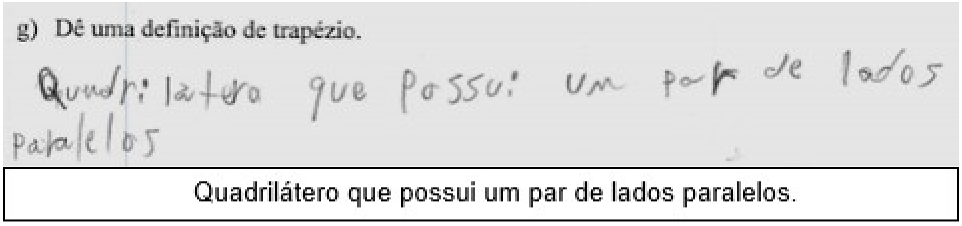
João (J): Certo.

S: Que possui um par de lados paralelos.

J: É isso?

S: É, então, mas essa definição tá muito pobre, né João?

J: É, mas tá definido.


g) Dê uma definição de trapézio.

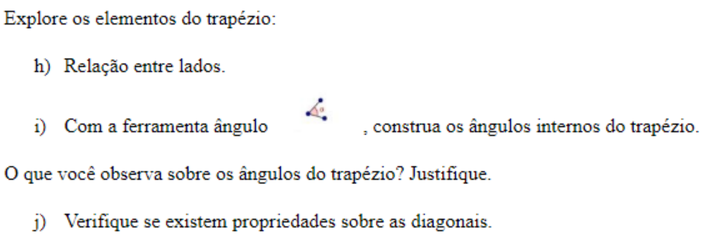
Quadrilatero que possui um par de lados paralelos

Quadrilátero que possui um par de lados paralelos.

Figura 4. Definição de trapézio da dupla Samantha e João.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Acreditamos que os participantes tiveram essa preocupação por terem observado várias características do trapézio com os recursos do GeoGebra e que para eles a definição apresentada não considerava todas elas. Essa preocupação pode caracterizar uma influência do recurso utilizado na elaboração da definição da dupla. Além disso, a utilização do roteiro de construção fornecido pelos pesquisadores pode ter influenciado a definição da dupla. No que concerne ao tipo de definição, consideramos como definição correta econômica (De Villiers, 2004), pois as informações colocadas pelos participantes são necessárias e suficientes para caracterizar um trapézio.

A próxima parte dessa primeira atividade solicitava aos participantes que fizessem a exploração do trapézio e buscassem identificar propriedades relacionadas aos lados e ângulos desse quadrilátero. Nos itens h, i e j da ficha de atividades (Figura 5), o objetivo é verificar se a exploração com o aplicativo GeoGebra contribui para a elaboração de conjecturas. Ademais, também pretendemos investigar em quais níveis as justificativas apresentadas pelos participantes podem ser classificadas.


Explore os elementos do trapézio:

h) Relação entre lados.

i) Com a ferramenta ângulo , construa os ângulos internos do trapézio.

O que você observa sobre os ângulos do trapézio? Justifique.

j) Verifique se existem propriedades sobre as diagonais.

Figura 5. Itens da ficha de atividades.
Fonte: Elaborado pelos autores (2019).

Tomando como base as funções de demonstrações colocadas por De Villiers (2001), com os itens destacados acima são evidenciadas a função de explicação, pois após o processo de convencimento da veracidade da conjectura por meio dos testes empíricos, ainda é necessária uma justificativa para explicar porque ela é verdadeira. Nessa função, a demonstração não apenas verifica como também explica porque isso acontece. A segunda é a função de verificação, visto que os participantes fazem testes empíricos com o GeoGebra para verificar a veracidade de uma propriedade já conhecida.

A Figura 6 destaca a exploração dos ângulos internos do trapézio realizada por Samantha e João.

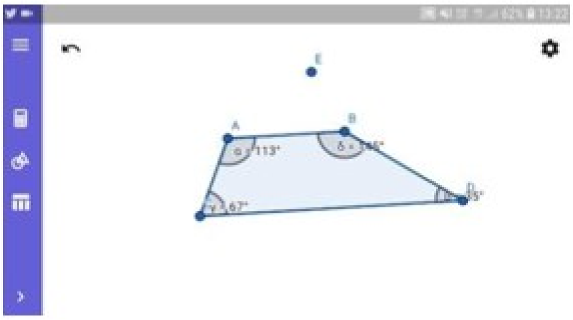
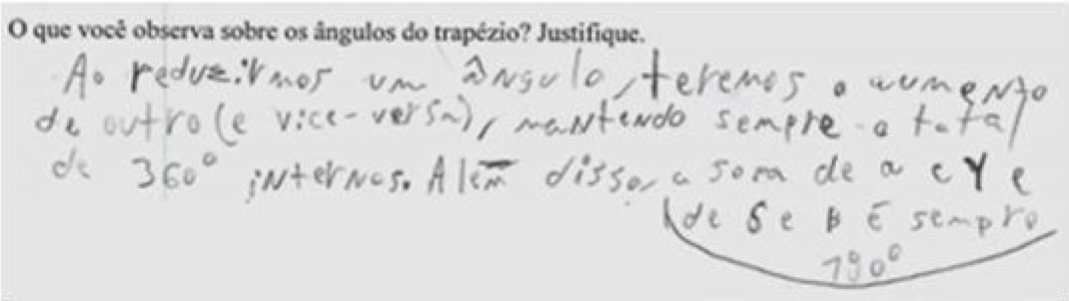


Figura 6. Exploração dos ângulos internos do trapézio feita pela dupla.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Ao explorar o trapézio construído no aplicativo, a dupla elabora uma conjectura sobre a soma da medida dos ângulos internos deste quadrilátero (Figura 7), perspectiva que indica que a utilização do aplicativo GeoGebra contribui para a exploração de características e para a elaboração de conjecturas. Entretanto, cumpre observar que em algumas situações esse processo pode levar a elaboração de afirmações vagas e que não representam, de fato, algo a ser destacado como uma propriedade relevante, situação que se observa quando a dupla aponta que “Ao reduzirmos um ângulo, teremos o aumento do outro (e vice-versa)”.



Ao reduzirmos um ângulo, teremos o aumento de outro (e vice-versa), mantendo sempre o total de 360º internos. Além disso, a soma de α e γ e de δ e β é sempre 180º.

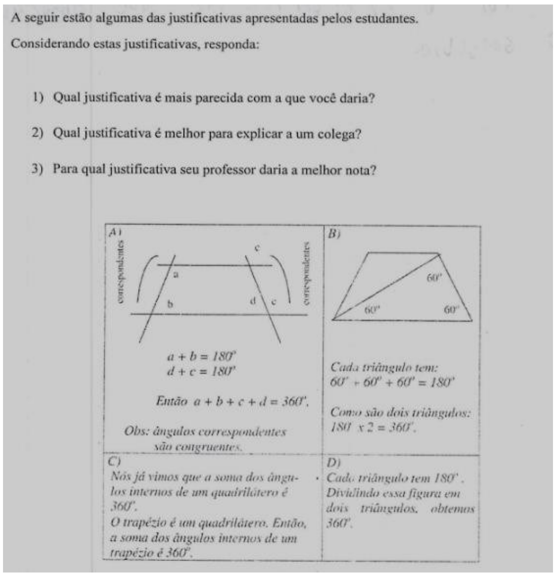
Figura 7. Conjecturas elaboradas pela dupla.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Entendemos que a justificativas proposta por João e Samantha pode ser caracterizada como empirismo ingênuo (Balacheff, 1987), pois os estudantes não apresentaram uma justificativa para a conjectura elaborada e se restringiram a aceitar o resultado observado na manipulação do GeoGebra.

Questionamos, na entrevista, sobre o motivo de não terem apresentado uma justificativa, a participante Samantha respondeu que eles estavam inseguros, porque apesar de conseguirem observar propriedades com o GeoGebra, não tinham certeza se o que eles pensavam era uma justificativa válida. Sobre o motivo da insegurança, Samantha apontou que “Não, assim, insegurança num nível normal, sabe? Por ser uma coisa que a gente não tinha feito ainda (...) mas não era uma insegurança de um jeito ruim, era só uma insegurança que você sempre tem quando vai fazer uma prova, por exemplo”.

Essa fala revela que os participantes não haviam tido experiência com a atividade de justificar uma proposição matemática e, ao serem questionados sobre o contato com demonstrações no decorrer de suas trajetórias escolares apontaram que só tiveram contato com demonstrações com os professores Ensino Médio, mas nunca sobre geometria. Além disso, a dupla também apontou que teve pouco contato com Geometria Plana até os 14 anos.

Era esperado que os participantes apresentassem defasagens sobre conceitos de Geometria Plana e dificuldades com a elaboração de justificativas, por isso, foi planejado a aplicação de uma atividade formativa sobre justificativas. A segunda atividade, destacada na Figura 8 e retirada de Nasser e Tinoco (2003), diz respeito a essa etapa da investigação e teve por objetivo apresentar diferentes tipos de justificativas aos participantes.


A seguir estão algumas das justificativas apresentadas pelos estudantes.

Considerando estas justificativas, responda:

1) Qual justificativa é mais parecida com a que você daria?
2) Qual justificativa é melhor para explicar a um colega?
3) Para qual justificativa seu professor daria a melhor nota?

A) $a + b = 180°$
$d + c = 180°$
Então $a + b + c + d = 360°$.
Obs: ângulos correspondentes são congruentes.

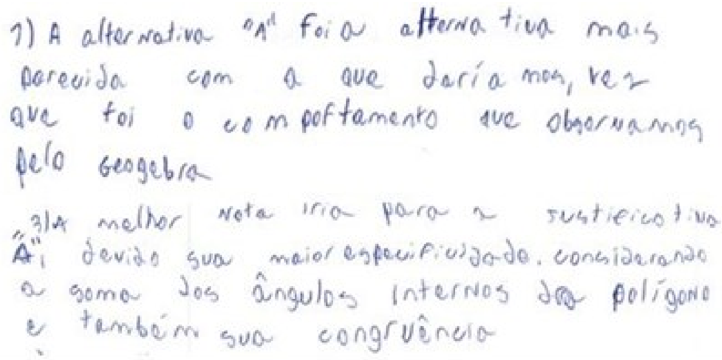
B) Cada triângulo tem: $60° + 60° + 60° = 180°$
Como são dois triângulos: $180 \times 2 = 360°$.

C) Nós já vimos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.
O trapézio é um quadrilátero. Então, a soma dos ângulos internos de um trapézio é 360°.

D) Cada triângulo tem 180°. Dividindo essa figura em dois triângulos, obtemos 360°.

Figura 8. Atividade formativa.
Fonte: Nasser e Tinoco (2003).

Para as questões 1, Qual a justificativa é mais parecida com a que você daria? e 3, Para qual justificativa seu professor daria a melhor nota?, apresentadas na Figura 8, a dupla escolheu o item A (Figura 9) e se apoiou na exploração realizada anteriormente com o GeoGebra, observando que a justificativa utiliza a congruência dos ângulos internos para justificar a escolha. Caracterizamos a justificativa apresentada no item A como experiência mental, visto que é com base no raciocínio lógico-dedutivo que é garantido a veracidade da propriedade.



1)	A alternativa "A" foi a alternativa mais parecida com a que daríamos, vez que foi o comportamento que observamos pelo GeoGebra.
3)	A melhor nota iria para a justificativa "A", devido sua maior especificidade. Considerando a soma dos ângulos internos do polígono e também sua congruência.

Figura 9. Escolhas da dupla para as questões 1 e 3.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Neste caso, é interessante observar que, apesar da experiência dinâmica com o GeoGebra, a escolha da dupla seja por uma justificativa que não faz uso de um esboço ou construção.

Iniciamos a terceira atividade propondo aos participantes que fizessem a construção de um paralelogramo no GeoGebra, usando seus conhecimentos, e que a partir da construção feita, apresentassem uma definição deste quadrilátero. Como na primeira atividade, essa solicitação foi feita antes da entrega da ficha de atividades.

A dupla Samantha e João apresentou a construção destacada na Figura 10 para os pesquisadores e então se estabeleceu o diálogo destacado a seguir.

Figura 10. Construção do paralelogramo da dupla.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Pesquisadora (P): Isso é um paralelogramo?

Samantha (S): Sim.

P: Por quê?

S: Porque um paralelogramo é um polígono que tem os dois pares de lados paralelos. É um quadrilátero, aliás.

P: Entendi. S: Sim.

P: Escuta, mas aqui o que eu tô vendo é… me parece que os lados adjacentes são perpendiculares. É isso?

S: É, não necessariamente precisa num paralelogramo, mas a gente fez

assim.

P: Mas aí essa figura, essa construção representa um paralelogramo

qualquer?

S: Não. É um paralelogramo que é também um retângulo. P: Entendi.

S: A gente devia ter feito diferente. Em vez de usar perpendicular.

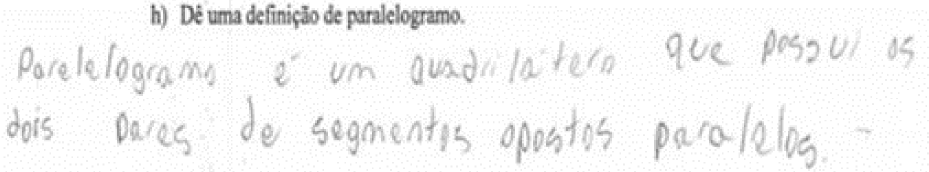
A construção destacada na Figura 11 revela que a dupla não mais confunde desenho e construção no GeoGebra e o diálogo com a pesquisadora indica uma boa percepção desses participantes sobre o que caracteriza um paralelogramo, apesar de terem construído um caso particular.

Na sequência, foi proposto que a dupla retomasse a construção e, sem o auxílio do roteiro, construíram o paralelogramo destacado na Figura 11. Então, apresentaram para a pesquisadora, que movimentou os vértices do polígono e verificou que a construção estava correta.

Figura 11. Paralelogramo construído pela dupla.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em seguida, uma ficha com perguntas sobre a definição e propriedades do paralelogramo foi entregue à dupla.

No item h, a dupla apresentou a definição de paralelogramo destacada na Figura 12.



Paralelogramo é um quadrilátero que possui os dois pares de segmentos opostos paralelos.

Figura 12. Definição de paralelogramo dada pela dupla.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Podemos apontar que os participantes apresentaram uma definição sem hesitar, o que pode ter sido causado pelo fato de não terem explorado o quadrilátero antes de escreverem a definição. Em relação ao tipo de definição, consideramos ser correta econômica (De Villiers, 2004), tendo em vista que ela apresenta as condições que são necessárias e suficientes para descrever um paralelogramo.

Seguindo o mesmo encadeamento da primeira atividade, foi proposto aos participantes que explorassem ângulos internos e diagonais do paralelogramo e elaborassem conjecturas sobre esses elementos. A Figura 13 apresenta a exploração do paralelogramo realizada pela dupla.

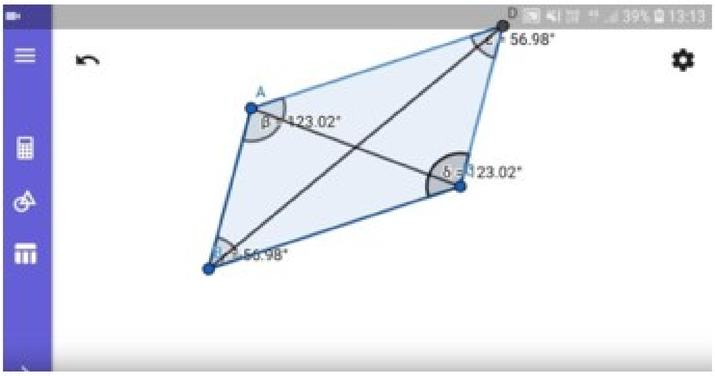
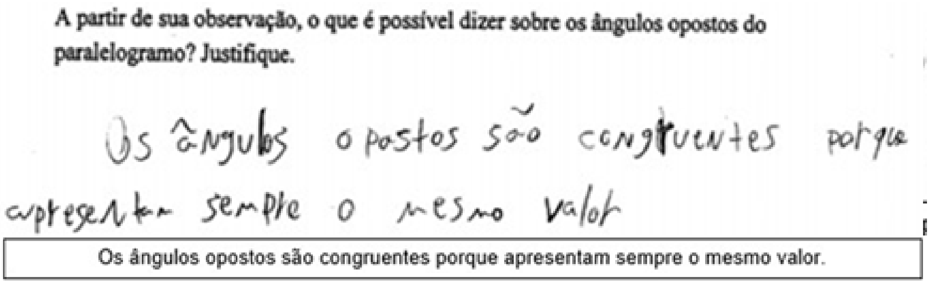


Figura 13. Exploração dos ângulos internos do paralelogramo.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

A dupla fez a movimentação dos vértices do polígono e, com o auxílio da janela da Álgebra, recurso do GeoGebra para celular, observou características que se conservam. A partir disso, elaborou a conjectura destacada na Figura 14.


A partir de sua observação, o que é possível dizer sobre os ângulos opostos do paralelogramo? Justifique.

Os ângulos opostos são congruentes porque apresentam sempre o mesmo valor

Os ângulos opostos são congruentes porque apresentam sempre o mesmo valor.

Figura 14. Conjectura elaborada pela dupla Samantha e João.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Destacamos o uso de expressões corretas como congruência, para expressar a igualdade numérica dos ângulos opostos, observada na construção, na conjectura apresentada pelos participantes. Na elaboração da justificativa para essa conjectura (Figura 16) houve uma discussão na qual a participante Samantha demonstrou suas inquietações sobre a validade da justificativa elaborada pela dupla:

> A gente tá partindo da definição de que esses triângulos são congruentes, mas como eu digo que eles são congruentes? Porque eu não sei se eles são, de fato, congruentes. Em tese, sim. Lado, ângulo..., não, lado, ângulo, lado... não tinha algum caso que era lado, ângulo e ângulo? Não, tinha um caso que quando os dois ângulos eram iguais, era congruente. Eu acho que nesse caso, sim. Bom, vou escrever assim.

Essa fala revela que, ao tentar justificar a veracidade do que foi conjecturado, os estudantes esbarraram em conhecimentos prévios que acabaram se tornando empecilhos para o desenvolvimento de uma justificativa. Por outro lado, a fala da estudante também indica potencialidades da atividade proposta para o resgate e desenvolvimento de conhecimentos geométricos que deveriam ter sido trabalhados pelos estudantes em anos anteriores.

Não convencida sobre a justificativa, Samantha retoma a manipulação do paralelogramo no GeoGebra, conforme destacado na Figura 15.

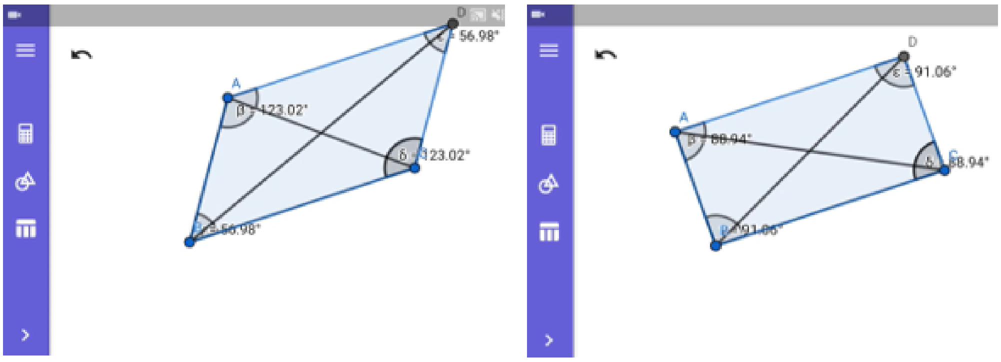
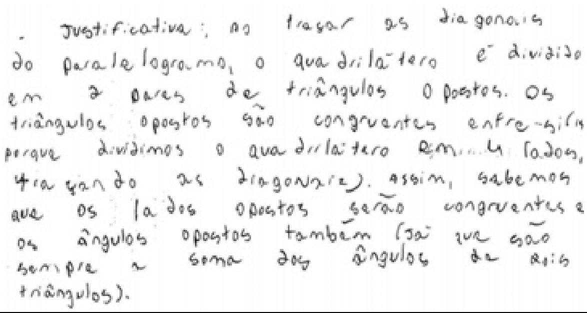


Figura 15. Manipulação feita por Samantha.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Essa nova manipulação convence a dupla, que elabora a justificativa destacada na Figura 16.



Justificativa: Ao traçar as diagonais do paralelogramo, o quadrilátero é dividido em 2 pares de triângulos opostos. Os triângulos opostos são congruentes entre si (porque dividimos o quadrilátero em 4 lados traçando as diagonais). Assim, sabemos que os lados opostos serão congruentes e os ângulos opostos também (já que são sempre a soma de ângulos de dois triângulos).

Figura 16. Manipulação feita por Samantha.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Questionados, na entrevista, sobre o que estavam considerando como “triângulos opostos”, os participantes explicaram que triângulos opostos seriam os opostos pelo ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. A Figura 17 exemplifica o que os estudantes disseram na entrevista, sendo os triângulos 1 e 2 opostos pelo ponto de interseção das diagonais, assim como os triângulos 3 e 4.

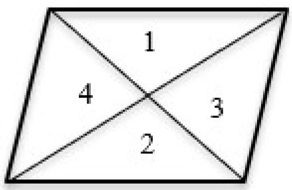


Figura 17. Pares 1-2 e 3-4 de triângulos opostos.
Fonte: Dados da pesquisa (2019).

Em relação ao nível da justificativa, podemos classificá-la como experiência crucial, pois, apesar dos estudantes não explicarem o motivo dos triângulos serem congruentes e não fazerem uso da linguagem matemática formal, há uma tentativa de busca por teoremas que expliquem o que foi, por eles, conjecturado.

Como os estudantes não justificaram a conjectura que fizeram para o trapézio e o fizeram na atividade sobre paralelogramo, procuramos, na entrevista, investigar como a atividade formativa (segunda atividade) influenciou no desenvolvimento da terceira atividade (paralelogramo) e, sobre isso, João destacou que ter exemplos de demonstrações os auxiliou e “deu segurança” na elaboração das justificativas que foram feitas posteriormente. Além disso, o estudante também expressou que os ajudou a “não encontrar exceções”, indicando uma possível visão desse participante a respeito do caráter geral de uma justificativa, que valida uma tese para todos os possíveis casos.

5. Considerações Finais

Tendo em vista o propósito de avaliar as possibilidades do uso do celular nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, as análises mostram que, ao utilizar o aplicativo GeoGebra para celular, os estudantes podem manipular as construções geométricas com muita facilidade, podendo explorar e formular uma definição a partir dessa manipulação. Cabe ressaltar que trazer uma discussão sobre a diferenciação que se dá entre construção e desenho em um ambiente de Geometria Dinâmica é uma estratégia que pode colaborar com o refinamento da elaboração de definições em Matemática, contribuindo para a autonomia dos estudantes em relação ao processo de definir. Nesse sentido, os resultados de nossa pesquisa corroboram a perspectiva de Balacheff (2000), que enfatiza a autonomia dos estudantes para desenvolver sua forma de aprendizagem por meio da inserção das tecnologias digitais.

Identificamos também que na primeira atividade os participantes levantaram conjecturas sobre o trapézio, porém não apresentaram justificativas. Na entrevista, os estudantes destacaram que isso aconteceu devido ao pouco contato com demonstrações e com geometria de um modo geral durante suas trajetórias escolares. A dupla foi capaz de elaborar uma definição para o trapézio e conjecturas sobre os ângulos internos desse quadrilátero, mesmo sem estarem familiarizados com ele, como indicou a dificuldade em construí-lo pela primeira vez. Nesse sentido, entendemos que a manipulação no GeoGebra teve papel central nas produções dos participantes. Essa perspectiva corrobora a investigação de Villa, Girónes e Vilella (2019), na qual destacam que há casos em que os estudantes conseguem resolver as atividades propostas, apoiando-se em afirmações sem justificativa.

A análise da terceira atividade, sobre o paralelogramo, evidenciou o papel que a atividade formativa (segunda atividade) teve na percepção dos estudantes sobre como elaborar uma justificativa, posto que nessa terceira atividade eles escreveram mais e destacaram mais elementos observados no GeoGebra. Nesse sentido, esses resultados estão em consonância com as posições destacadas por Mata-Pereira e Ponte (2017), que apontam que o trabalho com atividades de generalizar e de justificar podem auxiliar os estudantes a lidar com provas posteriormente.

Além disso, as análises revelaram que a utilização do GeoGebra para celular contribuiu para o levantamento de conjecturas e influenciou o pensamento dos estudantes, pois a experimentação com o aplicativo possibilitou que, ao analisarem os diversos exemplos dos quadriláteros abordados, conseguissem fazer uma conjectura para o que estava sendo observado. Esses resultados estão em consonância com os resultados da pesquisa de Assis e Bairral (2019) que mostraram que a utilização dos dispositivos touchscreen exerce influência na resolução das tarefas dos estudantes.

Conforme procuramos mostrar em nosso estudo, a utilização do GeoGebra para celular pode contribuir para os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, principalmente no que concerne ao reconhecimento de padrões, de propriedades que se conservam, por proporcionar aos estudantes a possibilidade de fazer experimentações nas figuras construídas.

Em relação aos níveis colocados por Balacheff (1987), apontamos que houve um avanço, pois os estudantes passaram do empirismo ingênuo, no qual acreditavam na veracidade de uma conjectura a partir de exemplos específicos, para a experiência crucial, na qual a verificação é feita a partir de exemplos com características de generalização. Nessa perspectiva, concordamos com Marradez e Gutiérrez (2000), que destacam uma melhora de alguns estudantes e relação as habilidades de justificar.

É importante destacar ainda que, além do trabalho com o celular, a atividade formativa com a elaboração de justificativas teve bastante influência nesse processo, contribuindo para a aprendizagem dos estudantes, apresentando tipos e possibilidades de justificativas.

Por fim, observamos que o trabalho com os celulares, que foram compartilhados pelas duplas, não apresentou nenhum tipo de dificuldade do ponto de vista prático, tendo transcorrido com bastante tranquilidade. Nesse sentido, a investigação corrobora que os celulares podem, de fato, colaborar com a superação das dificuldades com as salas de informática, perspectiva destaca por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), e se constitui como um exemplo de como este recurso tecnológico pode ser explorado nas aulas de Matemática.

Esperamos que os resultados obtidos possam contribuir com as discussões sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Agradecimentos

Aos revisores pelas valorosas contribuições e ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP pela bolsa de iniciação científica PIBIFSP concedida.

Bibliografia

Abdelfatah, H. (2011). *A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and geometric proof*. *ZDM*, 43(3), 441–450.

Arzarello, F., Bairral, M. A., & Danè, C. (2014). *Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software*. *Teaching Mathematics and its Applications*, 33(1), 39–51.

Assis, A. & Bairral, M. (2019). *Using touchscreen devices to improve plane transformation in high school classroom. Ripem,* 9, 45-60.

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Balacheff, N. (2000). *Entornos informáticos para la ensenanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*. In: Gorgorió, N. et. al ed., *Matemáticas y* *educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 1st ed. Espanha: Graó 93-108.

Boni, V. & Quaresma, S. J. (2005). *Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC,* 2, 68-80.

Borba, M. C. (1999). *Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.* Editora UNESP, São Paulo, Brasil.

Borba, M. C., Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

Borba, M. C. (2012). *Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. ZDM,* 44, 802-814.

Borba, M. C. & Lacerda, H. D. G. (2015). *Políticas públicas e tecnologias digitais: um celular por aluno*. *Educ. Matem. Pesq*., 17,490-507.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S. & Gadanidis, G. (2014). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento.* Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.

Caldato, J., Utsumi, M. C. & Nasser, L. (2017). *Argumentação e demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. Revista Triângulo*, 10, 74-93.

Chinellato, T. G. (2014). *O uso do computador em escolas públicas estaduais da cidade de Limeira/SP.* 104 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, SP, Brasil.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking Proof with Geometer‘s Sketchpad*. Key Curriculum Press. Estados Unidos da América.

De Villiers, M. (2001) *Papel e Funções da Demonstração com o Sketchpad*. *Revista Educação e Matemática,* 62, 31 – 36.

De Villiers, M. & Govender, R. (2004). *A dynamic approach to quadrilateral definitions. Pythagoras*, 59, 34 – 45.

Guerato, E. T. (2016). *Um estudo sobre a demonstração em Geometria Plana com alunos do curso de Licenciatura em Matemática.* Tese de Doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil.

Ingraham, M. (2013). *Incorporating iPad technology into the classroom: a geometry project*. Ohio Journal of School Mathematics, 2013(67), 27– 32.

Javaroni, S. L., Zampieri, M. T. & Oliveira, F. T. (2014). *Tecnologias digitais: É possível integrá-las às aulas de Matemática?* In: CONGRESSO INTERNACIONAL DAS TIC NA EDUCAÇÃO, III., Anais. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. 970–974.

Marradez, R., & Gutiérrez, Á. (2000). *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 87–125.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2017). *Enhancing students’ mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. Educational Studies in Mathematics*, 96, 169 -186.

Nasser, L., Tinoco, L. A. A. (2003). *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.* Editora UFRJ/Projeto Fundão, Rio de Janeiro, Brasil.

Oliveira, F. T. (2014). *A inviabilidade do uso das tecnologias da informação e comunicação no contexto escolar: o que contam os professores de Matemática?* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, SP, Brasil.

Salinas, T. M., Lynch-Davis, K., Mawhinney, K. J., & Crocker, D. A. (2014). *Exploring quadrilaterals to reveal teachers' use of definitions: results and implications. Australian Senior Mathematics Journal*, 28(2), 50–59

Saorín Villa, A., Torregrosa Gironés, G. & Quesada Vilella, H. (2019). *Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 22, 213-244.

Usiskin, Z. & Griffin, J. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study of definition.* Information Age Publishing, Estados Unidos da América.

Valente, J. A. (Org.). (1999). *O computador na sociedade do conhecimento.* UNICAMP/NIED, São Paulo, Brasil.

Valente, J. A. (2005). *A espiral da espiral de aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação*. Tese (livre-docência), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Rita de Cássia da Costa Guimarães Licencianda em Matemática e bolsista de iniciação científica do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP – Campus Guarulhos. rdrita.cg@gmail.com

William Vieira Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo. Professor do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP – Campus Guarulhos. wvieira@ifsp.edu.br

Roberto Seidi Imafuku Doutor em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo. Professor do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP - Campus Guarulhos. roberto.imafuku@ifsp.edu.br

Emanoel Fabiano Menezes Pereira Mestre em Matemática pela Universidade Federal do ABC (UFABC) Campus Santo André, especialista em Educação à Distância pela Universidade Federal Fluminense (UFF) e graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Professor do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Guarulhos. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Formação de Professores - GEPEMFOP do IFSP - Campus Guarulhos. emanoel.pereira@ifsp.edu.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-24

https://union.fespm.es

Teoria das Situações Didáticas e as Olimpiadas de Matemática: uma aplicação com arrimo do *software* GeoGebra para o ensino de geometria no Brasil

José Gleison Alves da Silva, Francisco Régis Vieira Alves, Daniel Brandão Menezes

Fecha de recepción: 21/11/220
Fecha de aceptación: 1/02/2021

Resumen

Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en curso en la Maestría en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará (IFCE). La investigación se basó en la Ingeniería Didáctica (ED) en complementariedad con la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). El objetivo de la investigación fue presentar al docente una Situación Didáctica Olímpica (SDO), para la enseñanza de la Geometría, utilizando el software GeoGebra como herramienta para la transposición didáctica del Problema Olímpico (PO) y modelada por la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), para el contexto del aula.

Palabras clave: Teoría de Situaciones Didácticas; Ingeniería Didáctica; Situación didáctica olímpica; GeoGebra; Geometría.

Abstract

This article presents partial results of an ongoing investigation in the Master in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará (IFCE). The research was based on Didactic Engineering (ED) in complementarity with the Theory of Didactic Situations (TSD). The objective of the investigation was to present the teacher with an Olympic Didactic Situation (SDO), for the teaching of Geometry, using the GeoGebra software as a tool for the didactic transposition of the Olympic Problem (PO) and modeled by the Theory of Didactic Situations (TSD), for the classroom context.

Keywords: Theory of Didactic Situations; Didactic Engineering; Olympic Didactic Situation; GeoGebra; Geometry.

Resumo

Este artigo apresenta resultados parciais de uma investigação em andamento no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). A pesquisa fundamentou-se na Engenharia Didática (ED) em complementariedade com a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Objetivou-se na investigação apresentar ao professor uma Situação Didática Olímpica (SDO) para o ensino de geometria, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para a transposição didática do Problema Olímpico (PO) e modelado pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), para o contexto da sala de aula.

Palavras-chave: Teoria das Situações Didáticas; Engenharia Didática; Situação Didática Olímpica; GeoGebra; Geometria.

1. Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP é uma competição que acontece anualmente desde 2005 no Brasil e tem o objetivo de estimular o ensino de matemática e identificar alunos talentosos nessa área. Com isso, a cada ano, cresce a quantidade de escolas participantes, o que possibilita uma maior interação com a disciplina e oferece a possibilidade de atingir seu propósito (OBMEP, 2020).

Os materiais utilizados pela OBMEP apresentam uma gama de conceitos matemáticos que podem contribuir para a diversificação do planejamento do professor durante o ano letivo. Esses conceitos abrangem conteúdos, como álgebra, geometria e Sequências numéricas, os quais são abordados mediante um banco de questões, provas, simulados, portais e vídeos com resoluções de problemas que podem ser acessados no site da OBMEP[1].

No entanto, esse material não é bem aproveitado por professores em sala de aula, pois são mais utilizados em preparações para competições matemáticas e estabelece um direcionamento a um pequeno público que é possível denominar de “alunos olímpicos”, como destaca Alves:

> O número de jovens estudantes que participam anualmente da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas do Brasil (OBMEP) revela índices e indicadores importantes e que, gradualmente, tendem a tornar visível e identificável, cada vez mais, um pequeno grupo de estudantes em várias regiões do país que podem obter sucesso progressivo nas fases graduais e níveis crescentes de complexidade presentes nos testes (Alves, 2019, p. 97).

Esses estudantes são escolhidos pela sua capacidade de raciocínio diferenciado, demonstrada pelo desempenho em sala de aula, o que exclui aqueles que apresentam resultados não satisfatórios na disciplina e distancia esses grupos de vivenciar a experiência de resolução de problemas abordados em competições matemáticas.

Diante dessa problemática, apresenta-se uma proposta aos professores que visa essa integração dos Problemas Olímpicos (PO), por intermédio de uma transposição didática, de forma que eles possam ser utilizados como atividades em sala de aula, para que, assim, proporcione ao discente um maior envolvimento com esses problemas de competição. Essa transposição didática dos PO segue a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), que tem foco na construção de um modelo que estabelece a relação entre professor, aluno e o conhecimento Matemático (Almouloud, 2007), permitindo, então, a criação de um ambiente de ensino utilizando problemas da OBMEP, visando essa relação com foco no aprendizado do conteúdo matemático.

Destaca-se que os problemas da OBMEP ou Problemas Olímpicos (PO), sob a perspectivas da TSD, são definidos como Situação Didática Olímpica (SDO), representada pela expressão ou equação mnemónica indicada por SDO = PO + TSD (Alves, 2019), entendida como “uma proposta de uma sequência didática

---

[1] Recuperado em: http://www.obmep.org.br/.

capaz de estabelecer relações de ensino-aprendizagem em matemática, a partir de situações de ensino com base na convivência com problemas que possuem características de olimpíadas" (Azevedo & Alves, 2020, p. 400).

Portanto, tem-se como objetivo nesta investigação apresentar ao professor uma Situação Didática Olímpica (SDO), para o ensino de geometria, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para a transposição didática do Problema Olímpico (PO), modelado pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) para o contexto da sala de aula. O uso do *software* GeoGebra tem o intuito da adaptação, trazendo mais dinamismo à figura e estabelecendo comando para que, com o seu uso, os sujeitos possam interagir com a ferramenta e encontrar diversos percursos para a resolução do PO.

Dentre os conteúdos abordados pela OBMEP, foi escolhido a geometria, que perpassou por um momento de esquecimento durante décadas nos currículos escolares, em que o seu estudo "era feito como tema ilustrativo dos conjuntos ou da álgebra, e o estudo das medidas, completamente abandonado" (Pires, 2009, p. 179) principalmente nos livros didáticos, importante ferramenta que guia o professor durante o ano letivo e figura "entre os recursos mais usados no estudo da matemática, funcionando como uma referência para a avaliação dos conhecimentos construídos nesse contexto" (Freitas & Pais, 2009, p. 151). Ainda hoje há resquícios desse esquecimento nos livros didáticos, uma vez que, considerando o PNLD 2018, quando o conteúdo da geometria é abordado, fica nos últimos capítulos e, em alguns casos, devido ao tempo durante o ano letivo, acaba não sendo discutido pelos professores (Pavanello, 1993).

A pesquisa fundamentou-se na metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED) e teve como sujeitos professores orientadores do Programa de Iniciação Científica - PIC Jr., que, além disso, também eram alunos de licenciatura do curso de matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA. As aulas aconteceram pela plataforma *Google Meet* devido à paralização de escolas e universidades devido ao COVID-19 e contou com 6 participantes.

Nas seções seguintes, apresenta-se o referencial teórico, que trata da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e as Situações Didáticas Olímpicas (SDO), articulada com a Engenharia Didática (ED). Por ser um recorte de uma pesquisa de mestrado, aborda-se apenas à experimentação e a análise a *posteriori* e validação da Situação Didática Olímpica (SDO).

2. Referencial Teórico

Este tópico trata do referencial teórico que fundamentou a referida investigação desenvolvida no Brasil, a qual se consubstanciou inicialmente pela TSD e SDO e, logo em seguida, a ED.

2.1. Teoria das Situações das Didáticas e as Situações Didáticas Olímpicas

Este trabalho seguiu a perspectiva da TSD (Brousseau, 1986), entretanto, com o intuito de criar um ambiente de ensino e aprendizagem que utilizasse problemas da OBMEP, possibilitando um contexto em que o aluno consiga agir sobre o problema, formular suas conjeturas e validar seus conhecimentos. Essa teoria proporciona ao discente a realização de um percurso análogo ao de um matemático na construção de teoremas e propriedades, possibilitando o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa (Almouloud, 2007).

A TSD é "um processo de aprendizagem que pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos" (Almouloud, 2007, p. 31). Dessa forma, a TSD tem o objetivo centrado não no aluno, mas com uma atenção na situação didática a ser proposta, na qual emerge um processo de interação entre professor–aluno–meio, permitindo aos sujeitos a construção do conhecimento de forma autônoma e interativa (Almouloud, 2007).

A Teoria das Situações Didáticas baseia-se na perspectiva de três hipóteses que norteiam o docente no planejamento e na execução em sala de aula, são elas:

> i. O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem. ii. O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um milieu no qual seja desenvolvida as situações suscetíveis de provocar aprendizagens. iii. Esse *milieu* e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem (Almouloud, 2007, p. 33).

Essas situações didáticas têm uma parte fundamental que as complementam, são as situações adidáticas, definidas como "uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a estas condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar" (Almouloud, 2007, p. 33). Esses problemas que compõem a situação adidática devem serem escolhidos pelo docente de modo que os estudantes sejam protagonistas, aceitando, fazendo pela própria dinâmica, atuem, falem, reflitam e evoluam (Brousseau, 2008). Conforme Brousseau, Brousseau e Warfield, esse protagonismo deve fazer com que as

> Situações de ação revelam e provocam a evolução de modelos de ação sem que o aluno precise formá-los. O aluno pode, imediatamente ou mais tarde, aprender a identificá-los, formulá-los em situações de formulação (expressão ou comunicação) e justificá-los em situações de prova (validação ou argumentação) (Brousseau et al., 2014, p. 203).

A partir desse protagonismo, o processo de transformação conhecimento/saber (Figura 1) perpassa pelo processo de institucionalização, momento em que a participação efetiva do professor consolida o aprendizado ou corrige determinados entraves que os sujeitos obtiveram nas situações anteriores, ela "é a apropriação do saber e de suas conexões pertinentes como óbvias, como expressões diretas e comuns do pensamento" (Brousseau et al., 2014, p. 204).

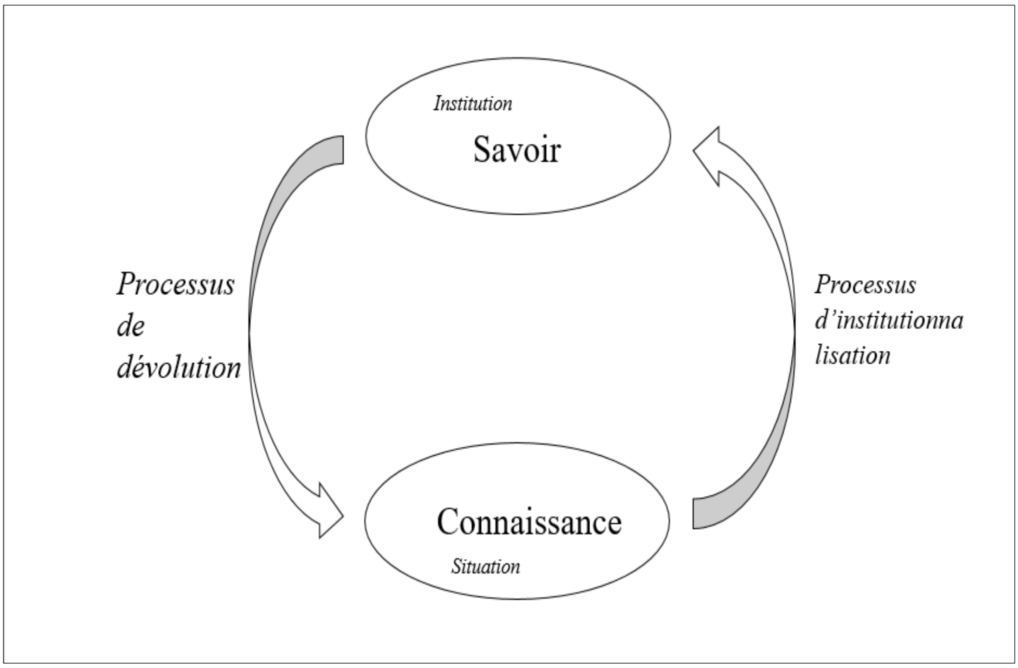


Figura 1. Processo de transformação conhecimento/saber.
Fonte: Margolinas (2012, p. 8)

Seguindo a perspectiva da TSD, mas com um direcionamento ao contexto olímpico, propõe-se a utilização de problemas da OBMEP na criação desse meio. Essa escolha refere-se à qualidade e à maneira desafiadora com que são apresentadas em seus certames. Conforme Fidelis (2014), para ir de encontro à solução desses problemas, o estudante precisa pensar em uma estratégia, e esse pensar implica diretamente no desenvolvimento do raciocínio, do espírito investigativo, consequentemente ajudando na ampliação do conhecimento matemático, o que contrapõe "o método de ensino há tempos dominante nas salas de aulas que, resumidamente, é o de transmitir modelos prontos na resolução de problemas padronizados por muitos livros didáticos". (Pinheiro, 2013, p. 10).

Desse modo, o planejamento da situação didática baseia-se em um problema retirado de provas da OBMEP[2] estruturado nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização e que compõem a TSD, o que, nesse contexto, denomina-se de Situação Didática Olímpica (SDO). A SDO, fundamentada pela TSD, é definida como:

> Um conjunto de relações estabelecidas implicitamente ou explicitamente, entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (compreendendo ainda o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos de um conhecimento

---

[2] Recuperado em: http://www.obmep.org.br/provas.htm.

> constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição e problemas ou um conjunto de problemas característicos das olimpíadas (Santos & Alves, 2017, p. 285).

Essas situações didáticas, construídas a partir de Problemas Olímpicos (PO), criam um ambiente de ensino semelhante ao de competições junto à inclusão de ferramentas tecnológicas que proporciona uma maior atratividade aos estudantes. A SDO deve apresentar alguns objetivos básicos:

> i. A partir de uma transposição didática, realizada pelo professor, dos problemas olímpicos, possa permitir o acesso ou a inclusão de um conjunto maior de estudantes ao ambiente de discussão ou « clima » de competição matemática, visando à elaboração de conhecimentos; ii. A partir de uma transposição didática permitir ao professor de Matemática perspectivar novas formas de abordagem (com o uso da tecnologia e exploração de softwares de Matemática) e descrição de problemas olímpicos, que não sejam intimamente restritos a uma tarefa de resolução de problemas, com o tempo previamente demarcado e atividades hegemonicamente individuais; iii. Divulgar e promover a sociabilização das ideias matemáticas intuitivas e estratégias características de situações problemas de olimpíadas não apenas para alunos reconhecidos como mais habilidosos diante do conhecimento matemático (Santos, 2018 como citado em Silva, Alves & Menezes, 2020, p. 335).

Esses aspectos presentes na SDO devem ser imprescindíveis para o uso dos Problemas Olímpicos (PO), com o propósito de atrair uma maior quantidade de estudantes junto ao auxílio da tecnologia, nesse caso o *software* GeoGebra, e criar um ambiente dinâmico em sala de aula.

2.2. Engenharia Didática (ED)

A pesquisa fundamentou-se na metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED), caracterizada “em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino” (Almouloud & Coutinho, 2008, p. 66) e se compara ao trabalho de um engenheiro que, para construir um projeto, baseia-se em estudos de tipo científico para aquisição de conhecimentos que auxiliem com problemas mais complexos que os objetos depurados da ciência (Artigue, 1995).

Essa metodologia se estrutura em quatro etapas: as análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e análise *a posteriori* e validação (Artigue, 1995). Tais fase têm como foco “o planejamento do ensino de um objeto matemático” (Figueiroa & Almouloud, 2019, p. 431).

Nas análises preliminares, faz-se um estudo sobre a epistemologia dos conteúdos visados pelo ensino, do ensino usual e seus efeitos, das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução, das condições e fatores de que dependem a construção didática efetiva, a consideração dos objetivos específicos da pesquisa e o estudo da transposição didática do saber, considerando o sistema educativo no qual o trabalho se insere (Almouloud & Coutinho, 2008), objetivando um amplo conhecimento sobre aspectos gerais do objeto de estudo.

A partir do estudo na primeira etapa, a análise *a priori* se consubstancia em definir as variáveis de comando que permitirão a progressão do estudante na aquisição dos conhecimentos através de situações didáticas escolhidas pelos pesquisadores com o objetivo de ensinar, nesse caso, conceitos de geometria euclidiana plana.

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), "o objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido". Essas variáveis didáticas "têm como função levar os alunos a utilizarem determinadas estratégias, em detrimento de outras" (Artigue, 1996 como citado em Lima & Neves, 2019, p. 698).

Na Experimentação, são analisadas as observações feitas durante a aplicação da situação, como todas as produções realizadas em sala de aula pelos alunos (Artigue, 1995). Esses dados podem ser completados, às vezes, utilizando outros métodos externos, como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos (Almouloud & Coutinho, 2008). Essa etapa, segundo Almouloud (2007, p. 177), "é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise *a priori* em um processo de complementação".

E por fim, a etapa de análise *a posteriori* e validação representa a análise dos dados obtidos na fase anterior. A análise *a posteriori* e validação "se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela" (Almouloud, 2007, p. 177). A análise desses dados baseia-se no confronto entre análise *a priori* e análise *a posteriori,* validando os objetivos propostos da investigação (Artigue, 1995).

Esse processo de validação se distingue em duas maneiras: a validação interna e a validação externa. Laborde (1997, p. 105) explica que a validação interna envolve "uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes" e, a validação externa estuda a "comparação das produções obtidas dentro ou fora da sequência com produções de outros alunos" (Laborde, 1997, p. 105). Nesse caso, realiza-se a avaliação interna.

Como o presente trabalho se trata de um recorte de dissertação, apresentam-se apenas as duas etapas finais da ED que trata da experimentação e análise *a posteriori* e validação que aborda alguns resultados trazidos no texto final.

3. Experimentação

Durante o percurso foi estabelecida a variável macrodidática que se consubstanciou pela concepção da situação didática, utilizando um problema da OBMEP amparada pelo *software* GeoGebra com base na Teoria das Situações

Didáticas (TSD), o que proporcionará ao estudante a construção do saber decorrente ao meio criado.

A partir de então, define-se as variáveis microdidáticas, visando à construção da situação didática, que teve como foco o ensino do teorema de Pitágoras. O PO traz uma aplicação do teorema de Pitágoras em uma situação-problema que envolve outros conhecimentos da geometria. Espera-se que, com a movimentação dos controles deslizantes adicionada à construção no *software* GeoGebra, os professores em formação inicial visualizem e utilizem essa possibilidade na sua resolução.

Já na Experimentação, “é o momento no qual as atividades elaboradas são desenvolvidas em sala de aula com os alunos” (Lima & Neves, 2019, p. 699). Sendo assim, o experimento ocorreu com 6 (seis) sujeitos, estudantes do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), identificados por L2 a L7, pela plataforma Google *Meet,* utilizada por orientação da universidade devido à paralização das instituições de ensino superior em razão da pandemia de Covid-19. No entanto, apresentou-se os dados mais relevantes enquanto a resolução do problema aplicado.

A escolha dos sujeitos partiu de um contato com uma professora da UVA, coordenadora do Programa de Iniciação Científica - PIC Jr, que realizava um curso de formação direcionado a discentes de licenciatura do curso de matemática da universidade com foco nos medalhistas da OBMEP. Sendo assim, o critério de escolha desses estudantes perpassou a perspectiva de serem alunos do curso de matemática, como também de fazerem parte do grupo de professores orientadores do PIC Jr.

O Problema Olímpico é uma questão retirada da prova da OBMEP, realizada no ano de 2012 para alunos do Ensino Médio (Nível 3/1° fase), referente ao conteúdo de geometria. Esse problema aborda conceitos, como: teorema de Pitágoras, razão e noções básicas de circunferência. Apresentou-se um PO adaptado ao *software* GeoGebra, para que os licenciandos explorem a ferramenta computacional com o propósito de identificar dados relevantes para a solução (Figura 2).

10. Na figura, *ABCD* é um quadrado de lado 1 e os arcos $\overset{\frown}{BD}$ e $\overset{\frown}{AC}$ têm centros *A* e *B*, respectivamente. Os círculos tangenciam esses arcos e um lado do quadrado, como indicado. Qual é a razão entre os raios do círculo maior e do círculo menor?

A) 4,5
B) 5
C) 5,5
D) 6
E) 6,5

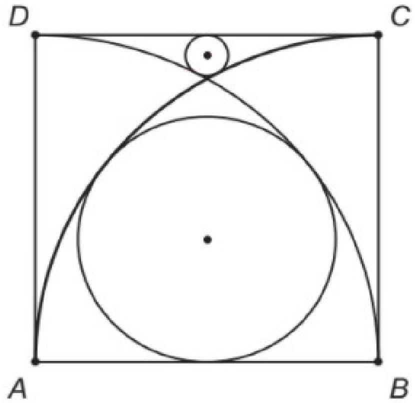


Figura 2. Problema Olímpico (PO).
Fonte: OBMEP (2020).

Figura 3. Qr Code para o acesso à figura pelo celular.
Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

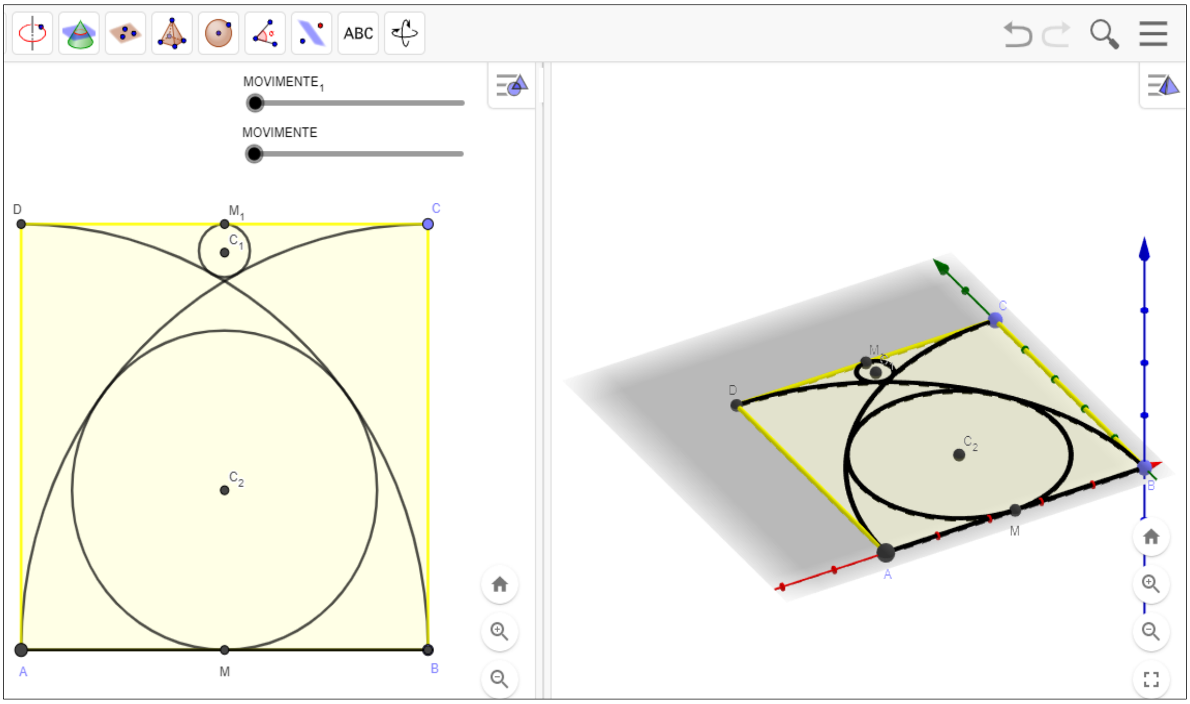


Figura 4. Layout da imagem do PO adaptado ao *software* GeoGebra.
Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Antes do início do experimento, o professor disponibilizou a construção da figura presente no PO pelo aplicativo de mensagens *WhatsApp*, os professores em formação inicial realizaram o *download* com a possibilidade do uso pelo computador ou pelo celular. Além da construção no *software* GeoGebra, também utilizaram caneta e papel para reproduzirem manualmente a escrita.

Esse primeiro contato (Figura 5) perpassou pela etapa de ação, da TSD. Segundo Pommer (2013, p. 18), “ocorrem interações do aluno com o *‘milieu’* (meio), onde o aluno reflete e simula tentativas para resolver o jogo ou problema, de modo a eleger um procedimento de resolução, dentro de um esquema de adaptação”.

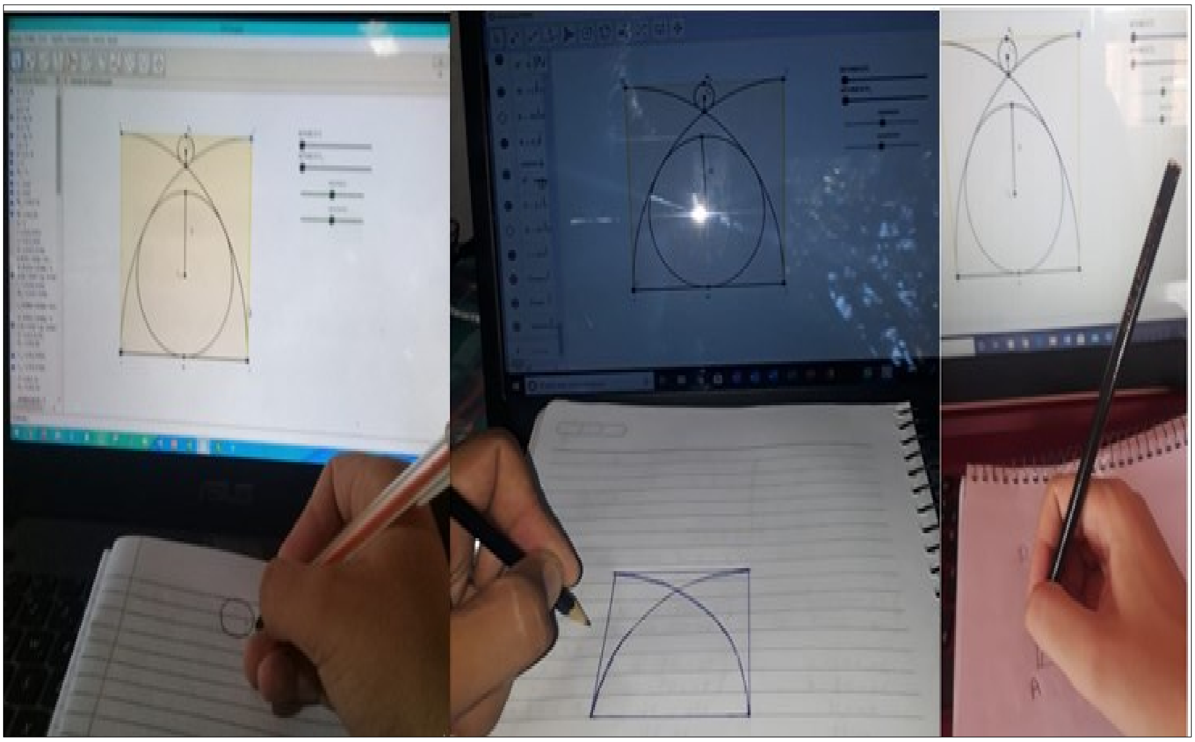


Figura 5. Contato inicial com a SDO por intermédio do software GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal.

Após a leitura do PO, os licenciandos sentiram dificuldades em desenvolver estratégias que os levassem a uma formulação. Diante disso, o pesquisador estimulou os licenciandos a explorarem o *software* GeoGebra, realizando movimentos com os “controles deslizantes”. A partir dessas tentativas e a exploração do *software,* foram apresentadas pelos sujeitos as primeiras hipóteses (Figura 6).

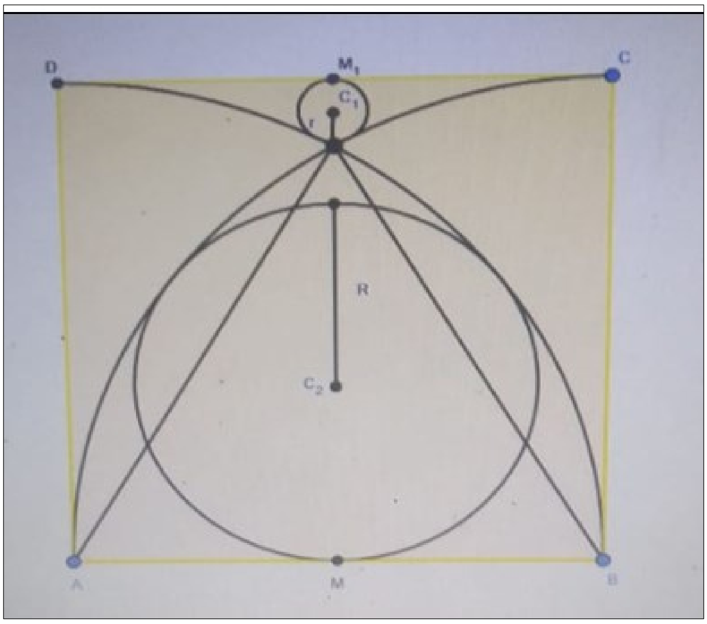


Figura 6. Tentativa inicial realizada pelo licenciando L2. Fonte: Arquivo pessoal.

A hipótese apresentada pelo L2 partiu da construção do triângulo formado pelo ponto A, o ponto B e o ponto de tangência entre as duas circunferências maior e a menor, a partir da movimentação dos controles deslizantes. Essa movimentação permitiu a construção de um triângulo equilátero de lado 1, que o levou a tentar encontrar a medida da altura desse triângulo para depois realizar a diferença do lado do quadrado com a altura desse triângulo. Durante a tentativa o licenciando L2 encontrou dificuldades e acabou desistindo de prosseguir em frente.

A partir da apresentação dessa proposta, o licenciando L5 sugeriu a construção do triângulo até o ponto C_1, que representa o centro da circunferência menor (Figura 7). Essas interações e observações de estratégias sugeridas pelos estudantes geraram um ambiente que proporcionou aos outros colegas a identificação de elementos não percebidos pelo sujeito que está apresentando, levando a uma construção da estratégia em grupo e formulação de uma estratégia mais sólida. Diante disso, o licenciando L5, juntando as informações coletadas pelo seu colega, apresentou de uma maneira mais organizada e contundente.

> L5: Após a movimentação dos controles deslizantes, eu fiz um triângulo, representado pelo ponto ΔAC_1B, por que que fiz isso? A partir disso eu vou saber que a base AB do triângulo vai ser 1 (pode ser confirmado pelo enunciado), o lado AC_1 terá medida 1 + r, como também o lado BC_1 também será 1 + r, desse modo, a altura do triângulo construído vai ser 1 – r. (Figura 7)

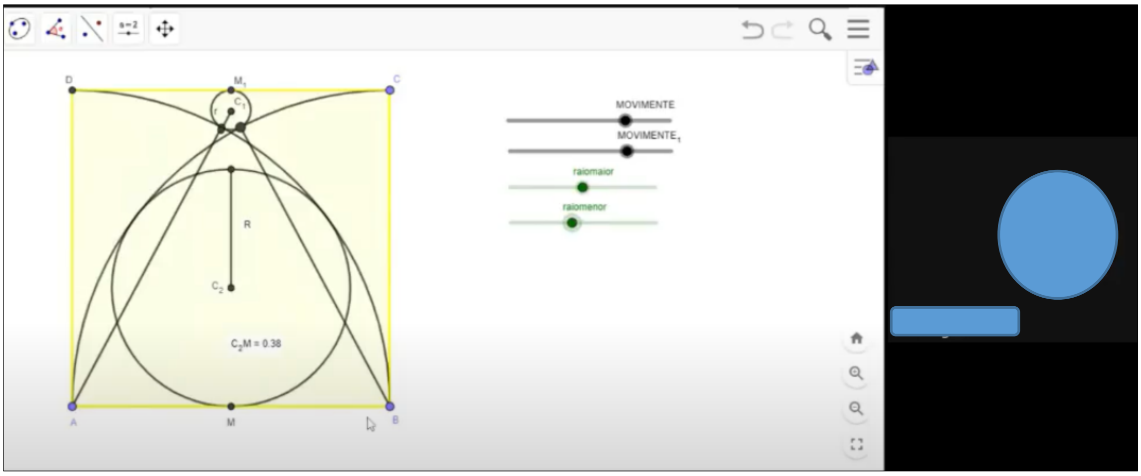


Figura 7. Construção do triângulo ΔAC_1B encontrado a partir da exploração do controle deslizante. Fonte: Arquivo pessoal

A partir dessas informações o licenciando L5 percebeu a possibilidade de delimitar a altura do triângulo ΔAC_1B, para conseguir, por meio dela, construir um triângulo retângulo em função do raio menor (r). Conforme o relato a seguir:

> L5: Essa altura tive como base a altura do quadrado que é 1 menos raio menor (r) pois é a diferença do topo do triângulo até o topo do quadrado todo. Com isso, você divide no meio, construindo um triângulo retângulo que terá medida $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{AC}_1 = 1 + r$ e $\overline{MC}_1 = 1 - r$. Desse modo, utilizando o teorema de Pitágoras chegarei ao valor de r (Figura 8).

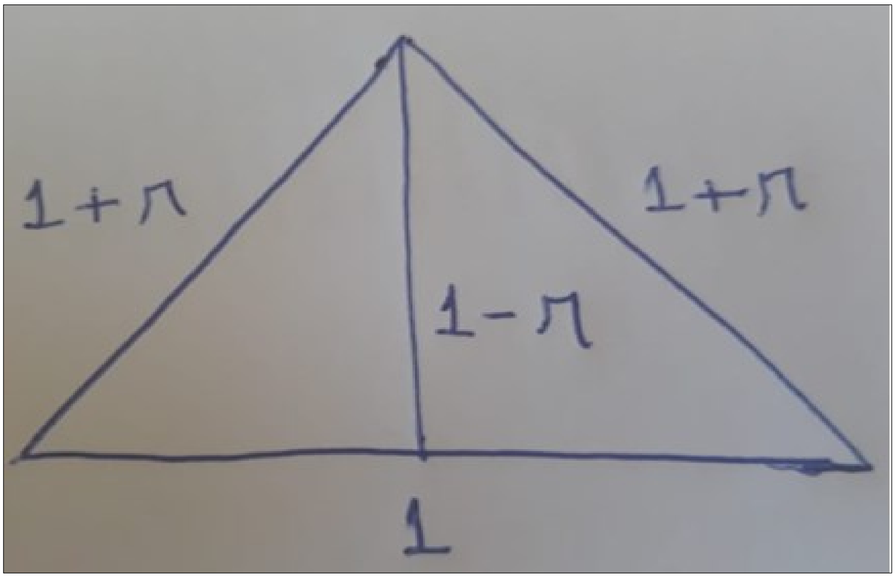


Figura 8. Medidas apresentadas pelo licenciando L5 em função do r.
Fonte: Arquivo pessoal.

Após a estratégia que perspectivou encontrar a medida do raio menor (r), o mesmo estudante também apresentou a maneira utilizada para determinar a medida do raio maior (R) (Figura 9).

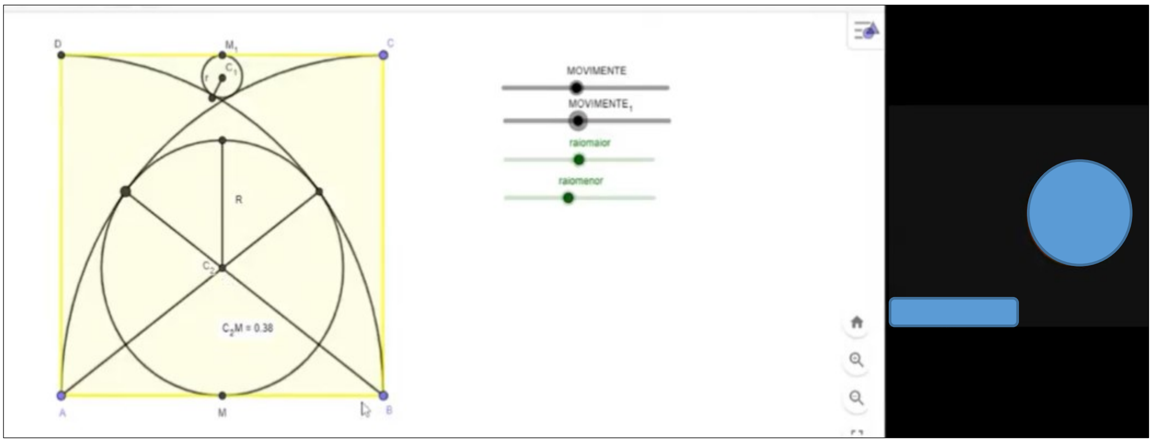


Figura 9. Estratégia utilizada para encontrar a medida de R.
Fonte: Arquivo pessoal.

Novamente realizando a movimentação dos raios dos arcos $\overline{AC}\ e\ \overline{BD}$, fazendo com que os dois coincidissem com o C_2, ou seja, o centro do círculo maior, proporcionou ao licenciando a construção do triângulo ΔAC_2B. A partir dessa construção realizada pelo L5, a licencianda questionou pelo aplicativo *WhatsApp:* "Será que daria por esse triângulo AC_2B (Figura 10)?", referindo-se à altura desse triângulo, ou seja, a medida do raio maior (R).

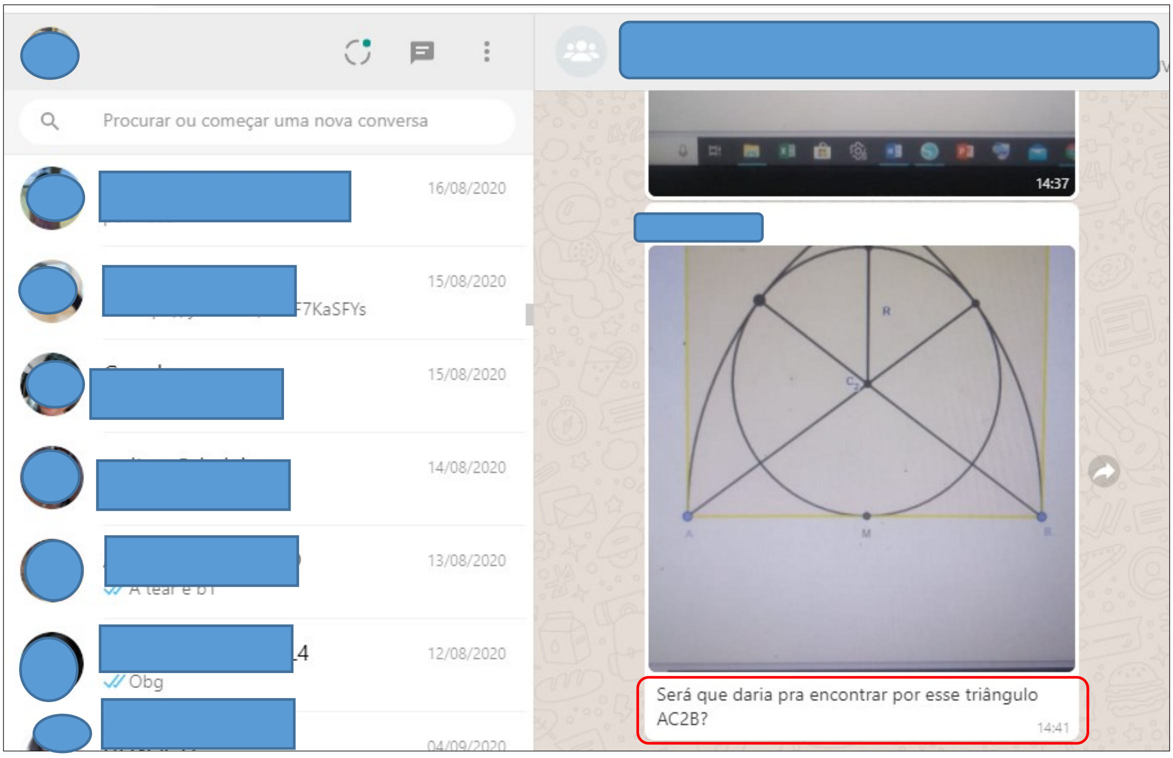


Figura 10. Questionamento do L2 realizado pelo aplicativo WhatsApp.
Fonte: Arquivo pessoal.

Com essa informação do L2, o L5 percebeu que a altura desse triângulo é a medida do raio maior (R), além disso, também notou que a medida do segmento $\overline{AC_2}$ é $1 - R$ e o segmento $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, formando um triângulo retângulo ΔAC_2M em função de R (Figura 11).

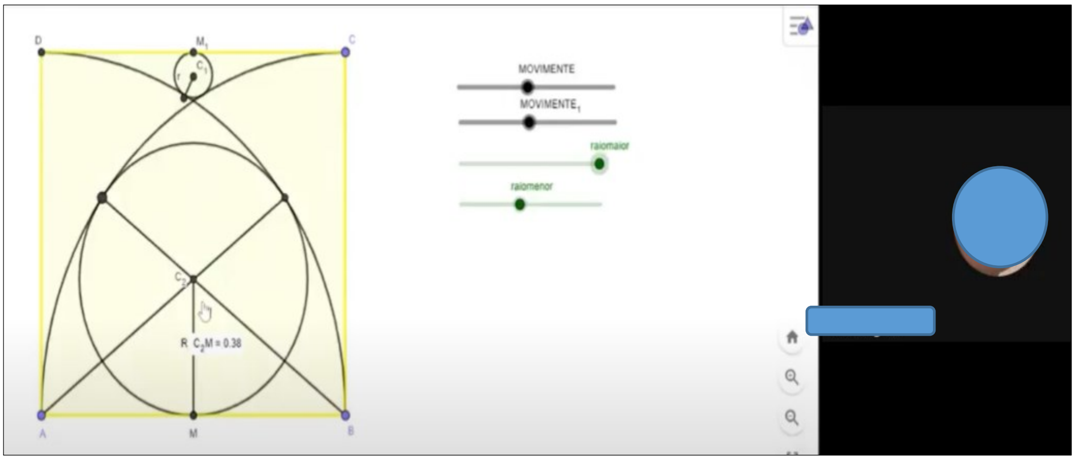


Figura 11. Construção do triângulo ∆AC2B identificando sua altura R.
Fonte: Arquivo pessoal.

Com a visualização desse triângulo, o L5 identificou as medidas que levaram à estratégia construída para encontrar a medida do raio maior R (Figura 12).

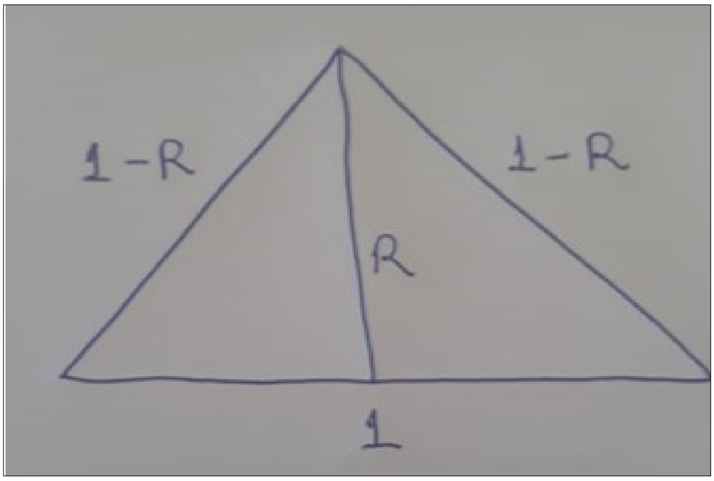


Figura 12. Identificando as medidas do triângulo ∆AC2B em função do raio r.
Fonte: Arquivo pessoal.

O que foi observado durante o pensamento do estudante é que a proposta para identificar a medida do raio menor (r) e a medida do raio maior (R) foi a mesma. Com a movimentação dos raios dos arcos $\overline{AB}\ e\ \overline{CD}$ propiciado pelos controles deslizantes, proporcionou-se a visualização possibilitando a construção desses dois triângulos ΔAC_1M e ΔAC_2M. Após a construção dos triângulos, o L5 utilizou sua capacidade de interpretação para identificar os dados que a SDO não apresentou, que foram as medidas laterais. A partir desses dados, o estudante identificou a possibilidade de aplicar o teorema de Pitágoras em função dos raios R e r (Figura 13).

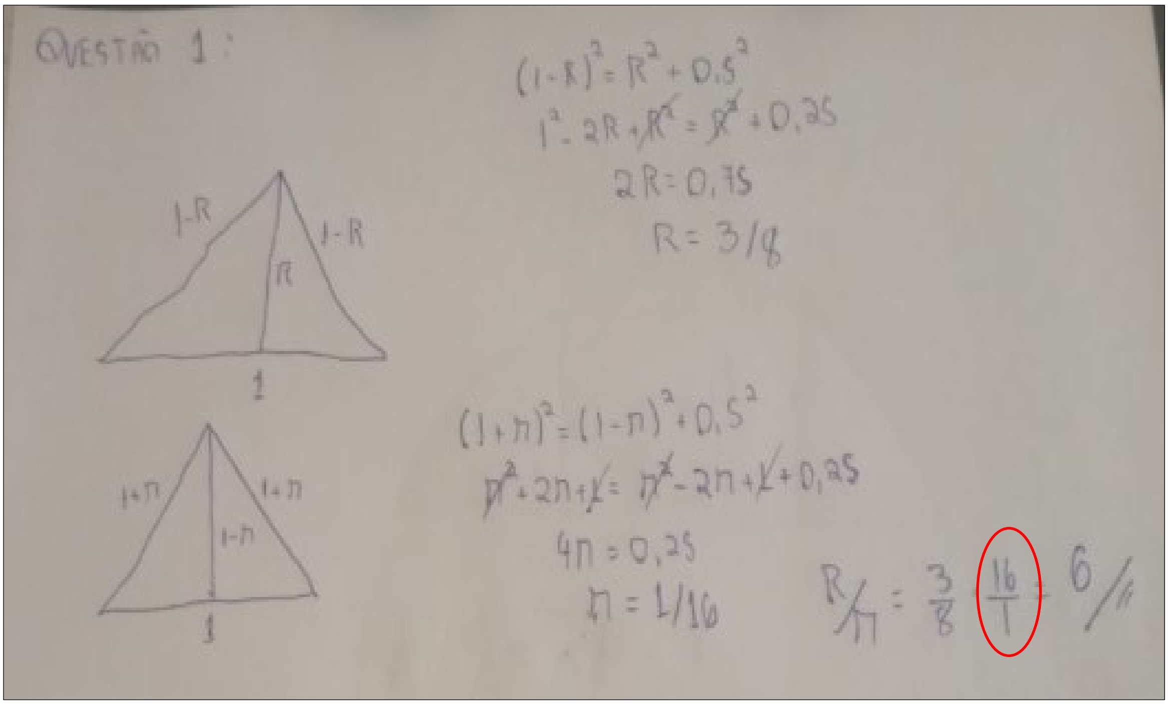


Figura 13. Solução apresentada pelo licenciando L5, validando sua estratégia.
Fonte: Arquivo pessoal.

Diante da estratégia utilizada pelo licenciando L5, por intermédio do *software* GeoGebra, o que proporcionou a identificação de subsídios para a aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar o raio maior R e o raio menor r, o resultado da razão do raio maior e do raio maior pedido no enunciando foi encontrado, tendo como resposta 6 (Figura 13).

Para chegar ao resultado final, foram aplicadas inicialmente (Figura 13) as medidas do triângulo retângulo ΔAC_2M, representado pelos valores $\overline{AC}_2 = 1 - R$, $C_2M = R$ e $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, logo após aplicado ao teorema de Pitágoras, encontrando o valor do raio maior $R = \frac{3}{8}$. Da mesma maneira, o triângulo retângulo ΔAC_1M, cujas medidas encontradas foram $\overline{AC}_1 = 1 + r$, $\overline{MC}_1 = 1 - r$ e $\overline{AM} = \frac{1}{2}$ aplicando essas medidas no teorema de Pitágoras, foi encontrado o valor do raio menor r = $\frac{1}{16}$. Com esses dois valores encontrados, o licenciando L5 realizou o cálculo da razão entre o raio maior $R = \frac{3}{8}$ pelo raio menor $r = \frac{1}{16}$, cujo resultado obtido foi 6 (Figura 13), o que validou suas hipóteses.

Na etapa final, a de institucionalização, o professor apresentou qual seu objetivo junto ao PO, relacionando a movimentação dos “controles deslizantes” à possibilidade de visualização de elementos que proporcionaram a utilização da aplicação do teorema de Pitágoras, conceito previsto na concepção da SDO, além de outros conceitos da geometria plana.

4. Análise a *posteriori* e validação

No tópico antecessor, foi apresentada uma SDO para o ensino de geometria, mais especificamente sobre o tema Teorema de Pitágoras. Durante a resolução, pode-se destacar cada ação realizada pelo discente com base nas etapas TSD, ação, formulação, validação e a institucionalização, esta última, pelo docente. A partir dessa proposta, destacou-se alguns pontos: no primeiro, destacou-se o uso *software* GeoGebra pelo aluno, observou-se, durante a aplicação, que foi satisfatório a sua contribuição, partindo do objetivo da questão, que se tratou do uso dos controles deslizantes para a visualização do conceito relacionado ao teorema de Pitágoras e sua aplicação.

Dessa forma, o *software* GeoGebra, no momento da experimentação, por meio da movimentação dos controles deslizantes, incluídos no problema e na visualização das propriedades geométricas, proporcionou aos licenciandos a observação dos comportamentos das medidas dos segmentos e raios, diferentemente do problema, quanto à sua forma estática apresentada no material impresso.

Esse diferencial citado anteriormente possibilitou um maior dinamismo em sua resolução, o que modificou o comportamento do estudante frente ao problema apresentado. Conforme o relato de um dos licenciandos, o L2, “se não fosse o *software* GeoGebra, eu não tinha nem iniciado a questão”. Além disso, contribui para uma boa visualização dos conceitos geométricos, conforme o L5 “ele contribui para uma melhor visualização do problema proposto, assim sendo possível a melhor visualização de proporções e propriedades das figuras”. Desse modo, os usos desses softwares flexibilizam a capacidade de raciocinar do estudante partindo do pressuposto que “em certos momentos a utilização [...] podem facilitar a dinâmica em sala de aula e pode, também, propiciar a exploração de algo que seria de difícil compreensão sem esses recursos” (Rico & Maria, 2014, p. 386).

Além disso, percebeu-se, durante o experimento, que o uso do *software* GeoGebra deixou o problema mais claro e mais fácil de entender a partir do momento da movimentação dos controles deslizantes. Essas movimentações fizeram os licenciandos perceberem que a medida do lado do quadrado também representava a medida do raio dos arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{AC}$, possibilitando a construção de triângulos e proporcionando novos métodos para a resolução, o que torna menos complexo a resolução do PO. Conforme Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39), a inclusão do *software* GeoGebra durante a resolução da SDO possibilitou aos estudantes “a descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsionando a produção de sentidos matemáticos”.

Desse modo, o *software* GeoGebra foi capaz de trazer dinamismo para figura estática abordada no PO, sendo possível que o professor crie uma estratégia junto ao seu uso para o ensino do conteúdo proposto, nesse caso os conceitos de geometria, dando ênfase a aplicação do teorema de Pitágoras, tornando a explicação clara e simplificada para o discente, fazendo do planejamento um dos principais papéis do professor.

Sobre a utilização do GeoGebra pelo professor, destacou-se a adaptação do PO. Tal adaptação, de acordo com o nível da turma, tornou-se outro ponto importante do professor como construtor de atividades, proporcionando ao estudante a resolução de problemas, levando-o ao aprendizado do conteúdo. Nesse caso, a utilização do *software* GeoGebra como ferramenta metodológica possibilitou essa adaptação do PO. A proposta não apenas incluiu o GeoGebra como artefato, mas como a possibilidade de criar outras visões sobre o problema, disponibilizando novos caminhos para a resolução, integrando a prática pedagógica do professor e não apenas inserindo em sua prática pedagógica (Basniak, Scaldelai, Paulek & Felipe, 2015). Sobre essa integração da tecnologia na prática pedagógica do professor, ainda é destacado que

> A falta de discussões em relação às possibilidades que a utilização das tecnologias pode trazer a rotina de sala de aula, em detrimento as formações que priorizam o treinamento dos professores na parte técnica dos recursos tecnológicos, tem ocasionado que o que se vê nas escolas é a adaptação das tecnologias de informação e da comunicação às velhas metodologias utilizadas em sala de aula, sem observarmos mudanças no processo de ensino e aprendizagem (Basniak et al., 2015, p. 995).

Como base nisso, o que se pretendeu foi apresentação de uma SDO ao docente, junto da inclusão do *software* GeoGebra em sala de aula, possibilitando a modificação do pensamento do estudante ao utilizá-lo e não apenas a adaptando às velhas metodologias tradicionais. Quanto ao uso dessas ferramentas tecnológicas pelo professor, destaca-se que

> Além das potencialidades oferecidas, existem outros aspectos fundamentais a serem considerados com relação ao uso educacional de

> uma tecnologia como por exemplo o papel do professor, o design ou a natureza das atividades propostas, dentre outros. A organização do cenário (imaginado) condiciona a natureza das interações, os diferentes tipos de negociações de significados e os conhecimentos produzidos no ambiente de aprendizagem construído (Borba et al., 2014, p. 36).

Desse modo, a transposição didática desse PO foi um desafio ao docente quanto à aplicação em sala de aula, tendo em visto o trabalho extra com o intuito de adequar ao nível da turma, indo de encontro com o que pensa a licencianda L6, pois, conforme ela, o uso dos PO em sala de aula é possível mais existe uma necessidade dessa adaptação em relação à sala na qual se pretende ensinar, “pois uma sala é muito heterogênea, existem alunos que possuem bastante dificuldades com conceitos básicos da matemática. Portanto, a questão deve estar de acordo com o nível dos alunos, eles devem ser desafiados, porém não devem achar impossível”.

Portanto, esse cenário vivenciado pelo licenciandos ao resolver esses problemas, em consonância com a utilização do *software* GeoGebra, deve possibilitar a reflexão quanto à intencionalidade de se ensinar algo, pensando nas possibilidades de adaptação e nas potencialidades que podem ser exploradas durante a criação de um cenário de aprendizagem, apoiando-se nessas ferramentas como complemento ao aluno.

Destacou-se outro ponto que considera a mediação do professor essencial, participando em momentos necessários, por meio de indagações, nas discussões e no estímulo ao uso do *software* GeoGebra, objetivando expandir o campo de atuação do estudante. Essa participação deve ser imprescindível durante as etapas que correspondem à situação adidática (ação, formulação e validação), ocorrendo apenas como mediador dando total autonomia aos sujeitos na construção do conhecimento. Conforme L3, nessa mediação

> O professor deve dar o mínimo de auxílio na condução da aula, como, por exemplo, na manipulação ou de como manipula o *software* e deixar o aluno realizar as construções no mesmo, pois, assim, ele estará sendo protagonista do seu próprio conhecimento.

Desse modo, a ação do professor previamente na criação do cenário de aprendizagem que deve ocorrer desde a procura dos problemas que proporcionem essa interação durante a resolução, quanto à antecipação nas dificuldades que podem aparecer aos estudantes. A participação do professor deve ocorrer na perspectiva da Didática da Matemática, objetivando os seguintes aspectos:

> (a) procurar situações de aprendizagem onde os alunos possam dar sentido ao conhecimento, através da contextualização e personalização do saber, num movimento de vivenciar o conhecimento pela ação do próprio aluno;
>
> (b) ajudar os alunos no sentido inverso, ou seja, descontextualizando e despersonalizando os conhecimentos, de modo análogo como fazem os matemáticos, o que conduz a tornar as produções dos alunos fatos universais e reutilizáveis em outras situações e contextos (Pommer, 2013, p. 13).

Apoiando-se na metodologia ED e a TSD, a construção da situação didática pelo pesquisador proporcionou prever, na etapa de análise *a priori* e concepção, dificuldades com as quais os licenciandos poderiam se deparar, permitindo o controle do ambiente de ensino. Essa previsão também propiciou junto ao problema a disponibilização de ferramentas tecnológicas, como o uso do GeoGebra, que auxiliassem os participantes na percepção de diferentes estratégias, como a aplicação do teorema de Pitágoras.

Esse cenário criado pelo docente, a partir da TSD, propiciou as interações entre aluno, meio e saber, mobilizados na etapa de ação, formulação, validação e como papel do professor a sua participação, de maneira efetiva, ocorrendo apenas na institucionalização dos saberes porque

> Se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e alunos; quando após o momento adequado ele reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações; é negociada numa dialética (Almouloud, 2007, p. 40).

Quando se relaciona ao papel do aluno frente à teoria TSD, surgem momentos de diálogos, de dúvidas, de tentativas com direcionamento para a resolução do problema, permitindo

> Que o aluno aja sobre a situação, interagindo com o meio e a situação proposta, formule hipóteses utilizando-se de ferramentas matemáticas, apresente ferramentas de forma a validar a solução do seu problema e, o professor institucionalize favorecendo a observação das relações entre o saber, o aprendiz e o meio a fim de que todos se apropriem do saber como parte dos esquemas mentais (Figueroa & Almouloud, 2019, p. 433).

Com base no que foi descrito na etapa de experimentação, todas as etapas da TSD foram realizadas, e os estudantes perpassaram pela etapa de ação se defrontando com os problemas, realizando tentativas, analisando o comportamento da figura após as movimentações iniciais com os controles deslizantes, identificando valores para as medidas laterais necessárias para a construção de hipóteses.

O problema também possibilitou a formulação de hipóteses, a partir dos levantamentos de dados na etapa de ação, levando a discussões em torno das estratégias propostas pelos estudantes. Após a etapa de formulação, o aluno teve a oportunidade de validar as hipóteses construídas, em certo momento levando ao erro, mas com a ajuda dos colegas, de forma a superar as dificuldades e a levar, da maneira correta, ao resultado do problema e à aplicação do teorema de Pitágoras.

Visto que essas ações realizadas pelos estudantes foram previstas pelo professor na concepção da situação didática, o que lhes deu total autonomia e liberdade de criação no momento da resolução do problema e a participação mínima durante a atividade, agindo como mediador das situações. Destaca-se também como papel do aluno a aceitação do problema, o que Pommer define como devolução

> A devolução significa o aceite do aluno pela responsabilidade na busca da solução do jogo ou problema proposto, assim como pelo entendimento que o professor elaborou uma situação passível de ser resolvida, pelo menos em parte, de acordo com os conhecimentos anteriores que ele possuiu. Assim, feita a devolução, a situação proposta se converte no problema do aluno, o que situa uma condição essencial para que o aluno aprenda: o

> papel ativo e compromissado do aluno diante de uma situação de aprendizagem (Pommer, 2013, p. 13).

Observou-se durante a experimentação que os alunos tiveram dificuldades quando se defrontaram com o problema, mas, a partir das ferramentas acrescentadas, como o *software* GeoGebra, por meio da visualização e movimentação dos elementos adicionados, como os controles deslizantes, houve um aceite da questão e deram prosseguimento na resolução.

5. Considerações finais

Este artigo trouxe dados parciais de uma investigação que utilizou problemas da OBMEP sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas (TSD), com amparo do *software* GeoGebra. De um modo geral, proporcionou aos participantes um ambiente dinâmico e interativo em contato com a ferramenta apresentada e com a teoria abordada.

Os resultados constataram que a metodologia, ED, e a teoria, TSD, em complementariedade, contribuem significativamente tanto para o professor que ensina matemática como para o aluno que aprende matemática. Para o professor, contribuiu em relação à sua fundamentação e dificuldades no ensino do conteúdo de geometria; ao seu planejamento, prevendo situações que poderiam ocorrer e na criação de ambientes que venham ocorrer o aprendizado do aluno. Além disso, o trabalho na adaptação do problema da OBMEP com o uso do *software* GeoGebra, utilizado no ensino não como um artefato, mas como uma ferramenta necessária a modificação do pensamento do estudante.

Para o aluno, proporcionou a possibilidade de agir, formular e validar as hipóteses criadas por ele durante a resolução do problema, percorrendo o caminho de um matemático, com autonomia e liberdade de criação, utilizando de seus meios para a ir de encontro a solução, como também ao aprendizado do conteúdo em questão, dando ênfase também à ferramenta tecnológica utilizada durante a resolução do PO, o *software* GeoGebra, o qual proporcionou a superação de dificuldades encontradas.

Constatou-se que os problemas de olimpíadas são desafiadores, bem elaborados e que trazem em si vários conceitos matemáticos. Essa diversidade de conceitos possibilitou o uso de maneiras diferentes de resolução, contribuindo para o estudante, a exploração dos conhecimentos prévios aprendidos, desenvolvendo sua autonomia na construção do saber. Desse modo, todos esses aspectos podem ser positivos na atração dos estudantes em relação à resolução desses PO, baseando-se em uma adaptação, realizada pelo docente, com foco na realidade da turma.

Dessa forma, concebeu-se uma situação didática, utilizando um problema da OBMEP (SDO), com o foco no ensino de geometria, dando ênfase na aplicação do teorema de Pitágoras. Utilizou-se o *software* GeoGebra frente à adaptação da construção do problema trazido nas provas dessa competição, o que proporcionou a superação das dificuldades e o alcance do objetivo da SDO do professor quanto à aplicação do teorema de Pitágoras.

Durante a investigação desenvolvida no Brasil, ocorreram alguns imprevistos que concorreram para uma modificação substancial da forma de aplicação e desenvolvimento da pesquisa, devido à pandemia de Covid-19, aplicação esta que ocorreria de forma presencial e, consequentemente, passou a ser desenvolvida remotamente, via plataforma *Google Meet*, o que foi desafiador e gratificante para o pesquisador e proporcionou uma nova maneira de ensino.

Salienta-se que todos os professores têm acesso a esse material disponibilizado pela OBMEP, mas os programas de formação não são direcionados a todos — o que torna um grande desafio quanto ao uso e inclusão dessas questões em sala de aula. Além disso, o grau de formalidade dos problemas acaba excluindo uma quantidade de estudantes que apresenta baixo desempenho na disciplina, tornando importantes e necessários os trabalhos com essa temática.

Diante disso, perspectivou-se, nesta investigação, apresentar os dados parciais de uma proposta aos professores e licenciandos de matemática, utilizando Problemas Olímpicos (PO), adaptando junto ao *software* GeoGebra, ampliando o número de estudantes que terão acesso a esses modelos de questões. Ademais, na disponibilização de meios aos professores para incluir esses materiais que a OBMEP dispõe no planejamento diário, como alternativo ao livro didático. Nesse contexto, o recurso da tecnologia, tendo em vista a utilização do *software* GeoGebra, proporcionou um itinerário diferenciado para a promoção do entendimento e compreensão matemática, tendo em vista uma ênfase na visualização e percepção de propriedades matemáticas dinâmicas possibilitadas pelo software. (Alves, 2019; 2020).

Bibliografia

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora da Universidade Federal do Paraná.

Almouloud, S., Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*. 3(6), 62-77. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62/12137

Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas (SDO): ensino de Olimpíadas de Matemática com o arrimo do software GeoGebra como recurso na visualização. *Revista Alexandria*. 13 (1), 319 – 341. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2020v13n1p319

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the olympic didactic situation (ODS): teaching mathematics with support of the geogebra software. *Acta Didactica Napocensia*, 12 (2), 97-116. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de http://padi.psiedu.ubbcluj.ro/adn/article_12_2_8.pdf

Artigue, M. (1995). Ingenieria Didática. In: M. Artigue, R. Douady, Moreno, L., & P. Gomez,. (eds.), *Ingeniéria didatica en Educacion Matemática: Un esquema para* *la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-61). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Azevedo, I. F., & Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas e o GeoGebra contribuindo na formação inicial do professor de Matemática. *Indagatio Didactica*,12 (5), 393-414. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/23493/17157

Basniak, M. I., Scadelai, D., Paulek, C. M., Felipe, N. A. (2015). Tecnologias digitais no ensino: discussões a partir de propostas desenvolvidas por licenciandos envolvendo polinômios. *Educação Matemática em Pesquisa.* 17 (5), 989 – 1012. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25010/pdf

Borba, M. C., Silva, R. S. R., Gadanidis, G. (2014*). Fases da tecnologia digital em educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Autêntica, Belo Horizonte.

Brasil. (2017). *Ministério da Educação.* PNLD 2018: Matemática – guia de Livros Didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica.

Brousseau, G. (1986) Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Mathematics. Université Sciences et Technologies. 1986. (Tese de Doutoramento). L'université de Bordeaux I – França.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). teaching fractions through Situations: A fundamental Experiment. New York, London. Springer.

Brousseau, G. (2008). Introdução aos estudos da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. Editora ática.

Fidelis, E. C. (2014). *A OBMEP sob uma perspectiva de resolução de problemas.* 2014. 57f. Dissertação [Mestrado Profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT. Universidade de Brasília – UnB, Brasília] https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/17049/1/2014_EduardoCordeiroFideles.pdf

Figueroa, T. D., Almouloud, S. A. (2019). Atividades intermediárias - processo de criação do aluno (PCA): um MER para o ensino do conceito de limites. *Educação Matemática em Pesquisa*. 21 (5), 428-444. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/45597/pdf_1

Freitas, J. L. M., Pais, L. C. (2009). Tendências relativas ao estudo da argumentação no ensino da geometria em livros didáticos. In: Pires, C. M. C., Freitas, J. L. M., Ortigão, M. I. R., Grando, N. I., & Machado, S. D. A., (eds). *Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e médio: pesquisas e perspectivas*. (pp. 150-164). Editora Musa.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, 10 (1) p. 97 -112. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de Doi : https://doi.org/10.4267/2042/23800

Lima, R. G. A., Neves, T. G. (2019). Possibilidades de uso da engenharia didática na educação matemática e no ensino regular**.** *Educação matemática em pesquisa.* 21 (5), 694-708. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de DOI: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p694-708

Margolinas, C. (2012) Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières?. *Sociologie et didactiques: vers une transgression des frontières*, Lausanne, Suisse. pp.17-44, 2012.

OBMEP. Apresentação *[em línea]* (2020). Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm

Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetike.* 1 (1), 7-17. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724

Pinheiro, T. A. (2013). *Soluções não clássicas para os problemas da OBMEP.* [Dissertação Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT, Universidade Federal de Santa Maria]. https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10936/PINHEIRO%2c%20TARCIUS%20ALIEVI.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Pires, C. M. C. (2009). Implementação de inovações curriculares em Matemática: embates com concepções, crenças e saberes de professores. In: Pires, C. M. C., Freitas, J. L. M., Ortigão, M. I. R., Grando, N. I., & Machado, S. D. A., (eds). *Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e médio: pesquisas e perspectivas.* (pp. 167-190).

Rico, E. T. M., Maria, S. A. A. (2014). Tecnologias Digitais na sala de aula: O uso do Software Graphmatica como ferramenta pedagógica. In L. M. R. Tarouco, V. M. Costa, B. G. Ávila, M. R. Bez, & E. F. Santos (Coord.), *Objetos de Aprendizagem: Teoria e prática.* (pp. 385-398). Porto Alegre, BRASIL: Evangraf. Editora Musa.

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*. http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro%20Eng%C2%AA%20Did%C3%A1tica%202013.pdf

Santos, A. P. R. A., Alves, F. R. V. (2017). A teoria das situações didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma aplicação do Teorema de Pitot. *Revista Indagatio Didactica*, 9, (4) 279-296. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/976/802

Silva, J. G. A., Alves, F. R. V., & Menezes, D. B. (2020). Aspectos da Teoria das Situações Didáticas aplica ao ensino de Geometria plana referente a problemas das Olimpíadas de Matemática com o amparo do software GeoGebra. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. 5, (2), 328-342. Recuperado em 01 de Janeiro de 2021, de https://www.jornaisdesergipe.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/13325

Autores:

José Gleison Alves da Silva: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo o IFCE, Professor de Matemática do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Sobral, Ce, Brasil e, Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA. Email: gleison.profmat.seduc@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-3093-0239

Francisco Régis Vieira Alves: Professor de Matemática do IFCE, Campus Fortaleza. Bolsista de produtividade em pesquisa do Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e tecnológico CNPQ-PQ2. Professor Titular do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará, departamento de Matemática e Física. Docente permanente do mestrado acadêmico em ensino de Ciências e Matemática PGECE/IFCE. Docente permanente do doutorado em REDE Rede Nordeste de Ensino. Email: fregis@ifce.edu.br https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Daniel Brandão Menezes: Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Ceará - UFC, Mestre em Matemática pela UFC, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará - UECE e professor titular da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, Brasil. E-mail: brandaomenezes@hotmail.com https://orcid.org/0000-0002-5930-7969

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-23

https://union.fespm.es

Análisis de una experiencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Gretel A. Fernández von Metzen, María N. León, Claudia M. Zang

Fecha de recepción: 22/11/2020
Fecha de aceptación: 13/02/2021

Resumen	El presente trabajo aborda reflexiones que derivan del análisis e implementación de una experiencia didáctica que pone en juego a los objetos que caracterizan a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Llevada a cabo con estudiantes del profesorado en Matemática, en el marco de una investigación. A partir de las producciones de los estudiantes se analizan las transformaciones semióticas puestas en juego para los diferentes registros semióticos estudiados. La conversión hacia el registro simbólico del modelo matemático propuesto, es el que mayores dificultades generó, además se observó cierto predominio hacia el tratamiento escalar en detrimento del vectorial. **Palabras clave**: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, registros de representación semiótica, Ingeniería Didáctica.
Abstract	The present work deals with reflections derived from the analysis and implementation of a didactic experience that involves the objects that characterize the systems of linear differential equations. Carried out with students of the teacher training course in Mathematics, in the framework of an investigation. From the students' productions, the semiotic transformations put into play for the different semiotic registers studied are analyzed. The conversion towards the symbolic register of the proposed mathematical model is the one that generated the greatest difficulties. In addition, it was observed certain predominance towards the scalar treatment in detriment of the vectorial one. **Keywords**: Systems of linear differential equations, semiotic representation registers, Didactic Engineering.
Resumo	O presente trabalho aborda reflexões que decorrem da análise e implementação de uma experiência didática que envolve os objetos que caracterizam os sistemas de equações diferenciais lineares. Realizado com alunos-professores de Matemática, no âmbito de uma investigação. A partir das produções dos alunos, são analisadas as transformações semióticas postas em jogo para os diferentes registros semióticos estudados. A conversão para o registro simbólico do modelo matemático proposto é a que gerou maiores dificuldades, além disso, foi observada certa predominância para o tratamento escalar em detrimento do vetor. **Palavras-chave:** Sistemas de equações diferenciais lineares, registros de representação semiótica, Engenharia Didática.

1. Introducción

El análisis de la propia práctica, independientemente de la perspectiva teórica en la que se sustenta el mismo, constituye para el docente una de las herramientas fundamentales para evaluar el curso de las propuestas que diseña e implementa a diario, en las asignaturas donde se desempeña. En particular, este trabajo se fundamenta en las premisas del constructivismo, de este proceso de análisis emerge información que brinda al docente la posibilidad de adquirir conocimiento acerca de la comprensión que los estudiantes han logrado con la implementación de sus propuestas. A su vez, posibilita revisar, ajustar e incorporar diferentes modificaciones que considere convenientes para lograr los objetivos trazados en su planificación. En este sentido, este documento se derivó de un estudio realizado en el marco de una investigación de tesis de postgrado, cuyo objetivo general consistió en diseñar e implementar prácticas significativas para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Estas propuestas de enseñanza permitieron a los docentes tener acceso a las producciones de los estudiantes. Ello viabilizó caracterizar las relaciones entre la representación escalar y vectorial que admite un sistema y que fueron empleadas por los alumnos para su resolución.

El presente escrito pretende exponer la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de una consigna implementada durante el proceso de enseñanza. La misma se ejecutó en el marco de un taller con estudiantes del profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM) al finalizar el primer cuatrimestre del año 2017.

En las próximas secciones se presentará una síntesis del marco teórico que sustenta cada una de las acciones realizadas, los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta al momento de recolectar y analizar los datos que se derivan de las diferentes intervenciones, el análisis a priori y a posteriori de la propuesta didáctica implementada, y para finalizar, una sección destinada a las reflexiones que emergen de este trabajo.

2. Fundamentos teóricos

A partir del análisis de libros de texto, realizado preliminarmente al diseño de la actividad, se detectó que, ya sea a nivel de métodos de resolución como a aplicaciones, generalmente los sistemas de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales prevalecen por sobre los no lineales. Esta particularidad no es exclusiva de los sistemas, situación análoga se observó con las EDO lineales y no lineales (Zang, Fernández von Metzen, León y Vila Torres, 2017). Cabe aclarar que el estudio de las primeras, desde un enfoque algebraico, presenta grandes ventajas en relación a las segundas porque siempre se tiene un método analítico de resolución. Paralelamente, los métodos cualitativos y numéricos que sustentan el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales, también son válidos para las lineales. El estudio de las ecuaciones no lineales implica mayores desafíos matemáticos, dado que no siempre es posible encontrar un método analítico apropiado para hallar su solución. Sin embargo, esta complejidad se atenúa cuando el abordaje de las ecuaciones no lineales se realiza empleando técnicas cualitativas y numéricas, auxiliados con recursos tecnológicos (Blanchard, Devaney, Hall, 1998).

Una aplicación de los sistemas, ampliamente citada en la bibliografía, es el análisis de compartimientos que se inserta en el modelado de situaciones que involucren mezclas de sustancias. Se entiende que:

> […] un proceso o sistema complejo puede dividirse en subsistemas o "compartimientos" más simples que pueden ser analizados de manera separada. Entonces el sistema completo puede modelarse describiendo las interacciones entre los diferentes compartimientos. Así una planta química podría consistir en una sucesión de etapas separadas (o incluso compartimientos físicos) en los que varios reactivos y productos se combinan o mezclan. Puede suceder que una sola ecuación diferencial describa cada uno de los compartimientos del sistema, y luego el sistema físico completo se modela por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales (Edwards y Penney, 2001, p.310).

Un modelo de compartimientos está conformado por un número finito de componentes (o cajas) unidos por flechas, donde cada flecha indica que la sustancia de la que se lleva un registro sale de la caja al final de la flecha y entra en la caja adonde llega la punta de la flecha. Dentro de estos modelos, los denominados cascadas lineales, son los más sencillos de plantear y resolver según afirman Borelli y Coleman (2002). Estos autores los caracterizan de la siguiente manera:

> (a) ninguna cadena directa de flechas y cajas empieza y termina en la misma caja; y
> (b) la sustancia sale de la caja a una tasa proporcional a la cantidad dentro de la caja y, cuando entra en otra, lo hace a la misma tasa (Borelli y Coleman, 2002, pp.88-89).

La presencia de una flecha que apunta hacia una caja sin provenir de otra indica una fuente externa de la sustancia (es decir, una entrada). Una flecha que sale de un compartimiento, pero no apunta a otra indica que la sustancia sale del sistema a través de ese compartimiento. En lo que respecta al modelo que será analizado en el desarrollo de este trabajo es un ejemplo de cascada lineal.

2.1. Los fundamentos didácticos

Desde una mirada didáctica, se asume que el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales comprende dos aristas. Por un lado, se requiere de un amplio abanico de saberes previos que resulta necesario tener disponible para su aprendizaje (ya sean los referidos al Análisis Matemático en una y varias variables, como los correspondientes al Álgebra Lineal). Por otro lado, todo lo propio a los sistemas como objeto matemático nuevo a desarrollar: representación escalar y vectorial del sistema y de las soluciones dentro del registro algebraico, así como los métodos de resolución vinculados a cada uno de ellos; métodos cualitativos como el del campo de direcciones y el análisis del plano de fase dentro del registro gráfico, etc.; métodos numéricos como por ejemplo el de Euler. Por ello, al momento de diseñar y poner en práctica las propuestas de enseñanza y aprendizaje, es importante tener presente lo mencionado anteriormente. Además, en este trabajo se consideraron los aspectos subyacentes al manejo de las transformaciones semióticas (conversión y tratamiento) involucradas en el abordaje de los sistemas. De acuerdo a la teoría de Duval (2016), las representaciones semióticas constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos. Para este investigador, en Matemática, a diferencia de lo que sucede con las ciencias fácticas, no es posible un acceso perceptivo o instrumental al objeto de estudio, sino solamente a través de sus diversas representaciones semióticas. Un mismo objeto matemático admite más de una representación semiótica; y estas se diferencian según el tipo de procesos cognitivos que activan. Desde esta teoría, hay dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas: tratamiento y conversión. Se está ante un tratamiento cuando la transformación genera otra representación en el mismo registro. En particular, para los sistemas de ecuaciones diferenciales se está frente a una transformación de tipo tratamiento cuando se estudian los sistemas desde una perspectiva escalar (que involucran algoritmos de resolución que le son propios, por ejemplo, el método de sustitución) o cuando se los aborda desde una perspectiva vectorial (cuyos algoritmos de resolución incluyen por ejemplo el método de autovalores y el de la exponencial matricial). Por otro lado, se está frente a una conversión “cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial” (Duval, 1999, p.40). En el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales, se realizan conversiones cuando se utiliza de manera interactiva diferentes registros de representación semiótica (descripciones en lenguaje natural, registro algebraico y registro gráfico).

Según Duval (1999), las conversiones son poco exploradas en la enseñanza dado que, en primer lugar, no existen reglas de conversión, en segundo lugar, los cambios de registros se efectúan con fines de simplicidad y economía de tratamiento y una vez realizada, se continúa sólo en el registro en el cual se trabaja, y finalmente existe una creencia en la inmediatez y simplicidad de un cambio de registro. Es decir, la conversión entre registros surgiría de manera espontánea.

Además, el autor plantea que las conversiones no son meras traducciones o codificaciones, como se podría pensar para algunos casos de pasaje del registro de lenguaje natural a registro simbólico, donde la conversión es congruente. Sin embargo, existen situaciones donde el pasaje de registros no puede reducirse a la simple codificación, como son los casos de conversiones no congruentes. Para este tipo de transformación, la mayor fuente de dificultades se genera a partir de los cambios de registros, donde las unidades significantes de un registro y otro no pueden ser puestas en correspondencia de forma directa, cumpliendo los tres requisitos de congruencia que plantea Duval (1999). Estos requisitos son:

- Correspondencia semántica: a cada unidad significante simple de una de las representaciones se puede asociar una unidad significante elemental.

- Univocidad semántica terminal: a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única significante elemental en el registro de la representación de llegada.
- Conservación del orden de organización de las unidades significantes: las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones (Duval, 1999, p. 50)

Esta diversidad de saberes involucrados y las relaciones implicadas entre ellos, induce a que se problematice sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, dado que, al parecer, tanto para los docentes a cargo de su enseñanza como para los destinatarios de estas prácticas, no resultaría ser algo trivial.

Las investigaciones afines al tema y aquellas ligadas a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en cursos de grado, suelen emprenderse desde una discusión preponderantemente algebraica (Artigue, 1995 a; Habre 2000 y 2003; Moreno y Azcárate, 2003). Este enfoque se centra en el estudio de técnicas de resolución en detrimento de las miradas cualitativa y numérica (Zang, Fernández von Metzen y León, 2013). Desde la bibliografía específica se señala que las nuevas tecnologías constituyeron adelantos significativos en el estudio cualitativo y numérico de las ecuaciones diferenciales: […] "el énfasis tradicional en ardides y procedimientos especializados para resolver ecuaciones diferenciales ya no es apropiado, dada la tecnología disponible"[…] (Blanchard *et al.,* 1998, p. v). Además los procedimientos cualitativos y numéricos permiten acceder a una descripción global de las soluciones sin contar con la expresión simbólica de la función que es solución (generalmente este comportamiento de las soluciones también puede ser inferido a partir de operar con la expresión simbólica). El estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales reviste de características similares.

En matemáticas el acceso al objeto de conocimiento se efectúa de manera indirecta a través de las representaciones semióticas (Duval, 2016).

> Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso…y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo (Duval, 1999, p. 30).

Cuando no están dadas estas condiciones, es frecuente que en los estudiantes se generen dificultades para distinguir el objeto matemático de su representación o reconocer que dos representaciones semióticas diferentes representan el mismo objeto. Por ello, en este trabajo de investigación, en correspondencia con la teoría de registros de representación semiótica, se interroga sobre cuáles son las transformaciones semióticas implicadas y cuáles son los registros de representación que estas suscitan en lo relativo al aprendizaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

3. Aspectos metodológicos

La mirada del investigador estuvo centrada en las prácticas llevadas a cabo en el aula, referidas al objeto matemático en estudio. Más precisamente, en lo concerniente a las transformaciones que se realizan con los registros de representación semiótica y que fueron puestos en juego por los estudiantes en la resolución de las consignas propuestas. Se consideró conveniente incorporar las contribuciones provenientes de la Ingeniería Didáctica. En este trabajo, en particular, se muestran los resultados obtenidos en el marco de las fases de análisis a priori y a posteriori. Con respecto a la primera fase de la Ingeniería Didáctica, la fase de análisis preliminares, la misma se efectuó pero, por razones de espacio, los resultados obtenidos no son incluidos en este documento. En el marco de los análisis a priori, segunda fase de la Ingeniería, se analizaron cuáles son las posibilidades de acción de los estudiantes frente a la consigna dada y de que medios dispone para validar lo que hace. En cuanto a la fase de experimentación, la misma se concretó a lo largo de dos encuentros, de dos horas de duración. Mayores especificaciones se presentan más adelante. En la última fase, la de los análisis a posteriori y evaluación, se utilizaron las producciones de los estudiantes (que al finalizar cada encuentro entregaron por escrito) y los registros escritos de lo observado por las investigadoras. Esta metodología de investigación se caracteriza por seguir un esquema experimental, teniendo como soporte las realizaciones didácticas en clase. Es decir, se basa en la concepción, ejecución, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995 b).

Para el estudio se han definido una serie de variables de análisis que permitieron analizar las producciones de los estudiantes. Estas fueron construidas en función de los datos recolectados. Teniendo en cuenta las transformaciones de registros de representación semiótica, se definieron seis categorías; entre ellas no existe un orden de jerarquía. Las categorías utilizadas para el análisis son:

A: las producciones que revelan que los estudiantes pueden describir lo que está sucediendo con el fenómeno utilizando para ello el lenguaje natural, pero no logran convertirlo a otro registro de representación semiótica.

B: las producciones que revelan que los estudiantes pueden formalizar y operar mediante el leguaje algebraico, pero no logran relacionarlo con el contexto del problema (lo estudian desde un enfoque netamente matemático y se despegan del contexto que dio origen al problema).

C: las producciones que revelan que los estudiantes no utilizan el registro simbólico algebraico pero pueden hacer conjeturas sobre el fenómeno en base a una representación gráfica (utilizan bosquejos de cómo serían las curvas solución pero no las plasman en expresiones simbólicas).

D: las producciones que revelan que los estudiantes pueden describir el fenómeno en lenguaje natural y lo pueden formalizar en un modelo simbólico, asimismo lo utilizan para hacer predicciones y validar el modelo en función a su ajuste o no a la información proporcionada en el enunciado del problema.

E: las producciones que revelan que los estudiantes pueden, dentro del registro algebraico, distinguir entre una representación escalar y una vectorial.

F: las producciones que revelan que los estudiantes pueden plantear un modelo en el registro algebraico y lo convierten al registro gráfico para hacer un análisis del comportamiento del fenómeno.

3.1 Contexto educativo y objetivo pretendido

Esta propuesta de trabajo se pensó, diseño e implementó bajo la modalidad de taller, en el mes de agosto del año 2017, con estudiantes del Profesorado en Matemática. Se destinaron dos encuentros de dos horas reloj cada uno, con una participación de 5 alumnos. Éstos ya habían cursado y regularizado la asignatura Análisis IV[1], cuyos contenidos versan sobre el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones diferenciales y una introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Es una materia que se dicta en el primer cuatrimestre del calendario académico, y corresponde al tercer año de estudios de la carrera. La convocatoria a la participación del taller, se realizó mediante aula virtual de la FCEQyN y fue de carácter voluntaria.

Los participantes se distribuyeron en dos grupos de trabajo, que se mantuvieron a lo largo de los dos encuentros. El taller fue dirigido por la docente responsable de cátedra. Tanto las observaciones referidas a las intervenciones grupales como a las correspondientes a la profesora, fueron registradas en un documento escrito, y estuvieron a cargo de dos de las autoras de este artículo.

4. Diseño y análisis de la intervención didáctica

Para el diseño de la propuesta, se tuvo en cuenta la idea de incorporar un problema en el que sea posible la construcción de un modelo matemático mediante ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Esto responde a sugerencias didácticas referidas al tema en las que se plantea que las prácticas de enseñanza que incorporan el trabajo con problemas de modelado favorecen la participación activa de los estudiantes en la construcción de sus propios saberes. La modelización puede ser entendida de diversas maneras, de acuerdo a la perspectiva teórica a la que se adhiere: modelización como contenido a enseñar o como medio para enseñar matemática (Barquero, 2009). En las carreras consideradas, prevalece el segundo enfoque, ya que es entendida también como un instrumento para dotar de significado a diferentes objetos que conforman el currículum. En este caso, se estaría resignificando o reinterpretando modelos ya construidos.

Asimismo, atendiendo a la teoría de Duval, para el diseño de la actividad, se priorizó el abordaje de al menos tres registros de representación semiótica de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. A través de la resolución de la consigna fue posible explorar las transformaciones que ponen en juego los

1 Esta asignatura es de cursado simultáneo para estudiantes de la carrera Profesorado en Física.

estudiantes. Además, permitió poner en evidencia que representaciones priorizan los alumnos: registro algebraico (cuando las soluciones se expresan en forma vectorial o bien en términos de sus componentes escalares), registro gráfico, etc.

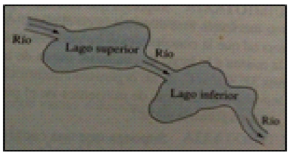
La propuesta implementada constó de tres consignas, sin embargo, por razones de extensión, en el presente trabajo sólo se tratará lo referido a la primera.

4.1 Análisis a priori de las consignas

La primera consigna de la secuencia es una adaptación de un ejercicio propuesto en el libro de texto de Hoffmann, Bradley y Rosen (2006). La interpretación de la información suministrada en la descripción verbal de la situación problemática (lenguaje natural), y que se expone en la figura 1, permitió a los estudiantes comenzar a hacer suposiciones y a realizar predicciones sobre el comportamiento a largo plazo del contaminante en cada uno de los lagos, de manera previa a la construcción del modelo matemático solicitado en el enunciado.

En el fenómeno involucrado (figura 1), subyace un problema de mezcla de sustancias, no usual para alumnos del profesorado. Por esta razón, se consideró conveniente agregar una sugerencia seguida a la descripción del enunciado que pueda servir de guía en la elaboración del modelo.

Consigna N°1: En una cierta provincia del país Z existen dos lagos que se encuentran comunicados por un río, tal como se muestra en la siguiente figura. Los mismos siempre fueron reconocidos por la belleza y pureza de sus aguas cristalinas, hasta que en un determinado momento una empresa extranjera decidió desechar 2000 kilogramos de productos tóxicos (contaminantes) en el lago superior. El lago superior contiene 700.000 litros de agua, el lago inferior contiene 400.000 litros, y el río circula a razón de 1.500 litros por hora. Se supone que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla del mismo y el agua sea homogénea en todo momento.



Sugerencia: Tener presente que la tasa de variación de contaminante con respecto al tiempo, en cada lago, deberá ser igual a la tasa de entrada menos la tasa de salida.

a) Plantea un modelo matemático que describa el comportamiento de la cantidad de contaminante $P_1(t)$ en el lago superior en el momento t.
b) Si $P_2(t)$ es la cantidad de contaminante en el lago inferior en el momento t, ¿Cómo será el modelo matemático que permite caracterizar la situación del lago inferior?
c) ¿Podría determinar qué sucede con la cantidad de contaminante en cada uno de los lagos a largo plazo?

Figura 1. Primera consigna presentada en el taller.

Puesto que se trata de un modelo de compartimientos o cascadas, en que los desechos son arrojados al lago superior solo una vez y pasado ese momento el agua que llega es pura, se admite la posibilidad de estudiar el comportamiento del contaminante en el primer lago en forma independiente del segundo. Esto implica reconocer que la tasa de variación que describe el comportamiento del contaminante en el lago superior, sólo depende de la tasa de salida, siendo nula la tasa de entrada. Además, como se considera que la rapidez a la que fluye el río es constante, tanto para la entrada como para la salida, el lago no presenta variaciones en su volumen. La ecuación que modela el lago superior viene dada por una ecuación diferencial de primer orden autónoma, con derivada de la cantidad de contaminante con respecto al tiempo, siempre negativa y directamente proporcional a la cantidad de contaminante presente en él.

En cuanto al segundo lago, si bien en el momento inicial solo posee agua pura, a medida que transcurre el tiempo empieza a recibir la influencia de los desechos que provienen del lago superior, por tanto, la tasa de variación que describe la cantidad de contaminante en el lago inferior con respecto al tiempo, depende tanto de la tasa de entrada como de la tasa salida, ambas variables. La rapidez a la que circula el río, al igual que lo descrito para el primer lago, se mantiene constante en la entrada y en la salida del lago, por ello el volumen de éste tampoco se modifica. El modelo que describe su comportamiento es una ecuación diferencial de primer orden autónoma, que depende de la cantidad de contaminante presente tanto en el lago superior como en la del lago inferior, para un tiempo t.

Explicar el comportamiento del contaminante en el segundo lago, induce a que el estudiante deba pensar de manera simultánea lo que sucede en ambos lagos para un determinado tiempo, es decir, la solución del problema deberá estar expresada en función de dos cantidades relacionadas entre sí, y a su vez dependientes del tiempo. Por otra parte, resulta importante que adviertan que el modelo se termina de ajustar al fenómeno en estudio cuando se añaden las cantidades iniciales de contaminante en cada lago, por lo tanto, el modelo es un problema de valor inicial.

El ítem c) fue pensado para propiciar el análisis cualitativo de las soluciones de un sistema aplicado en un contexto particular. Los conceptos referidos a punto de equilibrio y estabilidad cobran gran notabilidad sin hacer mención explícita a ellos. Determinar que la cantidad de contaminante en cada lago tiende a cero a largo plazo, se puede deducir a partir del enunciado: si no se tiran más desechos y la corriente del río que llega al lago superior se mantiene pura, al cabo de un tiempo los lagos se limpiarán. Es decir, para un valor de $t \geq t_*$, la cantidad de contaminante se estabilizará, permanecerá constante e igual a cero en cada uno de los lagos. De manera análoga, se podrá conjeturar un comportamiento semejante en caso de que la condición inicial dada en el lago superior se modifique, siempre considerando cantidades de contaminante positivas y distintas de cero, y conservando todos los demás supuestos establecidos en el problema. En general, para un sistema bajo estas condiciones, el punto de equilibrio se comporta como sumidero.

Conforme a la teoría de Duval, tanto en el ítem a) como en el b) se promueve a la conversión del registros de representación semiótica del lenguaje natural al registro simbólico algebraico, como al tratamiento dentro del registro simbólico de las notaciones escalar y/o vectorial. Emprender la conversión del registro del lenguaje natural al simbólico implica para el estudiante interpretar y relacionar que expresiones como el comportamiento de la cantidad de contaminante, la variación del contaminante con respecto al tiempo, la tasa de entrada y la tasa de salida, son expresiones en las que subyacen el concepto de derivada de una función.

La conversión del registro del lenguaje natural al registro simbólico para ambos lagos, sustentada en la aclaración “la tasa de variación de contaminante con respecto al tiempo, en cada lago, deberá ser igual a la tasa de entrada menos la tasa de salida”, presente en el enunciado, adquiere la forma:

$$\frac{dP_1}{dt} = tasa\ de\ entrada\ (TE) - tasa\ de\ salida\ (TS)\cdot$$

En dicha frase se evidencia correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y se conserva el orden de organización de las unidades significantes. Por el contrario, para la construcción de las expresiones simbólicas de cada una de las tasas, esto no se pone en relieve. La representación simbólica de las tasas, expresadas como el producto del flujo de entrada/salida por la concentración, no es inmediata para los estudiantes de las carreras involucradas. Tampoco en la descripción en lenguaje natural se presentan indicios de que esto debe expresarse de este modo. Asimismo, la frase “el río circula a razón de 1500 litros por hora” debe ser interpretada como el flujo aun cuando no esté explícito en el enunciado.

TE = flujo de entrada x concentración de contaminante en el flujo de entrada

TS = flujo de salida x concentración de contaminante en el flujo de salida

Por otra parte, la expresión “se supone que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla del mismo y el agua sea homogénea en todo momento” implica pensar en la manera en que se va a definir a la concentración (una manera de hacerlo es en términos de la densidad, es decir, como el cociente de la masa entre el volumen) y a su vez, se tiene que considerar constante el volumen. En estas construcciones subyace el fenómeno de no congruencia.

Con los datos del problema, se tiene que para el primer lago el modelo es:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{3}{1400}P_1 \qquad P_1(0) = 2000$$ *Modelo matemático para el lago superior*

Para el segundo lago:

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{3}{1400}P_1 - \frac{3}{800}P_2 \qquad P_2(0) = 0$$ *Modelo matemático para el lago inferior*

El **tratamiento** dentro de cada registro de representación semiótica en los ítems a) y b) se da de la siguiente manera:

- En el lenguaje natural, se revela la formulación de conjeturas y predicciones (inferir que los lagos se limpiarán a largo plazo porque está ingresando agua sin contaminante, formular hipótesis sobre cómo calcular la concentración, y determinar si las tasas dependen o no del tiempo, etc.) que se pueden llevar a cabo en el seno de cada grupo o en las interacciones que se generan con la docente en el proceso de construcción del modelo.

- En el registro algebraico, el tratamiento se genera en el proceso de construcción de las tasas de entrada y de salida para obtener finalmente la ecuación diferencial de primer orden.

La imagen proporcionada en la consigna contribuye a la correcta interpretación de la ubicación de los lagos, y a comprender el sistema en cascada que comporta. Aspecto relevante cuando se trabaja con modelos de flujos de fluidos ubicados en compartimentos, ya que el sistema puede ser abierto o cerrado. En este caso, el sistema es abierto y cumple con los dos requisitos definidos en los fundamentos teóricos, para cascadas lineales.

Una dificultad que podría emerger en esta situación, es lo concerniente al armado de la tasa de entrada o de salida. Los estudiantes del profesorado disponen de los conceptos de rapidez y densidad, también conocen las unidades en que estas magnitudes se expresan. Por ello la utilización de las unidades y el correspondiente análisis dimensional (las ecuaciones que se plantean deben ser homogéneas, es decir, ambos miembros de la ecuación deben estar expresados en las mismas unidades), juega un rol esencial para validar las suposiciones realizadas en la construcción del modelo. La tasa de entrada en el lago superior se anticipa que valdrá cero, puesto que el agua que ingresa no contiene contaminantes y la tasa de salida involucra el producto de la concentración del contaminante en el flujo de salida y la rapidez de salida del agua con contaminante. Por su parte, para la construcción de las tasas de entrada y de salida en el lago inferior, se debe tener en cuenta que ingresa agua contaminada proveniente del lago superior, cuyo flujo de entrada posee concentración variable y depende de la cantidad de contaminante que sale de ese lago. Además, la concentración en el flujo de salida también será variable, ya que el agua contaminada que ha ingresado se mezcla con el agua que se encuentra en él, y luego egresa.

Para el ítem c) se puede inferir que a largo plazo ambos lagos se limpiarán porque a medida que pasa el tiempo la masa del contaminante disminuye, dado no se ha volcado más contaminante en el lago superior. También es posible que los estudiantes resolvieran el sistema para hallar las expresiones que describen el comportamiento del contaminante en los lagos, para luego realizar un análisis de estabilidad en función de las expresiones algebraicas logradas.

Una vez que se haya reconocido que las dos ecuaciones construidas forman parte de un problema de valor inicial (PVI), con características particulares por tratarse de un sistema parcialmente desacoplado, la resolución se la puede emprender desde una mirada escalar o bien bajo una perspectiva vectorial. En ambas formas de abordaje, a nivel cognitivo, se produce un tratamiento de carácter semiótico dentro del registro algebraico.

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva escalar**

Una vez realizada la conversión del registro de lenguaje natural al simbólico (que fue descrita en una sección precedente de este documento), su resolución puede encararse con separación de variables e integración, en virtud de que en la ecuación correspondiente al lago superior la derivada sólo depende de la cantidad de contaminante que hay presente en él en cada instante.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\dfrac{3}{1400} P_1 \\ P_1(0) = 2000 \end{cases} \Rightarrow P_1(t) = 2000 e^{-\frac{3}{800}t}$$

Expresión que describe la cantidad de contaminante en el lago superior, en función del tiempo

Para lago inferior, basta sustituir esta solución en la segunda ecuación diferencial:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{3}{1400}P_1 - \dfrac{3}{800}P_2 \\ P_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dP_2}{dt} = \frac{3}{1400}2000e^{-\frac{3}{800}t} - \frac{3}{800}P_2$$

Para resolver esta ecuación se apela a los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y se obtiene:

$$P_2(t) = \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t} - \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t}$$

Expresión que describe la cantidad de contaminante en el lago inferior, en función del tiempo.

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva vectorial**

Teniendo disponible el modelo en el registro simbólico expresado en forma escalar (proceso de conversión ya descripto antes) y representado de forma equivalente empleando notación matricial, se puede apelar al método de autovalores para la resolución del sistema. Para ello, se lo expresa en forma matricial ***p'=Ap***, es decir

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -\dfrac{3}{1400}P \\ \dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{3}{1400}P_1 - \dfrac{3}{800}P_2 \\ P_1(0) = 2000 \\ P_2(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dP_1}{dt} \\ \dfrac{dP_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{1400} & 0 \\ \dfrac{3}{1400} & -\dfrac{3}{800} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por resolución aplicando autovalores y autovectores se tiene:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000e^{-\frac{3}{1400}t} \\ \dfrac{8000}{3}e^{-\frac{3}{1400}t} - \dfrac{8000}{3}e^{-\frac{3}{800}t} \end{pmatrix}$$

Obtenidas las expresiones, es factible emprender un análisis cualitativo de la solución del PVI y concluir que a largo plazo los lagos se limpiarán. Dado que las funciones obtenidas dependen del tiempo, se puede aplicar límite con $t \to \infty$ y verificar lo anticipado, los términos exponenciales tienden a cero a largo plazo.

Otra posibilidad de analizar el ítem c) es efectuar una conversión hacia el registro gráfico y emprender un análisis cualitativo de las curvas solución representadas en el plano fase. Para ello se debe reconocer la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de una función. En efecto, una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ especifica una pendiente en cada punto del plano xy donde f está definida. A partir de conocer esta información se construye un bosquejo de la solución mediante el trazado de pequeños segmentos de recta en diversos puntos del plano con la pendiente determinada por la ecuación diferencial en los puntos correspondientes. Extender este método a los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas implica que la dependencia de las variables dependientes con la variable independiente no esté explícita, necesariamente una de las variables dependientes se expresa como función de la otra. En este caso, lo que sucede en el lago inferior depende de lo que acontece en el lago superior.

Registro algebraico $\xrightarrow{\text{conversión}}$ Registro gráfico

Mediante el uso de algún software matemático, se puede graficar el campo de direcciones asociado al sistema y de la curva solución que pasa por la condición inicial dada. Se cree que este es un procedimiento poco usual en los estudiantes, por ello se planificó la ejecución del ítem d). Si bien es parte de la consigna 1, no se presentó de manera conjunta con los tres primeros ítems, ya que su aparición en escena dependía de lo que emergiera en el anterior.

El enunciado del último ítem (figura 2) implica una doble tarea para el estudiante, que en términos de la teoría de Duval involucra dos tipos de transformación de registros. Por un lado, el trazado de la trayectoria en el plano fase que cumpla con las condiciones suministradas (registro gráfico), y por otro describir el comportamiento que sigue el contaminante en cada lago (lenguaje natural).

d) Dado el campo de direcciones del sistema construido, esboce la trayectoria que cumple con las condiciones iniciales, y describa el comportamiento con respecto al tiempo del contaminante de cada lago.

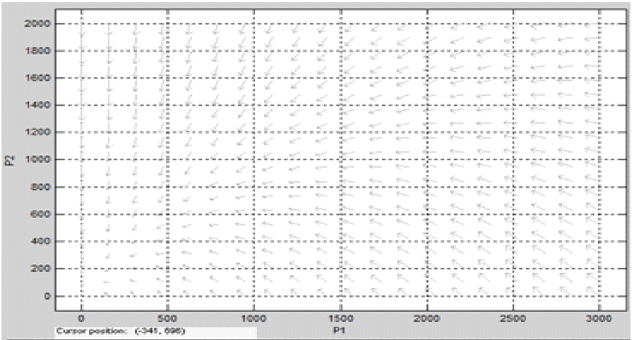


Figura 2. Ítem d) de la consigna N°1

- **Tratamiento en el registro gráfico: trazado de la curva solución asociado al PVI**

El registro gráfico posibilita la percepción visual del comportamiento del contaminante en forma simultánea en ambos lagos, a través de la trayectoria solución del sistema. Es importante destacar el sentido de orientación en que hay que recorrer la curva para poder interpretar correctamente la información, ya que en el plano fase se tiene una representación del conjunto imagen de las curvas trayectorias mientras la variable independiente se manifiesta en forma implícita.

Para esta situación, la lectura se realiza de derecha a izquierda. Cuando $t=0$ la cantidad de contaminante en el lago superior es $P_1=2000$ y para el lago inferior es $P_2=0$. A medida que t aumenta, la cantidad de $P_1 \rightarrow 0$ y en simultáneo el comportamiento de P_2 empieza a crecer, dado que el lago inferior comienza a recibir el contaminante proveniente del superior. Este crecimiento se produce hasta un determinado instante, luego la cantidad de contaminante en el lago inferior empieza a decrecer, con $P_2 \rightarrow 0$, convergiendo ambas variables al origen de coordenadas.

Por otra parte, para el trazado de la curva solución juega un rol primordial el concepto de vector tangente a una trayectoria. Su importancia reside en que permite descartar todas aquellas curvas que no correspondan a la solución del PVI dado que no cumplen la condición de tangencia ni las condiciones iniciales, funcionando de este modo como herramienta de validación. Disponer de esta relación posibilita vincular las representaciones algebraicas del sistema y la representación gráfica de sus soluciones.

$$\begin{cases} P_1' = -\dfrac{3}{1400}P_1 \\ P_2' = \dfrac{3}{1400}P_1 - \dfrac{3}{800}P_2 \end{cases}$$

En cada punto de la curva solución, existe un vector tangente cuyas componentes vienen dadas por las ecuaciones del sistema.

$$\mathbf{v} = \left(P_1'(t), P_2'(t)\right)$$
$$\mathbf{v}_0 = \left(P_1'(0), P_2'(0)\right)$$
$$\mathbf{v}_0 = \left(\tfrac{-30}{7}, \tfrac{30}{7}\right)$$

Para el momento inicial, el vector tangente tiene componente negativa en dirección de la variable P_1 y componente positiva en la variable P_2. Tal como se observa en la figura 3.

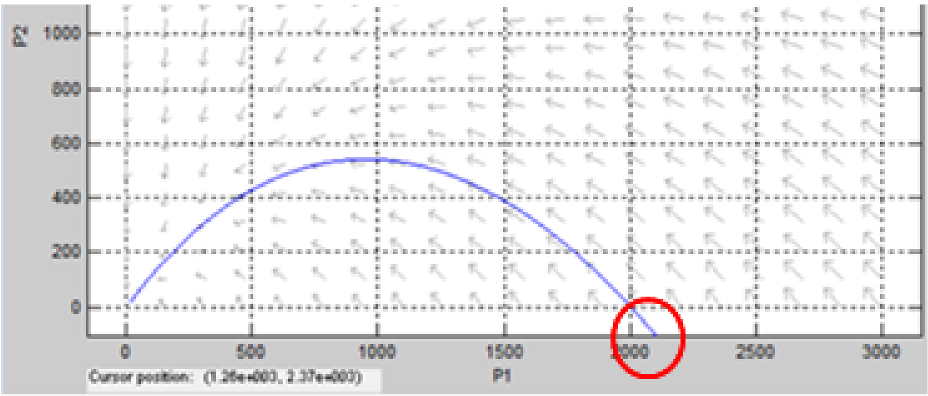


Figura 3: Trayectoria trazada de acuerdo a las condiciones iniciales dadas en el problema

En caso de no que se perciba la relación de tangencia propia del campo de direcciones, se podría lograr la representación gráfica de la curva solución del PVI considerando las funciones componentes de la solución, ya sea como ecuaciones paramétricas de la misma o bien, eliminando el parámetro t para encontrar una relación entre P_1 y P_2, con no poco trabajo adicional algebraico.

- **Conversión hacia el registro verbal: descripción del comportamiento con respecto al tiempo del contaminante para cada lago.**

Registro gráfico $\xrightarrow{\text{Conversión}}$ **Registro verbal**

En esta parte se esperaba que los estudiantes pongan en palabras lo que se observa en el gráfico acerca del fenómeno en estudio, que determinen cuáles son los alcances y las limitaciones que encierra la representación de la curva en el plano fase. Desde las conjeturas iniciales, la cantidad de contaminante en el lago superior siempre es decreciente. Sin embargo, para el lago inferior, al principio la cantidad de contaminante es creciente hasta un cierto tiempo, luego empieza a decrecer tendiendo a cero. Un interrogante que podía emerger frente a esta situación, era: *¿Cuántas horas deberán* transcurrir desde el inicio, para que en el lago inferior se consiga la máxima cantidad de contaminante?

Desde la lectura directa del plano fase esta información no se encuentra disponible, solo se puede decir cuál es la cantidad de contaminante máxima que posee el lago inferior, pero no en qué momento se produce tal evento. En cambio, desde la manipulación algebraica de las funciones componentes de la solución se podrá dar respuesta, ya que si la función P_2 posee un máximo para algún valor de t, entonces su derivada será nula en ese valor de tiempo.

$$P_2'(t) = -\frac{40}{7}e^{-\frac{3}{1400}t} + 10e^{-\frac{3}{800}t} = 0 \Longrightarrow t \approx 348,20 \text{ Horas}$$

Para $0 \le t \le 348{,}20$ horas, la cantidad de contaminante en el lago inferior es creciente, luego de $t = 348{,}20$ horas, la cantidad de desechos tóxicos empezará a disminuir hasta limpiarse. En $t = 348{,}20$ horas se produce el máximo para P_2, por lo que el vector tangente en ese punto tendrá segunda componente nula.

Finalmente, los estudiantes podrán leer en el plano fase, información valiosa vinculada a la cantidad de contaminante en cada lago y cómo se relacionan los comportamientos a largo plazo.

4.2 Descripción de las respuestas emergidas en el taller

Tal como se había previsto en el análisis a priori, la construcción del modelo matemático asociado al lago superior es el que generó mayor inversión de tiempo, principalmente con la construcción de la tasa de salida (detallada en una sección previa de este documento). Se observó, a partir de planteos que realizaron de manera oral y empleando el registro del lenguaje natural, que los estudiantes llegaban a comprender el fenómeno y a predecir correctamente lo que sucedería con el contaminante a largo plazo en ambos lagos. Sin embargo, se presentaron dificultades para reconocer en la tasa de salida la presencia del producto entre la concentración del contaminante en el flujo de salida y la rapidez de salida del agua con contaminante. Frente a esto, la docente tuvo que mediar formulando algunos interrogantes que permitieron que los estudiantes puedan avanzar con la resolución.

El primer encuentro contempló la discusión, dentro de cada grupo, del armado del modelo correspondiente al lago superior, seguida de su respectiva puesta en común en el pizarrón. En el grupo 2 (G2) las primeras conjeturas que emergieron estaban vinculadas a la masa del contaminante. Por un lado, a la cantidad inicial suministrada, pues se presentaba confusión acerca de que si los 2000 kilogramos ya se encontraban disueltos en el volumen del lago o bien si esa masa estaba entrando al lago superior. Por otro lado, decían que la tasa de salida era siempre la misma, cuestión que refleja la no percepción de la variabilidad de la masa con el paso del tiempo (debida al ingreso de agua pura al lago superior y a que la cantidad de desechos tóxicos se vuelcan inicialmente por única vez). Reconocían que se pedía armar un modelo que describa la cantidad de contaminante en el lago superior con respecto al tiempo, pero no lo asociaban a una relación de dependencia entre la variable P_1 y la variable independiente t, expresaban que tenía que aparecer t explícita en la fórmula. Hasta este momento del encuentro, las respuestas dadas se encuadran en lo descripto en la categoría A.

Ante esto, la profesora recuperó la afirmación de que la tasa de salida es siempre la misma y les preguntó: "*¿Qué significa que la tasa de salida sea constante?*" La respuesta no fue inmediata, tuvieron que pensar y releer el enunciado. Los estudiantes debaten dentro de cada grupo y concluyen que con el paso del tiempo la cantidad de contaminante iría disminuyendo por la entrada de agua limpia, lo cual les permitió arribar a que no era correcto hacer tal afirmación. Resultó de importancia volver hacia el contexto del problema una y otra vez para validar las conjeturas que se iban realizando en el proceso de armado del modelo.

Una vez aclarado verbalmente que la tasa de salida es variable, la docente preguntó: "¿Qué tendría que intervenir en la ecuación?" Uno de los estudiantes planteó que debía aparecer la concentración, sin embargo, sus cálculos se remitían a la concentración inicial, planteando el producto entre la rapidez del flujo de entrada y la concentración inicial. Seguidamente, por razones de legibilidad, se expone la transcripción de la respuesta, paralelamente se muestra la respuesta en la figura 4.

$$P_1'(t) = -1500\frac{lts}{h}\cdot\frac{2000kg}{70000lts} = -\frac{30}{7}\frac{kg}{h}$$

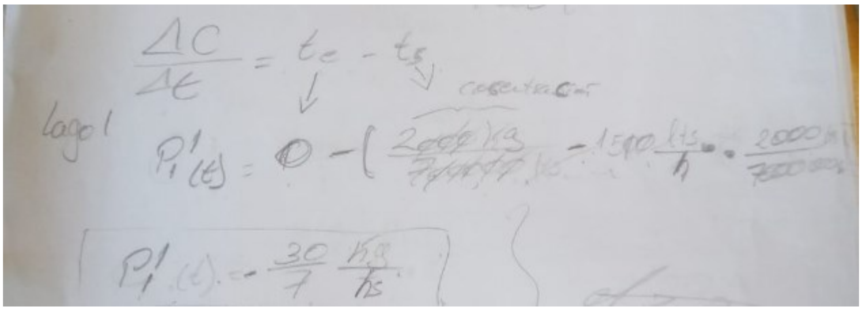


Figura 4: Tasa de salida considerada constante

Nuevamente emergió la idea de que la tasa de salida es constante. Si bien, los estudiantes habían arribado a que debía ser variable, en el modelo matemático propuesto aún no se lograba expresar. La respuesta dada tiene relación con lo detallado para la categoría A.

La docente preguntó: ¿Cómo es la concentración con respecto al tiempo? Los estudiantes manifestaron que era variable, determinaron que dicha expresión indicaría que la tasa de salida es siempre la misma y no se correspondía con el fenómeno en estudio. En palabras de uno de los estudiantes: "al considerar de esta forma estamos suponiendo que la tasa de contaminante es constante, y sabemos que eso no es así porque después de varias horas el lago 1 se limpia y así como planteamos siempre queda contaminante". Nuevamente revisaron el modelo propuesto y buscaron la manera de expresar la variabilidad de la concentración.

Mientras los estudiantes debatían en el grupo, el observador detectó que tenían en claro que el caudal del agua que entra en el lago superior es de $1500\frac{litros}{hora}$ y que el cociente $\frac{2000\,kg}{700000\,l}$ representa la concentración másica inicial, pero no lograron vislumbrar que esta magnitud depende de la cantidad de contaminante que haya en el lago para cada valor de t, precisamente esa es la función incógnita. La expresión dada por $\frac{P_1(t)}{700000}\frac{kg}{l}$ no surgió hasta la puesta en común, luego de provocarse un debate en forma colectiva.

Durante la socialización, la docente, a través de algunos interrogantes, indujo a que surja, desde los estudiantes, el modelo solicitado. Para ello realizó un bosquejo en el pizarrón, en el que se ubicaron los datos del problema, tal como se muestra en la figura 5, y les preguntó: "*¿Qué se puede decir de* $P_1(t)$ *en cualquier instante?"*

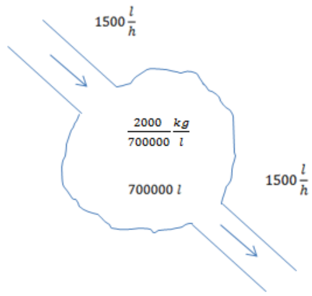


Figura 5: Bosquejo realizado por la docente en el pizarrón durante la puesta en común del ítem a)

Los alumnos respondieron que a medida que transcurre el tiempo la cantidad de contaminante va a ser menor que en $P_1(0)=2000$. Añadieron que $P_1'(t)=-\frac{30}{7}\frac{kg}{h}$ es solo para $t=0$, en tanto para un instante cualquiera debía ser:

$$P_1'(t)=-1500\frac{lts}{h}\cdot\frac{P_1(t)kg}{70000lts}=-\frac{3}{1400}P_1(t)\quad con\quad t\geq 0$$

Para validar dicho modelo, mediante la sustitución t = 0 confirmaron que la tasa inicial de variación es la que habían determinado. Uno de los alumnos escribió en el pizarrón:

$$P_1'(0)=-\frac{3}{1400}P_1(0)\Rightarrow P_1'(0)=-\frac{3}{1400}\cdot 2000$$

Finalmente, los estudiantes concluyeron que la presencia del signo menos en el modelo indica que la cantidad de contaminante va disminuyendo con el tiempo.

Para este primer ítem, las intervenciones de la docente durante las discusiones grupales como en el momento de la puesta en común, resultaron ser un factor primordial para concretar la conversión de registros prevista en el análisis a priori. Por ende, la continua retroalimentación entre las respuestas de los estudiantes y las preguntas que les devolvía la profesora, permitió que el modelo emergiera como una construcción conjunta de la clase y no como un producto acabado ni desde los grupos individuales ni como propuesto por la docente.

El segundo encuentro se produjo una semana después. Para comenzar el taller, la docente anotó en el pizarrón el modelo armado para el lago superior y leyó el enunciado del ítem b). Lo que sigue corresponde a la descripción de lo sucedido en este encuentro y está en consonancia con lo previsto en la categoría D.

Uno de los grupos, más precisamente el G1, se anticipó y afirmó que en el segundo lago (inferior), lo que ingresa es lo que sale del primero (superior), y escribió en el pizarrón:

$$= \frac{3}{1400} P_1(t) -$$

Luego, dijeron: "*La tasa de entrada en el segundo lago es la misma que la tasa de salida del primer lago, y es positiva porque está entrando".* Completaron la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{dP}{dt}(t) = \frac{3}{1400} P_1(t) \underbrace{- \frac{3}{800} P_2(t)}_{1500\frac{l}{hs}\cdot\frac{P_2(t)kg}{400000l}}$$

En la igualdad escrita apareció la derivada de una nueva variable, que hasta el momento no había surgido en las respuestas de los estudiantes, por ello la docente preguntó: "*¿Qué es* $\frac{dP}{dt}(t)$*".* El G2, respondió: "*Para nosotros es* P_2 *porque describe la variación del lago inferior".* A continuación, uno de ellos escribió en el pizarrón:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \frac{3}{1400} P_1(t) - \frac{3}{800} P_2(t)$$

La docente interrogó a ambos grupos: "*¿Es definitiva esta ecuación?"*

Los estudiantes respondieron afirmativamente. Afirmaron que se trata de una ecuación lineal, distinguieron que las variables P_1 y P_2 dependen de la variable independiente tiempo, también reconocieron que se trata de una ecuación autónoma. Por último, aseveraron que la segunda ecuación, referida al lago inferior, depende de las dos funciones incógnitas.

Ante esto último, la docente interrogó: "*¿Pueden resolver esta ecuación (señalando la construida para el lago inferior) sin resolver la primera (la correspondiente al lago superior)?"* Sin dudarlo, los estudiantes respondieron que no. Por tanto, se les preguntó: "*¿Cuál sería el modelo que describe el comportamiento del contaminante en ambos lagos?"* Los estudiantes aseguraron que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales. Uno de los alumnos asentó en el pizarrón el modelo armado para el PVI indicando que es homogéneo:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\frac{3}{1400} P_1(t) \\ P_2'(t) = \frac{3}{1400} P_1(t) - \frac{3}{800} P_2(t) \end{cases} \quad sujeto \;\; a \;\; P_1(0) = 2000 \;\; P_2(0) = 0$$

A continuación, se trabajó con el ítem c). En el interior del G1 dijeron verbalmente: "*A medida que t tiende a infinito, la cantidad de contaminante tiende a cero. Va a llegar un momento en que se van a limpiar los dos lagos de contaminantes".* Esto se realizó en el registro del lenguaje natural, anticipando lo que luego encontrarían resolviendo el sistema en el registro algebraico. Resolvieron el sistema siguiendo uno de los procedimientos anticipados en el análisis a priori (figura 6).

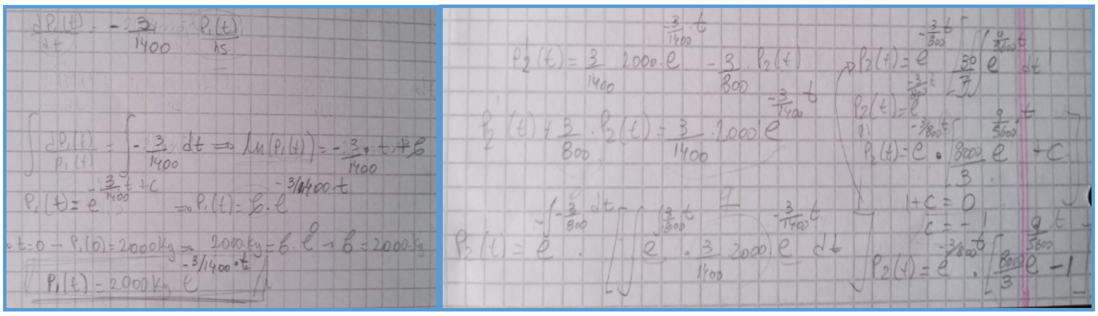


Figura 6: Resolución del PVI efectuada por uno de los grupos

- **Tratamiento en el registro algebraico bajo una perspectiva escalar**

Seguidamente, plantearon el límite tendiendo a infinito, tal como lo habían expresado verbalmente, pero lo hicieron de la suma de las funciones que describen el comportamiento del contaminante en cada uno de los lagos (figura 7). Si bien la suma permite saber cuánto contaminante hay en total en los dos lagos para un tiempo *t*, la función resultante no es solución del sistema asociado.

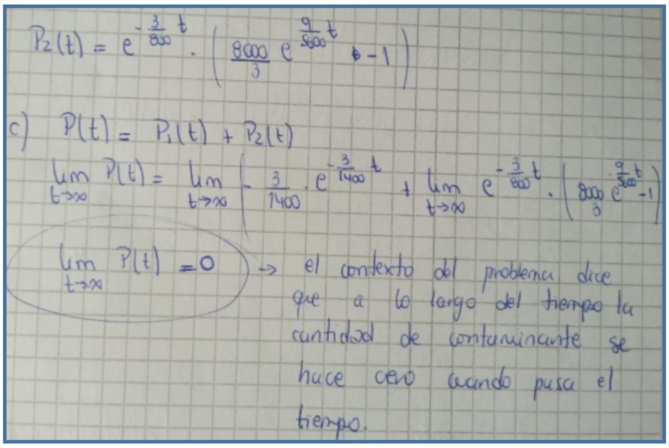


Figura 7: Procedimiento realizado por uno de los grupos para el ítem c)

Este procedimiento, no se había previsto desde el análisis a priori, en él se observa que los estudiantes definen una nueva función escalar como la suma de las funciones que describen la cantidad de contaminante en cada uno de los lagos. Dado que el límite de la suma tiende a cero, y que además en cada uno de los términos aparece un término exponencial con exponente negativo, los estudiantes habrán considerado que la cantidad de contaminante en cada uno de ellos tiende a cero, por tanto, los lagos se limpiarán.

En el G2, uno de los integrantes manifestó: “Hay que sacar el punto crítico”. El observador detectó que se plantearon dos posibles alternativas de solución entre los miembros del grupo. En una de ellas, propusieron hallar la solución del sistema y luego analizar el comportamiento de las funciones obtenidas para $P_1(t)$ y $P_2(t)$. En la otra, consideraron hallar el punto crítico y analizar qué sucedería con el contaminante en cada lago, utilizando el plano fase. Uno de los integrantes sugirió que *(0,0)* es el único punto crítico, sin embargo no esgrimieron ningún tipo de argumento para validar lo afirmado. Otro insinuó la posibilidad de hacer un plano fase para analizar la estabilidad, pero no halló consenso dentro del grupo, por ende, optaron por resolver el PVI utilizando el tratamiento algebraico escalar, al igual que el G1. Si este procedimiento propuesto por ese estudiante hubiese tenido consenso en el grupo, habría emergido lo descripto en la categoría F.

Seguidamente se repartió la consigna d). El G_1 trazó varias curvas solución en el plano fase, cuando en realidad se solicitaba que tracen la solución correspondiente al PVI. Ante esto se les interrogó, "*¿Cuál de todas las curvas trazadas cumple con las condiciones iniciales del problema?"* Como respuesta eligieron una curva que no cumplía con las condiciones iniciales. La profesora les preguntó el por qué de esa selección, y los alumnos respondieron: "*porque es la forma de la exponencial".* Nuevamente, se les preguntó: "*¿Qué variables aparecen en el plano fase?".* La idea de esta pregunta era para ver si podían distinguir que si bien la ecuación paramétrica de la curva solución, se expresa por exponenciales en términos de la variable independiente *t*, la curva imagen correspondiente, dada en las variables $P_1(t)$ y $P_2(t)$ no tiene por qué seguir un comportamiento exponencial.

Luego, de realizar las modificaciones correspondientes en sus producciones, uno de los estudiantes pasó al pizarrón, y mostró la gráfica que efectivamente se ajusta a las condiciones iniciales (figura 8).

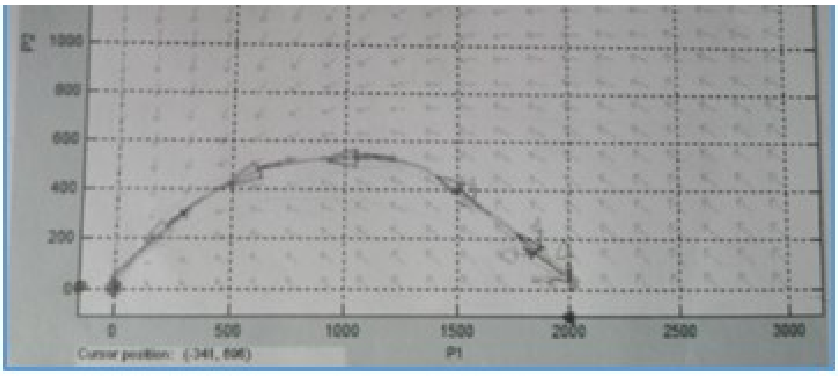


Figura 8: Curva trazada por uno de los grupos para el ítem d)

En el momento de describir el comportamiento del contaminante en cada lago, se detectó confusión con la ubicación de las condiciones iniciales, pues en el par (0,0) que representa la solución de equilibrio, localizaron a la condición inicial $P_2(0)=0$ y en el par (2000,0) a la condición inicial $P_1(0)=2000$, es decir, asociaron los pares (P_1, t_0) y (P_2, t_0), respectivamente. En forma colectiva se aclaró que cada par mencionado hace referencia a pares de la forma (P_1, P_2). Luego, la profesora preguntó si la trayectoria que marcaron es válida para el problema, todos respondieron afirmativamente, argumentando que a medida que *t* aumenta la cantidad de contaminante tiende a cero.

Varias de las cuestiones previstas en el análisis a priori no emergieron, como lo era la posibilidad de generar interrogantes dentro de cada grupo sobre el tiempo que le llevará al segundo lago alcanzar la cantidad máxima de contaminante, o bien lo referido a la relación que guardan los vectores tangentes y la orientación de la curva, aspecto no menor a ser tenido en cuenta para el trazado de la curva. En una de las producciones escritas se observa cómo esto último no es tenido en cuenta para el trazado de la trayectoria (figura 9).

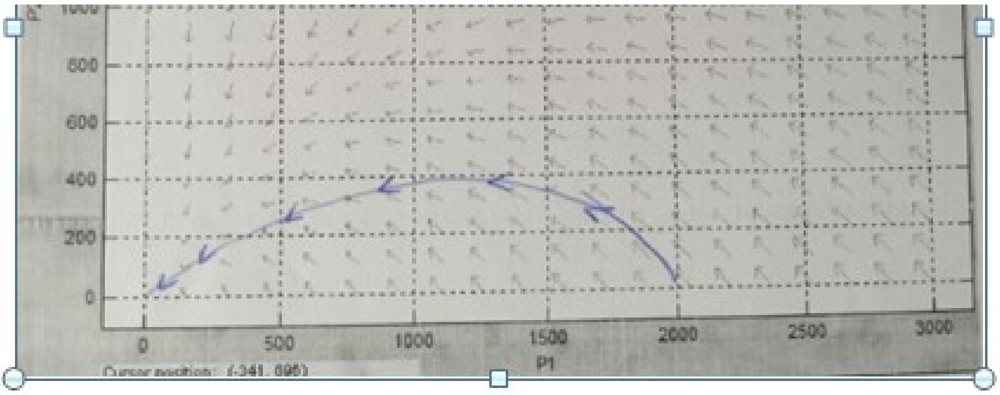


Figura 9: La curva trazada no es siempre tangente a los vectores del campo de direcciones

4.3 Algunas reflexiones logradas de la confrontación entre el análisis a priori y lo emergido en el taller

Si bien se había planificado de antemano que el armado del modelo matemático asociado al primer lago provocaría ciertas dificultades ligadas a la tasa de salida, el tiempo real empleado durante la puesta en práctica, fue ampliamente superior a lo estimado, lo que en cierta medida provocó que a los ítems restantes se les destinara menor tiempo de trabajo en grupo, por ende, los procedimientos emergidos resultaron un poco más escuetos.

Se cree que la conversión hacia el registro simbólico - algebraico del modelo matemático, es la que demandó mayor tiempo de discusión. Por otro lado, lo referido al tratamiento en el registro gráfico para el ítem d), permitió dar cuenta de los inconvenientes que emergieron en la interpretación de la información en el campo de direcciones al no aparecer de manera explícita la variable independiente.

En cuanto a la conversión hacia el registro del lenguaje natural para el ítem d), describieron el comportamiento del contaminante en cada uno de los lagos y establecieron argumentos que dieron cuenta de las elecciones realizadas, lo que los llevó a asociar el contexto del problema con los objetos matemáticos (por ejemplo asociar la variación de la cantidad de contaminante con respecto al tiempo con el objeto matemático de la derivada).

Con respecto a las categorías sugeridas para el análisis de las producciones, en esta experiencia sólo emergieron dos de ellas. Llama la atención que los alumnos no recurrieron al tratamiento vectorial en el registro algebraico, se cree que esto se debe a que el sistema involucrado es parcialmente desacoplado (lo que ocurre en el lago superior es independiente de lo que sucede en el lago inferior) y en consecuencia, es viable utilizar el método de sustitución para resolverlo. Cabe aclarar que la misma experiencia se replicó con la cohorte 2019 y que los resultados obtenidos están en proceso de análisis.

En general los resultados fueron favorables tanto para los estudiantes como para el equipo de docentes. Al finalizar el encuentro se les pidió a los participantes que manifestaran sus apreciaciones acerca del taller, opinaron que les había resultado muy interesante, que como estudiantes del Profesorado pudieron integrar lo estudiado en otros espacios de aprendizajes a nuevas situaciones problemáticas.

Para finalizar, esta experiencia significó un valioso trabajo para el equipo docente. La propuesta les permitió observar, en los estudiantes que cursaron la asignatura, aquellos aspectos de sistemas de ecuaciones diferenciales que tienen disponibles, muchas veces con significados incompletos y poco interrelacionados, para resolver problemas que ilustran situaciones reales. Asimismo, se reconoció que trabajar los aspectos escalares y vectoriales que el tema presenta, posibilita poner en juego conversiones entre los registros del lenguaje natural, algebraico y gráfico, actividades que fortalecen los recursos que poseen los estudiantes para enfrentar problemas matemáticos.

Bibliografía

Artigue Michèle (1995 a). La enseñanza de los principios del cálculo. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, Michele (1995 b). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R. Moreno L., Gómez P., Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barquero, B. (2009). Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Tesis de doctorando Universidad Autónoma de Barcelona.

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "Ecuaciones diferenciales". Editorial Thomson. México

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema Crucial en la Educación Matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta del RSME, 143 – 168.

Duval, Raymond (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval; A. Sáenz, (Eds.), Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Edwards, H. y Penney, D. (2001). Ecuaciones diferenciales. México: Prentice Hall.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. The Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 455-472.

Habre, S. (2003). Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(5), 651-662.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en Revista Enseñanza de las Ciencias, 21 (2). 265-280

Zang C., Fernández von Metzen G., León N. (2013). Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales. Educação Matemática Pesquisa, 15. Recuperado el 5 de septiembre de 2020, de http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12400/pdf

Zang C., Fernández von Metzen G., León N., Vila Torres, P. (2017). Los libros de texto recomendados a estudiantes universitarios para el estudio de ecuaciones diferenciales. Revista Premisa, 19, (73), p. 21-35. Disponible en http://www.soarem.com.ar/Documentos/73_139_Zang_Fdez_Leon_Vila.pdf

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen. Profesora en Matemática. Egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina (FCEQyN-UNaM).

María Natalia León. Profesora en Matemática, Física y Cosmografía, egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales (UNaM). Magister en Matemática Aplicada egresada de FCEQyN-UNaM, Argentina.

Claudia Mariela Zang. Profesora en Matemática y Profesora en Física, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones Argentina (FCEQyN-UNaM). Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-17

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Teoria das Situações Didáticas no Ensino de Geometria Plana: o caso da Olimpíada Internacional de Matemática e o auxílio do *software* GeoGebra

Paulo Vitor da Silva Santiago, Francisco Regis Vieira Alves

Fecha de recepción: 30/12/2020
Fecha de aceptación: 13/04/2021

Resumen	Este trabajo presenta una propuesta didáctica basada en situaciones problemáticas, concebida por cuestiones relacionadas con la Geometría y procedente de la Olimpíada Internacional de Matemáticas (OMI). El objetivo de este trabajo es presentar como la dialéctica de la Teoría de Situaciones Didácticas: acción, formulación, validación e institucionalización, puede ayudar en la enseñanza de los problemas matemáticos de la OMI. Por último, se hace hincapié en el uso del *software* GeoGebra como herramienta para la elaboración de ejemplos matemáticos y la resolución de problemas de situaciones sobre el contenido de la geometría plana. **Palabras clave**: Teoría de Situaciones Didácticas; Enseñanza de las Matemáticas; OMI; GeoGebra; Geometría del Plano.
Abstract	This work presents a pedagogical didactic proposal based on problem situations, conceived by issues related to Geometry and coming from the International Mathematics Olympiad (IMO). The objective of this work is to present how the dialectics of the Theory of Didactic Situations: action, formulation, validation and institutionalization, can help in the teaching of mathematical problems of the IMO. Finally, the use of GeoGebra *software* is emphasized as a tool for the elaboration of mathematical examples and resolution of situations problems on the content of plane geometry. **Keywords**: Theory of Didactic Situations; Teaching of Mathematics; IMO; GeoGebra; Plane Geometry.
Resumo	Este trabalho apresenta uma proposta didática baseada em situações problemas, concebidas por questões relacionadas a Geometria e advindos da Olímpiada Internacional de Matemática (IMO). O objetivo deste trabalho é apresentar como as dialéticas da Teoria das Situações Didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização, podem auxiliar para o ensino de problemas matemáticos da IMO. Por último, enfatiza-se o uso do *software* GeoGebra como ferramenta para a elaboração de exemplos matemáticos e resolução de situações-problema sobre o conteúdo de geometria plana. **Palavras-chave:** Teoria das Situações Didáticas; Ensino de Matemática; IMO; GeoGebra; Geometria plana.

1. Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) vem se consolidando ao longo das últimas competições com categorias de problemas matemáticos divididos em quatro tópicos: Álgebra, Combinatória, Geometria e Teoria dos números. A (IMO) proporciona uma participação cada vez maior de 'competidores' e, por conseguinte, um grande envolvimento de vários países e de 'professores olímpicos' na preparação desses participantes, buscando uma conquista de resultados das competições estaduais e nacionais. Para participar pela primeira vez na (IMO), o país encaminha um pedido à sociedade de Matemática ou o Ministro da Educação deve realizar uma solicitação formal e encaminhar observadores ao primeiro certame após o pedido.

Ao examinar o papel dos competidores, os resultados mostram que os jovens precisam desenvolver habilidades diferenciadas, que possibilitem nivelar a criatividade necessária para atravessar os desafios apresentados nas situações problemas de matemática da (IMO). Esses problemas mostram vários aspectos matemáticos, procurando o máximo de conhecimento e raciocínio dos competidores para apresentarem a solução correta.

Dessa forma, percebe-se a relevância social e científica em agregar uma metodologia de ensino que unifique as práticas docentes aos saberes dos alunos competidores. Para exemplificar, recordamos, a seguir, as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (Brasil, 2018, p. 265).

Não obstante, como aponta Alves (2020, 2021), o estilo e a cultura matemática característica das Olimpíadas de Matemática não pode desconsiderar ou negligenciar o estudante, não necessariamente competidor, bem como, a possibilidade de influenciar e catalisar o engajamento de cada vez mais um número maior de professores de Matemática, a incorporação e domínio de uma abordagem própria e característica da (IMO).

Dessa forma, com o propósito de fundamentar algumas vertentes da abordagem didática das situações-problema de matemática para a (IMO) e estimular uma maior participação de estudantes e professores de Matemática, apresentam-se os princípios da Teoria das Situações Didáticas (TSD), incrementados a referida questão, dentro de um pensamento didático que tem como objetivo, promover uma discussão de elementos norteadores a serem incorporados à prática do professor de matemática, no âmbito do ensino da (IMO).

De acordo coma descrição de Chevallard (2013, p. 6), "devemos procurar compreender não só a resolução do aluno à pergunta e a resolução do professor para a atitude do aluno", mas analisar quais aspectos o professor, na ocasião, "irá declarar tanto sobre o comportamento do aluno como da sua própria conduta em face dele" (Chevallard, 2013, p. 6). É atribuição da pedagogia, averiguar se as mudanças apresentadas revelam aspectos experimentais e intuitivos que busquem aproximá-los da teoria do saber científico.

Diante dessa asserção, verifica-se como o software GeoGebra pode ser implementado em sala de aula para possibilitar a construção do conhecimento sobre a geometria plana, referente ao tópico de quadriláteros. Portanto, os professores vivenciam na sua formação alguns conceitos de tecnologia no ensino de matemática, aplicando aos alunos que realizam as atividades matemáticas no formato tradicional do ensino.

Há de se ressaltar que essa área do saber apresenta uma responsabilidade essencial na formação de sujeitos, pois, proporciona uma "interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais ampla das ideias e uma visão geral mais equilibrada da Matemática" (Lorenzato, 1995). Dessa maneira, a Geometria destacada por Fainguelernt (1995), tem um "papel fundamental no ensino, sendo o responsável pela dinâmica das estruturas mentais na passagem de informações concretas e experimentais para os seguimentos de abstração e generalização. " Daí a relevância de trabalho com objetos bidimensionais ou tridimensionais e sua representação por rabiscos, desenhos e formas estruturadas, que o GeoGebra pode proporcionar aos estudantes por meio de suas janelas 2D e 3D.

Desse modo, acredita-se ser esse um dos motivos que contribuem para que os alunos busquem transpor obstáculos em situações-problema em que o uso de fórmulas não sejam o suficiente para chegar à conclusão da resposta. Dentre os conteúdos ensinados aos estudantes de forma mecanizada, o assunto de figuras planas é um dos que causa maior equívoco. Almouloud (et al., 2004), destaca alguns pontos que:

> Em relação à formação dos professores, esta é muito precária quando se trata de geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática. Por sua vez, a formação continuada não atende ainda aos objetivos esperados em relação à geometria (Almouloud, et al., 2004, p. 99).

Assim, a geometria plana é conteúdo essencial do currículo escolar de Matemática, tanto no Ensino Fundamental I e II quanto no Ensino Médio e, portanto, precisa ser trabalhada com mais aprimoramento por sua relevância no contexto escolar e cotidiano do aluno. De acordo com Almouloud (et al., 2004), a geometria é um estudo "importante da Matemática, por colaborar principalmente como ferramenta para outras áreas do conhecimento" e os "professores do ensino fundamental apontam problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem" (Almouloud, et al., 2004). Nesse contexto, mostra-se necessária uma boa formação no conteúdo de geometria plana, para que o sujeito tenha uma melhor e compreensão acerca de espaço e forma, garantindo maior entendimento das diferentes formas e aspectos culturais. É imprescindível entender que o conteúdo de geometria tem papel fundamental no cotidiano do estudante e social do sujeito, e a partir disso, apresentar uma estrutura que possa auxiliar o professor no ensino deste assunto.

Contudo, para que os objetivos sejam alcançados, é indispensável que as metodologias em sala de aula sejam aplicadas de forma adequada no ensino e aprendizagem em geometria. Um exemplo são os softwares educativos, que podem auxiliar estudantes na concepção e no entendimento de conceitos advindos da Geometria Plana. Portanto, para que esta abordagem ocorra de maneira adequada na sala de aula, presencial ou virtualmente, é necessário oferecer condições para que os alunos desempenhem investigações no ensino e aprendizagem da geometria, pois estas análises ajudam na aquisição de informações necessárias para a organização dos conceitos geométricos (Fiorentini, 2006).

É importante salientar que o software GeoGebra, por ser considerado um software educacional de Matemática e de Geometria Dinâmica, provoca os estudantes na elaboração e construção de objetos algébricos e geométricos de forma interativa, promovendo a estruturação de "referências a situações do cotidiano são, em geral, realistas e exploram ambientes sociais ou culturais diversos, contribuindo, portanto, para tornar significativos os conteúdos matemáticos abordados" (Brasil, 2002, p.161).

Além desse fato, é importante ou uso de tecnologias digitais aplicadas ao ensino de matemática, como ação pedagógica para o ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos, por meio da construção de atividades que proporcionem a apropriação efetiva desse conhecimento. Nesse contexto, os alunos tornam-se sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento, pois os docentes asseguram que estes passem por processos de experimentação, interpretação, visualização, indução, conjecturação, abstração, generalização e demonstração. Assim, o aluno vai agir em uma apresentação formal de conhecimentos baseada em fatos, de maneira geral na forma de definição e propriedade (Gravina, 1998, p. 1).

Nesse direcionamento, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta, a partir de situações didáticas abrangendo a Geometria Plana, tendo como base questões da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). A situação-problema será estruturada a partir das dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Assim, pretende-se colaborar para o ensino de Problemas Olímpicos (PO)[1] de geometria plana, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para estruturação de exemplos matemáticos e resolução de situações-problema sobre o tópico de quadriláteros, proporcionando uma compreensão conceitual e a elaboração de estratégias para solução de problemas de quadriláteros convexos

2. Olímpiada Internacional De Matemática (IMO): uma breve descrição

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) é uma competição internacional de bastante interesse por alunos do Ensino Médio e é realizada

[1] Alves (2020) descreve um Problema Olímpico (PO) como um conjunto de problemas originários de provas e exames oficiais das Olimpíadas de Matemática, todavia, destituído de preocupações didáticas e endereçadas, de modo restritivo, aos estudantes competidores.

anualmente desde 1959. Devido aos conflitos ocorridos na Mongólia em 1980, este foi o único ano que não aconteceu o evento (Turner, 1980). Os países participantes anfitriões são autorizados a convidar países que nunca competiram em uma IMO. Cada país competidor tem direito a enviar no máximo seis estudantes para competir. Essa seleção, deve ter participantes com idade inferior a 20 anos e que não tenham realizado um curso no ensino superior, entretanto, o envio acontece por um líder de equipe e um vice-líder, representado por dois professores escolhidos pela Comissão da Olimpíada Brasileira de Matemática (COBM). Cada país selecionado, envia os problemas elaborados pelos docentes participantes, para compor a base de dados da IMO, menos o país sede da Olimpíada. O responsável pelo envio das questões é o professor líder da comissão de cada país, seguindo um protocolo seguro.

Os líderes de equipe são seletivamente o júri. A primeira tarefa do júri é construir os problemas que serão usados na próxima competição (Maths, 2003). As questões-problema não precisam ser elaboradas no momento da competição. Assim, cada país é convidado a contribuir com uma ou duas perguntas bem antes do início da Olimpíada Internacional de Matemática e um comitê de problemas analisa e seleciona cerca de 20 (vinte) ou mais questões, das quais são selecionadas 6 (seis) questões finais para aplicação.

A participação do Brasil com sua delegação de representantes teve a sua primeira presença em 1979 e apresentou ao longo do tempo uma melhoria no ensino e aprendizagem de diversos alunos competidores olímpicos. Seus resultados são destacados no Gráfico 1, que mostra os países participantes relacionado a classificação do Brasil de 1979 (22º - vigésimo segundo) de 23 (vinte e três) países participantes até o ano de 2020 (IMO, 2019a):

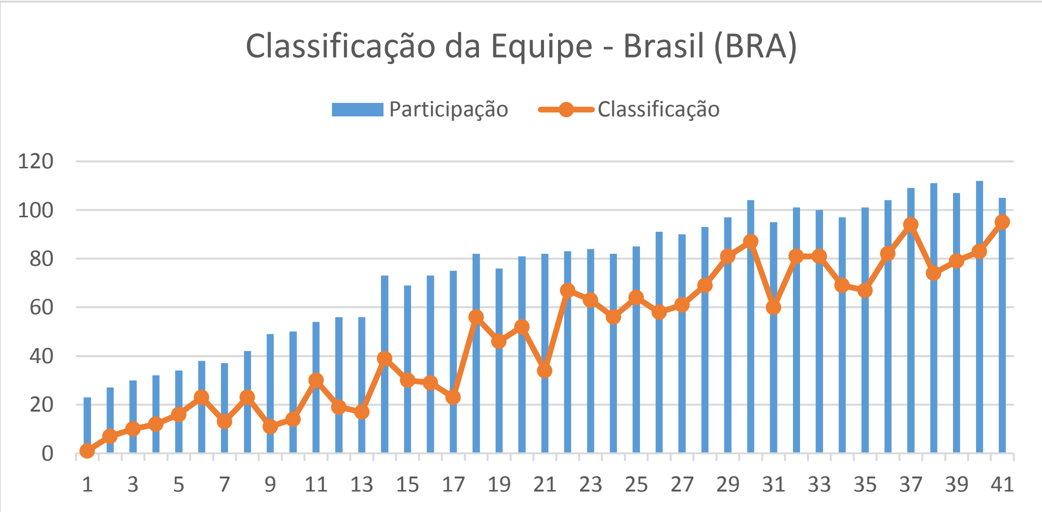


Gráfico 1. Classificação anual do Brasil na Olimpíada Internacional de Matemática.
Fonte: Elaboração dos autores (2020).

É visível a crescente participação do Brasil na (IMO), ocupando posições relativas a quantidade de países participantes, observando o Gráfico 1, destaca-se a quadragésima primeira olimpíada, que a equipe brasileira ocupou a 10º (décima posição) no ano de 2020 em relação a 105 (cento e cinco) países presentes. Tendo em vista que a primeira edição da Olimpíada Internacional de Matemática aconteceu em 1959 na Romênia, sendo realizada anualmente deste então, com exceção do ano 1980, devido às sanções políticas decorrentes da invasão soviética ao Afeganistão, não havia IMO.

As provas consistem em 6 (seis) problemas matemáticos. Sendo que, cada questão tem um valor de 7 (sete) pontos. O exame é realizado em dois dias consecutivos e os participantes dispõem de quatro horas e meia para a resolução de três problemas em cada um dos dias. Os problemas são selecionados por área da matemática do ensino médio, que inclui geometria, teoria dos números, álgebra e análise combinatória. A resolução dos problemas olímpicos não precisa do conhecimento da matemática avançada, apenas, de grande raciocínio e habilidades matemáticas. (IMO, 2020b).

Conforme pesquisa internacional de Kenderov (2009, p. 14) relembrou a função principal e de avanço das competições Eötvös na Hungria no ano de 1894, quando analisa algumas de suas origens primárias perspectivamente, ao descrever que:

> Todavia, a competição Eötvös na Hungria, que aconteceu em 1894, partindo da premissa de ser amplamente creditado como o precursor de torneios de matemática e física contemporâneas para pré-universitários da escola. Os participantes tiveram quatro horas para resolver três problemas (sem nenhuma consulta com outros alunos ou professores sendo impedido). Os problemas na competição Eötvös foram projetados para verificar a criatividade e o pensamento matemático, não apenas a técnica adquirida pelas habilidades. Em particular, os estudantes foram convidados a fornecer uma prova de uma declaração. O modelo de competição Eötvös agora está amplamente difundido e ainda domina uma grande parte do cenário competitivo. (Kenderov, 2009, p. 14).

Diante disso, Kenderov (2009) relata uma expressão descrita da (IMO), anexada ao modelo diferenciado de torneios e das competições e verdadeiros confrontos de pensadores, quando relata um seguinte texto:

> Na época atual está é o torneio de matemática de maior prestigiado. Direta ou indiretamente, influencia todas as outras atividades de grandes valores na matemática. Com seus altos padrões, a IMO solicita aos países participantes que constantemente seja melhorado seus sistemas de ensino e educação e seus métodos de seleção e preparação de alunos competidores. Isso, ao longo dos anos, rendeu uma grande variedade de disputas e atividades de enriquecimento matemático em todo o mundo. Existem competições “inclusivas” abertas ao público em geral todos, destinadas aos alunos de habilidades médias, enquanto eventos “exclusivos” somente por carta convite almeje alunos habilidosos. (Kenderov, 2009, pp. 15-16).

Diante da realidade escolar brasileira, tem-se pouco espaço para disseminação sobre outras olímpiadas de Matemática, de caráter internacional. A partir disso, existem algumas noções de situação didática para o docente que podem contribuir na ação, mediação e eficiência formativa do professor no seu campo de atuação, visando uma interação pedagógica que não desconsidera elementos supracitados.

3. Teoria das Situações Didáticas (TSD) no Ensino e Aprendizagem

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) apresenta reflexões na forma de como podem arquitetar e trabalhar o conteúdo matemático aos estudantes. Assim, a TSD vem sendo disseminada no contexto educacional por professores e pesquisadores, de maneira a se obter uma aprendizagem que tenha sentido e que o aluno construa o conhecimento de forma autônoma. Uma situação didática é definida quando surgem aspectos pedagógicos entre a tríade professor, aluno e o conhecimento matemático (saber) conectado à situação de ensino e aprendizagem, levando em consideração o meio (*milieu*). Para entender a comunicação entre o espaço maior do ambiente escolar e a vida cotidiana do aluno, faz-se alusão às situações adidáticas que representam a busca do estudante por soluções, de forma individual, em uma situação que fica distante ao controle do professor em sala de aula.

Conforme Alves (2016, p. 137) "[...] a adoção de determinada representação, tendo em vista uma epistemologia que enfatiza o contexto de resolução de problemas, poderá ser mais eficiente ou menos eficientemente incorporada ao patrimônio individual e privado dos sujeitos em situação". Por sua vez, Almouloud (2007) apud Barbosa (2016), mostra as quatro hipóteses sobre a Teoria das Situações Didáticas (TSD) considerando que o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática identificada entre professor, aluno e saber. São destacadas neste contexto:

> 1-O aluno aprende adaptando-se a um Milieu que é fator de dificuldades, de contradições [...] 2-O Milieu não munido de intenções didática é insuficiente para permitir a aquisição de um conhecimento matemático pelo aprendiz [...] 3-Esse Milieu e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. 4-No fundo, o ato de conhecer dá-se conta um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização. (Almouloud, 2007, p. 32 apud Barbosa, 2016, pp. 4-5).

Assim, aparece uma situação adidática, definida por uma situação-problema elaborada, construída e aplicada pelo professor, de maneira a contribuir a construção do conhecimento, incluindo vários métodos educativos, inclusive o milieu, externado na dinâmica do aluno em aprender por uma vontade própria.

Nesse contexto, o conhecimento pode ser determinado por, pelo menos, uma situação adidática que defenda seu sentido chamado de situação fundamental. Em outro pensamento é a aprendizagem adaptada e analisada por Brousseau (1986), que menciona as chamadas etapas de assimilação e acomodação presentes na teoria cognitivista descrita por Jean Piaget (1896-1980). Portanto, o aluno é provocado a amoldar-se às situações de resolução de uma nova questão-problema procurando seus entendimentos anteriores.

Vale destacar que o aluno para responder uma situação problema necessita ultrapassar seu próprio nível de conhecimento e estratégias, ou seja, estabelecer as relações entre conteúdos dominados e apreendidos na escola. De acordo com Almouloud (2007) a "situação didática caracterizada pelo jogo de interação dos alunos e os problemas apresentados pelo professor, sendo a forma proposta nomeada de devolução" e, tendo por "objetivo incentivar uma interação favorável e que permita ao estudante uma autonomia no progresso do conhecimento próprio" (Almouloud, 2007).

É importante salientar outra situação destacada por Guy Brousseau, que são as situações não-didáticas, diferenciadas pelas situações adidáticas. As situações não-didáticas representam situações que não foram organizadas no saber, entre professor e aluno, por não terem uma relação específica com o ensino.

Essas situações de aprendizagem trazem diversos problemas, sendo possíveis de serem analisados pelas Teoria das Situações Didáticas (SDO), através da visualização e análise das interpretações definidas entre aluno, professor e saber, que podem ser compreendidos na resolução de questões e construção de conceitos pelos estudantes. Freitas (2002) destaca a diferença entre situação de ensino e situação didática falando que:

> "[...] estabelecida uma intenção de ensino, através da resolução de um problema, é principalmente a presença, a valorização e a funcionalidade de situações adidáticas no transcorrer de uma situação didática que diferenciam fundamentalmente essas duas formas de ensinar. " (Freitas, 2002, p. 71).

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) oferece suporte teórico para a elaboração das atividades com Problemas Olímpicos (PO), visto que o papel do aluno e do professor possibilita a construção do conhecimento. Conforme Brousseau (1986) apud Teixeira e Passos (2013, pp. 165-166) descrevem uma tipologia de situações didáticas, onde foram destacadas as etapas: ação, formulação, validação e institucionalização, caracterizando as relações entre a atividade desenvolvida de ensino e aprendizagem com uso do saber matemático.

> **Situação Didática de Ação:** o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema; **Situação Didática de Formulação:** ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar; **Situação Didática de Validação:** os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador. **Situação Didática de Institucionalização:** é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização (Brousseau, 1986 apud Teixeira e Passos, 2013, pp. 165-166).

Dessa maneira, a TSD tem uma grande importância na relação de procedimentos trabalhados dentro das fases aqui relacionadas, estimulando o aluno a ser participativo de forma a contribuir na construção e realização da cognição, o que fornecerá possibilidades para o desenvolvimento de novos conhecimentos baseado em suas experiências vivenciadas no cotidiano ao interagir com o meio e com os sujeitos integrantes ao buscar resoluções de problemas matemáticos.

4. Noção de Situação Didática e Didática Profissional do Professor

Observa-se que a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, consequentemente, possibilita uma perspectiva diferenciada, no momento de entender um movimento dialético na aprendizagem matemática, tomando como suporte uma situação e interpretado pelas formas idiossincrásicos adaptativos do discente, diante de um contexto de situações fundamentais e características, cujos componentes constituintes são capazes de incentivar, de analisar a gênese, a progressão das aprendizagens e habilidades matemáticas concedidas a determinado problema matemático ou ação pesquisadora em torno da Matemática. Diante dessa descrição Alves & Catarino (2019) apud Alves (2018b; 2018f; 2019), "[…] as relações e fenômenos derivados do triangulo didático clássico – estudante/professor/saber ficam fortemente condicionados pelo campo epistêmico matemático de referência e, nesse caso, um campo epistêmico eminentemente disciplinar sujeitos em situação".

Podendo, todavia, estabelecer ao papel do professor uma formação inicial ou final, e não ignorar um fenômeno natural do conhecimento, pouco apreciado por Brousseau (1986), ao se referir ao processo de aprendizagem do professor, do ensino e aprendizagem em seu local de trabalho, ao caminho do enfrentamento de problemas complexos, de obstáculos e empecilhos identificados, quer sejam no entorno da sala de aula, quer sejam no próprio ambiente escolar ou, de modo mais amplo da situação, na instituição de ensino.

Dessa forma, Pastré (2004) cita uma mudança no ponto de vista histórico no contexto das relações no trabalho, ao visualizar que: falando que:

> "[...] podemos pensar que estão sempre acompanhados por consciência quando são evocados, as habilidades podem ser mobilizadas de forma consciente, ou seja, com mais frequência inconscientemente, na forma de habilidades integradas. Este movimento de automação de habilidades para depois de aprender sendo ótima a importância prática, pois permite mudar a vigilância do sujeito para níveis mais altos de atividade, mais complexos e mais integrados. " (Pastré, 2004, p. 214, tradução dos autores).

De modo similar, são demarcados alguns componentes discutidos nas definições teóricas aplicadas na TSD e encontram-se ainda na literatura de Alves (2020) as descrições de:

> **Problema Olímpico (PO):** Um conjunto de situações problemas de Matemática, abordado em um contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores, cuja abordagem e características de ação individual e solitária do estudante envolve apenas objetivo/escopo de se atingir as metas (medalhas e

> certificados) definidas a priori em cada competição, por intermédio do emprego de estratégias especializadas, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, instrumentalizados previamente por professores de Matemática.
> **Situação Didática Olímpica (SDO):** Um conjunto de relações estabelecidas implicitamente ou explicitamente, balizadas por uma metodologia de ensino (TSD), entre um aluno ou grupo (s) de alunos, um certo meio (compreendo ainda o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição coletiva e debate científico do grupo, a competição solidária e problemas ou conjunto de problemas característicos e abordados nas olimpíadas de Matemática. (Alves, 2020).

Assim, pode-se compreender na noção de Situação Didática Olímpica (SDO) que se fundamentam a partir do conceito de situação didática de Brousseau (1986, 2010), definida pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), de modo geral, para as situações de ensino e aprendizagem em Matemática. No ponto de vista notacional de Alves (2020), uma Situação Didática Olímpica (SDO) se caracteriza na SDO = ($TSD_{\text{metodologia}} + PO_{\text{problema olímpico}}$).

Com o propósito de tornar mais claro esse enunciado, será apresentado por Alves (2018) apud Neto (2019, pp. 21-22), uma tabela que faz a diferença entre as noções de Problema Olímpico (PO) e Situação Didática Olímpica (SDO) amparada na Teoria das Situações Didáticas (SDO):

Características	Problema Olímpico (PO)	Situação Didática Olímpica (SDO)
Dos Problemas envolvidos	Problemas de competições, elaborados e estruturados de forma serial, tendo em vista a aplicação dos três níveis hierárquicos previstos pela OBMEP em competições.	Problemas de competições readaptados, reetruturados, modificados e circunstanciados, tendo em vista um grupo ou grupos de alunos particulares, com o amparo da TSD.
Dos competidores	Ação individual de participação nas etapas das OBMEP, visando a obtenção de colocações distinguidas no certame.	Ação e trabalho em equipe, visando a investigação científica e evolução coletiva do conhecimento do grupo.
Do professor	Não presente. Equipes de profissionais especialistas na confecção/produção de questões visando a seleção (identificação) de prodígios e medalhistas.	Promotor da situação de ação, situação de formulação, situação de validação e a institucionalização do conhecimento matemático para o grupo ou grupos de competidores em sua própria sala de aula.

Uso e emprego da tecnologia	Ausente e não previsto sua exploração em certames oficiais ou competições nacionais.	Empregada para resultar nas alterações, modificações necessárias e adaptação para o grupo ou grupos de estudantes.
Dos objetivos finais	Seleção, Classificação. Distinção social para os alunos mais eficientes e notáveis no certame objetivando a certificação e laureamento.	Promoção do grupo ou grupos de estudantes com habilidades acima da média, bem como estudantes com poucas chances de maior êxito individual.

Tabela 1. Descrição e diferença entre as noções de PO e SDO, amparo na TSD.
Fonte: Alves (2018) apud Neto (2019, pp. 21-22).

No tópico seguinte, a partir da seleção de um Problema Olímpico (PO), será estruturado um processo de abordagem metodológica, tomando como referência as etapas previstas pela TSD.

5. Situações Didáticas da IMO visualizadas com o *software* GeoGebra

Apresenta-se um modelo matemático como recurso para o ensino de “geometria plana” de uma questão-problema extraída das avaliações da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) que permita a utilização do *software* GeoGebra no auxílio à construção de soluções geométricas. Nesse sentido, na Figura 1 apresenta-se a situação problema retirada da avaliação da IMO (2020 – Problema 1), que se refere aos conceitos de Quadrilátero convexo, bissetriz interna do ângulo e mediatriz do segmento, cuja resolução é incentivada pelo uso o raciocínio intuitivo do estudante ao buscar os traços de desenho relacionando a noção de geometria plana, presente na estrutura do texto. A IMO 2020 foi realizada de modo virtual pelo país da Rússia. Problema proposto pela delegação da Polônia.

Problema 1:

Problema 1. Considere o quadrilátero convexo $ABCD$. O ponto P está no interior de $ABCD$. Verificam-se as seguintes igualdades entre razões:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1:2:3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Prove que as três seguintes retas se intersetam num ponto: as bissetrizes internas dos ângulos $\angle ADP$ e $\angle PCB$ e a mediatriz do segmento AB.

Figura 1. Problema 1 da Olimpíada Internacional de Matemática.
Fonte: Adaptado da IMO (2020).

A dialética de ação: nesta etapa podem analisar o processo da competição internacional, tomam as suas próprias decisões e ao fim de algumas análises, observam a resolução. Durante o problema 1 (Figura 1) desenvolvem-se novas estratégias e tomam-se novas decisões (algumas intuitivas) na construção da figura 2, pois de acordo com Almouloud (2007, p. 38), "[...] as interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver trocas de informações (se os alunos trabalham em grupo, os conhecimentos desse grupo fazem parte do *milieu* de cada um dos alunos) ". A continuação de situações de ação constitui a forma pela qual o estudante vai aprender uma estratégia de resolução de problema olímpico.

Observa-se que na construção do quadrilátero, o aluno perceba os pontos A, B, C e D com ligados ao ponto central P, e O ser circuncentro de PAB na figura 2 e 3. Ao analisar os seguimentos POAD e POBC são cíclicos entre si. Na figura 2 e 3 traz-se uma visão no qual o docente pode explorar situações de ensino e aprendizagem matemática, em um ambiente de representações 2D e 3D, em que as informações podem ser retiradas da manipulação do *software* e relacionando com os dados da questão 1 (Figura 1):

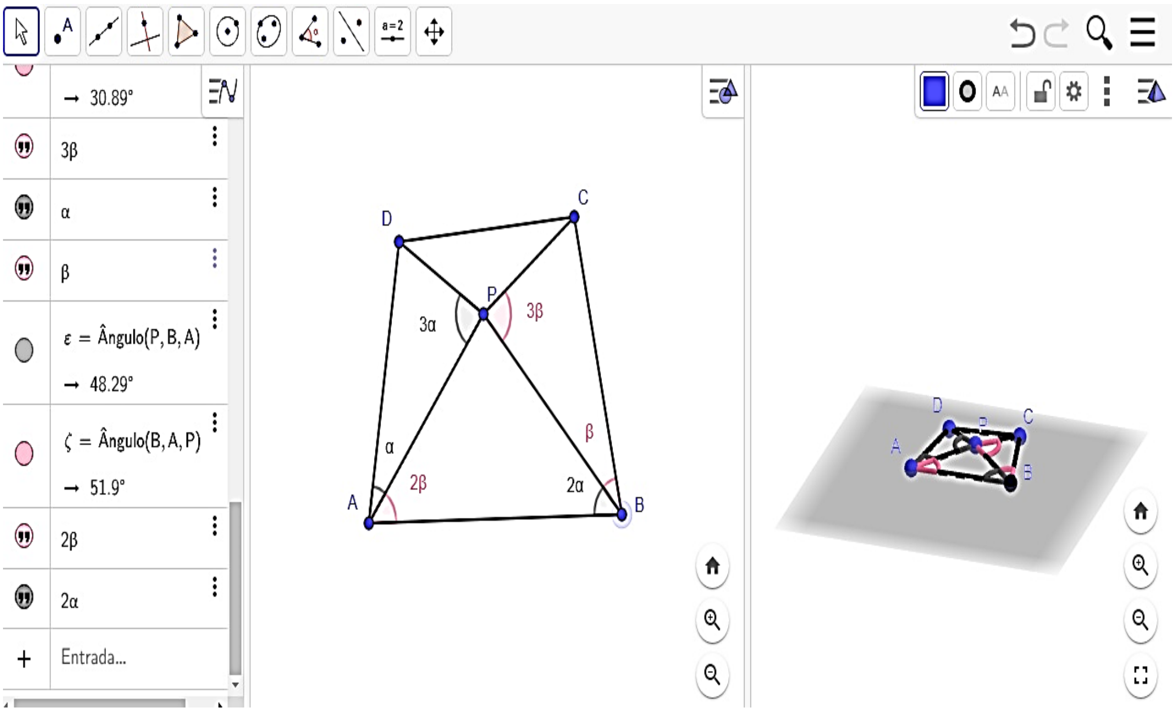


Figura 2. Visualização 2D/3D construída pelo *software* GeoGebra correspondente ao Problema 1 da Olimpíada Internacional de Matemática.
Fonte: Elaboração dos autores (2020).

Dialética de formulação: é a capacidade de um sujeito retomar um conhecimento, trocando informações através de uma linguagem formal na qual todos possam compreender. De acordo com Almouloud (2007, p. 38), "o aluno troca informações com outros participantes, que serão só emissores e receptores da situação, trocando mensagens escritas ou orais, sendo as mensagens redigitadas em uma língua natural ou matemática". A comunicação é necessária para que ambos os interlocutores cooperem no processo de um meio externo a fim de obter a formulação do problema olímpico, portanto, o discente pode, concluir que os ângulos formados por ODP = OAP = 90 – 2 PAD = $\frac{1}{2}$. PDA. Ademais, o estudante poderá perceber que para responder o problema olímpico internacional na Figura 3, ele pode estruturar no GeoGebra os pontos definidos relacionando ao centro do quadrilátero que resulta na resolução do problema:

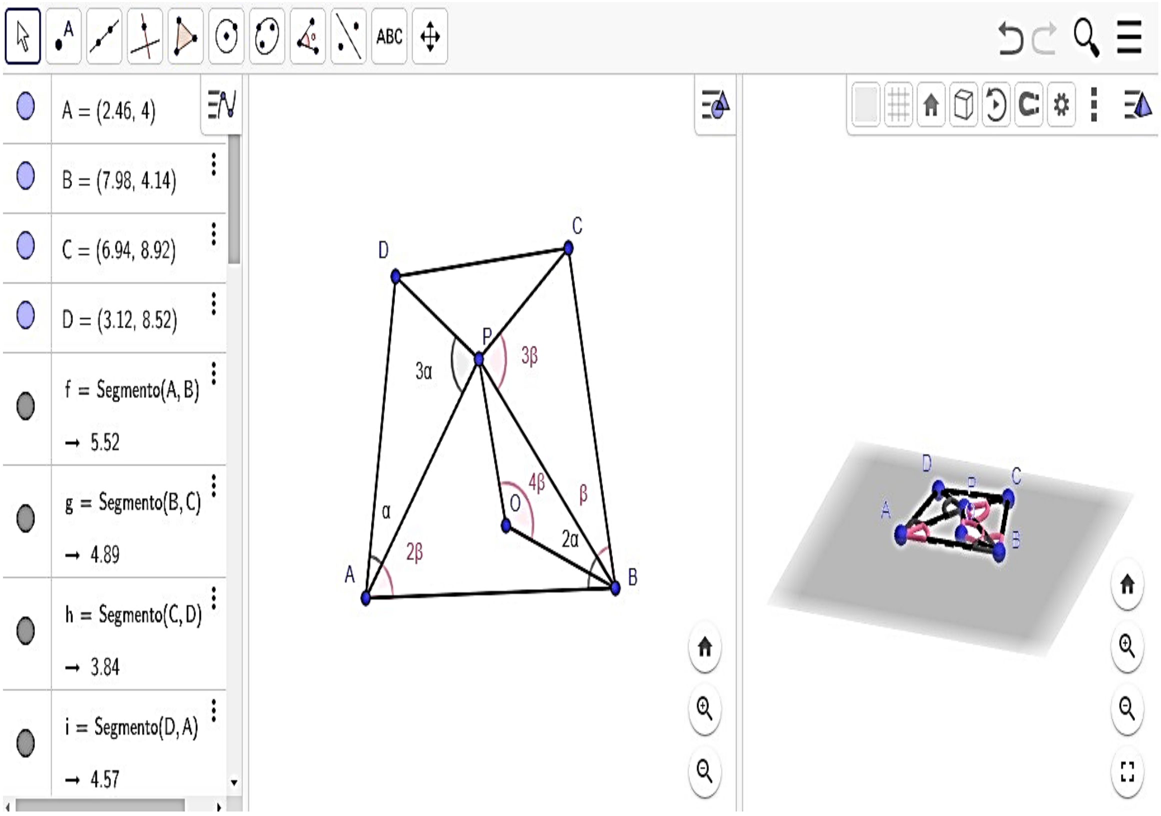


Figura 3. Visualização 2D/3D destacando os pontos ligados ao centro construída pelo *software* GeoGebra correspondente ao Problema 1 da Olimpíada Internacional de Matemática.
Fonte: Elaboração dos autores (2020).

A dialética de validação: é a etapa que permite diferenciar um novo modelo de formulação: um emissor já não informa, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Os dois envolvidos colaboram na busca da verdade, ou seja, na busca de vincular de forma concreta um conhecimento a um campo de saberes já estabelecidos, Almouloud (2007, p. 39) descreve que "o aluno deve mostrar a validade do modelo descrito por ele criado, submetendo a descrição matemática (modelo de situação), em que o emissor deve justificar a exatidão de seu modelo e fornecer uma validação semântica".

Brousseau (1996) destaca que na Teoria das Situações Didáticas (TSD), os alunos tornam-se protagonistas das características das situações às quais desempenham, ainda faz menção das relações do aluno com o meio dividida em três categorias:

a) troca de conhecimentos não descobertas ou sem linguagem (ações e soluções);

b) troca de conhecimentos codificados em uma linguagem (mensagens descritas);

c) troca de afirmações.

Essas categorias apresentam métodos que os estudantes formarão para estruturar o desenvolvimento das situações didáticas do problema olímpico da IMO:

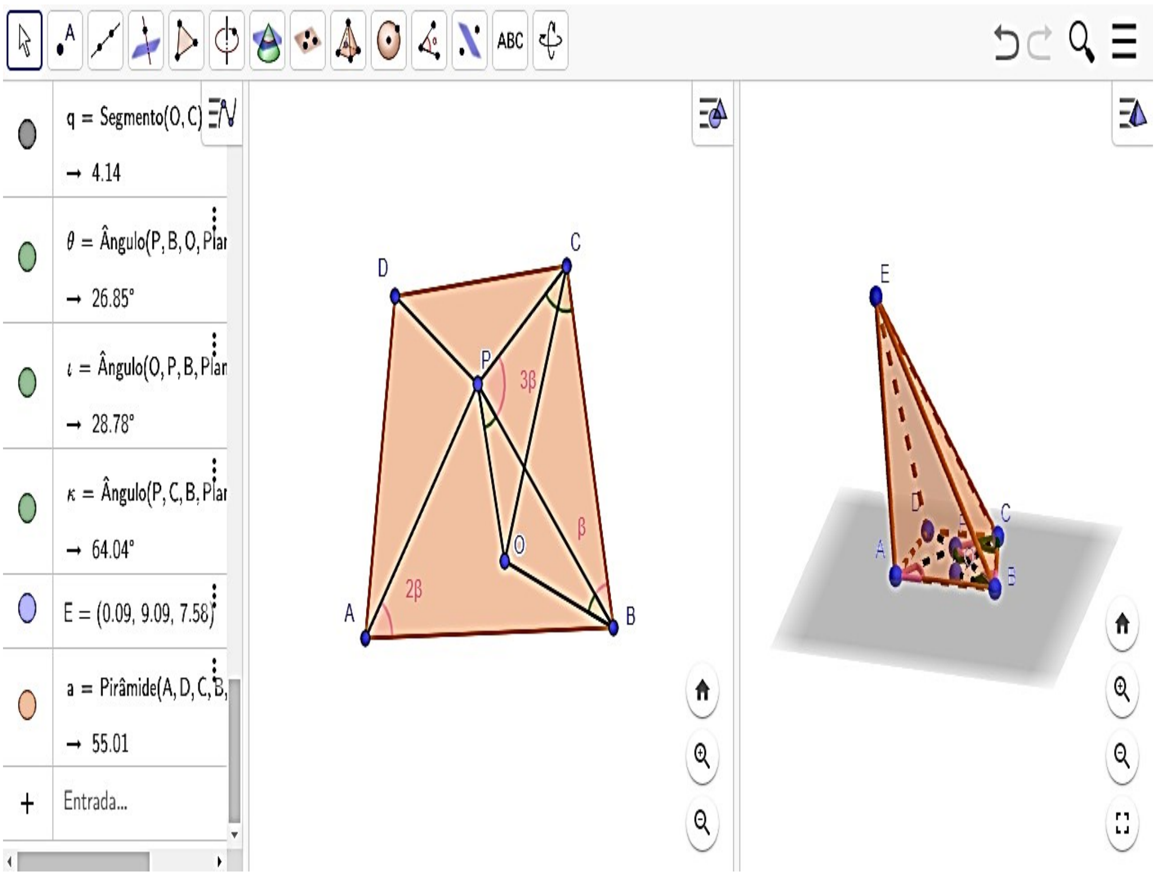


Figura 4. Visualização 2D/3D final construída pelo *software* GeoGebra correspondente ao Problema 1 da Olimpíada Internacional de Matemática.
Fonte: Elaboração dos autores (2020).

A dialética de institucionalização: é a etapa exibida na Figura 4, através das janelas de visualização do *software* GeoGebra, colocando o professor no compromisso de assumir a ação, estabelecendo quais conhecimentos considerados nas etapas anteriores são importantes e quais são descartáveis, configurando o regulamento de objeto aos conhecimentos adquiridos. Assim DO é a bissetriz do ângulo ADP e da mesma forma CO é a bissetriz do ângulo BCP. Neste contexto, Almouloud (2007, p. 40) faz sua relação com “[...] as situações da institucionalização foram então definidas como aquelas em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”.

Para encerrar, formaliza-se uma resolução final da solução oferecida pelos professores do problema selecionado. **Nota de autores olímpicos:** a motivação para definir os pontos relacionados ao ponto P, é dividir APD em 2α e, α deixar que sua linha se cruze AD em P, então BOP é cíclica.

6. Considerações finais

Este artigo apresenta uma situação didática aos professores de matemática para o ensino e aprendizagem de quadriláteros convexos, no viés da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que proporciona uma maior segurança na condução do planejamento do docente.

Para subsidiar a pesquisa, conta-se com o suporte do GeoGebra com intuito de realizar a transmissão do conhecimento do problema de forma prática e simplificada da percepção dos conceitos compreendidos nas resoluções de questão-problema.

Com relação ao problema selecionado da IMO, acredita-se que a utilização da construção no GeoGebra tem potencial para fornecer ao estudante a possibilidade de formular estratégias de resolução de outros problemas de olimpíadas internacionais e visualizar as propriedades matemáticas relacionadas ao problema olímpico, compartilhando com outros alunos uma busca pela validação da solução da questão abordada.

Assim, esta investigação apresentou uma situação de ensino e aprendizagem nas ações e discussões em todo o processo de formação do professor, em particular no pensamento geométrico dos futuros docentes e sua capacidade de usar a interpretação em diferentes representações e estratégias no ensino da matemática, com o uso do *software* GeoGebra para resolução de problemas olímpicos. Espera-se que os resultados referentes a esta pesquisa contribuam para formação inicial e futura de professores de matemática e de como eles podem promovê-la com seus alunos, gerando aprimoramento e desenvolvimento da matemática.

Bibliografia

Almouloud, S. S. A., Manrique, A. L., Silva, M. J. F., & Campos, T. M. M. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, 27(1), 94-108. Recuperado em 15 de dezembro de 2020, de https://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da Matemática*. Editora UFPR, Paraná. Brasil.

Alves, F. R. V. (2016). *Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva.* Interfaces da Educação, 7(21), 131-150.

Alves, F. R. V. & Catarino, P. M. M. C. (2019). Situação Didática Profissional: um exemplo de aplicação da Didática Profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de Matemática no Brasil. *Indagatio Didactica,* 11(1), 103-129.

Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,* 13(1), 1-30.

Alves, F. R. V. (2021). Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. *Revista Contexto & Educação*. 36(113), 1 – 30.

Barbosa, G. S. (2016). Teoria das Situações Didática e suas influências na sala de aula [Resumo]. In Encontro Nacional de Educação Matemática (Eds.). *Anais do XII ENENM, Educação Matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades.* 1-12. São Paulo, Brasil: SBEM.

Brasil. (2002). *Programa nacional do livro didático: guia de livros didáticos de 5ª a 8ª série.* (Guia PNLD 2002). Secretaria da Educação Básica. Programa do Livro. Brasília, DF: Ministério da Educação.

Brasil. *Base Nacional Comum Curricular: documento de caráter mandatório que orienta a formulação dos currículos escolares.* Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática (M.J. Figueiredo, Trad.). In J. Brun (Ed.). *Didática das Matemáticas,* 1, 35-113. Lisboa: Instituto Piaget. (Trabalho original publicado em 1986).

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* (Eds.) São Paulo: Ática.

Chevallard, Y. (2013). Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias (C. Puggian, Trad.). In Revista de Educação, Ciências e Matemática (Ed.). *Simpósio Internacional de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática,* Bratislava, Tchecoslováquia, 3, 1-14. Rio de Janeiro. (Trabalho original publicado em 1988).

Fainguelernt, E. K. (20 fev., 1995). O ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. [Versão Eletrônica]. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática,* 4, 13. Recuperado em 12 de dezembro de 2020, de https://www.revistasbemsp.com.br/REMat-SP/issue/archive.

Fiorentini, D. (2006). Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: D. Fiorentini & E. M. Cristovão (Eds.), *Histórias e investigação de/em aulas de matemática,* 13-36. Campinas: Editora Alínea.

Freitas, J. L. M. (2002). Situações Didáticas. In: S. D. A. Machado (Eds.), *Educação Matemática: uma introdução,* 65-87. São Paulo: EDUC.

Gravina, M. A. Santarosa, L. M. (1998). A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados [Resumo]. *In Anais do IV Congresso RIBIE (Eds.) Informática na educação: teoria e prática,* 73-88. Porto Alegre, Brasil: Editora da UFRGS.

IMO. (2020). *Problems.* Secretária do Conselho da IMO. Faculdade de Matemática e Física da Universidade, Ljubljana: Webmaster.

IMO. (2020a). *Team results, individual results, hall of fame.* Secretária do Conselho da IMO. Faculdade de Matemática e Física da Universidade, Ljubljana: Webmaster.

IMO. (2020b). *Olimpíada Internacional de Matemática.* Wikipédia. Fundação Wikimedia.

Lorenzato, S. Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista.* São Paulo/SP, 4, 3-13, 1995.

Maths. (2003). *The International Mathematical Olympiad.* AMC. Internet Archive: Wayback Machine. San Francisco, CA: Internet Archive.

Oliveira Neto, J. E. (2019). *Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).* Dissertação de Mestrado publicada, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.

Pastré, Pierre. (2004). Les compétences professionnelles et leur développement. In: Pierre Falzon. Presses Universitaires de France (Eds.), *Ergonomie,* 213-231. Paris: PUF.

Turner, N. D. (1985). A historical sketch of Olympiads: U.S.A. and international. *The College Mathematics Journal,* 16, 330-335.

Teixeira, P. J. M., & Passos, C. C. M. (2014). Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. *Zetetike,* 21(1), 155–168.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio e suporte financeiro no Brasil concedido pelo **Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.**

Autores:

Santiago, Paulo Vitor da Silva. Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática pelo o UFC, Professor de Matemática do Ensino Médio da Rede Estadual do Ceará, Brasil e, Graduado em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE. Sie pessoal: https://ufc.academia.edu/PauloVitordaSilvaSantiago E-mail: pvitor60@hotmail.com. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6608-5452

Alves, Francisco Regis Vieira. Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Professor Titular do Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – Fortaleza/CE, Brasil. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ - PQ2, Brasil. Docente do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática PGECM/IFCE. Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática ENCIMA/UFC. Docente do Mestrado Acadêmico em Educação Profissional e Tecnológica PROEPT/IFCE. Site pessoal: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles. E-mail: fregis@ifce.edu.br. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-20

https://union.fespm.es

Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono

Ana Moreno Martínez, Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez

Fecha de recepción: 28/01/2021
Fecha de aceptación: 24/02/2021

Resumen	En esta investigación se lleva a cabo un estudio de caso con estudiantes para maestro (EPM) con el objetivo de describir qué conocimiento matemático especializado movilizan durante el análisis de una situación real de enseñanza de la definición de polígono. El análisis se hará teniendo en cuenta el modelo analítico de Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas (MTSK). Los resultados permiten determinar que los EPM movilizan conocimiento limitado en cuanto a definir como práctica matemática. En cambio, activan una amplia variedad de conocimiento didáctico del contenido, en lo relativo a dificultades de los alumnos y en ejemplos como medio para enseñar. **Palabras clave**: Conocimiento especializado, polígono, estudiante para maestro, análisis de vídeo.
Abstract	In this research, a case study is carried out with prospective teachers with the objective of describing what specialized mathematical knowledge they mobilize during the analysis of a real teaching situation on the definition of polygon. The analysis will be done taking into account the analytical model of the Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK). The results allow us to determine that the prospective teachers mobilize a limited knowledge about defining as mathematical practice. On the contrary, they put into play pedagogical content knowledge, about students' difficulties and examples as a mean of teaching. **Keywords**: Specialized knowledge, polygon, prospective teacher, video analysis.
Resumo	Nesta pesquisa, é realizado um estudo de caso com alunos para professor com o objetivo de descrever quais conhecimentos matemáticos especializados eles mobilizam durante a análise de uma situação real de ensino da definição de polígono. A análise será feita tendo em conta o modelo analítico de Conhecimento Especializado do professor de Matemática (MTSK). Os resultados permitem constatar que a aluno para professores mobiliza conhecimentos limitados em termos de definição como prática matemática. Em vez disso, ativam uma ampla variedade de conhecimentos didáticos de conteúdo, em termos de dificuldades dos alunos e em exemplos como meio de ensino. **Palavras-chave:** Conhecimento especializado, polígono, aluno para professor, análise de vídeo.

1. Introducción

El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, y en particular el de futuros maestros, cobra protagonismo en nuestros días dentro de la investigación en didáctica de la matemática. Así, en trabajos previos se ha estudiado cómo el análisis de situaciones reales de enseñanza en sus clases de formación inicial permite adquirir a estudiantes para maestro (en adelante, EPM) elementos de conocimiento especializado, abriendo la puerta a un aprendizaje potencial en relación con la matemática en general, y con algunos contenidos matemáticos concretos como el concepto de polígono o la clasificación de triángulos (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013).

Tomando esto como referencia, este estudio tratará de contribuir a otras investigaciones y al desarrollo profesional de otros docentes aportando información sobre qué conocimiento matemático especializado activa un grupo de EPM en relación con el concepto de polígono, durante el análisis de vídeos de clases reales. Para poder profundizar en este conocimiento utilizaremos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematical Teacher's' Specialised Knowledge – MTSK*) (Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores, Escudero, Vasco, Rojas, Flores, Aguilar, Ribeiro y Muñoz-Catalán, 2018).

Estudios como el de Contreras y Blanco (2002) dejan en evidencia el conocimiento que poseen los futuros maestros, sobre la enseñanza de las matemáticas. De las carencias encontradas surge la necesidad de conocer en qué medida puede hacer movilizar conocimiento especializado una herramienta como el análisis de clases reales. Esta herramienta, por un lado, puede solventar la desvinculación entre la teoría y la práctica existente en la formación inicial y, por otro lado, acerca a los EPM a la realidad del aula ofreciendo condiciones para la construcción de conocimiento útil (Santagata y Angelici, 2010). Por todo esto, es necesario conocer qué conocimientos movilizan los EPM mediante el análisis de una práctica real para saber si podemos considerar dicho análisis un elemento imprescindible a incluir en un programa de formación inicial en futuros maestros.

Para dar respuesta al objetivo principal de esta investigación partimos de la siguiente pregunta: ¿qué conocimiento matemático especializado sobre el concepto de polígono movilizan los EPM, desde la perspectiva del MTSK, cuando se analiza una situación real de enseñanza?

2. Marco teórico

2.1. Definir como actividad matemática

Definir es una de las prácticas matemáticas que los docentes deben desempeñar en el aula. Y para realizarla correctamente deben saber qué significa definir, con qué finalidad se define en el ámbito escolar y qué característica debe poseer una buena definición (Pascual, Codes, Martín y Carrillo, 2019).

Según De Villiers (1988) existen dos formas de definir un concepto matemático:

- Definición constructiva (a priori): la definición se obtiene a través de la experimentación.
- Definición descriptiva (a posteriori): el término a definir se va obteniendo a partir de ciertas propiedades, presentadas de manera literal, de las cuales pueden deducirse las restantes.

Van Dormolen y Zaslavsky (2003) recogen las principales características que debe poseer una definición:

- Criterio de jerarquía: debe basarse en otros conceptos previamente definidos.
- Criterio de existencia: debe haber al menos un ejemplo de que el concepto que se define existe en el contexto considerado.
- Criterio de equivalencia: debe ser consistente con otras definiciones del concepto que se den por válidas.
- Criterio de axiomatización: cualquier elemento que se utilice en una definición debe ser definido previamente de manera no circular, excepto los términos indefinidos asumidos como punto de partida en el sistema axiomático en el que se está trabajando.
- Criterio de minimalidad: la definición debe contener única y exclusivamente la información que es estrictamente necesaria.
- Criterio de elegancia: cuando hay que elegir entre dos definiciones equivalentes pueden considerarse criterios como su extensión o su simplicidad.

Son muchas las investigaciones (Escudero, Gavilán, Sánchez-Matamoros, 2014; Contreras y Blanco, 2002) que evidencian las limitaciones al definir por parte de EPM, apreciándose dificultades a la hora de identificar las propiedades necesarias y suficientes de una definición según los criterios ofrecidos con anterioridad.

2.2. Análisis de vídeos de clases reales en la formación inicial de maestros

Las herramientas obtenidas directamente de la realidad de las aulas brindan a los EPM la oportunidad de aprender desde la práctica sin estar físicamente presentes en el aula (Borko, Koellner, Jacobs y Seago, 2010). Una de estas herramientas son los vídeos de clases reales, cuyo uso ha crecido significativamente en las últimas décadas (Santagata y Angelici, 2010), y con ello numerosas investigaciones sobre esta herramienta que permite la reflexión de manera colaborativa en el aula de formación inicial (Climent et al., 2013).

Las experiencias de investigaciones sobre el uso del análisis de clases reales (Carrillo y Climent, 2008; Climent et al., 2013) se toman como antecedentes de la problemática que plantea este trabajo. Dichas investigaciones resaltan los beneficios de esta herramienta en la formación de EPM, ya que les permite tanto desarrollar nuevos conocimientos y competencias como el fomento de una mirada profesional (Climent, Montes, Contreras, Carrillo, Liñán, Muñoz-Catalán, Barrera y León, 2016;

Fortuny y Rodríguez, 2012). Podemos resumir los beneficios del uso de vídeos de clases reales en tres funciones claves (Climent et al., 2016):

- Permitir a los EPM analizar con máximo detalle una tarea de enseñanza tanto desde la perspectiva del contenido y su estructura como desde la perspectiva del alumno.
- Solventar la limitación que supone no contar con una práctica real.
- Mostrar a los EPM imágenes que se contraponen a sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en Primaria.

El vídeo de clases reales tomará un papel fundamental dentro de esta investigación, pues será el medio para propiciar el análisis de la práctica real sobre la enseñanza del concepto de polígono.

2.3. Mathematical Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)

El MTSK (Carrillo et al., 2018) es un modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas que nos permitirá poner el foco de atención en el conocimiento que los EPM activan durante el análisis de una situación real de enseñanza-aprendizaje (Climent et al., 2016). Podemos situar los antecedentes principales del MTSK en los trabajos de Lee Shulman (1986) y el modelo propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT).

El MTSK considera el carácter especializado del conocimiento del profesor en todos sus subdominios y los define sin hacer alusión a referentes externos. Por otra parte, mantiene la consideración de dos dimensiones de conocimiento: *conocimiento matemático (MK)* y *conocimiento didáctico matemático (PCK)*. Cada uno de estos dominios se divide en subdominios que explicamos a continuación. El *Conocimiento Matemático*, hace alusión a la necesidad del profesor de poseer un conocimiento matemático sólido para promover en sus alumnos un aprendizaje significativo. Se divide en los siguientes subdominios:

- *Conocimiento de los temas (KoT)*: conocer los contenidos matemáticos y sus significados. Categorías[1]: definiciones, propiedades y sus fundamentos (citamos solo la referida a nuestro objeto de estudio).
- *Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM):* conocer relaciones entre contenidos matemáticos. Categorías: conexiones de complejización (citamos solo la referida a nuestro objeto de estudio).
- *Conocimiento de la práctica matemática (KPM):* capacidad del/a docente para generar conocimiento matemático. Indicadores[2]: condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (citamos solo la referida a nuestro objeto de estudio).

[1]El sistema de categorías que se presenta en cada subdominio surge de la reflexión teórica y de los datos empíricos con los que se ha trabajado. No se trata de una categorización exhaustiva, pero recoge los datos con los que se cuenta (Flores, Escudero, Montes, Aguilar y Carrillo, 2016). Por razones de espacio solo citamos las categorías que entrarán en juego en este documento; puede encontrarse una descripción completa de las mismas en Carrillo et al. (2018).
[2]En este caso las categorías están en desarrollo; contamos con algunos indicadores.

El *conocimiento didáctico del contenido*, considera el conocimiento didáctico ligado a la labor de enseñar y diferencia tres subdominios:

- *Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM):* derivadas de la interacción del alumno con el contenido matemático. Categorías: fortalezas y dificultades; formas de interacción con el contenido matemático; teorías sobre aprendizaje e intereses y expectativas.
- *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):* conocimiento que permite al profesor elegir los procedimientos, materiales, representaciones o ejemplos más adecuados para el aprendizaje de un concepto. Categorías: recursos materiales y virtuales; y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.
- *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS):* conocimiento del/a profesor/a sobre los que los/as alumnos/as deben aprender en un determinado nivel académico, pudiendo venir marcado por el currículo escolar. Categorías: expectativas de aprendizaje; nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

3. Metodología

Atendiendo a nuestro interés en profundizar en el conocimiento especializado de un grupo de EPM, se ha llevado a cabo un estudio de caso, dentro de un paradigma interpretativo (Stake, 2000). Los datos se categorizarán con el modelo analítico MTSK.

La investigación se desarrolló en un grupo de estudiantes de 4.º del grado de maestro en la Universidad de Huelva, de la materia *Didáctica de la Matemática en la educación primaria: las formas, las figuras y sus propiedades*. El grupo estaba constituido por 70 alumnos, de los que 58 entregaron datos para esta investigación. La información se recogió durante el desarrollo habitual de las sesiones, como tareas dentro de la propia materia. El formador de este grupo de estudiantes era un formador del área de Didáctica de la Matemática, con más de 30 años de experiencia en dicha formación, que había participado anteriormente en varios proyectos formativos.

3.1.1. El vídeo sobre la definición de polígono

En el vídeo que se pide analizar a los EPM se observa, en líneas generales, cómo un maestro trabaja el concepto de polígono desde la perspectiva de una definición constructiva. La actividad se planifica de tal modo que se vaya construyendo la definición de polígono mediante la observación y el análisis de las propiedades y elementos de las figuras dadas (Figura 1). Partiendo de esas figuras se llegará a una definición final de polígono; para ello, se realiza un debate en el que los alumnos realizan sus aportaciones, las cuales son precisas justificar y analizar. Así, de este modo, se llegará a una definición consensuada y constatada con los ejemplos que se van mostrando. El material empleado son figuras (las que se muestran en la figura 1) hechas de cartulina que el maestro va mostrando una a una para clasificarlas (pegándolas en la pizarra) según sus propiedades y el propio criterio de los alumnos. Se espera que se diferencien los polígonos y no polígonos si bien no se hace explícito a los alumnos.

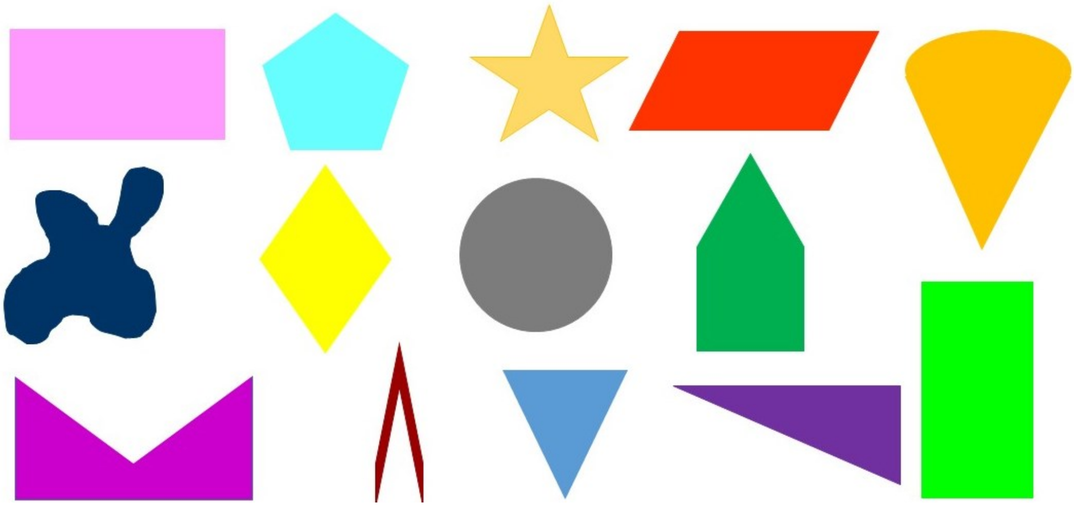


Figura 1. Figuras presentadas a los alumnos de 5.º de Primaria para la construcción del concepto de polígono

3.1.2. Instrumentos de recogida de información

El principal instrumento de recogida de información es la tarea realizada por los EPM. Los EPM visualizaron en gran grupo y analizaron individualmente las grabaciones de una clase de 5.º de primaria donde se trabajaba la definición de polígono. Para analizar la sesión los EPM contaban con una plantilla (en la figura 2 se muestra su estructura) en la que se pide considerar: estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos. Ideas intuitivas; contenidos que se trabajan y en qué se pone énfasis; recursos usados: ventajas e inconvenientes.

Aspectos a observar	QUÉ SUCEDE (descripción de lo que ocurre en el aula)	QUÉ INTERPRETO
1. Estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos. Ideas intuitivas.		
2. Contenidos que se trabajan y en qué se pone énfasis.		
3. Recursos usados: ventajas e inconvenientes.		

Figura 2. Plantilla de observación para el análisis de las videograbaciones de la clase de 5º de Primaria

3.1.3. Análisis de la información

El análisis de las producciones[3] de los EPM tuvo lugar en varios pasos que explicamos a continuación. En primer lugar se llevó a cabo un análisis vertical[4] de las producciones realizadas por los EPM. Para facilitar el análisis realizamos unas primeras agrupaciones, organizando la información en tablas (figura 3), una tabla por cada uno de los ítems de la plantilla de análisis (por ejemplo, *estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos*), en la que se incluye, como se muestra en el gráfico: la reflexión del EPM en relación al ítem por el que se pregunta, el código de identificación del EPM que se corresponde con sus iniciales y con el número de orden, y el subdominio o subdominios del conocimiento especializado que se le asigna a la reflexión de manera justificada en la columna colindante.

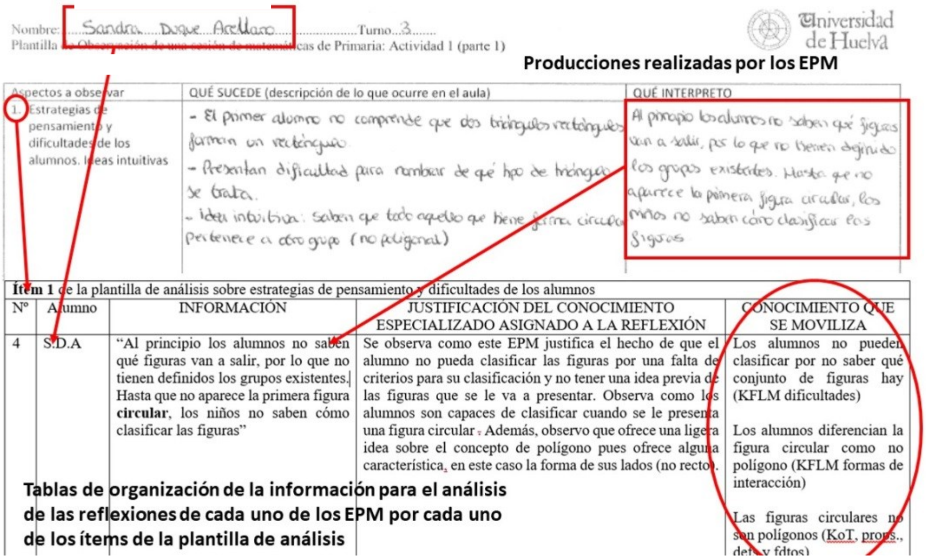


Figura 3. Tablas de organización de los datos segregados por ítems

El análisis de las producciones de los EPM se llevó a cabo de manera lineal, asignando uno o varios subdominios del MTSK a cada reflexión de los EPM. Durante este primer análisis se realizó, lo que Massot, Dorio y Sabadiego (2009) denominan *reducción de la información* pues tratamos de buscar indicadores que resumen la información común extraída y que faciliten la segregación posterior en tablas independientes para cada uno de los subdominios y categorías del MTSK. Este primer análisis de las producciones de los EPM se llevó a cabo, en principio, por la investigadora principal quién durante el proceso de análisis está en constante reflexión, cuestionándose cómo justificar todas las decisiones que toma (sirva de ejemplo la columna *"justificación del conocimiento especializado asignado a la reflexión"* del gráfico de la figura 2) en cuanto a la asignación de una u otra

[3] Llamamos producciones a la tarea de completar la plantilla de análisis del video que los EPM realizan.
[4] Le llamamos vertical, inspirándonos en Carrillo (1997), porque comparamos los indicadores que describen ideas similares de los EPM y su asignación a subdominios y categorías. En nuestro caso la coherencia no se busca en los indicadores de un mismo informante sino en relación con un mismo ítem de la plantilla de análisis y su asignación a MTSK.

categoría. No obstante, con el objetivo de que el análisis fuera lo más exacto y riguroso posible, se han llevado a cabo sesiones de debate con la intervención de la directora de esta investigación quién actuaba como coinvestigadora, realizando aportes científicos y operativos en cuanto a la asignación de una u otra categoría o subdominio.

El siguiente y último paso del análisis consistió en segregar la información de cada una de las tablas de organización en tablas independientes para cada uno de los subdominios, categorías e indicadores del MTSK (figura 4) las cuales han servido, además de para extraer los resultados de manera más detallada, para realizar un análisis horizontal[5] de los datos.

Sub	Categoría	Evidencia-indicio	
		Unidad de información	Indicador
KoT	Definición, propiedades y sus fundamentos	E.M.G.T1.1 "…el primer alumno en un primer momento no iba a clasificar el triángulo con el rectángulo, imagino que por el número de lados"	Los polígonos se pueden clasificar por el nº de lados (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos)
		F.C.R. T1.2. "La clasificación de polígonos se podría organizar en subcategorías con semejanzas" F.D.D. T1.1. "Los compañeros le ayudan viendo las similitudes. Podría haberlos clasificado en cuadriláteros y triángulos al no tener patrones de clasificación"	Los polígonos se pueden clasificar en subcategorías, según semejanzas (KoT; definiciones, propiedades y sus fundamentos)
		M.R.C. T1.1. "Al dejar la actividad en la intuición de los niños es posible que la clasificación hubiera tomado otro sentido" B. C. C. T1.1. "Los alumnos en 5º no saben clasificar las figuras por cualquier otra propiedad más compleja"	Las figuras geométricas pueden tomar otra clasificación que no sea polígono/no polígono (KoT, definición, propiedades y sus fundamentos)

Sub	Categoría	Evidencia-indicio	
		Unidad de información	Indicador
KMLS	Secuenciación con temas anteriores y posteriores	B. C. C. T1.1. "Los alumnos en 5º no saben clasificar las figuras por cualquier otra propiedad más compleja propia de los niveles superiores de la etapa"	El conocimiento de propiedades más complejas corresponden a niveles superiores al tercer ciclo (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		F.D.D. T1.1 y 2. "En 6º estos conocimientos deben estar adquiridos para poder pasar a áreas y perímetros" E.R.S. T1.1 y 2. "(…)es en 6º cuando se trabaja área/perímetro"	Los contenidos de área y perímetro se trabaja posteriormente al concepto de polígono (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		R.P.L. T1.1. "Los alumnos están haciendo un recordatorio de las figuras planas que ya han dado"	Las figuras planas es un contenido trabajado en cursos anteriores al tercer ciclo (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)
		F.D.D. T1.1 y 2. "El alumno en 5º de primaria debe aprender a diferenciar entre que es un polígono y que no lo es. Para después poder diferenciar cuales de los polígonos son regulares y cuales irregulares"	La clasificación entre polígonos y no polígonos precede al contenido de polígonos regulares e irregulares (KMLS; secuenciación con temas anteriores y posteriores)

Sub	Categoría	Evidencia-indicio	
		Unidad de información	Indicador
KFLM	Fortalezas y dificultades	E.M.G.T1.1. "Los alumnos no tienen afianzados los conocimientos sobre polígonos" F.J.P.C. T1.1. "Realmente no conocen la definición de polígono y el por qué estas figuras son polígonos" A.M.M.R. T1.1. " Los alumnos no acaban de aprender el concepto de polígono" R.P.B. T1.1. "Los alumnos tienen confusiones respeto a algunas figuras, y creen que algunas no poligonales son poligonales" J.M.B.T1.1. "Presentan dificultades cuando observan una figura con una línea poligonal" M.E.R. S. T1.1. "Los alumnos asemejan los polígonos irregulares como figuras poligonales" F.C.R. T1.2.	Los alumnos en este nivel no dominan el concepto de polígono (KFLM; dificultades)
		B.C.C. T1.1. "Tienen dificultades para establecer que los extremos de los lados están unidos y el polígono cerrado"	Los alumnos no poseen la idea de que los lados de un polígono se unen y forman una figura cerrada (KFLM; dificultades)

Sub	Categoría	Evidencia-indicio	
		Unidad de información	Indicador
KMT	Recursos materiales y virtuales	F.D.D. T1.1. "Los alumnos construyen una definición de figuras poligonales a partir de los conocimientos que tienen y el refuerzo visual de las figuras de la pizarra"	El material usado por el maestro supo un refuerzo visual que facilita a los alumnos la construcción del concepto de polígono (KMT; recursos materiale y virtuales)
		B.D.M. T1.1. "Podría haber utilizado figuras macizas"	Un material alternativo podrían haber sido figuras macizas (KMT; recursos materiales y virtuales)
		J.C.L. T1.1 "Como ventaja es que las figuras son manipulables y los alumnos visualizan mejor las figuras" M.C.J.C. T1.1. "Al ser figuras manipulables los alumnos ven mejor las características de las figuras para distinguirlas"	El recurso empleado facilita la visualización y distinción entre figura por su carácter móvil y manipulable (KMT; recursos materiales y virtuales

Figura 4. Ejemplos de tablas de organización de la información en subdominios y categorías del MTSK.

A continuación, presentamos un esquema que resume los pasos del análisis comentado anteriormente.

[5]Usamos análisis horizontal inspirándonos, también, en Carrillo (1997). En esta ocasión, comparamos indicador por indicador con la intención de evitar indicadores repetidos ocasionados por una errónea redacción o, incluso, posibles incoherencia debidas a una mala interpretación o apreciación de las investigadoras.

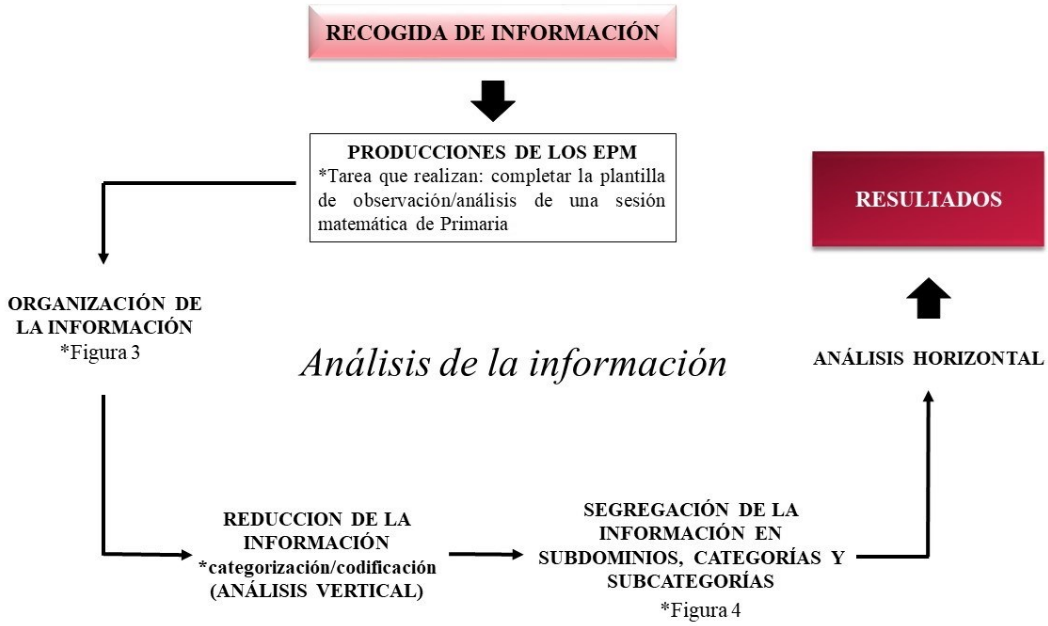


Figura 5. Esquema del análisis de la información.

3. Resultados

A continuación, presentaremos los resultados obtenidos organizándolos en subdominios; distinguiendo, a su vez, las categorías que constituyen cada uno de los subdominios y estableciendo distinción entre sus indicadores. Además, aportaremos unidades de información que ilustran el conocimiento que se moviliza. Así mismo, al final de la redacción de los resultados de cada categoría se aportará una tabla con todos los indicadores obtenidos sobre dicha categoría.

En líneas generales, los EPM movilizan conocimiento sobre la mayoría de las categorías que se establecen en el modelo analítico MTSK. No obstante, debido a un problema de espacio y considerando la relevancia de los resultados hemos decidido ofrecer mayor importancia y destacar de manera más detallada los resultados obtenidos en los subdominios *KPM*, pues refleja la dificultad que los EPM tienen para establecer una correcta definición matemática en un contexto escolar; coincidiendo con otras investigaciones como la de Pascual et al. (2019). También, destacaremos el conocimiento movilizado sobre el subdominio *KFLM,* por dos motivos que consideramos evidentes. En primer lugar, porque aparece con mayor frecuencia entre las reflexiones de los EPM y, en segundo lugar, porque refleja significativamente cómo el análisis de situaciones reales de enseñanza-aprendizaje acerca a los EPM a la realidad del aula permitiéndoles centrarse y movilizar conocimiento sobre las características del aprendizaje de los alumnos, una cuestión que bien podría considerarse un elemento especifico del ámbito de la docencia. Y, por último, también haremos mención especial al subdominio *KMT*, por el mismo motivo que el subdominio que mencionábamos anteriormente, por su frecuente movilización entre los EPM y porque el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas también podría considerarse un elemento específico del ámbito de la enseñanza de las matemáticas. Así mismo, es necesario destacar que este subdominio es el más frecuente entre las expresiones de conocimiento de los EPM, sobre todo, la categoría que hace alusión a los *ejemplos.*

En primer lugar, haciendo referencia al subdominio del *conocimiento de la práctica matemática (KPM)*, dos EPM hacen alusión en sus reflexiones a definir cómo una práctica matemática lo que asociamos a la *categoría condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.*

- N.L.G.2. *"Pienso que para crear una definición no hay que hacer la diferencia con la otra clasificación para poder saber las características".*
- N.G.Y.20. *"No creo que sea la forma más adecuada de crear una definición, solamente poniendo por lo que está compuesto un polígono".*

En estas dos reflexiones se puede observar cómo el primer EPM determina que se puede generar la definición de polígono atendiendo únicamente a sus características (KPM1), mientras que el segundo considera que los elementos que componen un polígono no son suficientes para generar su definición (KPM2). Podemos considerar que el primer EPM excluye la negación en las definiciones matemáticas y puede hacer referencia al criterio de minimalidad. Sin embargo, no es algo que podamos asegurar, pues puede que solo se esté guiando por la economización del lenguaje. Asimismo, el segundo EPM puede estar pensando en facilitar la comprensión del concepto de polígono a los alumnos[6].

KPM (condiciones necesarias y suficientes para generar una definición)
KPM1: Se puede generar la definición de polígono atendiendo únicamente a sus características. **KPM2:** Los elementos que componen un polígono no son suficientes para generar su definición.

Tabla 1. Indicadores de "Condiciones necesarias y suficientes para generar una definición"

En el dominio del MTSK *conocimiento didáctico del contenido*, ha sido donde más movilización de conocimiento hemos evidenciado. Y dentro de este dominio, la categoría de los *ejemplos* del subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)* ha sido la que con mayor frecuencia ha aparecido en nuestro análisis. Seguidamente, el subdominio *características de aprendizaje (KFLM)* inherentes al contenido del concepto de polígono es el segundo más movilizado, especialmente, la categoría de las *dificultades*.

Gran parte de los EPM prestan atención a cómo los alumnos de Primaria interaccionan con el contenido matemático trabajado o cuáles son las fortalezas de su aprendizaje; pero, sobre todo, a qué dificultades parecen tener. En relación a las dificultades hay tres tendencias claras entre las reflexiones de los EPM. En primer lugar, muchos consideran que los alumnos no dominan completamente el concepto de polígono (KFLM/D1) suponiendo un importante obstáculo en su aprendizaje:

[6] Con alumnos nos estamos refiriendo a los discentes de 5.º de Primaria que aparecen en la videograbación que nuestros EPM deben analizar.

- E.M.G.1. *“Los alumnos no tienen afianzado el concepto de polígonos”.*
- A.A.M.30. *“El alumno no tiene claro las características de los polígonos”.*

En segundo lugar, identifican dificultades de los alumnos a la hora de clasificar, y aquí, la mayoría de los EPM comparten que los alumnos no pueden clasificar las figuras porque el maestro no ha ofrecido criterio de clasificación (KFLM/D14). Entre las reflexiones de los EPM destacamos:

- C.D.R.25. *“El criterio dado por el maestro es bastante amplio, el alumnado necesita una explicación más detallada”.*

Además, hay otras dificultades que presentan los alumnos a la hora de clasificar, según los EPM. Por ejemplo, B.B.C.7 expone que *“No es capaz de relacionar propiedades y características entre varias figuras, lo que no le permite clasificar”,* que podría resumirse cómo: los alumnos no pueden clasificar porque no son capaces de relacionar propiedades y características entre las figuras (KFLM/D10). Y en relación a esta dificultad podría estar la que exponen varios EPM, como EMG.1: *“El primer alumno no iba a clasificar el triángulo con el rectángulo, imagino que por el número de lados”,* es decir, para los alumnos es poco natural clasificar en un mismo grupo polígonos con distinto número de lados (KFLM/D12).

Y, en tercer lugar, hay EPM que movilizan conocimiento sobre dificultades de los alumnos en relación a las figuras que se les presentan. Algunos EPM exponen que el número limitado de ejemplos puede suponer un problema para los alumnos ya que estos podrían pensar que son los únicos polígonos existentes (KFLM/D19). Otros EPM prestan más atención a la incidencia de las figuras prototípicas y consideran que los alumnos no reconocen una figura presentada en posición distinta a la habitual (KFLM/D18) expresándolo de la siguiente manera:

- B.D.M.31: *“Los alumnos dudaron por la posición del triángulo”.*

KFLM (dificultades)
KFLM/D1: Los alumnos en este nivel no dominan el concepto de polígono. **KFLM/D2:** Los alumnos no poseen la idea de que los lados de un polígono se unen y forman una figura cerrada. **KFLM/D3:** Los alumnos no poseen los conceptos de borde, interior y exterior de una figura. **KFLM/D4:** Para los alumnos es poco relevante que un polígono tenga el mismo número de lados que de ángulos. **KFLM/D5:** Los aspectos en común de los polígonos y de los no polígonos suponen un problema para los alumnos. **KFLM/D6:** Los alumnos solo reconocen como polígonos las figuras regulares. **KFLM/D7:** Para los alumnos todas las figuras con lados rectos son polígonos. **KFLM/D8:** Los alumnos no tienen adquirido el concepto de lado. **KFLM/D9:** Los alumnos en este nivel no dominan los diferentes tipos de figuras geométricas. **KFLM/D10:** Los alumnos no relacionan propiedades y características entre las figuras geométricas planas. **KFLM/D11:** Para los alumnos es poco natural clasificar en un mismo grupo figuras con distinto número de lados. **KFLM/D12:** Para los alumnos es poco natural clasificar en un mismo grupo figuras con lados de distinto tamaño o forma.

KFLM/D13: Los alumnos no son capaces de clasificar figuras porque no conocen el conjunto de figuras que se le va a presentar. **KFLM/D14:** Los alumnos no pueden clasificar las figuras porque no les han ofrecido un criterio claro de clasificación. **KFLM/D15:** Los alumnos no conocen una figura presentada de manera diferente a la habitual. **KFLM/D16:** Los alumnos no son capaces de diferenciar entre triángulo y sector circular. **KFLM/D17:** Resulta complejo para los alumnos atender a más de una característica a la vez para clasificar las figuras. **KFLM/D18:** Los alumnos no conocen el nombre de las figuras presentadas como ejemplos si se le muestra de manera distinta a la prototípica. **KFLM/D19:** Los alumnos podrían no identificar otras figuras fuera de los ejemplos propuestos.

Tabla 2. Indicadores de "Dificultades"

A pesar de que el conocimiento movilizado sobre las dificultades es mucho mayor, también hay EPM que hacen referencia a las potencialidades de los alumnos. La mayoría de las *fortalezas* que aparecen hacen alusión al conocimiento que los alumnos tienen sobre el concepto de polígono y sus propiedades, pudiéndose resumir en: los alumnos saben que los polígonos tienen sus lados rectos, tienen ángulos y vértices (KFLM/F1). Un ejemplo sería la siguiente reflexión: A.L.M.38. *"la ventaja es que todos ven y diferencian bien las figuras rectas de las curvas".*

KFLM (fortalezas)
KFLM/F1: Los alumnos saben que los polígonos tienen los lados rectos, ángulos y vértices. **KFLM/F2:** Los alumnos diferencian correctamente las figuras de lados rectos de las figuras de lados curvos. **KFLM/F3:** Los alumnos conocen algunas de las figuras presentadas y sus propiedades.

Tabla 3. Indicadores de "Fortalezas"

Por último, en la categoría*, forma de interacción de los alumnos con el concepto de polígono,* la mayoría de las reflexiones giran en torno a cómo clasifican los alumnos. Lo que más ha captado la atención de los EPM reside en que los alumnos clasifican las figuras en polígonos y no polígonos realizando una comparación entre ellas (KFLM/FI1):

- R.L.E.16. *"Concretamente realizan dos grupos. Por un lado, figuras no poligonales y por otro, las poligonales".*

Otra manera de clasificar de los alumnos en la que también centran sus reflexiones los EPM se refiere a que clasifican las figuras atendiendo a si sus lados son rectos o curvos (KFLM/FI3). Además los EPM también focalizan su atención en cómo construyen los alumnos la definición de polígono; así, los EPM exponen que los alumnos construyen la definición de polígono centrándose en los elementos que los componen (KFLM/FI5) tal y como expone M.P.G.11. *"Los alumnos se centran en aspectos como lado, ángulo, vértice… para construir la definición de polígono".*

KFLM (formas de interacción con un contenido matemático)
KFLM/FI1: Los alumnos clasifican las figuras en polígonos y no polígonos realizando una comparación entre ellas. **KFLM/FI2:** Los alumnos entienden que la clasificación debe ser dicotómica. **KFLM/FI3:** Los alumnos clasifican las figuras según las formas de sus lados (rectos o curvos). **KFLM/FI4:** Los alumnos clasifican la circunferencia como no poligonal porque posee lados curvos. **KFLM/FI5:** Los alumnos construyen la definición de polígono centrándose en los elementos que los compone. **KFLM/FI6:** Los alumnos se centran en las figuras que le resultan más familiares para establecer una clasificación. **KFLM/FI7:** Los alumnos coinciden en la característica “lados rectos” porque la han observado repetida en varias figuras. **KFLM/FI8:** Los alumnos relacionan el sector circular con una porción de pizza. **KFLM/FI9:** Los alumnos asocian las figuras a elementos de la vida cotidiana.

Tabla 4. Indicadores de “Formas de interacción con un contenido matemático”

Dentro del subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)* hemos evidenciado movilizaciones de conocimiento especializado en todas sus categorías, excepto en la categoría *teorías de enseñanza.*

En líneas generales, en relación a las *estrategias* los EPM hacen referencia a la forma de trabajar el concepto de polígono, es decir, a que la definición de polígono es construida por los propios alumnos (KMT/ES1), dejando atrás una metodología transmisiva y poco motivadora:

- A.M.A.40. *“Abandona las definiciones abstractas de los libros, son los propios alumnos quienes crean una definición”.*

Hay otros aspectos que captan la atención de los EPM y que les permiten movilizar *KMT* (*estrategias*). O.O.O.5 expone que *“El maestro guía a los alumnos para que coloquen las figuras en el lado de los polígonos”,* fijándose en que el maestro, guía a los alumnos para que se centren, principalmente, en los polígonos (KFLM/ES1). Asimismo, B.D.M.31 expresa que *“El maestro (…) primero dejó separar en varios (sin decir cuántos) grupos cuando se separaron en dos grupos (…)”* haciendo hincapié en el hecho de que el maestro no establece un número concreto de grupos para clasificar las figuras, dejando a los alumnos libertad para clasificar según su criterio (KMT/ES2).

KMT (estrategias)
KMT/ES1: El maestro guía a los alumnos para que se fijen, principalmente, en el grupo de los polígonos. **KMT/ES2:** El maestro no establece un número concreto de grupos para clasificar las figuras. **KMT/ES3:** La definición de polígono es construida por los propios alumnos. **KMT/ES4:** La definición de polígono se va construyendo a partir de las características de los polígonos. **KMT/ES5:** La disyuntiva entre borde e interior puede usarse para construir la definición de polígono. **KMT/ES6:** El uso de los conceptos de lado y ángulo puede ayudar a construir la definición de polígono.

Tabla 5. Indicadores de "Estrategias"

En cuanto a la categoría *recursos materiales,* hay una opinión generalizada: el usado en el aula es un recurso que se sale del uso habitual del libro, de fácil y rápida elaboración y que facilita a los alumnos la visualización de las características de las figuras (KMT/M2). Además, también se destaca como una ventaja su carácter manipulativo y la capacidad para poder hacer una gran variedad de figuras (KMT/M3). Únicamente un EPM ofrece la idea de un material alternativo al propuesto por el maestro, el uso de figuras macizas (KMT/M2).

KMT (recursos materiales y virtuales)
KMT/M1: El material usado por el maestro supone un refuerzo visual que facilita a los alumnos la construcción del concepto de polígono. **KMT/M2:** Un material alternativo podrían haber sido figuras macizas. **KMT/M3:** El recurso empleado facilita la visualización y distinción entre figuras por su carácter móvil y manipulable.

Tabla 6. Indicadores de "Recursos materiales y virtuales"

Y, como última categoría del *KMT*, hemos encontrado movilizaciones de conocimiento en referencia a la *tarea*. Y, aquí, llama la atención cómo para algunos EPM la tarea es acertada y novedosa para construir el concepto de polígono (KMT/T2), tal y como expresa F.J.P.C.8. *"Es recomendable para que los niños conozcan la definición de polígono, no plasmada y dada, sino reflexionándola".* Y, en cambio, para otros la tarea desarrollada no es suficiente para construir la definición de polígono (KMT/T1). La idea que más se repite sobre la tarea hace alusión a su objetivo, estableciendo que la finalidad de la tarea es construir el concepto de polígono, diferenciándolos de los no polígonos (KMT/T3):

- CH.21. *"Con la actividad se quiere llegar a dos grupos: las figuras poligonales y las figuras no poligonales y así construir la definición de polígono".*

KMT (tareas)
KMT/T1: La tarea desarrollada no es suficiente para construir la definición de polígono. **KMT/T2:** La actividad empleada es acertada y novedosa para construir el concepto de polígono. **KMT/T3:** La finalidad de la actividad es construir el concepto de polígono, diferenciándolos de los no polígonos. **KMT/T4:** La finalidad de la actividad es adquirir conocimientos básicos sobre geometría.

Tabla 7. Indicadores de "Tareas"

El conocimiento especializado que con mayor frecuencia han movilizado los EPM es sobre los *ejemplos.* Este conocimiento podría ordenarse en 6 grupos, ya que a pesar de que dentro de cada uno de estos grupos se hace alusión a aspectos muy específicos, guardan un elemento en común.

El primer grupo se refiere a los ejemplos que aparecen en los libros de texto mostrando un desacuerdo con dichos ejemplos. Señalan que los ejemplos de polígonos que normalmente aparecen en los libros de texto son escasos (KMT/E1) y que ocasionan dificultades en los alumnos por ser poco diversos y prototípicos (KMT/E2). Dos ejemplos de este conocimiento serían las siguientes reflexiones:

- E.R.S.39. *"…En el libro de texto enseñan lo qué es un polígono y ponen algunas figuras, nada más".*
- C.F.42. *"Siempre con los mismo ejemplos y escasos en los libros de texto".*

El segundo grupo se centra en los ejemplos propuestos en el aula. Por un lado, hay EPM que enfocan sus reflexiones en la finalidad o en las posibilidades que ofrece a los alumnos esos ejemplos. Y, por otro lado, hay EPM que se centran en las ventajas o desventajas de los ejemplos usados.

En cuanto a la utilidad de los ejemplos algunos EPM afirman que sirven para confirmar/refutar las características de los polígonos (KMT/E3) y aseguran que los ejemplos propuestos son de gran ayuda para la construcción del concepto de polígono (KMT/E4). Y en cuanto a los beneficios y desventajas de los ejemplos presentados, hay cierta discrepancia, aunque es cierto que se aprecian, en mayor medida, ventajas y beneficios que desventajas. Dentro de estos aspectos positivos, el más repetido es que los ejemplos presentados (tanto de polígonos como de no polígonos) son acertados, variados y suficientes para la construcción del concepto de polígono (KMT/E6):

- M.C.J.C.3: *"Ejemplos variados y abundantes".*

Hay varios EPM que discrepan con esta idea considerando que el conjunto de ejemplos es insuficiente e inadecuado pues no recoge la variedad de los polígonos y faltan no ejemplos (KMT/E17), como bien expresa:

- M.G.M.1: *"Hay ejemplos que no se muestran y serían interesantes".*

C.F.42 expresa lo siguiente: "*Los ejemplos no son los típicos que aparecen en los libros de texto"* de aquí podemos extraer que el EPM ve un aspecto positivo el hecho de que los ejemplos presentados posean un carácter novedoso y no prototípico (KMT/E8). Y este es otro aspecto en el que existe discrepancia entre los EPM, puesto que el EPM, I.T.D.46 expone en su reflexión: "*Las figuras utilizadas salen de manera frecuente en los libros*" en la cual podemos observar que considera que los ejemplos usados son prototípicos (KMT/E9).

El tercer grupo hace alusión a cómo benefician o perjudican los ejemplos propuestos el aprendizaje de los alumnos. Dentro de este grupo, hemos evidenciado un único beneficio que aparece de manera repetitiva y hace alusión a que los ejemplos presentados son comunes y fácilmente reconocibles por los alumnos (KMT/E7). Por lo contrario, hay varios EPM que ven una desventaja en los ejemplos propuestos, ya que consideran que los alumnos podrían no identificar otras figuras fuera de los ejemplos propuestos debido a que se presenta una cantidad acotada de figuras (KMT/E20).

El cuarto grupo tiene que ver con los ejemplos de la vida cotidiana del alumno. Existe cierta tendencia entre los EPM en considerar que sería conveniente el uso de ejemplos cercanos al contexto del alumno (KMT/E11), ya que esto facilitaría su aprendizaje.

El quinto grupo habla del número de ejemplos, el cual crea, también, cierto desacuerdo entre dos de los EPM, quienes exponen que:

- J.R.C.47: *"El profesor utiliza pocos ejemplos algo que puede considerar positivo".*
- J.C.L.50: *"La gran variedad de ejemplos ayuda pero también puede suponer un obstáculo".*

De estas reflexiones extraemos que el primer EPM considera que el uso de pocos ejemplos puede ayudar a profundizar en las características de las figuras (KMT/E18). Mientras que el otro considera que el número de ejemplos es abundante, de este modo consideramos que el EPM cree que una variedad excesiva de ejemplos puede crear dudas en los alumnos (KMT/21).

El sexto grupo se refiere al uso de no ejemplos, y aquí se observan dos tendencias claras. Por un lado, hay un grupo de EPM que aprecian el uso de no ejemplos como un elemento útil para la construcción del concepto de polígono (KMT/E12). Dentro de estos se observa cierto descontento ante la insuficiencia del número de no ejemplos usados. Y, por otro lado, están los EPM que no encuentran útil el uso de no ejemplos para la construcción del concepto de polígono (KMT/E13).

KMT (ejemplos)
KMT/E1: Los ejemplos de polígonos que, normalmente, aparecen en los libros de texto son escasos. **KMT/E2:** Los ejemplos usados en los libros de texto ocasionan dificultades en los alumnos por ser poco diversos y prototípicos. **KMT/E3:** Los ejemplos propuestos sirven para confirmar/refutar las características de los polígonos. **KMT/E4:** Los ejemplos propuestos son de gran ayuda para la construcción del concepto de polígono. **KMT/E5:** Los ejemplos propuestos permiten a los alumnos prestar atención a las diferentes características de los polígonos. **KMT/E6:** Los ejemplos presentados (tanto de polígonos como de no polígonos) son acertados, variados y suficientes. **KMT/E7:** Los ejemplos presentados son comunes y fácilmente reconocibles por los alumnos. **KMT/E8:** Los ejemplos usados son novedosos y no prototípicos. **KMT/E9:** Los ejemplos usados son prototípicos. **KMT/E10:** Los ejemplos propuestos son fácilmente comparables con objetos cotidianos. **KMT/E11:** Sería conveniente el uso de ejemplos cercanos al contexto del alumno. **KMT/E12:** El uso de no ejemplos es útil para la construcción del concepto de polígono. **KMT/E13:** El uso de no ejemplos no es útil para la construcción del concepto de polígono. **KMT/E14:** Los no ejemplos son insuficientes para que ayuden a los alumnos a distinguir entre polígonos y no polígonos. **KMT/E15:** El ejemplo de la estrella se usa para incitar a los alumnos a que observen que tiene todos sus lados iguales. **KMT/E16:** El sector circular es el principal no ejemplo usado para establecer diferencias entre polígonos y no polígonos. **KMT/E17:** El conjunto de ejemplos presentados es insuficiente e inadecuado porque no recoge toda la variedad posible.

KMT/E18: El uso de pocos ejemplos puede ayudar a profundizar en las características de los polígonos. **KMT/E19:** El ejemplo del rectángulo no es adecuado. **KMT/E20:** Los alumnos podrían no identificar otras figuras fuera de los ejemplos presentados. **KMT/E21:** El número de ejemplos es excesivo y podría ocasionar dificultades entre los alumnos.

Tabla 8. Indicadores de "Ejemplos"

En resumen, como puede apreciarse es mucho mayor el conocimiento movilizado sobre las características propiamente dichas de la enseñanza-aprendizaje del concepto de polígono que del propio contenido matemático en sí.

4. Conclusión

El análisis de videos de situaciones reales de enseñanza ha permitido a los EPM movilizar, sobre todo, *conocimiento didáctico del contenido* trabajado. El conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT), *estrategias, tareas y ejemplos,* ha sido el más frecuente entre las reflexiones de los EPM, principalmente, conocimiento de los *ejemplos*. Los EPM, en su mayoría, consideran los ejemplos el medio para promover un aprendizaje a partir de sus ideas, en nuestro caso del concepto de polígono.

En cuanto a *recursos materiales y virtuales,* el conocimiento movilizado hace referencia a las ventajas que el material empleado (figuras en cartulina con ejemplos y no ejemplos de polígonos) tiene en el aprendizaje de los alumnos. En este sentido, los EPM coinciden en que dicho material favorece el aprendizaje, ya que facilita la visualización y distinción entre figuras por su carácter manipulable y móvil. Podemos considerar así que los EPM se acercan a la idea de que los niños deben aprender geometría observando, manipulando y tomando decisiones (Fielker, 1979).

En relación a la categoría de las *estrategias* los EPM identifican que se está empleando una metodología centrada en el aprendiz (Kuhs y Ball, 1986), con modelos de enseñanza no tradicionales. La mayoría de los EPM saben que se está construyendo el concepto de polígono a partir de sus características y sus propiedades.

De la última categoría de este subdominio, *tareas,* podemos afirmar que el análisis de videos de situaciones reales de enseñanza permite a los EPM observar de una tarea tanto sus objetivos como las posibilidades de aprendizaje que esta ofrece a los alumnos, es decir, cómo estos responden a la actividad.

El segundo conocimiento más frecuentemente movilizado ha sido el relacionado con las *características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM). El análisis del video ha permitido a los EPM observar cómo interactúan los alumnos con el contenido, qué dificultades prevén y cómo aprovechan sus conocimientos (*fortalezas*) para abordar la tarea. En base a esto, podemos afirmar que estamos de acuerdo con la investigación de Climent et al. (2016) puesto que los resultados nos permiten apreciar cómo los EPM se apoyan en sus KoT para la construcción del KFLM. El conocimiento de los EPM sobre *el concepto de polígono, sus propiedades* *y sus fundamentos* les ha permitido apreciar las limitaciones presentes en el aprendizaje de los alumnos. No obstante, también se aprecia cómo los EPM evidencian *dificultades* en los alumnos, algunas de las cuales reflejan resultados de la investigación sobre el aprendizaje geométrico. Así, si bien no aluden a los elementos teóricos correspondientes, los alumnos se dan cuenta que en el nivel en el que se sitúan los alumnos de Primaria observados no se domina el establecimiento de relaciones entre las propiedades de distintas figuras (lo que podría evocar a los niveles de Van Hiele), las posibles limitaciones derivadas de un conjunto de imágenes restrictivo (lo que puede relacionarse con la imagen conceptual y la definición de un concepto, Vinner, 1991; Herskowitz, 1990) y la importancia que atribuyen a la posición de las figuras. Esta movilización de conocimiento sobre cómo aprenden geometría los alumnos podría ser la base para una profundización teórica que tuviera asociada imágenes de situaciones de enseñanza y aprendizaje (en el sentido de Clandinin y Conelly, 1988).

Por otra parte, algunas de las dificultades que señalan son atribuidas a estrategias empleadas por el maestro como: no pueden clasificar las figuras porque el maestro no le ha dado un criterio de clasificación, o incluso dificultades asociadas a los ejemplos (el número limitado de ejemplos puede hacer creer a los alumnos que son los únicos polígonos existentes).

Como último aspecto destacable resaltamos el conocimiento movilizado relacionado con la práctica matemática (KPM) en base a la categoría *condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.* Y, aquí observamos que existe un alto desconocimiento entre los EPM sobre cómo se define en matemáticas. Hecho, que también podemos observar en los resultados del estudio de Pascual et al. (2019), en el que se aprecia claramente que los EPM no poseen suficiente conocimiento para construir o aportar una definición matemática adaptado al contexto escolar. No obstante, el análisis de una situación de aula en la que se parte de una definición constructiva (De Villiers, 1988) les lleva a plantearse definiciones no solo descriptivas, las relaciones entre definir y clasificar en geometría, y algunas características de una definición geométrica.

En definitiva, coincidimos con Fortuny y Rodríguez (2012) en la posibilidad que el análisis de estos vídeos ofrece: desarrollar una mirada profesional hacia la práctica docente, ya que nuestra investigación deja evidencias de que los EPM movilizan, principalmente, conocimiento relacionado con la práctica docente puesto que la gran mayoría de sus reflexiones hacen referencia a las características tanto de la enseñanza como del aprendizaje de las matemáticas, concretamente del concepto de polígono. Además, nuestros resultados refuerzan que el uso de situaciones reales de enseñanza puede solventar la falta de práctica real, pues como puede apreciarse en muchas de las reflexiones de los EPM, ofrecen alternativas para solventar algunas de las dificultades que en el vídeo plantean los alumnos o incluso aportan otros posibles ejemplos que podrían ser útiles para el aprendizaje de las características y propiedades de los polígonos.

Bibliografía

Ball, D., Thames, M.M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J. y Seago, N. (2010). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM*, 43(1), 175-187.

Carrillo, J. (1997). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J. y Climent, N. (2008). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematical teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Task in Primary Mathematics Teacher Education: purpose, use and examplers* (Vol. 4, pp. 215-234). New York: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clandinin, D. J. y Connelly, F. M. (1988). Conocimiento práctico personal de los profesores: imagen y unidad narrativa. En L. M. Villar (Ed.), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores* (pp. 39-61). Alcoy: Marfil.

Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M.C., Barrera, V.J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 9*, 85-103.

Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J. Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimiento y concepciones movilizan los futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 13-36.

Contreras, L.C. y Blanco, L. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 93-124). Cáceres: Universidad de Extremadura.

De Villiers, M. (1988). To teach definitions in geometry ot teach to define?. En A. Oliver y K. Newstead (Eds.), *Proceeding of the Twenty-second International Conference for the psychology of mathematics Education: Vol.2.* (pp.248-255). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

Escudero, I., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Fielker, D. S. 1979. Strategies for Teaching Geometry to Younger Children. *Educational Studies in Mathematics*, 10(1), 85-133.

Flores, E., Escudero, D., Montes, M.A., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2016). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero, E. Flores, y M.A.

Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp.57-72). Huelva: Universidad de Huelva: publicaciones.

Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning of Geometry. En P. Nesher, y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Kuhs, T. y Ball, D. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions*. East Lansing: Michigan State University, Center on Teacher Education.

Massot, I., Dorio, I. y Sabariego, M. (2009). Estrategias de recogida y análisis de información. En R. Bisquerra (Eds.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 329-365). Madrid: La Muralla, SL.

Pascual, M.I., Codes, M., Martín, J.P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en matemáticas XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.

Santagata, R. y Angelici, G. (2010). Studying the Impact of the Lesson Analysis Framework on Preservice Teacher's Abilities to Reflect on Videos of Classroom Teaching. *Journal of Teacher Education, 61*(4), 339-349.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (2000). Case Studies. En N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 435-453). Thousand Oaks, CA: Sage.

Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). They many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*(1), 91-106.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlans: Kluwer Academic Publishers.

Ana Moreno Martínez: graduada en Educación Primaria, con Máster en Investigación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, especialidad en Didáctica de la Matemática. amm181094@gmail.com

Nuria de los Ángeles Climent Rodríguez: Titular de Universidad del área de Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva. Su investigación está centrada en el desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Tiene experiencia como formadora de profesores en relación con la enseñanza de la matemática en formación inicial y continua. climent@uhu.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-17

https://union.fespm.es

Errores y dificultades acerca de las rectas notables del triángulo. Etapa preliminar para la elaboración de trayectorias de aprendizaje

Armando Morales Carballo, Angie Damián Mojica

Fecha de recepción: 24/02/2021
Fecha de aceptación: 7/04/2021

Resumen	En este trabajo se describen los errores y dificultades sobre las rectas notables del triángulo identificadas en estudiantes de universitario. El trabajo se fundamentó en las teorías sobre errores y dificultades que emergen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las definiciones y en la resolución de problemas. Las dificultades de tipo conceptual, espacial y de aplicación y los errores que emergieron durante la exploración se relacionan con los ejemplos sobre rectas notables en casos particulares de triángulos, dificultades en las representaciones no estándar, errores de identificación y representación, respuestas equívocas o parcialmente correctas. **Palabras clave**: Dificultad, error, recta notable, definición
Abstract	This paper describes the errors and difficulties about the notable lines of the triangle identified in university students. The work was based on theories about errors and difficulties that emerge in the processes of teaching and learning of definitions and problem solving. The conceptual, spatial and application difficulties and errors that emerged during the exploration are related to the examples of notable straight lines in particular cases of triangles, difficulties in non-standard representations, identification and representation errors, equivocal or partially correct answers. **Keywords:** Difficulty, error, remarkable line, definition
Resumo	Este trabalho descreve os erros e dificuldades sobre as notáveis linhas triangulares identificadas em estudantes universitários. O trabalho baseou-se nas teorias dos erros e dificuldades que surgem nos processos de ensino e aprendizagem das definições e na resolução de problemas. As dificuldades e erros conceptuais, espaciais e de aplicação que surgiram durante a exploração relacionam-se com exemplos de linhas notáveis em casos de triângulo particular, dificuldades em representações não padrão, erros de identificação e representação, respostas chyvónicas ou parcialmente corretas. **Palavras-chave:** Dificuldade, erro, notável reta, definição

1. Introducción

Los conceptos de rectas y puntos notables del triángulo han sido objeto de investigación desde edades escolares tempranas, muchas de las dificultades y errores que se han identificado en los estudiantes de ese nivel se espera que se superen con el tratamiento del contenido en los niveles superiores, secundaria y pre universitario. Sin embargo, en la mayoría de los casos no sucede así, como ejemplo, se ha constatado en los alumnos que han ingresado en las últimas tres generaciones a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México; que su nivel de rendimiento académico es bajo, tal y como lo evidencian los resultados de los diagnósticos aplicados como parte del proceso de ingreso.

Esta problemática ha motivado la elaboración y desarrollo del proyecto “herramientas metodológicas y de tecnología educativa para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de la geometría en el pre universitario”. De este proyecto se desprende el presente trabajo, en el cual se plantea como objetivo: la identificación de errores y dificultades de estudiantes del pre universitario sobre las rectas y puntos notables del triángulo. Los hallazgos encontrados aportan elementos que sirven de sustento para la elaboración y puesta en funcionamiento de las Líneas Hipotéticas de Trayectorias de Aprendizaje de los puntos y rectas notables del triángulo, tales propuestas son basadas en el uso del software GeoGebra y en la resolución de problemas, las cuales favorecen el tratamiento de este contenido en la enseñanza de la geometría euclidiana en el pre universitario.

2. Investigaciones en el campo de la educación matemática acerca de las rectas y puntos notables del triángulo

Villamizar (2018) diseñó una secuencia didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes de 13 a 17 años. Para la exploración se apoyaron en el uso de material reciclable como las tapas plásticas de gaseosa y cartón. Las actividades las actividades propuestas exigieron la identificación, representación y aplicación de cada recta notable. Por ejemplo, en el tratamiento de la mediatriz, el investigador propuso seis retos y al respecto se planteó como objetivo que los estudiantes identificaran el concepto como un conjunto de puntos con ciertas características (lugar geométrico), la intersección y la aplicación. Al analizar los resultados que se reportan, se pudo observar la evolución de la habilidad de tipo espacial, sin embargo, también se identificó la necesidad de fortalecer los desarrollos conceptuales que imbrican en la comprensión de dicho concepto. Por su parte, Jaime y Gutiérrez (2016) en su modelo de explicación sobre el aprendizaje de los conceptos geométricos en primaria, destacan que los estudiantes reciben dos tipos de información, verbal y gráfica, transmitida por el profesor, el libro de texto, entre otros. Producto de la revisión de libros de texto de primaria, constatan que la mayoría de ellos no define el concepto de altura ni para los cuadriláteros ni para los triángulos, sino que se limitan a dibujar las alturas de los polígonos (siempre en la posición vertical prototípica) cuando presentan sus fórmulas de cálculo de áreas, aunque, en algún caso, ni siquiera se dibuja la altura. Los investigadores destacan que intentar que los estudiantes de Primaria aprendan un concepto geométrico de manera implícita, a partir sólo de algunos casos (dibujos específicos), es un error didáctico ya que se suelen generar en los estudiantes imágenes conceptuales erróneas. La única definición de rectas y puntos notables del triángulo que los investigadores documentan haber encontrado en los textos es la de altura, como se muestra en la Figura 1.

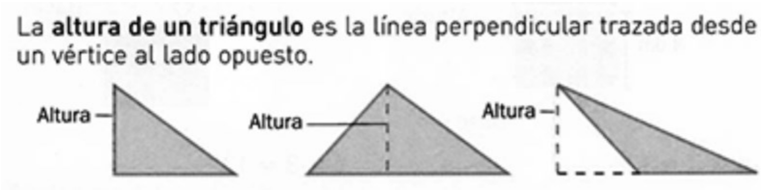


Figura 1. Definición de altura encontrada en textos de primaria, tomada de Jaime y Gutiérrez, 2016.

La investigación documenta que una segunda definición de altura de un triángulo de uso frecuente es *"la altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación"*. De una página web identificaron una tercera definición "una altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación)". Establecen que las tres definiciones son matemáticamente correctas, pero no son equivalentes. Mencionan que el término línea es ambiguo, mientras que el término recta es más general y útil, en esta dirección sugieren que en el nivel primaria conviene utilizar el término segmento. En relación a prolongar la base, establecen que didácticamente conveniente adherirla a la definición, ya que de esa manera se pueden disminuir los errores conceptuales en relación a la formación de la imagen conceptual de altura de un triángulo, por ello concluyen que la segunda definición identificada, es la más apropiada para estudiantes de primaria.

Por su parte Samper, Corredor y Echeverry (2014) reportan un estudio dirigido a estudiantes del preuniversitario, en el que se plantearon como objetivo estudiar los procesos de conceptualización del concepto de altura de triángulo. En la exploración, a través de un cuestionario que implementaron se identificó que en la pregunta ¿es la altura de un triángulo un segmento?, prevalece la influencia de las imágenes conceptuales acerca del concepto, ya que representan un segmento que visualmente satisface los invariantes de la definición, una minoría no hace reporte alguno. Los investigadores destacan que estas imágenes albergan errores conceptuales difíciles de remover, pues el término recta es más general y apropiado. En relación a la pregunta 2 ¿el pie de la altura es un punto entre dos vértices de un triángulo? Se identificó que más del 50% de la población con quien se experimentó mencionó que sí, sólo un número reducido estableció que sí; solo si se trata de triángulos acutángulos u obtusángulos. Se observa que la mayoría de los estudiantes asumen la definición de altura como *"es la línea perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto"* (Jaime y Gutiérrez, 2016). Esta concepción provoca errores conceptuales en algunos estudiantes, al asumir que no hay altura o que no es perpendicular a la base. En relación a la pregunta 3 que trata de la representación de un triángulo en una posición no estándar, en la que se pide explicar acerca de la altura (no planteada como altura). Se identificó que una población mayor al 50% presentó un espacio personal de ejemplos completos, mientras que un grupo reducido propuso respuestas análogas a las dadas en la pregunta 2. En relación a la pregunta 4, donde se pidió demostrar que "la altura relativa a la base de un triángulo isósceles es mediana". No se identificó producción en los estudiantes, los autores atribuyen esto a que no se dieron las condiciones para poder establecer una relación entre la definición personal, la definición del concepto, la imagen conceptual y la representación figural de altura de un triángulo en un contexto de demostración.

En la investigación que se ha descrito se identifica que la mayoría de los alumnos excluyeron el caso del triángulo rectángulo en el análisis del concepto de altura, esta dificultad posiblemente está asociada a la necesidad de evidenciar la presencia figural de los objetos, lado y altura, de manera independiente. El tipo de definición más frecuente fue la definición completa: se trata de una definición en donde el estudiante hace explícitos los invariantes del concepto, en el contexto de la geometría euclidiana y no en el de la medida y la definición incompleta: aquella que no hace referencia a la posición de los extremos del segmento altura, el primero en uno de los vértices del triángulo y el otro sobre la recta que contiene al lado opuesto a dicho vértice. Por tanto, se considera necesario hacer énfasis en todas las posibles representaciones figurales de la altura de un triángulo y en el análisis de sus propiedades invariantes.

Finalmente, Gutiérrez y Jaime (2012) reportaron que en la mayoría de los casos la actividad de los estudiantes está basada en el uso de sus imágenes conceptuales, ya que hay un número elevado de estudiantes cuya definición es inactiva (la saben recitar, pero no la usan cuando resuelven problemas) o no existe (la olvidaron o nunca aprendieron la definición). Como ejemplo, mostraron casos de estudiantes que cometen los mismos tipos de errores acerca del concepto de altura de un triángulo. En la fila superior de la Figura 2 se muestra el caso de un estudiante cuya concepción de altura de un triángulo es incorrecta, pues en los triángulos cuya altura no es interior dibuja la mediana en lugar de la altura. La fila inferior de la misma figura muestra el caso de otro estudiante cuya concepción de altura es correcta pero incompleta, pues en los triángulos obtusángulos dibuja una altura que no se corresponde con la pedida. Los investigadores coinciden que las diversas imágenes mentales del concepto de altura están asociadas a imágenes figurativas de objetos físicos, visualización mental de fórmulas o esquemas, imágenes de patrones, imágenes cinéticas e imágenes dinámicas (que son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan).

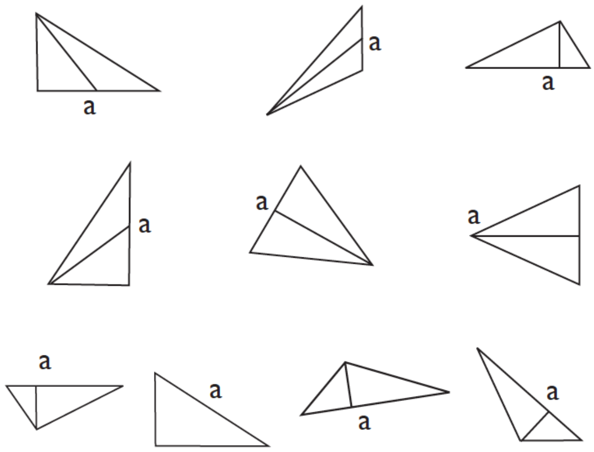


Figura 2. Representaciones de la altura dada por alumnos de primaria, tomada de Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 67.

3. Fundamentación teórica y metodológica

La definición como parte de la estructura axiomática de la matemática juega un papel central para el desarrollo de la misma teoría y de su aplicación. Por tanto, la comprensión de los contenidos que conforman la disciplina matemática radica en buena parte en la comprensión de las definiciones.

Diversas investigaciones en el campo de la educación matemática dan cuenta de la importancia de las definiciones y de su tratamiento para incidir en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles educativos. En tal dirección Hernández-Gómez, Locia-Espinoza, Morales-Carballo y Sigarreta-Almira (2019) y Ramos y López (2015) coinciden en establecer que los conceptos matemáticos son una categoría especial en la enseñanza de la Matemática, ya que constituyen la forma fundamental con que opera el pensamiento matemático, con su formación se contribuye a la consecución del importante objetivo de las matemáticas: representar la relación entre la matemática y la realidad objetiva. En esta misma línea Winicki (2006) sostiene que los conceptos y sus definiciones, los axiomas y teoremas son la base de las estructuras de las distintas ramas de la matemática. Por tanto, en los procesos de enseñanza y aprendizaje se espera un tratamiento especial a los procesos de formación y definición de conceptos como actividades esenciales de la enseñanza y para el aprendizaje.

En este trabajo no se persigue como objetivo los procesos de elaboración y comprensión de conceptos, interesa en una primera etapa, la identificación de los errores y dificultades sobre los conceptos, en particular, de rectas notables del triángulo y a partir de esa identificación, elaborar y poner en funcionamiento las líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje para su tratamiento.

3.1 Errores y las dificultades

La investigación acerca de los errores y dificultades es una actividad fundamental que debe realizarse a la par del planteamiento de objetivos orientados hacia la elaboración de propuestas de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en todos los niveles educativos. El conocimiento sobre los errores y dificultades genera una fuente de información relevante sobre los niveles de comprensión conceptual de los objetos matemáticos y aportan elementos que puede servir de ayuda al profesor para organizar las estrategias de su enseñanza y contribuir al objetivo de la mejora de los aprendizajes. Algunas de las razones por las que se generan los errores conceptuales tanto de profesores como de alumnos, se deben a la existencia de: 1. Errores conceptuales encontrados en los libros de texto. 2. Errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, generados por no comprender correctamente el contenido matemático: definición de conceptos, formulación y demostración de propiedades, procedimientos y algoritmos de realización y operatividad, entre otros y en su preparación y tratamiento. Estos errores generan dificultades y obedecen a naturalezas distintas, generalmente se identifican en los procesos de desarrollo cognitivo, en la presentación del contenido, en las formas de pensamiento matemático y en los métodos de enseñanza.

Las investigaciones de Herrera (2010); Chavarría (2014); Morales, Marmolejo y Locia (2014); Del Puerto, Minnaard y Seminara (2004); Rico (1995); Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (2004) y Socas (1997) en general, coinciden que tanto los errores como las dificultades deben ser situaciones consideradas para la planeación de la enseñanza–aprendizaje, y que tras el error o la dificultad no significa que haya limitación exclusiva de conocimiento, sino que más bien, en el caso del error significa que se está ante la presencia de un esquema cognitivo inadecuado (Socas, 1997). En el campo de la enseñanza de las matemáticas la palabra dificultad puede tener distintas acepciones, sin embargo, dada la naturaleza de la investigación que se proyecta, se coincide con la concepción de Bengoechea (1999) y se asumirá que la dificultad hace referencia al *“escaso dominio de la parte conceptual, operatoria y de aplicación de los objetos matemáticos”.*

Luego de revisar las concepciones sobre error en el aprendizaje de las matemáticas documentadas en la literatura, se coincide con la concepción sobre error que aporta Rico (1995), al considerar que *“cuando un alumno propone una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se plantea, se puede decir que su respuesta es errónea y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión planteada”*. Desde este punto de vista, el error es un aspecto importante para reflexionar y reorientar tareas que contribuyan a mejorar los esquemas cognitivos del estudiante y con ello lograr la solución correcta. Este trabajo se apoya en la clasificación de errores y dificultades planteadas por Herrera (2010) y Socas (1997). Este planteamiento se adaptó a las características propias del objeto de estudio: las rectas y puntos notables del triángulo. Por tanto, del trabajo de Socas (1997) se retoma la posición en que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deben a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la matemática de los objetos matemáticos, en tal dirección se consideró la siguiente clasificación: *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático*. Se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático: los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas; pueden generar errores. *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas:* los métodos de enseñanza deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular. *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos*: al momento de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza se deben considerar las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus características y capacidades.

En relación a los errores, Radatz (citado por Herrera, 2010) plantea que su análisis puede ayudar a clarificar cuestiones elementales del aprendizaje de las matemáticas, de esa propuesta se consideraron los siguientes tipos de errores: *Errores del lenguaje*. Los errores se derivan del uso inadecuado o erróneo de los símbolos y términos matemáticos, por lo que su aprendizaje se realiza inadecuadamente. *Errores para obtener información espacial*. Este tipo de error se genera de las representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas. *Errores sobre aprendizaje deficiente de los prerrequisitos*: son causados por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos para las tareas matemáticas adquiridas previamente. Errores de *asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento*: se relacionan con la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas, y se subdividen en cuatro tipos: por perseverancia, de asociación, de inferencia y de asimilación.

4. Método

4.1. Diseño y validación del instrumento de exploración

Inicialmente el diseño contuvo ocho actividades relacionadas a los puntos y rectas notables del triángulo y fue validado mediante su aplicación a un grupo piloto de diez estudiantes del pre universitario. Estos estudiantes provenían de diferentes escuelas de nivel medio superior (CBTis, COBACH, CECYTEG y Preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero) del estado de Guerrero, México. Los alumnos fueron elegidos al azar de dos grupos que al momento de la validación asistían a un curso de homogenización de conocimientos matemáticos para ingreso a la Licenciatura en Matemáticas, en el ciclo escolar 2018-2019.

Como resultado del pilotaje se identificaron las siguientes problemáticas: Dificultades sobre la lectura y comprensión de las actividades del diseño. En los alumnos que respondieron a las actividades se encontraron limitaciones y dificultades para identificar y diferenciar los puntos y rectas notables del triángulo en el contexto geométrico, para definir dichos conceptos y para identificar en los problemas planteados, el tipo de conceptos a utilizar para su resolución.

El tiempo estimado que se utilizó durante la validación fue de cien minutos, que comprendió dos módulos de clase. Después de la validación se realizaron las siguientes adecuaciones: Se amplió el diseño a once actividades, esto con la finalidad de describir de manera adecuada las actividades relacionadas a la identificación, definición, interpretación, diferenciación y utilidad de los puntos y rectas notables.

El diseño final de exploración se estructuró por once actividades, con las cuales se planteó el objetivo de identificar las nociones sobre puntos y rectas notables del triángulo que tienen los estudiantes de nivel pre universitario, y en esas nociones la identificación de las dificultades y errores que prevalecen. Las actividades se relacionaron con la identificación, definición, representación y utilización de los conceptos de puntos y rectas notables del triángulo en la resolución de problemas.

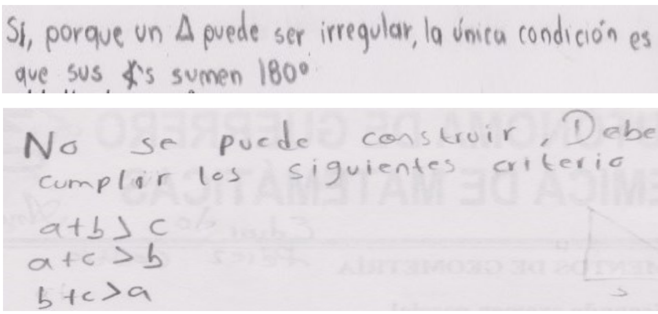
4.2. Población y dinámica de exploración

La población experimental estuvo formada por treinta y un estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, como antecedente; tales estudiantes ya habían cursado las unidades de aprendizaje de geometría, trigonometría, geometría analítica en el bachillerato y al momento de la exploración estaban culminando el primer semestre, del ciclo escolar 2018-2019.

En la primera etapa de la exploración el sistema de actividades fue trabajada de manera individual y en la segunda etapa, se propició un debate entre estudiantes y el responsable de la experimentación, con el propósito de conocer las argumentaciones acerca de sus respuestas. Esta segunda etapa se llevó a cabo con la finalidad de identificar si hubo o no correspondencia entre la producción y su interpretación o argumentación. El desarrollo de las actividades experimentales se llevó a cabo en ciento cincuenta minutos que corresponden a tres módulos de clase.

5. Discusión y resultados

Pregunta 1. ¿Es correcto afirmar que con tres segmentos de cualquier longitud se puede construir un triángulo?, ¿por qué?


Sí, porque un Δ puede ser irregular, la única condición es que sus $\measuredangle$'s sumen 180°

No se puede construir, Debe cumplir los siguientes criterio
$a+b > c$
$a+c > b$
$b+c > a$

Imagen 1. Muestra de dos producciones acerca de la posibilidad de construcción

De los treinta y un alumnos que contestaron esta cuestión, veintiuno de ellos respondieron que sí se puede construir un triángulo dando tres segmentos cualesquiera, de estos; algunos no dieron justificación y otros propusieron respuestas equívocas y diez respondieron que no, de esos diez; dos estudiantes utilizaron como argumentación el cumplimiento de la desigualdad del triángulo: $a+b>c, a+c>b, b+c>a, a-b<c$ y como relaciones equívocas $a-c>b$ y $b-c>a$.

Como puede observarse en la imagen 1, en los alumnos que justificaron equívocamente existe un error conceptual, ya que al referirse a un triángulo irregular (haciendo alusión a los triángulos acutángulo, rectángulo y obtusángulo) se justifica que en ellos se cumple la propiedad de que la suma de sus ángulos interiores mide $180°$, sin embargo, esta propiedad no es un criterio para posibilitar que dados cualesquier tres segmentos se pueda construir un triángulo.

En los diez alumnos que establecieron que con cualesquier tres segmentos no se puede construir un triángulo se identifica implícitamente la noción de desigualdad triangular, a pesar de que solo dos establecen explícitamente esa condición.

Pregunta 2. ¿Qué rectas notables del triángulo conoces?

a)	Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa, altura base
b)	Mediatriz, mediana, altura, bisectriz

Tabla 1. Se muestran dos respuestas sobre rectas notables en la concepción del estudiante

Veinte estudiantes escribieron en sus respuestas algunos nombres de las rectas notables del triángulo, además, escribieron los nombres de los lados de un triángulo rectángulo y la base, ver tabla 1, a). Estas respuestas evidencian que los estudiantes solo adquirieron en su momento ideas intuitivas acerca de las definiciones, por tanto, se identifica una dificultad de tipo conceptual sobre las rectas notables. En tanto que once estudiantes escribieron correctamente el nombre de las rectas notables ver tabla 1, b), lo anterior no prueba que necesariamente conocen la definición.

Pregunta 3. Define los conceptos: mediatriz, altura, mediana y bisectriz de un triángulo

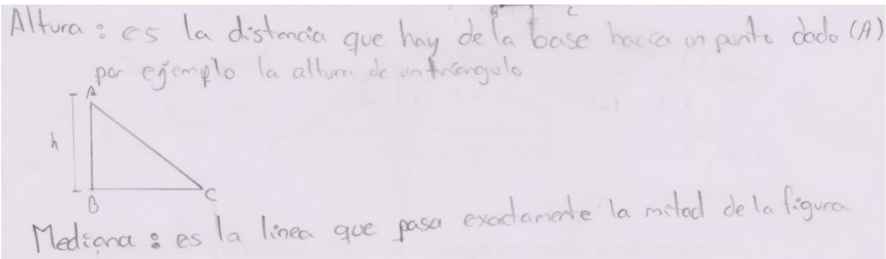


Imagen 2. Definiciones de altura y mediana dadas por un subgrupo 1 de la población total

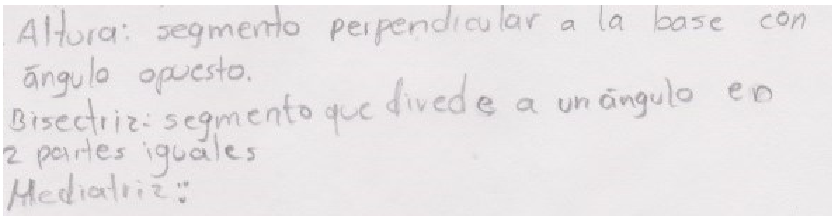


Imagen 3. Definiciones de altura y bisectriz por un subgrupo 2 de la población total

Veintidós alumnos respondieron esta pregunta, sin embargo, como se muestra en la imagen 2 y 3, los alumnos no definieron todas las rectas notables. En relación al concepto de altura, puede notarse que en los estudiantes prevalece la idea de la posición estándar de los triángulos (en donde la base es horizontal) y la definición en un caso particular de triángulo, sobre este concepto se identifica una dificultad de tipo espacial y conceptual. Con respecto a la definición del concepto de mediana y su representación, se identificó que hacen alusión a un caso particular de triángulo, el isósceles, esto reafirma la existencia de estas dificultades.

Como se aprecia en la imagen 3, existe una desconexión entre el objeto geométrico en el cual se pide definir el concepto de bisectriz (existencia de una ruptura implícita). En relación al concepto de mediatriz no se identificaron producciones acerca de su definición, situación que pone en evidencia la existencia de dificultades sobre la definición y utilización de estos conceptos.

Pregunta 4. ¿Cuántas mediatrices tiene cada uno de los triángulos que en seguida se te presentan?

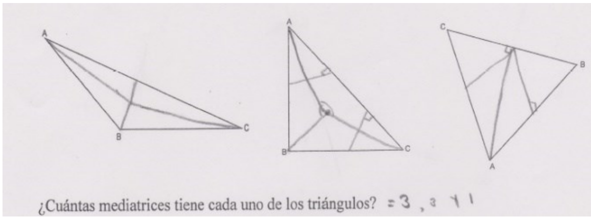
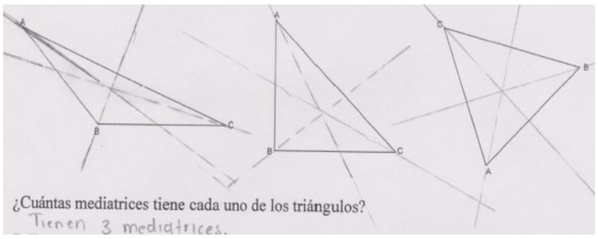
a)	
b)	

Imagen 4. Número de mediatrices y su representación dadas por dos subgrupos de la población total

En total, veinte estudiantes contestaron que un triángulo tiene tres mediatrices, como parte de sus argumentos representaron en el triángulo tales rectas. Sin embargo, como se observa en la Imagen 4, a) y b) once alumnos (unión de los subgrupos 1 y 2) dieron respuestas parciales (correctas) en la identificación del número de mediatrices, pero sus representaciones son erróneas (por lo que en ellos se identifican dificultades de tipo conceptual e imágenes espaciales mal construidas).

Pregunta 5. ¿Cuántas alturas tiene cada uno de los triángulos?

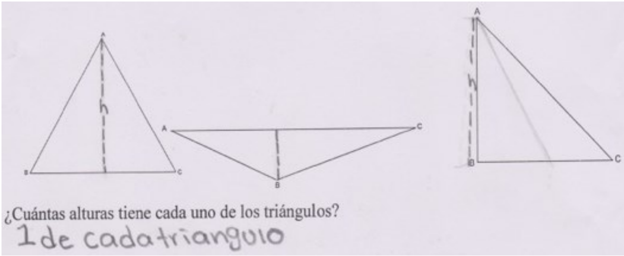
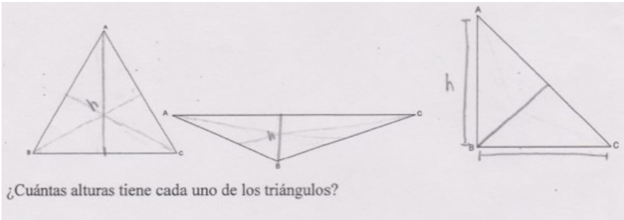
a)	
b)	

Imagen 5. Indicación y representación del número de alturas

En la imagen 5, se muestran las respuestas características en los dieciocho estudiantes que contestaron incorrectamente. Estos estudiantes mencionaron que dado un triángulo, solo ven una base, por lo tanto, tiene una altura, otros alumnos respondieron que depende del segmento (lado del triángulo) que se tome como base, pero no mencionaron que bajo esta dependencia hay entonces tres alturas.

Trece alumnos establecieron que el triángulo tiene tres alturas, sin embargo, en la representación que realizan se identifica que no tienen claridad o no conocen la definición correcta de altura de un triángulo, pues este grupo, en sus representaciones resaltan la identificación en el triángulo rectángulo. También se identificó que sus imágenes figurales no están desarrolladas ya que implícitamente se induce que se apoyan en la posición estándar de las figuras; esto a pesar de que los triángulos que se le presentan tienen cierta posición estándar.

Pregunta 6. ¿Cuántas medianas tiene cada uno de los triángulos?

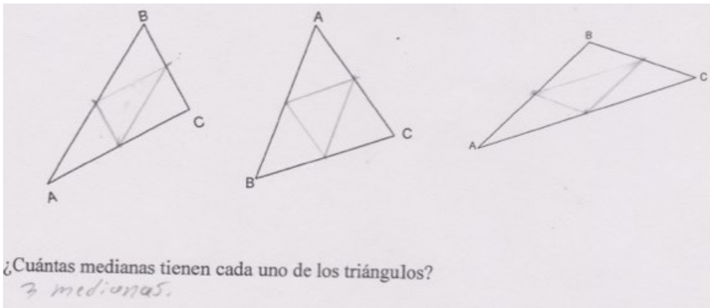


Imagen 6. Representación de las medianas

Veinticinco alumnos correctamente trazaron las tres medianas del triángulo y establecieron que cada triángulo tiene tres medianas. Sin embargo, seis alumnos contestaron que cada triángulo tiene tres medianas, pero en su representación se identificó que no tienen claridad en la definición, como se observa en la imagen 6, en cada caso, sólo ubicaron los puntos medios de cada lado del triángulo.

Pregunta 7. ¿Cuántas bisectrices tiene cada uno de los triángulos?

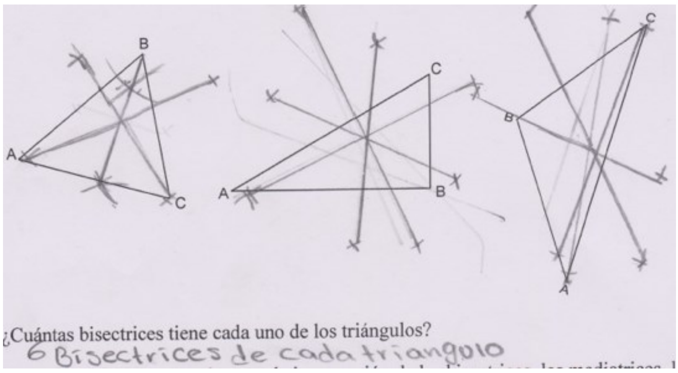
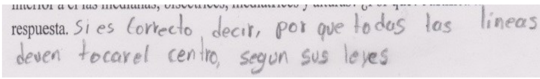


Imagen 7. Representación de bisectrices

Veinticinco alumnos establecieron que un triángulo tiene tres bisectrices (total de bisectrices internas) y representaron correctamente tales rectas. Sin embargo, seis alumnos respondieron que los triángulos cuentan con seis, cinco o cuatro bisectrices, lo cual evidencia que estos alumnos no tiene claridad en la definición y de la representación de la bisectriz en un triángulo (existe una ruptura implícita). En la respuesta de que existen seis bisectrices puede deberse a que estos alumnos consideran las bisectrices de los ángulos internos y los ángulos externos de un triángulo, en cuyo caso, se identifica en su procedimiento usos erróneos de la concepción de bisectriz en de un triángulo.

Pregunta 8. ¿Es correcto que, dado un triángulo cualquiera, siempre se cortan en un punto interior de él las medianas, bisectrices, mediatrices y alturas? ¿Por qué? Justifique su respuesta

Diecisiete alumnos respondieron que el punto de intersección de las rectas notables puede estar en el interior del triángulo, sin embargo, se puede apreciar en su afirmación que no excluyen la posibilidad de que el punto de intersección sea exterior al triángulo. Esta pregunta se proyectó con el propósito de indagar en los alumnos si consideran las rectas notables para un triángulo cualquiera. Once alumnos contestaron que el punto de intersección no se puede encontrar siempre en el interior del triángulo; y tres respondieron de manera equívoca. En la imagen 8, se identifican las producciones representativas de los estudiantes.

a)	 respuesta. Si es Correcto decir, por que todos las lineas deven tocar el centro, segun sus leyes

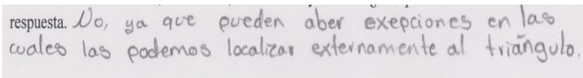
b)	 respuesta. No, ya que pueden aber exepciones en las cuales las podemos localizar externamente al triángulo.

Imagen 8. Producciones representativas acerca de la ubicación del punto de intersección de las rectas notables

Pregunta 9. El punto G es el circuncentro (intersección de las mediatrices) del triángulo ABC. Clasifica los triángulos AGC, AGB y BGC, según sus lados y justifica tu respuesta

Once estudiantes clasificaron los triángulos en isósceles y equilátero, el resto de los estudiantes plantearon respuestas equívocas. De las respuestas dadas, se observa que los estudiantes no tienen dominio de la definición de mediatriz y del significado del punto de intersección entre ellas. De tener dicho dominio, se conjetura que pudieron haber identificado que las distancias del punto G a los vértices son iguales, por tanto, habría información para clasificar los triángulos, según sus lados.

Pregunta 10. En una ciudad se requiere construir un quiosco de tal manera que quede a la misma distancia del Edificio del Congreso, de la Subsecretaria de Educación y del centro de la ciudad. A fin de apreciar la información, se han ubicado puntos de referencia que indican la ubicación de dichos lugares como se muestra en la Imagen 9. Determina el punto representativo donde se deberá construir el quiosco.

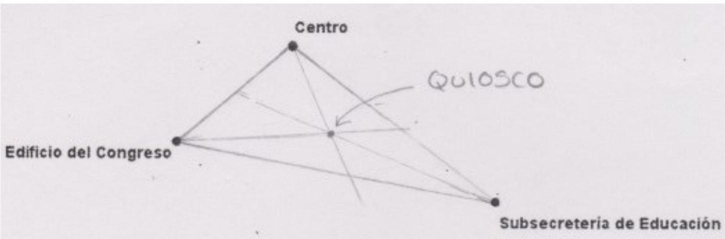


Imagen 9. Representación de la situación que exige determinar la ubicación deconstrucción del quiosco

Ningún estudiante identificó que la definición del concepto de mediatriz es fundamental para atender el problema. Ello los condujo a cometer errores de interpretación, representación y ubicación espacial del punto representativo (lugar en donde debe construirse el quiosco). Veinte alumnos aportaron respuestas equívocas, éstas hacen alusión a que los alumnos concuerdan que el quiosco debe de estar fuera del triángulo de referencia (lo formaron al unir los puntos de referencia) para que de ese modo quede a la misma distancia de los tres puntos mencionados en el problema. Como se puede notar, estos alumnos tienen dificultad para identificar el concepto, aunque su imagen espacial les permite argumentar sobre la ubicación del lugar donde debe construirse el quiosco.

Pregunta 11. Se tiene un terreno de forma triangular y en él se desea construir una fuente de forma circular, de tal manera que sea tangente a cada lado del terreno. Construir el centro de la fuente

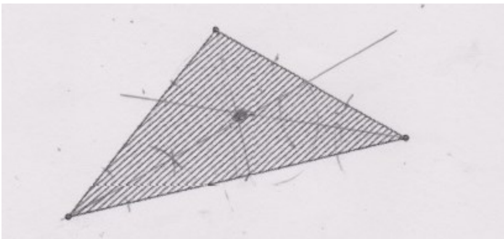


Imagen 10. Representación de la ubicación de construcción de la fuente

La mayoría de los estudiantes indicó que debían trazar un círculo inscrito. Esto favoreció que nueve de los alumnos mencionaran el concepto de bisectriz y la intersección, posterior a ello, lograron representar la ubicación que se pide en el problema. El porcentaje de alumnos que respondieron correctamente es bajo. De la mayoría que aporta respuestas parciales evidencian que tanto su imagen conceptual como la definición de bisectriz en un triángulo y su representación no están desarrolladas.

5.1. Representación e interpretación cuantitativa

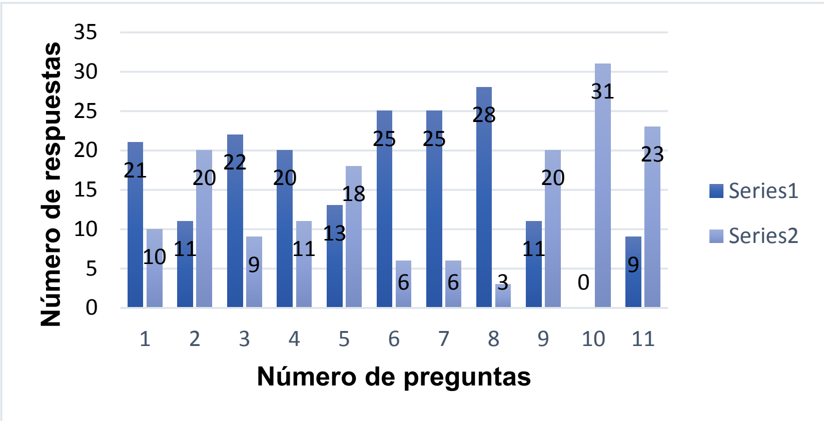


Figura 1. Representación del número de respuestas correctas e incorrectas acerca de las nociones de rectas notables del triángulo

Como se identifica en la figura 1, las respuestas incorrectas (indicadas con la leyenda serie 2) tienen un comportamiento creciente. Esta tendencia puede indicar que en situaciones de aplicación la exigencia en cuanto al dominio de contenido es mayor; en esta etapa se exigen tanto el dominio de la definición; como su identificación y las conexiones matemáticas en su entorno, que pongan en condiciones al resolutor a llevar a cabo la resolución. Por otra parte, el número de respuestas correctas (identificadas con la leyenda serie 1) tiene un comportamiento decreciente, esta tendencia pone en evidencia que en general, es bajo el número de la población experimental que muestra elementos de comprensión de los conceptos objeto de estudio (por comprensión se hace referencia: al dominio de la definición, identificación, representación y aplicación).

Las dificultades encontradas se identifican con las asociadas a los procesos del pensamiento matemático: emergieron ejemplos sobre rectas notables en casos particulares de triángulos, las representaciones no estándar de las figuras fueron factor de dificultad para el estudiante, lo que los llevó a cometer errores en la representación o construcción. Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza para el aprendizaje se manifestaron en cada respuesta a las preguntas del diseño de exploración, ya que las respuestas equívocas o parcialmente correctas ponen en evidencia la necesidad de contribuir con herramientas de planeación para mejorar los aprendizajes del contenido matemático en juego. La exploración realizada permitió identificar las características cualitativas en cuanto a dominios y capacidades de los estudiantes acerca de las rectas notables, esto deberá considerarse en la ruta del planteamiento de alternativas para el aprendizaje, a fin de disminuir las dificultades de tipo conceptual y de aplicación.

6. Conclusiones y reflexiones

Las dificultades y errores identificados en la exploración sobre las rectas y puntos notables del triángulo en la población de estudiantes de universitario, permitieron corroborar lo que han reportado las investigaciones en torno a los problemas de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos desde el nivel básico al pre universitario. Esta identificación sirve como punto de partida para la elaboración y puesta en funcionamiento de una trayectoria hipotética de aprendizaje como parte del proyecto “herramientas metodológicas y de tecnología educativa para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de la geometría en el universitario”.

Fundamentados en los errores y dificultades que se han encontrado en la producción de los estudiantes acerca de los conceptos de rectas notables del triángulo, esencialmente y de los aportes teórico-metodológicos de las líneas hipotéticas de trayectorias de aprendizaje (THA) (Simon y Tzur, 2004; León, Díaz y Guilombo, 2014; Morales, Marmolejo y Locia, 2014 y Morales-Carballo, Marmolejo-Valle, Ríos-Parra y Damián-Mojica, 2019), se pueden proyectar algunas ideas para la elaboración de las THA para el tratamiento de los conceptos explorados aquí, por ejemplo, una posible propuesta de trayectoria de aprendizaje del concepto de altura de un triángulo apoyada en el uso del software GeoGebra puede componerse de las siguientes fases:

Actividad de aseguramiento. En esta fase se proyectan actividades para ejemplificar nociones sobre el cálculo de áreas de triángulos que no están representados en la forma estándar y sobre conceptos asociados al triángulo.

Actividad inicial. Se favorece el trabajo con las transformaciones isométricas del plano: traslación y rotación y se ejemplifican en la transformación isométrica de un conjunto de triángulos.

Actividad intermedia. Se plantea enlistar y describir fórmulas diversas para el cálculo del área de un triángulo y generar la discusión del uso de la fórmula clásica *"la mitad de la base por altura dividida por dos"* en un triángulo que no ocupa una posición estándar y del papel que juega el concepto de altura. Luego, se plantea identificar, representar y describir los conceptos de altura de un conjunto de triángulos representados no necesariamente en la posición estándar.

Actividad de fijación. Se muestra un cuadrado y en él se inscribe un conjunto de triángulos en la posición no estándar. Se pide identificar las alturas y determinar la longitud de ellas.

La altura como lugar geométrico. Se propone una actividad en la que se identifica la condición que cumple la altura de un triángulo en una relación de igualdad. Finalmente, se ejemplifican aplicaciones de las rectas y puntos notables del triángulo tanto en el plano euclidiano como en el terreno analítico.

Bibliografía

Bengoechea, P. (1999). *Dificultades del aprendizaje escolar.* Oviedo, España: Universidad de Oviedo.

Chavarría, G. (2014). *Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. Uniciencia*, 28(2), 15-44.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-13. https://doi.org/10.35362/rie3842646

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática. Revista Premisa*, 6(23), 23-32.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecné Episteme y Didaxis: TED,* (32), 55-70. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859

Hernández-Gómez, J. C., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A., y Sigarreta-Almira, J. M. (2019). *El Contraejemplo en la Elaboración de la Definición de Función Convexa por Estudiantes Universitarios. Información tecnológica*, 30(1), 185-202. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000100185

Herrera, M. L. (2010). *Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En Lestón, P. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 247-255. México, CDx: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). *El aprendizaje de conceptos geométricos en la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria*,197-215). Madrid: Paraninfo.

León, O. L., Díaz C. F., y Guilombo, M. (2014). *Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 9-28.

Morales-Carballo, A., Marmolejo-Valle, J. E., Ríos-Parra, B. y Damián-Mojica, A. (2019). *Propuesta teórico-didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto del área. Revista Premisa* 21 (81), 5-20.

Morales, A., Marmolejo, J. E., y Locia, E. (2014). *El software GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. Premisa* 16 (63), 20-28.

Ramos, G. y López, A. (2015). *La Formación de Conceptos: Una Comparación Cognitivista y Histórico-Cultural. Educação e Pesquisa* 41(3), 615-628.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L.; Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia, 69-108.* Bogotá: una empresa docente.

Samper, C., Corredor, O. A. y Echeverry, A. (2014). *Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. Tecné Episteme y Didaxis: TED,* (35), 63-86. https://doi.org/10.17227/01213814.35ted63.86

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). *Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 91-104.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. Dir., Castro, E., Coriat, M., Martín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M.M. (Ed.). La Educación Matemática en la Secundaria*.: ice-Horsori. pp 125-154

Villamizar, R. D. (2018). *Diseño de una propuesta didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en estudiantes de grado octavo. NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 99, 51-69.

Winicki, G. (2006). *Las Definiciones en Matemáticas y los Procesos de su Formulación: Algunas Reflexiones. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 19, 528-537.

Autores:

Armando Morales Carballo, Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Profesor-investigador en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Incide en los programas de Doctorado y maestría con orientación a la matemática educativa y en la Licenciatura en Matemáticas. armandomorales@uagro.mx

Angie Damián Mojica, Maestra en Ciencias Área: Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Profesora-investigadora en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Incide en la Licenciatura en Matemáticas. adamian@uagro.mx

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

ISSN: 1815-0640
Año XVII- Número 61- Abril 2021
Páginas 01-17

Superficies de revolución con GeoGebra

Bernat Ancochea Millet, José Manuel Arranz San José, José Muñoz Santonja

Fecha de recepción: 24/09/2020
Fecha de aceptación: 11/01/2021

Resumen

En este artículo se presenta una propuesta sobre cómo trabajar en el aula superficies de revolución. Utilizando los conocimientos de geometría y análisis, el alumnado podrá probar variaciones para trabajar con las superficies habituales en la enseñanza no universitaria y otras que se pueden encontrar en el entorno cotidiano. Para ello, explicaremos cómo utilizar el software de matemáticas GeoGebra, un programa de geometría dinámica que, con unas órdenes básicas, permite un amplio abanico de resultados fáciles de conseguir por el alumnado de primaria y secundaria, y que resultan muy atractivos.
Palabras claves: Superficies de revolución, GeoGebra.

Abstract

In this article we present proposals about how to work in the classroom surfaces of revolution. Using the previous knowledge on Geometry and analysis, the students will be able to prove variations to work with the usual surfaces found in the non-universitary teaching, and others that can be found in daily life. For this, we will explain how to use the mathematical software Geogebra, a dynamic geometric programme that permits huge results easy to get by primary students using basic commands. These are very interesting and attractive.
Keywords: Surfaces of revolution, GeoGebra.

Resumo

Este artigo apresenta uma proposta de como trabalhar superfícies de revolução em sala de aula. Usando o conhecimento de geometria e análise, os alunos poderão experimentar variações para trabalhar com as superfícies usuais no ensino não universitário e outras que podem ser encontradas no ambiente cotidiano. Para isso, vamos explicar como usar o software de matemática GeoGebra, um programa de geometria dinâmica que, com alguns comandos básicos, permite uma ampla gama de resultados fáceis de alcançar por alunos do ensino fundamental e médio, e que são muito atraentes.
Palavras-chave: Superfícies de revolução, GeoGebra.

1. Matemáticas a nuestro alrededor

Aunque hay una parte de la sociedad que piensa, fundamentalmente por desconocimiento, que las matemáticas tienen poca utilidad, es innegable que vivimos en una sociedad difícilmente imaginable sin el soporte matemático. Incluso esas personas que suelen abominar de las matemáticas, no se ven libres de tener que utilizarlas continuamente, ya que están subordinados a todo tipo de medidas, de tiempo, de espacio, etc… Pero además todos utilizamos el azar de forma intuitiva para escoger, entre varias opciones, la que pensamos que es más probable, baste pensar en la elección de la hora de salida de un viaje en épocas en que hay muchos desplazamientos. Cada vez es más corriente que obtengamos de los medios de comunicación información en forma gráfica, y también en nuestra vida cotidiana y laboral, es usual hacer tablas o gráficas para recoger y mostrar los datos que manejamos.

Y, por supuesto, vivimos rodeados de geometría. No sólo la arquitectura, sino que las esculturas que pueblan nuestras rotondas son en muchas ocasiones meras expresiones geométricas, bien por cuerpos geométricos o superficies de todo tipo, que incluso superan a los conocimientos que se estudian en la enseñanza no universitaria.

Por referirnos a aquellos elementos que aprendemos a manejar todos en edades tempranas, en nuestra propia casa podemos encontrar los cuerpos geométricos que hemos conocido y manejado como el cilindro, la esfera o el cono.

Imagen 1: Cuerpos de revolución en nuestra casa.

Esos elementos geométricos son llamados cuerpos de revolución, pues se originan al girar ciertos elementos como veremos más adelante. Pero también convivimos a diario con otros cuerpos de revolución, que no estudiamos en la escuela y que sin embargo están ahí.

Imagen 2: Otras superficies de revolución.

En los estudios no universitarios se suelen reducir las superficies de revolución a las correspondientes a esos cuerpos de los que hablamos antes, y casi todo se reduce a reconocer las figuras y a aprenderse de memoria las fórmulas que nos dan superficies y volúmenes y poco más. Quizás porque ampliar a otras superficies pueda resultar complicado para el nivel educativo en el que nos movemos. Sin embargo, gracias a programas de geometría dinámica como GeoGebra, el alumnado puede reconocer e investigar otras superficies más complicadas de una forma muy simple. Así se pueden estudiar y construir superficies localizables en las bellas artes, con solo conocer unas pocas órdenes y tener una mínima vena creativa.

La idea de estas páginas es mostrar la facilidad con que pueden investigarse superficies muy atractivas y originales.

El objetivo de estas páginas es mostrar cómo es posible trabajar, de una manera fácil y rápida, superficies muy diferentes en la enseñanza no universitaria, promoviendo en todo caso la exploración por parte del alumnado y la búsqueda de variaciones que puedan resultar atractivas, para lo cual tienen que poner en acción los conocimientos que tienen sobre geometría y funciones.

2. Superficies de revolución con GeoGebra.

En matemáticas llamamos superficie de revolución a la superficie que se genera por la rotación de una curva plana, llamada generatriz, alrededor de un eje de rotación llamado recta directriz.

GeoGebra es un programa de geometría dinámica que se basa en la filosofía Creative Commons de forma que cualquier persona puede utilizarlo libremente e incluso participar en su desarrollo. Este programa está en constante evolución y en el año 2014 se presentó la versión 5 que poseía una ventana para construir gráficamente en tres dimensiones. Los que estuvimos trabajando con la versión beta anterior ya descubrimos sus muchas posibilidades en la enseñanza, no sólo para el trabajo con la geometría analítica de bachillerato, sino también para el trabajo con los cuerpos geométricos en curso inferiores, viendo las posibilidades de trocear poliedros o estudiar sus desarrollos planos. Pero en este caso nos vamos a centrar en el estudio de algunas superficies.

En GeoGebra es muy fácil trabajar en la ventana 3D superficies de revolución. Basta utilizar la versátil orden:

Superficie(<Curva>, <Ángulo>, <Recta>)

Donde <*Curva*> es el objeto que va a rotar, <*Ángulo*> es el valor del ángulo que queremos rotar el objeto, suele ser un valor entre 0º y 360º, aunque también puede darse en radianes, si es menor de 360º no se cerrará la superficie y si es mayor de 360º habrá partes que se dibujen más de una vez. Por último, el parámetro <*Recta*> es la recta directriz. Si no se coloca este último parámetro, GeoGebra entiende que la recta directriz es el eje X.

Veremos ahora que el elemento que se puede girar tiene una variedad tal de posibilidades, que hace que se puedan obtener multitud de resultados diferentes, algunos muy llamativos.

2.1. Cuerpos clásicos de revolución

Desde las primeras versiones de GeoGebra 5 existen comandos que nos permitían obtener los cuerpos geométricos más generales. Así, con sólo indicar dos puntos y el radio podemos dibujar un cilindro. Además, GeoGebra nos da el volumen del cilindro y su superficie lateral. Más exactamente, el programa dibuja la superficie lateral y las dos bases, indicando en el caso de los dos círculos bases, sus ecuaciones. Pero utilizando la orden superficie podemos recalcar que esa figura se obtiene rotando un segmento alrededor de un eje.

Para construir el cilindro bastaría representar en la vista 2D un segmento, por ejemplo, el que va de los puntos (2, -3) al (2, 3). Supongamos que GeoGebra lo nombre como f, bastaría incluir en la casilla de entrada la orden

Superficie(f, 360º, EjeY)

para obtener directamente el cilindro.

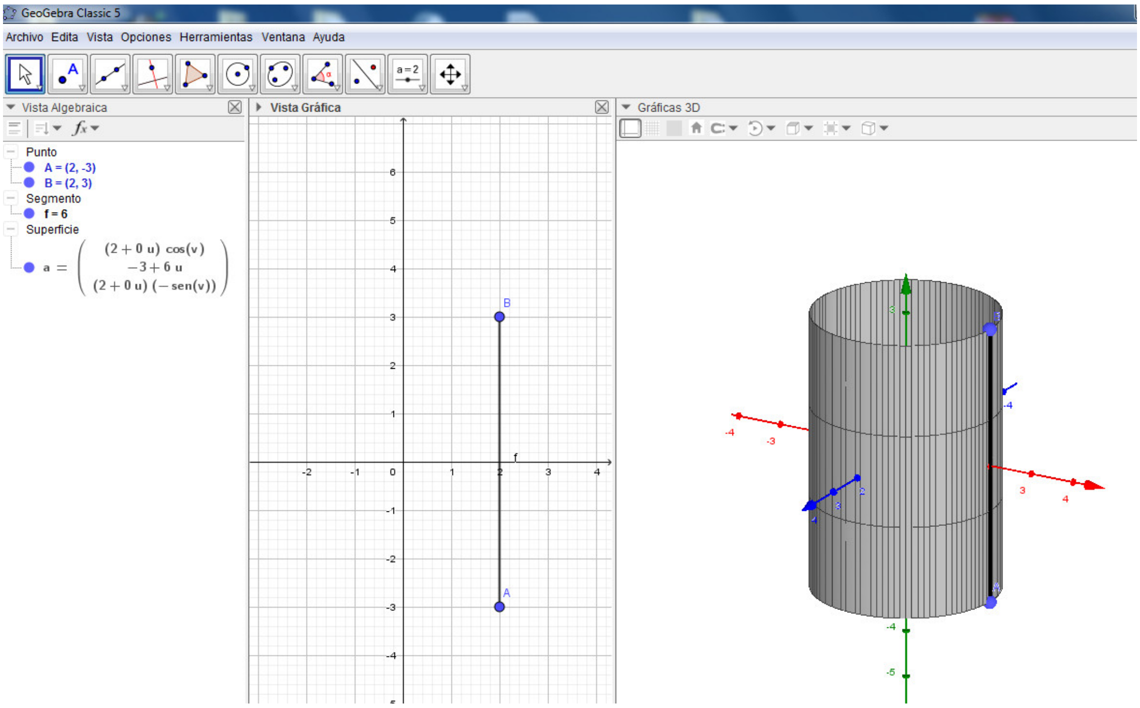


Imagen 3: Superficie lateral del cilindro.

Como observamos en la imagen, aparte de dibujarlo, el programa nos da la ecuación paramétrica de esa superficie. Para que se vea vertical el cilindro podemos, en las propiedades de la ventana 3D seleccionar la opción de eje-y-vertical.

Por supuesto, obtenemos solamente la superficie lateral del cilindro, que es la que se genera cuando el segmento gira alrededor del eje. Podemos obtener el cilindro completo si en lugar de girar el segmento giramos un rectángulo, aunque GeoGebra puede crear tiras grises, en la ventana 3D, en según qué condiciones.

Además, podemos visualizar cómo se va generando el cilindro utilizando un deslizador. Basta crear un deslizador de tipo angular entre 0º y 360º. Después se dibuja un polígono de vértices (2, -3), (2, 3), (0, 3), (0, -3), supongamos que se le ha dado el nombre c1. Basta introducir la orden

Superficie(c1, <Ángulo>, EjeY)

y moviendo el deslizador veremos cómo se va generando el cilindro completo, aunque sólo las superficies que lo forman.

Hay otra forma de generarlo pero lo veremos más adelante.

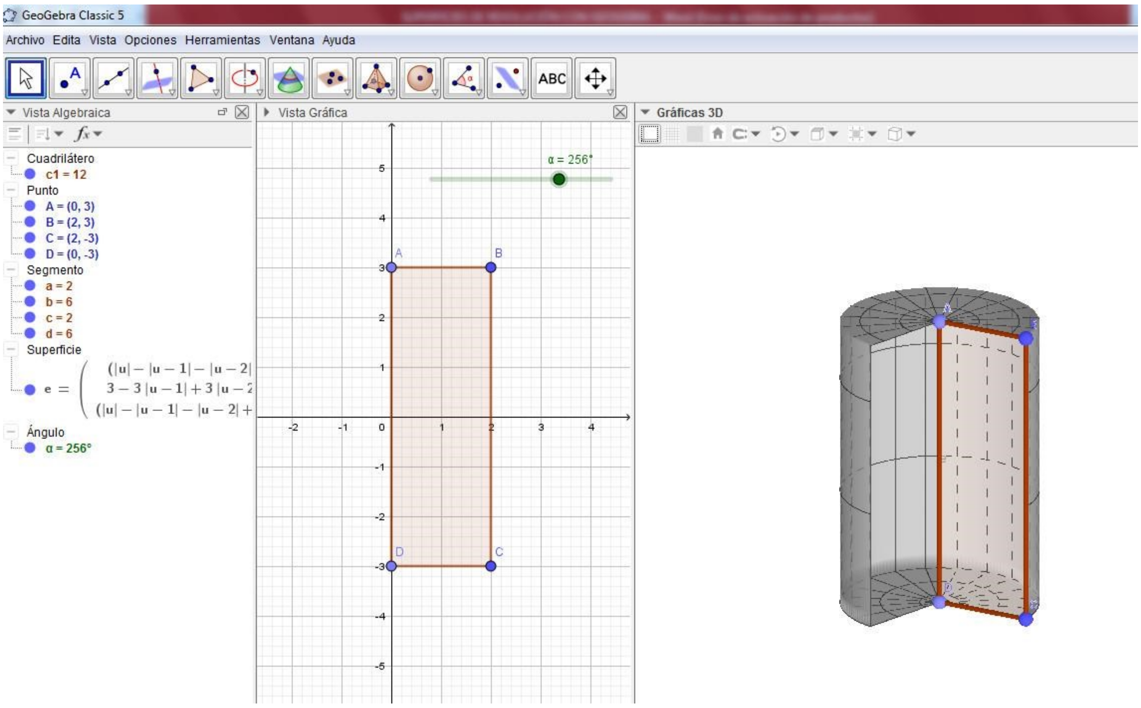


Imagen 4: Generación del cilindro.

Se puede consultar la *construcción en: https://www.geogebra.org/m/fscusfdp*

De forma análoga a como hemos visto con el cilindro, podemos hacerlo con el cono, sin más que colocar una línea oblicua al eje de rotación o la esfera dibujando una semicircunferencia. La ventaja de utilizar como antes un deslizador, es que podemos dibujar elementos que actualmente (al menos a la hora de escribir estas líneas) no se pueden obtener directamente como una semiesfera o un huso esférico, como vemos en la siguiente imagen.

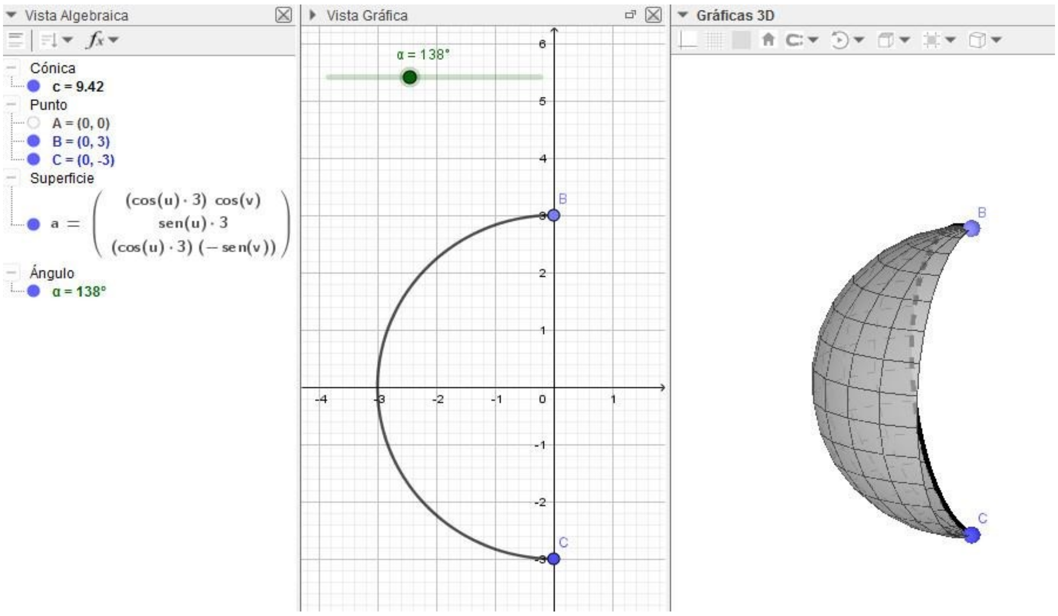


Imagen 5: Huso esférico.

Trabajar con la orden superficie permite construir figuras que no tienen una orden directa como con el cono o la esfera. Creamos un deslizador a desde 0 hasta 2 y creamos el segmento f que une los puntos (a, 3 – 3a/2) y (2,0). Con la orden Superficie(f, 360º, EjeY) obtenemos un cono y si movemos el deslizador obtenemos la superficie correspondiente a un tronco de cono.

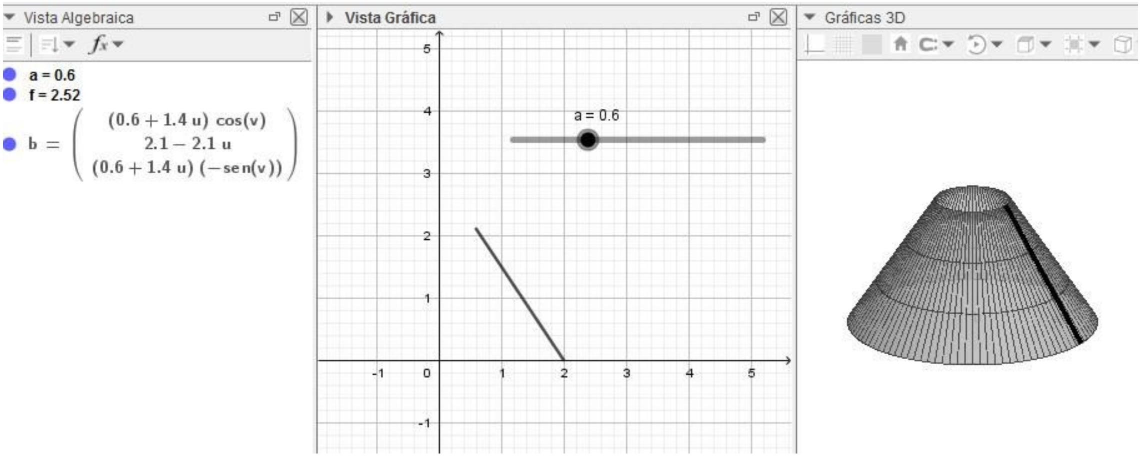


Imagen 6: Tronco de cono.

Puedes ver una construcción del tronco de cono en la dirección: https://www.geogebra.org/m/bbjh8qyv

Pero como dijimos al principio. Esta poderosa herramienta permite no solamente recrear los cuerpos geométricos que se suelen ver en secundaria, sino que podemos jugar con otras superficies más nuevas para los alumnos de una forma muy simple. Así, basta dibujar un triángulo isósceles y hacerlo girar alrededor de su lado desigual para obtener una boya o una circunferencia no centrada en el origen para que al girar podamos obtener una rosquilla (léase toro).

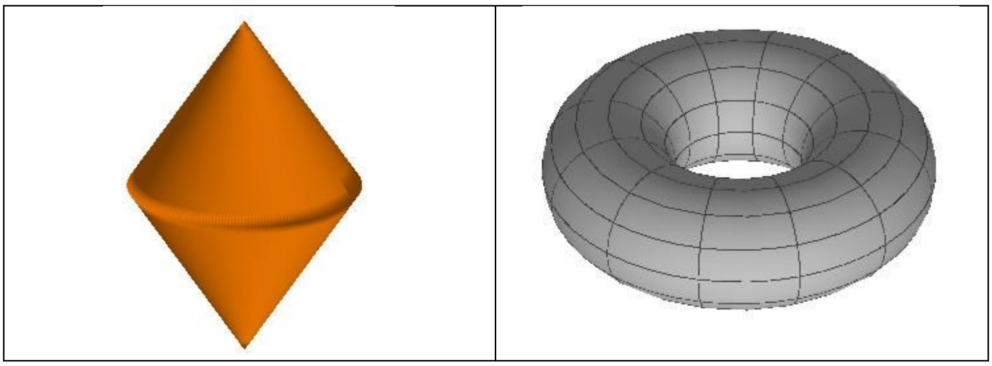


Imagen 7: boya y toro

Una vez que los alumnos han comprobado lo fácil que es cambiar las condiciones para obtener figuras nuevas, se les debe animar a que investiguen otras posibilidades. Siempre hay alguno a quien se le ocurre alguna variedad y en caso contrario debe ser el profesor el que les plantee retos para que sean ellos los que descubran qué pasa en esas situaciones. En estos casos se debe pedir al alumnado que, antes de trabajar con el programa hagan un pronóstico sobre qué puede ocurrir.

Veamos un ejemplo. Se les puede plantear qué le ocurre a una figura, por ejemplo un cono generado al girar una línea oblicua alrededor de un eje, cuando ese eje se traslada de forma paralela a su posición inicial.

Para ello basta dibujar un segmento, por ejemplo, de extremos (0, 2) y (3, 0), crear un deslizador a desde 0 hasta 3 y hallar la *Superficie(f, 360º, x=a)*, siendo f el segmento. Moviendo el deslizador podemos ver cómo le afecta al cono inicial que termina invertido.

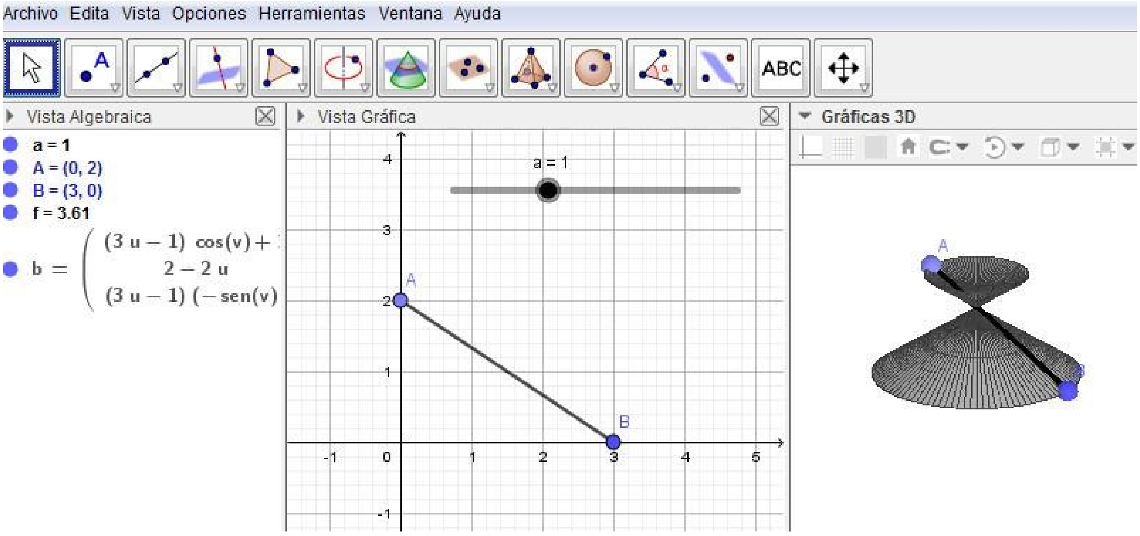


Imagen 8: traslación del eje

Ver la construcción en: https://www.geogebra.org/m/nhsgpdcf

Para acabar con este epígrafe en el que hemos visto posibilidades de figuras al girar elementos geométricos como segmento, polígonos o circunferencias, vamos a citar un nuevo ejemplo trabajando directamente sobre la ventana 3D. Aunque inicialmente se necesitaba que los elementos a girar estuviesen en el mismo plano que el eje de rotación, esa restricción se puede actualmente saltar. Para ello, creamos en la ventana 2D un deslizador a entre 0 y 3, directamente en la ventana 3D dibujamos el segmento que une los puntos (2, a, 3) y (2, – a, –3). Creamos la superficie con la orden

Superficie(f, 360º, EjeZ)

Basta mover el deslizador, para que obtengamos una superficie reglada, en este caso un hiperboloide.

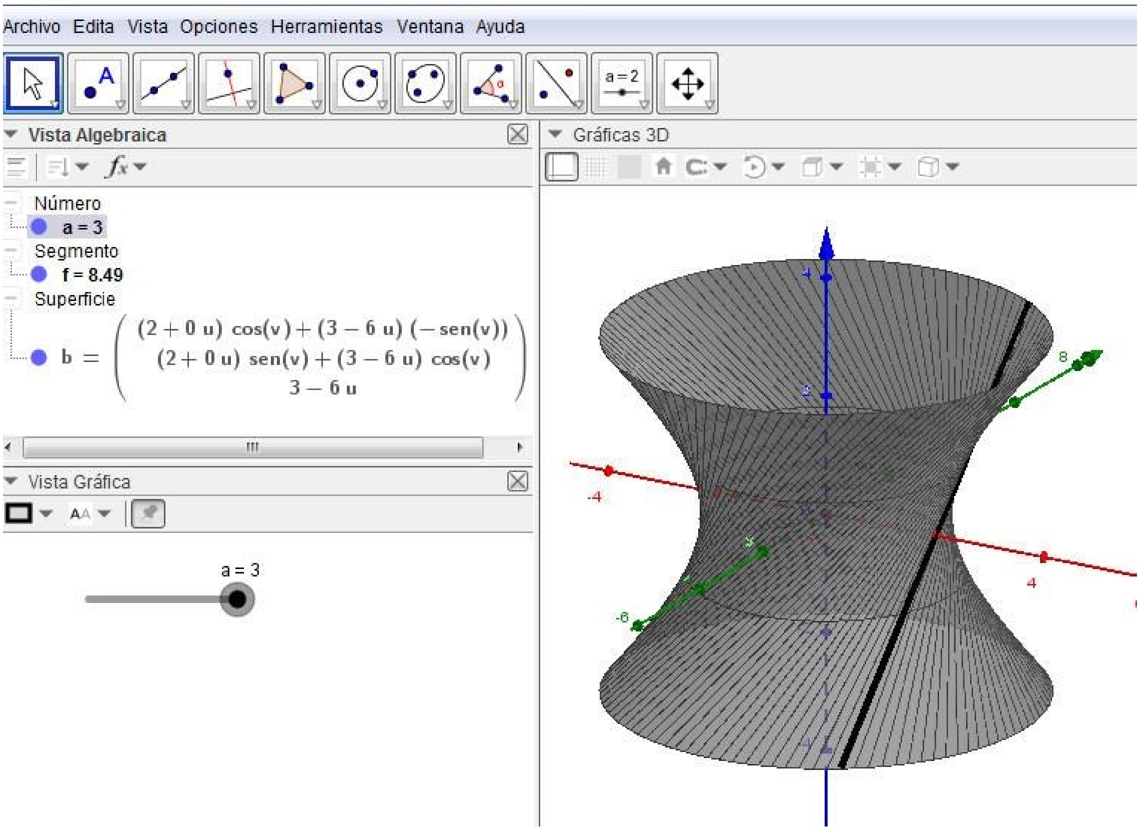


Imagen 9: Hiperboloide de una hoja.

Si cambiamos la segunda componente del segundo punto, sustituyendo el valor –a directamente por 0 obtenemos un hiperboloide asimétrico que nos da la imagen de muchas papeleras de oficina.

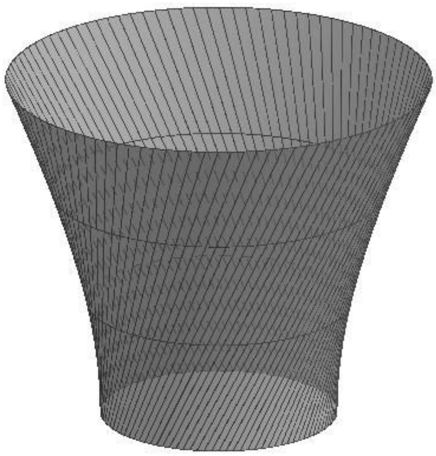


Imagen 10: Hiperboloide asimétrico.

Los dos ejemplos anteriores puedes consultarlos en la dirección: https://www.geogebra.org/m/rhvtcdgt

2.2. Superficies a partir de funciones.

Utilizando la orden básica que hemos visto, se puede conseguir superficies de revolución a partir de funciones. Para ello basta definir una función y hallar la superficie. Para que no se nos llene la pantalla y podamos ver bien la superficie conseguida, suele ser interesante acotar la función. Veamos un ejemplo.

Definimos la función *f=Función(x^2,0,2)* y, a partir de ella, podemos conseguir dos superficies distintas según giremos alrededor del eje X o del eje Y.

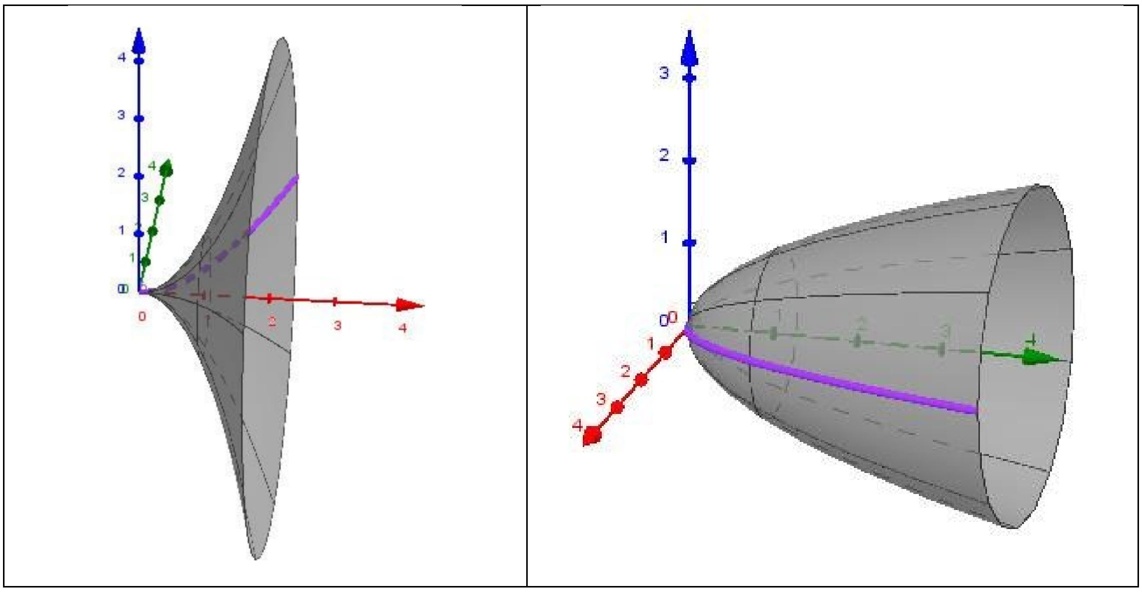


Imagen 11: Superficies de revolución de x^2 alrededor de los ejes X e Y.

Se puede consultar la actividad en la siguiente dirección:
https://www.geogebra.org/m/szfwc2df

Una cuestión que se puede plantear es qué ocurre si giramos la función x^2 que hemos definido directamente respecto al eje Z. Salen respuestas muy curiosas pero lo cierto es que dado que la función está en el plano XY, lo que obtenemos es un círculo plano.

Si quisiéramos obtener la superficie de revolución respecto al eje Z debemos modificar un poco la orden y utilizar la expresión:

Superficie(u cos(v), u sen(v), f(u), u, xm, xM, v, 0, α)

siendo xm y xM los valores máximos que queremos representar de la función y α el valor máximo del ángulo de giro. En nuestro ejemplo, la función puede ser directamente u^2.

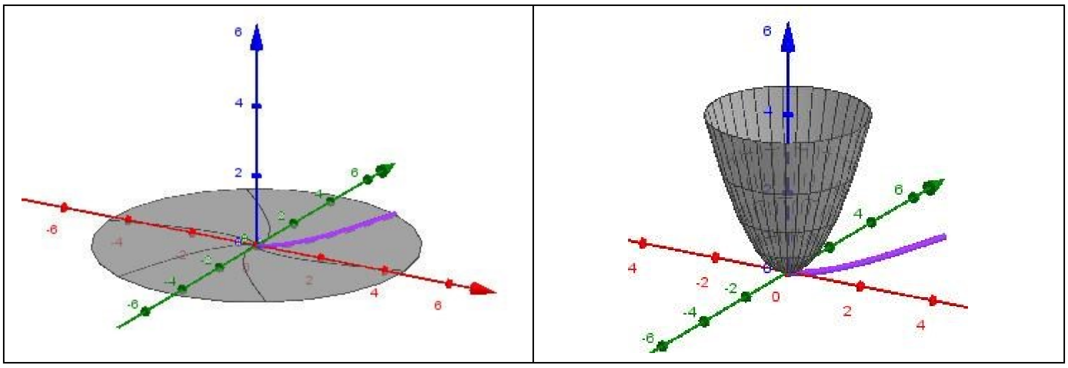


Imagen 12: x^2 alrededor del eje Z.

Como actividad, te proponemos que tomes una rama de hipérbola y la hagas girar alrededor de la bisectriz del segundo cuadrante, así obtendrás un hiperboloide oblicuo.

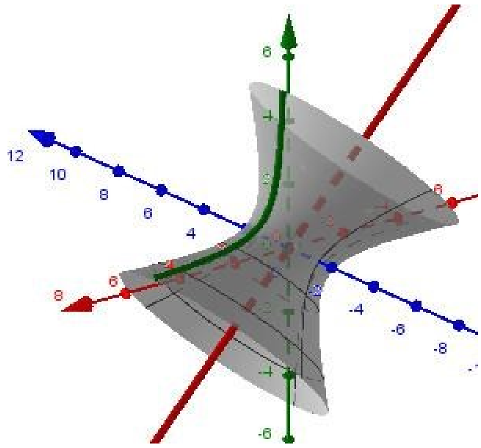


Imagen 13: Hiperboloide oblicuo.

Puede verse la construcción en: https://www.geogebra.org/m/vbxzsv6r

La más interesante es comenzar a jugar con las funciones para conseguir superficies cotidianas, por ejemplo, la de una botella de vino. En este caso hemos creado dos superficies para colocar también la base de la botella y que no se derrame el vino.

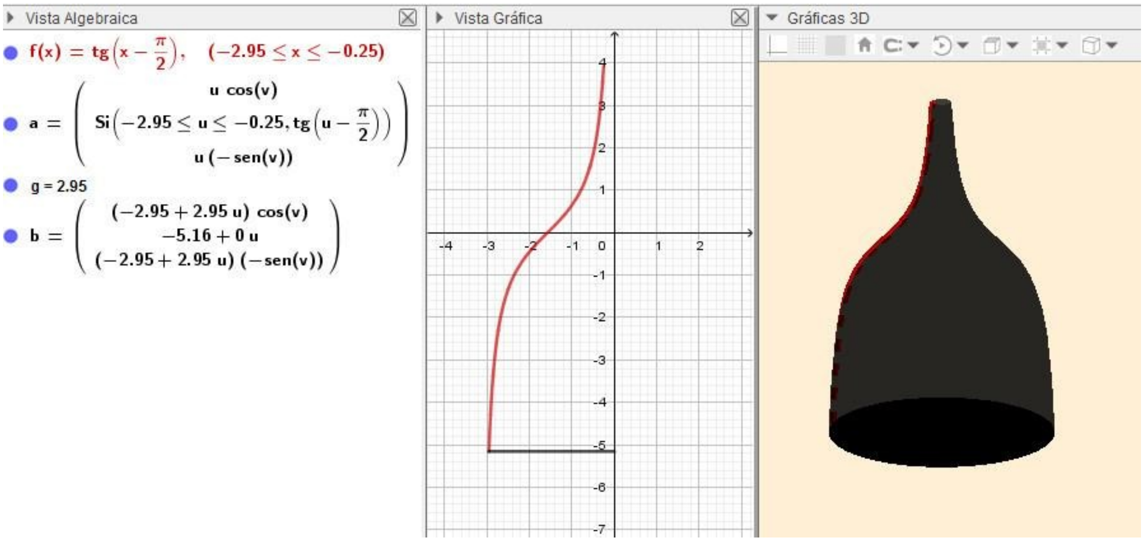


Imagen 14: Superficie con la función tangente.

Construcción en la dirección: https://www.geogebra.org/m/wnwff7te

Las funciones que se utilizan para hallar una superficie pueden ser también funciones a trozos. Basta definir la función a trozos y hacerla girar alrededor del eje que queramos.

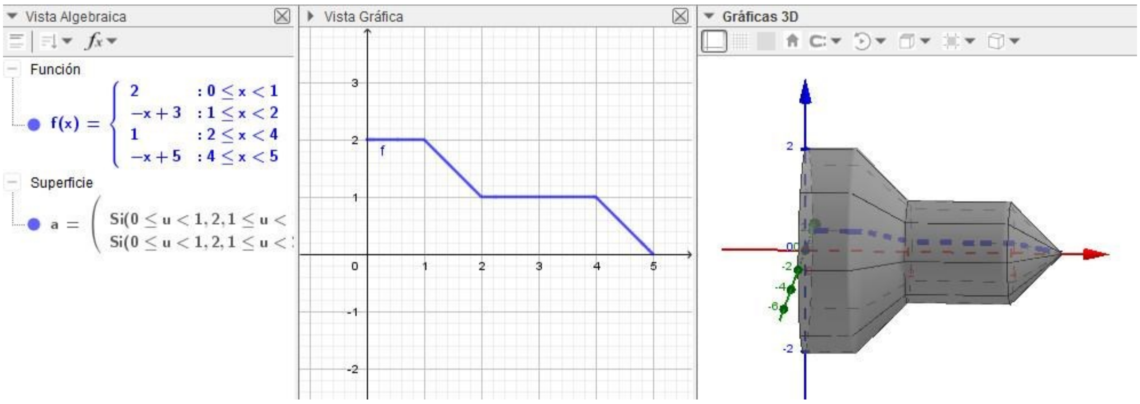


Imagen 15: Superficie con función a trozos.

Consulta la construcción en: https://www.geogebra.org/m/thg2nx2v

2.3. Poligonales y comando SPLINE.

GeoGebra permite también definir poligonales abiertas que se manejan exactamente igual que las funciones, con la ventaja de que podemos tener varios valores diferentes para el mismo valor de x, algo imposible en las funciones.

Basta definir los puntos y construir la poligonal para poder construir la superficie directamente sobre esa poligonal.

Veamos un ejemplo simple. Basta definir los puntos (0,2), (2,2), (0,0), (2,-2) y (0,-2) y construir la poligonal que une cada punto con el siguiente y hallar la superficie correspondiente al girar alrededor del eje X. Obtendremos un diábolo.

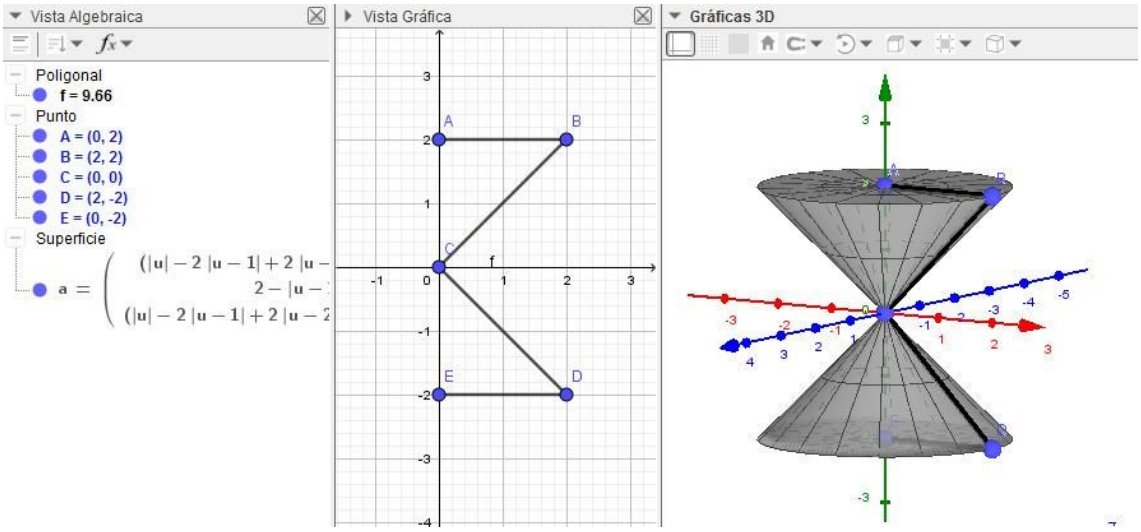


Imagen 16: Superficie desde poligonal.

Ver construcción en: https://www.geogebra.org/m/wzp5fmcw

Si en la ventana gráfica 2D movemos cualquiera de los puntos se puede observar cómo se modifica directamente la superficie obtenida adaptándose a los cambios producidos.

El comando SPLINE que se usa en varios programas de diseño, sirve para dibujar una curva que pase o se acerque a una serie de puntos. En cierta forma lo que hace es suavizar las líneas rectas que forman una poligonal. Así, las superficies que se obtienen mediante una SPLINE, redondean las aristas más duras que se forman en la figura con una poligonal.

Sería el equivalente a crear una poligonal, pero donde los puntos están unidos mediantes curvas suaves. El comando de GeoGebra tiene la siguiente sintaxis: Spline(<lista de puntos>,<grado ≥3>). El grado es un número, mayor que 3, que modifica el ajuste a los puntos. Si no incluye GeoGebra lo toma directamente como 3. Siempre tiene que ser menor que el número de puntos que forman el Spline. Si se escribe el grado, la lista de puntos debe ir, como todas las litas, entre llaves, que no hacen falta si no se escribe el grado.

En las imágenes siguientes vemos la diferencia de resultados si se utiliza con unos puntos una poligonal o una spline.

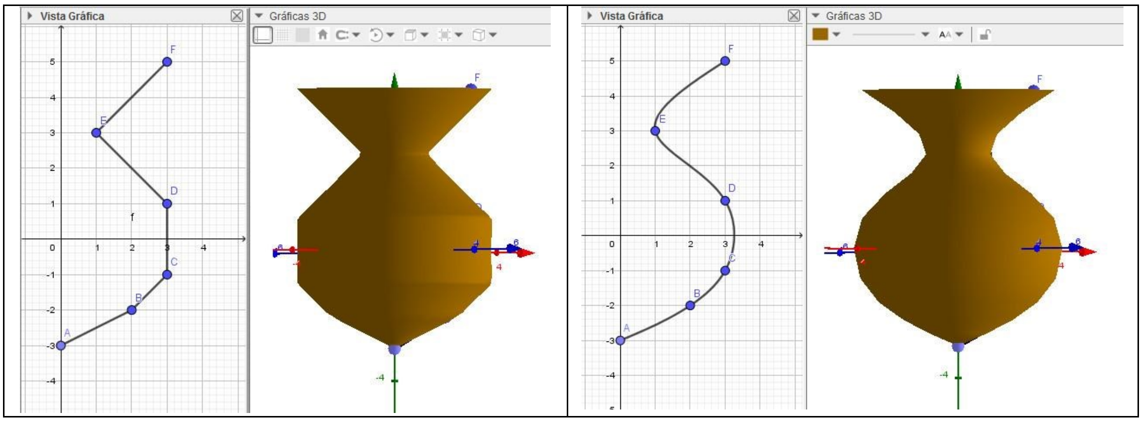


Imagen 17: Diferencia entre poligonal y spline.

Ver construcción para comparar las diferencias en:
https://www.geogebra.org/m/ry9hcezu

2.4. Superficies de una curva cualquiera.

Ya hemos visto la facilidad con que se pueden obtener superficies de elementos muy diversos. Si queremos ahondar un poco más, podemos obtener superficies de cualquier curva que dibujemos, con lo que podemos obtener resultados muy vistosos trabajando, por ejemplo, con curvas mecánicas. Lo que se debe tener presente es que previamente debemos dibujar la curva que queramos y para ello necesitaremos su expresión paramétrica y utilizar la orden que dibuja curvas planas que es la siguiente:

Curva(<Expresión>, <Expresión>,<Parámetro>,<Valor inicial>,<Valor final>)

Las dos primeras expresiones corresponden a las coordenadas paramétricas de la curva plana.

Veamos un ejemplo con la Lemniscata de Gerono, también conocida como Lemniscata de Huygens o curva en forma del ocho. Siendo r un número que nos indica la amplitud que le queremos dar a la curva, la orden que debemos introducir es la siguiente: Curva (r cos(t),r sen(t) cos(t),t,0,2π). Así obtenemos la curva siguiente.

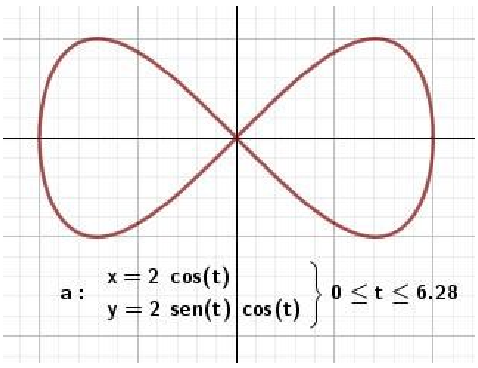


Imagen 18: Lemnistaca de Gerono.

Una vez conseguida la curva basta hallar las superficies al girar alrededor del eje X y del Y.

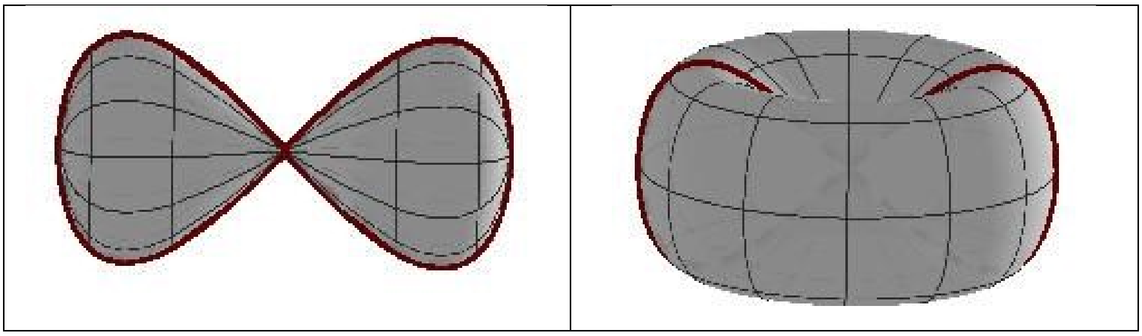


Imagen 19: Lemniscata alrededor del eje X y del eje Y.

Ver construcción en: https://www.geogebra.org/m/ktpa8gwd

2.5. Superficies artesanales.

Para acabar, veremos una opción que suele tener mucha aceptación ya que no es necesario conocer las ecuaciones ni la fórmula de ningún elemento, basta dibujarlo a mano alzada.

Lo que nosotros llamamos superficies artesanales son las que se consiguen con una línea dibujada utilizando la opción de figura a mano alzada.

Al utilizar esa opción, si la línea que dibujamos se asemeja a parte de una función conocida, el programa la ajusta automáticamente a esa función. Si no es algo conocido, siempre que respetemos la condición para función de que no haya más de un valor para cada abscisa, el programa crea una función llamada boceto(x) con la que se puede trabajar. Veamos un ejemplo en la siguiente imagen.

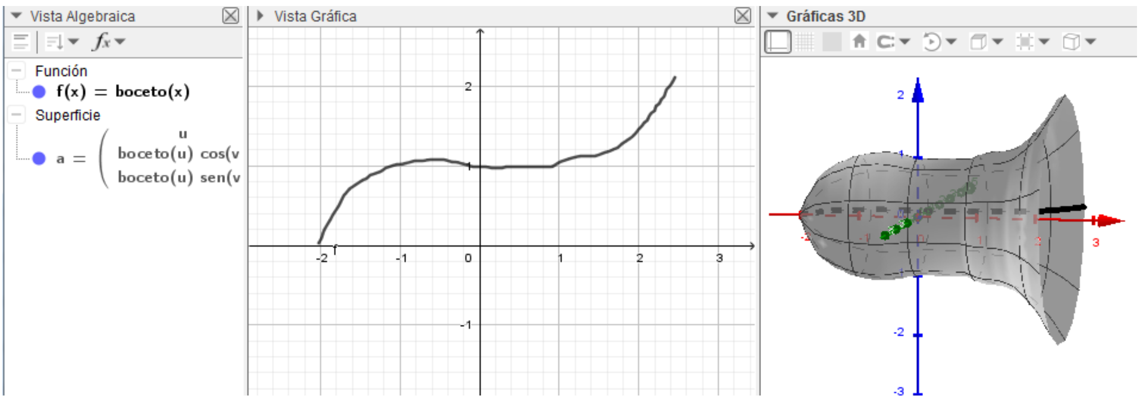


Imagen 20: Superficie "artesanal".

Construcción en la dirección: https://www.geogebra.org/m/wmacv7pn

2.6. La herramienta superficie alrededor del eje X.

Como muchas otras cosas en la vida cotidiana, hay elementos que comienzan a tomar importancia cuando se diferencian del resto y son más visibles y asequibles. Eso ocurre con los comandos de GeoGebra que gozan de mayor prestancia cuando coinciden un icono propio y ser incluidos dentro de las herramientas que figuran en uno de los desplegables de la Barra de Herramientas.

En las últimas versiones de GeoGebra 5 se ha añadido una nueva herramienta al bloque de figuras geométricas.

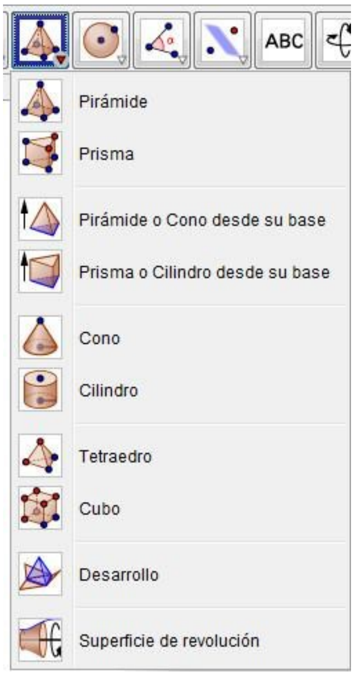


Imagen 21: Herramienta superficie.

Tras construir una curva, bien la ventana 2D o 3D, basta seleccionar la herramienta, estando en la ventana 3D, y tras pulsar en la curva la rotamos alrededor del eje X los grados que queramos. Una vez dejemos de arrastrar y soltemos el ratón se nos construirá la superficie correspondiente.

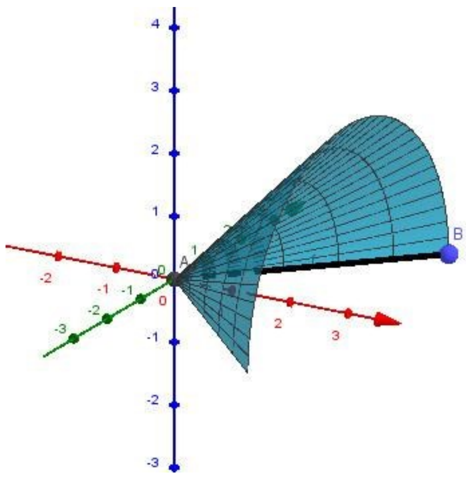


Imagen 22: Superficie alrededor del eje X.

3. Hasta aquí hemos llegado.

Hemos intentado mostrar cómo es posible que el alumnado, sin necesidad de tener un conocimiento profundo sobre la fundamentación matemática de algunas superficies, pueda construir figuras elaboradas según su imaginación. Es posible montar proyectos para estudiar superficies de revolución que se pueden encontrar en el arte y en los entornos cotidianos de nuestras ciudades e incluso en nuestras casas. La versatilidad del programa permite que, con unas pocas órdenes, el alumnado pueda desarrollar su inventiva para obtener resultados imprevistos.

Pero las posibilidades de este tema no acaban aquí. El mundo de las superficies no termina en las de revolución. Existen muchas opciones interesantes y atractivas: estudiar superficies regladas, utilizar órdenes para representar directamente funciones de tres dimensiones en forma implícita o explícita, colocar superficies sobre elementos impensables, como una esfera, estudiar las superficies de Bezier, clasificar y generar cúpulas, etc…

Bibliografía

Superficie de Revolución. (20 de noviembre de 2020). En *Wikipedia*. https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_de_revoluci%C3%B3n

Comando Superficie. Manual oficial de GeoGebra. Recuperado el 28 de abril de 2021, de https://wiki.geogebra.org/es/Comando_Superficie

Ancochea, B., Arranz, J.M., Muñoz, J. (2019). Superficies. 19 JAEM. https://www.geogebra.org/m/gqgdmyhd

Bernat Ancochea Millet. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad Autónoma de Barcelona. Master en Investigación en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Barcelona. Profesor jubilado de Matemáticas. Presidente de la ACG (Associació Catalana de GeoGebra) y de la FEEMCAT (Federación de Entidades de Enseñantes de Matemáticas de Cataluña). HYPERLINK "mailto:bancoche@gmail.com" bancoche@gmail.com

José Manuel Arranz San José. Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Salamanca. Profesor de matemáticas en el IES Álvaro Mendaña de Ponferrada. Miembro de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzman”. Miembro del Instituto GeoGebra de Castilla y León. Colaborador en los recursos informáticos con GeoGebra para la editorial SM. Profesor en el Proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATático) de Castilla y León. HYPERLINK "mailto:josemarranz@gmail.com" josemarranz@gmail.com

José Muñoz Santonja. Licenciado en Ciencias Exactas por la Universidad de Sevilla. Miembro fundador de la Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas THALES. Miembro del Instituto de GeoGebra de Andalucía. Profesor en el Proyecto ESTALMAT (EStímulo del TALento MATático) de Andalucía. Perteneciente a la RED DIMA (Divulgación Matemática). HYPERLINK "mailto:josemunozsantonja@gmail.com” josemunozsantonja@gmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-9

Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas

Uldarico Malaspina Jurado

1. Problema

Silvia dibuja un triángulo cuyos vértices están en el borde de una región rectangular de 7 cm de largo y 4 cm de ancho. ¿Es verdad que cualquiera que sea tal triángulo que dibuje Silvia, siempre es posible dibujar otro triángulo con la misma área y con vértices también en el borde de la región rectangular?[1]

Este problema fue creado con base en trabajos colaborativos, realizados en un taller sobre creación y resolución de problemas, desarrollado virtualmente en la región Tumbes, como parte de un programa de formación docente de la Academia Nacional de Ciencias del Perú.

Presento el problema, una solución y algunas variaciones del mismo. La intención es estimular el pensamiento geométrico – en el entorno matemático de las áreas y perímetros de regiones planas – más allá de aplicaciones mecánicas de fórmulas. El problema tiene su origen en las indagaciones didáctico-matemáticas realizadas en un taller con 40 profesores de primaria. En talleres como este, se sigue una secuencia que parte de una situación y se desarrollan creando actividades, preguntas y problemas, que finalmente se discuten.

Antes de detenerme en el problema, y como una manera de compartir la experiencia didáctica desarrollada con los profesores, a continuación, mostraré y comentaré detalles de la secuencia seguida en el taller. Por una parte, mostraré los pedidos hechos a los profesores participantes, mediante una ficha de trabajo, entregada con anterioridad a la sesión de trabajo, para un primer avance individual; y por otra, mostraré algunas de las actividades, preguntas y problemas creados colaborativamente por los participantes y discutidos en los trabajos grupales o en la puesta en común en la reunión plenaria, con participación de todos los grupos. El taller se desarrolló virtualmente, usando una plataforma informática, y en el equipo docente me acompañaron los colegas Maritza León, Enrique Pïñeyro, Max Ponce y

[1] Por simplicidad, usaré expresiones como "área del triángulo", "área del rectángulo", etc., pero debe entenderse que me estoy refiriendo al área de la región triangular, al área de la región rectangular, etc.

Carlos Torres, con valiosas orientaciones a los grupos de participantes, aportes en la reunión plenaria y manejo de la plataforma.

Veremos cómo, partiendo de una situación sencilla, los profesores de primaria crean problemas que en las puestas en común se enriquecen didáctica y matemáticamente, mediante indagaciones y la creación de nuevos problemas. Consideramos que estas experiencias favorecen el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de los docentes.

La situación de la que se partió en el taller, fue la siguiente.

2. Situación

El profesor Arturo desea reforzar en sus estudiantes de primaria sus conocimientos sobre áreas de regiones planas y el uso de las coordenadas de puntos en el plano. Para ello dispone de una figura como la siguiente

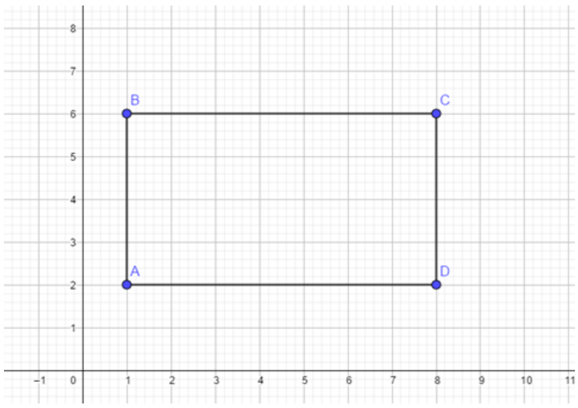


Figura 1

Arturo quiere pedir a sus estudiantes que dibujen algunas regiones planas contenidas en la región rectangular ABCD y que inventen y resuelvan algunos problemas relacionados con sus áreas o sus perímetros. Antes de hacerlo, Arturo piensa en posibles actividades y posibles problemas para sus estudiantes y así tener mejores elementos para orientarlos cuando trabaje con ellos.

Conociendo esta situación, los profesores participantes del taller debían crear actividades, preguntas y problemas, pensando en apoyar al profesor Arturo, según lo solicitado en la ficha.

3. Proponer actividades

Escribir brevemente una o más actividades, que ustedes, como grupo, sugerirían a estudiantes de primaria (tengan en cuenta el grado que elijan), para afianzar o profundizar sus conocimientos sobre áreas de figuras planas (también podrían incluir perímetros) o el uso de coordenadas de puntos en el plano. Pueden usar una hoja cuadriculada para esbozar sus actividades, un geoplano virtual (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/) o usando GeoGebra.

Como una orientación, en la ficha pusimos un ejemplo de tales actividades:

- Dibuja dos triángulos de modo que, en cada uno, dos de sus vértices sean los vértices del rectángulo ABCD y escribe las coordenadas de los vértices de los triángulos.

Los participantes entendieron y realizaron la actividad sugerida y propusieron otras, como las siguientes:

Actividad 1. Dibuja una figura geométrica dentro del rectángulo ABCD y escribe las coordenadas de sus vértices.

Actividad 2. Dibuja dos triángulos contenidos en el rectángulo ABCD, siendo dos de sus vértices los puntos A y D y su tercer vértice un punto cualquiera del lado BC.

Actividad 3. Marca 5 puntos dentro del rectángulo, escribe sus coordenadas y luego únelos para formar una figura geométrica.

Actividad 4. Dibuja en el rectángulo ABCD dos triángulos que tengan la misma área.

Actividad 5. Dibuja dos triángulos isósceles, con vértices en el rectángulo ABCD

5. Formular preguntas

Escribir una o más preguntas que ustedes harían a los estudiantes, o se plantearían ustedes mismos(as), relacionadas con la(s) actividad(es) que propusieron.

También, como una orientación, en la ficha dimos dos ejemplos de preguntas, relacionadas con la actividad que dimos como ejemplo:

a) ¿Cómo podrías hallar el área de uno de los triángulos que dibujaste, usando dos maneras distintas de hacerlo?

b) ¿Es verdad que el perímetro de cada uno de los triángulos que dibujaste es menor que el perímetro del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Para responder la pregunta (a) no percibieron con facilidad la posibilidad de hallar el área del triángulo dibujado, empleando diferencia de áreas. Así, en un caso como el de la Figura 2, hallaron fácilmente el área del triángulo AED multiplicando la longitud de la base AD (7 unidades) por la longitud de la altura, que coincide con el ancho del rectángulo (4 unidades) y dividiendo por 2. Así, el área del triángulo AED es 14 u^2. Tomó algún tiempo a los integrantes del grupo, advertir que tal área también puede encontrarse hallando el área del rectángulo ABCD y restando la suma de las áreas de los triángulos rectángulos ABE y ECD, como se muestra a continuación:

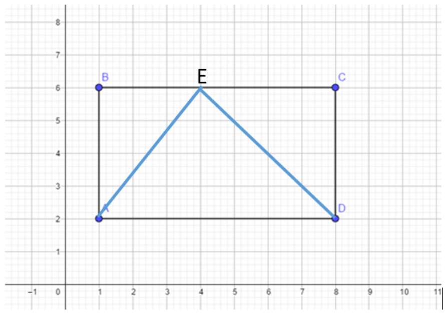


Figura 2

Área del rectángulo ABCD = 28 u^2

Área del triángulo ABE = 6 u^2

Área del triángulo ECD = 8 u^2.

En consecuencia, Área del triángulo AED = 28 u^2 – (6 u^2 + 8 u^2) = 14 u^2 .

Para responder a la pregunta (b) no hubo dificultad para que lo hagan afirmativamente, pero sí para encontrar una justificación más allá de lo evidente. Se les sugirió usar el hecho que en todo triángulo, siempre un lado tiene longitud menor que la suma de las longitudes de los otros lados. No se entró en formalizaciones, pero quedó claro intuitivamente, usando figuras específicas. (El lector puede hacerlo, usando, por ejemplo, el triángulo AED de la Figura 2)

Los participantes propusieron algunas preguntas como las siguientes, que corresponden a distintos grupos de trabajo:

Pregunta 1. ¿Es verdad que para hallar el área del rectángulo ABCD siempre se necesitará multiplicar las longitudes de la base y la altura? ¿o habrá otra manera de hallarla?

Pregunta 2. ¿Cuántos rectángulos podemos contar dentro del rectángulo ABCD?

Pregunta 3. ¿Cómo puedes hallar el área de cada figura geométrica que has dibujado en el rectángulo ABCD?

Pregunta 4. ¿Los triángulos que dibujaste en la Actividad 2 tienen la misma área?

Pregunta 5. ¿Cómo sabes que los triángulos que dibujaste son isósceles? (esta pregunta se refiere a la Actividad 5, propuesta por el mismo grupo)

Pregunta 6. Si los triángulos que dibujaste son de igual área, ¿serán también de igual perímetro?

Observemos que las preguntas, relacionadas con las actividades propuestas, son una forma de indagar, de suscitar discusiones y de ir creando problemas. Cabe mencionar que la Pregunta 1 pretendía inducir a los estudiantes a contar el número de cuadrados unitarios que encierra el rectángulo ABCD. La Pregunta 2 se derivó de la primera y llevó a la aclaración que todo cuadrado es también un rectángulo; así, ya se tenían, de partida, 28 rectángulos conformados, cada uno, por un solo cuadrado unitario. Una profesora participante acotó que una manera de contar más rectángulos, es considerando los conformados por 2 cuadrados unitarios, los conformados por 3 cuadrados unitarios, etc.

La Pregunta 3, fue motivada por la Actividad 3 y con la intención de inducir a la obtención de áreas de figuras que no son triángulos, usando la diferencia entre el área del rectángulo ABCD y la suma de las áreas de las regiones que quedan en el complemento (respecto a ABCD) de la figura dibujada. También estuvo presente la idea de contar los cuadrados unitarios dentro de la región, tratando de “componer” los “cuadrados partidos”. La Actividad 3 induce a dibujar un pentágono (no necesariamente convexo) en la región rectangular y la Pregunta 3 se refiere al área de tal pentágono.

6. Crear un problema

A partir de la situación dada, de las actividades y de las preguntas hechas, crear un problema para los estudiantes de primaria y resolverlo.

Los participantes, en sus grupos de trabajo, crearon algunos problemas para sus estudiantes. Enunciaré los problemas creados por tres grupos. No son de mayor complejidad, pero los comentarios y sugerencias manifestados en la puesta en común, pusieron en evidencia la riqueza didáctica y matemática que se pueden derivar de los problemas creados.

Problema 1. Halla las áreas de los triángulos AED y AFD de la figura

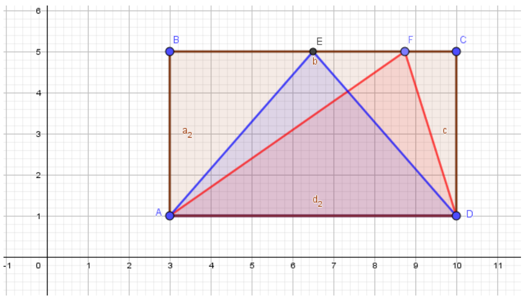


Figura 3

Problema 2. Halla el área de uno de los triángulos isósceles que dibujaste, contenido en el rectángulo ABCD.

El grupo presentó el caso que se muestra en la figura siguiente

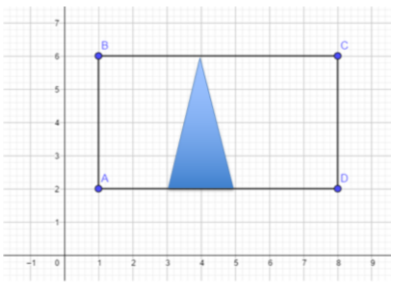


Figura 4

Problema 3. Halla el área de las regiones O, P y M que se muestran en la figura.

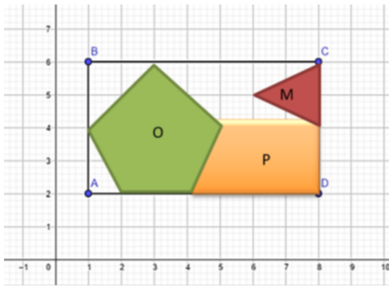


Figura 5

Como ya lo había adelantado, una fase muy importante de estos talleres es el análisis didáctico y matemático de los trabajos grupales, cuando estos se discuten internamente en cada grupo y cuando se exponen ante el pleno, que es la ocasión para hacer comentarios y sugerencias de los participantes integrantes de otros grupos y de los profesores monitores del equipo docente. Como consecuencia de este enriquecimiento matemático y didáctico, se crean también nuevos problemas a partir de los problemas expuestos, como veremos a continuación.:

Considerando la Actividad 2, la Pregunta 4 y el Problema 1, un profesor ilustró, usando GeoGebra, que todos los triángulos con vértices en A y D y el tercer vértice en el lado BC del rectángulo, tienen la misma área.

Algunas variaciones a partir del Problema 1:

- Examinar si existen triángulos rectángulos que tienen la misma área que el triángulo AED de la Figura 3.
- Examinar si todos los triángulos que tienen la misma área que el triángulo AED tienen también el mismo perímetro.

Para niños de primaria, el segundo problema tiene la complejidad de la aplicación del teorema de Pitágoras y del manejo de números irracionales, pero es fuente de indagación y análisis, que puede hacerse usando reglas o calculadoras, o aun haciendo marcas en el borde de una hoja de papel. Es importante advertir que "al desplazarse" el vértice E en el lado BC del rectángulo, uno de los lados del triángulo crece y el otro decrece. Notar que, al resolver el primer problema, se encuentra un caso interesante para hacer la comparación con el perímetro del triángulo AED.

En relación a los Problemas 2 y 3, los participantes hicieron indagaciones interesantes. Destaco la siguiente, a partir del Problema 2:

- ¿Cuántos triángulos isósceles de la misma área que el mostrado en la Figura 4 se pueden construir en el rectángulo ABCD?

Una primera idea ante esta variación del Problema 2, es usar traslaciones del triángulo mostrado en la Figura 4 y percibir intuitivamente que son infinitos los triángulos isósceles con la misma área que el mostrado. Sin embargo, la pregunta permite ir más allá y construir triángulos isósceles, de la misma área que el mostrado en la Figura 4, que no necesariamente sean congruentes con tal triángulo. Así, estamos ante tareas de construcción de triángulos isósceles, con área dada.

Algunas variaciones en relación al Problema 3:

- Halla el área de cada región mostrada, usando por lo menos dos formas diferentes.
- Halla el perímetro de cada una de las regiones mostradas.

Esta última variación tiene también la complejidad de usar el teorema de Pitágoras y números irracionales, que suele no trabajarse en educación primaria.

La propuesta en un grupo, que no se concretó en problema específico expuesto, fue modificar las formas de las regiones planas mostradas, de modo que sean como el plano de viviendas u otras construcciones sobre un terreno rectangular de 70 metros de largo por 40 metros de ancho, y encontrar las áreas de las partes mostradas en el plano de la construcción. Los participantes que hicieron esta propuesta, enfatizaron en la importancia de vincular los aprendizajes matemáticos con aspectos de la realidad, mediante problemas de contexto extra matemático.

Los problemas creados en el taller, tanto en los grupos como haciendo comentarios y sugerencias en el plenario, sobre todo los relacionados a los problemas 1 y 2, me llevaron a formular el problema con el que inicié este artículo, cuyo enunciado lo repito:

Silvia dibuja un triángulo cuyos vértices están en el borde de una región rectangular de 7 cm de largo y 4 cm de ancho. ¿Es verdad que cualquiera que sea tal triángulo que dibuje Silvia, siempre es posible dibujar otro triángulo con la misma área y con vértices también en el borde de la región rectangular?

No es difícil responder afirmativamente para casos como el que se muestra en la Figura 3, pues los triángulos AED y AFD tienen la misma área por tener ambos una base coincidente con el largo del rectángulo y la altura correspondiente coincidente con el ancho del rectángulo, pero en este problema se pregunta por cualquier triángulo cuyos vértices están en el borde del rectángulo, lo cual incluye casos como el siguiente

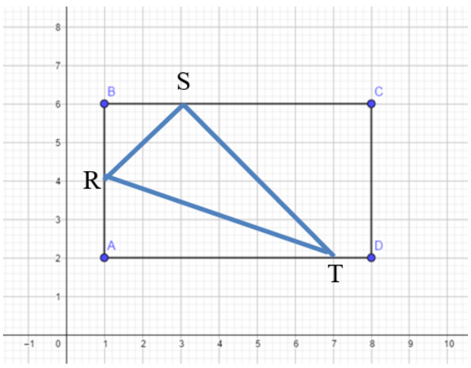


Figura 6

Ciertamente, hallar el área del triángulo RST no es tan sencillo como hallar el área de los triángulos de la Figura 3, y esto lleva a cuestionarse si para responder a la pregunta del problema, considerando el caso de la Figura 6, es necesario hallar el área del triángulo RST. Se llega a una respuesta negativa, observando que bastará construir otro triángulo cuyos lados tengan las mismas longitudes que los lados del triángulo RST. ¿Cómo lograrlo? La situación es muy propicia para que emerja o se use la construcción de un triángulo simétrico al triángulo RST, teniendo como eje de simetría cualquiera de los dos ejes de simetría que tiene el rectángulo ABCD (el vertical y el horizontal). Además, es de gran ayuda tener las figuras en una malla cuadriculada del plano cartesiano, aunque se podría prescindir de ella. En las Figuras 7 y 8, muestro los triángulos LMN y RFG que son simétricos al triángulo RST dado, respecto a los ejes de simetría del rectángulo, vertical y horizontal respectivamente, indicados con líneas de color negro.

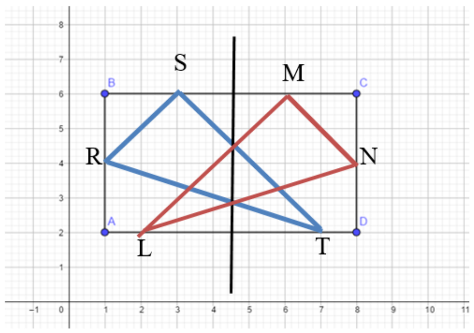


Figura 7

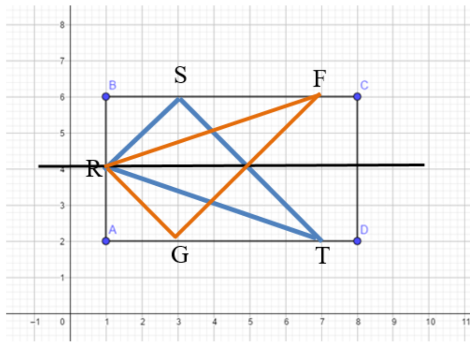


Figura 8

Cabe destacar que en este razonamiento están implícitas algunas proposiciones, como “los triángulos simétricos entre sí son congruentes” y “los triángulos congruentes entre sí tienen la misma área”. Proposiciones que pueden entenderse intuitivamente desde la educación primaria y demostrarse en la secundaria, según el grado en el que se encuentren los estudiantes. Además, el razonamiento sirve para considerar casos con un mayor grado de generalidad, al crear nuevos problemas a partir del problema dado, usando la pregunta *¿Qué pasaría si…?* Por ejemplo:

- ¿Qué pasaría si los vértices del triángulo que dibuja Silvia no están en los bordes del rectángulo?
- ¿Qué pasaría si consideramos otras figuras geométricas?

También, yendo más allá de la simetría usada, podemos preguntarnos

- ¿Qué pasaría si se pide que el nuevo triángulo tenga la misma área que el que dibujó Silvia, pero no el mismo perímetro?

Son nuevos problemas, en la perspectiva de estimular el pensamiento geométrico, más allá de cálculos aritméticos.

Comentarios

En los talleres que venimos desarrollando con profesores en servicio, partimos de una situación configurada con el propósito de trabajar integradamente determinado(s) contenido(s) matemáticos para un nivel académico específico (en este caso, áreas de figuras planas, perímetros y el uso de coordenadas cartesianas, en educación primaria). Pedimos a los profesores participantes que propongan actividades y preguntas relacionadas con la situación y que creen y resuelvan problemas suscitados en este trabajo. Hay una fase individual, otra colaborativa y una de indagaciones, comentarios y sugerencias en la sesión plenaria.

Las indagaciones que se hacen pueden llevar a problemas que requieren el uso de conocimientos matemáticos que van más allá de lo que se trata con los estudiantes en el nivel educativo específico, pero contribuyen a la formación matemática de los profesores, que deben tener una visión más amplia de los contenidos matemáticos que enseñan. Es muy importante el papel de los profesores monitores que integran el equipo docente.

Un aspecto significativo, destacado por los participantes en los talleres, es que esta forma de trabajo les hace vivir experiencias de aprendizaje reflexivo y creativo, que van más allá de la aplicación mecánica de fórmulas, y que se pueden replicar, con las adaptaciones del caso, en su desempeño docente.

Otro aspecto muy importante, observado en los talleres, es las emociones positivas que se generan en los participantes, tanto en la fase creativa como en los comentarios y sugerencias en el plenario. Son experiencias que contribuyen a tener muy en cuenta los aspectos emocionales, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los problemas creados y comentados en este taller son de contexto intra matemático, lo cual no significa que no se dé importancia a los de contexto extra matemático. Ya fue mencionado por un grupo de profesores, al comentar el Problema 3. Cabe destacar que es muy importante ser cuidadosos al crear tales problemas, para que sean relevantes y no se perciban como una contextualización forzada. Ciertamente, cuanto mayor sea la claridad conceptual en matemáticas, mejores problemas se podrán crear.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 61. Abril 2021

Páginas 1-2

GeoGebra en UNIÓN

Comenzamos con ilusión esta nueva sección dedicada a GeoGebra dentro de la Revista Unión, en la que he sido invitado a colaborar.

¿Por qué GeoGebra? GeoGebra es el software libre de Matemáticas, multiplataforma y gratuito, que siempre quisimos tener. Está al alcance de todo el profesorado y alumnado de Iberoamérica y tiene detrás a una gran comunidad de autores que ayudan y comparten.

Queremos publicar en esta sección artículos desarrollados por un profesor/investigador invitado, que presentará manuscritos con diferentes perspectivas:

- Investigaciones realizadas sobre el impacto educativo del uso de GeoGebra en las aulas. Es necesario avanzar en esta línea para favorecer su inclusión en las aulas como un elemento de mejora en la Educación Matemática.
- Experiencias de aula con GeoGebra: modelos de uso con éxito en las aulas de diferentes niveles educativos. Necesitamos responder a la preguntas ¿cómo introducir GeoGebra en mi aula y para qué? ¿Cómo hacer que mis alumnos hagan Matemáticas con GeoGebra?
- Trabajos realizados con GeoGebra que nos sirvan a todos para aprender su manejo.

En esta oportunidad Agustín Carrillo de Albornoz Torres relata el desarrollo y el éxito que ha logrado en estos últimos años el Club GeoGebra Iberoamericano.

Novedades

Una buena noticia estos días es que, por fin, ha llegado la posibilidad a GeoGebra de construir, con un comando, un diagrama estadístico de sectores o gráfico circular. Ya era muy sencillo hacer Diagramas de Barras, Histogramas, Tallo y Hojas, Caja y Bigotes usando comandos. Y nos llega ahora esta posibilidad.

Para ello solo hay que definir una lista con las frecuencias y llamar al comando.

Os ponemos un ejemplo:

Escribimos en la Entrada está lista: l1={1,3,5,7}. Escribimos GráficoCircular(l1) y obtenemos esta bonita imagen.

Se puede modificar el punto central del Diagrama, el radio y los colores de los sectores. Se puede combinar su uso con la hoja de cálculo y hacer entonces la lista de frecuencias fácilmente modificable, incluso haciendo visible la tabla. Pueden ver un ejemplo aquí https://www.geogebra.org/m/nqzjsma7.

NOTA: este comando sólo está disponible en las versiones "nuevas" de GeoGebra. No lo busques en GeoGebra 5 porque no está.

También queremos compartir aquí noticias y convocatorias que puedan ser de interés sobre GeoGebra y su uso.

- Está abierto el plazo para participar en el concurso de Arte con GeoGebra del Instituto GeoGebra Maslama al-Mayriti de Madrid (hasta el 23 de mayo) https://geogebra.smpm.es/index.php/19-concursos/124-iv-concurso-arte-con-geogebra-2021
- VI Concurso de Vídeos con GeoGebra del Instituto GeoGebra de Canarias http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/45-geogebra/374-iii-concurso-de-videos-matematicos-con-geogebra-4
- Concurso FotoGebra. Este concurso se presentó el Día Internacional de las Matemáticas y está abierto hasta el 15 de octubre de 2021. Aquí tienen el vídeo de la presentación: https://youtu.be/3uXy1l7xp-w. Toda la información en https://www.fotogebra.org/

Esperamos que los disfrutéis.

Alejandro Gallardo Lozano

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

ISSN: 1815-0640
Año XVII- Número 61- Abril 2021
Páginas 01-08

Club GeoGebra Iberoamericano

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Resumen	El Club GeoGebra Iberoamericano surgió hace ocho años por iniciativa de la Organización de Estados Iberoamericanos como una acción más para promover el uso de este software en la enseñanza de las matemáticas. Hasta ahora, en la actualidad nos encontramos en la séptima edición, han participado más de diez mil docentes, lo que sin duda consideramos todo un éxito. La evolución del club ha sido continua, incorporando nuevas opciones y modalidades, siempre buscando ofrecer materiales de apoyo al profesorado, fomentando la creación de recursos basados en GeoGebra por parte de los participantes y sobre todo, promoviendo la cooperación entre docentes, de manera que todos ayudemos a cambiar y a mejorar la forma de enseñar matemáticas. **Palabras clave**: GeoGebra, recursos, cooperación
Abstract	The Ibero-American GeoGebra Club emerged eight years ago at the initiative of the Organization of Ibero-American States as one more action to promote the use of this software in the teaching of mathematics. So far, we are currently in the seventh edition, more than ten thousand teachers have participated, which without a doubt we consider a success. The evolution of the club has been continuous, incorporating new options and modalities, always seeking to offer support materials to teachers, promoting the creation of resources based on GeoGebra by the participants and above all, promoting cooperation between teachers, so that we help change the way you teach math. **Keywords**: GeoGebra, resources, cooperation
Resumo	O Clube Ibero-americano do GeoGebra surgiu há oito anos por iniciativa da Organização dos Estados Ibero-americanos como mais uma ação para promover a utilização deste software no ensino da matemática. Até agora, estamos na sétima edição, já participaram mais de dez mil professores, o que sem dúvida consideramos um sucesso. A evolução do clube tem sido contínua, incorporando novas opções e modalidades, buscando sempre oferecer materiais de apoio aos professores, promovendo a criação de recursos baseados no GeoGebra pelos participantes e acima de tudo, promovendo a cooperação entre os professores, para que todos Vamos ajudar a mudar e melhorar a forma como ensinamos matemática. Palavras-chave: GeoGebra, recursos, cooperação

1. Introducción

Después de un año en blanco, se ha podido convocar una nueva edición del Club GeoGebra Iberoamericano, para retomar las propuestas que a través de esta iniciativa planteamos a los docentes con el objetivo de promover el uso de este software para facilitar su incorporación como recurso en el aula de manera que haga cambiar la metodología de la enseñanza de las matemáticas.

Con la VII edición iniciada en este año 2021, se han superado los inconvenientes que impidieron la continuidad del club durante el pasado año. Aunque el club surgió en el seno de la Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), como una actividad más de las muchas que esta institución ha venido realizando en los últimos años, convencida de las posibilidades que GeoGebra ofrece, un cambio en su política ha hecho que el Club GeoGebra Iberoamericano haya pasado a ser una actividad convocada por la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), al igual que ha ocurrido con el Día GeoGebra Iberoamericano, actividad de formación iniciada en la misma época que el club.

Gracias al apoyo de la Universidad de Córdoba (España) se ha dado continuidad al club que también ha contado de nuevo con la colaboración técnica de la OEI, cuya plataforma Moodle está sirviendo de soporte.

2. La historia del Club

En las siete ediciones que hasta el momento llevamos del club, su evolución ha sido constante, ha ido cambiando atendiendo a las sugerencias y análisis realizado tras cada una de las ediciones.

En las primeras ediciones el club estaba dirigido al profesorado que participaba con su alumnado, hecho que resultó complicado ya que a veces resultaba difícil registrar al alumnado, y en otras las dificultades técnicas hacían imposible cumplir con las propuestas y tareas planteadas.

Este modelo a pesar de las complicaciones, a la larga resulto un éxito como lo quedó demostrado cuando en distintos países se crearon competiciones o encuentros de club GeoGebra, por lo que podemos considerar que nuestra iniciativa cumplió su objetivo que no era otro que llevarlo al aula concienciando a los docentes y a sus alumnos de las ventajas que conlleva el uso de este programa para hacer otras cosas en matemáticas.

Más adelante, ya solo con el profesorado, se plantearon dos niveles educativos. Por un lado, un nivel básico dirigido al profesorado de Primaria y un segundo nivel cuyos destinatarios era el profesorado de Secundaria, Bachillerato y Educación Superior. Esto suponía que se creaban materiales distintos para cada uno de los dos niveles.

El siguiente avance en la dinámica del club consistió en ofrecer los materiales tanto en español como en portugués, gracias a la traducción que siempre ha realizado Celina Abar (Brasil).

Un nuevo cambio más se produjo en las dos últimas ediciones, la incorporación de dos modalidades de participación. Una modalidad de formación pensada para animar a los menos conocedores del programa para iniciarse o mejorar su uso, y otra denominada experimentación dirigida a aquellos docentes que ya utilizan GeoGebra en su aula, de manera que puedan crear y sobre todo compartir materiales sobre su práctica con otros participantes.

En la actual edición (2021) mantenemos las dos modalidades: formación y experimentación; continúan los dos niveles: Primaria y Secundaria, publicando todos los materiales en español y portugués que son los dos idiomas establecidos en la FISEM.

3. La séptima edición del club

Las características de la edición actual del club han quedado descritas en el apartado anterior, por lo que solo nos quedar describir su funcionamiento.

Desde su inicio el trabajo se propone por meses, de manera que cada mes se presenta un tema de trabajo en cada una de las modalidades, diferenciando para Primaria y Secundaria, los temas en formación.

En la modalidad de formación se proponen unos retos para que los participantes puedan demostrar los conocimientos adquiridos, retos que deben enviar al equipo docente para su evaluación, mientras que en la modalidad de experimentación se expone un tema cada mes para que los participantes elaboren una propuesta, materiales y puedan llevarla al aula, describiendo los resultados y sobre los cambios producidos por el uso de GeoGebra frente a la metodología tradicional.

En la edición actual también se ha producido un cambio en los retos presentados en la modalidad de formación, buscando que haya más interacción entre los participantes y el equipo docente, por lo que los retos en lugar de proponerse por meses, se publican por quincenas, lo que hace que los participantes tengan que cumplir con dos entregas, una por quincena.

Sus trabajos son enviados al equipo docente que los evalúa indicando los comentarios necesarios para, en caso de ser necesario, se puedan volver a enviar para una nueva evaluación. Los reenvíos se pueden hacer tantas veces como sea necesario, siempre dentro de los plazos establecidos.

El interés por esta actividad queda patente por las más de mil doscientas inscripciones que hicieron que en su momento se tuviera que cerrar el plazo de inscripción.

No quiero olvidarme del equipo docente del club que ha sido parte del éxito de esta actividad. El trabajo realizado por Norma Cotic (Argentina), José María Chacón e Inmaculada Llamas (España) han contribuido sin duda a que el club haya seguido avanzando y creciendo.

4. Los retos propuestos

En cada uno de los temas de trabajo del club, como hemos indicado se proponen varios retos, de los que los participantes tienen que enviar uno de ellos para su evaluación en cada quincena por el equipo docente. En la primera entrega del club, en la modalidad de formación el tema ha sido “GeoGebra. Aspectos generales”, siendo uno de los retos el que desarrollamos a continuación.

El reto propuesto es el siguiente:

“A partir de un rectángulo cualquiera, previamente creado de manera que al mover sus elementos siga manteniendo la condición de rectángulo, construye un triángulo cuya área sea igual a la del rectángulo inicial”.

La construcción del rectángulo debía realizarse de manera que, al mover los vértices, el polígono mantuviera su condición, con lo que se pretendía que los participantes que se iniciaban en el uso de GeoGebra pudieran comprender el significado del concepto de geometría dinámica.

Una vez construido el rectángulo, bastaría con encontrar la relación que debía cumplir el triángulo para poder construirlo de manera que tuviera la misma área que el rectángulo inicial.

La relación no es complicada, ya que, si el rectángulo tiene una base de longitud *a* y una altura de longitud *b*, su área será *A*=*a.b*, por lo que hay que encontrar un triángulo que cumpla que su base por la altura dividida por dos sea igual al valor anterior.

$$A = \frac{base.\,altura}{2} = a.b$$

Por lo que si consideramos un triángulo cuya base sea 2 a y altura b; o altura a y base 2 b, se habrá logrado el triángulo pedido.

$$A = \frac{2a.b}{2} = \frac{a.2b}{2} = a.b$$

Ya solo queda abrir GeoGebra para construir el triángulo con las condiciones anteriores a partir de un rectángulo inicial, previamente construido.

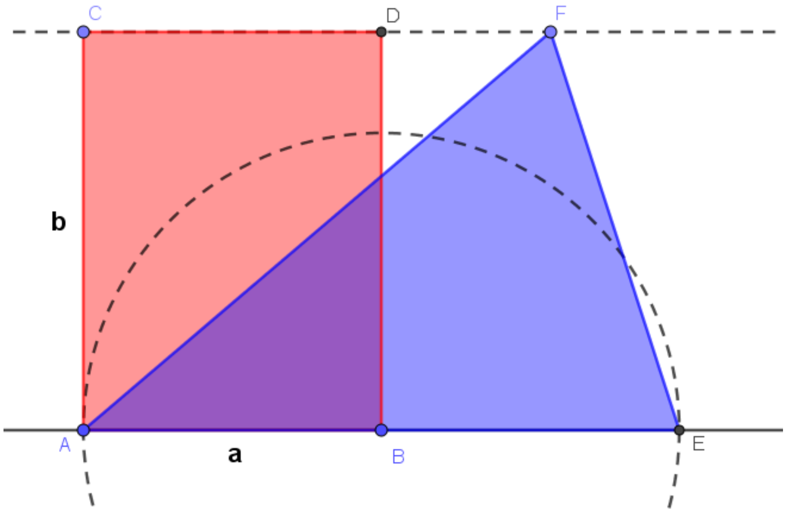


Figura 1. Triángulo de doble base.

El proceso realizado ha consistido en trazar la circunferencia con centro en B y radio igual a la base del rectángulo ABCD, dibujando previamente la recta que contiene a la base, para determinar el punto E que evidentemente cumple que AE = 2 AB, ya que AE es el diámetro de la circunferencia, mientras que AB es su radio.

Para mantener la altura del rectángulo se ha trazado la recta que contiene al lado CD, que será la recta en la que se encontrará el tercer vértice del triángulo buscado. Podemos plantearnos qué punto de dicha recta será el tercer vértice. La respuesta es cualquiera ya que dos triángulos que tengan la misma base y la misma altura siempre tendrán la misma área, por lo que solo queda situar un punto cualquiera F en dicha recta para construir el triángulo AEF que tiene la misma área que el rectángulo.

Como ocurre en GeoGebra, cualquier construcción por muy sencilla siempre ofrece la posibilidad de plantear nuevas cuestiones o de trabajar conceptos como en el caso anterior sobre el área de todos los triángulos de la misma base y altura.

De manera similar se construirá el triángulo que mantenga la misma base del rectángulo, pero con doble altura, tal y como aparece en la imagen siguiente.

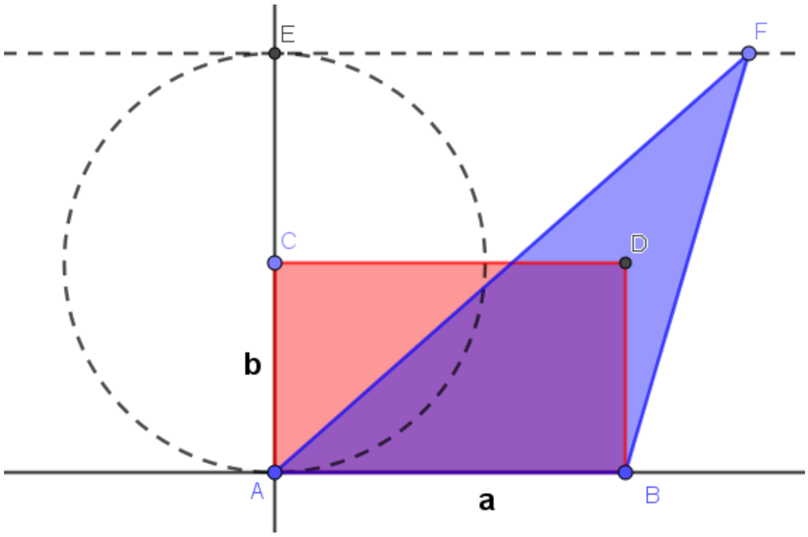


Figura 2. Triángulo de doble altura.

Para terminar, exponemos una nueva construcción basada en la anterior, en la que se mantiene la base del rectángulo como base del triángulo y se construye un segmento correspondiente al doble de la altura para que el área de las dos figuras sea igual.

En uno de los lados del rectángulo inicial situamos un punto cualquiera E, creando los triángulos ACF y GDB, siendo F y G, los puntos medios de los segmentos CE y ED, respectivamente, tal y como aparece en la figura 3.

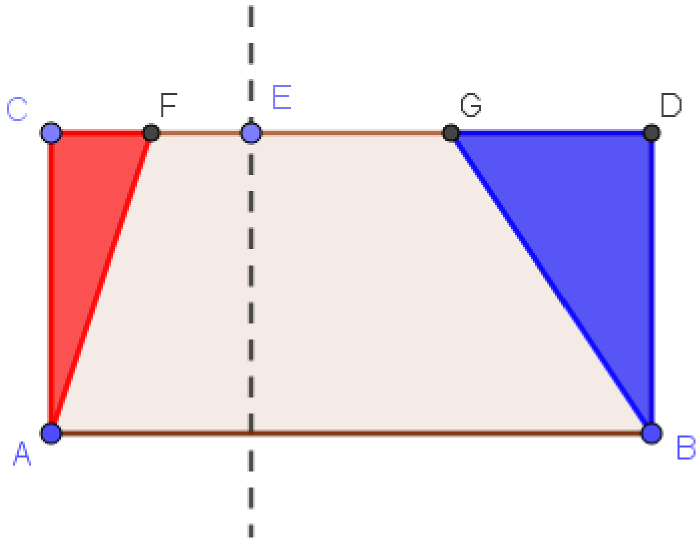


Figura 3.

A partir de un deslizador de tipo ángulo que tome valores entre 0º y 180º, hacemos girar los triángulos anteriores con respecto a los puntos F y G, respectivamente, como muestra la figura 4.

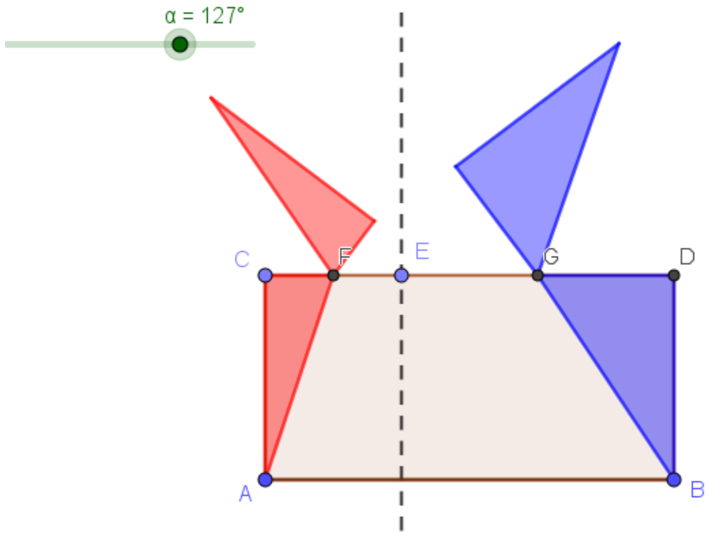


Figura 4.

Al completar el ángulo de giro la construcción resultante será la mostrada en la 5.

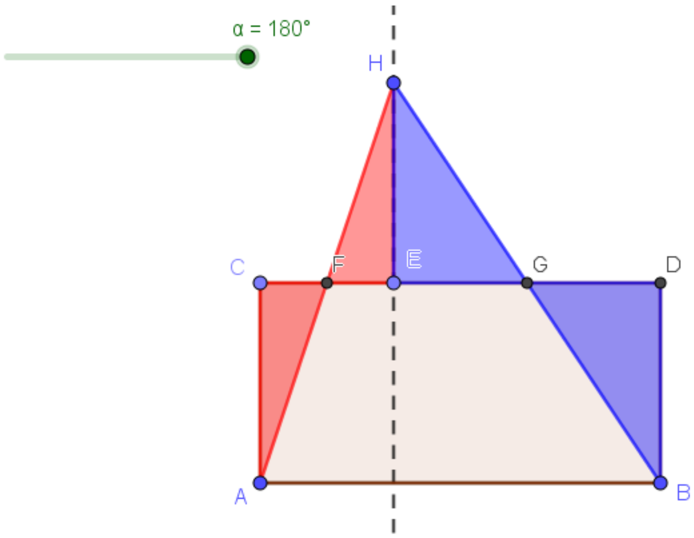


Figura 5.

Observando la imagen obtenida podemos deducir que el triángulo AHB tiene la misma base que el rectángulo inicial (AB), siendo doble la altura ya que AC+EH es el doble de AC. Por tanto, el triángulo tiene la misma área que el rectángulo que es lo que se buscaba.

En esta construcción bastará mover el punto E sobre el lado CD para observar que las condiciones se mantienen.

Otro de los retos propuestos en esta misma entrega, al que dedicaremos un próximo trabajo, sobre todo por las numerosas posibilidades que ofrece su resolución, ha sido el siguiente: "A partir de dos circunferencias construye la circunferencia que sea tangente a ambas circunferencias. ¿Es única?"

5. Conclusión

La resolución del reto anterior esperamos sirva para tener una idea de las propuestas que realizamos en el Club GeoGebra Iberoamericano, cuyo objetivo, como ya hemos indicado es promover el conocimiento y el uso de este software como recurso didáctico, convencidos de las posibilidades que ofrece para cambiar la forma en la que tradicionalmente enseñamos matemáticas.

Como parte del material del club, las soluciones de los retos que cada quincena vamos proponiendo quedan publicados en la Web de recursos de GeoGebra para que quien lo desee pueda descargar los archivos para darles el uso que considere oportuno.

La dirección en la que se encuentran los retos de esta edición es: https://www.geogebra.org/m/rhfprqk3

Desde la organización del club esperamos seguir contando con vuestra participación y en caso de no haberlo hecho hasta ahora, nos veremos en una próxima edición.

Carrillo de Albornoz Torres, Agustín:

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada, profesor de Educación Secundaria desde 1984, ha sido Catedrático de Educación Secundaria de Matemáticas. Ha participado en congresos en Bolivia, Chile, Colombia, Cuba, Uruguay, Argentina, Perú, Brasil, Ecuador, República Dominica, Puerto Rico y El Salvador, impartiendo conferencias y cursos.