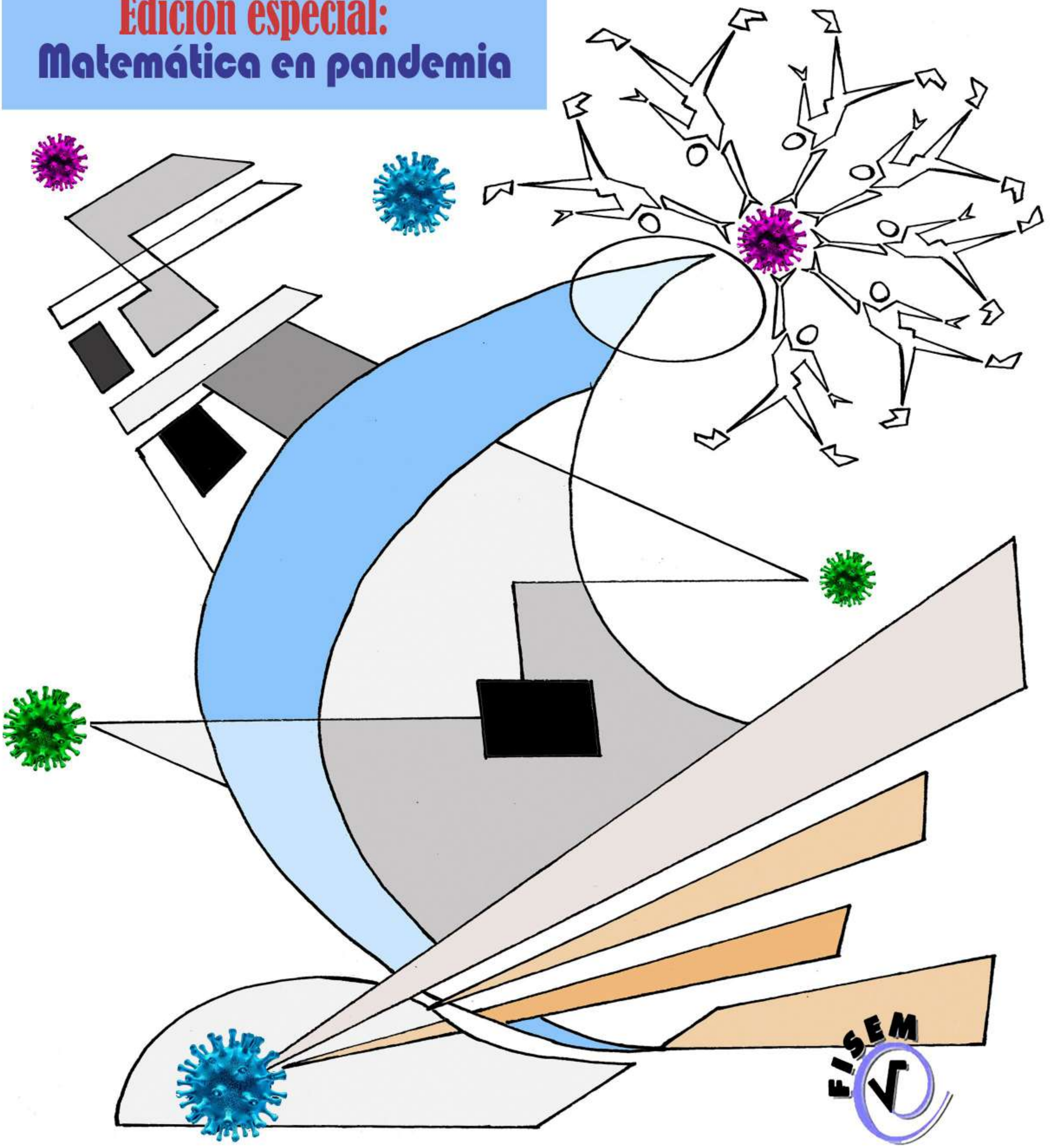
UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVII - Número 63
Diciembre 2021

http://union.fespm.es/index.php

Edición especial:
Matemática en pandemia



UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Año XVII – Número 63 – Diciembre 2021

http://union.fespm.es/index.php

ÍNDICE

Edición especial: Educación matemática en pandemia

PROPUESTAS ÁULICAS

EL RINCÓN DE LOS PROBLEMAS

GEOGEBRA EN UNIÓN

Alejandro Gallardo Lozano
GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas. Una experiencia de aula. **Fredy Rivadeneira Loor**

CRÉDITOS

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 63. Diciembre 2021

Páginas 1-4

EDITORIAL

Estimados lectores

¡Hoy tenemos el placer de publicar el tercer y último número del 2021!

Es tiempo de realizar un racconto para reflexionar sobre ello, en pos de mejoras para el año venidero. Hemos realizado múltiples tareas como Equipo Editorial de la Revista UNIÓN.

Desde que asumimos la responsabilidad de editoras, en enero de 2021, nuestro objetivo fue el de mantener la relevancia y la reconocida trayectoria que tiene UNIÓN. Este espacio colabora con la comunicación de las diferentes líneas de investigación en Educación Matemática, en todos los niveles educativos, con el gran compromiso y con la responsabilidad que implica llevar adelante tal tarea.

En cuanto a la organización mantuvimos las secciones:

- Editorial
- Firma Invitada: destinada a la publicación del material de una persona que represente a la Educación Matemática en cada uno de los países miembro de FISEM y de otros lugares.
- Artículos: destinada a la publicación de artículos de investigación y de experiencias educativas, en Educación Matemática en todos los niveles educativos.
- Propuestas áulicas: en la que se ofrecen recursos motivadores para utilizar en forma creativa que surgen de las aportaciones recibidas.
- El Rincón de los Problemas: en este espacio a cargo del profesor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú) se ofrece en cada número una situación problemática y sus formas de abordarlo.

Además, en consideración con la propagación, el avance y el progreso que ha tenido el software GeoGebra en todo el mundo como recurso educativo, en especial en matemática, es que hemos creado desde el primer número publicado una nueva sección llamada: “GeoGebra en UNIÓN”, en la que contamos con la colaboración de Alejandro Gallardo (Licenciado en Matemática por la Universidad de Málaga). En esta se invita a un profesor/investigador a presentar novedades, problemas, actividades, entre otras, que vinculen GeoGebra con los procesos educativos en matemática. De todos modos, también se continúa recibiendo artículos de investigación y/o experiencias áulicas en las que se utilice el software GeoGebra, que son destinados a las secciones: Artículos y Propuestas Áulicas.

En esta ocasión contamos, para tal sección, con el aporte de Fredy Rivadeneira Loor, quien presenta una experiencia de trabajo en el aula, sobre Distribuciones de Probabilidad con el uso de Geogebra como software y como pizarra digital. Además, podrán acceder al desarrollo de Alejandro, quien nos comenta las novedades con relación a este software.

También, en el sitio web de UNIÓN añadimos el acceso a un formulario mediante el botón Aportes del Lector, a través del cual, los usuarios pueden enviar información acerca de actividades y de eventos relacionados con la Educación Matemática, que luego se comparte en una pestaña pública denominada **Novedades.**

En relación con ello, hemos de destacar que en dicha sección, durante todo este período se fueron publicando diversos eventos, entre ellos, el IV Día GeoGebra de Argentina y el IX Día GeoGebra Latinoamericano, cuyas memorias pueden ser vistas en http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/121426. También está publicado el evento FotoGebra y las actividades que en ese marco se realizaron y que se encuentran disponibles en el canal de Youtube https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK y el sitio web del concurso www.fotogebra.org.

En relación con la administración de la plataforma OJS, en la que se aloja la revista, hemos trabajado, en colaboración con una técnica especializada en el tema, Lic. Dolores García, para hacer cambios que permitan proporcionar mayor visibilidad y difusión a los artículos publicados, mejorar la interfaz para lectores y usuarios, y modificamos cuestiones referidas al aspecto general del sitio web, entre otras cosas. Todas estas mejoras se llevan a cabo con el objetivo de adecuarse a los estándares internacionales de revistas científicas.

En este sentido, se incluyen el ORCID de los autores, título, resumen y palabras clave en español, en inglés y en portugués, referencias bibliográficas visibles en la página del artículo. Gracias a la mejora de los metadatos de cada artículo, los algoritmos recolectores de esta información tienen un mejor acceso y esto garantiza una mayor visibilidad de la publicación. También, incluimos en el sitio una nube de palabras clave que direcciona a artículos de la revista vinculados con estas.

En el espacio web de la revista, se ha incorporado un tutorial para enviar artículos al sistema OJS, disponible en Envíos, un acceso directo al registro de ORCID desde la barra lateral y se están recuperando los números anteriores de la revista, que se encontraban alojados en una plataforma anterior, y así poder acceder a cada artículo desde un único sitio, desde los inicios de la revista. También consideramos importante mencionar que ha cambiado la página web de la FISEM en cuanto a lo visual https://fisem.org/. Además, desde el número anterior, incluimos la portada, tanto para cada número como para cada sección, todas producciones de Leandro Tomasetti.

En esta oportunidad, decidimos editar un número especial que relata aportes a la educación matemática, encuadrados en la problemática vigente ocurrida a nivel mundial por la pandemia causada por el COVID-19. Por ello, se invitó a diversos investigadores y a los lectores en general a enviar aportes que contribuyan con la temática propuesta. Es de destacar que, los artículos recibidos que abordan otras problemáticas se reprogramaron para el número 64, como así también algunos referidos a la pandemia, porque, “afortunadamente”, han sido muchas las colaboraciones recibidas.

Sin duda, todos los trabajos recibidos permiten reflexionar sobre la educación en tiempos y contextos diversos y proporcionan nuevas herramientas para abordar los distintos escenarios que estamos “transitando”, y poder advertir cuáles son las buenas prácticas que han surgido con el paso a la virtualidad y a futuro sostenerlas.

En este número de la Revista, al igual que en los anteriores, incluimos una nueva portada referida a la Edición Especial. Además, continuamos con la reorganizando el Equipo Asesor de la Revista UNIÓN (órgano de asesoramiento, observador, consultivo y externo al Equipo Editorial, constituido por investigadores de reconocido prestigio de diferentes áreas, países y especialidades del campo de la Educación Matemática) con el objetivo de mejorar y analizar la evolución de la revista, evaluar su interés y calidad científica.

Un aspecto a mejorar para próximas ediciones es achicar los tiempos entre la recepción de los artículos y la posterior aceptación y publicación, de ello depende el compromiso y responsabilidad de los evaluadores/revisores de la Revista, a los que convocamos a aceptar tales desafíos, y el de nosotras siendo el nexo entre los revisores y los autores para lograr completar todo el proceso editorial.

Se publican en este nuevo número trabajos cuyos autores representan a los países de: Argentina, Brasil, Chile, Ecuador, España, México, Panamá, Perú y Uruguay.

De estos, la mayoría corresponde a la sección **Artículos**, que refieren a investigaciones que comparten resultados e instrumentos de investigación implementados durante el confinamiento, que ponen de manifiesto cómo el profesorado rápidamente, aunó esfuerzos para adaptar y/o crear diversas actividades a una situación inesperada de emergencia.

En **Propuestas Áulicas** encontramos experiencias que el lector podrá advertir que, pese a ser implementadas en contexto de pandemia, donde nos vimos forzados a salir de nuestra zona de confort y mediar a través de una pantalla, han resultado exitosas.

En la sección **Rincón de los Problemas**, el profesor Uldarico Victor Malaspina Jurado, presenta y comenta problemas de geometría creados mediante indagaciones didáctico-matemáticas, generadas a partir de actividades con diez figuras planas titulada: rompecabezas geométrico e indagaciones didáctico-matemáticas

En cuanto a la Firma Invitada, podemos mencionar que hemos considerado pertinente utilizar el formato que poseyó durante el período del 2009 a 2014, a cargo de Teresa Braicovich y Norma Cotic, adicionando una fotografía y breve reseña de la persona que represente a la Educación Matemática en cada uno de los países miembro de FISEM, y de otros lugares. Este formato lo mantendremos a partir de esta edición.

En consideración con lo expuesto, en 2022 continuaremos con las mejoras implementadas y avanzaremos sobre otras.

Deseando tengan buena lectura, agradecemos la labor invaluable de los revisores de los artículos y a los autores que han elegido esta revista para difundir sus trabajos.

¡¡¡Muy buen año para todos!!!

Karina y Viviana

Equipo Editorial

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640

Número 63. Diciembre 2021

Páginas 1-4

EDITORIAL

Caros lectores

Hoje temos o prazer de publicar o terceiro e último número de 2021!

É hora de fazer um racconto para refletir sobre isso, em busca de melhorias para o próximo ano. Realizamos múltiplas tarefas como Equipe Editorial da Revista UNIÓN.

Desde que assumimos a responsabilidade como editoras, em janeiro de 2021, nosso objetivo foi manter a relevância e reconhecida trajetória da UNIÓN. Este espaço colabora com a comunicação das diferentes linhas de investigação em Educação Matemática, a todos os níveis de ensino, com o grande empenho e responsabilidade que implica a realização de tal tarefa.

Em relação à organização, mantivemos as seções:

- Editorial
- Assinatura Convidada: destinada à publicação do material de uma pessoa que represente a Educação Matemática em cada um dos países membros do FISEM e em outros lugares.
- Artigos: destina-se à publicação de artigos de pesquisa e experiências educacionais em Educação Matemática em todos os níveis de ensino.
- Propostas de sala de aula: nas quais são oferecidos recursos motivadores para serem usados criativamente, oriundos das contribuições recebidas.
- O Canto dos Problemas: neste espaço do professor Uldarico Malaspina Jurado (Pontificia Universidad Católica del Perú), cada questão apresenta uma situação problemática e suas formas de lidar com ela.

Além disso, em consideração à propagação, avanço e progresso que o software GeoGebra teve em todo o mundo como recurso educacional, especialmente em matemática, criamos desde o primeiro número publicado uma nova seção chamada: "GeoGebra na UNIÓN", na qual contamos com a colaboração de Alejandro Gallardo (Graduado em Matemática pela Universidade de Málaga).

Neste, um professor / investigador é convidado a apresentar novidades, problemas, atividades, entre outros, que liguem o GeoGebra aos processos educativos em matemática. Em qualquer caso, continuamos a receber também artigos de investigação e / ou experiências de sala de aula em que é utilizado o software GeoGebra, que se destinam às seções: Artigos e Propostas de Sala de Aula.

Nesta ocasião temos, para esta secção, a contribuição de Fredy Rivadeneira Loor, que apresenta uma experiência de trabalho em sala de aula, sobre Distribuições de Probabilidades com a utilização do Geogebra como software e como quadro digital. Além disso, poderão acessar o desenvolvimento de Alejandro, que nos conta as novidades deste software.

Além disso, no site da UNIÓN adicionamos o acesso a um formulário por meio do botão Contribuições do Leitor, por meio do qual os usuários podem enviar informações sobre atividades e eventos relacionados à Educação Matemática, que depois são compartilhadas em uma guia pública chamada Novidades.

A este respeito, devemos destacar que nesta seção, durante todo esse período foram publicados diversos eventos, entre eles, o IV Dia GeoGebra da Argentina e o IX Dia Latino-americano do GeoGebra, cujas memórias podem ser conferidas em http: // sedici .unlp.edu.ar / handle / 10915/121426. O evento FotoGebra e as atividades desenvolvidas nesse âmbito também são divulgados e estão disponíveis no canal do YouTube https://www.youtube.com/c/FotoGebraRizzoK e no site do concurso www.fotogebra.org.

Em relação à administração da plataforma OJS, onde a revista está hospedada, temos trabalhado, em colaboração com uma técnica especialista no assunto, Licenciado Dolores García, para fazer alterações que permitam uma maior visibilidade e divulgação dos artigos publicados, melhorar a interface para leitores e usuários e modificar questões relacionadas à aparência geral do site, entre outras coisas. Todas essas melhorias são realizadas com o objetivo de se adequar aos padrões internacionais de periódicos científicos.

Nesse sentido, são incluídos o ORCID dos autores, título, resumo e palavras-chave em espanhol, inglês e português, referências bibliográficas visíveis na página do artigo. Graças ao aprimoramento dos metadados de cada artigo, os algoritmos que coletam essas informações têm melhor acesso e isso garante maior visibilidade da publicação. Além disso, incluímos uma nuvem de palavras-chave no site com links para artigos de revistas vinculados a palavras-chave.

Um tutorial para a submissão de artigos para o sistema OJS foi incorporado ao espaço da revista na web, disponível em Submissões, um acesso direto ao registro ORCID da barra lateral, e números anteriores da revista, que estavam hospedados, estão sendo recuperados. plataforma anterior, podendo assim acessar cada matéria a partir de um único site, desde o início da revista. Também consideramos importante mencionar que o site da FISEM mudou visualmente https://fisem.org/.

Além disso, da edição anterior, incluímos na capa, tanto de cada edição quanto de cada seção, todas as produções de Leandro Tomasetti.

Na ocasião, decidimos publicar um número especial que relata as contribuições para a educação matemática, enquadradas nos problemas atuais que ocorreram em todo o mundo devido à pandemia provocada pelo COVID-19. Por esse motivo, diversos pesquisadores e leitores em geral foram convidados a enviar contribuições que contribuam com o tema proposto. Vale ressaltar que os artigos recebidos que tratam de outros problemas foram remarcados para o número 64, assim como alguns referentes à pandemia, pois, “felizmente”, muitas contribuições foram recebidas.

Sem dúvida, todos os trabalhos recebidos permitem-nos reflectir sobre a educação em diferentes tempos e contextos e fornecer novas ferramentas para abordar os diferentes cenários que estamos a “atravessar”, e poder perceber quais são as boas práticas que surgiram com o passagem para a virtualidade e o futuro os sustentam.

Nesta edição da Revista, como nas anteriores, incluímos uma nova capa referente à Edição Especial. Além disso, continuamos a reorganizar a Equipa Consultiva da Revista UNIÓN (órgão consultivo, observador, consultivo e externo à Equipa Editorial, composta por investigadores de reconhecido prestígio de diferentes áreas, países e especialidades da área da Educação Matemática) com o objetivo de aprimorar e analisar a evolução da revista, avaliar seu interesse e qualidade científica.

Um aspecto a melhorar para futuras edições é encurtar os tempos entre o recebimento dos artigos e a posterior aceitação e posterior publicação, disso depende o compromisso e responsabilidade dos avaliadores / revisores da Revista, a quem chamamos para aceitar tais desafios, e que de sermos o elo entre os revisores e os autores para completar todo o processo editorial.

Neste novo número são publicados trabalhos cujos autores representam os países: Argentina, Brasil, Chile, Equador, Espanha, Panamá, México, Peru e Uruguai.

Destes, a maior parte corresponde à secção Artigos, que se refere a investigações que partilham resultados e instrumentos de investigação implementados durante a reclusão, que mostram como os professores rapidamente juntaram forças para se adaptar e / ou criar atividades diversas a uma situação de emergência inesperada.

Nas Propostas Áulicas encontramos experiências que o leitor poderá constatar que, apesar de implementadas no contexto de uma pandemia, em que fomos obrigados a sair da nossa zona de conforto e mediar através de uma tela, foram bem-sucedidas.

Na secção Canto dos Problemas, o Professor Uldarico Victor Malaspina Jurado, apresenta e comenta problemas de geometría criados a través de inquéritos didáctico-matemáticos, gerados a partir de actividades com dez figuras planas intituladas: puzzle geométrico e inquéritos didáctico-matemáticos

Em relação à Empresa Convidada, podemos citar que consideramos pertinente utilizar o formato que ela teve durante o período de 2009 a 2014, a cargo de Teresa Braicovich e Norma Cotic, acrescentando uma fotografia e uma breve resenha do representante da Matemática. Educação em cada um dos países membros do FISEM, e em outros lugares. Manteremos este formato a partir desta edição.

Em consideração ao exposto, em 2022 continuaremos com as melhorias implementadas e avançaremos em outras.

Desejando uma boa leitura, agradecemos o inestimável trabalho dos revisores dos artigos e dos autores que escolheram esta revista para divulgar seus trabalhos.

Um ano muito bom para todos vocês !!!

Karina y Viviana

Equipo Editorial

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Diciembre de 2021, Número 63
ISSN: 1815-0640

Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Breve Reseña

Nació en 1959 en la ciudad de Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil. Realizou la licenciatura en Matemáticas en la Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), realizó una especialización en Educación Matemática en la Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), doctorado em Ciencias de la Educación por la Pontificia de Salamanca, España, y postdoctorado en Tecnologías educativas por la Universidad de Tenerife en España.

É secretária do Comitê Interamericano de Educação Matemática (CIAEM), é editora da revista Acta Scientiae da Universidade Luterana Es secretaria del Comité Internacional deEducación Matemática (CIAEM), y editora de la revista acta Scientiae de la Universidad Luterana de Brasil. Fue directora de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática de Rio Grande do Sul (SBEM-RS).

Desde 1989 viene trabajando como profesora de matemáticas y didáctica de las matemáticas para la formación de profesores. Actualmente es titular de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA) y trabaja en la formación de profesores y en el Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y MatemProfesional (PPGECIM). Coordina un grupo de investigación sobre Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM).

Imparte cursos de maestría e doctorado sobre dicho tema y ha dirigido dissertaciones de maestría e tesis doctorales sobre educación matemática.

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-16

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

Educación Matemática y Tecnologías: planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes

Educação Matemática e Tecnologias – planejamento de tarefas investigativas focando na aprendizagem dos estudantes

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, Claudia Lisete Oliveira, Groenwald,

Resumen

Se presentan los resultados de la investigación Educación Matemática y Tecnologías Digitales, del Grupo de Estudios Curriculares de Educación Matemática (GECEM). El problema es: ¿Cuáles son las posibilidades didácticas de las Tecnologías Digitales para la Educación Matemática? Presenta el papel del aprendizaje y su importancia para el desarrollo del alumno de forma integral, y un recorte de la importancia del desarrollo de tareas, consideradas de alta demanda cognitiva con dos ejemplos de tareas abiertas que fomentan la investigación permitiendo a los alumnos ser destacados en las clases online pero también interesantes en las presenciales.
Palabras clave: Educación Matemática. Aprendiendo. Tareas de investigación.

Abstract

The results of the research Mathematics Education and Digital Technologies, from the Curricular Studies Group of Mathematics Education (GECEM), are presented. The problem is: What are the didactic possibilities of Digital Technologies for Mathematics Education? It presents the role of learning and its importance for the development of the student in an integral way, and an incutting of the importance of the development of tasks, considered of high cognitive demand with two examples of open tasks that encourage research allowing students to be prominent in online classes but also interesting in face-to-face classes.
Keywords: Mathematics Education. Learning. Research tasks.

Resumo

Apresenta-se os resultados da pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais, do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM). O problema norteador é: Quais as possibilidades didáticas das Tecnologias Digitais para a Educação Matemática? Apresenta-se o papel da aprendizagem e sua importância para o desenvolvimento do aluno de maneira integral, e um recorte da importância do desenvolvimento de tarefas, consideradas de alta demanda cognitiva com dois exemplos de tarefas abertas que incentivam a investigação permitindo aos estudantes serem protagonistas nas aulas online, mas também interessantes em aulas presenciais.
Palabras chave: Educação Matemática. Aprendizagem. Tarefas de investigação.

1. Introducción

La pandemia causada por el virus SARS-CoV-2 ha tenido un claro impacto en todos los sectores de la sociedad a nivel mundial. Iniciado en China en diciembre de 2019, el virus llegó a Brasil en marzo de 2020, trayendo una serie de consecuencias para la humanidad y, para los brasileños, a medida que se cambiaran las relaciones humanas, presentando nuevos desafíos y requiriendo nuevas formas de relación con los demás y con el medio ambiente, especialmente en el entorno educativo.

Las universidades y las escuelas de Educación Básica en Brasil comenzaron las clases en febrero de 2019, pero se paralizaron en marzo debido a pandemia. "Ante esta emergencia sanitaria, las redes educativas públicas y privadas brasileñas tomaron la decisión de suspender las clases presenciales entre el 11 y el 23 de marzo de 2020" (Tamayo; Silva, 2020, p. 29). Para los autores, la suspensión de clases fue una medida importante, tomada al inicio del aumento de comunidades infectadas por Covid-19 en Brasil, colaborando con el aislamiento social entendiendo que, la escuela es un espacio donde el contacto es inevitable.

En el contexto educativo, se han implicado diferentes medidas que abarcan la completa transformación de la docencia, marcadas por clases totalmente online, incluso con evaluaciones no presenciales. Al requerir que los docentes utilizaran herramientas digitales a las que no estaban acostumbrados o no conocían, surgió la necesidad de nuevas perspectivas para las actividades que se desarrollarían con los estudiantes.

Actualmente la mayor preocupación en Brasil es la consecuente expansión de las desigualdades, tanto sociales como educativas debido a la pandemia. Es de destacar que los profesionales de la educación, docentes e investigadores y estudiantes a la hora tuvieron que actuar en un contexto de excepcionalidad, buscando e investigando alternativas que comenzaron a adoptarse, con el objetivo de reducir el daño educativo y asegurar el año escolar, siguiendo las pautas establecidas (Groenwald, 2021).

Es indudable que el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se ha incrementado durante la pandemia como herramientas para cubrir las nuevas necesidades tanto de docentes como de los propios estudiantes. Se entende que el uso de las TIC en el proceso educativo debe ir siempre acompañado de un enfoque metodológico adecuado, aunque se ha detectado un preocupante desfase en el uso y aplicación de metodologías docentes en el aula (García-Peñalvo & Corell, 2020). Importante resaltar que de acuerdo con la Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional (Brasil, 1996), la Educación Nacional tiene como objetivo el pleno desarrollo del estudiante, su preparación para el ejercicio de la ciudadanía y su calificación para el trabajo. Así, la educación y la inserción en la sociedad digital implican una adaptación del aula a la realidad tecnológica, cuyo uso de la tecnología por parte de los docentes es una condición necesaria para esta adecuación.

Ante tales adaptaciones del sistema educativo para las clases en línea, y a través de instrucciones a menudo incompletas de los organismos públicos, debido a que no existen precedentes de situaciones similares, los docentes, de Educación Básica y Educación Superior, siguieron con sus actividades docentes de manera remota, enfrentando muchas dificultades tanto estructurales como de adecuación de cómo desarrollar el conocimiento en línea. Ante este proceso educativo con clases online, las investigaciones del grupo GECEM se centraron en investigar el papel del aprendizaje en la formación de los alumnos y en el papel de las tareas que llevan a los alumnos a ser protagonistas de su aprendizaje y los profesores mediadores en el proceso.

El objetivo de este trabajo es presentar un recorte de los resultados obtenidos en las investigaciones sobre el aprendizaje y el desarrollo de tareas en estos tiempos de educación en línea. Se apresenta la idea de aprendizaje y su importancia para el desarrollo del alumno de manera integral y que le habilita a tener habilidades para actuar en el mundo contemporáneo, también un extracto de la importancia del desarrollo de tareas, consideradas de alta demanda cognitiva y con el uso de tecnologías y, finalmente, colocamos dos ejemplos de tareas consideradas abiertas que incentivan la investigación y que llevan a los estudiantes a ser protagonistas en las clases de educación a distancia y que también resultan interesantes en la docencia presencial.

2. Aprendizaje de los estudiantes

En un sistema social global como el actual, caracterizado por la complejidad, la imprevisibilidad y la interdependencia, existen varios desafíos que los jóvenes deberán enfrentar (Sá & Paixão, 2015). Para los autores, los desafíos globales (crisis socioeconómica, problemas ambientales, conflictos sociales y económicos) requieren un enfoque reflexivo y holístico, destacando la necesidad de dotar a los individuos de habilidades (técnicas, personales y relacionales) que les permitan vivir en el mundo moderno.

Según el proyecto DeSeCo (OCDE, 2019), el desarrollo y mantenimiento del capital humano y social representan un factor importante para que las sociedades generen prosperidad, cohesión social y paz y, sobre todo, para gestionar los desafíos y tensiones de una sociedad cada vez más interdependiente, global, cambiante y conflictiva. Para la OCDE (2005), el capital humano no solo juega un papel importante en el desempeño económico, sino que también aporta beneficios individuales y sociales, con mejoras en la salud, el bienestar, la paternidad, además de un mayor compromiso social y político.

Las condiciones que impone la vida moderna, cuando estamos llamados a actuar en un mundo en constante cambio, cada vez más dependiente de las tecnologías y que, en todo momento, nos presenta nuevos retos, tanto individuales como colectivos, exigen que los individuos desarrollen autonomía, capacidad de resolución, situaciones problemáticas, tomar decisiones, actuar en beneficio de su entorno social.

En este contexto, la Educación, y en particular la Educación Matemática, tiene la responsabilidad de desarrollar un trabajo que permita a los estudiantes, desde temprana edad, actuar en entornos que contribuyan a su formación como ciudadanos activos en este mundo cada vez más exigente. En el corazón del marco de competencias clave está la capacidad de las personas para pensar por sí mismos, expresando madurez moral e intelectual y asumiendo la responsabilidad de su aprendizaje y acciones (OCDE, 2005).

En este sentido, es importante discutir el aprendizaje para la formación del ciudadano que actuará en la sociedad en estos tiempos modernos. Según Illeris (2013) el aprendizaje es un tema complejo, que abarca un campo mucho más amplio de lo que tradicionalmente se entiende, como es la adquisición de conocimientos y habilidades. El aprendizaje para el autor incluye dimensiones emocionales, sociales y sociales.

Según Illeris (2007, p. 3):

> El aprendizaje puede definirse de manera amplia, como cualquier proceso que, en los organismos vivos, conduzca a un cambio permanente en las capacidades y no se deba únicamente a la maduración biológica o al envejecimiento.

Para el autor todo aprendizaje conlleva la integración de dos procesos muy diferentes: un proceso externo de interacción entre el individuo y su entorno social, cultural o material, y un proceso psicológico interno de elaboración y adquisición.

Para Illeris (2013), toda aprendizaje implica tres dimensiones: contenido, incentivo y entorno. La dimensión del contenido se refiere a lo aprendido, como conocimientos y habilidades, así como opiniones, percepciones, significados, posturas, valores, formas Observación reflexiva de actuar, métodos, estrategias, etc., lo que lleva al individuo a construir significado y capacidad para hacer frente a los desafíos de la vida práctica. La dimensión del incentivo proporciona y dirige la energía mental al proceso de aprendizaje, involucrando sentimientos, emociones, motivación y volición, asegurando el equilibrio mental continuo del individuo desarrollando una sensibilidad personal. La dimensión de interacción proporciona los impulsos que inician el proceso de aprendizaje, a través de la percepción, transmisión, experiencia, imitación, actividad, participación, etc., formando la integración personal en la sociedad, construyendo así la sociabilidad del individuo.

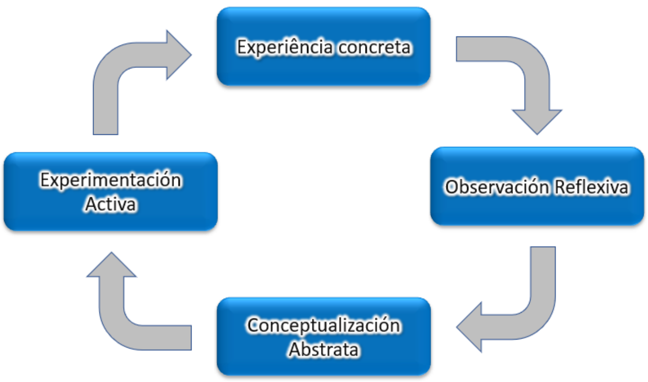


Figura 1 - Ciclo de aprendizaje de Kolb
Fuente: adaptado de Kolb (1984).

Según Kolb (1984, p. 38): "el aprendizaje es el proceso por el cual el conocimiento es creado por la transformación de la experiencia", donde la experiencia no es conocimiento, sino la base para la creación de conocimiento. El autor sugiere la representación del ciclo de aprendizaje (Figura 1) en una perspectiva holística e integradora sobre el aprendizaje que combina experiencia, percepción, cognición y comportamiento.

Kolb (2013) considera valiosas las experiencias concretas e inmediatas para crear sentido y validar el proceso de aprendizaje, así como la investigación-acción y la enseñanza de laboratorio, que se caracterizan por el proceso de retroalimentación, en el que "la información ofrecida por la retroalimentación es el punto de partida de un proceso continuo, que consiste en la acción orientada al objetivo y la evaluación de las consecuencias de esta acción" (Elkjaer, 2013, p.104).

Según Kolb (1984) el aprendizaje está vinculado a las capacidades mencionadas en el ciclo de aprendizaje de la Figura 1 y los estudiantes deben estar plenamente involucrados en nuevas experiencias, siendo capaces de reflexionar y observar experiencias desde diversas perspectivas, creando conceptos que integren sus observaciones en teorías que apoyan la toma de decisiones y la resolución de problemas.

Para Jarvis (2013), aprendemos con la experiencia cuando le atribuimos significado, y cuando aprendemos, cambiamos como persona. Para el autor no es necesario tener un significado para aprender con la experiencia, sino que la reflexión sobre las experiencias lleva a la resignificación, las emociones se transforman, las opiniones, actitudes y valores se ven afectados, influyendo en la toma de decisiones y la acción.

El aprendizaje es continuo (Figura 2) y por mucho que sigamos aprendiendo, seguimos siendo personas inacabadas y la posibilidad de más crecimiento, más experiencia, permanece (Jarvis, 2013). Para el autor "el ser y el devenir son entrelazados, y el aprendizaje humano es uno de los fenómenos que une a los dos, porque es fundamental para la propia vida" (Jarvis, 2013, p. 40-41) así, a través del aprendizaje, el conocimiento, las habilidades, las actitudes, las emociones, las creencias, los valores, los sentimientos y la identidad cambian y evolucionan.

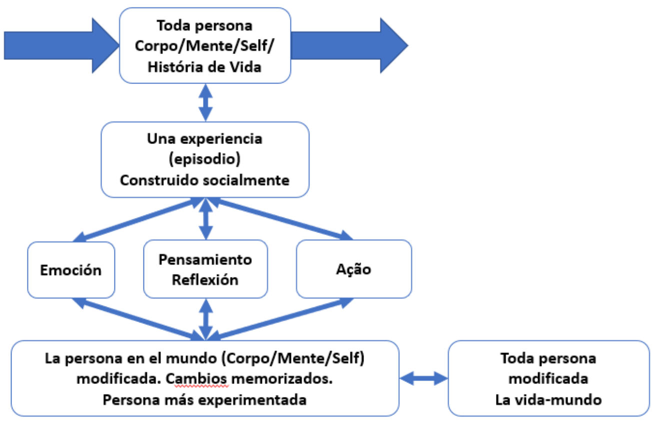


Figura 2 - La transformación de la persona mediante el aprendizaje
Fuente: Jarvis (2013).

Las investigaciones del GECEM sobre el aprendizaje, en este caso el aprendizaje matemático, conducen a una comprensión de la necesidad de actividades / tareas que hacen que los estudiantes se involucren, reflexionen, formulen hipótesis, saquen conclusiones y generalicen. Dando lugar a la planificación de tareas de investigación que permitan el desarrollo de estas capacidades.

3. Educación matemática mediante tareas de investigación

Penalva y Llinares (2011), Llinares, Buforn y Groenwald (2019), afirman la necesidad de que los docentes mantengan en cuenta los objetivos a alcanzar y cómo alcanzar dichos objetivos utilizando recursos, como tareas matemáticas, a la hora de planificar sus clases. Para estos autores, las tareas matemáticas son las propuestas que hacen los profesores para el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, son las proposiciones realizadas por el profesor con el objetivo de centrar la atención de los alumnos en lo que se pretende enseñar y definir qué actividad es un conjunto de tareas a desarrollar por los alumnos y los procedimientos son las formas de realizar las tareas.

Stein, Grover y Henningsen (1996, p. 460) definen una tarea como "una actividad en el aula cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un tema en particular".

Las tareas matemáticas pueden variar desde un conjunto de ejercicios de rutina hasta un problema complejo y desafiante que centra la atención de los estudiantes en una idea matemática en particular (NCTM, 2015). Según NCTM (2015), la enseñanza efectiva utiliza las tareas como una forma de motivar el aprendizaje de los estudiantes y ayudarlos a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

Se entiende que es posible establecer un vínculo entre el aprendizaje y la gestión de tareas siempre que ellos, las tareas, hagan que el estudiante vaya por un camino claro hacia la comprensión de los contenidos matemáticos (Llinares, 2011; Llinares, Buforn y Groenwald, 2019; Damasco, Groenwald y Llinares, 2020). Solo las tareas no son suficientes para el aprendizaje, pero son factores que pueden contribuir al logro de los objetivos propuestos y al aprendizaje de los estudiantes. Para ello, los autores refuerzan que las tareas deben permitir a los estudiantes pensar en hacer matemáticas, superando la memorización y los procedimientos sueltos, sin conexión.

Para los autores uno de los elementos importantes para el aprendizaje de las matemáticas son los problemas, actividades y ejercicios que el profesor propone a sus alumnos (tarea). Penalva y Llinares (2011) consideran importante la tarea matemática, porque es la que determina qué pueden aprender los alumnos y cuál es el camino a ello, en este sentido las tareas, según los autores, son los instrumentos que el profesor utiliza para que los alumnos aprendan matemáticas, por lo que existe un vínculo entre el aprendizaje y la gestión o gestión de tareas en el aula. No son solo las tareas las que permiten a los alumnos aprender, sino qué harán con él y, como lo dirige el profesor, entendiendo que si los alumnos realizan únicamente actividades de reproducción de procedimientos previamente introducidos, con el objetivo de memorizar algoritmos, difícilmente podrán alcanzar otros objetivos o difícilmente ampliarán sus conocimientos en relación con lo estudiado.

Así, se entiende que una tarea es una actividad de aula que involucra a estudiantes con asignaturas, contenidos y conceptos matemáticos, configurándose "como un vehículo importante para el desarrollo de la capacidad del estudiante para pensar y razonar matemáticamente[1]" (Stein; Grover; Henningsen, 1996, p. 455).

[1] Nuestra traducción

Teniendo en cuenta que las tareas matemáticas pueden influir, estructurar y comandar la forma en que los profesores organizan sus clases y cómo los estudiantes perciben y aprenden matemáticas, entendemos la importancia de las investigaciones en la planificación y organización de tareas de alta demanda cognitiva (procesos de pensamiento). Dado que la relevancia de la relación entre el proceso de pensamiento (nivel de requerimiento cognitivo) y las tareas matemáticas es la principal imagen de las investigaciones de GECEM.

Refiriéndose a los procesos de pensamiento, Doyle (1988), hizo una diferenciación primaria entre ellos. Reconoció que, si, por un lado, había tareas que requerían procesos más elementales, como la reproducción precisa de contenidos previamente aprendidos, por otro lado, había tareas que requerían un razonamiento más complejo, como las que implicaban la compresión y conexión de los contenidos ya estudiados. Los niveles cognitivos se intercalan "entre tareas que involucran a estudiantes en el nivel superficial y tareas que involucran a estudiantes en un nivel más profundo, que requieren interpretación, flexibilidad, organización de recursos y construcción de significados[2]". (Stein; Grover; Henningsen, 1996, p. 459).

Para Penalva y Llinares (2011) el término Demanda Cognitiva se ocupa de la clase y el nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para resolver la tarea, señalando lo que se logra y lo que se aprende en cada nivel.

Smith y Stein (1998) clasifican los niveles de demanda cognitiva en cuatro, con los niveles 1 y 2 como demandas de bajo nivel, y los niveles 3 y 4 como demandas de alto nivel:

- Nivel 1 - tareas que requieren memorización;
- Nivel 2 - tareas que utilizan procedimientos sin conexión;
- Nivel 3 - tareas que utilizan procedimientos con conexión;
- Nivel 4 - tareas que requieren "hacer matemáticas".

Las tareas de memorización de nivel 1 implican reproducir fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas y que no pueden ser resueltas a través de procedimientos, porque no existen o porque el tiempo determinado para resolver la tarea es breve para emplear el procedimiento; No son ambiguas, estas tareas implican reproducir exactamente algo visto anteriormente y lo que hay que reproducir se establece clara y directamente; No tiene relación con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Las tareas de nivel 2 son tareas de procedimientos sin conexión, son algorítmicas, utilizan procedimientos que están específicamente definidos, o su uso es obvio en función de la información que se encuentra en la tarea planificada; Requiere un requerimiento cognitivo limitado para lograrlo con éxito; Hay poca ambigüedad de lo que hay que hacer y cómo hacerlo; no tienen relación con conceptos o significados subyacentes al procedimiento utilizado; Se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática;

[2] Nuestra traducción

No requieren explicaciones, o solo explicaciones centradas en describir el procedimiento utilizado.

Las tareas de nivel 3 son tareas de procedimientos con conexión, que se centra en la atención del estudiante en el uso de procedimientos, con el fin de desarrollar una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas; Sugiere formas (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales, que tienen una estrecha relación con las ideas conceptuales, en lugar de algoritmos que no están claros en relación con los conceptos subyacentes; De manera habitual, se representan en varias formas (diagramas visuales, gráficos, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas); Hay conexiones entre múltiples representaciones que ayudan a desarrollar el significado matemático; Requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo; Aunque es posible seguir los procedimientos generales, no se pueden usar sin pensar, los estudiantes deben involucrarse con las ideas conceptuales detrás de los procedimientos para realizar con éxito la tarea.

Las tareas de nivel 4 son aquellas que necesitan hacer matemáticas porque requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (no hay aproximación con caminos ya recorridos en otras tareas que puedan ser recordados o un camino que sea sugerido explícitamente por la tarea o instrucción previa); Requieren que los estudiantes exploren y comprendan conceptos matemáticos, así como procesos y sus relaciones; Requieren auto-verificación o autorregulación de los procesos cognitivos; Requieren que los estudiantes encuentren una respuesta que requiera la comprensión conceptual de la noción matemática, verificando y explicando la respuesta producida; Exigir a los estudiantes que accedan a conocimientos o experiencias relevantes y hagan un uso adecuado de ellos en el desarrollo de la tarea; Requieren un esfuerzo cognitivo considerable, y pueden implicar un cierto nivel de ansiedad de los estudiantes, debido a la naturaleza imprevisible del proceso de resolución requerido.

Según Stein y Lane (1996), la investigación ha demostrado que la mejora del aprendizaje de los estudiantes está relacionada con el trabajo con tareas de alta demanda cognitiva (Stein; Lane, 1996). Se entiende que todo tipo de tareas son importantes y tienen su papel en el aprendizaje, pero las de alta demanda cognitiva son palancas del pensamiento matemático y del aprendizaje del alumno.

Se entiende que la actividad de alta demanda cognitiva son actividades abiertas que permiten la investigación y resolución de problemas. Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o entre estos y nuevos objetos matemáticos, tratando de identificar y probar sus propiedades (Ponte, 2021). Para el autor los momentos en la realización de una investigación son:

- Exploración y formulación de cuestiones, lo que implica reconocer la situación, explorar y formular preguntas;
- Formulación de conjeturas, que implica las actividades de organizar los datos y formular conjeturas;
- Prueba y reformulación de conjeturas, que implica realizar pruebas y refinar hipótesis;
- Justificación y evaluación, que implica justificar una conjetura y evaluar el razonamiento o el resultado del razonamiento.

Según Ponte (2006), el objetivo principal de la Investigación Matemática es encontrar regularidades, reflexionar sobre los temas, justificarlos y probarlos, generalizar contenidos. "Investigar es descubrir relaciones entre objetos matemáticos conocidos o desconocidos, buscando identificar sus propiedades" (Ponte, 2006, p.13).

La investigación en Matemáticas incluye la formulación de preguntas, que a menudo evolucionan a medida que avanza el trabajo. La investigación también implica la producción, el análisis y el refinamiento de conjeturas sobre estos mismos temas. Y, por último, implica la demostración y comunicación de los resultados. El punto de partida para una investigación puede ser un problema matemático o una situación no matemática (tanto de otras ciencias y tecnología, como de la organización social o de la vida cotidiana) (Ponte, 2010).

Para Ponte (2010) una tarea tiene cuatro dimensiones fundamentales (Figura 3): el grado de complejidad, la estructura, el contexto referencial y el tiempo requerido para su resolución. Combinando las dos primeras dimensiones, se obtienen cuatro tipos básicos de tareas:

Figura 3 – Dimensiones de la tarea
Fuente: adaptado de Ponte (2010).

Es decir, las investigaciones de GECEM se centran en la planificación de tareas de investigación abierta de alta demanda cognitiva, es decir, de alta complejidad, con apoyo en tecnologías.

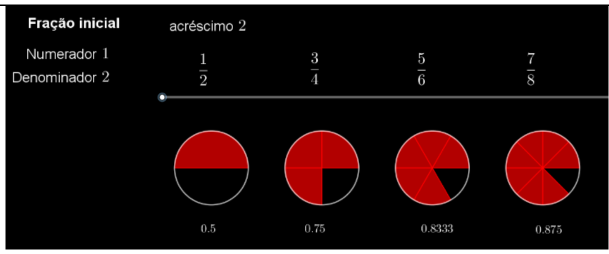
Otro ponto é que en el campo de la Educación Matemática, las Tecnologías de la Comunicación y la Información - TIC e Investigación Matemática han sido señalados como una de las tendencias metodológicas de la enseñanza que favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos, así como la oportunidad de hacer conjeturas y generalizar.

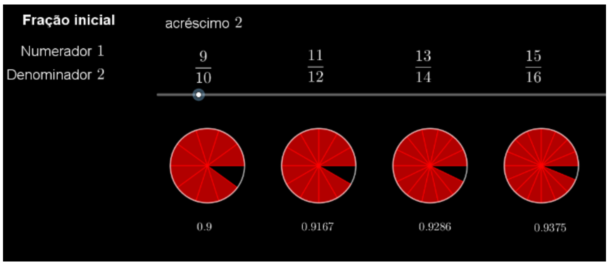
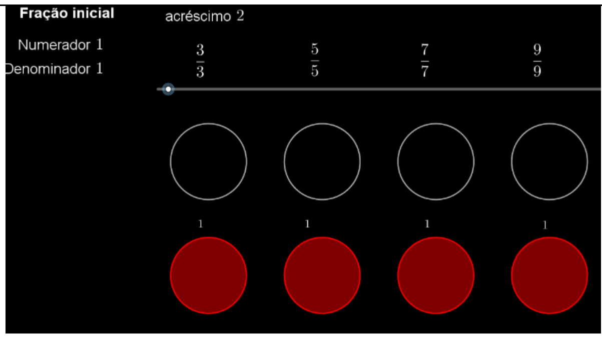
Así, se percibe que en entornos de aprendizaje es interesante combinar la investigación Matemática con softwares educativos, como o software GeoGebra, que puede brindar oportunidades para la creación, manipulación, exploración de situaciones, análisis, elaboración de conjeturas, verificación de regularidades, discusión de resultados y generalización.

En este sentido, es necesario diseñar tareas que puedan ser el punto de partida de las investigaciones y exploraciones matemáticas de los alumnos y discutir cómo se pueden trabajar en el aula. Las tecnologías pueden hacer una contribución significativa a esto. A continuación, se muestran ejemplos de tareas utilizando objetos de aprendizaje desarrollados por GECEM, que son tareas de investigación que, a nuestro entender, llevan a los estudiantes a realizar investigaciones en matemáticas.

4. Ejemplos de tareas de investigación desarrolladas en el *software* GeoGebra

La tarea presentada en la Figura 4, fue desarrollada en el *software* GeoGebra y se puede encontrar en: http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio. Está indicado para estudiantes que se encuentran en los últimos años de la escuela primaria (6º a 9º grado) con edades comprendidas entre los 11 y los 14 años de edad.

<table>
<tr><td colspan="2">Considere una fracción y analice lo que sucede cuando agrega un valor cualquier al numerador y al denominador simultáneamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La idea es que, en parejas o en grupos de 3 o 4 alumnos, discutan y reflexionen sobre las posibilidades para la tarea propuesta y hacer tantos ejemplos como sea necesario para sacar conclusiones</td></tr>
<tr><td>Situación 1
Para $\frac{a}{b}$, con $a < b$, tenemos:
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{2}} < \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{4}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{4}} < \cdots < 1$
En el ejemplo presentado tenemos:
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} < \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} < \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}} < \cdots < 1$
Resulta que las fracciones se acercan a 1 pero nunca llegan a 1</td><td>


</td></tr>
<tr><td>Situación 2
Para $\frac{a}{b}$, con $a = b$, tenemos:
$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{4}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{4}} = \cdots = 1$
En el ejemplo presentado tenemos:
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{7}} = \cdots = 1$</td><td>
</td></tr>
</table>

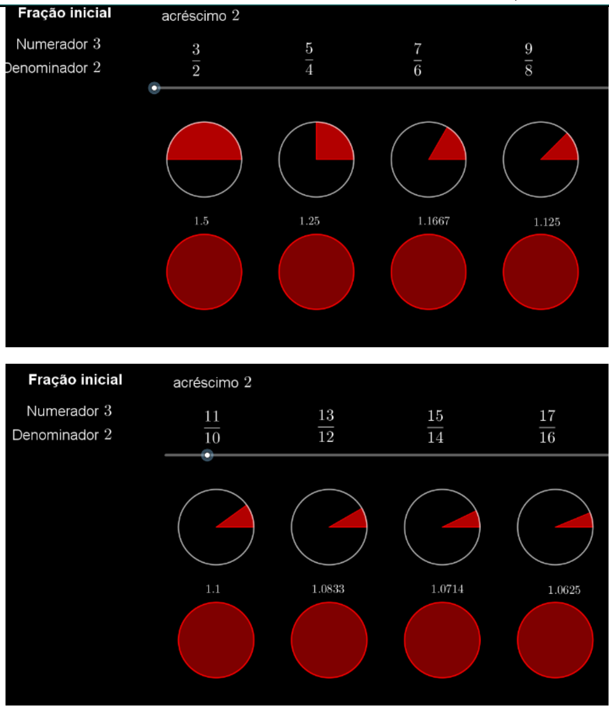
Situación 3 Para $\frac{a}{b}$, con $a > b$, tenemos: $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{2}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{2}} > \frac{\boldsymbol{a}+\mathbf{4}}{\boldsymbol{b}+\mathbf{4}} > \cdots > 1$ En el ejemplo presentado tenemos: $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} > \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} > \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} > \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}} > \cdots > 1$ Resulta que las fracciones se acercan a 1 pero nunca llegan a 1	

Figura 4 – Tarea investigativa com fraciones
Fuente: http://ppgecim.ulbra.br

Es importante destacar que en el objeto desarrollado permite a los alumnos definir la fracción inicial, pudiendo analizar hasta 54 fracciones a las que se suma un valor arbitrario definido como "suma" al numerador y denominador de la fracción.

En el ejemplo mostrado en la Figura 3, se agregó un valor de 2 unidades al numerador y al denominador de la fracción inicial (3/2). El objeto de aprendizaje permite al estudiante definir la fracción inicial, y se debe alentar al profesor a explorar las situaciones que se presentan con los diferentes tipos de fracciones iniciales (numerador más pequeño que el denominador; numerador igual al denominador; numerador mayor que denominador).

Otro ejemplo es la actividad desarrollada con simuladores de brazo robótico permiten el desarrollo de tareas de alta demanda cognitiva especialmente con conceptos de trigonometría, con la ventaja de tener un menor costo en comparación con los brazos robóticos reales, ya que no hay necesidad de adquirir equipos robóticos, con los costos asociados solo con el laboratorio de computación que se utiliza para otras actividades educativas (Homa, 2019).

Según (Homa, 2019) el uso de objetos de aprendizaje tridimensionales permite el cambio del ángulo de visión que facilita la visualización de las características y propiedades matemáticas involucradas en la situación problemática. Dadas las características del simulador que representa un objeto real, en este caso un brazo robótico, la posibilidad de observar las interacciones y resultados de los comandos en un entorno de realidad virtual tridimensional se muestra como un recurso favorable para acciones exploratorias en tareas de investigación.

Se desarrollaron un conjunto de tres brazos robóticos que presentan un nivel creciente de dificultad asociado al objetivo propuesto de dar órdenes para que el brazo robótico sale de la posición de reposo y tome la bola roja. Para el primer brazo robótico, Figura 5, es necesario informar la distancia que debe extender el brazo y el ángulo de rotación para colocar la garra en la bola.

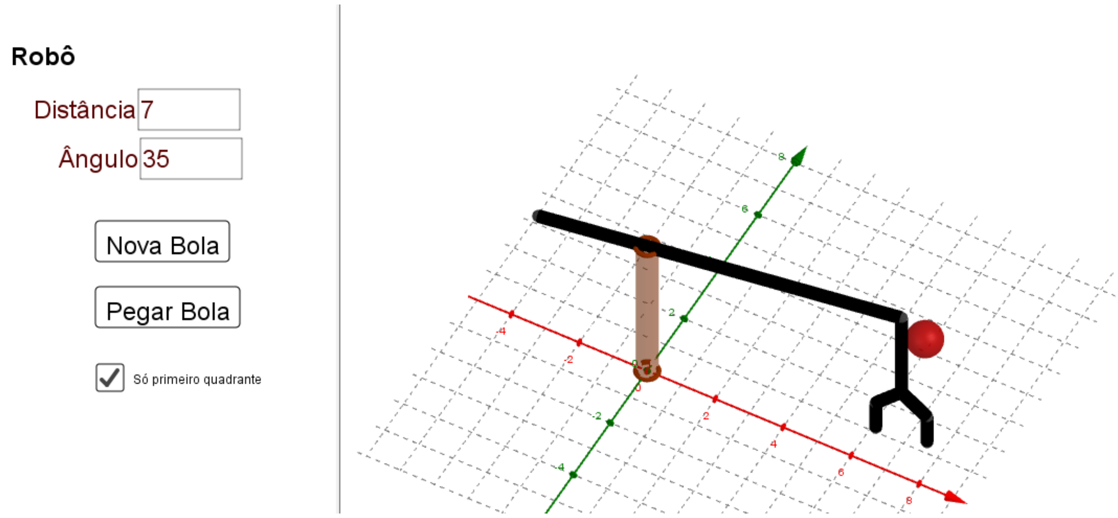


Figura 5 –Simulador robótico 1
Fuente: http://ppgecim.ulbra.br

Entre las primeras acciones que se esperan en esta propuesta se encuentran el ensayo y error para lograr el objetivo. Debido a que los simuladores fueron programados para aceptar un error de 0.1 desde la distancia desde el centro de la pelota y la garra, las posibilidades de éxito por intento son pequeñas. Los cambios del ángulo de visualización de la acción, durante los intentos, permiten la identificación del triángulo rectángulo formado por las coordenadas de la bola y el brazo, así se disparan los conocimientos de trigonometría para la solución de la tarea. En este caso se utiliza el Teorema de Pitágoras, las relaciones trigonométricas y su inversa.

Para las primeras actividades con simuladores robóticos se recomienda restringir la posición de la bola al primer cuadrante utilizando el *checkbox* "solo primer cuadrante", debido a las dificultades relacionadas con los ángulos congruentes y la inversa de las relaciones trigonométricas.

El segundo brazo robótico (Figura 6) aumenta el nivel de complejidad porque es un brazo robótico con 2 segmentos, lo que requiere que se defina el ángulo de apertura entre los segmentos para que la garra se coloque a la distancia de la bola en relación con la base. Para ello el alumno puede utilizar las leyes del coseno o descomposición en 2 triángulos rectángulo para calcular el ángulo de apertura. Los movimientos de ascenso y descenso de la garra son controlados automáticamente por el simulador para disminuir el grado de complejidad de los comandos involucrados.

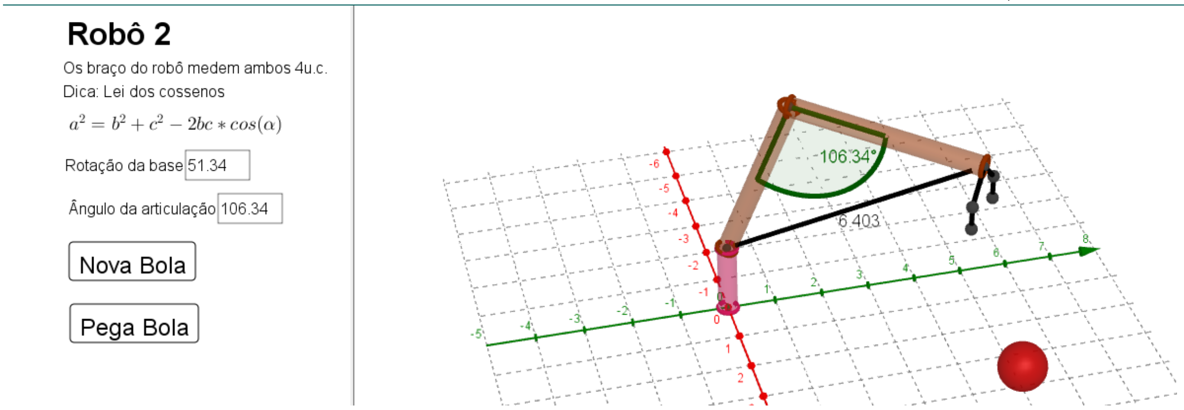


Figura 6 –Simulador robótico 2
Fuente: http://ppgecim.ulbra.br

Diferente del primer y segundo simulador, el tercer brazo robótico (Figura 7) presenta la bola posicionada en el espacio, siendo necesario, además de la aplicación de los conocimientos aplicados en actividades anteriores, el uso de trigonometría en el espacio. Debido a que está fuera del plano, la información de la posición vertical de la bola se presenta como un valor numérico sin un plano que facilita la identificación de los triángulos rectángulo y las relaciones trigonométricas involucradas. En este caso se define el ángulo de apertura entre los segmentos para lograr la diagonal mayor que el adoquín definido por el origen y las coordenadas de la bola en el espacio.

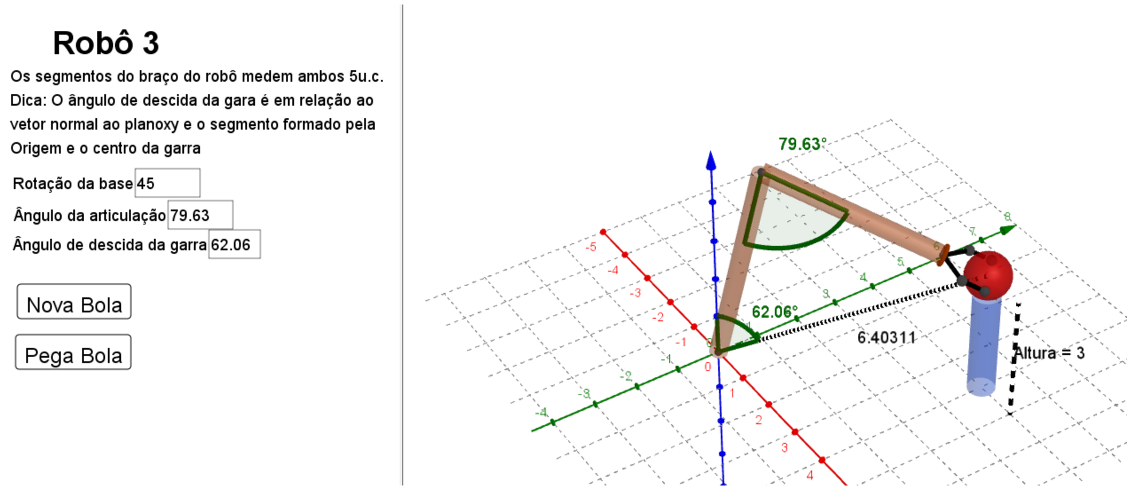


Figura 7 –Simulador robótico 3
Fuente: http://ppgecim.ulbra.br

Para el tercer simulador es necesario informar el ángulo de inclinación del brazo para que la garra se coloque en el espacio, porque es una coordenada esférica y para reducir la complejidad el ángulo informado debe ser el formado entre el normal al plano XY el segmento formado entre el origen y el centro de la garra.

Los simuladores de brazos robóticos son una gran alternativa para el uso contextualizado de la trigonometría en tareas online, particularmente en este momento de pandemia. De esta manera los alumnos trabajan con un tema contemporáneo, como es la robótica, aplicando la trigonometría del triángulo rectángulo.

5. Consideraciones finales

La Escuela necesita cambiar, actualizarse para formar a este alumno que trabajará en un mundo que no conocemos y el docente necesita ser ese profesional que comprende este mundo y visualiza esta nueva Escuela;

Se necesita un nuevo plan de estudios que desarrolle lo conocimiento y la creatividad, centrado en el aprendizaje.

¡El mundo contemporáneo exige un nuevo alumno! Con capacidad de presentar diferentes posibilidades de solución adecuadas a una situación problemática, que se enfoquen en diferentes aspectos del problema y/o diferentes formas de resolverlo, especialmente formas inusuales (originalidad).

En este sentido, es muy importante que el docente esté capacitado para desarrollar un trabajo que lleve a los estudiantes al aprendizaje y que este se lleve a cabo con diferentes niveles de tareas, considerando tareas de alta demanda cognitiva (hacer matemáticas), y que considere la posibilidad. de incluir en la planificación didáctica tareas abiertas, integradas con tecnologías y que permitan al alumno formular conjeturas y validarlas conducentes a la generalización.

6. Agradecimientos

Para la Coordinación para el Perfeccionamiento del Personal de Educación Superior (Capes) es con la beca de productividad científica de nivel 1 para Claudia Lisete Oliveira Groenwald.

Bibliografía

Brasil. (1996). Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Recuperado el 10 de Octubre de 2021 de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

Damasco, F. C.; Groenwald, C. L. O. y Llinares, S. C. (2020). A competência docente de Observar com Sentido situações de ensino e aprendizagem na Matemática. In: *Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática: referencias, práticas e perspectivas*. ULBRA.

Elkjaer, B. (2013). *Pragmatismo – Uma teoria da aprendizagem para o futuro. In: Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. São Paulo, Penso.

Groenwald, C. L. O. (2021). Educação Matemática em tempos de pandemia: uma experiência em um curso de Licenciatura em Matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, v. 16, p. 229-247.

Homa, A. I. R. (2019). Robotics Simulators in STEM Education. *Acta Scientiae* [en línea], 21(5), 178–191. Recuperado el 10 de Noviembre de 2021, de https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5417

Homa, A. I. R. (2019). Objetos De Aprendizaje Tridimensionales Construidos Con El Software Geogebra. *Revista Paradigma*, 40(1), 69–79. Recuperado el 11 de Noviembre de 2021, de https://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/8598/5182

Illeris. K. (2007). *How We Learn: Learning and Non-learning in Schools and Beyond*. London/New York: Routledge.

Illeris. K. (2013). *Teorias Contemporâneas da Aprendizagem*. São Paulo, Penso.

Llinares, S.; Buforn, P.; Groenwald, C. (2019). Mirar Profissionalmente las situaciones de enseñanza: una competencia basada enele conocimiento. In: *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Salamanca, Ediciones Universidad Salamanca.

NCTM. (2015). *De los principios a la acción – para garantizar el éxito matemáticos para todos.* México: Editando Libros S.A., 2015.

OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. *The Definition and Selection of Key Competencies – DeSeCo*. 2005. Recuperado em: 12 ago. 2019 de https://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

OECD. Organisation for Economic Co-Operation and Development. *Future of education and skills*. [Projeto]. Recuperado el 12 agosto de 2019 de http://www.oecd.org/education/2030-project

Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience at the source of learning and development.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Penalva, M. C.; Llinares, S. (2011). Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In:GOÑI, Jesus María (coord) et al. *Didáctica de las Matemáticas. Colección: Formación del Profesorado. Educación Secundaria*. Barcelona: Editora GRAÓ. 12, 27-51.

Ponte. J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. Investigar em Educação, 2, 93-169. Recupeado el 15 de octubre de 2021 de https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4071

Sá, P.; Paixão, F. (2015). Competências-chave para todos no séc. XXI: orientações emergentes do contexto europeu. *Interações*, v. 11, n. 39, p. 243-254.

Stein, M. K.; Lane, S. (1996). Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, v. 2(1), n. Routledge, p. 50–80.

Smith, M. S; Stein, M. K. (1998) Selecting ans Creating Mathematical Tasks: Foram Research to Practice. *Matehmatics Teaching in the Middle Scholl*, 3, 344-50.

Tamayo, C. & Tuchapesk, M. (2020). Desafios e possibilidades para a Educação (Matemática) em tempos de "Covid-19" numa escola em crise. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. 13(1), 29-48.

Therón, R.; García-Holgado, A.; Marcos-Pablos S. (2021). Docencia de la asignatura Interacción Persona-Ordenador en tiempos de pandemia: una experiencia con Microsoft Teams Teaching Human-Computer Interaction in pandemic time: an experience with Microsoft Teams. *Anais VI Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Cooperación* (CINAIC). Octubre 2021, Madrid, España.

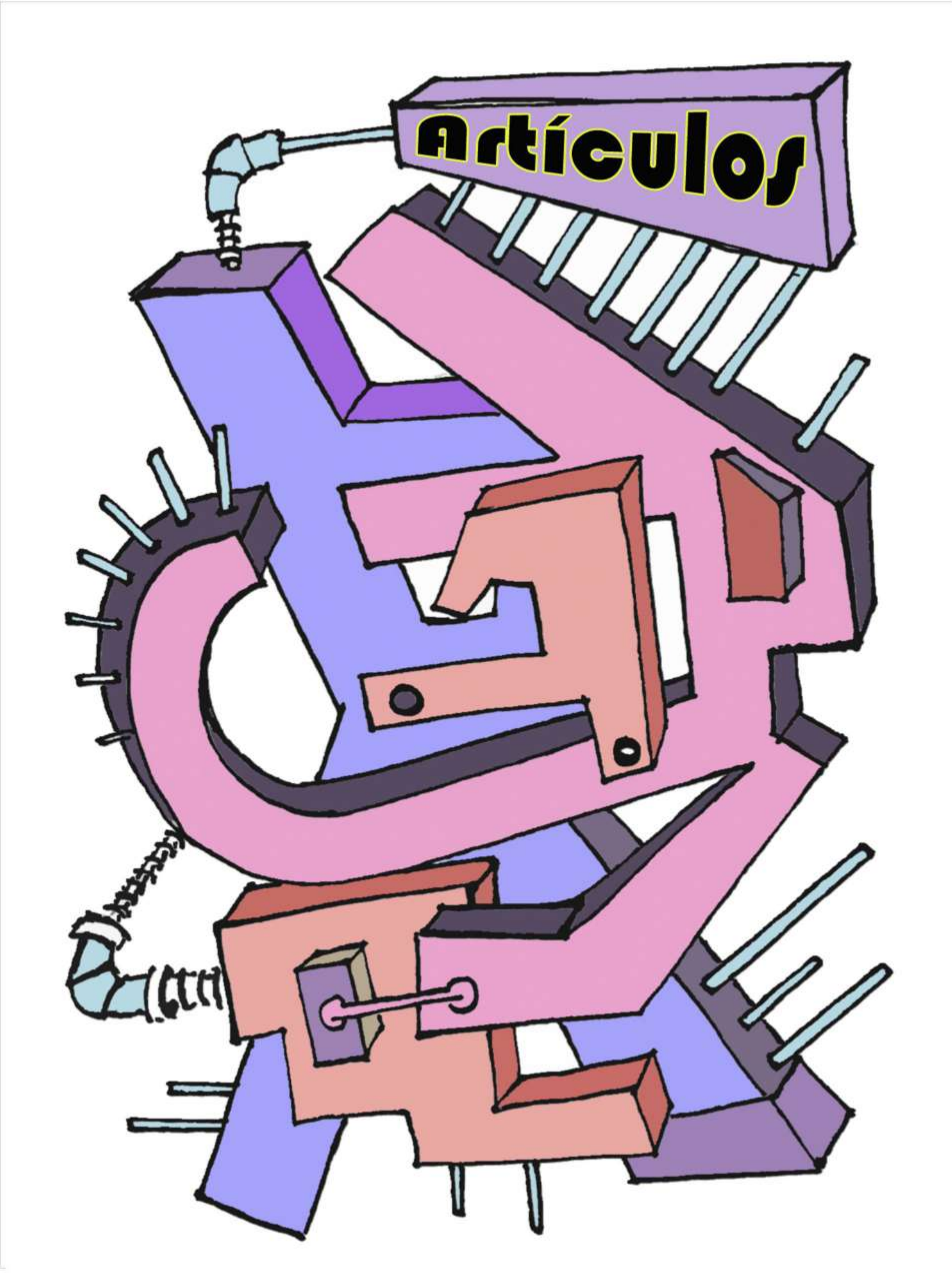
Groenwald Claudia Lisete Oliveira. Licenciada en Matemáticas y doctora en Ciencias de la Educación. Profesora titular de la Universidad Luterana de Brasil y coordinadora del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas. Desarrolla investigaciones sobre currículo en Educación Matemática, enseñanza e aprendizaje y tecnología en Educación Matemática. claudia1959@gmail.com.

Homa Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa. Licenciado en Matemáticas aplicadas a la Informática y doctor en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. Profesor del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil. Desarrolla investigaciones sobre tecnologías en Educación Matemática. iaqchan@hotmail.com.

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-16

Las tecnologías digitales en la enseñanza de las Matemáticas, frente a la pandemia de covid-19 en la ciudad de São João do Sóter – MA

Tecnologias digitais no ensino de Matemática no município de São João do Sóter – MA, frente à pandemia de covid-19

Israel Alves de Ananías Medeiros, Raimundo Luna Neres

Fecha de recepción: 22/05/2021
Fecha de aceptación: 31/10/2021

Resumen	Este artículo presenta un análisis de la enseñanza remota de matemáticas en la ciudad de São João do Sóter - MA, con énfasis en tecnologías digitales, en vista del contexto de la pandemia Covid-19. El objetivo es verificar el uso de estas herramientas en las clases de matemáticas, dada la enseñanza a distancia que se hizo posible ante la pandemia, de manera que se pueda inferir si hay aprendizaje por parte de los estudiantes que las utilizan. La metodología se basa en la investigación bibliográfica y la aplicación de dos cuestionarios con preguntas cerradas. En opinión de varios profesores y alumnos, las plataformas digitales se presentan como herramientas facilitadoras en las clases de matemáticas. Por otro lado, su carencia plantea problemas en la interacción y el aprendizaje profesor-alumno. Se concluye que la ciudad analizada enfrenta dificultades en cuanto a la enseñanza remota de las matemáticas, que se manifiestan a nivel nacional. **Palabras clave**: enseñanza de las matemáticas; clases remotas; plataformas digitales; Covid-19; diferencias sociales.
Abstract	This article presents an analysis of the remote teaching of mathematics in the city of São João do Sóter – MA, with an emphasis on digital technologies, considering the pandemic context of Covid-19. The objective is to verify the use of these tools in mathematics classes, given the remote teaching made possible in the face of the pandemic, so that it can be inferred whether there is learning by the students who use them. The methodology is based on bibliographical research and the application of two questionnaires with closed questions. In the view of several teachers and students, digital platforms present themselves as facilitating tools in mathematics classes. On the other hand, their lack raises problems in teacher-student interaction and learning. It is concluded that the analyzed city faces difficulties with regard to remote teaching of mathematics, which manifest themselves at the national level. **Keywords**: mathematics teaching; remote classes; digital platforms; covid-19; social inequalities
Resumo	Este artigo traz uma análise sobre o ensino remoto de matemática na cidade de São João do Sóter – MA, com ênfase nas tecnologias digitais, tendo em vista o contexto pandêmico da Covid-19. O objetivo é verificar o uso dessas ferramentas nas aulas de matemática, diante do ensino remoto viabilizado em face da pandemia, de modo que se possa inferir se há aprendizagem por parte dos alunos que as utilizam. A metodologia parte de pesquisa bibliográfica e aplicação de dois questionários com questões

fechadas. Na visão de diversos professores(as) e alunos, as plataformas digitais apresentam-se como ferramentas facilitadoras nas aulas de matemática. Por outro lado, a falta delas suscita problemas na interação professor-aluno e na aprendizagem. Conclui-se que a cidade analisada enfrenta dificuldades no que se refere ao ensino remoto de matemática, as quais se manifestam em nível nacional.

Palavras-chave: ensino de matemática; aulas remotas; plataformas digitais; covid-19; desigualdades sociais.

1 Introdução

Mundialmente, a sociedade enfrenta impactos financeiros e sociais causados pela pandemia de Covid-19 (Ladies, 2020). Isso posto, devido ao isolamento social, muitos setores da sociedade tiveram de se adaptar a esse momento difícil, e com a educação não é diferente.

Tal situação levou a mudanças na forma como os indivíduos realizam suas atividades. Nesse contexto, assim como ocorreu em outros países, o Brasil adotou o ensino remoto em sua rotina escolar, porquanto não havia possibilidade de continuar com as aulas de modo presencial (Megale & Nunes, 2020).

O município de São João do Sóter – MA foi igualmente afetado por essas circunstâncias. Por cúmulo, estudar a situação do ensino de matemática nesta cidade denota uma tentativa de compreender a realidade em que ela se insere e propor saídas capazes de ajudar na qualidade dessas aulas, contribuindo com "o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho", nesse momento pandêmico em que os atores do processo ensino-aprendizagem se encontram em condições vulneráveis de atuação (Brasil, 1994, p. 1).

Dessa forma, intenta-se com esta pesquisa responder à seguinte problemática: como se dá a aprendizagem em matemática na cidade de São João do Sóter – MA, no que alude ao uso de tecnologias digitais, tendo em vista o contexto pandêmico de covid-19?

Para a obtenção de respostas ao problema de pesquisa designado, realizou-se uma pesquisa bibliográfica, fundamentada por autores que versam sobre a temática, além de aplicação de questionários com questões fechadas, referentes ao desenvolvimento das aulas de Matemática com o uso das tecnologias digitais nessa modalidade (ensino remoto), o qual foi respondido por professores(as) de matemática do município. Logo, a abordagem adotada tem caráter qualitativo, o qual, segundo Prodanov e Freitas (2013), permite investigar múltiplas facetas do objeto estudado.

Nessa perspectiva, atina-se que a cidade de São João do Sóter – MA enfrenta problemas referentes ao processo ensino-aprendizagem que se manifestam em nível nacional, e na visão de alguns professores(as), as plataformas digitais constituem ferramentas facilitadoras, sobretudo nas aulas de matemática, sendo que a falta delas provoca problemas na interação professor-aluno/aluno-professor, principalmente no caso do ensino remoto.

2 Covid-19, desigualdades e consequências na educação

O cenário global é de muita preocupação e cautela, pois mais uma vez, o mundo vivencia uma pandemia, agora causada pelo novo Coronavírus (SARS-COV-2), que tem como consequência a covid-19 (Opas Brasil, 2020). Esse vírus mostra-se mais agressivo, quando comparado com o causador da Síndrome Respiratória Aguda Grave (SRAG), por exemplo.

No Brasil, em um comparativo entre as duas doenças citadas, observa-se que a covid-19 é mais letal e gera impactos em diversas esferas da sociedade. Corroborando esse contexto, Milanesi (2010, p. 724) aduz que

> no Brasil, até o dia 20 de março de 2010, foram confirmados laboratorialmente 46.355 casos de síndrome respiratória aguda grave (SRAG) causados pelo vírus Influenza A (H1N1); deste total, 31.450 eram em residentes no sul do país. A Região Sul teve uma taxa de mortalidade de 3/100 mil habitantes e o restante da federação de 1,1/100 mil habitantes. Foram confirmados 847 óbitos na Região Sul, do total de 2.087 do território brasileiro

Já a Covid-19, segundo dados do Ministério da Saúde (Brasil, 2020), provocou mais de 614.186 óbitos e infectou cerca de 22.077.000 brasileiros, até novembro de 2021, mostrando-se mais agressiva e preocupante que a SRAG (gripe suína). Por essa razão, inferiu-se a necessidade de isolamento social, em uma tentativa de conter o avanço da doença, além da adoção de medidas como ficar em casa e higienização adequada como as principais recomendações (OMS, 2020).

Durante o combate à SRAG, não foi necessário estabelecer o isolamento social, então, a geração atual enfrenta uma situação inédita, já que a Covid-19 obrigou diversos setores a se reorganizarem, uma vez que não seria possível realizar suas atividades presencialmente. Nesse cenário, a educação viu-se obrigada a adotar a modalidade de aulas remotas, podendo fazer uso do material impresso e/ou utilizando a internet.

Tal situação trouxe à baila o problema da exclusão digital no Brasil, pois embora o acesso à banda larga tenha aumentado no País, a quantidade de alunos sem acesso à internet é considerável. A propósito, Sorj e Guedes (2005, p. 103) contribuem com essa discussão ao afirmarem que “a compreensão da dinâmica social da exclusão digital e a definição de políticas de universalização de acesso por apresentar três grandes limitações: não identificar a qualidade do acesso — velocidade da conexão, custo e tempo disponível para ele”.

Dados referentes ao desenvolvimento da internet no País indicam que 39% das residências não estão conectadas, sendo que nas áreas rurais, esse número aumenta para 66%, chegando a 70% nas casas dos mais pobres. Entretanto, nos lares das famílias de classe A e B, o acesso à internet alcança 99 e 93%, respectivamente, evidenciando uma desigualdade quanto à utilização e ao acesso à rede mundial de computadores (Carta Capital, 2020).

A partir desses dados, pode-se deduzir que existe uma parcela considerável da população sem acesso à internet, principalmente os menos favorecidos financeiramente, os habitantes de zona rural, entre outros.

Inserido nesse contexto está o município de São João do Sóter – MA, uma cidade que possui 18.543 habitantes, sendo a zona rural maior que a zona urbana, tanto em área quanto população (Brasil, 2017). Segundo a página oficial do município, registraram-se 357 infectados pela covid-19 e quatro óbitos, até o dia dezessete de julho do ano de dois mil e vinte (São João do Soter, 2020a).

Com relação ao fato de a população sotense estar em maior número na zona rural, com 61,5 % (Infosanbas, 2010), trata-se de um indício de que pode haver desigualdade no acesso à internet, às plataformas digitais, aos aparelhos usados para acessar as aulas remotas (celular, tablet, computador, entre outros), tendo em vista a realidade ali vivenciada.

3 O ensino de Matemática no período pandêmico

A educação é considerada peça fundamental para o desenvolvimento humano. Nessa perspectiva, sem ela, as pessoas estão fadadas a viver à margem da sociedade, em um triste estado de alienação. Não obstante, a educação é direito de todos e deve ter uma qualidade mínima e satisfatória, mas dados da Prova Brasil revelam que existe um déficit de qualidade do ensino básico brasileiro (Qedu, 2018).

Se tal fato ocorre na modalidade presencial, no âmbito do ensino remoto essa situação tende a agravar-se, visto que nem todos os alunos contam com acesso a ferramentas como internet, celular, computador ou tablet.

Importa salientar que a aprendizagem do aluno e o pensamento matemático acontecem por meio de etapas. Assim, para que ele se desenvolva bem na etapa seguinte, seu aprendizado na fase anterior deve ser satisfatório. Ademais, "é importante também considerarmos que se a aprendizagem acontece em processos, cada indivíduo tem seu próprio ritmo e seu próprio tempo, que devem ser considerados e respeitados pelo professor" (Mato Grosso, 2000, p. 159).

Consoante Barbosa (2000),

> ... é preciso acreditar nas possibilidades do aprendiz, valorizar o que ele é capaz, entusiasmá-lo para realizar tentativas, entendendo o seu desempenho como o melhor que pôde obter naquele momento, porém, com possibilidades de ser melhorado a partir da mediação. (p. 56).

No que concerne às possíveis explicações para a dificuldade de aprendizagem em matemática, autores como Nacarato, Mengali e Passos (2009) mencionam que muitas podem ser explicadas por fatores como, por exemplo: reforço inadequado ou insuficiente; falta de oportunidades para que os alunos vão à prática, já que materiais ou ato concreto ajudam a dar sentido e aprender a parte teórica; ausência ou pouca instrução; falta de estímulos ou forma errada de incentivar; dificuldades nas habilidades, entre outras.

Contudo, diante da realidade em que se encontram educandos e educadores em todo o Brasil, em virtude da pandemia de covid-19, percebe-se que muitos professores de matemática não tiveram treinamento para ministrar aulas *on-line* ao longo da formação inicial. Então, cabe a esses profissionais e ao sistema educativo (escolas, secretarias de educação, prefeituras etc.) buscarem formas de oferecer as aulas da melhor maneira possível nesse período emergencial – o que requer planejamento, competência e disposição.

De fato, o contexto das aulas remotas trouxe um grande desafio para os docentes, conforme Goulart et al. (2018), pois antes da pandemia, já havia carência na formação inicial desses profissionais, no que alude ao uso de tecnologias com fins pedagógicos, o que se agravou com o isolamento social provocado pela pandemia.

No entendimento de Cury (2020), a maioria dos docentes demonstram não se sentirem preparados para lecionar nessa situação, até mesmo porque não receberam qualquer formação ou apoio para esse processo.

No tocante ao ensino de Matemática, concebe-se que existem dificuldades a serem enfrentadas com as aulas remotas – a exemplo de acesso ao material impresso, a celulares, notebooks, computadores – a fim de que se estabeleça um feedback positivo entre professor-aluno e aluno-professor, resultando em melhoria no aprendizado dos alunos.

Para Saviani (1991), o trabalho em educação compreende a ação de construir, de maneira direta ou indireta, em cada um, a humanidade produzida pelo ser humano, histórica e coletivamente. Assim, o objeto da educação refere-se, por um lado, à identificação dos elementos culturais a serem assimilados pelos seres de nossa espécie, para que possam se tornar humanos e, por outro, conjuntamente, é a descoberta das maneiras mais adequadas de alcançar esse objetivo.

Tendo isso em vista, atina-se que para que o processo ensino-aprendizagem da matemática possa fluir adequadamente, é necessário que o aluno seja visto como um sujeito em desenvolvimento, dotado de criticidade, e não apenas um receptor de conteúdos. Não obstante, faz-se indispensável o diálogo nessa dinâmica, visando a propiciar aos sujeitos um posicionamento critico-reflexivo.

Corroborando essa perspectiva, Roseira (2005) assevera que no que tange ao conhecimento matemático, requer-se que as práticas pedagógicas dos educadores estejam abertas ao diálogo, valorizando as contribuições individuais e coletivas dos educandos, dando a eles espaço para a discussão, demonstração e exposição das ideias matemáticas.

Com essa postura, os professores apropriam-se de sua função social e, consequentemente, dos meios que facilitarão o processo de socialização dos conhecimentos (de diversos tipos), ensejando a transformação.

Dito isso, ratifica-se que utilizar as plataformas digitais para o desempenho da profissão docente nas aulas de matemática, nesse momento de excepcionalidade mundial, mostra o engajamento na busca pela continuidade do processo ensino-aprendizagem. Trata-se de colocar em prática uma metodologia (uso dos recursos digitais) já conhecida por muitos, mas pouco utilizada nas escolas públicas.

4 Percurso metodológico

Em uma pesquisa científica, é necessário entender que ela se apresenta de dois modos: o primeiro, como procedimento de criação do conhecimento; e o segundo, como instrumento de aprendizagem (Demo, 2000).

Além disso, Lakato e Marconi (2007) afirmam que a pesquisa é um dispositivo não informal que possui método de pensamento reflexivo, necessitando, pois, de um tratamento científico, sendo o caminho para conhecer a realidade ou para descobrir axiomas parciais.

Nessa lógica, a presente investigação parte de abordagem qualitativa, a qual, segundo Bogdan e Biklen (2003), concebe-se por meio do conhecimento, mediante o componente interno das situações, sob o prisma analítico-comportamental-cultural. Logo, o pesquisador é instrumento fundamental para o recolhimento e análise dos dados, a partir de reflexões, interpretações e teorias que explicam ou contestam o que se observa.

O procedimento adotado, se deu por meio de um estudo de caso, cujo mecanismo comunga com a natureza deste estudo. Creswell (2014), constata, que o estudo de caso, contribui com uma metodología de pesquisa denominada como aplicada, em que se procura a aplicação prática de conhecimentos que sirva como resolução de entraves sociais

Além disso, a pesquisa foi desenvolvida a partir de uma revisão bibliográfica, fundamentando-se em estudos de autores que versam sobre a temática, em livros e artigos inclusos em indexadores, tais como: Google acadêmico, Scielo, entre outros. Ademais, aplicou-se questionários on-line para colher as características de um grupo social específico, intentando observar o ensino remoto com o uso de recursos tecnológicos digitais nas aulas de matemática, no município de São João do Sóter-MA (Richardson, 2008).

Aliás, vale neste momento apresentar a cidade de São João do Sóter, situada no estado do Maranhão, pertencente à microrregião de Caxias. Conta com, aproximadamente, 18.543 habitantes (estimativa em 2019), oferecendo 12 escolas do ensino fundamental II, com uma média de 400 matrículas por turmas. O corpo docente lecionando matemática é de 24 professores(as) (IBGE, 2018).

A cidade, assim como boa parte do mundo, vem sofrendo as consequências causadas pela pandemia de covid-19, e está seguindo as orientações da OMS no combate ao vírus, implementando ações como isolamento social, distanciamento, higienização e conscientização acerca da necessidade de uso de máscaras.

Na esfera educacional, a Secretaria Municipal de Educação elaborou um plano de ação composto pelo plano de trabalho, referente ao período de suspensão das aulas presenciais em virtude da pandemia de covid-19, e por um guia de orientações gerais para o ensino remoto, que deve ser seguido pelas escolas nesse período excepcional (São João do Sóter, 2020c).

No guia de orientações, nota-se que foi sugerido o uso do modelo misto, com atividades impressas entregues para os pais ou responsáveis, e/ou acesso remoto às aulas por meio do Facebook/Comunidade, WhatsApp, E-mail, entre outras plataformas digitais. Entretanto, as escolas tiveram autonomia para seguir o modelo que melhor se adequasse à sua realidade (São João do Sóter, 2020b).

A coleta dos dados foi cumprida via questionários on-line, elaborado no Google Forms, sendo realizada em 2020, no período entre 9 a 18 de julho, com 31 alunos do ensino fundamental integrantes do 6º ao 9º, moradores da zona urbana e zona rural, com uma faixa etária entre 11 a 15 anos, em sua maioria, alunos carentes onde a escala é seu ambiente de estudo, lazer e de alimento.

Além desses alunos participaram 17 professores(as) que lecionam matemática em turmas variadas do 6º ao 9º ano na rede municipal de ensino, em relação ao género sexual desses docentes, 90% do sexo masculino e apenas 10% do sexo feminino, espalhados em diversas localidades da cidade de São João do Sóter - MA, zona rural, nos povoados: Axixá, Bacabinha, Pedras, Pequizeiro, Poção, Santa Maria, Bom Jardim e zona urbana (sede). Assim, os participantes responderam ao questionário *on-line*, compartilhado de forma remota, por intermédio de grupos do WhatsApp e e-mail.

As questões que compunham o questionário para os professores, foram: durante a pandemia, qual é o formato das aulas de matemática em sua escola? Existe um plano para o desenvolvimento do ensino remoto no município? O município disponibiliza aos professores alguma ferramenta digital para a realização das aulas remotas? Dentre as ferramentas digitais abaixo, qual ou quais você faz uso para a realização das aulas remotas? Dentre as opções que você escolheu na questão anterior, qual a motivação da escolha por essa(s) ferramenta(s) digitais? Qual o nível de engajamento dos alunos nas aulas de matemática com o uso das ferramentas digitais? Qual é a maior dificuldade encontrada no desenvolvimento do ensino de matemática com o uso das ferramentas digitais? (Google Forms, 2020).

Para os alunos, as perguntas realizadas direcionaram-se ao acesso à internet: se possuem internet em casa ou não. Para os que responderam não, a pergunta seguinte foi: você desloca-se para a casa de algum parente ou vizinho para assistir às aulas ou acessa na escola? Já sobre o ensino e aprendizagem, a pergunta era em relação às aulas *on*-line e o uso do WhatsApp, identificando em qual das alternativas eles se enquadravam: aprendi 25% dos conteúdos; aprendi 50% dos conteúdos; aprendi 75% dos conteúdos; aprendi 100% dos conteúdos.

Com o levantamento dos dados obtidos via questionários, foi realizado a análise dos mesmos, onde segundo Gatti (2005, p. 44) “consiste em um processo de elaboração, de procura por caminhos, em meio ao volume das informações levantadas. [...] o processo de análise é sistêmico, claro nos percursos escolhidos e não espontaneísta.” Cabe informar que a análise terá o carater qualitativo.

Para Bardin (1977), a análise qualitativa é um procedimento mais intuitivo, sendo mais flexivo, podendo se adaptar a situações inesperadas ou ao desenvolvimento das hipóteses. A autora ainda acrescenta que existem certas características particulares. Que são válidas, em especial, na elaboração das deduções especificas.

A análise das respostas obtidas com a aplicação dos questionários, terá como base a bibliografia existente a respeito do tema proposto e como referência a análise de conteúdo em pesquisas qualitativas na área da educação matemática do autor Rodrigues (2019) e pesquisa qualitativa em educação matemática dos autores (Firentini, Garnica, Bicudo, Borba & Araújo, 2020).

Complementarmente, analisou-se o plano de trabalho da Secretaria Municipal de Educação, referente ao período de suspensão das aulas presenciais em virtude da pandemia de covid-19, e o Guia de Orientações Gerais para o Ensino em São João do Sóter-MA, a fim de observar as medidas adotadas pelo município.

6 Discussões e resultados

Visando a entender a situação dessas escolas, no que tange ao ensino remoto, a primeira questão lançada no questionário para os professores, teve o intuito de identificar o formato escolhido por essas instituições, sendo propostas como alternativas: presencial, híbrido ou remoto. Os dados apontaram que 100% dos participantes optaram pelo modelo remoto, o que indica o comprometimento com a vida e a segurança daqueles que compõem a escola.

Para Oliveira (2020), tendo em vista a imensa desigualdade educacional que se estende por todo o Brasil, diversas realidades foram desveladas nas instituições de ensino por conta da pandemia de covid-19, com escolas privadas dotadas de infraestrutura e adaptando-se à realidade das aulas remotas, e escolas públicas que não contam com estrutura para oferecer o ensino remoto adequadamente, interferindo sobremaneira no ensino dos estudantes.

Em seguida, a segunda questão demonstra a preocupação com o conhecimento do plano para o desenvolvimento do ensino remoto no município. Nos resultados, revelou-se que 93,8% dos participantes informaram conhecer a existência dele, enquanto 6,2% desconhecem o referido plano de ação.

Esses dados denotam que a iniciativa da secretaria em relação à criação e divulgação do Plano de Ação para o período pandêmico, em relação aos professores de matemática, obteve bons resultados. Contudo, é importante frisar que se alguns dos sujeitos participantes do processo ensino-aprendizagem, pertencente a esse universo ou não, o desconhecem, poderá haver, no mínimo, discordância entre o que a Secretaria de Educação espera e as ações implantadas por aqueles que não tiveram contato com tais orientações.

Outrossim, é importante ponderar que as orientações foram elaboradas para "não prejudicar o cumprimento do calendário escolar e, ainda, resguardar o bem-estar dos estudantes, professores, equipe técnica /gestora e demais profissionais que atuam nas escolas da rede municipal de ensino" (São João do Sóter, 2020b).

Já a observação acerca do uso de ferramentas tecnológicas digitais por parte dos professores de matemática, frente à pandemia de covid-19 remete à terceira pergunta, em relação à oferta de alguma ferramenta digital para a realização das aulas remotas disponibilizadas pelo município. Assim, 47,1% afirmaram possuir conhecimento, e 52,9%, total desconhecimento sobre qualquer ferramenta digital.

Essa situação evidencia o desconhecimento dessas importantes ferramentas por uma parcela significativa dos professores. Porém, em informações levantadas junto à coordenação pedagógica do município, constatou-se que a plataforma denominada Geduca (o diário on-line dos professores e alunos) obteve alterações, onde os professores poderiam anexar atividades e vídeos. Entretanto, a qualificação para a utilização desses recursos não ocorreu.

Esse contexto remete à já referida situação de carência em relação à capacitação dos docentes para atuarem nesse cenário de ensino remoto, pois parte dos professores não estão preparados para o uso de tecnologias digitais. Além disso, soma-se o fato de que eles não tiveram tempo para qualquer capacitação, sem falar que o ensino remoto ainda não é disciplina obrigatória na formação pedagógica.

Coadunando Flores e Lima (2021), essa realidade insere-se em um momento relevante de transição dos docentes, onde se revelam muitas inseguranças e dificuldades, o que "compeliu a uma mudança desenvolvida sem a adequada reflexão, formação e preparação, submetendo os professores a adaptações nas suas práticas" (p. 95).

Por cúmulo, para Joye, Moreira e Rocha (2020), o ensino remoto,

> ... envolve o uso de soluções de ensino e produção de atividades totalmente remotas, como, por exemplo, a produção de videoaulas que podem ser transmitidas por televisão ou pela Internet. [...] O objetivo principal nessas circunstâncias não é recriar um novo modelo educacional, mas fornecer acesso

temporário aos conteúdos e apoios educacionais de uma maneira a minimizar os efeitos do isolamento social nesse processo. (p. 13).

Os educadores veem-se diante de novas dificuldades, as quais segundo Valente et al. (2020) referem-se ao desafio de preparar, apresentar e dialogar sobre diferentes temas, utilizando recursos e linguagens distintos, bem como um tempo mais compactado.

Com o intuito de responder a esses desafios que a realidade pandémica estabelece, Feitosa et al. (2020) sobrelevam que o ensino remoto requer dos professores um tempo maior de dedicação, demandando, inclusive, que eles trabalhem também nos fins de semana.

Ainda vislumbrando o uso de ferramentas digitais para o ensino de matemática, questionou-se: dentre as ferramentas digitais, qual ou quais você faz uso para a realização das aulas remotas, no que tange à parte *on-line*. A esse respeito, o Gráfico 1 ilustra os achados.

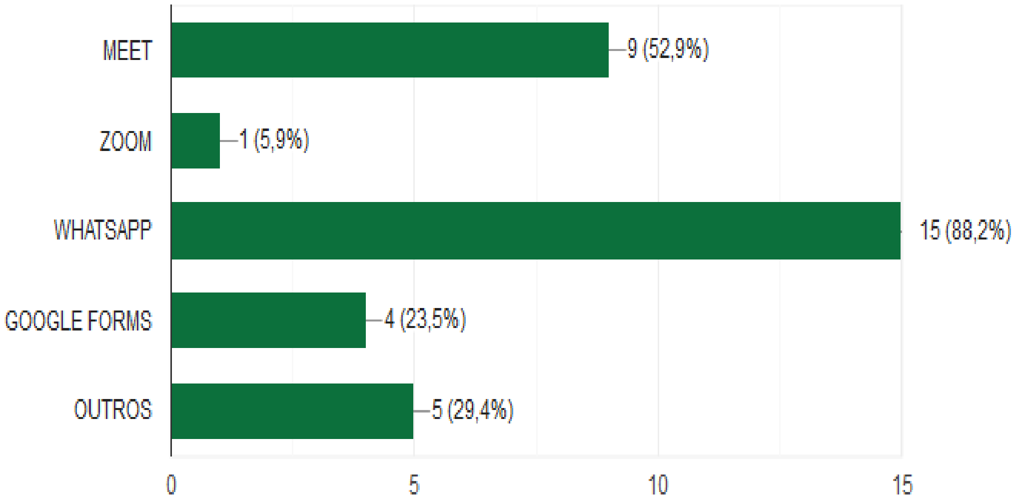


Gráfico 1 - Ferramentas digitais mais utilizadas pelos professores de Matemática, frente à pandemia de covid19, no município de São João do Sóter-MA
Fonte: elaborado pelo autor (2020).

A partir do Gráfico 1, é possível inferir que os professores fazem uso de alguma ferramenta digital, sendo o WhatsApp e o *Meet* os mais utilizados, com 87,5% e 50%, respectivamente. Partindo da análise das respostas individuais, conclui-se que 6 dos 17 docentes estão fazendo uso de uma ferramenta; outros 6 dos 17 estão fazendo uso de duas; 4 dos 17 usam três; e um dos 17 faz uso de 4 ferramentas.

Sobre a procura por maior aprofundamento no tocante às aulas remotas, a parte *on-line*, foi feita uma pergunta que aborda aspecto considerado relevante: qual a maior dificuldade encontrada no desenvolvimento do ensino de matemática com o uso das ferramentas digitais, em meio à pandemia de covid-19?

Eis as respostas: cerca de 58,8% apontaram o acesso à internet; 23% mencionaram a posse de aparelhos eletrônicos; e 17,6%, a comunicação entre professor-aluno/aluno-professor. Cabe ressaltar que não houve respostas para a alternativa *dificuldade com o uso da tecnologia*. O Gráfico 2 demonstra tais resultados.

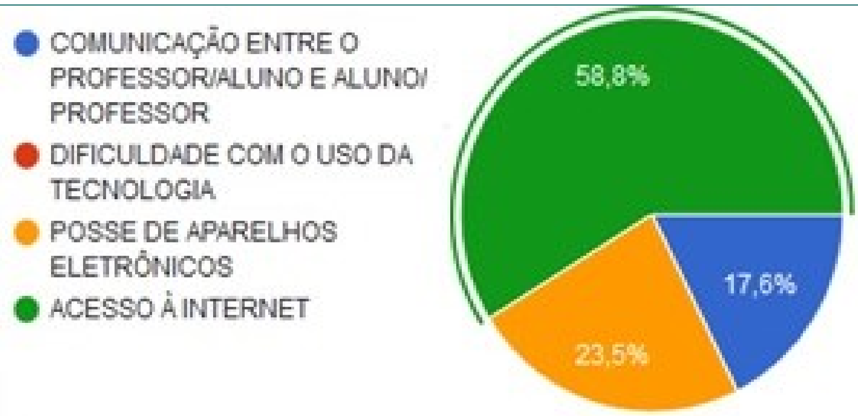


Gráfico 2 - Dificuldade encontrada no desenvolvimento do ensino de matemática com o uso de ferramentas digitais. Fonte: elaborado pelo autor (2020).

Esses dados remetem a problemas relatados (acesso à internet, desigualdades sociais) enquanto frutos de dificuldades estruturais. Aliás, nota-se que durante a pandemia, emergiu a fragilidade presente nas comunidades carentes e a necessidade de ampliar a cobertura sobre esse segmento.

De acordo com Arruda (2020), “as tecnologias tornaram-se as principais referências potencializadoras de iniciativas voltadas para a manutenção da conexão educacional”. Contudo, é preciso considerar a desigualdade social, fundamentalmente nas escolas públicas, em que grande parte dos estudantes não possui acesso às ferramentas tecnológicas como computador, *notebook*, *tablet*, celular, nem mesmo à internet. (p. 263).

De acordo com Sorj e Guedes (2005), “a universalização do acesso é, antes de tudo, um instrumento para diminuir os danos sociais do ponto de vista da luta contra a desigualdade” (p. 102).

Para inferir algo com relação à interação entre professor-aluno e alunos-ferramentas, propôs-se a seguinte pergunta: qual o nível de engajamento dos alunos nas aulas de matemática com o uso das ferramentas digitais. Adicionalmente, acrescenta-se a visão dos professores com relação à indagação: dentre as opções que você escolheu na questão referente às ferramentas digitais que você usa, qual a motivação da escolha por essa(s) ferramenta(s) digitais?

Para a primeira questão, os intervalos de 25% a 50%, e 50% a 75%, empatados com 35,3%, mostram que há um comprometimento, um esforço dos alunos (na medida do possível, tendo em vista cada realidade) na tentativa de alcançar um aprendizado com mais qualidade. É o que mostra o Gráfico 3, a seguir.

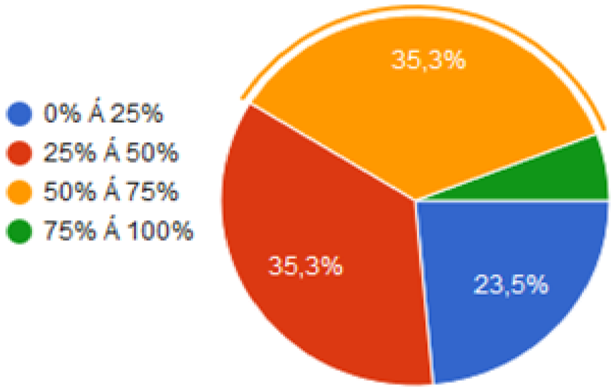


Gráfico 3 - Engajamento dos alunos ao utilizarem as ferramentas digitais nas aulas de Matemática. Fonte: elaborado pelo autor (2020).

Depreende-se que esses intervalos podem sofrer interferência de situações como: mais de uma criança de uma mesma família na escola e apenas um aparelho celular; uso de dados móveis em locais com baixa cobertura; pacote de internet limitado.

Já na segunda pergunta, referente ao motivo da escolha por tais ferramentas nesse contexto, apresentam-se as seguintes alternativas: por ser uma ferramenta gratuita, facilidade no manuseio e mais atraente para os alunos.

Dez dos 17 participantes jugaram que as tecnologias digitais são atraentes para o alunado, o que equivale a 58,8%, mostrando que os professores estão recorrendo a esse tipo de ferramenta.

Em consonância com Perrenoud (2000),

> a verdadeira incógnita é saber se os professores irão apossar-se das tecnologias como um auxílio ao ensino, para dar aulas cada vez mais bem ilustradas por apresentações multimidias, ou para mudar de paradigma e concentrar-se na criação, na gestão e na regulação de situações de aprendizagem. (p. 137).

Em relação ao questionário realizado com os alunos, sobre a questão de possuir ou não internet, 78,6% afirmaram possuir em suas residências, enquanto 21,4 não dispõem desse recurso. Isso demonstra um percentual considerável para a quantidade de participantes com acesso em casa, mas para aqueles(as) que não possuem, a segunda questão visa a conhecer a realidade desses sujeitos, investigando o que fazem para tem acesso ao uso de tecnologias por meio da internet para assistir às aulas.

É importante conhecer a realidade e o contexto que rodeia o estudante, pois é certo que se deve (re)elaborar o Plano de Ensino, pautado na ponderação. Para Rubenich, Cunha e Ferreira (2015), apenas com um ensino que reconhece a existência vivenciada pelos alunos, sugere-se conhecer o meio onde vivem, as ocorrências que enfrentam, tendo em vista aspectos como saneamento básico ou situações econômicas, com seus moradores, e com os seus mais íntimos, será possível a tão esperada transformação na maneira como os alunos pensarão, agirão e sentirão. O Gráfico 4 apresenta os percentuais e as opções para os alunos.

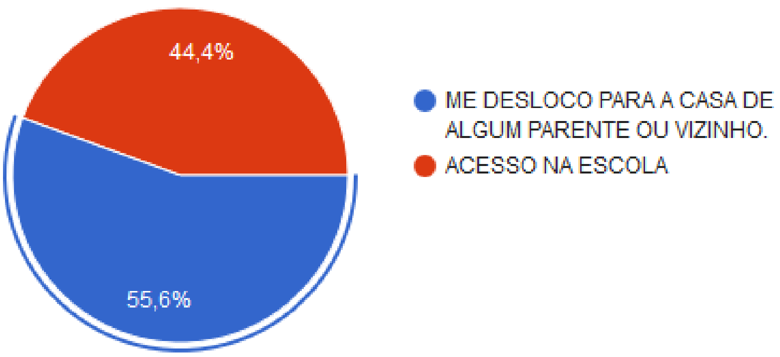


Gráfico 4 – Outras formas de acesso a internet para obter acesso as aulas online. Fonte: elaborado pelo autor (2020).

Para essa realidade os dados apresentam de forma clara e de fácil verificação que existe uma carência desses alunos em relação ao acesso a internet. Sorj e Guedes, (2005 p. 103) contribui afirmando que, “a compreensão da dinâmica social da exclusão digital e a definição de políticas de universalização de acesso por apresentar três grandes limitações: não identificar a qualidade do acesso — velocidade da conexão, custo e tempo disponível para ele”.

No tocante ao ensino e aprendizagem dos alunos, os percentuais obtidos com as respostas se apresentam logo abaixo no gráfico 5.

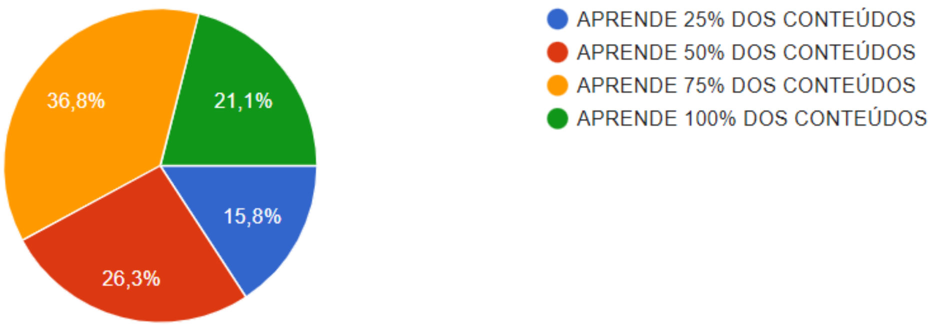


Gráfico 5 – respostas sobre o processo de ensino e aprendizagem na pandemia da covid 19. Fonte: elaborado pelo autor (2020).

Portanto, nota-se que, de certo modo, os alunos adquiriram algum conhecimento, pois se considerados os percentuais de 25% a 100%, houve aqueles(as) que se enquadram em uma perspectiva de aprendizagem.

Para Moretti e Né (2015) entender a linguagem desta forma permite pensar na viabilização de se obter meios a respeito do processo de ensino e aprendizagem de matemática por meio dos usos que são feitos da linguagem durante as propostas de envolvimento com a matemática

Contudo, os dados totais possibilitam inferir que o município aderiu ao isolamento social, e que o ensino de matemática na modalidade remota obteve ajuda das ferramentas digitais de modo a complementar o processo ensino-aprendizagem, mantendo o *feedback* entre professor- aluno.

Ademais, desvelou-se o problema do acesso à internet, causado por entraves sociais, configurando uma das causas de desconstrução dos direitos assegurados aos alunos moradores de comunidades carentes, como é o caso de boa parte em São João do Sóter-MA, potencializando-se nesse período pandêmico.

8 Considerações finais

A pandemia impactou negativamente diversos setores da sociedade. Na educação, impossibilitou que o processo ensino-aprendizagem ocorresse de maneira presencial, impondo o sistema de aulas remotas. Com isso, professores, alunos, pais e demais participantes do contexto educacional tiveram de se adaptar ao momento.

Essa situação expôs desigualdades e injustiças sociais existentes no Brasil, sobretudo no tocante a problemas de acesso à internet por parte dos alunos que dependem dessa ferramenta para acesso ao ensino ofertado atualmente, em face da pandemia.

Nesse contexto, investigou-se a situação do uso de tecnologias digitais no ensino de matemática no município de São João do Sóter - Maranhão, onde segundo os professores de Matemática que participaram da pesquisa, as escolas aderiram ao ensino remoto e a Secretaria de Educação elaborou um Plano de Ação com orientações às instituoções, propondo o modelo misto, no qual são ministradas as aulas *on-line* e material de apoio impresso a ser recebido pelos alunos.

Os dados coletados mostraram que os professores fazem uso desses recursos tecnológicos com engajamento, na busca pela continuidade do processo, e reconhecem a possibilidade de aulas mais atraentes para os alunos nesse período pandêmico. Entretanto, 58,8% indicaram que o maior empecilho encontrado na manutenção das aulas nesse período foi o acesso à internet, revelando problemas observados em nível nacional naquele município.

Cabe lembrar que essas dificuldades impactam diretamente alunos e professores e, por conseguinte, nas aulas de matemática. A partir dos estudos realizados, pode-se deduzir que as plataformas digitais constituem ferramentas facilitadoras para as aulas, possibilitando o engajamento dos alunos.

Todavia, a carência delas pode provocar problemas na interação professor-aluno e aluno-professor, principalmente no caso do ensino remoto, em meio à pandemia de covid-19. Finalmente, infere-se que existe aprendizagem por parte dos participantes, ainda que de forma menos acentuada.

Referências

Arruda, EP. (2020). Educação remota emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de covid-19. *Em Rede Revista de Educação a Distância*, 7(1), 257-275.

Bardin, L. Análise de conteúdo. Lisboa: edição 70, 1977.

Barbosa, LMS. (2008). *Psicopedagogia*: um diálogo entre a psicopedagogia e a educação (2nd. ed.). Bolsa Nacional do Livro.

Brasil. (1996). *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. LDB. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm

Brasil. (2017). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. *Cidades*. IBGE.

Brasil. (2019). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sinopse Estatística da Educação Básica 2018*. Inep. http://portal.inep.gov.br/sinopses-estatisticas-da-educacao-basica

Brasil. (2020). Ministério da Saúde. *Painel Coronavírus (COVID - 19)*. https://susanalitico.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html

Carta Capital. *A geografia da desigualdade digital escancarada pela pandemia*. https://www.cartacapital.com.br/blogs/br-cidades/a-geografia-da-desigualdade-digital-escancarada-pela-pandemia/

Cury, CRJ. (2020). Educação escolar e pandemia. *Pedagogia em Ação*, Belo Horizonte, *13*(1), 8-16.

Creswell, John W. investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre abordagens. Tradução: Sandra mallmann. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

Dantas, T. *"Youtube" Brasil Escola*. https://brasilescola.uol.com.br/informatica/youtube.htm

Demo, P. (2000). *Metodologia do conhecimento cientifico*. Atlas.

Dos Santos Junior, VB e Da Silva Monteiro, JC. (2020). Educação e covid-19: as tecnologias digitais mediando a aprendizagem em tempos de pandemia. *Revista Encantar-Educação, Cultura e Sociedade*, 2, 01-15.

dos Santos Né, A. L., & Moretti, M. T. (2015). Analisando a linguagem matemática e refletindo sobre o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 8(4).

Feitosa, MC, Moura, PS, Ramos, MSF e Lavor, OP. (2020). Ensino remoto: o que pensam os alunos e professores? In: Congresso sobre Tecnologias na Educação (CTRL+E). Sociedade Brasileira de Computação, (pp. 60-68). https://doi.org/10.5753/ctrle.2020.11383

Flores, JB e Lima, VM do R. (2021). Educação em tempos de pandemia: dificuldades e oportunidades para os professores de ciências e matemática da educação básica na rede pública do Rio Grande do Sul. *Revista Insignare Scientia*, Cerro Largo, *4*(3), 94-109.

Gatti, B. A. Grupo focal na pesquisa em ciências sociais e humanas. Brasília: Líber livro, 2005

Google Forms. (2020). Ensino de matemática com o uso das tecnologias digitais frente a pandemia da covid 19. *Google forms*. https://forms.gle/XEQGSB7WMq99uGEW6

Google Meet. (2020). *Google for education*. [S.l.: s.n.]. https://support.google.com/meet/answer/9545619?hl=pt-BR&ref_topic=7306097

Infosanbas. (2020). *São João do Soter*. https://infosanbas.org.br/municipio/sao-joao-do-soter-ma/

Joye, CR, Moreira, MM e Rocha, SSD. (2020). Educação a distância ou atividade educacional remota emergencial: em busca do elo perdido da educação escolar em tempos de COVID-19. *Research, Society and Development*, *9*(7), 1-29.

Ladies, EM. (2020). Novo coronavírus e seus impactos econômicos no mundo. *Boletim de conjuntura (BOCA)*, *1*(2), 39-42.

Lakatos E. M. e Marconi, M. de A. (2007). *Fundamentos de metodologia científica* (6ª ed., 5. reimp.). Atlas.

Mato Grosso. (2000). *Escola ciclada de Mato Grosso*: novos tempos e espaços para ensinar. Seduc.

Megale, A e Nunes, A. (2020). O trabalho com o gênero debate - uma proposta de ensino remoto. *In*: Liberali, FC et al (Orgs.). *Educação em tempos de pandemia*: brincando com um mundo possível (p. 172-180). Pontes Editores.

Milanesi, R, Caregnato, RCA e Wachholz, NIR. (2011). Pandemia de Influenza A (H1N1): mudança nos hábitos de saúde da população, Cachoeira do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil, 2010. *Cadernos de Saúde Pública*, *27*, 723-732.

Moran, JM, Massetto, MT e Behrens, MA. (2013). *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica* (21º ed. rev. e atual.). Papirus.

Moreira, AFB et al. (2001). *Para quem pesquisamos, para quem escrevemos*: o impasse dos intelectuais. Cortez.

Nacarato, AM, Mengali, BL da S e Passos, CLB. (2009). *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Autêntica.

OMS. *Orientações técnicas para países*. https://www.who.int/pt

Opas Brasil. (2020). *OMS afirma que COVID-19 é agora caracterizada como pandemia*. https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_content&view=article&id=6120:oms-afirma-que-covid-19-e-agora-caracterizada-como-pandemia&Itemid=812

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar*: convite à viagem. Artmed.

Fiorentini, Dario; Garnica, Antonio Vicente; Bicudo, María Aparecida Viggiani. (2020). Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Org. Borba, Marcelo de Carvalho; Araujo, Jussara de Loiola. Belo Horizonte: Autêntica.

Prodanov, CC e Freitas, EC de. (2013). *Metodologia do trabalho científico*: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico (2ª ed.). Feevale.

Qedu. (2018). *Aprendizado dos alunos*: Brasil. https://qedu.org.br/brasil/aprendizado?gclid=cjwkcajwvmqdbhb8eiwa2ismpfy69icfva7e0-__4fpnwiw691u3vglbaqzluuvzhleyhcqtnu7l-xoc180qavd_bwe

Richardson, RJ. (2008). *Pesquisa social*: métodos e técnicas (3. ed. reimp.). Colaboradores José Augusto de Sousa Peres et al. Atlas.

Rodrigues, Márcio Urel. (2009). Analise de conteúdo em pesquisas qualitativas na área da educação matemática. Curitiba: CRV.

Roseira, NAF. (2005). Educação matemática e valores: das concepções dos professores à construção da autonomia. *Revista Formadores*, *1*(2), 7.

Rubenich, JS, Cunha, RM e Ferreira, J de L. (2015). As relações da proximidade da realidade dos alunos com as práticas pedagógicas. *Educere, XII Congresso Nacional de Educação*. http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/22250_10831.pdf.

Salata, A et al. (2013). Desigualdades digitais: acesso e uso da internet, posição socioeconómica e segmentação espacial nas metrópoles brasileiras. *Análise social*, (207), 288-320.

São João do Sóter. (2020a). *Boletim Epidemiológico Covid-19*. São João do Sóter. http://covid.saojoaodosoter.ma.gov.br/

São João do Sóter. (2020b). *Guia de orientações gerais São João do Sóter*. https://www.saojoaodosoter.ma.gov.br/institucional/institucional

São João do Sóter. (2020c). *Plano de Trabalho da Secretaria Municipal de Educação Referente ao Período de Suspensão das Aulas Presenciais em Virtude da Pandemia da Covid-19*. São João do Sóter. https://www.saojoaodosoter.ma.gov.br/institucional/institucional

Saviani, D. (1991). *Pedagogia histórico-crítica*: primeiras aproximações. (2ª ed., p. 21). São Paulo: Cortez e Autores Associados.

Silvano, TP, Correa, BM e Barbosa, I (2020). Análise da distribuição espacial de indicadores sociais e demográficos: uma abordagem baseada em mineração de dados. *Revista Brasileira de Cartografia*, *72*(1), 67-80.

Sorj, B e Guedes, LE. (2005). Exclusão digital: problemas conceituais, evidências empíricas e políticas públicas. *Novos estudos CEBRAP*, (72),101-102.

Sousa, RP, Miota, FMCSC e Carvalho, ABG (Org.). (2011). Tecnologias digitais na educação [*on-line*] (276 p.). Campina Grande: EDUEPB. ISBN 978-85-7879-124-7. http://books.scielo.org.

Valente, GSC, Moraes, EB, Sanchez, MCO, Souza, DF e Pacheco, MCMD. (2020). O ensino remoto frente às exigências do contexto de pandemia: reflexões sobre a prática docente. *Research, Society and Development*, *9*(9), e843998153.

Zoom. (2012). *Zoom*. https://zoom.us/pt-pt/meetings.html

Autores

Medeiros, Israel Alves de Ananias. Mestrando pelo programa de pós-graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica pela Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Especialista em matemática e física pela Uninter. Graduado pela universidade estadual do Piauí (UESPI). Professor da educação básica. E-mail: israel.alves21@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4307-7254

Neres, Raimundo Luna. Doutor em Educação (Educação Matemática) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP/SP (2010). Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Pará - UFPA (1989). Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Maranhão - UFMA (1979) e Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA/CE (2003). Prof. da Universidade CEUMA - UNICEUMA. Docente Permanente junto ao Programa de Pós-Graduação Doutorado em Educação em Ciências e Matemática - Rede Amazônia de Educação em Ciências e Matemática - REAMEC/UNICEUMA/Polo Belém. Prof. Permanente do Programa de Pós-Graduação em Gestão de Ensino da Educação Básica - UFMA. Líder do Grupo de Pesquisa: Educação Matemática, Ciências e Produção de Saberes. Pesquisa na área de Educação Matemática com ênfase em Registros de Representação Semiótica, Ensino e Aprendizagem da Matemática e Formação Continuada de Professores de Matemática. https://orcid.org/0000-0001-9082-7885.
E-mail: luna.neres@ceuma.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-21

Las TIC en el aula de formación de profesores en Matemática. Devenir en 2020 en el caso de la UNR
TIC na sala de aula para a formação de professores em Matemática. Tornando-se em 2020 no caso da UNR

Virginia Bonservizi, Natalia Sgreccia

Fecha de recepción: 5/11/2021
Fecha de aceptación: 4/12/2021

Resumen	Con el propósito de recuperar testimonios docentes de un Profesorado en Matemática de Argentina, relativos a las actualizaciones necesarias en sus prácticas de enseñanza a partir de la pandemia, se aplica la técnica de grupo enfocado en dos sesiones a docentes especialmente convocados a partir de resultados de una fase previa del estudio. Se reflexiona en torno a softwares predominantes en sus prácticas, canales de comunicación empleados, connotación de los encuentros sincrónicos, variación de los tiempos en la virtualidad, formas de evaluación adoptadas, conocimiento tecnológico que se ha ido configurando y actividades especialmente valoradas durante el período en cuestión. **Palabras clave**: Formación docente inicial. Matemática. Tecnologías de la Información y la Comunicación.
Abstract	With the purpose of recovering teaching testimonies from a Mathematics Teacher from Argentina, relative to the necessary updates in their teaching practices from the pandemic, the focused group technique is applied in two sessions to specially summoned teachers based on the results of a preliminary phase of the study. It reflects on the predominant softwares in their practices, the communication channels used, the connotation of the synchronic encounters, the variation of the times in virtuality, the forms of evaluation adopted, the technological knowledge that has been configured and activities that are especially valued during the period in question. **Keywords**: Inititial teacher training. Mathematics. Technology of the information and communication.
Resumo	Com o objetivo de resgatar depoimentos pedagógicos de um Professor de Matemática da Argentina, relativos às atualizações necessárias em suas práticas de ensino da pandemia, a técnica de grupo focado é aplicada em duas sessões a professores especialmente convocados com base nos resultados de uma fase preliminar do estude. Reflete sobre os softwares predominantes em suas práticas, os canais de comunicação utilizados, a conotação dos encontros sincrônicos, a variação dos tempos na virtualidade, as formas de avaliação adotadas, o conhecimento tecnológico que se configurou e atividades especialmente valorizadas durante período em questão.

Palavras-chave: Formação inicial de professores. Matemática. Tecnologia da informação e comunicação.

1. Introducción

Este artículo conforma la segunda fase, de tres, que ha comprendido la investigación denominada “Prácticas inspiradoras con Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR)” (08/2020-07/2021), que se ubica en el tramo de formación docente inicial de futuros profesores en Matemática. Específicamente se encuadra en una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas promovida por el Consejo Interuniversitario Nacional (Argentina) a estudiantes universitarios con destacado desempeño académico, que están próximos a recibirse y que han manifestado interés en formarse en investigación junto a un docente-investigador que los acompañe. El estudio se inscribe, además, en el Proyecto de Investigación cuatrienal “La formación del profesor para desempeñarse en entornos de Educación a Distancia. El caso del PM-UNR” (1ING584, 01/2018-12/2021), cuya intención fundamental -recuperando los aportes de Shulman (1986), y de Mishra y Koehler (2006)- consiste en delinear peculiaridades del conocimiento tecnológico-pedagógico-matemático del profesor en tales entornos.

Se reconoce a la categoría *conocimiento pedagógico del contenido* (o *PCK*, por sus siglas en inglés) propuesta por Shulman (1986) como paradigmática en torno al avance en investigaciones y políticas educativas interesadas no solo por lo que sabe el profesor de su disciplina (qué enseñar) sino amalgamado con lo que conoce acerca de pedagogía y didáctica (cómo enseñar). El PCK ha conllevado numerosos y variados estudios en diversidad de niveles y disciplinas a escala mundial. Todos ellos confluyen hacia la necesidad y relevancia de una formación específica y actualizada del profesor en su saber profesional docente (Ball, 2017).

Entre las contribuciones posteriores que se fueron produciendo, de la mano de equipos de investigación y gestión, en particular en articulación con las TIC, se encuentra la de Mishra y Koehler (2006). Puntualmente combinan el PCK con el conocimiento tecnológico del profesor, a partir de lo que proponen el constructo *conocimiento tecnológico pedagógico del contenido* (*TPCK*), que complementa el aporte de Shulman (1986) con la puesta en práctica reflexiva del uso de las tecnologías para la enseñanza de la disciplina.

Hacia estas construcciones, mediante la implementación de planes de estudio que aproximen propuestas formativas en este sentido, se ha procurado avanzar en el PM-UNR (https://www.fceia.unr.edu.ar/ecen/dm/index.php/carreras/). La carrera es de cuatro años de duración, desde sus inicios en 1988, encontrándose en vigencia a partir del año 2018 su tercer plan de estudios. El ámbito de incumbencia laboral abarca tanto el nivel educativo secundario como superior La propuesta curricular comprende un conjunto de 29 asignaturas (18 semestrales, 10 anuales y 1 examen de suficiencia), que están articuladas mediante cuatro Campos de Formación:

- Disciplinar Específica (CFDE; con el 64,1% de presencia en el plan de estudios), comprende las áreas de Análisis Matemático, Álgebra y Geometría, Matemática Aplicada y Educación Matemática.

- Pedagógica (CFP; 10,4%), conformado por Pedagogía, Currículum, Didáctica, Sujetos y Aprendizajes.
- General (CFG; 7,8%), en cuanto a Programación, Historia de la Educación e Inglés.
- En la Práctica Profesional Docente (CFPPD; 17,7%), constituido por un trayecto especializado que integra los Campos anteriores a través de los cuatro años de la carrera.

El presente estudio, planificado pre-pandemia y acorde a sub-áreas relevantes de investigación reconocidas en el área de TIC en Educación Matemática (Borba et al, 2016), ha procurado interpelar el aula de formación inicial del PM-UNR en los siguientes términos: ¿cómo se articulan las TIC en las actividades curriculares de los distintos Campos de Formación?, ¿cuáles prácticas docentes emplean las TIC de modo distintivo?, ¿qué innovaciones se pueden introducir en el aula de formación para consolidar propuestas con fuerte base tecnológica?

Cada una de estas inquietudes conllevó una fase específica del estudio (1 a 3) y, como la ejecución del proyecto comenzó en el segundo semestre de 2020, la intencionalidad inicial se vio resignificada y potenciada sustancialmente, dada la situación de pandemia que conllevó una “revolución tecnológica” que impactó de manera directa en el ámbito educativo (Marín et al, 2021).

En la primera fase se ha contado con la participación de docentes de todos los espacios curriculares de la carrera. Se indagó mediante un cuestionario abierto online acerca de las actividades que llevan a cabo con TIC, los soportes tecnológicos que emplean, así como los fundamentos de selección. También se les consultó sobre experiencias en sus prácticas especialmente valoradas y la relevancia que les otorgan en particular en la formación inicial en el PM-UNR. Finalmente, se los invitó a comparar con el uso de las TIC pre-pandemia y a reflexionar en torno al posible enriquecimiento de las clases presenciales. Los hallazgos, que dan cuenta de una nutrida variedad en las situaciones formativas y con potenciales a seguir desarrollando, se han reportado en Bonservizi y Sgreccia (2021a). Entre ellos, cabe mencionar la relevancia que casi el 80% de los participantes le otorgan a la plataforma virtual institucional, así como a las videollamadas para encuentros sincrónicos de clase. Las experiencias por ellos especialmente valoradas dan cuenta de una mirada especializada del formador de formador en la elección de recursos y soportes para sostener sus clases de la mejor manera que le resulte posible. Entre las prácticas distintivas a seguir indagando, se destacan las que involucran a los estudiantes en su uso activo, posibilitando que aprendan sobre las TIC y en muchos casos que se coloquen en el rol docente al pensar cómo, a partir de las mismas, desarrollar clases o explicar ejercicios.

En esta ocasión, se comparten resultados de la segunda fase, que devino a partir de profundizar en algunas prácticas con TIC gestionadas por formadores del caso en estudio. Así, mediante esta contribución, se ejemplifica con el PM-UNR en torno a las prácticas docentes con TIC durante el 2020 en el tramo de formación inicial de profesores en Matemática.

En efecto, la problemática sobre la que se centra la atención es la configuración que asume el TPCK de los formadores de formadores del caso en estudio (PM-UNR) durante el año 2020. Básicamente, se pretende dar visibilidad a los testimonios docentes de modo tal de contar con una sistematización de material documental, que puede servir para resignificar la experiencia en el macro de la carrera en cuestión, así como en carreras afines. De allí la relevancia del estudio. Al momento no se han hallado investigaciones que indaguen acerca de las prácticas docentes de todo el plantel de carreras de Profesorado en Matemática en el año pandémico. Sí se ha reportado un considerable caudal de referentes que han echado luz para interpretar los asuntos puntuales a los que los participantes aluden y que, en este artículo, se han ido intercalando con los decires de los docentes.

De este modo, el objetivo central del presente estudio consiste en resignificar experiencias formativas de futuros profesores en Matemática cuando se emplean TIC, ubicado temporalmente en el peculiar año académico 2020 (marzo-diciembre). Se efectiva a través de relevar modos de articulación de las TIC en las actividades curriculares de los distintos Campos de Formación del PM de la UNR (fase 1 del estudio); identificar prácticas docentes en la formación de profesores en Matemática que empleen las TIC de un modo distintivo (fase 2); propiciar innovaciones en la formación de profesores en Matemática que consoliden modalidades que se han ido introduciendo incipientemente a través de dispositivos con fuerte base tecnológica (fase 3). Este artículo comparte los hallazgos de la segunda etapa del trabajo efectuado.

2. Encuadre teórico-metodológico

Para comprender prácticas docentes en Matemática, en el marco del Proyecto cuatrienal donde se inscribe esta investigación, se ha adherido al constructo del *conocimiento matemático para la enseñanza* (Ball et al, 2008), o *MKT* (por su sigla en inglés), dado que ha resultado funcional para “construir puentes entre el mundo académico de conocimiento disciplinario y el mundo práctico de la enseñanza” (p.398), a través de la identificación de sus dominios específicos en diversas situaciones en el caso de interés. En estudios como este donde, a su vez, el MKT se integra con las TIC, se acude al TPCK (Mishra y Koehler, 2006), donde el contenido en cuestión es matemático.

Desde el TPCK se sostiene que integrar las TIC en las prácticas docentes es más que un agregado de herramientas tecnológicas a lo que se venía haciendo habitualmente. Conlleva a reconfigurar tales prácticas, a partir de revisar y resignificar los conocimientos pedagógicos y disciplinares que, ahora, pasan a estar conjugados con tecnologías. En efecto, se acuerda en que el TPCK es más que la suma de cada una de las partes por separado (T de Tecnología + P de Pedagogía + C de Contenido). Esa amalgama da origen a nuevo tipo de conocimiento.

Precisamente, cuando se analizan los conocimientos que se ponen en juego cuando se enseña Matemática con tecnologías, se consideran esos tres tipos articuladamente (Brunini et al, 2018). Es así que los docentes quedan convocados a comprender la manera en la que estos dominios interactúan mediante un equilibrio relativamente dinámico que les permita sostener y mejorar sus prácticas con TIC en contextos específicos.

El enfoque de la investigación es cualitativo en tanto interesa comprender las experiencias formativas de futuros profesores en Matemática en torno a las TIC en la carrera, a partir de los aportes de quienes son sus docentes en los diversos Campos de Formación y los significados que estos les atribuyen (Taylor y Bogdan, 1987). Mediante el estudio se captan las peculiaridades del caso en cuestión (PM-UNR) que incluso, sin el foco puesto en generalizar los hallazgos, puede proporcionar categorías válidas y útiles para analizar carreras afines en situaciones semejantes (Stake, 1995).

Se adopta un alcance descriptivo-interpretativo, por cuanto se reconocen características de las prácticas docentes de los formadores de formadores cuando se emplean las TIC, se las pone en relación entre sí y con su potencial, para luego ahondar en algunas, y finalmente propiciar innovaciones específicas y situadas.

Los convocados a participar fueron los 73 docentes -entre profesores a cargo y ayudantes de cátedra- de la carrera, a quienes se los invitó de manera personalizada vía correo electrónico. Finalmente, en la fase 1 se contó con la participación consentida y voluntaria de 47 personas, representantes de la totalidad de las actividades curriculares de la carrera (incluso en algunas asignaturas participaron dos docentes).

Como se anticipó, en este trabajo se comparte lo relativo a la segunda fase de la investigación, focalizada en profundizar y debatir sobre categorías identificadas en la primera etapa del estudio, a partir de compartir experiencias entre docentes de los diferentes Campos de Formación del PM-UNR.

Para esta instancia se decidió realizar dos sesiones de grupo de discusión (una por cada ciclo de la carrera: básico -los dos primeros años- y superior -los dos últimos años-). De los 47 participantes de la fase 1, en esta segunda etapa fueron convocados 14 (siete para cada grupo), de los que pudieron participar 10 (cuatro y seis, en los grupos 1 y 2, respectivamente). El criterio de selección estuvo basado en la representatividad de los Campos, por un lado, y en la riqueza de las respuestas en la fase anterior, por el otro. También se procuró que haya algunos docentes con cargo de profesor y otros con cargo de ayudante.

Mediante esta técnica grupal se propició el diálogo en torno a varias cuestiones emergentes de la fase 1 en las que interesó profundizar desde los testimonios compartidos en vivo. Se trabajó en un clima agradable, de confianza y ameno en el trato, que alentó la riqueza del intercambio (Hernández et al, 2006). Cada sesión duró una hora y media, se concretó mediante videollamada y fue grabada bajo consentimiento informado.

La conformación del primer grupo (cuatro participantes) quedó determinada por docentes de las asignaturas Análisis Matemático I (CFDE-1s; “1s” alude a primer semestre), Recursos Tecnológicos en Educación Matemática (CFDE-2s), Pedagogía (CFP-2a; “2a” alude a segundo año) y Análisis Matemático III (CFDE-3s). En el segundo grupo (seis miembros) se contó con la participación de docentes de las asignaturas Currículum y Didáctica (CFP-3a), Práctica Profesional Docente III (CFPPD-3a), Geometrías del Plano (CFDE-5s), Residencia (CFPPD-4a), Funciones Reales (CFDE-7s), y Modelos y Optimización (CFDE-8s).

La indagación básicamente se ancló en sus propias experiencias reportadas en la fase previa para ahondar en cuestiones de interés en esta segunda fase, en sintonía con las categorías de análisis:

- *Softwares predominantes* que se han empleado en y para la formación del futuro profesor en Matemática.
- *Canales de comunicación* que se han habilitado, con apoyo en las TIC, en el 2020.

- *Encuentros sincrónicos* que se han propiciado, o no, con sus intencionalidades y variantes.
- *Tiempos en la virtualidad* a partir de una re-organización necesaria de la mano de las actualizaciones metodológicas.
- *Formas de evaluación* que se han promovido así como los cuestionamientos devenidos.
- *Conocimiento en TIC* que se ha desplegado en el aula de formación del PM-UNR.
- *Actividades especialmente valoradas* a partir de las propias experiencias y de colegas para la configuración del TPCK de modo situado.

El procesamiento de la información, disponible mediante video (grabación de la sesión de cada grupo), se realizó mediante la técnica de análisis de contenido (Ander-Egg, 2003). Se triangularon segmentos de la grabación que fueron reconocidos como relevantes por las investigadoras, se transcribieron y fueron gradualmente desmenuzados en función a la intencionalidad del estudio, el encuadre conceptual y las categorías de análisis que lo hicieron operativo. Para ilustrar el entramado teórico-empírico, se han seleccionado fragmentos textuales de los participantes a modo de indicador de las características reconocidas en el caso en estudio. Con esta tónica, se presentan los resultados y discusiones emergentes para cada una de las siete cuestiones de interés (apartados 3 a 9).

3. Softwares predominantes

Con respecto a la utilización de softwares, dentro de ambos grupos enfocados se observa una supremacía de GeoGebra por sobre los demás programas mencionados (Maple, Mathematica, Máxima, SAGE, Wolfram Alpha y uno específico para “Modelos y Optimización”). Dentro de los argumentos que se brindan para esta elección, se subraya lo amigable, potente y accesible que resulta.

> Usamos sobre todo GeoGebra y lo elegimos porque tiene lindas gráficas, linda interfaz, permite hacer cosas de análisis, de geometría, de la mayoría de las materias, y sobre todo porque es software libre. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

Precisamente, esta diversidad de ramas de la Matemática en las que se puede trabajar con GeoGebra hace que sea útil en la mayoría de las materias. En concordancia con esta idea, el conocimiento disciplinar también influye en la elección del software a utilizar.

> En mi caso creo que el GeoGebra era la opción obvia para hacer Geometría. (CFDE-5s, Geometrías del Plano)

En sintonía, Ward et al (2020) afirman que, con relación al uso de tecnologías y recursos digitales, los profesores en Matemática prefieren abordar temáticas relacionadas a la geometría y expresan que, de acuerdo al estudio realizado, esto puede estar influenciado por la facilidad de acceso a este tipo de herramientas.

Sobre GeoGebra también se destacó la vigencia que va permanentemente recobrando este software y también se lo ponderó favorablemente por haber sido incorporado dentro de la plataforma Moodle institucional.

> Podría decir que lo sigo encontrando un recurso muy potente y que a su vez se va actualizando todo el tiempo y que va agregando otras herramientas. (CFPPD-4a, Residencia)

Además, se lo valoró especialmente por consolidarse como parte de un conocimiento práctico que los estudiantes, futuros docentes, van adquiriendo gradualmente con el paso por las diferentes asignaturas, lo cual contribuye a integrar cabalmente los componentes del TPCK.

> Es el software matemático… que veo que los estudiantes más manejan o que tienen más a mano o al que más recurren de manera prácticamente espontánea… En la asignatura Residencia lo utilizaron mucho en las planificaciones de sus unidades didácticas para sus prácticas, incluso a veces usando algunas applets que también ahí estaban como recursos disponibles de GeoGebra. (CFPPD-4a, Residencia)

Esto conlleva, incluso, que sean los propios estudiantes los que optan por este software:

> GeoGebra fue uno de los principales, en Análisis Matemático I como dijo [docente de Análisis Matemático III], y en Análisis Matemático II fue, digamos, elegido no por la cátedra si no por los chicos (CFDE-1s, Análisis Matemático I).

La adquisición de este conocimiento práctico no queda sujeta al interés o necesidad de cada estudiante, si no que se observa una intencionalidad de los formadores por lograr que los futuros profesores lo adquieran, acorde a las sugerencias planteadas por Brunini et al (2018).

> Para un profesor de Matemática, me parece que sí o sí tiene que estar acostumbrado a trabajar con GeoGebra. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

Sobre el TPCK, en términos más amplios que un software puntual y en tanto conocimiento constitutivo para un profesor que se propone emplear TIC de modo distintivo en sus prácticas, resulta pertinente traer a colación un breve testimonio, a modo de ejemplo sencillo en el que se conjugan todos sus componentes (T+P+C).

> Me gusta compartir pantalla y que vayan viendo cómo voy haciendo los gráficos de las cosas. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Sucintamente, se observa lo “tecnológico” (T) acorde a un objetivo “pedagógico” (P) que se da en el marco de un “contenido” (C) disciplinar. En efecto, lo tecnológico se activa en términos comunicativos y del uso del software, lo didáctico asociado a la decisión de que la construcción se haga en el momento y lo disciplinar por parte de los conceptos que se activan y los procedimientos en cuestión para realizar las construcciones.

3. Canales de comunicación

En lo relativo a la comunicación mediada por el uso de TIC, se toma como base lo reportado en Bonservizi y Sgreccia (2021b). Para indagar información al respecto, en los grupos enfocados se compartió con los docentes participantes los distintos soportes que fueron mencionados en la primera fase de la investigación (Google Meet, Jitsi Meet, Zoom, Discord, email, WhatsApp, Telegram, campus virtual UNR y campus virtual FCEIA). En correlato con los hallazgos de dicha fase, los docentes destacaron el uso de campus virtuales así como de las videoconferencias.

Acerca de los campus virtuales, aludieron a diferentes usos, pero con un común denominador: ante la irrupción por la pandemia, han considerado al campus virtual en plataforma Moodle como “el lugar seguro”, especialmente para quienes lo venían empleando. Tal es así que, en esos casos los docentes se encontraban mejor posicionados en el uso de los campus virtuales en comparación con otros soportes tecnológicos, dado que esa experiencia se constituyó en un punto a favor ante tanta incertidumbre.

> Así que cuando nos agarra en el 2020 la pandemia, yo los había visto una sola vez a los chicos y ya tenían todos la clave para entrar a Comunidades [campus virtual UNR]. Ya tuvimos directamente la herramienta armada. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

Ese “cobijo” se sustenta en que el campus virtual se mantuvo en el paso de la presencialidad a la virtualidad, ampliándose su potencial desde 2020.

> El campus virtual diría que sería como la constante, porque incluso lo veníamos usando antes de trasladar las materias a la virtualidad. (CFPPD-4a, Residencia)

También cabe advertir al menos dos funcionalidades que suelen darse a estas plataformas (Maggio, 2020). Una está asociada con un repositorio de materiales o transparente para avisos, como uno de los primeros niveles de incorporación.

> El campus virtual nosotros lo veníamos utilizando ya en alguna medida, la plataforma anterior, para colocar los materiales. (CFP-2a, Pedagogía)

Otra funcionalidad se aproxima a una apropiaron más integral del campus virtual, donde se robustece y sofistica el empleo de la plataforma, en sintonía con un aula virtual en sentido literal para desarrollar todo el cursado de la materia.

> Creo que el trabajo fuerte se dio a partir de la plataforma de la FCEIA [campus virtual FCEIA], porque fue una materia más que nada que se dictó de forma asincrónica. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

En efecto, en este segundo tipo de uso, se reconocen algunas de las potencialidades de las plataformas virtuales; en particular, en lo relativo a entregas y retroalimentaciones de actividades.

Además, se hizo referencia a las videoconferencias, a las que se les reconoció fundamentalmente dos características: soportes empleados, sus ventajas y desventajas; sincronicidad, qué implica en clave formativa. En las reflexiones se pudo advertir un dinamismo temporal en las elecciones de los soportes, como también reconocieron Hodges et al (2020) acerca de los primeros pasos en la repentina suspensión de clases presenciales físicas en el 2020.

> Usamos Zoom primero porque era lo único que sabíamos que existía. (CFDE-7s, Funciones Reales)

Luego, en ambos grupos enfocados, Google Meet se destaca como el soporte más utilizado para las sesiones sincrónicas de trabajo, impulsado por una promoción a nivel institucional de la unidad académica.

> Y después, Google Meet que es el que se sugirió, el que compró la Universidad. Después sí, fue todo por Google Meet y en ese sentido re práctico. Estuvo bueno también que le fueron incorporando más cosas al Google Meet, en un momento se pudieron hacer sesiones separadas, en simultáneo. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Como sucedió con el software GeoGebra, los docentes señalaron como favorable la renovada vigencia del soporte, identificada a través de las actualizaciones que atienden gradualmente a las necesidades de los docentes. Se reconoce, a su vez, que dichas necesidades o requerimientos están en función, entre otras cuestiones, a la cantidad de estudiantes del curso, el semestre/año dentro del transcurso de la carrera y la modalidad predominante de la clase.

También, adquirió relevancia el empleo de ciertas redes sociales como WhatsApp, con distintas intenciones y habilitaciones.

> WhatsApp no, no tenemos grupos formados de estudiantes. Sí al número de celular lo pedimos… cuando son las mesas de exámenes, agotamos la posibilidad si el Meet se cae, y le decimos al estudiante o a la estudiante que nos pase número de teléfono para hacer una videollamada por WhatsApp. (CFP-3a, Curriculum y Didáctica)

Entre las posibilidades, se recupera la posibilidad de intercambiar mensajes rápidamente, organizar las cátedras, realizar consultas u ofrecer una alternativa para circunstancias puntuales que así lo requieran. En este sentido, Suárez (2018) recupera el uso de WhatsApp en el nivel superior con fines pedagógicos, a partir de reconocer la posibilidad de motivar a los estudiantes con esta herramienta.

> WhatsApp sí para comunicarnos entre el equipo docente, pero no con los estudiantes. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Ese testimonio se encuadra en una actividad curricular del ciclo básico, a la que concurren 60 estudiantes. Por otro lado, en algunas asignaturas del último tramo formativo, se habilitó esta posibilidad también con estudiantes, que son alrededor de cinco por curso.

> Todo depende obviamente del contexto y de la cantidad de estudiantes que uno tenga. En Funciones Reales estamos hablando de cinco estudiantes, de cuarto año… WhatsApp para nosotros fue la herramienta, para ese grupo, fundamental. (CFDE-7s, Funciones Reales)

4. Encuentros sincrónicos

La sincronicidad resultó muy valorada por la mayoría de los docentes entrevistados, relacionada directamente con la realización de videoconferencias. Acorde a las diferencias señaladas en los canales de comunicación, se identifican variadas utilidades y ventajas de este tipo de encuentros. Un ejemplo de estas diferencias es lo expresado por una docente que se ha desempeñado tanto en Residencia como en Práctica Profesional Docente I, en donde se evidencia que el año en el transcurso de la carrera y la cantidad de estudiantes influye en la forma de plantear los encuentros sincrónicos.

> En Práctica Profesional Docente I me parece que fue muy importante el trabajo en lo sincrónico… en las instancias que hacíamos de devolución o de retroalimentación grupales, para los trabajos que ellos hacían… en grupos reducidos… Hemos hecho también encuentros sincrónicos con todo el grupo-clase, pero particularmente rescato como muy importantes estos encuentros con los grupos reducidos porque si bien, digamos, poniéndolo en el paralelo con Residencia, uno puede hacer una devolución o una retroalimentación por escrito o a través de un audio quizás con estudiantes que ya están en una instancia más avanzada de la carrera; en un primer año me parece que hay una cuestión de interpretación de ese mensaje que uno quiere transmitir que a lo mejor el estudiante no lee del

> mismo modo, o que no interpreta lo que uno quiere decir. (CFPPD-4a, Residencia)

Además de esta utilidad reconocida para devoluciones y retroalimentaciones, varios docentes han indicado que lo sincrónico sirve para vincularse, sostener un contacto más estrecho con los estudiantes y poder acompañarlos.

> Para mí acompañar a los estudiantes en ese proceso, ir leyendo juntos, ir viendo o preguntarnos y ganar esa confianza porque me parece que es lo que te da la sincronicidad. (CFDE-7s, Funciones Reales)

Se hizo presente el sostenimiento de una ida y vuelta entre estudiante y docente en el proceso compartido.

> Las clases sincrónicas también van marcando un ritmo, o pueden ayudar a marcar un ritmo y generar compromiso con la materia. (CFDE-8s, Modelos y Optimización)

Los argumentos compartidos por los profesores del PM-UNR concuerdan con los esgrimidos por Weber (2020), quien añade que hay algo en esta interfase que le permite al docente seguir haciendo la clase como lo hacía con anterioridad; en efecto, habla de una "presencialidad mediada tecnológicamente".

> La parte sincrónica creo que es importante en términos de saber quién está de un lado y quién está del otro. Más que nada por una cuestión que tiene la enseñanza específicamente es el vínculo entre dos generaciones digamos (CFDE-1s, Análisis Matemático I)

Al mismo tiempo, se compartió la experiencia de otra asignatura, en la cual no fue necesario lo sincrónico para marcar ritmos y comprometer a los estudiantes.

> Se basó más que nada en lo asincrónico, pero creo que el tener ritmos ya pautados desde antes de que empiece la pandemia hizo que, a veces uno tiene miedo que lo asincrónico se dilate en el tiempo y a veces uno tiene miedo a no llegar, pero al estar pactadas entregas, devoluciones constantes, no había una semana que no se hiciera una devolución a la producción de las estudiantes, creo que se pudo llevar también a cabo. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

El intercambio producido permite conocer la diversidad de prácticas, cómo funcionan y tienen aspectos valorados por los propios actores. Este entramado invita a pensar en un complemento a modo de equilibrio entre ambas opciones de sincronicidad acorde a las necesidades y objetivos de cada asignatura.

> Lo veo positivo al encuentro sincrónico pero siempre que no sean encuentros tan densos, tan largos; que sean como para, justamente, reforzar por ahí lo que es asincrónico. Tiene que ser para mí ese complemento. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Es así que Weber (2020) convoca al docente, a la hora de pensar sus clases, a preguntarse ¿lo a/sincrónico para qué?, ¿cuál es el sentido de lo a/sincrónico? Y las respuestas no son siempre las mismas. Por ejemplo, dentro del grupo enfocado 1 (docentes de los dos primeros años), se planteó la necesidad de que los estudiantes participen en las clases sincrónicas y la dificultad para hacerlo por la gran cantidad de estudiantes. A partir de las actualizaciones de Google Meet se propuso el trabajo en grupos reducidos de alumnos y, como un aporte distintivo para este tipo de trabajo, se efectuó una asignación de tareas específicas a cada miembro, con solicitud de entregas individuales del trabajo grupal y la posterior socialización de los trabajos. Este adentramiento en la diversidad metodológica dentro de la videollamada también ameritó ir madurándose. Como apuntan Cabero-Almenara y Llorente-Cejudo (2020), la formación en el uso de TIC comprende un proceso gradual que va desde la adopción de lo existente a la creación de nuevas prácticas innovadoras.

> Cuando el Google Meet permitió esto de armar sesiones en simultáneo, ahí se nos ocurrió digamos armar grupitos, eran grupitos de tres o cuatro estudiantes, suponte cuatro grupos de tres o cuatro estudiantes cada uno; que cada grupo piense un ejercicio distinto, que lo piensen entre todos y todas y que después también se haga una puesta en común donde cada grupo contaba el ejercicio que les había tocado resolver y cómo lo habían resuelto. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Otra de las cuestiones sobre las que permitió reflexionar la virtualidad es la idea de “aula invertida”, en tanto modelo pedagógico que se basa en la inversión de la estructura tradicional de la clase expositiva en la que el docente explica en clase y el alumno hace en casa, procurando fomentar participación y autonomía en los estudiantes (Berenguer, 2016). Lo sincrónico se consideró como una herramienta clave que posibilitó un acercamiento a esta estructura de trabajo.

> Yo les subía los apuntes de antemano para que empiecen a leer algo y después nos juntábamos y los leíamos y ellos ya te hacían preguntas de lo que habían leído, o sea, ya en el momento íbamos, me encontraban algún error, corregíamos, discutíamos. Y lo que vi es que en esta modalidad, los chicos se animaban más a preguntar, o sea, se animaban más que en las clases incluso presenciales. (CFDE-5s, Geometrías del Plano)

Esta interpelación que se produce puede trasladarse a cualquier opción de clase: virtual o presencial, dado que solo es necesaria la posibilidad de intercambiar previamente material con los estudiantes y realizar encuentros sincrónicos, los cuales pueden darse en un aula física o en entornos virtuales.

5. Tiempos en la virtualidad

Las variables espacio-temporales se vieron modificadas al combinar las tareas laborales, académicas y personales. Con una mirada retrospectiva, reconocieron distintas perspectivas de análisis de los cambios en este sentido.

> Noté que hubo como una redimensión del tiempo, podría decir como en tres planos distintos... Sería más en el plano de las decisiones, de lo que tiene que ver con la reorganización de la modalidad de trabajo, de cuáles van a ser los momentos en los que nos encontramos, por qué medios. O sea la cuestión más organizativa... En un segundo plano, que tiene que ver con la adaptación del material de trabajo en sí... Una tercera cuestión que para mí se redimensionó bastante en cuanto a los tiempos y la dedicación a esa tarea en particular, tiene que ver con la evaluación y con la retroalimentación. (CFPPD-4a, Residencia)

Sucintamente, se conjuga el tiempo con: momentos de encuentro, adaptaciones del material, evaluaciones en proceso. Fue recurrente el peso puesto en los materiales (adaptaciones, curaciones, elaboraciones), aunque se rescató como favorable el hecho de poder volver a usarlos a futuro.

> La adaptación llevaba un tiempo importante, el cambio de hacer lo que antes uno hacía en el pizarrón a hacerlo en pantalla llevaba un

> tiempo de preparación mayor... La esperanza era poder tener cosas que uno pudiera después reutilizar. (CFDE-8s, Modelos y Optimización)

Estas reflexiones conllevan la idea de "caja de herramientas del profesor" (Spiegel, 2006), enriqueciéndola con materiales y experiencias para utilizar en un futuro. Esta "caja" comprende actividades, proyectos, rúbricas y otros recursos al que pueden acudir tanto profesores noveles como veteranos para diseñar las sesiones de trabajo en el aula con sus alumnos (Falcó et al, 2016).

6. Formas de evaluación

Acorde con lo reportado por García-Peñalvo et al (2020), un asunto recurrente ha sido la redimensión de la evaluación a través de su materialización en diversidad de instancias. En este punto la mayoría de los docentes ha tenido que repensar sus prácticas evaluativas de acuerdo a la virtualidad. Asimismo, a partir de lo dialogado en los grupos enfocados, se advierte que algunas asignaturas han continuado de modo similar a lo que venían haciendo presencialmente.

> Nosotros ya veníamos trabajando como es esta modalidad taller, implica más un trabajo de clase a clase y esos trabajos estaban, seguían existiendo con las mismas entregas. Entonces creo que justamente no sé si nos implicó algo extra, algo distinto a lo que ya veníamos manejando. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

En este caso se puede observar que en la materia se llevaba a cabo un tipo de evaluación formativa mediante entregas semanales pautadas, la cual implica ir evaluando mientras se aprende y proveer información que contribuye a que el estudiante avance (Anijovich y González, 2011). En otras asignaturas, en cambio, se continuó un tipo de evaluación como síntesis, entendida como evaluación sumativa (Castañeda, 2021), implementada mediante exámenes parciales o trabajos finales, escritos u orales.

> Lo que sí tuvimos que cambiar es, en lugar del final integrador escrito que generalmente tomamos antes de definir la promoción directa…, ir a coloquio, lo tomamos igual nada más que tuvimos que hacerlo oral e individual. (CFP-2a, Pedagogía)

Entre los docentes participantes de los grupos se observa una gran reflexión sobre la evaluación en el año 2020, y están quienes repensaron y modificaron sus prácticas, haciendo una valoración positiva de esta nueva modalidad para la constitución, a su vez, de la caja de herramientas del futuro profesor en Matemática.

> Nosotros elegimos un trabajo personalizado... Muchos decían "yo voy a tener esta herramienta porque me sirvió hacer este mapa conceptual", no sé, de espacios métricos por ejemplo, "me sirvió este mapa conceptual como herramienta para aprender más" o "qué bueno, lo voy a tener en cuenta para otras materias". (CFDE-7s, Funciones Reales)

Se incorporaron herramientas transversales mediante una forma de evaluar diferente a la tradicional. Se le otorgó un especial valor a los materiales y herramientas que los estudiantes pueden tener a disposición y redimensionar, de modo articulado en términos de TPCK.

> Ya desde la presencialidad la palabra evaluación siempre me hace ruido en términos de hacer la analogía evaluación igual a examen. Eso es lo que siempre me hizo ruido, ya sea en la presencialidad y ahora lo vi más potenciado en la virtualidad con esta cuestión de sí o

> sí que esté presente el examen como un instrumento igual a decir evaluación. (CFDE-1s, Análisis Matemático I)

Los propios docentes hicieron una reflexión sobre lo que implicó la pandemia en la evaluación, valorando sobre todo la posibilidad de que más docentes comiencen a pensar en evaluaciones formativas.

> Rescato, o me parece que es lo que más se potenció, esto de la necesidad de buscarle la vuelta, de evaluar de otra manera y de la necesidad de sostener ese vínculo sobre todo y fundamentalmente en la virtualidad. Cómo esto de a lo mejor la imposibilidad de hacer un parcial único y en un mismo momento para todos, que era por ahí lo más habitual en la presencialidad, cómo se fue reemplazando con otras herramientas que permitieron de algún modo hacer otro tipo de evaluación más del proceso. (CFPPD-4a, Residencia)

Lo anterior concuerda con lo expresado por Anijovich (2020), quien se refiere a que la pandemia abrió una puerta para intentar revertir el peso que tiene la evaluación sumativa, la calificación, y dar lugar a una evaluación del proceso, formativa. La autora da un paso más y plantea diversas cuestiones para que el regreso a las aulas, en el formato que sea, no implique la vuelta a una evaluación tradicional.

7. Conocimiento en TIC

Se realizó una distinción en las habilidades desarrolladas por los estudiantes de acuerdo al uso que fueron desplegando. Pareciera que en un empleo “social” de la tecnología, los alumnos se animan a explorar y aprender por ellos mismos; mientras que en una utilización más “escolar”, esta predisposición o habilidad macro no se percibe como habilitada. Esta diferenciación también es advertida por Bossolasco et al (2020), quienes concluyen que las formas de utilización de la tecnología no son innatas ni inherentes a los rasgos de los sujetos del nuevo milenio; sino que se construyen.

> No sé cómo explicarme, no fue lo que esperábamos. Igual les fue re bien pero como que les tuvimos que enseñar, “¿cómo se hace tal cosa con GeoGebra?”, me decían, “¿cómo se hace tal cosa con LaTex?”, no sé, averigüen ustedes, pongan en Google cómo se hace esto, no tienen el hábito de investigar cómo se usa un programa nuevo y apropiárselo... En cambio, si les decías “hacé un video”, lo hacen en dos segundos, sobre todo la gente que usa Tik Tok o esas cosas. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

Por otro lado, ya en segundo año se reconoció que los estudiantes poseen mayor facilidad con el uso de herramientas tecnológicas específicas. Esto permite pensar que las materias de primer año resultan significativas para la formación inicial de profesores en Matemática capacitados en el uso de TIC.

> Yo por ahí que ya los agarré en segundo año, en mi caso por lo menos fue mucho más sencillo, sentí que tenían bastante facilidad por lo menos para GeoGebra o para LaTex. (CFDE-3s, Análisis Matemático III)

Los participantes del segundo grupo enfocado (docentes de los dos últimos años) en varias oportunidades comentaron que los estudiantes también necesitaron aprender sobre el uso de TIC en el contexto de pandemia; pero que esta exploración y aprendizaje se dio de forma autónoma, incluso utilizando herramientas sobre las que los propios docentes no tenían conocimiento aún.

> Nosotros hacíamos mini videitos y nada que ver con lo que nosotros hacíamos, así que aprendimos de ellos también. Fue más independiente, usaban otras herramientas que nosotros todavía no manejábamos y que después en esos encuentros que teníamos a lo mejor cada tanto les decíamos que nos cuenten para así también nosotros aprender de esas herramientas. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

Este testimonio denota indicios del desarrollo de habilidades valiosas como futuros profesores en Matemática en torno al uso de TIC; esto es, un TPCK que se va consolidando a través de los años.

Además, los docentes entrevistados manifestaron su necesidad de continuar aprendiendo sobre el uso de TIC, acorde a los permanentes cambios y actualizaciones (Rodríguez et al, 2021), enfatizado en el año en cuestión. Los propios profesores atravesaron de forma consciente este proceso de aprendizaje y se ha posibilitado que los estudiantes les enseñen al respecto.

> Todos estuvimos en un momento donde sabíamos que estábamos aprendiendo, donde el conocimiento circulaba en forma horizontal dentro de estas aulas virtuales, donde todos podíamos aportar algo, eso era lo importante. Al interior de la cátedra, con los estudiantes y también entre nosotros, entre los compañeros... El que sabía compartía. (CFDE-7s, Funciones Reales)

En este sentido, Hargreaves (2020) reconoce la necesidad de que los docentes en distintas áreas busquen colaboración entre sí para hilvanar respuestas a los problemas, dificultades y obstáculos que se van presentando día a día. Afirma que al trabajar en conjunto se llega a niveles de innovación y cambio más importantes.

Durante las reuniones, los docentes manifestaron su deseo de continuar aprendiendo y aludieron a ciertos conocimientos tecnológicos como indispensables en la actualidad para un profesor en Matemática.

> Me gustaría perfeccionar este año el armado de páginas web, que todavía no llegué, porque fui aprendiendo un montón de recursos; y me parece que es un recurso que hay que manejar sí o sí como docente es el armado de páginas web para presentar temas… para contar experiencias, para lo que sea, tiene que ser algo que ya a esta altura tendría que ser un conocimiento adquirido y no lo tengo. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

En concordancia con la génesis de articulación del TPCK, se reconoce la intención por parte de algunos docentes de acercar a los estudiantes a la gran cantidad de materiales ya disponibles, para que los profesores en formación puedan desarrollar una mirada crítica de los mismos que les sirva para su futura tarea docente.

> Las cosas están, los estudiantes las tienen a mano, entonces cómo poder mirarlas críticamente, cómo poder ver cuándo usarlas, cómo usarlas, si es que conviene o no, cómo poder ver el potencial que tienen, así como los potenciales de los softwares. Con esa mirada crítica que sirva para enseñar y aprender. (CFDE-7s, Funciones Reales)

8. Actividades especialmente valoradas

En esta categoría se agrupan algunas experiencias y valoraciones que hacen los docentes sobre determinadas situaciones por ellos distinguidas. Se observa una tendencia, por parte de los docentes de asignaturas del ciclo superior, en proponer actividades en el aula de formación que acerquen a los estudiantes a su futuro rol docente. Tales propuestas educativas tienen resonancia con lineamientos nacionales (Consejo Interuniversitario Nacional, 2013) y provinciales (Ministerio de Educación de Santa Fe, 2020).

> Yo creo que ponerse en el lugar de un futuro profesor o profesora es darle sentido a lo que están haciendo. (CFDE-7s, Funciones Reales)

Desde las diferentes asignaturas se buscó que los estudiantes puedan nutrirse de conocimiento y que este no sea solo disciplinar. En efecto, en la multiplicidad de actividades se conjugaron todos los componentes del TPCK. Por ejemplo, los estudiantes fueron puestos en la situación de tomar decisiones sobre un contenido particular, con fines educativos y articulando el uso de TIC.

> La información a lo mejor es la misma pero ellos también ponen en práctica un montón de otras herramientas, estas decisiones que tienen que tomar… ¿por qué esto lo voy a contar y esto no?, al ser una producción audiovisual, ¿por qué a tal cosa le voy a poner una animación o por qué no? Entonces, además de aprender herramientas, creo que ellas fortalecen habilidades que tienen que ver también con lo de ser profesor. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

Además, se intentó poner a los estudiantes del PM-UNR frente a los diferentes ámbitos en los que pueden llegar a desempeñarse como docentes, acorde con el plan de estudios (Consejo Superior UNR, 2018). Situados en el nivel superior, se plantea un intercambio de roles pensando en aquellas primeras experiencias que pueden estar transitando o prontos a transitar.

> En los primeros años cuando sos auxiliar de primera te daban para resolver, tomarte el tiempo a ver si más o menos está bien, si no te quedó muy largo, entonces jugar con ese doble papel de docente y alumno me parece importante porque es como ponerle sentido a qué estoy haciendo o para qué estoy estudiando. (CFDE-7s, Funciones Reales)

Por otro lado, también se reconocen experiencias que nutren a los estudiantes de un conocimiento práctico ya desde el primer año de la carrera. Particularmente, en el encuentro se compartió una actividad relacionada a la creación de juegos interactivos para llevar a las aulas, los cuales pueden adaptarse a cualquier contenido. Nuevamente se advierte una articulación de los componentes de TPCK, de la mano de propuestas intencionadas del formador de formadores.

> Juegos interactivos hicimos con una página que se llama Kahoot.it. Es una página que permite crear juegos de verdadero y falso o múltiple choice y entonces vos… te hacés un usuario, creás las preguntas, ponés las respuestas, decís cuál es la respuesta correcta. O sea, vos configurás todo de una manera re fácil y muy sencilla de utilizar; y después los alumnos entran a esta página Kahoot.it y con el código de juego, juegan todos en línea simultáneamente. (CFDE-2s, Recursos Tecnológicos en Educación Matemática)

En concordancia, cabe señalar que la asignatura Recursos Tecnológicos en Educación Matemática es pensada desde sus orígenes para fomentar el empleo responsable de recursos tecnológicos pertinentes, en tanto asunto de crucial interés para la formación de los futuros profesores en Matemática (Consejo Superior UNR, 2018).

Como se mencionó, los docentes valoran el intercambio para potenciar sus prácticas y continuar aprendiendo, y también destacan la socialización de producciones entre los propios estudiantes. En efecto, se recuperan los murales colaborativos online y los foros en plataforma como dispositivos para ello.

> Lo que usamos fue el padlet, que de alguna manera lo usamos específicamente para un trabajo de análisis de documento curricular... Nos pareció importante que al menos subieran esas producciones, no solo la producción escrita del texto escrito que incluía la presentación de un trabajo con una cantidad de carillas, si no que esa presentación que los estudiantes hicieron en la clase sincrónica destinada para la presentación de cada uno. Ese ppt lo subieron a esa carpeta creada específicamente para la socialización. (CFP-3a, Currículum y Didáctica)

Asimismo, los dispositivos tecnológicos por sí mismos no garantizan que una socialización genuina se efectivice (Juárez et al, 2020). Los docentes coincidieron en que es necesario llevar adelante acciones para fomentar la interacción y enriquecer el intercambio. Por ejemplo, con respecto a los foros en plataforma:

> No es que solamente está colgado y lo podés ver si te interesa, si no que había una intencionalidad de que lo vean y de que haya una retroalimentación. Eso después se vio porque también amplía miradas. Si bien era un grupo similar en cuanto a la formación y todo eso, había distintos enfoques que les daban a las actividades y bueno, se enriquecían también entre sí. (CFPPD-3a, Práctica Profesional Docente III)

En ocasiones, al proponer una interacción en foros, los participantes tienden a intentar dar su opinión o su respuesta sin atender a las intervenciones anteriores.

> Suele pasar… que en una primera intervención cada uno quiere compartir… sus respuestas a esas preguntas, o si hay que hacer una síntesis de una lectura o un video, primero es como la apreciación personal… Entonces en esa primera intervención por ahí cada uno da su respuesta individual y entonces, bueno ahí pedir una segunda habilita esto de que haya un verdadero intercambio que es lo que tiene de rico el foro. (CFPPD-4a, Residencia)

Para que el foro se despliegue de modo coherente con su razón de ser (Campus Virtual UNR, 2018), ha de trascender una suma de partes aisladas tendiente hacia una integración de las partes mediante hilos de interacción y aquí resulta relevante el rol del profesor. Según Markel (2001), en la implementación de foros los docentes cumplen una función de moderadores, ya que brindan apoyo y orientación a los estudiantes para que se comuniquen en el entorno.

9. Conclusiones

En este artículo se muestran los principales hallazgos de la segunda fase de la investigación “Prácticas inspiradoras con TIC en el PM-UNR”, con el propósito de profundizar en relación con prácticas de este tipo gestionadas por formadores de formadores en la institución de interés. Para ello, se ha convocado a dos grupos de docentes a reflexionar conjuntamente acerca de sus propias experiencias. En ese devenir, se han abordado siete categorías de análisis que permitieron realizar la caracterización pretendida.

Dentro de la variedad de softwares específicos que se reportaron en la fase 1, se reconoce a GeoGebra como aquel que es preponderantemente el más utilizado en las asignaturas del PM-UNR, acorde a lo relevado por otros estudios afines

(Ward et al, 2020). Su elección no fue arbitraria, dado que los docentes se basaron en diferentes potencialidades que conformaron sus argumentos tanto en términos tecnológicos, pedagógicos y disciplinares (TPCK), en sintonía a la promoción de un uso consolidado y crítico por parte del futuro profesor.

Los campus virtuales resultaron ser una herramienta fundamental para la comunicación dentro de muchas asignaturas y su uso se vio potenciado a partir de la llegada de la pandemia de COVID-19. Es posible inferir que están dadas las condiciones para continuar avanzando hacia un uso más integral, superando la visión del campus como un repositorio de materiales. En este punto, a nivel institucional se brinda acompañamiento y capacitación a los docentes.

Las videoconferencias irrumpieron en este escenario educativo a partir del paso forzado a la virtualidad, como también se observó en otras instituciones de Educación Superior (Maggio, 2020). Fueron por lo general ponderadas favorablemente por los participantes del estudio, con argumentos del tipo: para verse, para interactuar, para acercar, para marcar tiempos… todo ello, acorde a las características del curso. Entre inquietudes adicionales que emergen para seguir analizando al respecto, se encuentran: ¿acaso la videollamada se presenta como una de las opciones más aptas para trasladar allí la tradicional clase presencial del docente explicando?, así como también ¿viene la videollamada a atravesar muros de coincidencia físico-espacial de las personas para encontrarse en cualquier coordenada, más allá de la pandemia?

Si bien fueron predominantes los testimonios de los docentes que consideraron indispensables los encuentros sincrónicos para el desarrollo de sus clases, la técnica de grupo enfocado posibilitó el debate y la apertura hacia el conocimiento de otras formas de enseñanza. La implementación de clases virtuales conllevó la reflexión sobre la motivación, participación y compromiso de los estudiantes, así como sobre el despliegue de estructuras de trabajo del tipo aula invertida con tecnologías digitales (Medeiros et al, 2020). Se concluye que lo a/sincrónico puede aportar de manera significativa al desarrollo de clases, en tanto se planifique en función de las necesidades y objetivos de la asignatura.

Los tiempos en la virtualidad se han visto re-dimensionados conllevando a que tanto docentes como estudiantes tengan que establecer prioridades, valorar lo que se produce y convivir temporo-espacialmente con responsabilidades personales más allá de lo académico.

Se reportaron algunas nuevas formas de evaluación en un contexto de virtualidad con valoraciones preponderantemente favorables. La actualidad deja la puerta abierta para hacia evaluaciones formativas, lo cual implica un cambio importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en integración con la evaluación al determinar qué, cómo, porqué y cuánto estudia y aprende el alumnado (Reyes et al, 2020).

Se remarca la importancia de formar a los estudiantes en el uso de TIC con fines académicos, impulsándolos a generar autonomía y exploración que los enriquezca como profesionales que en un futuro cercano han de enfrentarse y apropiarse constantemente de nuevas herramientas. Los propios formadores de formadores reconocieron la necesidad de continuar formándose al respecto, subrayando la colaboración entre pares y con los estudiantes.

Entre las prácticas distintivas o inspiradoras se encuentran aquellas que, además de aportar a la disciplina, nutren a los estudiantes de un conocimiento práctico, que formará parte de su caja de herramientas como profesores y que podrán recrear en sus futuras prácticas docentes en Matemática.

De este modo, han re-surgido con renovada vigencia los aportes de Shulman (1986) cuando procuró aproximar respuestas a sus preocupaciones relativas al paradigma perdido en las investigaciones sobre formación docente que no amalgamaban disciplina-pedagogía y que tenían incidencia en las propuestas curriculares. En este sentido, desde los diversos Campos de Formación del PM-UNR, a través de sus representantes docentes, se procura dar sustento al profesional que se está formando, con activación de los componentes del TPCK, combinados entre sí, al decidir qué *software matemático* emplear para sus clases, cuáles *canales de comunicación* habilitar y de qué modo, por qué los *encuentros sincrónicos* en la etapa de aislamiento social preventivo y obligatorio, de qué modo los *tiempos* tuvieron que re-organizarse en la virtualidad en pos a actualizaciones metodológicas necesarias, cómo se vieron inmersas en la discusión las *formas de evaluación* promovidas, qué *conocimiento en TIC* reconocen que se ha ido desplegando en el aula conjuntamente con los estudiantes del PM-UNR, qué hace peculiares a esas *actividades especialmente valoradas* a partir de la experiencia tanto propia como de colegas.

Así como lo hizo Santaló (1999), se remarca la necesidad de comenzar con las innovaciones en Matemática y actualizaciones metodológicas correspondientes desde la formación de quienes serán los encargados de sostener su enseñanza; esto es, desde las carreras de Profesorado. En este sentido, esta investigación contribuye al área de Formación Docente en Matemática, en clave de los retos y desafíos del tercer milenio, más allá de la situación de pandemia que llevó a sostener el derecho de la educación en entornos que prescindan de la coincidencia física en un mismo espacio. Estos retos y desafíos convocan a profesionales con un TPCK desarrollado, de modo tal que la disciplina Matemática pueda ponerse en un diálogo fructífero con la Pedagogía y la Tecnología. Más todavía se requiere de quienes son, a su vez, sus profesores durante la formación docente inicial.

Referencias bibliográficas

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Lumen.

Anijovich, R. (2020, 28 de mayo). *Evaluar sí, pero qué y cómo* [video]. YouTube. https://youtu.be/araSxpBTIGs.

Anijovich, R. y González, C. (2011). *Evaluar para aprender. Conceptos e instrumentos*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Aique.

Ball, D. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. En G. Kaiser (Ed.). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.11-34). Hamburgo: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-62597-3.

Berenguer, C. (2016). Acerca de la utilidad del aula invertida o flipped classroom. En M.T. Tortosa, S. Grau y J.D. Álvarez (Coords.). *Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares* (pp.1466-1480). Sevilla: Universidad de Alicante. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/59358/1/XIV-Jornadas-Redes-ICE_108.pdf.

Bonservizi, V. y Sgreccia, N. (2021a). Articulación de las tecnologías a través de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. *Educação Matemática Debate*, *5*(11), 1-26. https://doi.org/10.46551/emd.e202105

Bonservizi, V. y Sgreccia, N. (2021b, 24 de junio). *Construcción de una tipología emergente del uso didáctico de herramientas tecnológicas para la comunicación en el Profesorado en Matemática de la UNR* [ponencia]. II Workshop de Innovación y Transformación Educativa: Transformación Digital. Desafíos de la Educación Superior, Argentina.

Borba, M.C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. y Aguilar, MS. (2016). Blended Learning, E-Learning and Mobile Learning in Mathematics Education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *48*(5), 589-610.

Bossolasco, M.L., Chiecher, A.C. y Dos Santos, D.A. (2020). Perfiles de acceso y apropiación de TIC en ingresantes universitarios. Estudio comparativo en dos universidades públicas argentinas. *Pixel-bit, 57*, 151-172. https://doi.org/10.12795/pixelbit.2020.i57.06

Brunini, G., Chirino, F. y Donato, V. (2018). GeoGebra: un software paradigmático. En N. Sgreccia (Coord.). *Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática* (pp.119-151). Salamanca: FahrenHouse. https://www.fahrenhouse.com/omp/index.php/fh/catalog/book/31.

Cabero-Almenara, J. y Llorente-Cejudo, C. (2020). Covid-19: transformación radical de la digitalización en las instituciones universitarias. *Campus Virtuales*, *9*(2), 25-34. http://www.uajournals.com/campusvirtuales/es/revistaes/numerosanteriores.html?id=261.

Campus Virtual UNR (2018, 12 de marzo). *¿Cómo se utiliza un foro en Moodle?* [video]. YouTube. https://youtu.be/3a4rkbbpIC8.

Castañeda, L. (2021). Una experiencia de diseño de una tarea de evaluación sumativa en formato transmedia para formación inicial de profesorado. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, *24*(2), 203-224. https://doi.org/10.5944/ried.24.2.29148.

Consejo Interuniversitario Nacional (2013, 14 de mayo). *Propuesta de Estándares para la Acreditación de los Profesorados Universitarios en Ciencias Exactas y Naturales*. Resolución 856/13.

Consejo Superior UNR (2018, 3 de abril). *Plan de Estudios de la carrera Profesorado en Matemática*. Resolución 027/18.

Falcó, J.M, García, M. y Huertas, J.L. (2016). La caja de herramientas del profesor: Un portafolio construido de manera colaborativa. En *Congreso IN-RED* (pp.1-10). Valencia: Universitat Politècnica de València. http://dx.doi.org/10.4995/INRED2016.2016.4335.

García-Peñalvo, F.J., Corell, A., Abella-García, V. y Grande, M. (2020). La evaluación online en la educación superior en tiempos de la COVID-19. *Education in the Knowledge Society, 21*, 1-12. https://doi.org/10.14201/eks.23013.

Hargreaves, A. (2020, 10 de septiembre). *Profesionalismo Colaborativo. Cuando Enseñar Juntos supone el Aprendizaje de Todos* [video]. YouTube. https://youtu.be/-EeY19CKS2A.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). Ciudad de México: Mc Graw Hill.

Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T. y Bond, A. (2020, 27 de marzo). The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *Educause Review*. https://bit.ly/3h6Bjh5.

Juárez, J.A., Chamoso, J.M. y González, M.T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041.

Marín, D., Santana, P.J. y Castro, M.M. (2021). Escuela Digital: estrategias y materiales didácticos digitales en Educación Infantil y Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación, 85*(1), 9-13. https://doi.org/10.35362/rie8514179.

Maggio, M. (2020). Las prácticas de la enseñanza universitarias en la pandemia: de la conmoción a la mutación. *Campus Virtuales, 9*(2), 113-122. http://www.uajournals.com/campusvirtuales/journal/17/9.pdf.

Markel, S. (2001). Technology and Education Online Discussion Forums: It's in the Response. *Online Journal of Distance Learning Administration*, *4*(2), 1-11. http://www.westga.edu/~distance/ojdla/summer42/markel42.html.

Medeiros, C., Bandeira, C.M. y Campos, P.T. (2020). Aula invertida con tecnologías digitales y herramienta metacognitiva para mejorar las clases de educación superior. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 19*(2), 65-81. https://doi.org/10.17398/1695-288X.19.2.65.

Ministerio de Educación de Santa Fe (2020, 24 de junio). *Orientaciones sobre el cursado y evaluación del Trayecto de la Práctica en los IFD santafesinos para el ciclo lectivo 2020*. Observatorio de prácticas de Santa Fe. https://campuseducativo.santafe.edu.ar/wp-content/uploads/observatorio-de-pr%C3%A1cticas.pdf.

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x.

Reyes, C.I., Díaz, A., Pérez, R., Marchena, R. y Sosa, F. (2020). La evaluación del aprendizaje: percepciones y prácticas del profesorado universitario. *Profesorado*, *24*(1), 136-162. https://doi.org/10.30827/profesorado.v24i1.8449.

Rodríguez, A., Miqueli, B. y Dávila, Y. (2021). Identificación de necesidades de formación continua del profesorado ante las demandas educativas del siglo XXI. *Actualidades Investigativas en Educación, 21*(1), 1-32. https://doi.org/10.15517/aie.v21i1.44073.

Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática* (pp.209-214). Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Troquel.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860.

Spiegel, A. (2006). *Planificando clases interesantes, itinerarios para combinar recursos didácticos*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Novedades Educativas.

Stake, R. (1995). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Suárez, B. (2018). Whatsapp: su uso educativo, ventajas y desventajas. *Revista de Investigación en Educación*, *16*(2), 121-135. http://webs.uvigo.es/reined/.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Ward, S., Inzunza, S. y Palazuelos, J. (2020). Uso de recursos digitales por profesores de matemáticas en secundaria: un estudio exploratorio. *Matemática, Educación e Internet*, *21*(1), 125-153.

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V21_N1_2020/RevistaDigital_SWard_V21_n1_2020.

Weber, V. (2020). *¿Por qué elijo el encuentro sincrónico para mis clases?* [video]. YouTube. https://youtu.be/TY20ps4Masw.

Virginia Bonservizi. Profesora en Matemática (UNR) y estudiante de la Licenciatura en Ciencias de la Computación (UNR). Becaria por el Consejo Interuniversitario Nacional (08/2020 a 07/2021). Se desempeña como profesora en Matemática en escuelas secundarias de Rosario, Argentina. E-mail: bonser@fceia.unr.edu.ar

Natalia Sgreccia. Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Magíster en Didácticas Específicas mención Matemática (UNL) y Doctora en Humanidades y Artes mención Ciencias de la Educación (UNR). Investigadora Adjunta por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Se desempeña como Profesor Asociado Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR), Argentina. E-mail: sgreccia@fceia.unr.edu.ar

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-16

Engenharia Didática na abordagem da Sequência de Lucas com aporte do GeoGebra: uma experiência no ensino remoto

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro, Francisco Régis Vieira Alves, Renata Teófilo de Sousa, Alessandra Senes Marins

Fecha de recepción: 13/10/2021
Fecha de aceptación: 21/12/2021

Resumen	Este trabajo proviene de una tesis de maestría en curso, del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará - Campus Fortaleza. El objetivo de este trabajo es desarrollar la secuencia de Lucas en una práctica docente, acercándose a su visualización 2D, expandiéndose a la visión 3D soportada por el software GeoGebra. Como base conceptual tenemos la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para orientar la práctica docente y como metodología utilizamos la Ingeniería Didáctica (DE), apoyando el estudio de esta temática. **Palabras clave:** Secuencia de Lucas, Ingeniería Didáctica, Teoría de las Situaciones Didácticas, GeoGebra.
Abstract	This work comes from an ongoing master's thesis, from the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceara - Campus Fortaleza. The objective of this work is to develop the Lucas sequence in a teaching practice, approaching its 2D visualization, expanding to the 3D vision supported by the GeoGebra software. As a conceptual basis we have the Theory of Didactic Situations (TSD) to guide the teaching practice and as a methodology used Didactic Engineering (DE), supporting study of this theme. **Keywords:** Lucas Sequence, Didactic Engineering, Theory of Didactic Situations, GeoGebra.
Resumo	Este trabalho é proveniente de uma dissertação de mestrado em andamento, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza. O objetivo deste trabalho é desenvolver a sequência de Lucas em uma prática de ensino, abordando sua visualização 2D, expandindo para a visão 3D com aporte do software GeoGebra. Como base conceitual temos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) para nortear a prática de ensino e como metodologia utilizada a Engenharia Didática (ED), amparando o estudo deste tema. **Palavras-chave**: Sequência de Lucas. Engenharia Didática, Teoria das Situações Didáticas, GeoGebra.

1. Introdução

A Sequência de Lucas é investigada neste trabalho, tendo em vista que este assunto é pouco abordado na disciplina de História da Matemática dentro da graduação (Guedes e Alves, 2019). Deste modo, surgiu o interesse em explorar esta sequência a partir da construção geométrica com suas visualizações em 2D e 3D, visando estimular estudantes de um curso de licenciatura em Matemática a investigar algumas definições referentes a sequência de Lucas a serem estudadas na disciplina de História da Matemática em sua formação inicial.

Dentre as definições que são encontradas na Sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas, se destaca pela forma mais clara nas aplicações e sua relação direta com o número áureo e suas potências. Vale a pena ressaltar que Lucas foi quem associou e difundiu o nome de Fibonacci, mesmo sabendo que seus primeiros escritos em referência a sequência de Fibonacci tenham sido como a série de Lamé (Silva, 2017). Por esse motivo, destaca-se a importância do estudo sobre essa sequência.

Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver a Sequência de Lucas em uma prática de ensino, abordando sua visualização 2D, expandindo para a visão 3D com aporte do *software* GeoGebra, norteada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e pela Engenharia Didática (ED), amparando a prática do professor sobre seu estudo.

A ED é uma metodologia de pesquisa originada na França e atrelada aos estudos da Didática da Matemática e pode auxiliar no desenvolvimento de investigações sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática a partir de situações didáticas realizadas em sala de aula.

Segundo Alves (2017), a ED enquanto campo de pesquisa proporcionou uma evolução na investigação científica em Educação Matemática, em que o professor/pesquisador pode desempenhar ações similares as de um engenheiro, conciliando conhecimentos de diferentes ciências em realizações práticas e planejamentos experimentais bem idealizados, elaborando hipóteses para despertar a aprendizagem em seus alunos. Assim, a Engenharia Didática torna possível ao professor, investigar conceitos teóricos, a fim de relacionar a teoria e a prática em sala de aula.

Com o aporte da ED para o desenvolvimento deste trabalho, o planejamento e execução deve seguir suas quatro fases, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori e validação*, descritas ao longo das seções deste trabalho.

Esta pesquisa ocorreu com três alunos do 6º semestre de um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), na disciplina de História da Matemática, sendo desenvolvida em três encontros de forma remota, devido ao cenário da pandemia COVID-19.

Para o desenvolvimento da situação didática utilizou-se como recurso auxiliar o *software* GeoGebra. Díaz-Urdanetta, Kalinke e Motta (2019) afirmam que o GeoGebra é uma ferramenta dinâmica e de fácil utilização, configurando-se em um recurso que permite uma abordagem diferenciada, possibilitando a apresentação de vários tópicos de Matemática em uma única interface, o que permite uma experimentação e visualização de aspecto dessa disciplina com grande potencial para desenvolver o conhecimento matemático do aluno.

Portanto, nas seções seguintes apresentam-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como norteadora da sessão de ensino elaborada; as fases da Engenharia Didática (ED) para a concepção e organização deste estudo, trazendo a discussão do referencial teórico a partir das análises preliminares, apontando a definição da Sequência de Lucas e a História da Matemática na formação inicial do professor; a concepção e análise *a priori* da situação didática, e por fim, apresentam-se os resultados coletados a partir da experimentação realizada, bem como sua análise *a posteriori* e validação, finalizando com as considerações dos autores.

2. Teoria das Situações Didáticas

Nesta pesquisa foi utilizada a Teoria das Situações Didáticas (TSD), criada por Guy Brousseau, um dos pioneiros da Didática da Matemática francesa. A TSD é uma teoria que visa nortear sessões de ensino a partir de situações didáticas ou sequências didáticas previamente elaboradas pelo docente. Segundo Brousseau (2008) a TSD suscita uma compreensão da relação existente entre o trinômio que compõe a essência do sistema didático – aluno, professor e o saber – bem como o meio (*milieu*) em que ocorre a situação didática.

Na TSD o trabalho executado pelo aluno é realizado a partir de uma situação didática elaborada pelo professor, aproximando-o das habilidades de um investigador, capaz de formular hipóteses, teorias e conceitos, ao passo que o professor propicia situações favoráveis para que ele, ao agir, transforme aquela informação em conhecimento para si mesmo (Sousa, Azevedo e Alves, 2021).

Nesse sentido, o que Brousseau (2008, p. 20) chama de situação didática é "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado". Desta forma, compreende-se que a situação didática é elaborada pelo professor intencionalmente para que, a partir da interação entre o aluno e o meio, a situação elaborada provoque sua aprendizagem.

A TSD é organizada em fases ou dialéticas que norteiam o processo de aprendizagem, sendo estas definidas por Brousseau (2008) como *ação, formulação, validação* e *institucionalização*. De forma resumida temos, por definição:

- *Ação:* momento que ocorre o primeiro contato do aluno com o problema proposto, em que levanta seus conhecimentos prévios, buscando informações já conhecidas que o auxiliem na resolução do problema;
- *Formulação:* nesta fase há uma permuta de informações entre o aluno e o *milieu*. O aluno verbaliza suas ideias e conjecturas e começa a traçar uma estratégia para solucionar o problema, mas não se utiliza do rigor matemático;
- *Validação:* neste momento, o estudante busca validar suas hipótese e teorias, procurando convencer os demais da validade/veracidade de sua argumentação com relação à resposta elaborada dentro do sistema previamente estabelecido;
- *Institucionalização:* nesta etapa, o professor sintetiza, com o devido rigor e formalidade o conteúdo matemático a ser aprendido com a situação proposta,

a partir do que foi exposto pelos alunos nas fases anteriores, formalizando o que foi validado pelos alunos.

Vale ressaltar que as três primeiras fases ou dialéticas compõem o que Brousseau (2008) denomina de situação adidática, em que o estudante interage com o problema sem nenhuma intervenção do docente, a partir de seus conhecimentos prévios, vivências e troca de informações com o *milieu.* Na fase de institucionalização, ocorre uma socialização e compreensão das ideias a partir da intervenção do professor, em que mostra ao estudante a intenção da atividade proposta e valida as resoluções realizadas pelos alunos, verificando e discutindo os passos dos procedimentos executados durante as fases anteriores.

É importante destacar que, durante a institucionalização, os erros também devem ser apontados e discutidos em conjunto. Segundo Almouloud (2007, pp.40) “[...] o professor deve fixar convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Alves (2016) reitera que:

> Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao património cultural da classe, o seguinte teorema deverá ser enunciado e, em adequação ao público de interesse (alunos de licenciatura ou bacharelato), pode ser demonstrado (Alves, 2016, pp. 106).

Desta forma, temos o intuito de explorar a situação didática proposta a partir da TSD, associada à Engenharia Didática (ED), apresentada na seção seguinte.

3. Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa adotada para a realização deste trabalho é a Engenharia Didática (ED). A escolha da ED deve-se à união entre a teoria e a prática em sala de aula. Segundo Almouloud (2007), a ED estuda os processos de ensino e de aprendizagem de um determinado objeto matemático.

A ED surgiu na década de 80, com intuito de ser uma metodologia investigativa para auxiliar a Didática da Matemática (DM). Esta metodologia organiza a prática docente, observando como as pesquisas podem ser utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem de um determinado objeto matemático (Santos e Alves, 2017).

Artigue, Douady e Moreno (1995) afirmam que a ED pode-se dividir em dois segmentos: microengenharia – que se refere aos fenômenos em sala de aula – e a macroengenharia – que observa os fenômenos que ocorrem no processo de ensino e de aprendizagem. No caso desta pesquisa, utilizamos uma microengenharia, com o intuito de mostrar definições referentes à Sequência de Lucas para a formação inicial de professores de Matemática, investigando esse assunto nas aulas de História da Matemática.

Segundo Artigue (1996), o planejamento e execução de uma ED segue a partir de quatro fases, que são (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação, e; (iv) análise *a posteriori* e validação, que são descritas de forma sucinta ao longo desta seção.

Nas análises preliminares foi realizada uma investigação a partir de referenciais teóricos sobre a Sequência de Lucas, em que se fez um levantamento histórico sobre o modo como ocorre sua abordagem na disciplina de História da Matemática. Neste caso, foi feito um levantamento especificamente em relação à criação da Sequência de Lucas, buscando reconhecer aspectos didáticos do trabalho com este tema no âmbito da sala de aula. Sabe-se que nesta fase ocorre um resgate dos conhecimentos prévios, ou seja, os saberes adquiridos ao longo da vida escolar.

Na fase de concepção e análise a *priori*, segundo Alves et al. (2019), ocorre a elaboração da situação didática, pensada para responder os questionamentos ou hipóteses levantadas a partir da análise preliminar. Assim, a partir das variáveis, o estudo da sequência e da espiral de Lucas por meio de definições geométricas podem fornecer ao pesquisador subsídios para a construção da situação didática e, a partir da vivência, por parte do aluno, superar os obstáculos encontrados no processo de aprendizagem.

Após estas etapas realizamos a experimentação situação didática, com a coleta de dados sobre o comportamento dos estudantes mediante a prática da atividade proposta, a partir da observação de elementos importantes em um contexto didático-metodológico. No caso desta pesquisa, a situação didática proposta apresentada foi a construção da Sequência de Lucas em 2D e 3D por meio do *software* GeoGebra, a partir de uma perspectiva geométrica.

E por fim, com base na coleta de dados realizada, realizamos uma análise *a posteriori* e validação da situação didática vivenciada, buscando confrontá-la com a análise *a priori* previamente estabelecida, verificando se o que de fato foi conjecturado é válido. Deste modo, foram realizados registros fotográficos, gravações de áudio e de vídeo pelo *Google Meet* e dois questionários utilizando *o Google Forms,* como forma de catalogar informações sobre os três encontros virtuais realizados. Nesses encontros participaram um professor visitante para aplicação e três estudantes de graduação do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática.

Além disso, foi estabelecido o contrato didático com a turma para a aplicação da situação didática (Almouloud e Silva, 2012). Segundo Brousseau (1986), o contrato didático é necessário para haja um acordo entre o professor e o aluno, durante as situações de ensino em sala de aula, configurando-se em um sistema de obrigações recíprocas, para que o planejamento ocorra de forma efetiva.

Com relação a análise *a posteriori* e validação, de acordo com que foi coletado na fase de experimentação, foi realizado um confronto com a análise *a priori*, comparando os resultados esperados com os obtidos. A análise *a posteriori* possibilita prever se o meio, se o cenário demarcado para o desenvolvimento das sequências permite a determinação de informações representativas e não secundárias para a investigação (Santos e Alves, 2018).

A partir disto, foram descritas as etapas da ED relacionadas à situação didática proposta, referente à construção da Sequência de Lucas em 2D e 3D, analisando o que foi exposto pelos estudantes.

3.1. Análises preliminares: História da Matemática e a Sequência de Lucas

Na disciplina História da Matemática durante o curso de licenciatura em Matemática são apresentados conhecimentos pertinentes ao desenvolvimento do professor em formação inicial. Miguel e Brito (1996, pp. 50) defendem a abordagem histórica da disciplina na formação dos professores de Matemática, ressaltando sua contribuição na ação pedagógica do futuro docente, ao apontar que:

> [...] a participação orgânica da história na formação do Professor de Matemática, destacando a contribuição da História da Matemática na ação pedagógica como um instrumento que permite a compreensão da natureza dos objetos matemáticos, a função da abstração, da generalização, da noção de rigor, do papel da axiomatização, dos modos de se entender a organização do saber além, da dimensão estética, ética e política da atividade Matemática. (Miguel e Brito, 1996, pp. 50).

Partindo desta premissa, compreende-se que à medida que os futuros professores conhecem a História da Matemática, estes tendem a contribuir e a facilitar a compreensão dos fundamentos dessa ciência em sua prática de trabalho. Além disso, seu conhecimento nesta área pode-lhes servir de instrumento para responder alguns entraves dos estudantes sobre a aplicação da Matemática.

Assim, neste trabalho procurou realizar uma conexão entre a relação de recorrência da Sequência de Lucas, em uma perspectiva histórica, com sua construção geométrica no *software* GeoGebra, buscando contribuir de maneira significativa para o docente em formação.

François Édouard Anatole Lucas nasceu em 04 de abril de 1842 e faleceu em 3 de outubro de 1891 em Paris, França (Guedes e Alves, 2019). Lucas foi um estudioso que contribuiu no ramo da Matemática lúdica, sendo o criador do famoso jogo matemático Torre de Hanói, bem como de outros quebra-cabeças. Em sua contribuição aos estudos acerca dos números primos, encontrou manualmente o maior número primo, indicado por Eves (1969) com valor numérico de:

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231687303715884104727.$$

Com base nas relações da Sequência de Fibonacci, Lucas em 1878 criou sua própria sequência por recorrência (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29...). Entretanto, sua sequência é pouco explorada na disciplina da História da Matemática, diferindo a sequência de Fibonacci apenas pelos valores iniciais, sendo definida, segundo Honsberger (1985, pp. 111) por:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n > 2.$$

Contudo, com base nas relações já demonstradas na sequência de Fibonacci, obtemos: $f_2 = f_1 + f_0$; isso implica, $f_0 = f_2 - f_1 = 0$. Em termos operacionais, necessitamos do termo L_0; assim, podemos tomar, $L_2 = L_1 + L_0$; isso implica, $L_0 = L_2 - L_1 = 2$.

Honsberger (1985, pp. 111) observa que “[...] a sequência de Lucas é sempre correspondentemente maior do que a sequência de Fibonacci, com exceção para L_1 e f_1”. Outra relação curiosa percebida no diagrama mostra que $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ .Essa sequência tem uma lei de recorrência aritmética, em que os dois termos iniciais são $L_0 = 2 \ e \ L_1 = 1$. Dessa forma, para se calcular o próximo termo deve-se somar os dois termos anteriores. Logo, encontra-se $L_2 = L_0 + L_1 = 2 + 1 = 3$, como terceiro termo. Para calcular o próximo termo, utiliza-se o mesmo raciocínio, assim $L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = 4$, sendo esta sequência organizada como na Tabela 1:

N	0	1	2	3	4	5	6	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	...

Tabela 1. Termos iniciais da Sequência de Lucas
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

A partir do exposto na Tabela 1, pode-se inferir que a sequência de Lucas é representada por $(p, q, p+q, p+2q, 2p+3q, 3p+5q, \ldots)$ (Hoggat e Venner, 1969). Assim, de modo análogo, pode-se estender esta generalização para a Sequência de Fibonacci.

3.2. Concepção e análise *a priori*

O uso da Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) como um suporte para aulas de Matemática, é um método que difere da utilização que se resume em lápis e papel, ou o uso da internet somente como ferramenta de pesquisa, tornando o processo mais dinâmico, trazendo uma possibilidade de interação dos estudantes durante o processo. Borba (2011), lembra que as possibilidades experimentais dessas mídias podem ser utilizadas para estudos, podendo-se chegar à elaboração e verificação de teorias, levando os estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem hipóteses.

Assim, para o desenvolvimento desta sequência de forma geométrica, utilizou-se neste trabalho uma construção que traz uma abordagem visual, em que a Sequência de Lucas é apresentada com o suporte do *software* GeoGebra, em que foi explorada sua visualização nas dinâmicas 2D e 3D, em encontros virtuais referentes à disciplina de História da Matemática com professores em formação inicial.

Partindo do estudo bibliográfico sobre a sequência de Fibonacci e sua generalização, a partir da lei de recorrência para desenvolver a Sequência de Lucas por meio de construções geométricas, foi desenvolvida uma situação didática de ensino, fundamentada na TSD, com o propósito incentivar os licenciandos na criação de estratégias para solucionar uma situação-problema, a partir de seus conhecimentos prévios.

Situação-problema: Como a sequência de Lucas pode ser visualizada a partir do *software* GeoGebra? Diante dessa informação, apresente possíveis relações entre as sequências através das construções, utilizando os comandos já observados por meio desse *software.*

A partir da situação didática proposta, faz-se uma previsão atitudinal do que se espera como tomadas de decisão e estratégias dos estudantes com base nas dialéticas da TSD, para a construir a solução da situação apresentada.

Ação: A partir da apresentação da situação-problema, partindo da visualização da sequência de Fibonacci na forma geométrica, sua representação no GeoGebra, bem como apresentação de suas ferramentas, espera-se que o estudante seja capaz de enxergar a associação entre a Sequência de Fibonacci e a Sequência de Lucas a partir de sua lei de formação inicial. Neste momento, não é importante que o estudante saiba manipular os comandos, mas sim que o mesmo entenda o objetivo da atividade e como ocorre a construção, modificando os valores no ambiente do *software*.

Como consequência, espera-se que os estudantes absorvam o problema proposto e as informações previamente estabelecidas e realizem uma relação entre a sequência de Lucas e os quadrados para a construção do retângulo de ouro, bem como a lei de recorrência de segunda ordem em que se encontra, utilizando apenas os conhecimentos adquiridos durante a sua trajetória escolar em etapas anteriores. Nessa fase, é importante que os estudantes façam relações entre as duas sequências, pois isso ajudará nas possíveis formulações de respostas.

Formulação: Nesta fase, espera-se que os estudantes levantem as suas primeiras conjecturas matemáticas a partir do problema proposto, bem como a relação entre as sequências vistas no GeoGebra. É interessante que neste momento sejam feitas anotações por parte dos estudantes, não necessariamente com rigor matemático, mas com o auxílio do GeoGebra.

Validação: Nessa fase espera-se que os estudantes já tenham compreendido a regra da lei de recorrência e como essas sequências podem ser construídas por meio de figuras geométricas. Através da visualização dos quadrados da sequência pode-se observar o comportamento padrão, tanto para a sequência de Fibonacci, quanto para a sequência de Lucas, realizando uma comparação na construção. Assim, com as mesmas ferramentas que utilizamos para construção da espiral de Fibonacci, faz-se a construção da espiral de Lucas.

Institucionalização: Conforme a TSD, nesse momento o professor deve manifestar-se, apresentando um caminho didático que esclarece o objetivo da atividade, culminando na construção do conhecimento do aluno, no caso da compreensão do comportamento da Sequência de Lucas, bem como sua visualização no GeoGebra nas perspectivas 2D e 3D, apontando elementos e informações importantes, possivelmente não observados pelos estudantes e, a partir disto, realizar intervenções sobre possíveis argumentos falhos ao processo de aprendizagem.

A partir do exposto, a seção seguinte ilustra a etapa de experimentação, com a descrição da situação didática aplicada e a coleta de dados deste trabalho.

3.3. Experimentação

O processo de experimentação foi escolhido com uma perspectiva de desenvolvimento da prática do professor de Matemática. Assim, os encontros foram pensados no ciclo do trabalho do professor, incorporando as atividades relacionadas ao planejamento, ensino e reflexão.

Assim, os dados foram coletados a partir dos três encontros virtuais. Para cada encontro os estudantes receberam tarefas como pesquisar sobre a sequência de Fibonacci e de Lucas, relacionando a uma discussão e reflexão sobre o tema proposto. Além disso, ocorreram discussões pelo aplicativo de mensagens *WhatsApp* a respeito do desenvolvimento das tarefas.

Esses encontros ocorreram no mês de maio do ano de 2021, com duração média de duas horas cada. Para obtenção das informações a serem analisadas, participaram um grupo composto por três estudantes que desenvolveram as atividades propostas, denominados por A1, A2 e A3 (aluno1, aluno2 e aluno 3), como forma de preservar suas identidades. Além disso, houve a participação de um professor para aplicação do estudo sobre a sequência de Lucas.

No primeiro encontro virtual pelo *Google Meet*, ocorreu a fase de ação, em que o professor apresentou as leis de recorrências das sequências de Fibonacci e de Lucas e em seguida construiu o retângulo áureo, que é a inspiração para construção geométrica da sequência de Fibonacci. Assim, a partir dessas informações A1 deduziu a seguinte afirmação: "*tendo em vista que os termos dessa sequência de Fibonacci convergem para o mesmo número de ouro que é igual a 1,61 aproximadamente.*" Todas as informações foram retiradas dos áudios que ocorreram durante os encontros virtuais.

Na fase da formulação, existe a troca de informação entre os estudantes. Assim, ocorre um diálogo entre os alunos. Dessa maneira,

> *A1: Eu tô em dúvida em como começar. Onde coloco o quadrado de lado 3 da sequência de Lucas de modo que fique em boa ordem com os próximos quadrados? Por que o próximo termo da sequência é o de lado 4 e não vai ter como colocar sem ficar uma parte em branco.*
> *A2: Não fica uma parte em branco pois você faz uma sobreposição, se você quiser pode olhar a minha construção e a do A3 também, vai te ajudar.*

Após esse diálogo, houve a validação dos resultados a partir da resposta encontrada em consenso entre os alunos. Nesse mesmo encontro, os alunos foram direcionados para construção geométrica da sequência de Lucas numa visualização 2D, conforme a Figura1.

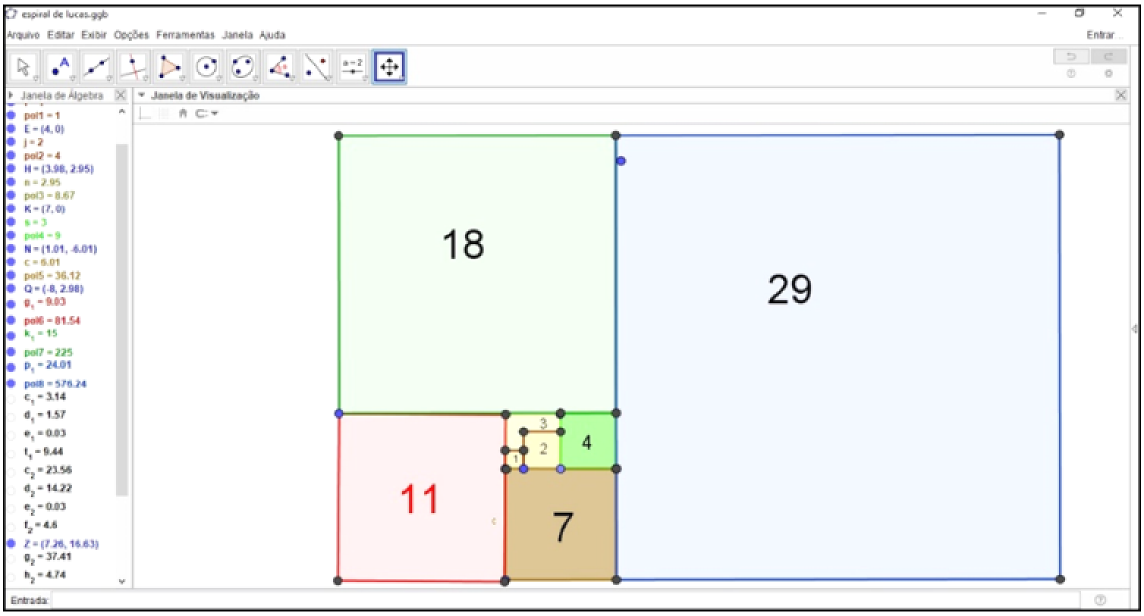


Figura 1. Termos da sequência da Lucas utilizando o GeoGebra para uma visualização 2D. Fonte: Registro do participante A2 (2021).

A partir dessa proposta, levantou-se por parte dos alunos, um questionamento sobre a construção inicial através dos quadrados de medidas 2, 1, 3. Essa questão desencadeou uma discussão através desse conceito, pois o objetivo era trabalhar a lei de recorrência através dos valores iniciais. Em relação à proposta realizada na Figura 1, o A2 apresenta sua construção, descrevendo os passos realizados.

> *A2: Primeiro passo, na barra de ferramentas, opção – polígono regular, para construir um quadrado, clicamos nos dois primeiros pontos, aparecerá uma janela pedindo a informação de quantos lados terá a figura, no nosso caso serão quatro. O segundo passo é construir os quadrados utilizando a sequência de recorrência, ou seja, o próximo quadrado será a soma dos dois quadrados anteriores. Inicialmente inserindo um quadrado de comprimento lateral de 2 unidades, e outro de lateral de 1 unidade, logo o próximo quadrado será a soma das medidas dois quadrados construídos anteriormente, a terceira figura será um quadrado de lado 3 unidades. Observando que o terceiro quadrado se sobrepõe aos outros, devido a condição de existência. Utilizando a mesma estratégia anterior, obtém-se os próximos números representados pelos quadrados.*

Observamos a partir das informações que A2 mostra um conhecimento sobre a Sequência de Lucas, objetivando a razão áurea para a construção geométrica proposta, promovendo a ideia para outro conhecimento que é a construção da espiral para representar a sequência estudada. Veja o que relata o A2 sobre a espiral de Lucas.

> *A2: Para construir a espiral, precisa-se de alguns termos da sequência, portanto após os passos para criar pelo menos seis quadrados. A construção dessa sequência de Lucas em forma de espiral, deve -se selecionar na barra de ferramenta a opção - Arco circular, essa ferramenta constrói um arco circular a partir do centro de dois pontos, para utilizá-la é preciso primeiro clicar sobre o centro. Observa-se que, se o sentido dos cliques for anti-horário o GeoGebra construirá o menor arco definido pelos três pontos. Então, usaremos sempre esse sentido.*

Após a aplicação das ferramentas, são discutidas pelos alunos e professor, algumas interpretações e sugestões para construção dessa espiral. Apresenta-se na Figura 2, a sequência em forma de espiral, lembrando que pode ser representada por infinitos termos:

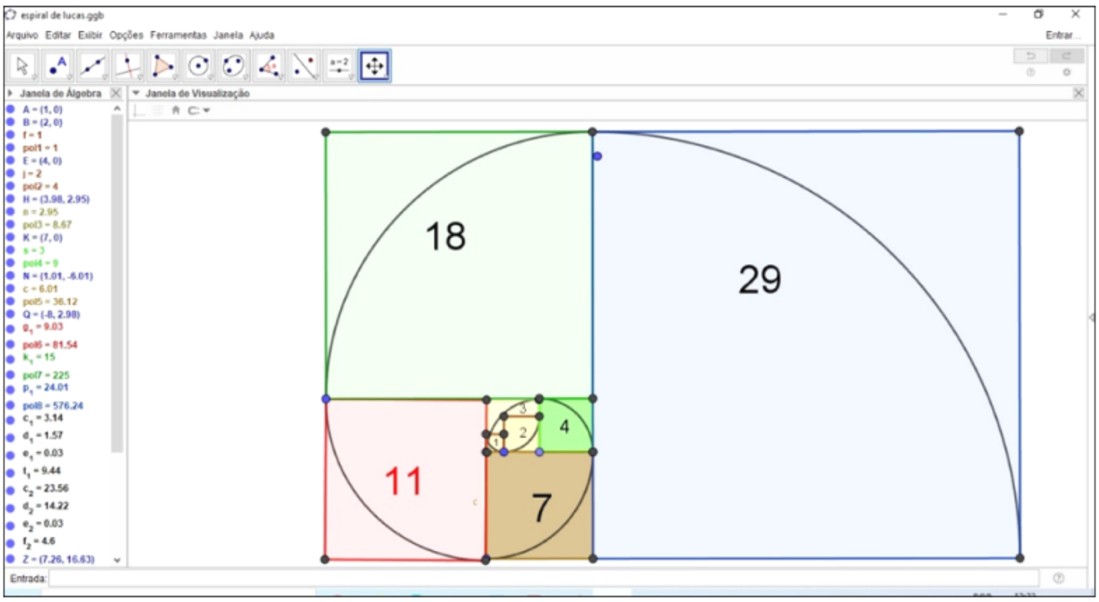


Figura 2. Representação da espiral de Lucas na visualização 2D.
Fonte: Registro do participante A2 (2021).

Outra construção explorada, no segundo encontro virtual foi a visualização 3D da sequência de Lucas no *software* GeoGebra. Observa-se sua construção por meio da construção de cubos, como mostra o A3. O participante A3 buscou determinar a construção da sequência de Lucas em forma de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D, conforme a Figura 3 abaixo:

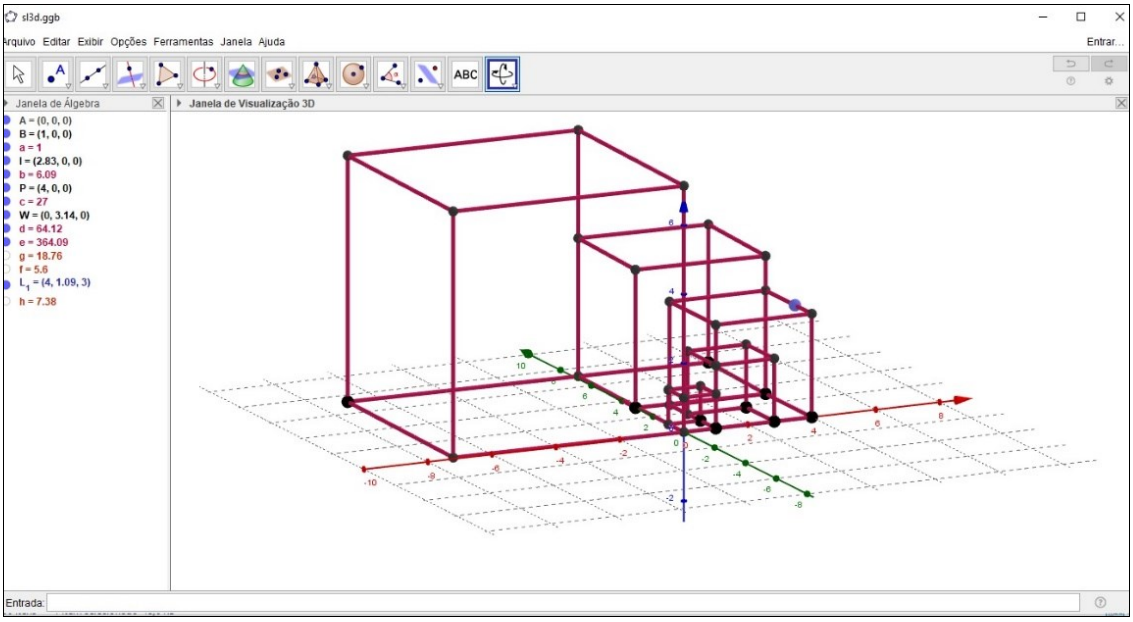


Figura 3. Construção da sequência de Lucas em uma visualização 3D.
Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 3, temos uma visão frontal da sequência de Lucas no GeoGebra. Assim, identifica-se a construção por meio de cubos, cujos lados são relacionados respectivamente a sequência numérica recorrente de Lucas, e que cada cubo corresponde a um termo dessa sequência. Para a criação da espiral, utiliza-se a ferramenta “Arco circuncircular”, que constrói um arco a partir de três pontos, no caso foram usados os vértices dos cubos para criação desejada.

Na Figura 4**,** o participante A3 determinou a construção da sequência de Lucas em forma lateral de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D:

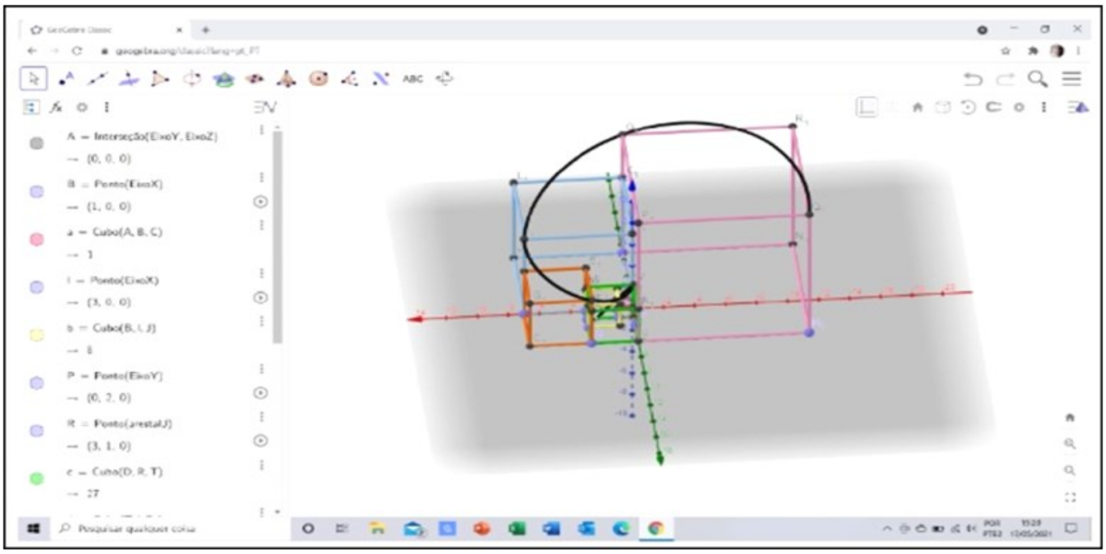


Figura 4. Representação da sequência de Lucas na lateral em 3D.
Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 4, rotaciona-se a figura com o comando Girar Janela visualização 3D, para uma observação de forma lateral, com um intuito de visualizar o comportamento da espiral em relação aos eixos. Na Figura 5**,** o A3 buscou determinar a construção da sequência de Lucas na visualização superior de espiral utilizando o GeoGebra para uma visualização 3D:

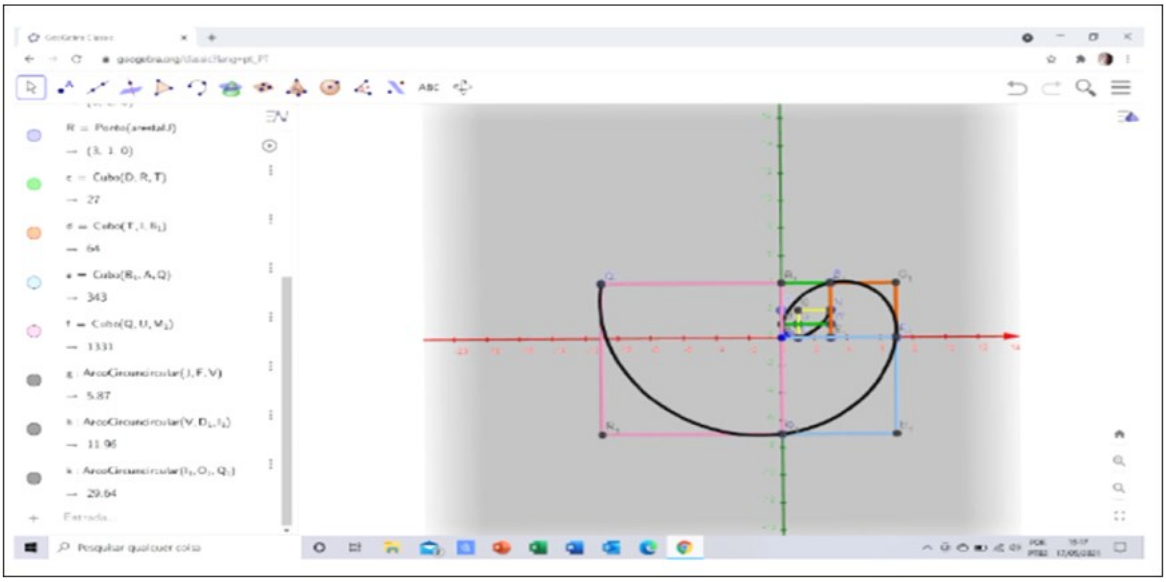


Figura 5. Visualização superior da sequência de Lucas em 3D.
Fonte: Registro do participante A3 (2021).

Na Figura 5, rotaciona-se mais uma vez para a figura girar para uma visualização superior, com um intuito de observar o comportamento da espiral em relação aos eixos. Desse modo, observa-se que a espiral continua de maneira infinita com o mesmo padrão encontrado na Sequência de Fibonacci.

Por fim, no terceiro encontro, os participantes responderam a um questionário com perguntas sobre as aplicações e suas principais dificuldades, bem como apontamentos e sugestões para melhorar a prática em relação às construções da sequência de Lucas nas visualizações 2D e 3D.

3.4. Análise *a posteriori* e Validação

Diante dos dados coletados, essa fase foi destinada para sua análise, a partir das informações encontradas durante a aplicação da situação-problema, em que ressaltamos alguns pontos para esta análise *a posteriori*.

Inicialmente foi solicitado aos estudantes que respondessem a um questionário inicial via *Google Forms*, com duas perguntas:

01.Você costuma utilizar/ manipular o software GeoGebra para construções?
02. De acordo com seus conhecimentos prévios, você já conhecia a sequência de Lucas?

Quadro 1. Questionário inicial proposto aos participantes.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Com base nas respostas dos três participantes temos que: com relação à questão 1, os estudantes afirmaram não ter o hábito de explorar o GeoGebra, mas que conheciam o *software* e na questão 2, os participantes afirmaram de forma unânime que não haviam estudado a sequência de Lucas durante a graduação até o presente momento. Finalizando a atividade proposta, os estudantes responderam a um segundo questionário com as perguntas:

01. Quais as suas principais dificuldades encontradas para desenvolver a situação-didática proposta? 02. O que você achou das construções das sequências de Lucas na visualização 2D e 3D? 03. Indique sugestões para melhorar a construção de outras sequências no GeoGebra na visualização em 2D e 3D.

Quadro 2. Questionário final proposto aos participantes.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Na pergunta 1, a principal dificuldade apontada pelos estudantes foi realizar a transposição do material em linguagem matemática no papel para uma linguagem computacional, ou seja, a reprodução da situação no GeoGebra, pois os alunos não tinham tanta familiaridade com o *software,* gerando insegurança ao realizar alguns comandos.

Já na pergunta 2, os estudantes relataram que acharam o assunto bem intrigante, reforçando que realmente este tópico nunca havia sido estudado por eles. Os alunos afirmaram que a construção das visualizações 2D e 3D da sequência de Lucas são bem interessantes, apontando o GeoGebra como diferencial para a percepção de alguns conceitos geométricos.

Por fim, nas respostas da questão 3 foram elencadas algumas sugestões por parte dos estudantes como disponibilizar um tutorial sobre as ferramentas do GeoGebra, antes de propor a construção desse tipo de sequência e estudar as definições de sequência recorrente e linear. Estas sugestões foram encaradas de forma positiva e podem melhorar as aplicações, visando futuras formações com a mesma sequência ou outras que utilizam a mesma lei de recorrência.

Esperávamos que a construção da Sequência de Lucas por meio do GeoGebra, facilitasse a visualização dos estudantes na forma geométrica, o que ocorreu de fato. Mesmo com as dificuldades encontradas durante o processo de construção nas dimensões 2D e 3D, os alunos conseguiram resolver a situação didática proposta, compreendendo a definição da lei de recorrência dessa sequência, bem como a utilização de alguns comandos que foram utilizados no GeoGebra, sendo um momento produtivo e gerando interesse pelo assunto.

4. Considerações Finais

Esse trabalho teve como objetivo mostrar uma abordagem visual à Sequência de Lucas, promovendo sua identificação, descrição e exploração visual em formato 2D e 3D, norteada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e estruturada pela Engenharia Didática (ED), tendo o aporte do *software* GeoGebra, em que se buscou desenvolver o conhecimento sobre esta para o estudo da sua lei de recorrência.

Inicialmente foi realizado um estudo bibliográfico sobre a Sequência de Lucas, em que observamos que este assunto é pouco explorado durante a trajetória acadêmica dos licenciandos em Matemática. Assim, trouxemos uma abordagem sobre a lei de recorrência desta sequência na situação didática desenvolvida.

Na situação didática proposta a Sequência de Lucas e suas particularidades foram exploradas utilizando o GeoGebra. Nessa tarefa o discernimento do aluno na compreensão do funcionamento da lei de recorrência e seu respectivo comportamento a partir do *software* foram essenciais para seu aprendizado.

Para finalizar, houve a apresentação do material produzido pelos estudantes, durante os encontros virtuais, que validam as definições exploradas no processo matemático e epistemológico da Sequência de Lucas, verificando a construção dos conceitos utilizados durante esta pesquisa. Ao mesmo tempo, observamos também o papel imprescindível do professor durante o processo metodológico, apresentando definições importantes para o processo de ensino e de aprendizagem e incentivando a participação do aluno na construção do conhecimento.

Por fim, as dificuldades encontradas neste estudo foram a ausência da exploração ou falta de conhecimento sobre este assunto e a escassez de construções e/ou representações geométricas desta sequência. Assim, esperamos que esta pesquisa possa incentivar outros trabalhos relacionados ao estudo das diferentes sequências numéricas em Matemática.

Referências Bibliográficas

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.

Almouloud, S. A., & Silva, M. J. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade**.** *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2),22-52. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22

Alves, F. R. V. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(1),61-93. Recuperado em 21 de julho,2021, de https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879.

Alves, F. R. V. (2016). GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo – TCC: o caso da regra de L´Hôpital**.** *Indagatio Didactica***,** 8(2),94-118. DOI: https://doi.org/10.34624/id.v8i2.2536 .

Alves, F. R. V. (2019). Engenharia Didática para o Ensino de Variável Complexa: Visualização de Conceitos Relacionados ao Processo Matemática de Integração. *Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 11(2), 3-29. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2018v11n2p3 .

Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Silva, J. G., & Mangueira, M. C. S. (2019). Ensino de ciências e educação matemática 3 [recurso eletrônico] Organizador Felipe Antônio Machado Fagundes Gonçalves. *Capítulo 2 - Engenharia Didática para o ensino da sequência de Padovan: um estudo da extensão para o campo dos números inteiros***.** Ponta Grossa, PR: Atena Editora.

Artigue, M., Douady; R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. 5, 61-96.

Borba, M. C. (2011). Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas. *XIII Conferência Interameircana de Educação Matemática.* Recife.

Brousseau, B. A. (1965). *An introducion to Fibonacci Discovery***.** The Fibonacci Association.

Brousseau, B. A. (1967). *A Fibonacci generalization. The Fibonacci Quarterly*, 5 (2),171-175.

Brousseau, B. A. (1972). *Fibonacci Numbers and Geometry. The Fibonacci Quarterly*, 10(3), 249-255.

Brousseau, G. (1986). *La relation didactique: Le milieu.* Paris: Actes de la IVème Ecole d'Eté.

Díaz-Urdaneta, S., Kalinke, M. A., & Motta, M. (2019). A Transposição Didática na elaboração de um objeto de aprendizagem no GeoGebra. *#Tear - Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, 8(2), 1-12. DOI: https://doi.org/10.35819/tear.v8.n2.a3503

Eves, H. (1969). *An introduction to the History of Mathematics*. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston.

Guedes, A. M. S., & Alves, F. R. V. (2019). *Uma investigação com professores em formação inicial sobre: sequência de Lucas e os números de k-Lucas*. Research, Society and Development, 8(7), 1-16. DOI: https://doi.org/10.33448/rsd-v8i7.1136

Hoggat, J. V. E., & Venner, E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers.

Honsberger, R. (1976). *On a theorem of Gabriel Lamé, In Mathematica gems II,* The Mathematical Association of America, Washington D.C., (2), 54-57. Dolciani Mathematical Expositions.

Miguel, A., & Brito, A. J. (1996). *A história da matemática na formação do professor de matemática*. In: Ferreira, E. S. (Org.) Cadernos Cedes 40. Campinas: Papirus.

Santos, A. A., & Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae,* 19(3),447-465. Recuperado em 21 de julho 2021, https://core.ac.uk/download/pdf/231307184.pdf .

Santos, A. P., & Alves, F. R. V. (2017). A teoria das situações didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma aplicação do Teorema de Pitot. *Indagatio Didactica*, 9(4),279-296. DOI: https://doi.org/10.34624/id.v9i4.976

Santos, A. P., & Alves, F. R. V. (2018). O cálculo de áreas: uma aplicação da Engenharia Didática no contexto das Olimpíadas de Matemática. *Indagatio Didactica,*10(5),199-222. DOI: https://doi.org/10.34624/id.v10i5.11133 .

Silva, B. A. (2017). *Números de Fibonacci e número de Lucas*. Dissertação de Mestrado Profissional em Rede Nacional. Instituto de Ciências Matemáticas e Computação. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Sousa, R. T., Azevedo, I. F., & Alves, F. R. V. (2021). Transposição Didática por meio do GeoGebra como suporte ao ensino de Geometria Analítica. *Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 17(62), 1-20.

Autores:

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE *campus* Fortaleza. Especialista em Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC). E-mail: carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br

Renata Teófilo de Sousa: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE *campus* Fortaleza. Especialista em Ensino de Matemática (UVA), Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC). Pós-graduada em Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem e MBA em Gestão Escolar (UniAmérica). E-mail: rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves: Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, Coordenador acadêmico do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE. Líder do Grupo de Pesquisa CNPQ Ensino de Ciências e Matemática. E-mail: fregis@ifce.edu.br.

Alessandra Senes Marins: Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL. Atualmente é professora adjunta do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA. E-mail: ale_marins@hotmail.com

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-11

Retos de futuros docentes de Matemáticas al aprender Robótica Educativa en pandemia
Desafios para futuros professores da Escola Normal Superior de México ao aprender Robótica Educacional em uma pandemia

Quiroz Gleason José Luis Medardo, Elizarraras Baena Saúl

Fecha de recepción: 5/11/2021
Fecha de aceptación: 4/12/2021

Resumen	El curso de Robótica Educativa representa la culminación de su camino electivo en tecnología educativa para futuros maestros de la Escuela Normal Superior de México. El uso de dos plataformas TINKERCAD y VEXCode VR fue la base para desarrollar habilidades lógicas y de secuenciación al manipular componentes electrónicos y diseñar acciones de un robot para cumplir retos específicos, todos virtuales, programando a través del lenguaje SCRATCH. Las y los alumnos que terminaron el curso lograron vencer los retos que la programación les presentó, así como la manipulación exitosa de un robot virtual, logrando altas calificaciones que reflejan dominio de contenidos y gusto por aprenderlos, según sus propias palabras **Palabras clave**: Robótica educativa, futuros docentes.
Abstract	Educational Robotics, as a course for future teachers of the Escuela Normal Superior de México, represents the culmination of their elective path in educational technology. The use of two platforms TINKERCAD and VEXCode VR was the basis for developing logic and sequencing skills when manipulating electronic components and designing robot actions to meet specific challenges, all virtual, programming through SCRATCH language. The students who finished the course managed to overcome the challenges that programming presented them, as well as the successful manipulation of a virtual robot, achieving high marks that reflect mastery of content and a taste for learning them, in their own words. **Keywords**: Educational Robotics, future teachers.
Resumo	O curso de Robótica Educacional representa o culminar de sua trajetória eletiva em tecnologia educacional para futuros professores da Escuela Normal Superior de México. O uso de duas plataformas TINKERCAD e VEXCode VR foi a base para o desenvolvimento de habilidades lógicas e de sequenciamento na manipulação de componentes eletrônicos e design. ações de um robô para atender a desafios específicos, todos virtuais, programando através da linguagem SCRATCH. Os alunos que concluíram o curso conseguiram superar os desafios que a programação lhes apresentava, bem como a manipulação bem-sucedida de um robô

	virtual, alcançando notas altas que refletem o domínio dos conteúdos e o gosto por aprendê-los, em suas próprias palavras. **Palavras-chave**: Robótica educacional, futuros professores.

1. Introducción

Se presentan los resultados obtenidos al desarrollar un curso con el uso y aplicación de tecnología, especialmente el caso de Robótica Educativa, el cual requiere de inversiones monetarias de diversas magnitudes. La situación mencionada adquiere matices de mayor importancia si se trata de educación a distancia en tiempos de pandemia. La presente colaboración pretende mostrar las dificultades y logros que presentaron un grupo de alumnas y alumnos de 6o semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria de la Escuela Normal Superior de México al intentar cubrir un programa que pretende como proyecto final el diseño de un robot cuadrúpedo y al mismo tiempo sobrellevar las condiciones que implican organizar un programa con sesiones virtuales sincrónicas

2. Referentes teóricos

El concepto central en este artículo es el de Robótica Educativa, (Viegas, 2017; p.4) “Es un entorno de aprendizaje en el que conciliamos lo concreto y lo abstracto en tareas de resolución de problemas que requieran conocimientos de diversas áreas científicas” Y al referirse a diversas áreas científicas, nos acercamos a la metodología STEM (acrónimo en inglés de Science, Technology, Engineering. Mathematics, que se refiere al desarrollo de proyectos educativos con retos y tareas a resolver con ayuda de contenidos y habilidades desarrolladas por la Ciencia, la Tecnología, la Ingeniería y las Matemáticas).

La diversidad de disciplinas implicadas da la pauta para otras definiciones como: “La robótica podría ser una de las claves para que el alumnado aprenda a utilizar herramientas tecnológicas y a pensar de forma lógica y crítica. La robótica educativa es un nuevo sistema de enseñanza interdisciplinaria que abarca diferentes áreas del currículo y que permite un aprendizaje activo por parte del alumnado mediante aparatos o herramientas mecánicas, electrónicas y tecnológicas” (Leire y Saez, 2019; p. 109)

Se puede suponer que la Robótica educativa ahonda la brecha digital y las diferencias entre la educación oficial y la educación privada, pero precisamente este curso está enfocado a los futuros docentes que trabajarán en un futuro mediato en escuelas secundarias oficiales por lo que la premisa es aprender y aplicar de la mejor manera posible (virtual y gratuita) los contenidos matemáticos con mínima o nula inversión

Veremos en el presente estudio como las y los normalistas (2019) citan “al conjunto de actuaciones, desempeños y habilidades dirigidas hacia el diseño, construcción, programación, configuración y aplicación de robots que son máquinas que realizan una serie de tareas automatizadas” (Martínez, Olivencia y Meneses, 2016; en Leire y Sáez, 2019; p. 160), para los que se utilizan diferentes materiales y recursos tecnológicos reconociéndose, además, como un dispositivo pedagógico para un aprendizaje creativo para todos y todas (García, 2015, p.7).

De esta manera, siguiendo una cita de Leire y Sáez (2019), según el modelo educativo Heziberri 2020 el objetivo es que se infiltren progresivamente en las aulas atendiendo a tres perspectivas: aprender sobre las TIC, aprender de las TIC y aprender con las TIC, siendo la Robótica Educativa la manera de conjuntar las diversas habilidades digitales que las y los normalistas han aprendido a lo largo del trayecto optativo que se abordará a continuación.

3. Organización y método

En este estudio participaron 18 estudiantes normalistas (11 mujeres y 7 hombres) de la Licenciatura en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria. Se mantuvo interacción con ellos mediante la plataforma Zoom en forma síncrona y en la plataforma Milaulas de Moodle de modo asíncrono.

En el primer caso, se mostró a los estudiantes la forma en que se trabaja con la herramienta. Las sesiones en vivo, sincrónicas, permitieron reforzar vínculos establecidos en el periodo anterior ya en pandemia, aprovechando las opciones que ofrece la plataforma Zoom, compartiendo información en pantallas, trabajando por equipos creando salas en la sección de grupos, demostrando el uso de los programas TINKERCAD y VEXCode VR, permitiendo la manipulación de las opciones, por turnos, resolviendo dudas en el momento justo que ocurrían.

La plataforma, así como los recursos disponibles de las y los normalistas les posibilitaron estar presentes, aun y cuando se encontraban en tránsito a sus domicilios a través de sus teléfonos inteligentes; aunque se limitaba la interacción, podían asistir a las sesiones y conocer el planteamiento de ejercicios, despliegue de información, participación en intercambio de ideas, etc.

En el segundo caso, se elaboraron actividades de aprendizaje y entornos de trabajo colaborativo, intercambio de impresiones, conocer el trabajo del otro, opinar sobre ello, preguntar a través de foros de discusión, que les permitiera el diseño de un robot en forma virtual desde el conocimiento y la manipulación virtual de componentes electrónicos de circuitos (TINKERCAD) hasta el diseño de instrucciones y codificación propiamente dicho de las secuencias y trayectos de un robot virtual en diversos ambientes y escenarios cumpliendo distintos retos o tareas,

Con base en lo expuesto, el enfoque metodológico es la etnografía educativa y el método utilizado fue el de observación participante. Se complementa con la perspectiva de la etnografía digital toda vez que la experiencia es concebida como ventana analítica para entender un mundo del que forman parte los medios digitales; en cuyo análisis las tecnologías digitales forman parte del proceso de investigación.

3. Descripción del programa de estudios de Robótica Educativa

En el plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (SEP, 2018) se incluye un trayecto formativo con carácter de optativo denominado Tecnología Educativa, el cual se compone de cinco cursos (ver Figura 1). Aquí analizamos los resultados obtenidos con el de Robótica Educativa.

Tercera opción					
Nombre del trayecto: Tecnología educativa	Software para el estudio de las matemáticas 4 h / 4.5	Entornos virtuales de aprendizaje 4 h / 4.5	Lenguajes de programación 4 h / 4.5	Diseño de APP 4 h / 4.5	Robótica educativa 4 h / 4.5

Figura 1. Trayecto formativo para Tecnología Educativa.

Bajo estas premisas es que el nuevo plan de estudios se ubica en las tendencias en el mundo en cuanto al acercamiento de las tecnologías al aula. Se hace referencia a la Competencia Digital (CD) y al Pensamiento Computacional (PC), íntimamente ligados dependiendo de su dimensión.

Para la Comisión Europea (2006), asumimos que: "La competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las Tecnologías de la Sociedad de la Información (TSI) para el trabajo, el ocio y la comunicación. Se sustenta en las competencias básicas en materia de TSI: el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, así como comunicarse y participar en redes de colaboración a través de Internet". (Prendes, 2017; p-10)

Para hacer asequible lo anterior, Wing (2006) señala que el docente debe permitir a los alumnos el desarrollo del PC, como herramienta básica algorítmica y lógica, de forma transversal al currículum, y, por ende, los preparará para resolver problemas complejos y abiertos.

Este programa plantea que el estudiantado normalista, en su práctica docente en el aula de secundaria, diseñe y utilice innovación tecnológica, así como materiales didácticos con soporte tecnológico. Esto implica la adquisición de las bases algorítmicas, la modelación y resolución de problemas matemáticos, tecnológicos, educativos y de su entorno, así como el diseño, manejo y control de dispositivos robóticos.

Si bien el programa es ambicioso divide en dos partes el acercamiento al contenido: Introducción a la Robótica Educativa y Construcción y control de robots

En la primera parte se contempla identificar las partes y componentes que integran un robot, a saber: Sistema de control, sensores y actuadores y se especifica hacer el diseño de un robot (de preferencia cuadrúpedo) que aglutine los conocimientos de mecánica, electrónica, variables, constantes y funciones en programación.

Aunque en ningún momento se pretende construir un robot como tal, se deja abierta la posibilidad, ciertamente, y TINKERCAD ofrece opciones muy realistas que apuntan a acercarse fehacientemente al diseño de un robot.

TINKERCAD es una herramienta en línea de la empresa Autodesk que, como primer paso solicita registrarse para aceptar los términos de uso. Una vez registrado se puede optar por trabajar individualmente o como docente inscribir a un grupo asignándoles usuario y contraseña para diseño de sesiones de aprendizaje.

Esta plataforma es más conocida por la posibilidad de elaborar diseños en Tercera dimensión (3D) y, teniendo una impresora 3d conectada, imprimir los proyectos diseñados en tres dimensiones.

La segunda sección es la que nos interesa: la de circuitos. Se dispone de un área de trabajo al centro, donde se arrastran los componentes elegidos de entre una gran variedad de componentes electrónicas que se encuentra del lado izquierdo y desde principio se complementa con tutoriales muy intuitivos que llevan de la mano al usuario a armar circuitos propuestos y a probar si funcionan adecuadamente.

Por añadidura, y conforme los circuitos se van complicando, puede abrirse la sección de CÓDIGO donde el usuario pone en práctica sus habilidades de secuenciación y lógica de Scratch (lenguaje de programación desarrollado en el Massachussets Institute of Technology por Mitchel Resnick en 2012) para ordenar el funcionamiento y el logro de tareas con el circuito diseñado (Ver Figura 2).

Las tareas pueden ser, desde encender un simple foco led, hasta incluir sensores de medición que reporten cercanía con objetos haciendo sonar un zumbador o encendiendo luz de algún color determinado.

Dispone esta herramienta de tutoriales para elaborar diversos circuitos de distintos grados de complejidad, siendo un gran recurso autocontenido de valiosa ayuda aún y cuando el alumnado no podía coincidir en sesiones sincrónicas aprovechando las explicaciones del docente o el intercambio de los participantes en la sesión virtual.

Las y los alumnos, una vez que se familiarizaron con los componentes electrónicos que podían tener los circuitos y que hubieron conformado alguno, podían diseñar una serie de instrucciones para hacer funcionar sus componentes. El código necesario era Scratch, que se activaba al seleccionar la pestaña Código a la derecha de la zona de diseño de circuito (Ver figura 2).

La aceptación que tuvo el alumnado al usar esta herramienta fue estupenda. Hubo quien manifestó dificultades al momento de programar, pero conforme se probaban las secuencias diseñadas, podía verificarse en qué paso modificar para lograr el correcto funcionamiento del circuito.

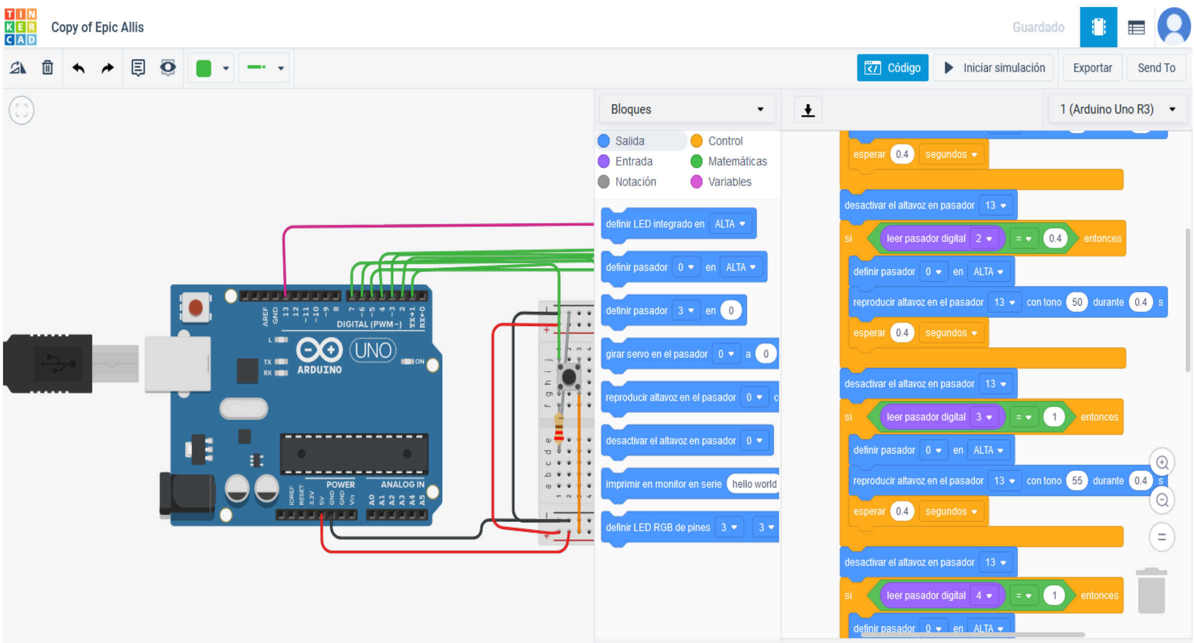


Figura 2. Área de construcción de un circuito, plataforma TINKERCAD y zona de Código elaborada por una alumna

Una vez ejercitados diversos arreglos tratando de descubrir las distintas funciones de muchos de los componentes ofrecidos, se pasó a la segunda parte del curso: Control de robots, para lo cual se empleó la herramienta VEXcode VR que es también una plataforma en línea que permite programar de manera virtual una réplica de un robot real como el VEX123, GO, IQ o V5, en diversos escenarios. La programación se logra a través de bloques SCRATCH, (lenguaje de programación ya mencionado líneas atrás). La primera pantalla, una vez que el usuario se registra, despliega a la izquierda el catálogo de acciones de Scratch que van desde indicaciones para el Tren Motriz, hasta Variables, pasando, por supuesto, por Imán, Mirar, Eventos, Control, Sentir y Operadores.

Por ejemplo, en el escenario de la cuadrícula, un ejercicio desarrollado, fue un intento por dirigir al robot a que señale con color rojo los números pares y con verde los múltiplos de 3 (Ver Figura 3).

En la parte central se dispone de espacio para articular los bloques que han de controlar los movimientos del robot que, una vez definida la secuencia de acciones, activa el escenario que habrá de recorrer el robot así como la cámara elegida para ver moverse al mismo, con tres opciones: vista a nivel piso, vista desde atrás del robot y la cenital, que muestra al robot desde arriba; puede agregarse una barra de información en cualquiera de las tres, que reporta estadísticas, parámetros y distancias en cada paso del robot.

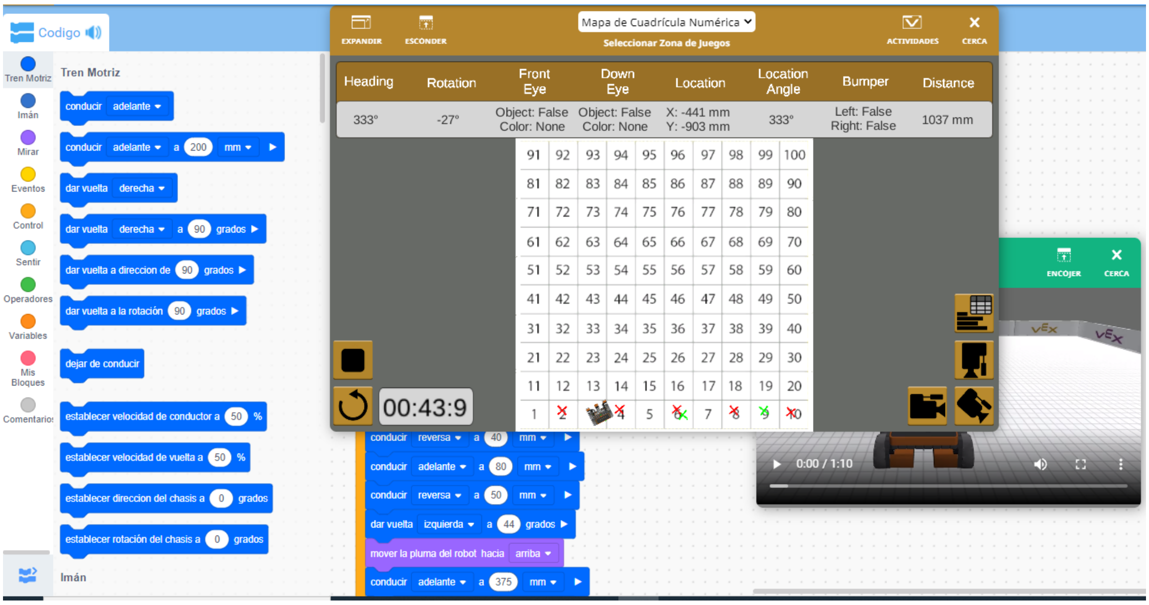


Figura 3. Vista de un escenario con una secuencia de pasos diseñado por un alumno para que el robot marque ciertos múltiplos

La herramienta cuenta con más de 10 tipos de escenarios de acuerdo con los múltiples retos que se plantean, así como actividades tutoriales para llevar paso a paso al usuario a conocer las múltiples funciones de las que es capaz el robot de ejecutar. Uno de esos escenarios plantea diversos sólidos distribuidos en el terreno para que el robot, con una adecuada programación, logre empujar cada prisma fuera de la plataforma, sin caer al vacío (Ver Figura 5).Una vez más, se presentaron algunas dificultades de operación, pero principalmente por complejidades en la programación, pero tener la posibilidad de hacer repetidos intentos para ejecutar las acciones pretendidas, aunque el robot cayera el vacío en el intento, redundaba en entusiasmo por volver a intentar ejecutarlo correctamente hasta descubrir que el número de pasos no era el correcto o el giro tenía unos grados de más o el ojo no detectaba el color elegido.

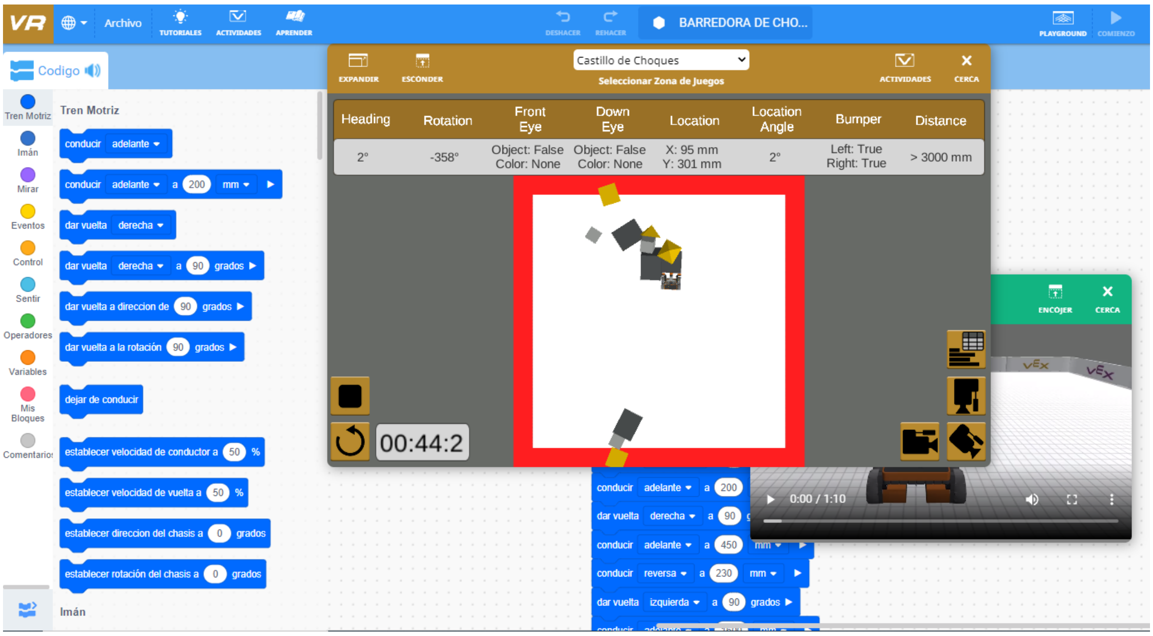


Figura 5. Programación de una alumna para que el robot despeje de sólidos el escenario

El trabajo desarrollado por las y los alumnos pudo ser observado, analizado y discutido, o mejor aun retroalimentado por sus pares al publicarlos en los foros creados exprofeso en la plataforma Milaulas (Moodle) lo que permitió el intercambio de sugerencias no solo profesor-alumnado, sino también, y probablemente más enriquecedor, la intercomunicación de las dificultades y aciertos encontrados en el transcurso de la resolución de las tareas y retos impuestos

A lo largo del curso se determinaron 18 actividades (ver Figura 6) donde se explicitaron aspectos teóricos, se desarrollaron prácticas detalladas paso a paso, se plantearon ejercicios que había que reproducir con algunas variantes con la premisa de publicar la tarea resuelta en el foro, con la condición de comentar la solución de, al menos, dos compañeras o compañeros.

Finalmente se solicitó la autoevaluación del desempeño del curso, así como la evaluación del profesor, sin dejar de opinar sobre la utilidad de lo aprendido y su proyección a futuro en un ambiente real profesional.

Cabe señalar que se trabajó con el grupo de estudio durante los cinco semestres con el trayecto formativo de Tecnología educativa (Robótica Educativa, Elaboración de una App, Lenguajes de Programación, Entornos Virtuales, Software para matemáticas).

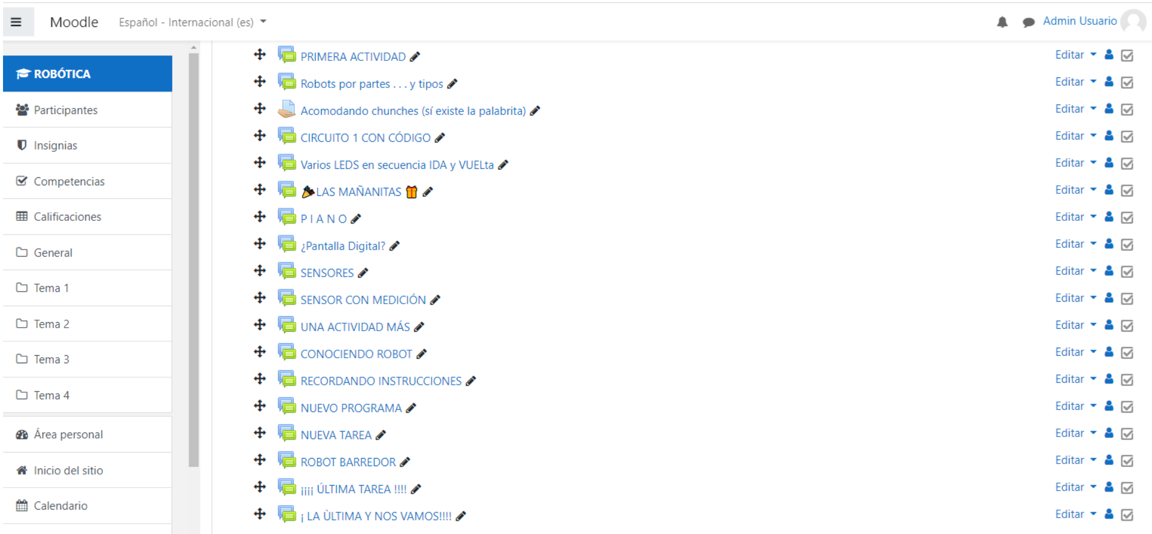


Figura 6. Relación de las 18 actividades que conformaron el curso de Robótica Educativa en Milaulas (Moodle).

Debido a lo anterior, se les pidió de manera amable que expresaran sus opiniones y juicios, tanto e forma general como de modo particular, sobre los aspectos que a continuación se enuncian:

- Conocimiento, dominio e impartición de la materia.
- Evaluación
- Desarrollo de las actividades
- Compromiso con el alumnado
- Proyección y aprovechamiento a futuro de los contenidos

A continuación, se muestra un ejemplo de respuestas proporcionadas por una estudiante, en la cual se puede apreciar una valoración en la que se reconocen las aportaciones a su formación, pero también aquellos aspectos que se deben seguir trabajando para tener un dominio pleno con las herramientas utilizadas.

Conocimiento, dominio e impartición de la materia

General Lo fuimos adquiriendo a través del tiempo, creo que todavía nos falta mucho, pero lo que hemos visto si lo comprendemos la mayoría.

Particular *A mí en lo personal me gustó mucho esta esta asignatura pensé que no, más sin embargo me encanto el ir aprendiendo a conectar hacer cosas diferentes que nos pueden servir el día de mañana, y terminé fascinada con lo que aprendí.*

La opinión refleja lo ocurrido con la mayoría del alumnado, desazón al principio, pero mejor dominio al transcurrir las clases y repetir prácticos.

Evaluación justa

General Es un profesor justo en cuanto a evaluar, siempre revisa nuestros trabajos y nos retroalimenta con sus comentarios.

Particular Siempre que realicemos todos nuestros trabajos la participación en clase las asistencias, pero no solo es la asistencia si no que estemos en constante participación.

El uso de la plataforma permitió el constante intercambio y retroalimentación de los trabajos presentados y las prácticas de los pares para comparar y aprender de los errores y aciertos de otros.

Desarrollo de las actividades

General Se fueron desarrollando super bien, porque siempre nos explicó lo que se iba realizar lo sigo diciendo yo creo que a la mayoría nos gustaron mucho las actividades.

Particular Me encantó de verdad la forma de conectar y lo que se puede realizar con las conexiones que se hicieron y lo último de programar fue padre de ponernos retos fue genial, todas las actividades tenían su grado de dificultad, pero siempre con su ayuda pude resolver mis dudas.

El proceso de acercamiento a las plataformas dio buen resultado, primero se demostraba el funcionamiento de los elementos en ejemplos prácticos y luego se establecían actividades y retos cuya solución se comentaba en clase sincrónica y luego podía consultarse de manera asincrónica.

Compromiso

General Considero que la mayoría tenía compromiso, pero como se vio en este semestre nos pasaron varias cosas como grupo, pero fuimos capaces de poder salir adelante la mayoría.

Particular Siempre traté de estar al pendiente y dar lo mejor en cuestión de todo, pero como sabe un problema de salud cambia un poco todo, pero le puse mucho empeño y compromiso a lo que se iba viendo con ayuda de mis compañeros puede realizar lo que se me pedía y con lo que subía a la plataforma.

No estuvo exento el desarrollo del curso de las dificultades inherentes a la pandemia, pero dentro de los límites de inicio y fin de curso los alumnos pudieron trabajar a su ritmo, de acuerdo con sus limitaciones y posibilidades; excepción hecha de dos integrantes.

Proyección y aprovechamiento a futuro de los contenidos

General Pienso que a la mayoría nos ha servido todo lo que hemos aprendido y que un futuro nos sirva en muchas cosas.

Particular Muchas cosas en el futuro espero realizar de lo que aprendimos a lo largo de la carrera y poder enseñarles a mis alumnos.

La gratuidad y accesibilidad de las plataformas empleadas les abrió a las y los participantes del curso la certeza de poder aplicarlo y sacarles provecho en un futuro con sus alumnas y alumnos propios; aun en el entorno oficial, el uso de computadoras como apoyo al desarrollo de los programas es una realidad.

4. Conclusiones

La pandemia nos hizo transformar y adecuar las acciones de enseñanza a los docentes como el alumnado tuvo que ajustarse a aprender a distancia y, a veces no de manera sincrónica. Tanto docentes como educandos, se vieron afectados por condiciones multifactoriales donde la economía ocupó un lugar importante.

Los números finales que arrojó la evaluación del grupo, así como las opiniones y valoraciones que hace el alumnado respecto de la calidad de los contenidos, y su aplicabilidad a futuro, indican que, salvo los casos de dos alumnos que se dieron de baja y una alumna que no aprobó (pero aprobó el examen extraordinario), se alcanzó un buen nivel de manejo de contenidos y de logro de aprendizajes. Las dificultades presentadas en el desarrollo del curso, inherentes a los conflictos que la programación ocasiona, tanto como aplicar conocimientos, aunque sean someros, de física, para la manipulación exitosa de componentes electrónicos y su consiguiente programación para cumplir tareas específicas no mermaron el gusto por descubrir terrenos desafiantes, probar habilidades nuevas y mejor aún, establecer compromisos personales para aplicar lo aprendido con los futuros alumnos en su ejercicio profesional. El uso de las dos aplicaciones empleadas requería forzosamente conexión a Internet, lo que fue obstáculo en ocasiones para lograr conexión y concretar la interacción con las mismas si se encontraban en tránsito o trabajando algunos miembros del grupo

Un programa de Robótica Educativa pretende para su cabal éxito ver, manipular, armar, probar un robot real en acción. Esto significa la posibilidad de emplear plataformas que simulaban las acciones de actuadores y sensores armados en circuitos y, en un segundo momento, sabiendo el funcionamiento de motores, sensores, leds, plumas, contadores, relojes y ciclos de repetición, por ejemplo, para poder controlar a voluntad los movimientos de un robot acercaron verdaderamente a las y los 18 futuros docentes del grupo de 6º Semestre de la especialidad de Matemáticas de la Escuela Normal Superior al fascinante mundo de los robots. De ese punto a ver en vivo y funcionando un robot armado por sí mismos no dista mucho. Dependerá de un poco de habilidad mecánica y una pequeña inversión.

Pero, aun mejor, queda sembrada la semilla, confiando en el futuro mediato, que ya de manera profesional puedan llevar a sus aulas, solo contando con una aula digital y conexión a internet, las bondades que la robótica educativa reporta en los adolescentes.

Siguiendo a Viegas, el uso de la robótica en el currículo escolar básico (primeros nueve años de escolaridad) permite que los contenidos del currículo para ser enseñado de manera práctica despierten la curiosidad y promoviendo una metodología científica de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes, teniendo en cuenta que los conocimientos adquiridos en este nivel escolar serán útiles para toda la vida.

Sin duda fue una experiencia muy enriquecedora llevar a cabo este primer curso del nuevo plan de estudios que definitivamente plantea espacios para enfrentar nuevos retos, oportunidades de innovación, planteamiento de nuevos problemas y lo mejor, seguir aprendiendo de la tecnología en el aula.

Referencias

Gardner, H. & Davis, K. (2013). *The App Generation: How Today's Youth Navigate Identity, Intimacy, and Imagination in a Digital World*. New Haven: Yale University Press. https://doi.org/10.12987/9780300199185

González Martínez, J., Estebanell Minguell, M., & Peracaula Bosch, M. (2018). ¿Robots o programación? El concepto de Pensamiento Computacional y los futuros maestros. *Education in the Knowledge Society (EKS)*, *19*(2), 29–45. https://doi.org/10.14201/eks20181922945

Leire Vivas, L.F., Saez J. M. L. (2019) Integración de la robótica educativa en Educación Primaria Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa, 18 (121), 107-128. http://dx.medra.org/10.17398/1695-288X.18.1.107

Prendes E., Martínez, S., Gutiérrez, P. (2017). Competencia digital: una necesidad del profesorado universitario en el siglo XXI. RED Revista de Educación a Distancia, 56. Consultado el (26/10/2021) en http://www.um.es/ead/red/56/prendes_et_al.pdf

Resnick (2012). https://web.media.mit.edu/~mres/

SEP (2018) Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria. Plan de Estudios 2018 Robótica Educativa. Optativo (Tecnología Educativa). México.

Viegas, J. (2017). Educación y robótica educativa RED. Revista de Educación a Distancia, 54, http://www.um.es/ead/red/54

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. Communications of the ACM, 49(3), 33–35.

Primer autor: Quiroz Gleason José Luis Medardo:

8 de junio de 1958. Maestro de Primaria y Maestro de Secundaria desde 1977, Docente en la Escuela Normal Superior desde 1997, Maestría en Ciencias de la Educación en la Universidad Hebraica e integrante del Cuerpo Académico Matemática Educativa y Formación Docente ENSMEX-CA6 https://orcid.org/0000-0002-7240-1001

Segundo autor: Elizarraras Baena Saúl:

Se ha desempeñado como profesor en los niveles de Primaria, Secundaria, Media Superior y como profesor investigador de la Escuela Normal Superior de México. Doctor en Ciencias de la Educación, Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa y Licenciado en Educación Media en el Área de las Matemáticas. https://orcid.org/0000-0002-9623-3452

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-18

Construcción de tablas y gráficos estadísticos por estudiantes de tercer año básico: análisis de una experiencia en contexto de pandemia

Laura Santibáñez, Claudia Vásquez

Fecha de recepción: 4/11/2021
Fecha de aceptación: 22/11/2021

Resumen	En este artículo se comunican los resultados sobre la construcción de representaciones estadísticas llevadas a cabo por un grupo 13 de estudiantes chilenos de tercer año de educación básica. Cabe señalar que dicha experiencia se implementó en el contexto de confinamiento producto de la Covid-19. Las producciones de los estudiantes fueron analizadas a la luz de la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático. La actividad implementada consistió en que los estudiantes realizaran un listado con aquellos alimentos consumidos durante tres días, para luego organizarlos en tablas y gráficos estadísticos tributando a una argumentación de sus datos. Los resultados evidencian que la actividad permite la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y los planos verticales [Sem-Dis], [Sem-Ins] e [Ins-Dis]. **Palabras clave**: construcción, Estadística temprana, Espacios de trabajo matemático.
Abstract	This article reports the results of the construction of statistical representations carried out by a group of Chilean students in the third year of basic education. It should be noted that this experience was implemented in the context of confinement as a result of Covid-19. The students' productions were analysed in the light of the Theory of Mathematical Workspaces. The activity implemented consisted of the students making a list of the food consumed during three days, and then organising them in statistical tables and graphs, contributing to an argumentation of their data. The results show that the activity allows the activation of the semiotic, instrumental and discursive genesis and the vertical planes [Sem-Dis], [Sem-Ins] and [Ins-Dis]. **Keywords:** construction, early statistics, mathematical workspaces.
Resumo	Este artigo relata os resultados da construção de representações estatísticas realizadas por um grupo de estudantes chilenos no terceiro ano do ensino básico. Deve notar-se que esta experiência foi implementada no contexto do confinamento como resultado do Covid-19. As produções dos estudantes foram analisadas à luz da Teoria dos Espaços de Trabalho Matemáticos. A actividade implementada consistiu em os estudantes fazerem uma lista dos alimentos consumidos durante três dias, e depois organizá-los em tabelas e gráficos estatísticos,

	contribuindo para uma argumentação dos seus dados. Os resultados mostram que a actividade permite a activação da génese semiótica, instrumental e discursiva e dos planos verticais [Sem-Dis], [Sem-Ins] e [Ins-Dis]. **Palavras-chave:** construção, primeiras estatísticas, espaços de trabalho matemáticos.

1.Introducción

La Educación Estadística busca el desarrollo de un pensamiento crítico y analítico que ofrezca a los estudiantes recursos y estrategias para analizar e interpretar información proveniente de fuentes diversas, por ejemplo, desde los medios de comunicación. Lo anterior, con el propósito de que los estudiantes se constituyan, poco a poco, en ciudadanos competentes y tengan una mirada crítica frente a las afirmaciones basadas en datos (Alsina y Vásquez, 2016). Puesto que, en algunas ocasiones, los datos proporcionados pueden ser engañosos, ocultando información o entregando datos que no se han comunicado adecuadamente (Alsina et al., 2020).

Actualmente, la estadística se utiliza de manera frecuente en los distintos medios de comunicación para organizar, representar, comunicar y/o analizar información (Lemos, 2006). Son variadas las investigaciones que mencionan la necesidad de desarrollar habilidades desde los primeros años de enseñanza básica, e incluso antes, para permitir a los estudiantes, la comprensión de las representaciones estadísticas en sus distintos formatos (Pallauta et al., 2019; Pallauta et al., 2021; Arredondo et al., 2021; Vásquez et al., 2018). En esta misma línea, Estrella et al. (2018) agregan que la construcción de las representaciones estadísticas en educación temprana propicia el desarrollo de habilidades y competencias en el ámbito estadístico. Por otra parte, Alsina (2019) agrega que una adecuada formación en estadística proporciona herramientas que facilitan la comprensión, interpretación y la toma de decisiones pertinentes en situaciones complejas.

Bajo esta mirada, el actual uso masivo de representaciones estadísticas requiere que los individuos sean estadísticamente alfabetos (Watson, 1997); lo que les permitirá tener una mejor comprensión de la información estadística presente en la cotidianeidad (Garfield et al., 2003). Entenderemos por alfabetización estadística al conocimiento y comprensión de los datos en términos estadísticos y la capacidad de interpretar los datos según el contexto del problema (Rumsey, 2002). Por otra parte, Ben-Zvi y Garfield (2004) agregan que la alfabetización estadística incorpora un conjunto de habilidades básicas, que son la capacidad de organizar datos, elaborar y presentar tablas, y trabajar con diversas representaciones de datos. Lo cual, implica la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos. De acuerdo con Burril y Biehler (2011), existen diversos componentes que son parte de la alfabetización estadística, entre ellos: comprender la necesidad y producción de datos, conocer la muestra, la creación de gráficas, tablas y cómo realizar inferencias. Un aspecto importante que se debe considerar respecto de las representaciones estadísticas, son las tablas estadísticas, las que al igual que los gráficos estadísticos, son elementos que forman parte de la alfabetización estadística. Además, son el tipo de representación más utilizado y pertinente para presentar la información de manera clara y sencilla (Feinberg y Wainer, 2011).

En Chile las representaciones estadísticas más utilizadas de 1° a 4° año de educación básica (6-9 años) son la tabla y el gráfico de barras, y se emplean para recolectar, registrar, clasificar y organizar datos (MINEDUC, 2012). Lo anterior, con el propósito de permitir que los estudiantes accedan a la compresión de datos estadísticos, mediante la organización, análisis e interpretación de ellos.

En este sentido, Estrella (2017), señala que la estadística para que sea de interés para los estudiantes, debe ser parte de un contexto. Por consiguiente, es necesario "reorientar la enseñanza de la estadística hacia una enseñanza en contexto que permita a los ciudadanos de hoy y mañana comprender adecuadamente la información estadística para afrontar los desafíos actuales y futuros de un mundo complejo y cambiante" (Vásquez, 2021, p. 186). Pues, la Educación Estadística es un terreno fértil para ayudar a crear conciencia, comprender, reflexionar y actuar, en torno a uno de los desafíos más apremiantes del mundo actual: la Educación para el Desarrollo Sostenible (Vásquez, 2020).

En base a lo anteriormente expuesto, en este trabajo se presenta una propuesta para la enseñanza de la estadística con foco en la sostenibilidad, que se sitúa en el contexto de alimentación saludable, el cual es parte de la agenda 2030 para el desarrollo sostenible (UNESCO, 2017). En concreto, nos enfocamos en el Objetivo dos de Desarrollo Sostenible (ODS) "hambre cero" cuyo propósito es poner fin al hambre, lograr la seguridad alimentaria y la mejora de la nutrición y promover la agricultura sostenible. Así, a través de este trabajo se busca que los estudiantes tomen conciencia de los beneficios de poseer una alimentación sana y nutritiva. Para ello, se ha diseñado una propuesta de enseñanza en base a los proyectos estadísticos orientados a la acción (Vásquez, 2021), con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación: "¿Cómo nos estamos alimentando?" Para llevar a cabo el análisis nos situamos en describir el desarrollo de la tarea planteada bajo la mirada del marco teórico de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014). En lo que sigue se indican los antecedentes del estudio, para luego describir el marco teórico utilizado, la metodología empleada, los resultados y finalmente, se presenta una conclusión sobre los resultados de la actividad, y algunas reflexiones sobre la contribución a la comunidad educativa de la propuesta presentada.

2. Antecedentes

A continuación, se describen algunos antecedentes relacionados con la educación estadística y el marco teórico de Espacios de Trabajo Matemático (ETM), cabe señalar que estos son escasos, puesto que es un dominio que está en desarrollo.

Vidal-Szabó et al. (2016), analizan las representaciones de datos de dos estudiantes de 4° año básico desde la teoría de espacios de trabajo matemático con dominio en la estadística temprana. Ambos estudiantes clasifican los datos usando íconos y utilizan la frecuencia absoluta de la categoría de la variable. Siendo privilegiada la activación del plano vertical semiótico-instrumental en el desarrollo de la tarea.

Estrella, Vidal-Szabó y Olfos (2016), en su investigación proponen una situación de análisis exploratorio de datos donde dos estudiantes de siete años de segundo año básico deben producir representaciones de datos. Uno de los estudiantes clasifica los datos determinando las categorías de las variables utilizando íconos y frente a cada ícono la frecuencia absoluta correspondiente, mientras que el segundo estudiante hace uso de íconos para representar cada dato por categoría de la variable utilizando la estrategia de conteo para encontrar la frecuencia absoluta. Este estudio se examina y describe el ETM-personal de los estudiantes los que activan de manera articulada la génesis semiótica, instrumental y discursiva, logrando descubrir, razonar y comunicar ideas estadísticas.

Vidal-Szabó et al. (2020), en su investigación describe y caracteriza una lección en el ámbito de la estadística temprana, relacionada con las colaciones que los estudiantes llevan a la escuela, mediante el ciclo investigativo (PPAC) y cómo influye en el desempeño de tres estudiantes de enseñanza básica (9-10 años). En la actividad se puede evidenciar que el estudiante A (EA) y el estudiante B (EB) representan los datos considerando dos variables estadísticas coordinadas (tipo y calidad nutricional de las colaciones), en cambio el estudiante C (EC) consideró una variable para representar los datos que no se relacionaba con el contexto del problema. Las representaciones construidas por el EA y EB permitieron desarrollar la comprensión del contexto de los datos logrando interpretar y explicar los datos centrados en evidencia empírica. La tarea al estar orientada por el ciclo investigativo propició en los estudiantes un trabajo estadístico temprano, organizado e intencionado, facilitando la comprensión del comportamiento de los datos en contexto, fomentando la alfabetización y razonamiento estadístico mediante un proceso cíclico. El análisis de la actividad se realiza con la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014) y se observa que en el desarrollo de la tarea los tres estudiantes privilegian la activación de la génesis semiótica la cual es coordinada con la génesis instrumental y/o con la génesis discursiva.

3. Fundamentación teórica

3.1. El ciclo de investigación estadística

La estadística ha alcanzado gran importancia en nuestra cultura debido a la numerosa información que los individuos enfrentan en su trabajo diario, por ejemplo: la información expresada en tablas o gráficos estadísticos, por este motivo es necesario un conocimiento básico para una adecuada interpretación de estos (Batanero y Godino, 2001). Además, es fundamental saber comunicar las conclusiones y así generar nuevas preguntas para futuras investigaciones. Con el ciclo de investigación estadística, se complementa lo anteriormente mencionado, en el que se consideran las siguientes etapas: planteamiento del problema, planificación, recolección de datos, análisis y conclusiones (Wild y Pfannkuch, 1999). Para que este ciclo fluya es importante que se adquieran nuevos conocimientos los que debiesen generar nuevas preguntas, ya que la obtención de respuestas generará la repetición de las etapas (Araneda et al., 2013).

Se definirá brevemente cada una de las etapas, según lo planteado en Araneda et al. (2013):

• Planteamiento del problema: Se refiere a precisar el fenómeno que se quiere aprender, estableciendo las preguntas que se requieren responder a través del proceso. En esta etapa también se puede formular hipótesis las que serán aceptadas o rechazadas según la evidencia obtenida.

• Plan: sirve para organizar el cómo se recolectará la información o datos y cuáles serán los necesarios para el proceso. Además, decidir cuál será la forma más apropiada de registrarlos.

• Recolección de datos: Se realiza una vez lista la planificación. El estudiante deberá diferenciar las distintas técnicas para recolectar datos (observación, medición, experimentación, encuesta) Así como la forma más apropiada de plantear la pregunta para obtener la información que se requiera.

• Análisis: Para que esto se lleve a cabo, los datos recolectados deben estar organizados, clasificados y ordenados. También es factible la construcción de tablas y gráficos, de esta manera los estudiantes tendrán la necesidad de escudriñar en la búsqueda de información, pudiendo analizar las características de un conjunto de datos.

• Conclusión: Los estudiantes deben contestar la interrogante de interés, ser capaces de efectuar inferencias y predicciones basadas en el análisis de datos.

Cabe señalar, que dentro del diseño de actividades que contemplen el ciclo de investigación estadística es importante centrarse en temáticas relacionadas con los ODS (UNESCO, 2017) con el propósito de desarrollar competencias clave para la sostenibilidad, pues “la actual necesidad de desarrollar competencias para el desarrollo sostenible se constituye en un propósito para enseñar estadística y a su vez la estadística se convierte en un medio para formar en sostenibilidad” (Vásquez, 2021, p. 169). En esta dirección Vásquez (2021), propone abordar la enseñanza de la estadística a partir del enfoque de proyectos estadísticos orientados a la acción (Figura 1).

Figura 1. Proyectos estadísticos orientados a la acción (Vásquez, 2021).

Para el planteamiento de tales proyectos, es necesario abordar problemáticas que provienen de contextos diversos vinculados con los ODS, a través de los cuales se conduce a los estudiantes hacia una educación orientada al desarrollo de ciudadanos alfabetizados en sostenibilidad, que, en el largo plazo, los lleve a una toma de decisiones conscientes para crear un mundo más sostenible.

3.2. Espacio de Trabajo Matemático sus niveles y componentes

El análisis de la propuesta se centra en el Espacio de Trabajo Matemático, (ETM) (Kuzniak y Richard, 2014). Esta noción permite comprender, desde el punto de vista didáctico, el trabajo matemático en un contexto escolar. Para esto, se crea un ambiente pensado y organizado que favorezca el trabajo de los estudiantes al resolver problemas matemáticos mediante dos planos, el epistemológico, que tiene relación con los contenidos matemáticos estudiados y el cognitivo, que hace referencia al pensamiento del sujeto al utilizar los elementos del plano epistemológico resolviendo tareas matemáticas (Figura 2) Según los mismos autores, el plano epistemológico está formado por las siguientes componentes:

Representamen: Se refiere al conjunto de objetos concretos y tangibles, pueden ser geométricos, símbolos algebraicos o gráficas. En el caso de la estadística estos signos son de tipo simbólico, por ejemplo: Las variables x e y (Vidal-Szabó et al., 2016).

Artefactos: Son el conjunto de herramientas que se utilizan para dibujar, estos pueden ser materiales concretos como el lápiz, papel, regla o un software. También hay artefactos simbólicos, que se refiere al conocimiento adquirido que servirá para entender otro objeto. En estadística temprana, según Vidal-Szabó et al. (2016), se puede considerar la calculadora y una encuesta en papel para el registro de los datos.

Referencial: Corresponde a las definiciones y propiedades de un objeto matemático. Para la estadística, se puede considerar como referencial teórico, “la suma de las frecuencias absolutas, el concepto de variable y sus categorías, tipos de variables, entre otros” (Vidal-Szabó et al., 2016, p. 256)

El plano cognitivo está formado por los siguientes procesos (Kuzniak y Richard, 2014):

Visualización: Es relativo a la representación del espacio y al soporte material; está relacionado con la información aportada por los diagramas y signos.

Construcción: Tiene relación con el uso de los artefactos (regla, compás, calculadora, entre otros).

Prueba: basado en el referencial teórico, da lugar a razonamiento como la argumentación o la justificación.

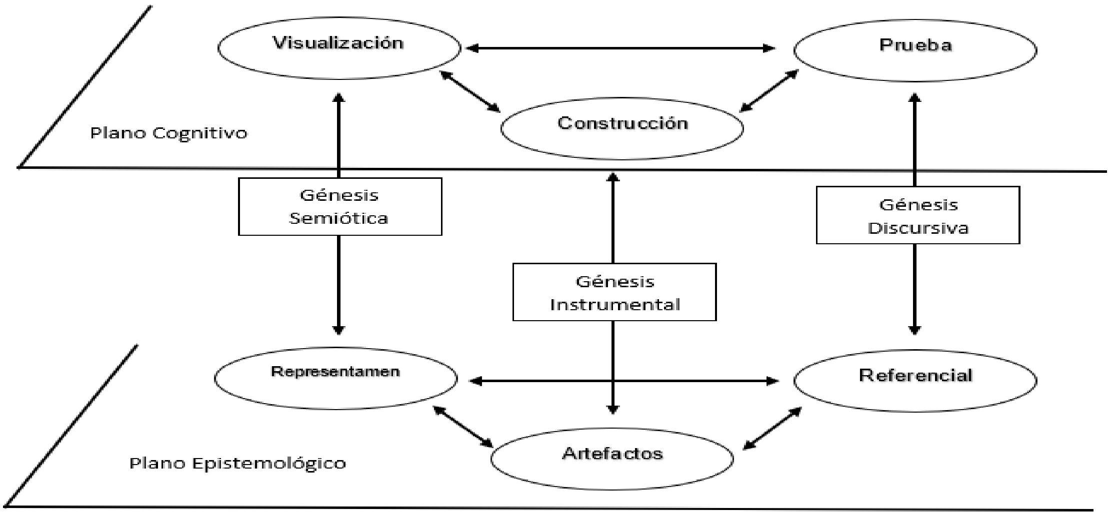


Figura 2. Diagrama ETM de sus componentes epistemológicos y cognitivos, y génesis (Kuzniak y Richard, 2014).

3.2.1. ETM de referencia, idóneo y personal

La noción de paradigma, en el marco teórico de los ETM, orienta y estructura componentes que, dependiendo de sus funciones, será el paradigma que se establezca. Un paradigma se instaura cuando una comunidad de individuos determina formular problemas y organizar sus soluciones, privilegiando ciertas formas de pensamiento. Este trabajo paradigmático (Kuzniak y Richard, 2014) recibe el nombre de ETM de referencia, es decir, es la matemática que considera la institución, siendo el espacio de trabajo más cercano al saber sabio (Menares, 2020). A su vez, está el ETM idóneo, definido en términos didácticos, es el desarrollado por el profesor, posibilitando el trabajo en el paradigma respectivo con sus componentes organizadas. Cabe señalar que, durante el desarrollo de la clase, el ETM idóneo va a depender del ETM personal del profesor. En cuanto a la observación en el desarrollo de la tarea propuesta al estudiante permitirá identificar su ETM personal. Por consiguiente, el ETM idóneo, no es estático y se debe movilizar continuamente para adecuar y ser coherente con el ETM de referencia.

3.2.2. Génesis que articulan el plano epistemológico y cognitivo

Según Kuzniak y Richard (2014), las génesis dependen recíprocamente e involucran a todos los componentes epistemológicos y procesos cognitivos. Los profesores en el ETM idóneo pueden ser quienes activen las génesis, considerando las expectativas del ETM de referencia. Las génesis que derivan de este marco teórico son las génesis instrumental, semiótica y discursiva.

Génesis Instrumental: Permite hacer operatorio los artefactos en el proceso de construcción, aportando al trabajo matemático. Rabardel (1995) menciona que un artefacto pasa a ser un instrumento cuando el individuo es capaz de construir un conjunto de esquemas para su uso (Gómez-Chacón et al., 2016). Es importante destacar lo que menciona Artigue (2002) que hace referencia a las dos direcciones principales que se pueden dar en esta génesis. Una de ellas es el proceso que se realiza desde el artefacto a la construcción, llamado *instrumentación*, la que se refiere a la manipulación y el dominio de las herramientas. El otro proceso es el que va desde la construcción hacia el artefacto y está relacionado con la adecuada elección de la herramienta y recibe el nombre de *instrumentalización*.

Génesis semiótica: Implica los procesos de visualización y elementos del representamen. Se basa en los registros de representación semiótica. Está asociada a los signos y se refiere al paso de la estructura de ellos al significado que se les otorga.

Génesis discursiva: Da sentido a las propiedades del referencial teórico permitiendo el desarrollo de un razonamiento matemático. Además, de permitir una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental. De esta manera, mediante el razonamiento discursivo se verbaliza la identificación de propiedades y definiciones de un objeto matemático.

3.2.3. Planos verticales en el ETM

Los planos verticales (Figura 3) son incorporados con el fin de conectar las diversas fases del trabajo matemático aplicadas a la ejecución de una tarea: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. Las interacciones mencionadas en Kuzniak y Richard (2014) son:

Génesis semiótica e instrumental [Sem-Ins]: Este tipo de interacción favorece la identificación y la exploración de los objetos desarrollando una competencia conectada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos. Con la aparición del Software Digital este plano ha obtenido mayor interés, aumentando la capacidad de explorar y descubrir nuevas propiedades, si bien el enfoque exploratorio ya estaba presente, solo consideraba la experiencia de los estudiantes sin integrar el ámbito digital (Gómez-Chacón et al., 2016). En este plano se pueden evidenciar dos formas de trabajo, primero la que está orientada hacia la construcción de los resultados (diagrama, gráficos, tablas) y la segunda tiene relación con la interpretación de los datos proporcionados por los artefactos.

Génesis instrumental y discursiva [Ins-Dis]: Esta interacción propicia el razonamiento matemático basado en experimentos, en la justificación y argumentación de descubrimientos. Si las conclusiones extraídas son de datos dados por instrumentos, nos referimos a una prueba experimental. Por otra parte, si la prueba se basa en un referencial teórico, los instrumentos son usados para ilustrar o para construir (Gómez-Chacón et al., 2016).

Génesis semiótica y discursiva [Sem-Dis]: Esta última interacción se refiere a la comunicación matemática de los resultados, superando una simple mirada icónica de los objetos.

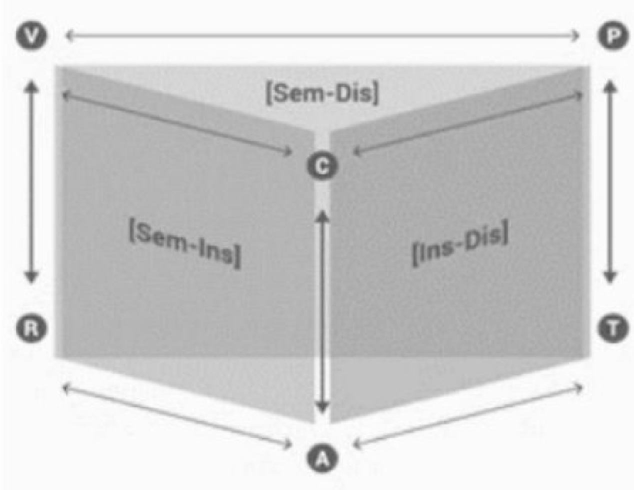


Figura 3. Diagrama ETM y sus planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014).

En Vidal-Szabó et al. (2020) se presenta un ajuste para expandir el modelo ETM al dominio de la estadística (Figura 4). El cual se refiere al rol del contexto como idea central en la estadística y su enseñanza.

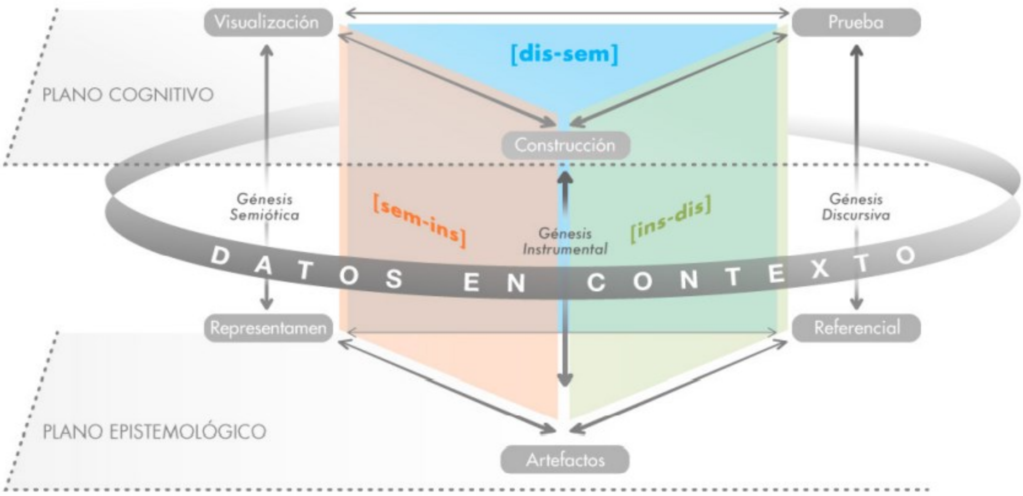


Figura 4. Diagrama ETM estadístico basado en Kuzniak y Richard (2014) Fuente: Vidal-Szabó et al. (2020).

4. Metodología

La propuesta presentada en este estudio utiliza un enfoque cualitativo (Elliott, 1990) de tipo exploratorio por ser un tema poco estudiado y novedoso, además se utilizó un diseño de estudio de casos, por ser de carácter empírico (Hernández Fernández y Baptista, 2014).

El diseño de las clases se basó en el enfoque de proyectos estadísticos orientados a la acción (Vásquez, 2021), centrándose en que los estudiantes trabajen la estadística dentro de un contexto cercano siendo capaces de clasificar y organizar datos en tablas de conteo y frecuencia, y construir, leer e interpretar gráficos de barras simples, en base a información recolectada por los mismos estudiantes.

4.1. Contexto y sujetos informantes

En la actividad participaron 13 estudiantes chilenos de tercer año de educación básica (8 y 9 años), tres niñas y 10 niños, de un colegio particular subvencionado de la Región Metropolitana. Es importante destacar que en el momento en que se llevó a cabo la implementación de la actividad, los estudiantes se encontraban en situación de confinamiento producto de las medidas adoptadas para combatir la Covid-19. Por tanto, la ejecución de la actividad se realizó por medio de cuatro clases virtuales en modalidad sincrónica a través de la plataforma de Google Meet. El objetivo trabajado en dichas sesiones de clases fue "realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barras (MINEDUC, 2012, p. 43).

4.2. Recolección de datos

En la obtención de datos se utilizó el contexto de la alimentación saludable perteneciente al ODS3 de "salud y bienestar", este tema surge a partir de la clase de ciencias naturales en la unidad de "alimentación saludable" donde aparece la interrogante ¿cómo creen que se están alimentando? Frente a esto manifiestan variadas respuestas "yo no como fruta", "yo no como verduras", "yo no consumo agua", "yo como solo chatarra", "yo no sé cómo me alimento". Por este motivo cada alumno investigará ¿cómo se está alimentando? Trabajando este tema en la asignatura de matemática en el eje de datos y probabilidades, en el ámbito de la estadística. Para esto, los estudiantes realizan un listado de los alimentos que consumen durante 3 día, los cuales en la clase 1 deben clasificarlos de manera libre, para que en la clase 2 sean organizados, utilizando lápiz y papel, en tablas de conteo y frecuencia. En la clase 3 la información organizada debe ser representada en gráficos de barra y finalmente en la clase 4 deben argumentar de manera escrita la información presente en las tablas y gráficos confeccionados a través de formularios Google.

Dada la modalidad de clases remota, los datos son recolectados a través de (a) fotografías del registro de los alimentos consumidos durante 3 días y de las representaciones realizadas por los estudiantes para la organización de los datos, que son enviadas al correo electrónico institucional de la profesora que lleva a cabo la propuesta; (b) registro audiovisual de las clases realizadas y finalmente (c) los argumentos dados acerca de las tablas y gráficos confeccionados.

4.3. Análisis de datos

Para efectuar el análisis se utiliza la teoría de espacios de trabajos Matemáticos (Kuzniak y Richard, 2014) examinando las génesis que se activan con la tarea dada bajo una dimensión semiótica, instrumental y discursiva identificando los planos verticales privilegiados: [Ins-Dis], [Sem-Dis], [Sem-Ins], determinando cómo se van activando de acuerdo con las tareas planteadas para la operacionalización del marco.

Como análisis apriori, se espera que con la tarea los estudiantes: (a) clasifiquen los alimentos consumidos: (b) determinen categorías y variables; (c) establezcan frecuencias absolutas mediante tablas de conteo y de frecuencia; (d) Representen los datos por medio de gráfico de barras; y, por último, (e) Argumenten basándose en sus producciones. La triangulación de los datos se llevó a efecto entre el tipo de tarea dada, las producciones de los estudiantes, registro audiovisual y los argumentos dados en cuanto a sus producciones.

5. Resultados

Para la operación del marco teórico del ETM se consideran las actividades, de manera general, planteadas a los estudiantes, de esta forma, se identificarán las génesis y planos verticales que se activan en la resolución de la tarea y cómo ellas se articulan activando los planos verticales [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]. En el análisis se utilizó el registro audiovisual, las producciones de los estudiantes y los argumentos de sus producciones, en coherencia con la pregunta de la clase. Para identificar los estudiantes, se utilizó E1, E2, E3 que se refiere a estudiante 1, estudiante 2 y estudiante 3 respectivamente y P hace referencia a la profesora que imparte la clase.

5.1. Génesis semiótica

La tarea promueve el registro de un listado de alimentos consumidos durante tres días, lo que los guiará a responder a la pregunta de la clase, para esto se espera que los estudiantes codifiquen mediante signos, íconos o escritura el registro de cada dato. Esta génesis es activada cuando los estudiantes visualizan los alimentos que consumen como datos y los categorizan según los tipos de alimentos utilizando íconos (Figura 5) o lo que consumen cada día mediante un registro escrito (Figura 6).

Figura 5. Registro icónico de alimento consumidos de E1.

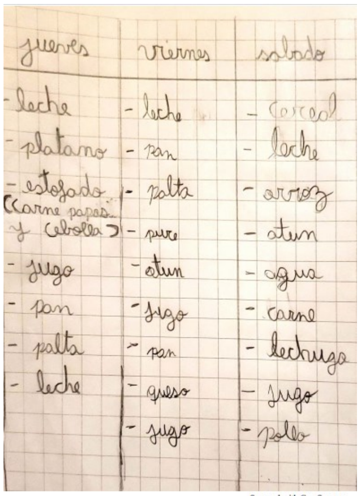


Figura 6. Registro escrito de alimentos consumidos de E2.

También esta génesis es activada cuando los estudiantes se ven enfrentados a organizar sus registros de alimentos en tablas utilizando palitos o el numeral para comunicar la cantidad de alimentos consumidos (Figura 7) y al realizar sus registros en gráficos donde deben codificar por categorías la variable, identificar los ejes, los rótulos, la altura de las barritas para expresar adecuadamente lo que han consumido (Figura 8).

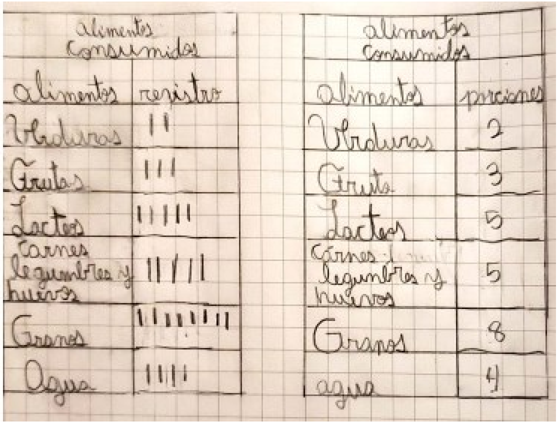


Figura 7. Registro en tabla conteo y de frecuencia de alimentos consumidos de E2.

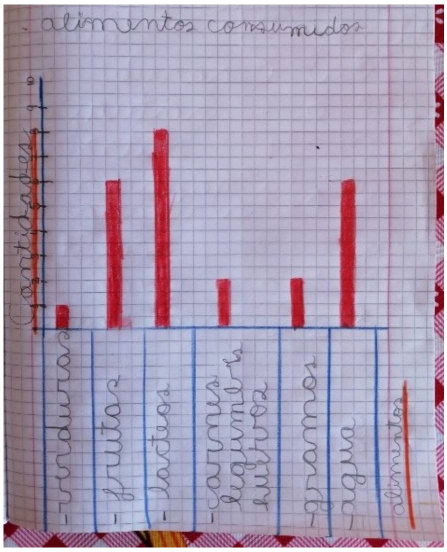


Figura 8. Registro gráfico de alimentos consumidos de E4.

5.2. Génesis instrumental

La tarea consideró que los estudiantes utilizaran herramientas para la construcción de sus registros permitiendo con este procedimiento dibujar o escribir los alimentos consumidos durante tres días en sus cuadernos de trabajo.

Esta génesis es activada cuando los estudiantes utilizan los artefactos: lápiz, goma, cuaderno instrumentalizándolos para la construcción de sus registros. A su vez, producto de la instrumentación logran construir sus representaciones mediante íconos (Figura 5), registro escrito (Figura 6), tabular (Figura 7) o gráfico (Figura 8) para representar sus datos.

5.3. Génesis discursiva

La tarea estimula que el estudiante utilice el conteo para establecer la frecuencia de cada categoría de la variable sujeta al tipo de alimento consumido. También promueve que el estudiante pueda comparar dichas frecuencias entre sí, estableciendo cuál es el tipo de alimento que más o menos consume o realizando una comparación visual en el caso de las representaciones con íconos (Figura 5) o gráficos (Figura 8).

La génesis discursiva es activada cuando los estudiantes sienten la necesidad de clasificar los alimentos como datos de la variable “alimentos consumidos” en diversas categorías con su frecuencia respectiva, lo que les permite argumentar ¿cómo se están alimentando? Además, se le plantearon preguntas tales como: ¿qué alimentos consumieron más?, ¿cuál consumieron menos?, ¿cuáles son los más frecuentes?, ¿qué sucedería si no consumieran verduras y frutas?, o si no bebieran agua, fundamentando cada una de sus respuestas. Todas estas preguntas dan lugar al razonamiento, permitiendo la argumentación o la justificación de la prueba. Por ejemplo, el E1 frente a la pregunta ¿qué crees que le ocurriría a tu cuerpo si no consumiera agua? Responde: “Estaría mal de salud, deshidratado y podría terminar en el hospital”. El estudiante logra sacar conclusiones a partir de su información en contexto.

También los estudiantes responden preguntas en cuanto a la construcción de sus tablas y gráficos, permitiendo argumentar la estructura de ellas, por qué lleva ese título, o porqué colocaste esos nombres a las variables. Por ejemplo, E2 indica que "la primera columna se llama alimentos, que me dice el listado que habrá en mi tabla y la segunda columna se llama porciones y me indica la cantidad que consumí de cada alimento" (Figura 7).

Además, se realizan preguntan en base a su confección, por ejemplo, ¿cuál es el título del gráfico? Justifica tu respuesta, E1 responde: "El título que le coloqué fue: Mi registrador de alimentos, porque en el puedo saber cuántos alimentos consumí en tres días" (Figura 5). El estudiante argumenta la elección de su título, basado en el contexto trabajado, además accede hacia el desarrollo de un pensamiento estadístico, permitiendo la validación de la gráfica, asimismo, mediante el razonamiento discursivo identifican las características de su gráfico o tabla para que el título sea acorde a él. Finalmente, activando la génesis discursiva logran dar respuesta a la pregunta de investigación, la cual es ¿Cómo nos estamos alimentando? E1 indica, "me estoy alimentando bien, porque como muchos vegetales y no tanta comida chatarra, de igual forma agregaría más frutas y verduras, es bueno alimentarse bien".

5.4. Planos verticales activados

Los tres planos son herramientas eficaces para especificar las interrelaciones entre las diferentes génesis identificando los procesos de resolución y analizar los cambios que se producen en el desarrollo de la tarea.

5.4.1. Plano vertical [Sem-Dis]

La actividad impulsa una visión más allá de una simple visión icónica de las representaciones, busca que los estudiantes utilicen su referencial teórico para argumentar en base a sus producciones.

Este plano es activado cuando los estudiantes utilizan sus representaciones, por ejemplo, en la lista de la Figura 6, E2 realiza acciones sobre ella, clasificando los alimentos y por medio del conteo calcula la frecuencia de alimentos más consumidos o menos consumidos permitiendo realizar comparaciones entre ellos (Figura 7).

5.4.2. Plano vertical [Ins-Dis]

La tarea fomenta que los estudiantes saquen conclusiones a partir de los datos dados por instrumentos.

El plano [Ins-Dis] es activado cuando los estudiantes consideran sus representaciones para comunicar la información presente en ellas. Por ejemplo: Al responder la pregunta ¿cómo nos estamos alimentando? E4 debe recurrir a su instrumento (Figura 8) para dar respuesta: "me alimento más o menos, porque como poca verdura, pocas frutas y casi nada de carne y eso no le hace bien a mi cuerpo". El estudiante recurre a su representación para argumentar su respuesta.

5.4.3. Plano vertical [Sem-Ins]

La actividad procura que los estudiantes organicen sus datos en diversas representaciones construyendo listas, tablas y gráficos con el fin de comunicar cómo se están alimentando.

Este plano se activa cuando los estudiantes emplean diferentes formas de registro semiótico para representar los alimentos consumidos durante tres días y a la vez utilizan distintas herramientas cómo lápiz, papel, goma para lograr la representación deseada.

6. Conclusión

A través del proyecto estadístico orientado a la acción, se provocó que los estudiantes pongan en juego distintos procesos de visualización, de instrumentación y de prueba. Además, debieron recurrir a diversos conocimientos como la clasificación y el conteo, en la realización de sus listados de comida, para luego clasificarlos y ordenarlos en tablas de conteo y frecuencias, y así posteriormente construir los gráficos e interpretar sus representaciones. Un aspecto importante de destacar es que las construcciones de tabla y gráfico no surgieron de manera espontánea, la cual se tuvo que enseñar de manera explícita tal como lo menciona Estrella y Estrella (2020).

A partir del proyecto estadístico orientado a la acción se promueve la activación de la génesis semiótica, instrumental y discursiva, en la cual los estudiantes responden bien al realizar las actividades activando de manera satisfactoria estas génesis.

La representación icónica de E1 refiriéndose a la génesis semiótica, los íconos posibilitan la visualización de los datos; mientras que al asociar cada ícono de igual forma a una misma categoría están actuando como artefactos favoreciendo la construcción de frecuencias absolutas en la génesis instrumental, privilegiando la activación del plano [Sem-Ins], consiguiendo desarrollar el sentido del dato (Estrella et al., 2016) contribuyendo a la activación de la génesis discursiva.

El uso de distintas estrategias para la clasificación y conteo ya sea usando íconos, palitos, tachados en sus listados de alimentos consumidos favorece el registro de las frecuencias absolutas (referencial) lo que permite lograr una fundamentación en la génesis discursiva privilegiando el plano del razonamiento [Ins-Dis].

El uso de las distintas representaciones (icónicas, tabular o gráficos) en la génesis semiótica propician la argumentación al momento de comunicar la información que contienen en la génesis discursiva, privilegiando el plano de la comunicación [Sem-Dis].

En síntesis, se observa cómo los estudiantes activan de manera articulada las génesis semiótica, instrumental y discursiva, permitiendo a través de las representaciones construidas por ellos, el uso de argumentos favoreciendo la comunicación de la información estadística obtenida a partir del conjunto de sus datos, logrando descubrir, razonar y comunicar ideas estadísticas.

Al considerar el ETM en la aplicación de la tarea, se deben tener en cuenta los conocimientos previos que los estudiantes deben manejar y ver la forma de ir activando cada una de las génesis desde que el estudiante visualiza el objeto matemático y comprende qué es, para qué sirve, cómo opera, pasando por la construcción de un nuevo objeto matemático para finalmente lograr este razonamiento discursivo. Si bien, el circular por las génesis no es unidireccional, es la secuencia que se siguió para el desarrollo de las actividades. A la luz de los resultados, parece relevante propiciar la activación de los planos verticales obteniendo una actividad más completa y que no solo se limite a obtener resultados matemáticos, sino que también a desarrollar la argumentación.

Respecto, a la estadística trabajada en contextos de sostenibilidad se evidenció que los estudiantes se involucran con el proceso de enseñanza y aprendizaje, siendo participantes activos en el desarrollo de la actividad, dejando atrás el solo recibir información y reproducirla, sino que ellos eran los que aportaban la información, la organizaban, la comunicaban y analizaban, otorgando así un sentido mayor a cada reflexión, construcción e interpretación de datos, aun cuando se encontraban en un contexto de clases remotas. Por tanto, los proyectos estadísticos orientados a la acción se configuran como una herramienta poderosa, para alfabetizar en estadística y alfabetizar en sostenibilidad.

En este sentido, parece importante continuar trabajando tanto la estadística en contexto como el desarrollo del marco teórico del ETM, ya que jugó un papel fundamental para promover la visualización, construcción y el razonamiento discursivo en la estadística. Se espera, que esta propuesta se pueda proyectar para nuevos estudios en pro-mejora de la enseñanza de la estadística en el aula de Educación Básica.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT Nº 1200356 y Beca de Magister Nacional año 2021 Folio: 22210129, financiados por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2019). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. [ponencia]. *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*, Granada, España. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Alsina, Á., y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 48*, 41-58.

Alsina, A., Vásquez, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz L. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Revista Épsilon, 104*, 99 - 128.

Araneda, A. M., Chandía, E., y Sorto, M.A (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica.* Santiago de Chile: Ediciones SM.

Arredondo, E.H., Vásquez, C., y García-García, J.I. (2021). Análisis de las tablas y los gráficos estadísticos en libros de texto de Chile y España para la Educación Infantil. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática* , *[S. l.]*, *5*(1), 1-26.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, Vergag*, *7*(3), 245-274.

Batanero, C., y Godino, J. (2001). *Análisis de Datos y su Didáctica*. Granada. España. http://www.urg.es/~batanero/pages/articulos/apuntes.pdf

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. New York: Springer. (pp. 3-15).

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En: Batanero, C.; Burril, G.; Reading, C. (ed.). *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for teaching an teacher education*. Dordrecht: Springer, 57-69.

Elliott, J. (1990). *La investigación acción en educación*. Madrid: Morata.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, 173 – 194.

Estrella, S., y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: de listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(1), 21–34.

Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de Las Ciencias, 36*(2), 143-163.

Estrella, S., Vidal-Szabó, P., y Olfos, R. (2016). ETM en el dominio de la estadística temprana: Dos casos de alumnos de grado 2 y sus representaciones de datos. En *Actas Quinto Simposio Espacio de Trabajo Matemático 5, ETM5*. Florina, Grecia.

Feinberg, R. A., y Wainer, H. (2011). Extracting sunbeams from cucumbers. *Journal of Computational and Graphical Statistics, 20*(4), 793–810.

Garfield, J., Mar, R., y Chance, B. (2003). Assessment resource tools for improving statistical thinking. [ponencia]. *Assessment of Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality*. Chicago. http://apps3.cehd.umn.edu/artist/articles/aera_2003.pdf

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 1–22.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. D. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill Education /Interamericana editores S.A de C.V.

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(4-1), 5-39. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Lemos, M. P. F. de. (2006). O estudo do tratamento da informação nos livros didáticos das séries iniciais do ensino fundamental. *Ciência y Educação (Bauru), 12*(2), 171–184.

Menares, R. (2020). Resolución de una tarea de cálculo por parte de profesores de matemática. ¿Cuáles son los argumentos que ellos validan en su trabajo personal como en el aula? *Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica, 23*, 24-46.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares 1° a 6° Básico.* Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Pallauta, J. D., Gea, M., y Venegas. (2019). Las actividades sobre tablas estadísticas en textos escolares chilenos de educación básica. [Comunicaciones]. *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Pallauta, J., Gea, M., y Arteaga, P. (2021). Caracterización de las Tareas propuestas sobre Tablas Estadísticas en Libros de Texto Chilenos de Educación Básica. *Paradigma, 42*, 32–60.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rumsey, D.J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10*(3), 6-13.

UNESCO. (2017). *La UNESCO Avanza. La agenda 2030 para el desarrollo sostenible*. https://es.unesco.org/creativity/sites/creativity/files/247785sp_1_1_1.compressed.pdf

Vásquez, C. (2020). Educación estocástica: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Revista Matemática, Educación y Sociedad*, 3(2), 1-20.

Vásquez, C. (2021). Comprensión y Uso Docente de Gráficos Estadísticos por Futuros Profesores para Promover Competencias para la Sostenibilidad. *PARADIGMA, 41*(e1), 165-190.

Vásquez, C. (2021). Proyectos estocásticos orientados a la acción: una puerta al desarrollo sostenible desde temprana edad. *Revista venezolana de investigación en educación matemática, 1*(2), e*202108.https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.10*

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C. y Alsina, A. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec, 8*(1), 154-179.

Vidal-Szabó, P., Estrella, S., Morales, S., y Olfos, R. (2016). Espacios de trabajo matemático con dominio en la estadística temprana. En Actas de las XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Valparaíso, Chile.

Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S., y Montoya, E. (2020). Análisis cualitativo de un aprendizaje estadístico temprano con la mirada de los espacios de trabajo matemático orientado por el ciclo investigativo. *Educación Matemática, 32*(2), 217-246.

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. En I. Gal y J. Garfield (eds.), *The assessment challenge in statistics education*, 107-121.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

Santibáñez, Laura: Profesora de enseñanza general básica con mención en matemática primer ciclo. Cursando Magíster en didáctica de la matemática en la Pontificia Universidad de Valparaíso. Email: laurasangue@gmail.com

Vásquez, Claudia: Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (España). Actualmente es Profesora Asociada de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Sus líneas de investigación se centran en la formación del profesorado, y la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad. Ha participado en numerosos proyectos de investigación sobre formación del profesorado, y didáctica de la probabilidad y la estadística. Email: cavasque@uc.cl

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-18

Divulgação de Tarefas Matemáticas em uma rede social: atividades extensionistas em contexto remoto
Difusión de actividades matemáticas en una red social: actividades de extensión en un contexto remoto

Antônio Carlos Bispo de Oliveira, Danielle Morais da Silva Antunes, Jamili da Silva dos Santos, Jaqueline de Souza Pereira Grilo, Maria de Lourdes Haywanon Santos Araújo

Fecha de recepción: 5/11/2021
Fecha de aceptación: 17/11/2021

Resumen	Este artículo tiene como objetivo analizar la acción de extensión de un Laboratorio de Enseñanza, en el contexto del distanciamiento social impuesto por la pandemia, a través de actividad matemáticas puestas a disposición en una red social. Recurrimos a una investigación cualitativa, basada en la etnografía virtual, ya que el objeto de estudio involucra procesos comunicativos que ocurren en una comunidad virtual - la red social @lamulimat. El análisis realizado señala que las actividades matemáticas disponibles en la comunidad llegan a un público diverso, ayudando a los docentes de educación básica a desarrollar actividades contextualizadas en la enseñanza remota de emergencia. **Palabras clave**: Extensión universitaria, actividad matemática, pandemia.
Abstract	The present article has the objective to analyze the extensionist action of an Ensino Laboratory, in the context of social distancing imposed by the pandemic, by means of mathematical tasks available in a social network. We go through a qualitative research, based on virtual ethnography, considering that the object of study involves communication processes that occur in a virtual community - a social network @lamulimat. To the analysis undertaken, it states that the mathematical tasks made available to the community reach a diverse public, helping teachers of basic education to develop contextualized activities in the emergency remote teaching. **Keywords**: University extensión, math taskc, pandemic.
Resumo	O presente artigo tem como objetivo analisar a ação extensionista de um Laboratório de Ensino, no contexto de distanciamento social imposto pela pandemia, por meio de tarefas matemáticas disponibilizadas em uma rede social. Recorremos a uma pesquisa qualitativa, baseada na etnografia virtual, visto que o objeto de estudo envolve processos comunicativos que ocorrem em uma comunidade virtual – a rede social @lamulimat. A análise empreendida aponta que as tarefas matemática disponibilizadas na comunidade alcançam um público diverso, auxiliando

professores da educação básica a desenvolverem atividades contextualizadas no ensino remoto emergencial.
Palavras-chave: Extensão universitária, tarefas matemáticas, pandemia.

1. Introdução

A Extensão Universitária é responsável por promover a articulação entre o saber acadêmico e a sociedade. Como o próprio nome já diz, é estender a universidade para além dos seus muros, é por meio da Extensão que a universidade compartilha a produção do conhecimento acadêmico com as comunidades onde atua, e aprende por meio da troca de saberes. O Fórum de Pró-Reitores de Extensão das Instituições Públicas de Educação Superior Brasileiras (Forproex) defende que a extensão universitária deve ancorar-se no princípio constitucional da indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão. Além disso, afirma que a Extensão se constitui em um processo interdisciplinar, educativo, cultural, científico e político que promove a interação transformadora entre universidade e outros setores da sociedade (Brasil, 2012).

Com a pandemia do novo coronavírus vários setores da sociedade precisaram se reinventar, especialmente, a Educação. Após a confirmação do primeiro caso de Covid-19 no Brasil, em fevereiro de 2020, não demorou muito tempo até que as atividades presenciais nas instituições de ensino fossem suspensas, haja vista que uma das medidas indicadas para o controle da pandemia é o distanciamento social. Esse novo contexto imposto pela pandemia exigiu também uma adequação das ações extensionistas. O que antes ocorria com encontros presenciais, precisou ser adaptado para o meio virtual. Apesar de serem ações recentes, algumas experiências exitosas já foram documentadas (Irala, Blass & De Borba Vincent, 2021; Serrão, 2020; Antunes, Oliveira & Araújo, 2020)

No momento em que a atenção mundial esteve (e ainda está) majoritariamente direcionada à pandemia de Covid-19, o Laboratório Multidisciplinar das Licenciaturas (LAMULI) da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), localizada na região Nordeste do Brasil, por meio de uma ação específica da área de Matemática (LAMULIMat), iniciou uma série de postagens em uma rede social no intuito de discutir a pandemia por meio de conteúdos matemáticos, que no decorrer do período se configuraram em tarefas matemáticas. Segundo Ponte (2005), as tarefas matemáticas podem ser de diferentes tipos, umas mais desafiantes, outras mais acessíveis, mais abertas ou mais fechadas, podendo tomar como referência contextos da realidade ou serem formuladas em termos puramente matemáticos.

Neste sentido, interessamo-nos em analisar a ação extensionista do LAMULIMat, no contexto de distanciamento social imposto pela pandemia, por meio das tarefas matemáticas disponibilizadas na rede social Instagram pelo grupo que atua no projeto.

2. Laboratórios de Ensino e a elaboração de Tarefas Matemáticas

De acordo com Lorenzato (2006), os Laboratórios de Matemática, mais do que um espaço de apoio visual ou visual tátil para facilitar a aprendizagem, são espaços para a construção de conhecimento, no qual seus integrantes podem ampliar a sua criatividade, estimular o trabalho coletivo e melhorar as trocas de conhecimento.

Compreendemos que nos Laboratórios de Ensino vinculados aos cursos de formação de professores é possível desenvolver e planejar outras atividades além das aulas regulares, como: exposições, oficinas, cursos, olimpíadas, produção de materiais educativos e discussão sobre inovações pedagógicas com vistas a oferecer uma formação docente qualificada, promover a aprendizagem docente e discente e despertar o interesse de futuros professores por estratégias didáticas estimulantes e inovadoras.

Ainda segundo Lorenzato (2006), não basta que o professor disponha de um Laboratório de Ensino, é necessário que ele saiba como utilizar os materiais didáticos, pois estes como instrumentos de ensino, exigem conhecimentos específicos para sua utilização. E segundo a nossa compreensão, mais do que uma simples manipulação dos materiais é preciso que o professor reconheça a potencialidade desse espaço como formador de conceitos, de investigação, exploração independentemente da manipulação de objetos matemáticos concretos. É importante ter um local para "respirar" Matemática e (des)construir e entender diferentes meios que podem ser utilizados para apresentar o conteúdo matemático de forma mais interativa.

Os níveis de insucesso em Matemática são considerados como um fator de preocupação social, e esse insucesso acontecem por razões múltiplas e complexas, não há um ponto determinístico da origem (Bispo, Ramalho & Henrique, 2008). A aversão pela disciplina, por vezes, é ocasionada quando os estudantes não sabem ao certo porque estão estudando um determinado conteúdo matemático. A busca por aproximar os estudantes do conhecimento matemático tem levado educadores a pesquisar situações nas quais os conteúdos são apresentados tomando como referência à realidade ou uma situação hipotética que traduziria uma realidade (Ponte & Quaresma, 2012; Skovsmose, 2015).

Algumas dessas pesquisas se voltam para a proposição e análise de tarefas matemáticas que colocam o estudante no centro do processo de construção do conhecimento buscando despertar, dentre outras coisas, o seu interesse pela área (Antunes et al., 2021; Alejo, Escalante & Carmona, 2018). Neste sentido, as tarefas são pretextos de interação e colaboração entre alunos e professor, que os impulsionam a promover a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático (Bispo, Ramalho & Henrique; 2008).

Segundo Ponte et al. (2015, pp. 1), "as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos" que podem ser apresentadas por meio de exercícios, problemas e explorações e que devem ser variadas a fim de atingir o seu objetivo primordial: auxiliar na aprendizagem dos estudantes. Ainda segundo os autores, as tarefas podem ser fechadas, do tipo exercícios e problemas, ou abertas, como as investigações e explorações. Essas últimas, geralmente, são tarefas com base em um contexto realístico, permitindo que os estudantes vivenciem o cotidiano e associem os conteúdos matemáticos à realidade, possibilitando uma maior e melhor comunicação entre aluno e professor.

Com a pandemia, todos os setores educacionais passaram por adaptações que permitissem deslocar as atividades desenvolvidas no contexto presencial para o virtual e com o LAMULIMat não foi diferente. A fim de manter o laboratório em funcionamento e auxiliar professores da Educação Básica nesse contexto de adaptação e descobertas os integrantes do Projeto visualizaram no Instagram uma ferramenta com potencial para a divulgação de tarefas matemáticas que poderiam ser utilizadas por professores durante o período de ensino remoto emergencial imposto pela pandemia. Neste sentido, compreendemos o Instagram como uma comunidade onde ocorre a interação entre pessoas que, uma vez utilizada com vista ao ensino e a aprendizagem, se apresenta como "um ponto de encontro online de pessoas que querem adquirir, compartilhar e construir conhecimento" (Oliveira, 2020, pp. 23) e na perspectiva das ações de um laboratório, um ambiente de interação, divulgação e socialização da produção acadêmica do grupo com a comunidade, em especial alunos de licenciatura e professores da Educação Básica que ensinam Matemática.

3. Contexto da pesquisa

O projeto Laboratório Multidisciplinar das Licenciaturas (LAMULI) foi criado por professores do Departamento de Educação da UEFS no ano de 2008, através da participação em Edital da CAPES do PRODOCÊNCIA, concluindo toda a estrutura física de implantação do espaço físico em 2011. O Projeto do Laboratório foi aprovado institucionalmente como Projeto de Extensão do Departamento de Educação em 2010, o que permitiu a continuidade das ações.

O LAMULI consiste em um espaço para a formação inicial e continuada de licenciandos da UEFS, professores e alunos da Educação Básica na cidade de Feira de Santana e microrregião, com o objetivo de discutir, propor e repensar o ensino e a aprendizagem através de estratégias que fomentem a qualificação profissional no âmbito escolar, visando à melhoria da educação, nas diversas áreas específicas das licenciaturas da UEFS.

O subprojeto "Laboratório Multidisciplinar das Licenciaturas: ampliando conhecimentos para formação docente do professor de Matemática" (LAMULIMat) faz parte de um conjunto de ações do Projeto LAMULI e tem como principal objetivo desenvolver atividades visando à formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

O LAMULIMat conta com a participação de duas docentes orientadoras e, durante o período deste trabalho, cinco bolsistas trabalharam na organização, elaboração e execução de ações, sendo dois bolsistas que iniciaram como monitores, dos quais um migra para extensão ainda em 2020 e outra se forma e se mantém no projeto como voluntária, e três bolsistas de extensão, dos quais uma iniciou no Projeto em 2019 e as outras duas iniciaram em 2021, por meio da parceria e trabalho conjunto com o Programa de Extensão Carloman Carlos Borges da mesma instituição, sendo que uma se desligou do projeto em meados de maio do mesmo ano. Desse modo a equipe é composta, até a finalização deste trabalho, de seis pessoas (duas orientadoras, três extensionistas e uma voluntária).

É importante salientar que, logo após a suspensão das atividades presenciais no campus universitário, a parceria entre a bolsista de extensão e os bolsistas de monitoria na época, se fortaleceu quando se iniciou a divulgação de dados relacionados à pandemia no perfil do grupo na rede social Instagram. A integração entre os bolsistas de monitoria e extensão gerou um trabalho cooperativo em prol da manutenção das atividades do laboratório, mesmo no momento de distanciamento social, possibilitando um avanço nos conhecimentos acadêmico-científico dos bolsistas e a difusão desse conhecimento atendendo às demandas da comunidade.

Inicialmente, a ideia do grupo foi a manutenção de atividades com os bolsistas, utilizando a rede social como meio de difusão do conhecimento produzido, que proporcionasse o uso de conceitos matemáticos para o entendimento das informações sobre a pandemia, por meio de fontes de informações científicas confiáveis. Essa ideia inicial foi se ampliando, a partir do avanço da pandemia, do volume de informações diárias propagadas e em função do longo tempo de isolamento social.

O LAMULIMat fez a sua primeira publicação no dia 30 de março de 2020, 13 dias após o fechamento do campus universitário. Nessa primeira postagem, a abordagem foi sobre o crescimento do número de casos registrados de Covid-19, em números absolutos e porcentuais, na cidade de Feira de Santana-BA, onde está localizada a UEFS.

As publicações inicialmente produzidas e divulgadas de acordo com a demanda e disponibilidade do próprio grupo, foram se adequando à rotina de trabalho e estudos imposta pela pandemia e culminou na organização de três postagens durante a semana, geralmente, às segundas, quartas e sextas-feiras.

No decorrer do ano de 2020, as ideias debatidas nos planejamentos do grupo, moldaram as publicações e podemos estabelecer a adoção de três tipos de postagens: 1) dados referentes à Covid-19; 2) tarefas que associam os dados da Covid-19 a conteúdos matemáticos; 3) tarefas que tratam de conteúdos matemáticos sem associá-los à Covid-19.

Neste artigo, nos interessamos por analisar as postagens dos tipos 2) e 3) referentes às tarefas que associam os dados da Covid-19 a conteúdos matemáticos. Em linhas gerais, nessas postagens são apresentados roteiros de aulas para serem desenvolvidos no ensino remoto com sugestões de como adaptá-los em atividades presenciais ou vice-versa, variando sua temática central, sua metodologia, sempre indicando os objetivos relacionados à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) que podem ser cumpridos com os respectivos roteiros.

4. Percurso Metodológico

No intuito de alcançar o objetivo da pesquisa, qual seja, analisar a ação extensionista do LAMULIMat no contexto de distanciamento social por meio das tarefas disponibilizadas pelo grupo em uma rede social, realizamos um estudo empírico de abordagem qualitativa que segundo Creswell (2010, pp. 42) busca "identificar o grupo que compartilha uma cultura e estuda como ele desenvolve padrões compartilhados de comportamento no decorrer do tempo".

O nosso objeto de estudo encontra-se envolvido em processos comunicativos que ocorrem em uma comunidade virtual – o perfil público da rede social Instagram @lamulimat. Assim, para a produção dos dados, recorremos à netnografia, ou etnografia virtual, "uma forma especializada de etnografia adaptada às contingências específicas dos mundos sociais de hoje mediados por computadores" (Kozinets, 2014, pp. 10).

Consideramos que as pessoas que seguem o perfil do LAMULIMat constituem esta comunidade virtual a fim de empreender discussões públicas e compartilhar experiências sobre temas relacionados ao ensino de Matemática, prioritariamente. Ao acompanhar o perfil do grupo, percebe-se que há uma interação social sustentada e um senso de familiaridade entre os membros que os levam a um sentimento de pertencimento ao grupo, princípios elencados por Kozinets (2014) para definir uma comunidade virtual.

Utilizamos como técnica para a produção dos dados o levantamento e a análise documental. O levantamento foi utilizado no sentido de conhecer sobre "as atividades das pessoas da comunidade online, e também sobre o modo como sua comunidade e suas atividades culturais influenciam outros aspectos de suas vidas diárias" (Kozinets, 2014, pp. 47). A análise documental recorreu às tarefas matemáticas produzidas pelo grupo e disponibilizadas para a comunidade.

A análise empreendida se deu em torno da agregação social, de modo que a netnografia não analisou publicações pessoais de mensagens, numa abordagem individualista, mas voltou-se para o grupo como uma comunidade.

5. Apresentação e discussão dos dados

Desde março de 2020 até setembro de 2021, período que compreende essa pesquisa, a equipe do LAMULIMat produziu seis tipos de publicações diferentes, as quais são diferenciadas por cores com a finalidade de facilitar a identificação do conteúdo abordado pela comunidade. Assim, as publicações estão divididas entre: cards informativos; roteiro de tarefas envolvendo o novo coronavírus; roteiro de tarefas com assuntos matemáticos gerais; cards de divulgação; relato de professores e cards comemorativos.

Os cards informativos (Figura 1) são utilizados para evidenciar os conteúdos matemáticos presentes nos dados que são divulgados sobre a pandemia e como os mesmos podem ajudar a compreender aquilo que está posto pela comunidade científica.

Figura 1. Cards Informativos. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Nos cards de tarefas matemáticas envolvendo o novo coronavírus (Figura 2) são apresentados os roteiros de aulas com tarefas matemáticas baseadas na pandemia, de forma que auxiliem o professor no planejamento de aulas que ajudem os alunos a compreender a Covid-19 e a se proteger, além de perceber a Matemática por trás dos dados apresentados pelos meios de comunicação.

Figura 2. Cards de tarefas envolvendo o novo coronavírus. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Os cards que apresentam tarefas com assuntos matemáticos em geral (Figura 3) são semelhantes aos apresentados nas tarefas sobre Matemática e o coronavírus, porém vinculados a temáticas e contextos diversificados e da atualidade com foco nas relações entre o conteúdo matemático e o tema e em como ele pode ser abordado de forma remota.

Figura 3. Cards de tarefas envolvendo temas e assuntos matemáticos diversos. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Há publicações (Figura 4) voltadas para a divulgação dos diversos eventos que vêm ocorrendo virtualmente em todo o período de pandemia, especialmente aqueles voltados aos professores, alunos da educação básica e da graduação, e o público de modo geral.

Figura 4. Cards de divulgação. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Há publicações em que abrimos o espaço para a escuta dos professores da educação básica (Figura 5). Uma oportunidade de os professores falarem sobre suas experiências com as aulas remotas, dificuldades vivenciadas, como eles conseguiram superá-las e se eles utilizaram algumas das tarefas disponibilizadas.

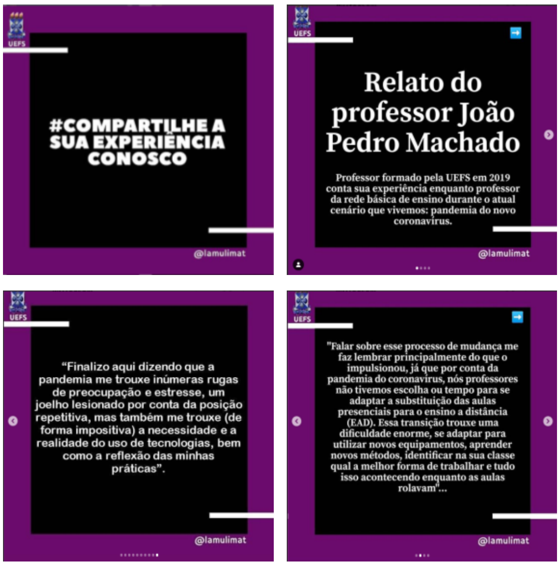


Figura 5. Cards de Relato de Professores. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Em datas especiais, como Natal, São João, Dia dos Professores, a equipe prepara alguns jogos matemáticos, informações temáticas e brincadeiras que possam tanto ser utilizadas pelos professores nessas datas com seus alunos, quanto aproximar os seguidores da página à equipe (Figura 6).

Figura 6. Cards Comemorativos. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2020-2021).

Como dissemos, interessa-nos nesse estudo analisar a ação extensionista do LAMULIMat no contexto de distanciamento social por meio das tarefas matemáticas disponibilizadas no Instagram. Compreendendo que a extensão universitária prima pela articulação entre a universidade e a sociedade, inicialmente investigamos quem é a nossa comunidade e as interações geradas a partir da publicação de nossas tarefas. Essas interações foram analisadas por meio de comentários feitos nas postagens e de retornos sociais realizados por outros meios de comunicação com a equipe como por exemplo, chat da página, comentários particulares em outras redes sociais, interação em ambientes coletivos como reuniões e aulas, dentre outras.

5.1. Perfil da comunidade

De acordo com as informações disponibilizadas no painel profissional do perfil do Instagram @lamulimat, no momento desta escrita, a página contava com um total de 490 seguidores, majoritariamente mulheres e com concentração significativa de um público jovem adulto na faixa etária entre 18 e 34 anos, como é possível observar nas tabelas 1 e 2.

Gênero	Porcentagem
Mulher	62,20%
Homem	37,80%

Tabela 1. Perfil da comunidade segundo o gênero

Faixa Etária	Porcentagem
13-17	1,70%
18-24	31,90%
25-34	32,50%
35-44	20,00%
45-54	8,60%
55-64	4,40%
Maiores de 65	0,80%

Tabela 2. Perfil da comunidade segundo a faixa etária

De posse desses dados disponibilizados pelo Instagram, acessamos individualmente a conta de cada seguidor, buscando outras informações que pudessem trazer mais detalhes sobre o perfil da comunidade. Essa busca nos revelou três perfis de seguidores: pessoal, com e sem vínculo com a educação e profissional, conforme a descrição da Tabela 3.

Perfil	Descrição	Seguidores
Pessoal, com algum vínculo com a educação	Seguidores vinculados acadêmica ou profissionalmente a alguma instituição (estudantes e professores),	280
Pessoal, sem vínculo com a educação	Pessoal que geralmente tem vínculos familiares ou de amizade com membros da equipe do LAMULI	2
Profissional	Pessoal de uso profissional ou que representa alguma instituição (universidades, escolas, grupos de pesquisa)	208

Tabela 3. Perfil da comunidade segundo descrição no perfil de cada seguidor

Essa busca um a um revelou que há uma predominância de estudantes de Licenciatura em Matemática (tanto da UEFS como de outras instituições) e de professores da Educação Básica, das redes pública e privada de ensino. Vale ressaltar que não só professores que ensinam Matemática se fazem presente na comunidade, temos docentes de outras áreas, como por exemplo, da Língua Inglesa, Geografia, Biologia, dentre outras. Além de professores do ensino superior de diferentes instituições públicas e privadas, dentre as quais destacamos a Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), Universidade Federal do Recôncavo Baiano (UFRB) e Universidade Federal da Bahia (UFBA).

Contamos ainda com a participação de estudantes de graduação de cursos diversos como: Licenciatura em Pedagogia, Engenharia Civil, Engenharia de Alimentos, Enfermagem, Ciências Contábeis, Serviço Social, Licenciatura em História, Licenciatura em Biologia, Licenciatura em Química, Psicologia, Música e Medicina, além de estudantes de pós-graduação a nível de mestrado. A diversidade na formação, inicial e/ou continuada dos seguidores, sugere que ao tratarmos de temáticas diversificadas, mesmo que o foco seja a Matemática, ampliamos as possibilidades de interação e da percepção da necessidade e possibilidades de trabalhos interdisciplinares.

Conforme dados percentuais extraídos do painel profissional do perfil @lamulimat, a principal localização dos nossos seguidores é a cidade de Feira de Santana, com menos de 50%. Esse dado aponta para o potencial extensionista das ações desenvolvidas, visto que o percentual pequeno relativo à outras cidades indica uma maior multiplicidade de municípios alcançados pelo projeto. Na Tabela 4, reproduzimos as principais localizações dos nossos seguidores informada pelo Instagram.

Cidade (Estado)	Porcentagem
Feira de Santana (BA)	47,80%
Salvador (BA)	5,60%
São Gonçalo dos Campos (BA)	3,30%
Santo Estevão (BA)	2,80%
Conceição do Jacuípe (BA)	2,20%

Tabela 4. Perfil da comunidade por localidade

Apesar de identificarmos uma predominância regional, a análise um a um dos perfis apontou uma multiplicidade de cidades em todas as regiões do país, a exemplo de seguidores na cidade de Belém (PA), na região Norte, e seguidores em Foz do Iguaçu (PR), na região Sul. Identificamos também a participação de seguidores de outros países (Estados Unidos e Alemanha), demarcando um abrangência internacional do trabalho desenvolvido pelo Projeto.

5.2. Interações virtuais

O Instagram possui quatro tipos de interações básicas: curtidas (C1), comentários (C2), compartilhamentos (C3) e salvamentos (S), e que significam a forma como a comunidade reage a cada postagem realizada, por meio de procedimentos comuns às redes sociais de "cliques" e "envios", conforme símbolos estabelecidos pela rede social (Figura 7).

Figura 7. Símbolos que representam formas de interação no Instagram. Fonte: Perfil do LAMULIMat (2021).

As curtidas indicam a quantidade de contas que visualizaram determinada postagem e gostaram do conteúdo e, quando desperta o interesse para que outras pessoas vejam, elas compartilham a publicação, que pode ser feita via *chat* ou nos *stories* dentro da rede.

Os comentários e salvamentos são retornos que os seguidores dão à equipe. Os primeiros são os mais diretos e podem ser deixados na postagem de forma pública e qualquer conta pode visualizar o que foi dito, responder e curtir o comentário deixado como forma de dar um retorno ao que foi compartilhado na comunidade. Enquanto que o salvamento pode ter significados variados. Como o nosso público-alvo são prioritariamente professores da Educação Básica, salvar uma publicação sugere que a mesma foi armazenada na conta do seguidor, para ser utilizada futuramente. Como não temos acesso às contas que salvam nossas publicações, só conseguimos criar hipóteses sobre o motivo.

Além dessas interações, é possível ver um resumo das contas alcançadas por publicação e as impressões geradas por ela, ou seja, a quantidade de contas únicas que visualizaram uma publicação pelo menos uma vez. Já o alcance de uma publicação pode incluir várias visualizações pelas mesmas contas, sendo uma métrica estimada.

Reunimos na Tabela 5 informações relativas às interações da comunidade nas tarefas publicadas, de modo facilitar a visualização. Para tal, consideramos como tarefa todas as postagens relativas a um roteiro específico, que pode ser composta por três ou mais publicações, onde apresentamos informações, conceitos, metodologia, roteiro de atividades, sugestões. Deste modo, os números apresentados são a soma dos valores de cada categoria e as tarefas estão apresentadas em ordem cronológica de sua publicação.

Tarefa Matemática	N° de postagens	C1	C2	C3	S	Total
Modelagem Matemática e a COVID-19	4	113	5	21	6	149
Tema Contemporâneo Transversal Saúde	2	38	0	1	4	45
Tema Contemporâneo Transversal Educação Financeira	2	45	0	2	2	51
Tema Contemporâneo Transversal Vida Familiar e Social	2	35	4	1	0	42
Área de Figuras Planas com Confecção de Máscaras de Proteção	2	54	1	6	4	67
As medidas de tempo	5	90	3	3	4	105
Produção de vídeo: Telejornal	3	63	2	1	2	71
Padlet e o Ensino de Funções	2	44	0	2	3	51
Taxa de contaminação e as Funções Exponenciais e Logarítmicas	2	44	4	1	2	53
Equações Logarítmicas e a Escala de pH	2	22	2	1	0	27
Engenharia Didática e Análise Combinatória	2	42	3	3	3	53
Uma Experiência de Multiculturalismo	2	90	6	41	5	144
Obesidade e IMC, Moda, Média e Mediana	2	51	3	0	1	57
Método Estatístico	2	40	3	0	2	47
Números e o Coronavírus: Contagem, Ordenação e Medição	2	57	3	2	0	64
Teoria dos Grafos na Educação Básica	3	89	9	16	3	120
Utilizando o Algeplan Virtual no Ensino de Polinômios	2	63	1	4	10	80
Trabalho e Educação Matemática Crítica	2	59	1	3	5	70
Média Móvel e a COVID-19	2	36	0	0	1	39
IDEB e Medidas de Dispersão	3	68	6	19	7	103
Combinações possíveis da COVID-19	3	70	2	12	4	91
Adição e Subtração no Multiplano	3	82	3	10	5	103
Descarte de Lixo no Brasil	2	33	2	0	3	40
Educação Financeira, Educação Matemática e Interdisciplinaridade	3	72	1	4	3	83
Jogos Matemáticos: Caminho das Operações Fracionárias	2	60	1	6	8	77
Imunização de Rebanho e Porcentagem	2	48	2	11	3	66
Trigonometria no Triângulo Retângulo e a COVID-19	2	63	2	11	15	93
Representação de dados sobre a COVID-19 em	3	71	1	13	12	100

Gráficos e Tabelas						
Estatística e Diversidade Sexual	6	244	40	82	20	392
Ciclo Menstrual e Matemática	2	79	4	7	11	103
Análise Combinatória e as Paralimpíadas	2	59	4	3	9	77
Matemática Financeira e Inflação	3	50	0	4	10	67
Naruto e Sequência Numérica	3	148	13	13	28	205
Leitura de mundo: a importância da coleta e análise de dados	2	47	0	0	5	54
Total	86	2269	131	303	200	2989

Tabela 5. Interações nas tarefas matemáticas publicadas no @lamulimat.

A página tem até o momento um total de 2989 interações em nossas publicações, contando ainda em média com um alcance de 184 contas e 252 impressões por tarefa. Um dado interessante é perceber que a interação C1 é a mais frequente nas publicações, sendo responsável por 76% das interações na página e a interação C2, a que expõe publicamente a opinião do seguidor e que permite a interação direta entre os seguidores da página é a menos frequente em nossas postagens de tarefas, com apenas 4,3% do total. Cabe ressaltar a título de informação, mesmo não sendo objeto de análise desse artigo, que a interação C2 ocorre de modo mais significativo nas postagens dos Card Comemorativos, em especial àqueles que tratam dos membros da equipe em apresentações e datas especiais.

Analisando as dez postagens com maior número de interações podemos observar que a comunidade apresenta maior engajamento nas publicações com temas não relacionados à pandemia, o que nos chama a atenção, pois foi o objetivo inicial da página. Talvez, de forma intuitiva isso vem direcionando o trabalho da equipe que tem conseguido produzir um número maior de tarefas não relacionadas à COVID-19 (32,3%). No gráfico 1, é possível ainda analisar que uma postagem pode ter um total de interações inferior ou superior à outra postagem, mas superá-la em um dos tipos de interações, como é o caso da tarefa "Representação de dados sobre a COVID-19 em Gráficos e Tabelas", que ocupando a última posição no nosso TOP10, possui maior número de compartilhamento e salvamentos que várias outras postagens que estão à sua frente ao levarmos em consideração o total de interações.

Os dados de interação ainda sugerem uma preferência do público e um alinhamento com as discussões propostas pelo @lamulimat na perspectiva de se buscar um ensino de Matemática contextualizado e com função social, conforme preconiza Skovsmose (2015) na defesa de um conhecimento matemático não neutro, que favoreça o desenvolvimento da criticidade.

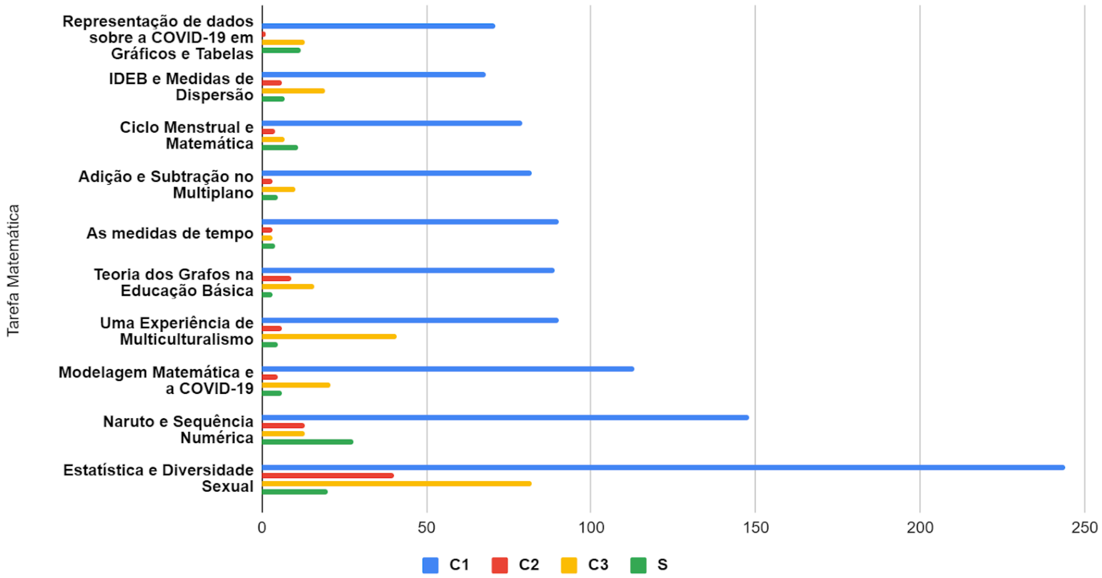


Gráfico 1. TOP10 das tarefas matemáticas em relação ao total de interações. **Fonte:** Elaborado pelos autores com base nas informações de engajamento do perfil @lamulimat.

5.3. Comentários e *directs*

As principais interações com a comunidade externa acontecem por meio dos comentários e mensagens enviadas ao *direct* (*chat* privado) da página. Essas comunicações e impressões nos direcionam e nos permitem obter percepções sobre o trabalho desenvolvido, receptividade da comunidade externa e intervenções, a fim de atendê-los e incluí-los nos nossos processos de criação e produção de tarefas. Ressaltamos que a página é um meio de divulgação de ações extensionistas, de modo que a participação assídua da comunidade externa é essencial para que o LAMULIMat se caracterize como tal, conforme preconizado no conceito de extensão do FORPROEX (BRASIL, 2012) assumido pelo LAMULIMat. Observamos que em nossas primeiras publicações, eram deixadas mensagens curtas, objetivas. Os comentários em sua grande maioria eram elogios ao conteúdo ou marcação de pessoas para conhecerem o conteúdo e atividade publicada como uma forma de compartilhar a publicação e fazer chegar a outras pessoas, como se observa nos excertos no quadro a seguir.

Amo as postagens de vocês!!! Quero muito ter a oportunidade de conversar com vocês! Parabéns ao grupo!!!
Cada dia mais encantada!! Torcendo para que também publiquem uma obra com a coletânea de atividades que estão sugerindo aqui!!😉🔝😉
Parabéns aos envolvidos, ficou muito legal o resultado.
Parabéns pelo trabalho desenvolvido e pela publicização desse material, tenho certeza que servirá para muitos professores como proposta de tarefa ou até mesmo como inspiração. Sucesso
Excelente ... Muito boa a proposta e tenho certeza que a publicização desse material é importante para muitos professores. Sucesso
Genial essa investigação. 👏👏

Que lindeza de produção!! Parabéns para a autoria, parabéns para o LAMULI por abraçar causas nobres! ❤
O LAMULI faz tudo sempre 😍
Maravilhoso!!! e necessário!!!Parabéns! Passando adiante😍
Essa página é inspiradora! Amo os posts! 👏 👏
Excelente trabalho!!👏 👏

Quadro 1. Mensagens deixadas no *chat* do @lamulimat. **Fonte:** Comentários no perfil @lamulimat

Das 34 tarefas, apenas nove não expressam comentários nas publicações. As interações começaram a se intensificar a partir do dia 23 de junho de 2020 com a publicação da tarefa intitulada Interdisciplinaridade. As mensagens em grande parte expressam comentários positivos, elogios às tarefas e publicações. Há ainda dois relatos de utilização das tarefas, apresentados no quadro abaixo:

Tarefa	Comentários
Tema Contemporâneo Transversal Meio Ambiente	*Fiz esta atividade com meus alunos.*
Interdisciplinaridade	*Perfeita! Utilizando nas atividades que estamos produzindo com colegas, neste retorno as aulas.*

Quadro 2. Comentários que indicam o uso das tarefas. **Fonte:** Comentários no perfil @lamulimat

O primeiro comentário se refere a tarefa intitulada Tema Contemporâneo Transversal Meio Ambiente e no mesmo post o seguidor informa que os alunos, assim como ele, estão amando a tarefa. Esse *feedback* é muito importante, pois devido a pandemia não tivemos a oportunidade de experimentar a atividade em sala de aula. Ter este retorno é algo muito valioso para o trabalho desenvolvido e também demonstra que as tarefas estão sendo realizadas. O segundo comentário se refere a tarefa intitulada Interdisciplinaridade.

As interações que ocorrem por meio do *direct* são de professores e estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS, professores da rede básica e pessoas ligadas à página por meio de parceria e sugestões. No que se refere às tarefas, as mensagens são de solicitação de uso do material. O quadro abaixo, expressa na íntegra as mensagens recebidas via *direct*.

Mensagem	Tarefa à qual se refere
Bom dia! O tcc que trata de atividades contextualizadas em relação ao covid está disponível em word ou em outro formato? Queria usar com meus alunos, mas o gráfico está um pouco ilegível.	Modelagem
Tem como me enviar os cards? Ou arquivo?	Sequência Numérica
Eu queria aplicar essa atividade, vocês podem enviar ela para mim, por favor	Representação de dados estatísticos sobre a Covid

Quadro 3. Solicitações realizadas através do chat do @lamulimat. **Fonte:** Comentários no *chat* do @lamulimat.

As tarefas solicitadas são respectivamente Modelagem, Sequência Numérica, Representação de dados estatísticos sobre a Covid e uma tarefa LAMULIMat não identificada. As mensagens expressam o desejo de utilizar o conteúdo das tarefas em suas aulas e os materiais e dados necessários para a sua aplicação, que são disponibilizados nos cards das publicações, além de demonstrar interesse pelo nosso conteúdo e pertinência da sua utilização em sala de aula. A utilização dessas atividades em aulas de matemática é o ponto alto de uma publicação e o nosso principal objetivo é a utilização destes conteúdos nas salas de aula da educação básica.

Além daqueles que nos contactam para facilitar o acesso ao conteúdo para a publicação, existem aqueles que acompanham a página e sugerem conteúdos para que pensemos nas próximas tarefas. Este contato se torna importante à medida em que se configura um diálogo com os professores que acompanham a página, suas necessidades e confiança nas nossas ações e tarefas.

Olá Boa noite. Eu acompanho o trabalho de vcs e eles tem me ajudado muito em minhas aulas. Gostaria, se fosse possível, que vcs me ajudassem na elaboração de 2 aulas com conteúdos de geometria, polígonos, circunferências e círculo. Fico no aguardo de um retorno.

Quadro 4. Sugestões de temas para serem abordados nas tarefas. **Fonte:** Comentários no *chat* do @lamulimat.

As interações por meio do *direct* nos dão uma ótima visão sobre as atividades desenvolvidas, e uma visão geral sobre as tarefas e receptividade do público e sugestões de como aprimorar o trabalho desenvolvido. O *direct* se mostra uma ótima ferramenta de interação via Instagram e é uma potencialidade no âmbito da extensão para repensar as ações e atender da melhor forma os seguidores e a sociedade, a partir de suas sugestões e colaborações, mesmo com as dificuldades impostas pelo distanciamento social.

6. Considerações finais

Desde a publicação das primeiras tarefas, fomos nos adaptando às possibilidades de se fazer extensão por meio de uma rede social e tal movimento demanda estratégia e conhecimento sobre o nosso público de seguidores nos fazendo buscar por estratégias que os façam dialogar conosco. Os comentários, mensagens e sugestões nas próprias publicações ou via *direct* têm se tornado o canal de participação da comunidade nestas ações. Percebemos que os comentários são uma forma de o público interagir conosco e esboçar suas percepções, mas ressaltamos que para além dos elogios e comentários positivos, seria importante também críticas e perguntas sobre os trabalhos desenvolvidos.

Tais comentários reforçam e reconhecem o trabalho da equipe LAMULIMat para produzir tarefas que abordam temas contemporâneos com base em muita discussão sobre Educação Matemática Crítica em meio ao cenário político e social que vivenciamos e, a demanda por uma educação cada vez mais política, emancipatória e libertadora (Freire, 1987).

O uso das redes sociais, em especial do Instagram, abre um leque de possibilidades para o trabalho extensionista e não há dúvidas que possibilita um alcance das produções do projeto que dificilmente seria possível somente com o trabalho presencial. E essa talvez seja a maior aprendizagem em todo esse processo de trabalho remoto.

Entretanto, após um período em que as ações do projeto consistiam na produção e publicação de atividades, a própria equipe e a comunidade sentiu a necessidade de espaços de interação, ainda que virtuais em virtude da pandemia, levando à diversificação das atividades com *lives* e oficinas, no qual a interação mais direta e não monitorada pelos instrumentos das redes sociais, garantem de forma mais efetiva o cumprimento do papel da extensão que é a aprendizagem colaborativa na troca de saberes entre universidade e comunidade. Não é possível mensurar em curtidas e salvamentos, a aprendizagem dos bolsistas nas oficinas com estudantes da Educação Básica, por exemplo, adequando sua linguagem, controle de tempo e planejamento no momento da realização da atividade. Mas, por outro lado, dificilmente teríamos alcançado professores da Educação Básica e estudantes de licenciatura de outros estados brasileiros, interagindo em nossas atividades, participando das oficinas, se o meio virtual não estivesse possibilitado esse ambiente de aprendizagem.

Os dados e análises aqui apresentados demonstram empiricamente o resultado positivo de um trabalho extensionista, pautado na perspectiva da Matemática Crítica, voltado para a formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática por meio de uma rede social, evidencia que os seguidores estão acompanhando o trabalho desenvolvido nas publicações e isso é essencial para a divulgação científica e para fortalecimento dos trabalhos de extensão na academia.

Referencias bibliográficas

Alejo, V. V., Escalante, C. C., & Carmona, G. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación matemática*, 30(1), 213-236.

Antunes, D. M. da S., Oliveira, A. C. B. de, Grilo, M., Araújo, M. de L. H. S., & Grilo, J. de S. P. (2021). Uso de grafos na análise do impacto da volta às aulas: : uma tarefa investigativa para a Educação Básica. *Educação Matemática em Revista*, 26(70), 62-75.

Antunes, D. M. S.; Oliveira, A. C. B. & Araújo, M. L. H. S. (2020). O Papel do Laboratório de Ensino na Formação do Professor de Matemática, *Anais* Educon 2020, São Cristóvão/SE, 14(14), 1-15.

Bispo, Regina; Ramalho, Glória & Henriques, Nuno. (2008) Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5º ano de escolaridade. *Aná. Psicológica* [online]. 26(1), 3-14.

Brasil. (2012). *Política Nacional de Extensão Universitária*. Manaus: FORPROEX.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

Creswell, John W. (2010). *Projeto de pesquisa:* métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3 ed. Porto Alegre: ARTMED.

Freire, Paulo. (1987). Pedagogia do Oprimido, 17ª Ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra.

Irala, Valesca B.; Blass, Leandro; De Borba Vincent, Fabiana C. (2021). Prática extensionista em meio à pandemia. *Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância*, 20(1).

Kozinets, Robert V. (2014). *Netnografia*: realizando pesquisa etnográfica online. Porto Alegre: Penso.

Lorenzato, Sérgio (Org.). (2006). *O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados.

Oliveira, Priscila P. M. (2020). *Manual interativo de utilização do Instagram como ferramenta pedagógica*. Rio Pomba: IFSMG. https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/583194/1/Manual%20Interativo%20de%20Utiliza%C3%A7%C3%A3o%20do%20Instagram%20como%20Ferramenta%20Pedag%C3%B3gica.pdf

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In: GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf.

Ponte, J. P. da, & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 8(22).

Ponte, João Pedro da; Quaresma, Marisa; Mata-Pereira, Joana & Baptista, Mónica. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2).

Serrão, Andréa Cristina Pereira. (2020). Em tempos de exceção como fazer extensão? Reflexões sobre a Prática da Extensão Universitária no Combate à Covid-19. *Revista Práticas em Extensão*, 4(1), 47-49.

Skovsmose, O. (2015). *Um convite à educação matemática crítica*. Papirus editora.

Antônio Carlos Bispo de Oliveira, a.carlos_2014@hotmail.com, orcid.org/0000-0002-6915-9664, Brasil. Licenciando em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana e bolsista de extensão do Projeto Laboratório Multidisciplinar das Licenciaturas da UEFS.

Danielle Morais da Silva Antunes, daniellymorais98@gmail.com, orcid.org/0000-0001-7174-9973, Brasil. Licencianda em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana e bolsista de extensão do Projeto Laboratório Multidisciplinar das Licenciaturas da UEFS.

Jamili da Silva dos Santos, jamili101.js@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9403-7098, Brasil. Licencianda em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana e bolsista de extensão do Programa de Matemática Carloman Carlos Borges.

Jaqueline de Souza Pereira Grilo, jspgrilo@uefs.br, orcid.org/0000-0002-0408-047X, Brasil. Professora do Departamento de Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana. Doutora em Educação e desenvolve pesquisas sobre Matemática específica para o ensino.

Maria de Lourdes Haywanon Santos Araújo, lore@uefs.br, orcid.org/0000-0002-6068-2168, Brasil. Professora do Departamento de Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Feira de Santana. Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências, pesquisadora em Políticas Educacionais e Ensino de Matemática.

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-20

Evaluación reguladora en post-pandemia. Ejemplo, eficacia y marco legal

Santi Vilches Latorre, Maite Gorriz Farré

Fecha de recepción: 2/11/2021
Fecha de aceptación: 22/12/2021

Resumen	La pandemia de Covid-19 produjo una fractura en los procesos de enseñanza-aprendizaje motivada por múltiples factores, uno de ellos fue la dificultad de adaptar la evaluación. En este estudio se analiza, a través de un ejemplo de una práctica de aula, cómo estrategias para la evaluación adoptadas durante la pandemia, logran mejorar los resultados de aprendizaje cuando los aplicamos en post-pandemia. Dichas estrategias se basan en el uso de actividades individuales y creativas en las que se valoran múltiples habilidades o competencias y en las que el propio alumno participa de su propia evaluación. Se analiza también el contexto legal en el que se enmarcan dichas prácticas educativas. **Palabras clave**: Evaluación, competencias, regulación.
Abstract	The Covid-19 pandemic produced a fracture in the teaching-learning processes motivated by multiple factors, one of them was the difficulty of adapting the assessment. This study analyzes, through an example of a classroom practice, how evaluation strategies adopted during the pandemic manage to improve learning outcomes when we apply them in the post-pandemic. These strategies are based on the use of individual and creative activities in which multiple skills or competencies are valued and in which the student himself participates in his own evaluation. The legal context in which these educational practices are framed is also analyzed. **Keywords**: Assessment, competences, regulation.
Resumo	A pandemia de Covid-19 produziu uma fratura nos processos de ensino-aprendizagem motivada por múltiplos fatores, um deles foi a dificuldade de adaptação da avaliação. Este estudo analisa, por meio de um exemplo de prática em sala de aula, como as estratégias de avaliação adotadas durante a pandemia conseguem melhorar os resultados de aprendizagem quando as aplicamos na pós-pandemia. Essas estratégias baseiam-se na utilização de atividades individuais e criativas nas quais múltiplas habilidades ou competências são valorizadas e nas quais o próprio aluno participa de sua própria avaliação. O contexto jurídico em que essas práticas educacionais se enquadram também é analisado. **Palavras-chave:** Avaliação, competências, regulamentação.

1.Introducción

En el contexto de las metodologías constructivistas donde el alumnado tiene que construir su propio conocimiento a partir de retos que propone el docente, se percibe en ciertas ocasiones una actitud pasiva del profesorado. Evidentemente se trata de una pasividad aparente ya que concebir, proponer y gestionar dichos retos supone una tarea compleja que requiere de una buena competencia docente.

Hoy en día, ningún profesor de matemáticas, con unas nociones básicas en didáctica de la matemática, duda de la eficacia de estas metodologías. Aun así resulta frecuente combinar este tipo de actividades con modelos tradicionales en los que el protagonismo recae en la capacidad expositiva del profesorado mientras que los estudiantes mantienen una actitud pasiva.

En cualquier caso, sea cual sea la frecuencia del uso de las metodologías constructivistas, a la hora de evaluar se tiende a medir los aprendizajes de los alumnos a base de pruebas escritas individuales basadas en contenidos. Si aceptamos que las innovaciones metodológicas donde la actitud del alumnado es activa para mejorar su aprendizaje, la pregunta que aborda este artículo es ¿Por qué luego recurrimos a pruebas tradicionales para valorar dicho aprendizaje? ¿Otro tipo de evaluación sería posible con la normativa actual?

2.El contexto de la pandemia

Durante el inicio del confinamiento y con la necesidad de adaptar las actividades a una situación de emergencia con cambios muy rápidos, se han hecho enormes esfuerzos en usar clases telemáticas con el objetivo de normalizar las metodologías tradicionales donde el alumnado tiene una actitud pasiva. Pero estos esfuerzos, en muchas ocasiones no han hecho más que constatar definitivamente que no lograban mejorar los aprendizajes del alumnado.

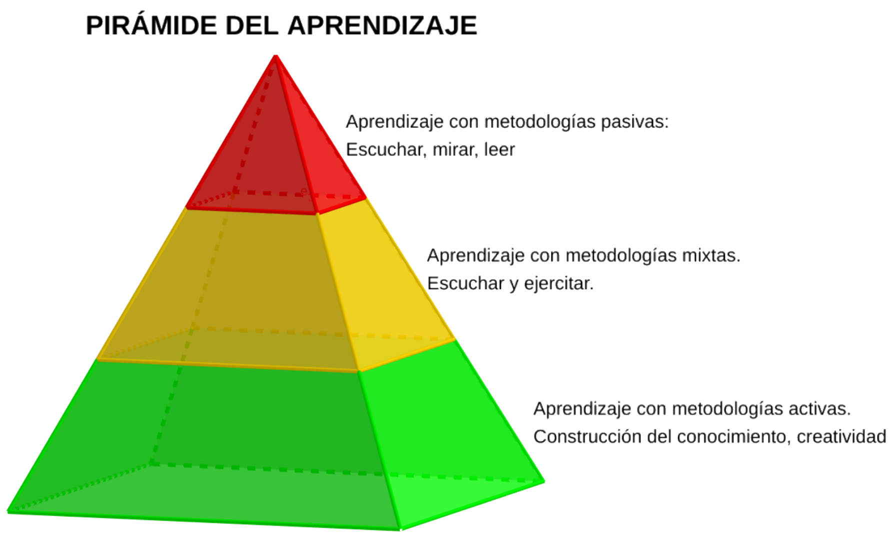


Imagen 1. Versión adaptada de la pirámide del aprendizaje de W. Glasser

Wiilliam Glasser ya constató en el siglo pasado la menor incidencia en el aprendizaje con las actividades pasivas. En el caso de las clases magistrales telemàticas, si bien no existen pruebas fehacientes que demuestren que la atención se reduce a los pocos minutos iniciales, es cierto que todos los formatos de charlas temáticas actuales (charlas TED, charlas Naukas Bilbao, etc) se limitan siempre a menos de 20 minutos.

El verdadero problema ha surgido al intentar evaluar a los estudiantes. En la publicación “Education at a Glance 2021” (OECD, 2021) se pone de manifiesto que la interrupción de exámenes afectó en las trayectorias de aprendizaje y el avance en los estudios. Con el afán de evitar estos efectos, en ocasiones se ha intentado resolver con herramientas informáticas de control del alumnado (aplicaciones espía, doble cámara, etc.) llegando a sobrepasar los límites de lo razonable. Todos los esfuerzos en intentar adaptarse a la situación sin cambiar la esencia de los métodos tradicionales no sólo no ha dado buenos resultados sino que ha generado descontento y frustración por parte de todos los estamentos educativos.


Granada Hoy GRANADA

GRANADA PROVINCIA ANDALUCÍA ECONOMÍA ACTUAL SOCIEDAD GRANADA CF DEPORTES OPINIÓN TODAS LAS SECCIONES

GRANADA VIVIR ONGRANADA MUJERES HOY SER SOLIDARIOS SIERRA NEVADA CÓMETE GRANADA

UGR

La Universidad de Granada prohíbe la videovigilancia con doble dispositivo en los exámenes online

• El periodo de evaluación comienza hoy, jornada en la que la rectora ha emitido una resolución en la que se regulan aspectos relacionados con los exámenes

Una estudiante, en su casa, en una imagen de archivo. / R. G.

Imagen 2. Granada Hoy, artículo del día 19 enero 2021

La evidente dificultad de los estudiantes en asimilar conocimientos ante sesiones telemáticas pasivas y la poca efectividad de las evaluaciones en línea, ha fomentado entre los docentes un aumento en el uso de actividades creativas durante el confinamiento y adaptar la evaluación. Una evaluación para que sea adecuada para su propósito es necesario tener en cuenta el contexto, el nivel, el entorno de aprendizaje, los antecedentes de los estudiantes, las diferencias individuales y el contenido de aprendizaje (Brown, Race, 2020).

En este artículo se muestra una práctica de aula en la que se intenta que el protagonismo del aprendizaje recaiga sobre los estudiantes, no sólo en las actividades ordinarias de aprendizaje, sino también en las de evaluación. Se muestra también cómo mantener estas prácticas después de la pandemia y se analiza cómo encajar esta nueva mirada con las normativas educativas vigentes.

El estudio se ha realizado en dos grupos de alumnos de bachillerato (16-18 años), el primero en plena pandemia y con trabajo telemático y el segundo ya en post pandemia y con clases presenciales.

3.Enseñar, aprender y evaluar en pandemia

A mediados de marzo del 2020, se anunció el confinamiento y este hecho obligó a encerrarse en casa e iniciar de una manera improvisada, un trabajo telemático forzoso. En el caso de la actividad que se presenta, se habían iniciado actividades de aprendizaje sobre contenido relacionado con las funciones: propiedades de las funciones elementales, funciones definidas a trozos, continuidad, etc. Pronto fue evidente que, hablando a través de una pantalla, no iba a resultar fàcil impartir dichos conocimientos y se propuso una actividad creativa que, para su realización, era necesaria la construcción del conocimiento. La actividad consistió en el diseño libre y creativo, del perfil de una ficha de ajedrez usando una función definida a trozos continua. Para inyectar un mayor atractivo a la actividad se dieron instrucciones para representar en 3D la figura como una superficie de revolución.

Se pedía hacer un trabajo previo en el que se analizaran las propiedades elementales de algunas funciones básicas, funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, proporcionalidad inversa, etc. (dominio, corte con los ejes, puntos de corte, asíntotas, etc) todo ello a partir de la observación y manipulación con GeoGebra.

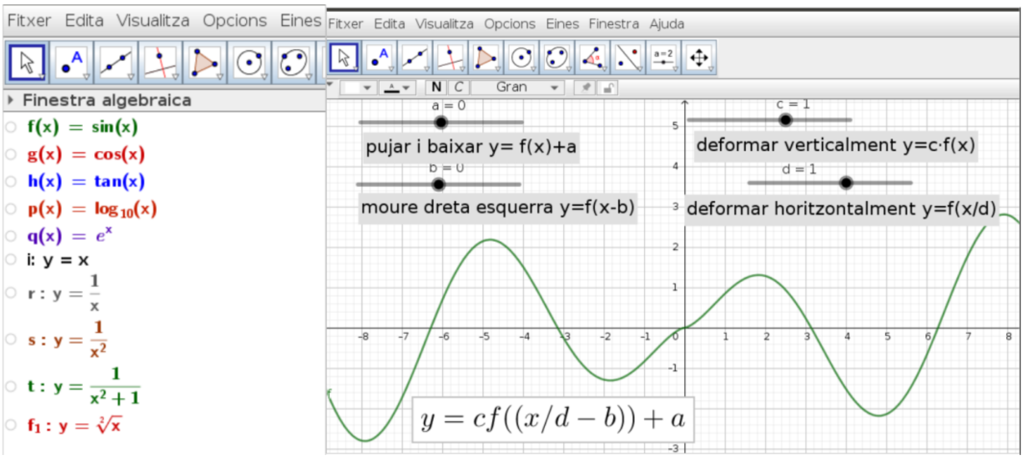


Imagen 3. Actividades de funciones elementales con el GeoGebra

A continuación se pedía analizar cómo hacer transformaciones elementales de dichas funciones: Cómo moverlas hacia la derecha e izquierda, como hacerlo hacia arriba y abajo y, finalmente, como deformarlas horizontalmente y verticalmente.

Finalmente se ofrecía un ejemplo de solución muy sencilla para ayudar en la comprensión de qué era lo que se pedía.

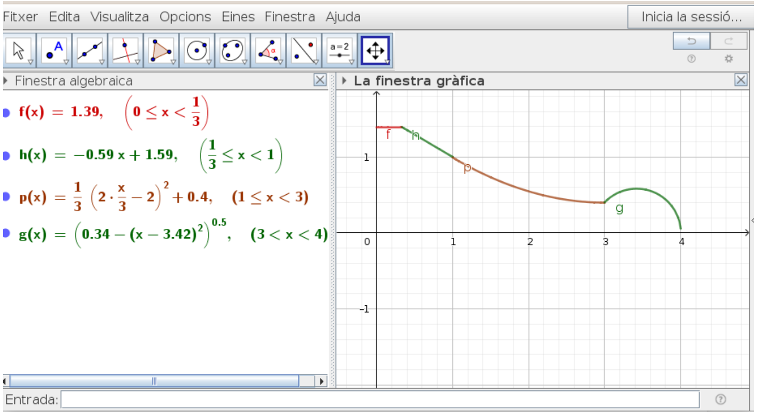


Imagen 4. Ejemplo de solución

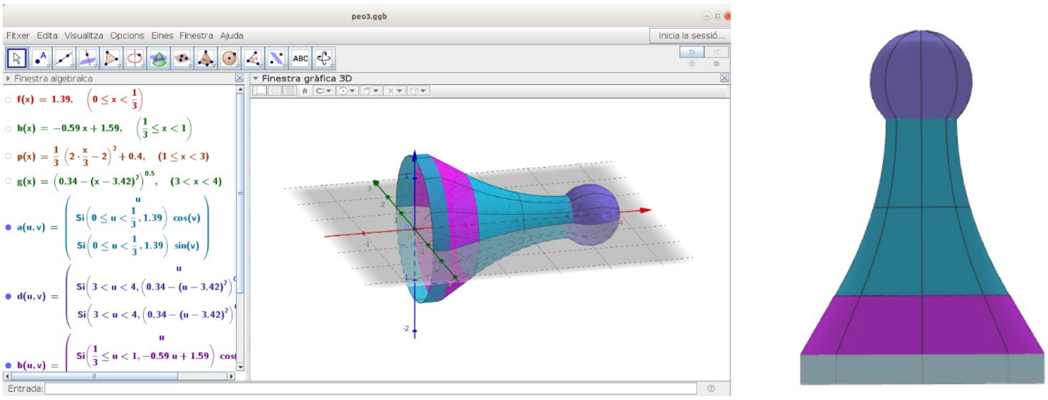


Imagen 5. Ejemplo de solución. Superficie de revolución.

Como aportación opcional se sugería la posibilidad de integrar la ficha en un contexto real usando la realidad aumentada de GeoGebra.

Imagen 6. Ejemplo de solución. Realidad aumentada.

El trabajo se plantea bajo el principio básico que el aprendizaje es individual y por tanto el trabajo debía ser individual, pero el éxito es colectivo. Para fomentar una cooperación no invasiva se pedía repartir las fichas entre los compañeros y compañeras, y se sugería encontrar un elemento común entre todas las fichas de modo que, visualmente, se pudiera entender que todas ellas formaban parte de un mismo juego de fichas. Esta premisa obligaba a los alumnos y alumnas a compartir ideas pero no resultados, logrando, de este modo un mayor nivel de exigencia individual y una mayor satisfacción colectiva, siendo la función del profesor la de escuchar y sugerir, en vez de explicar y controlar.

La actividad generó un enorme entusiasmo por parte de los estudiantes. El componente creativo incitó a los jóvenes a marcarse retos de gran envergadura encajados en el límite de sus posibilidades y a desarrollarlos con la mínima ayuda posible. Sus producciones fueron, por regla general, de alta calidad.

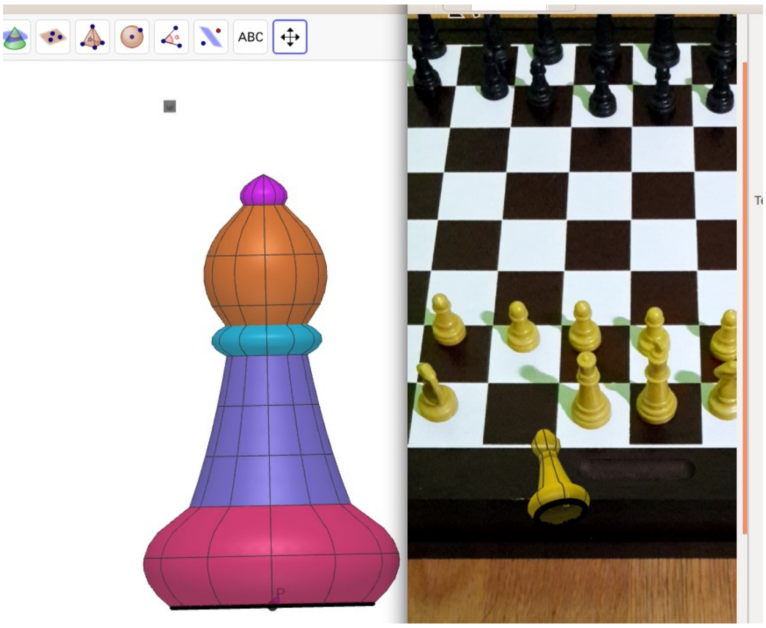


Imagen 7. Producción de un alumno con una aplicación de realidad aumentada.

Imagen 8. Producción de una alumna. Ficha de ajedrez Reina.

No cabe duda que esta es una actividad modelo para mejorar el aprendizaje del alumnado en el ámbito de las funciones y que resultó especialmente útil en el contexto del confinamiento. El problema surge a la hora de evaluar. La tendencia natural sería "desconfiar" del aprendizaje del estudiante e intentar comprobar sus conocimientos a través de una prueba escrita individual en la que se formulan preguntas de respuesta única, descontextualizadas y carentes de componentes creativos. Este tipo de pruebas pretenden objetivar el conocimiento del alumnado, pero, ¿realmente lo logran? En cualquier caso, dicha prueba no resultaba viable en pandemia y tuvo que limitarse a valorar el trabajo realizado por parte del alumnado sobre una actividad con un claro carácter individual.

Con esta evaluación a través de este tipo de actividades, con alumnos de bachillerato (16-18 años), se genera una série de preguntas para la reflexión:

¿Para qué se evalúa? (cuál es su último objetivo)

¿Qué se evalúa?

¿Cómo se evalúa?

¿Es posible valorar a un estudiante de una manera objetiva?, y por el contrario ¿Se discrimina cuando se evalúa?

¿Existen alternativas mejores? dichas alternativas ¿son normativamente válidas?

4.La actividad después de la pandemia

En septiembre de 2020, al iniciar el curso 2020-2021, las clases volvían a ser presenciales y podíamos recuperar la normalidad, pero era evidente que había cosas que no podían volver a ser igual que antes.

El potencial de las actividades creativas es incuestionable, pero eso no es una novedad, la novedad está en usarlas como elemento principal de la evaluación generando un cambio de paradigma. Para ello era necesario reflexionar sobre las preguntas formuladas, no solo para reformular la evaluación, sino para reformular la propia actividad.

4.1.¿Para qué se evalúa?

Aprendizaje, actividad y evaluación son indivisibles, convirtiendo la evaluación en un elemento esencial del proceso de aprendizaje. (Sanmartí, N. 2020). Esta mirada nos permite responder qué se evalúa para que los alumnos aprendan. De hecho esta respuesta no es una reflexión nueva que aporta la situación de pandemia ya que desde siempre la labor de un docente es una y solo una: Lograr el aprendizaje óptimo de cada uno de las alumnas y los alumnos. La pregunta que se debería formular cualquier docente es ¿cuándo evalúo, las alumnas y los alumnos aprenden? Si la respuesta es que no (o que muy poco), es obvio que el propio docente debería replantearse su manera de evaluar.

4.2.¿Qué se evalúa?

Responder a la pregunta ¿Qué se evalúa? es exactamente lo mismo que responder a la pregunta ¿qué deben aprender los alumnos?

Volviendo al ejemplo de la ficha de ajedrez, a la hora de evaluar a la alumna, que llamaremos con el nombre ficticio de Ana, ésta diseñó la esbelta figura de la reina. La pieza es hermosa, está bien construida, es original y creativa. Todo parece indicar que merece una alta calificación. Si afinamos un poco se puede ver que quizá el diseño no es tan bueno como parece ya que uno de los contenidos importantes era la continuidad y observando el detalle vemos que, en realidad no hay continuidad, de hecho, ni siquiera es una función.

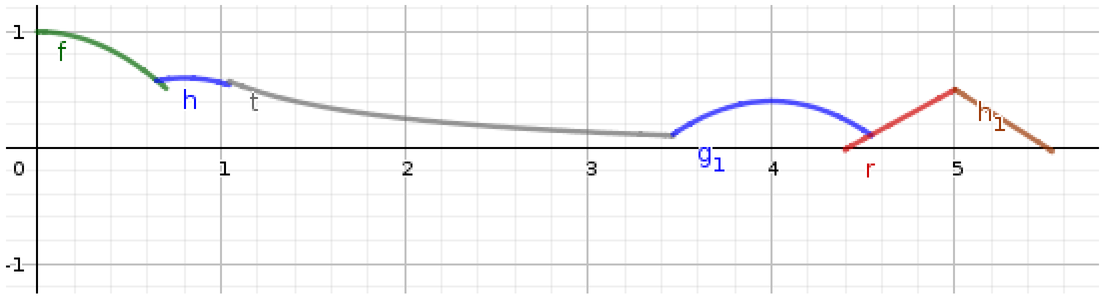


Imagen 8. Producción de una alumna de la ficha “reina”. Función.

Todo parece indicar que Ana no ha utilizado correctamente los conceptos relacionados con la continuidad de las funciones y se ha limitado a diseñar la ficha a partir del ensayo y error con parámetros en GeoGebra. Desde este punto de vista parecería mejor poner una calificación negativa, pero no está nada claro que esa opción sea del todo justa puesto que, probablemente, hemos planteado mal la actividad, incitando, de facto, al uso del ensayo y error. La conclusión a la que se llega no debe ser cuál es la nota que Ana merece, sino *cuál es el aprendizaje que se pretendía* y si Ana ha logrado o no dicho aprendizaje. Y, en el caso de que no haya sido así, se debe replantear la actividad y/o reorientar al estudiante. La evaluación, desde este punto de vista implica un replanteamiento de la propia actividad docente y/o una correcta orientación del estudiante.

El modelo más estandarizado de examen escrito pone todo el peso de la nota en la capacidad del alumno para resolver problemas y ejercicios. Dicha nota suele obtenerse a partir de ponderaciones de apartados correctamente resueltos, pero la actividad matemática requiere de múltiples habilidades que también se deberían tener en cuenta pero que se obvian, generando, de hecho, una infravaloración de dichos aspectos por parte de los aprendices.

Por ejemplo, cuando se corrige un examen de un alumno en el que lo que escribe es prácticamente incomprensible, pero matemáticamente correcto, la tendencia preponderante suele ser valorar positivamente el ejercicio, fomentando, de hecho, que el alumnado perpetúe su incapacidad para la comunicación matemática, por otro lado, no parece justo valorarlo negativamente si el ejercicio es correcto. El error que se comete está en evaluar sola y exclusivamente la capacidad de resolver problemas obviando el resto de capacidades. El aprendizaje del estudiante sería más significativo si en vez de valorar los ejercicios de manera individual por su resolución, se valora el examen en su conjunto según se demuestran, o no, todas las distintas habilidades matemáticas: Interpretar, resolver, experimentar, argumentar, contextualizar, modelizar, crear, representar, comunicar, compartir, usar tecnologías y evaluar. Todas ellas siempre referidas a conceptos matemáticos.

A partir de esta reflexión, la actividad de la ficha de ajedrez después de la pandemia, en el curso 2020-2021, se planteó indicando a los estudiantes que lo que se valoraría de la actividad no era sólo el producto final, sino fundamentalmente su capacidad de demostrar todas esas habilidades matemáticas. En concreto, se pedía en primer lugar, recopilar toda la información necesaria para realizar la actividad de manera autónoma: Anotar cuáles eran las características fundamentales de todas las funciones, como poder transformarlas, qué significaba continuidad, como se podía demostrar matemáticamente, etc, y, a continuación diseñar su ficha realizando un proceso creativo autónomo (a partir de sus conocimientos) y por escrito en el que debían indicar:

Expresar todo el proceso usando el lenguaje matemático correctamente

Interpretar el reto propuesto

Proponer un perfil para la ficha de ajedrez

Argumentar la propuesta (cada decisión tomada)

Probarlo en GeoGebra ("prohibido usarlo antes")

Corregir o mejorar la propuesta (otra vez sin GeoGebra)

Volver a argumentar la nueva propuesta

Volver a probar

Idem tantas veces como fuere necesario

Demostrar matemáticamente la continuidad

Generar la figura 3D

Generar un fichero de impresión para impresoras 3D

Cabe destacar que este nuevo planteamiento no pone el foco en la resolución, sino en la capacidad de interpretar, modelizar, experimentar, crear, corregir, argumentar, comunicar, y dominio de las tecnologías. El peso de la evaluación deberá recaer, por tanto, en todas estas habilidades y no solo en la resolución.

Es importante destacar también que la habilidad de evaluarse (autorregulación) es imprescindible y debería ser un aspecto fundamental en la observación de las habilidades de los estudiantes.

Si se analiza la producción de una alumna, que llamaremos con el nombre ficticio de Maria, ésta empieza interpretando la situación y haciendo una propuesta, el texto de la imagen dice: *El trabajo consiste en crear una ficha de ajedrez en 3 dimensiones usando GeoGebra. Primero he diseñado una ficha a mano que resultara agradable estéticamente utilizando funciones elementales con algunas modificaciones para encajarlas.*

La imagen inferior es la primera hipótesis sin las modificaciones de posición que se deben aplicar a las funciones para ser desplazadas y encajar las unas con las otras. El dibujo no está hecho a escala y marca las medidas que se usarán en el GeoGebra (el doble de la medida real para facilitar la impresión en la impresora 3D reduciendo luego su tamaño a la mitad en el Ultimaker Cura, el programa de impresión 3D)

Informe de treball

Fitxa d'escacs a partir de funcions

El treball proposat ha consistit en crear una fitxa d'escacs en 3 dimensions mitjançant el programa Geogebra. Primerament vaig dissenyar a ma una fitxa que resultés agradable estèticament usant funcions elementals amb algunes modificacions per fer-les encaixar.

La imatge inferior és la primera hipòtesi sense les modificacions de locació que han de patir les funcions per ser desplaçades i encaixar amb les altres. El dibuix no està fet a escala i marca les mides que seran fetes servir al geogebra (el doble de la mida real de la

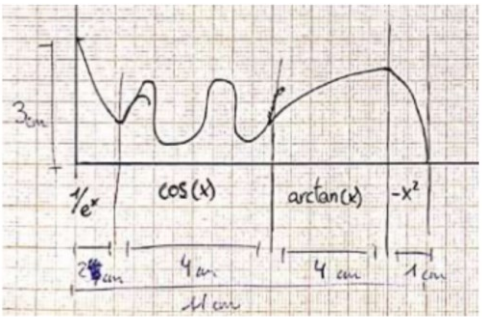


Imagen 9. Producción de una alumna. Descripción del proceso.

Tras un razonamiento y argumentación, Maria determina que las funciones que debería usar son las siguientes, mostrando, también, el resultado en GeoGebra.

$$Si\left(0 < x < 2, \frac{1}{e^x} + 1\right)$$

$$Si\ (2 \leq x < 6, \cos(x-2))$$

$$Si\ (6 \leq x < 10, \arctan(x-6) + 1)$$

$$Si\ (10 \leq x < 11, -x^{2-10})$$

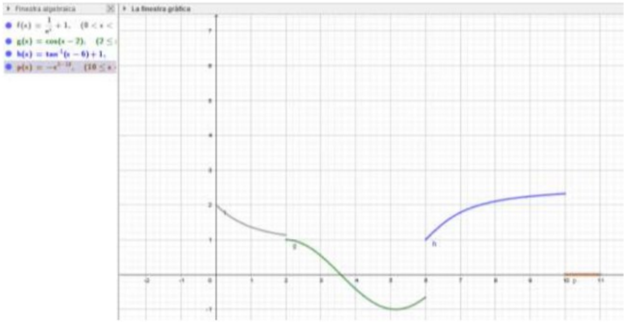


Imagen 10. Producción de una alumna. Primeras pruebas con GeoGebra.

El texto que Maria pone a continuación es extraordinario comentando, argumentando, razonando, corrigiendo y proponiendo, es decir aprendiendo.

També vaig comprendre l'error bàsic que havia fet en p(x): havia restat 10 a l'exponencial i per tant quedava la funció $p(x) = -x^{-8}$. L'error va ésser resolt i la funció resultant va ser $p(x) = (-x-10)^2$.

D'altra banda, calia modificar la funció del cosinus perquè s'ajustés a l'exponencial. Per conèixer la y final de la funció exponencial es va dur a terme una substitució:

$$y(x) = 0.1^x + 2$$

x final = 2 cm

$$y(2) = 0.1^2 + 2 = 2.01$$

Per tant, aquesta funció acaba en el punt (2, 2.01) i cal fer començar la primera funció trigonomètrica en el punt 2.01.

La funció cos(x) sense modificar té un màxim al punt (0, 1), on es considera que comença i per tant, per arribar al punt 2.01 cal fer el següent:

$$g(x) = \cos(x-2) = \cos(x-2)\cdot 1$$

$$g(2) = \cos(2-2)\cdot 1 = 1$$

Per tant, per tenir la funció en y=1.01, cal multiplicar-la per aquest valor.

$$g(2) = \cos(2-2)\cdot 1.01$$

Perquè la funció g(x) comenci en el punt (2, 2.01) cal pujar la funció una unitat (sumant-la).

$$g(x) = Cos\left(\frac{x-2}{v}\right)\cdot 1.01 + 1$$

v és el paràmetre segons el que cal deformar la funció pel moviment de dreta a esquerra.

Decideixo que en x=6, y=0.5

Per tant,

$$0.5 = Cos\left(\frac{6-2}{v}\right)\cdot 1.01 + 1$$

$$\frac{0.5-1}{1.01} = \cos\left(\frac{4}{v}\right) \rightarrow \frac{1}{\arccos\left(\frac{0.5-1}{1.01}\right)\cdot 4} = v = 0.002$$

Imagen 11. Producción de una alumna. Argumentación.

En este texto (en catalán) Maria busca los puntos de continuidad y paso a paso va modificando las funciones para lograr su objetivo. Pero algún error comete, porque al poner la nueva función en GeoGebra ocurre una cosa inesperada para Maria.

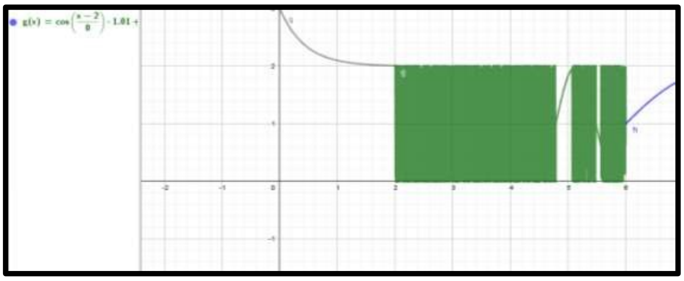


Imagen 12. Producción de una alumna. Detección de un error.

Maria hace un giro sorprendente, se da cuenta que el reto que se ha autoimpuesto supera su capacidad para generarlo por sí misma y reajusta la propuesta de manera argumentada y razonada. Sin entrar en más detalles, finalmente su propuesta es:

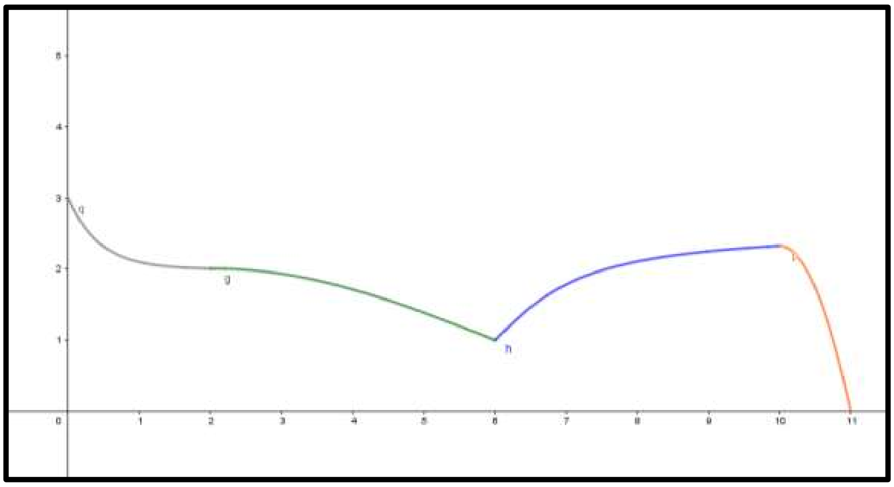


Imagen 13. Producción de una alumna. Propuesta final.

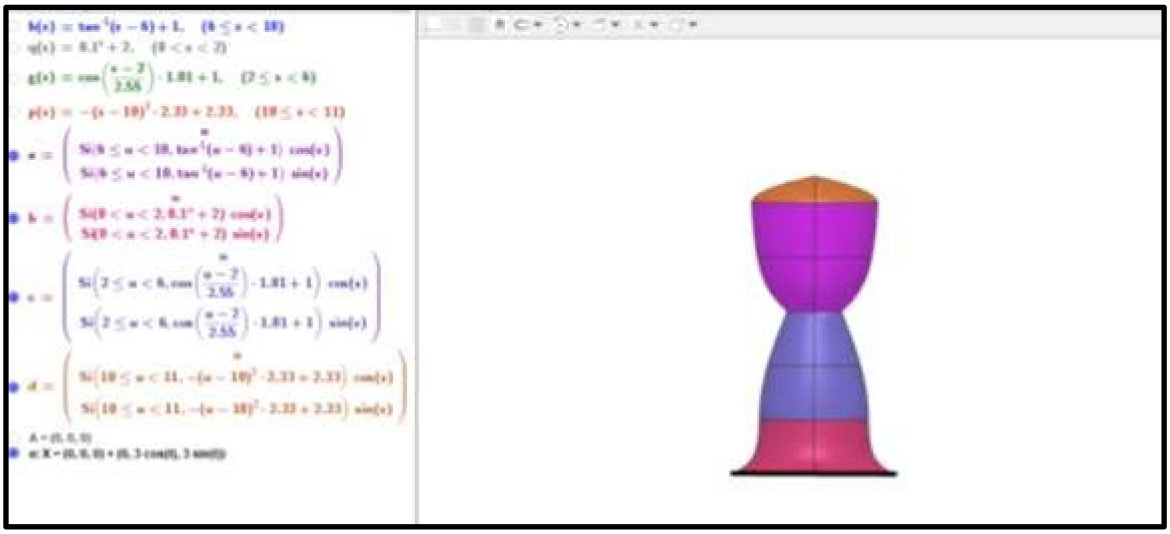


Imagen 14. Producción de una alumna. Propuesta final en GeoGebra.

Tal como se propone, la actividad está dotada de un trasfondo real, y hay que crear la figura. Maria generó el fichero de impresión y finalmente imprimió su figura en una impresora 3D.

Imagen 15. Producción de una alumna. Construcción en impresora 3D.

El salto cualitativo, respecto a la producción de su compañera del curso anterior es abismal. Puede que la reina esbelta de su compañera fuera aparentemente más hermosa pero ocultaba un aprendizaje pobre, puesto que se realizó de manera irreflexiva. Sin embargo Maria obtiene un éxito rotundo: Aprende.

4.3.¿Cómo se evalúa?

La pregunta que se plantea ahora es ¿cómo evaluar a Maria?

En demasiadas ocasiones la evaluación se limita a poner una nota juzgando la producción de la alumna. En este caso, si la evaluación se basa exclusivamente en valorar la ficha que Maria ha hecho, difícilmente lograremos que Maria se esfuerce en construir su propio conocimiento y, en su lugar lo único que construirá será su ficha de ajedrez, sin importarle si, al hacerla está aprendiendo, o no.

Por contra, si lo que valoramos es justamente la manera en qué Maria aprendió, probablemente logremos una mayor implicación en su aprendizaje mejorando su capacidad y su autonomía.

Para lograrlo, se pide al alumnado que entregue la actividad (o prueba si se prefiere) dándole un tiempo determinado para realizarla. En este sentido no resulta relevante si el trabajo lo realiza en el aula, o en su casa, puesto que se trata de una actividad creativa individual y que pone el foco en su proceso de construcción. Sea como fuere, la entrega se hace siempre en formato digital, bien porque se ha escrito en ordenador bien porque se ha escaneado el documento.

Además se comparten unos criterios de evaluación que ponen el foco en las distintas habilidades matemáticas y se redacta un documento de orientación del estudiante para su revisión pidiendo al propio estudiante que lo valore. En concreto, el documento que se utilizó fue el siguiente:

- ¿Interpreto la situación correctamente?

El documento debe presentar el reto. Como no se trata de un problema con enunciado hay que hacer una breve explicación sobre lo que se pretende hacer.

- ¿Modelizo matemáticamente?

Una ficha de ajedrez se puede diseñar de muchas maneras, una de ellas es la de MODELIZAR su perfil con una función definida a trozos continua. Se debe valorar tu capacidad de entender que la función es una modelización matemática de la situación real.

- ¿He encontrado una buena solución?

En este apartado se debe valorar la calidad de la solución que has ofrecido, en primer lugar la ausencia de errores, en segundo lugar debes valorar tu propia capacidad creativa

- ¿He probado distintas estrategias?

Se deben presentar las distintas estrategias exploradas, las distintas soluciones encontradas y analizar los errores reconstruyendo varias veces la propuesta.

- ¿Justifico y razono todo lo que hago?

No se trata de hacer una descripción detallada de cada paso, sino de justificar los razonamientos matemáticos.

- ¿Utilizo el lenguaje matemático correctamente?

El documento se tiene que entender por sí mismo, se tiene que poder leer de manera fluida y ordenada de forma que cualquier persona entienda todo sin ninguna explicación extra. El lenguaje matemático tiene que ser escrupulosamente perfecto. Hay que evitar a toda costa escribir en columnas, de manera telegráfica, con textos desordenados, haciendo rompecabezas. El lenguaje de las funciones es muy estricto, como por ejemplo escribir el dominio correctamente, la continuidad, etc.

- ¿He hecho un buen uso de las tecnologías?

Una tecnología es útil si se usa para hacer cosas que sin ella no serían posibles.

- ¿He corregido bien la actividad?

La corrección es una parte muy importante de la actividad, hace falta que valores si la corrección que has hecho sigue las instrucciones anteriores. En la corrección NO IMPORTA si está bien o no, sino donde me he equivocado y por qué y, sobre todo qué puedo hacer para evitar estos errores en el futuro.

- ¿Qué nota creo que merezco?

Pon la nota que tú creas que mereces, en cada uno de los apartados. El profesor hará su valoración y sería deseable que no hubiera demasiada diferencia entre la nota que pones tú y la que pone él. Si la discrepancia es alta entenderemos que hay un problema grave de apreciación y habrá que analizar qué pasa.

Uno de los fundamentos del aprendizaje es la capacidad de aprender de los propios errores. Para facilitar esa tarea se comparte un documento con cada uno de los estudiantes, en el que deben exponer sus reflexiones sobre su propia producción. El docente, por su parte, escribe su propio comentario siempre después de que lo haya hecho el alumnado, de este modo podemos analizar su capacidad autocrítica. En el ejemplo que estamos mostrando, el documento que rellenó Maria y su profesor fue el siguiente:

Criterio	Valoración de Maria	Valoración del Profesor
Interpretar	*Explico la situación correctamente, el documento es autónomo por sí mismo*	*Estoy de acuerdo con tu comentario*
Modelizar	*Creo que modelizo bien*	*Modelizar es entender que la situación (crear una ficha de ajedrez) se puede resolver generando una superficie de revolución sobre una función continua definida a trozos.*
Resolver, crear	*No he logrado realizar lo que me había propuesto, he tenido que simplificar mi ficha, por lo que no estoy del todo contenta.*	*Quizás el reto era demasiado ambicioso y no te has visto capaz de resolverlo, ante este problema tienes dos opciones, ampliar tus conocimientos o reconsiderar el reto. La primera opción siempre es mejor. Si bien tu ficha tiene un buen nivel te reto a intentar mejorarla y valorarla de nuevo.*
Experimentar	*He hecho muchas pruebas, pensando y corrigiendo, creo que la parte de experimentación está bien*	*Esta parte es extraordinaria, enhorabuena aunque te has rendido cuando la dificultad te ha superado. Intenta en el futuro insistir un poco más.*
Justificar	*Explico todos los pasos que hago*	*Tu trabajo se entiende muy bien*
Comunicar	*Creo que también está bien.*	*Explicar todo implica usar bien la terminología matemática. Tienes algunas lagunas al expresar la continuidad con el lenguaje de límites. Intenta mejorar. Te recomiendo que te hagas un glosario de terminología para recordarla mejor*
Usar tecnologías	*Estoy contenta en ese aspecto ya que he conseguido crear el fichero GeoGebra e imprimir la ficha con la impresora 3D del instituto.*	*Tu trabajo con las herramientas digitales es extraordinario, enhorabuena*
Corregir	*Creo que he corregido bien*	*Es cierto pero debes identificar mejor algunos aspectos como por ejemplo el uso del lenguaje matemático y proponer estrategias de mejora*
Nota estimada (sobre 10)	*Creo que merezco un 7 por qué no he logrado hacer la ficha que yo deseaba*	*Me gusta tu valoración ya que te exiges a ti misma grandes retos y eso es imprescindible para crecer. La calidad de tu ficha es correcta para tu nivel. Debes mejorar aspectos relacionados con la notación matemática. He de felicitarte por tu capacidad de autorregulación, es extraordinaria, Creo que mereces un 9.*

Tabla 1.Instrumento de evaluación.

Un aspecto muy relevante del estudio realizado es constatar que la retroalimentación afecta el nivel de compromiso (Price, Handley y O'Donovan 2008). En efecto, podemos ver como Maria juzga pobremente su producción por no haber sido capaz de alcanzar sus propios retos, sin darse cuenta que, estos retos están, de hecho, muy por encima de los niveles estándar. En el documento de evaluación compartida observamos cómo Maria afirma “No he logrado realizar lo que me había propuesto, he tenido que simplificar mi ficha, por lo que no estoy del todo contenta” El docente aprovecha este nivel de auto exigencia para motivar a Maria a mejorar sus conocimientos, valorando, al mismo tiempo, su esfuerzo. En la retroalimentación el docente aporta conocimiento al alumnado (Hattie, Timperley, 2007)

Cuando es el propio docente el que marca los niveles de exigencia, se limita a ajustarlos a la franja intermedia de la normal, fomentando el conformismo, sin embargo los niveles de auto exigencia de los propios estudiantes les permite alcanzar retos impensables. Un ejemplo es la producción de la ficha de ajedrez de la reina del alumno, llamémosle Marc, un estudiante que utilizó una función definida con 11 trozos de funciones totalmente distintas, todas ellas continuas y derivables. Un trabajo de un nivel conceptual excepcional.

Imagen 16. Producción de un alumno incorporando continuidad y derivabilidad

En los cursos de formación continua del profesorado, muchos docentes temen que los estudiantes que han aprendido con una evaluación que fomenta la autonomía y la autorregulación fracasen cuando tengan que enfrentarse a las pruebas estatales de acceso a la universidad. Sin embargo los resultados obtenidos desmienten dichos temores. En el siguiente recorte de prensa, se observa la imagen de Elba (a la derecha de la fotografía), una de las alumnas que ha realizado este tipo de actividades durante el curso 2020-2021 y que logró una de las tres mejores notas de los alumnos de la región en la “sele”, las pruebas estatales de acceso a la universidad.

EL 9 NOU

PERIÒDIC INDEPENDENT DEL VALLÈS ORIENTAL

Amb El 9 Magazin

Divendres, 2 de juliol de 2021

648 678 819

(Pàgines 6 i 28 i 29) L'Unai, l'Imad i l'Elba, a EL 9 NOU

Els cracs de la 'sele'

Unai Vizcaino (9,7), de Santa Eulàlia, Imad Benhessou (9,9), de Bellavista, i Elba Alfaro (9,7), de Sant Pere, són els tres alumnes de la comarca amb millors notes a la selectivitat.

Imagen 17. Recorte de prensa donde se identifica a Elba como una de las mejores notas

5.Referentes normativos

Este tipo de actividades pueden plantear la duda de si responden a los requerimientos normativos. Para hacer un análisis normativo sobre la evaluación al Bachillerato hay que contextualizar en nuestro país durante los últimos años las leyes de educación: Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación (LOE), donde se enmarca el Decreto 142/2008, de 15 de julio, por el cual se establece la ordenación de las enseñanzas de bachillerato. La LOE es modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) y posteriormente por la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, de Educación (LOMLOE). Paralelamente en la comunidad autónoma de Cataluña Ley 12/2009, de 10 de julio, de Educación de Cataluña (LEC).

La Ley actual, LOMLOE, se implementará el próximo curso 2022-2023, y esto comporta la redacción actual de los nuevos Decretos de ordenación de las diferentes etapas educativas, y como consecuencia las Órdenes de evaluación correspondientes.

En cuanto a la evaluación del Bachillerato, en Cataluña, se enmarca en el Decreto 142/2008, de 15 de julio, por el cual se establece la ordenación de las enseñanzas de bachillerato y se regula por la Orden EDU/554/2008, de 19 de diciembre, por la cual se determinan el procedimiento y los documentos y requisitos formales del proceso de evaluación y varios aspectos organizativos del bachillerato y su adaptación a las particularidades del bachillerato a distancia y del bachillerato nocturno, modificada por la Orden ENS/62/2012, de 15 de marzo. Aparecen nuevos aspectos por la situación de la pandemia Covid-19 y son reguladas por el Real Decreto-ley 31/2020, de 29 de septiembre, por el que se adoptan medidas urgentes en el ámbito de la educación no universitaria y se concreta con la resolución de la Secretaría de Políticas educativas, Instrucciones para los centros educativos que imparten bachillerato. Todos los referentes normativos son publicados anualmente en la Resolución de la Secretaría General del Departamento d'Educació de la Generalitat de Catalunya, resolución por la cual se aprueban los documentos para la organización y la gestión de los centros, y las directrices para la organización y la gestión de los servicios educativos para el curso 2021-2022.

En cuanto al Decreto de currículum[1], Art. 6, Se entiende por currículo del bachillerato el conjunto de competencias, objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de estas enseñanzas. Art. 7.1, Se entiende por competencia la capacidad de aplicar los conocimientos y las habilidades, de manera transversal e interactiva, en contextos y situaciones que requieren la intervención de conocimientos vinculados a diferentes saberes, cosa que implica la comprensión, la reflexión y el discernimiento teniendo en cuenta la dimensión social de cada situación. En el mismo decreto, donde se determina los principios y las características de la evaluación, se destaca que el párrafo del Anexo 1, sobre las Competencias generales del bachillerato, dice ... *las actividades de evaluación … tienen que ser coherentes con el enfoque competencial de los aprendizajes. En este sentido, tendrían que medir las competencias por medio de actividades en que el alumnado tenga que elegir los conocimientos, las destrezas y las actitudes más adecuadas para resolverlas, construir su respuesta y, si procede, explicar el proceso que ha empleado en la resolución.*

En el anexo 2, donde se establece el currículum de las materias, dice: *En el marco de la evaluación permanente, la evaluación formativa es especialmente relevante, puesto que permite comprender el desarrollo de las competencias matemáticas con información sobre* la calidad de las actividades propuestas.

El trabajo con competencias conduce a interpretar la evaluación como una vía para recoger información que sirva de base para tomar decisiones. Las actividades de evaluación tienen que facilitar que el alumno/a se apropie de los conocimientos. Si una actividad de evaluación no facilita un aprendizaje entonces no es adecuada.

La evaluación se tiene que hacer a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje, facilitando a profesores y alumnos obtener información sobre los avances y las dificultades para diseñar los ajustes necesarios. Hay que concebir por lo tanto la evaluación como un proceso a través del cual la información recogida permitirá tomar decisiones que faciliten acciones de mejora. El trabajo con competencias requiere evaluar para enseñar, no solo enseñar para evaluar.

En el mismo Anexo, concreta los criterios de evaluación, se destaca el criterio 12. Utilizar con soltura la calculadora y el ordenador para facilitar cálculos, hacer representaciones gráficas, y explorar y simular situaciones. Usar inteligentemente las TIC e interpretar los resultados de una operación automática en el contexto del problema que se está resolviendo.

Finalmente a la orden de evaluación[2] en los criterios generales dice, Art. 2.3. La evaluación tiene que ser continua, dado que tiene por objeto constatar los

[1] Decret 142/2008, de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de batxillerat

[2] Ordre EDU/554/2008, de 19 de desembre, per la qual es determinen el procediment i els documents i requisits formals del procés d'avaluació i diversos aspectes organitzatius del batxillerat i la seva adaptació a les particularitats del batxillerat a distància i del batxillerat nocturn, modificada per l'Ordre ENS/62/2012, de 15 de març

avances y detectar las dificultades que se produzcan, averiguar las causas y tomar las medidas necesarias para que el alumnado pueda continuar con éxito su proceso de aprendizaje. Para que la evaluación sea continua, se tienen que establecer pautas para la observación sistemática y el seguimiento de cada alumno a lo largo de su proceso formativo. En el artículo 2.6. La evaluación es en sí misma formativa, y regula y orienta el proceso educativo. La información que proporciona tiene que permitir mejorar los aprendizajes del alumnado y los procesos de enseñanza empleados y la práctica docente. La evaluación también es un procedimiento que permite constatar y certificar el logro de los objetivos del aprendizaje.

6.Conclusión

Durante la pandemia se tuvo que replantear muchos aspectos en el mundo educativo. Hubo muchos factores que influyeron en el rendimiento escolar, como, por ejemplo, la desigualdad de nuestros sistemas educativos, el acceso a ordenadores, la conectividad, los entornos solidarios necesarios para centrarse en el aprendizaje, escasa coincidencia entre recursos y necesidades, etc. (OECD Education at a Glance 2021). Uno de los indicadores que influyeron en el rendimiento escolar fue la dificultad en adoptar modelos de evaluación que encajaran con un trabajo autónomo y telemático. Nuestros intentos por utilizar estrategias de evaluación basadas en la autonomía, la regulación y la auto exigencia de los estudiantes a partir de retos creativos individualizados nos ha llevado a incorporar dichas estrategias a las clases post pandémicas obteniendo resultados muy satisfactorios.

Para que estas estrategias sean eficaces, la evaluación debe formularse sobre criterios diversos que hagan referencia a todas y cada una de las habilidades o competencias que son necesarias para un uso eficaz de la matemática. Estas habilidades no se centran únicamente en resolver sino que tienen una multiplicidad de aspectos como son interpretar, modelizar, representar, resolver, razonar, experimentar, comunicar, el uso de las tecnologías, etc.

Si la evaluación, al igual que cualquier actividad docente, está destinada al aprendizaje de los estudiantes resulta necesaria su participación y complicidad. Si obtenemos dicha complicidad y tanto alumno como profesor aceptan que la única utilidad de la evaluación es su función reguladora, la calificación no debe suponer ningún problema y debería poder determinarse de una manera consensuada.

Esta mirada se enmarca en la normativa vigente, donde la evaluación se tiene que hacer a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje, facilitando a profesores y alumnos obtener información sobre los avances y las dificultades para diseñar los ajustes necesarios.

En definitiva, el trabajo con competencias requiere evaluar para enseñar, no solo enseñar para evaluar.

Usando metodologías activas y evaluando el proceso de aprendizaje, no debe haber diferencia alguna entre aprender y evaluar en pandemia o sin ella. La única diferencia estará en los entornos a través de los cuales se comparte el conocimiento.

Referencias bibliográficas

Brown, S., Race, P. (2020). *Using effective assessment and feedback to promote learning*. Hunt, L. and Chalmers, D. *University teaching in focus: A learning-centred approach*. Routledge.

Glasser, W. (1998) *Choice theory.* New York, HarperCollins.

Gorriz M., Vilches S. (2019) Maths Adds up. In: Doig B., Williams J., Swanson D., Borromeo Ferri R., Drake P. (eds) Interdisciplinary Mathematics Education. pp 185-208. ICME-13 Monographs. Springer.

Hattie, J., H. Timperley. (2007). *The power of feedback*. Review of Educational Research 77, no. 1: 81–112.

OECD (2021), Education at a Glance 2021: OECD Indicators, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/b35a14e5-en

Panadero E., Alonso-Tapia J. (2013). Autoevaluación: Connotaciones Teóricas y Prácticas. Cuándo Ocurre, Cómo se Adquiere y qué hacer para potenciarla en nuestro Alumnado. Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 11(2), 551-576.

Price, M., K. Handley, and B. O'Donovan. (2008). *Feedback: All that effort but what is the effect?* Paper presented at the 4th EARLI/Northumbria Assessment Conference: Challeng-ing Assessment, August 8, in Berlin, Germany.

Sambell, K. and Brown, S. (2020). Covid-19 Assessment Collection https://sally-brown.net/kay-sambell-and-sally-brown-covid-19-assessment-collection/

Sanmartí, N. (2020) *Avaluar és aprendre.* Dirección General de Currículum i Personalització. Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya.

Vilches Latorre, Santiago. svilches@xtec.cat. Catalunya, España. Catedrático de Matemáticas. Instituto Vilamajor. Formador del profesorado en currículum y evaluación competencial.

Gorriz Farré, Maite. mgorriz@xtec.cat. Catalunya, España. Inspectora de Educación. Licenciada en Matemáticas. Máster en Alta Función directiva EAPC.

Ambos son coautores del libro, La semilla del cálculo y la computación. J. Napier RBA y artículos en Springer, SUMA, UNO, etc. Miembros del grupo Fotografía Matemática ABEAM, Premio Matemática y sociedad 2016 del IEC.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-18

Usos de las gráficas en una plataforma virtual de matemática
Usos de lãs gráficas em uma plataforma virtual de matemática

Zenia Yacir Testa Rodriguez

Fecha de recepción: 8/11/2021
Fecha de aceptación: 21/12/2021

Resumen	Se presentan algunos aspectos de una investigación en el contexto de una plataforma adaptativa de matemática virtual. Brindo muestras de los usos de las gráficas que los estudiantes ponen en juego. De los resultados surgen aportes a la perspectiva teórica, y elementos a tener en cuenta por parte de los docentes en el proceso de enseñanza. Se destaca la importancia de ir más allá de las respuestas que dan los estudiantes en las plataformas virtuales, conocer los procesos que ponen en juego al trabajar con ellas. **Palabras clave**: plataforma virtual, uso de las gráficas, educación
Abstract	There are presented some aspects of an investigation in the context of an adaptive mathematics platform virtual. The uses of graphs that students put into play are presented. From the results, contributions to the theoretical perspective emerge, and elements to be taken into account by teachers in the teaching process. The importance of going beyond the answers given by the students on the virtual platforms and understanding the processes that is done while working with them is highlighted. **Keywords:** virtual platform, use of graphics, education
Resumo	Alguns aspectos de uma investigação são apresentados no contexto de uma plataforma de matemática adaptativa virtual. São apresentados os usos dos gráficos que os alunos colocam em jogo. A partir dos resultados encontram-se contribuições para a perspectiva teórica, e elementos a serem levados em consideração pelos professores no processo de ensino. Ressalta-se a importância de ir além das respostas dadas pelos alunos nas plataformas virtuais, conhecendo os processos que eles colocam em ação ao trabalhar com eles. **Palavras-chave:** plataforma virtual, uso de gráficos, educação

1. Introducción

A causa de la pandemia desatada a comienzos del 2020 en Uruguay se pasó de una educación presencial a una virtual. Dadas las condiciones únicas en este país; por la existencia del Plan Ceibal desde hace más de 14 años, que ha entregado dispositivos portátiles a estudiantes y docentes, puesto a disposición de estas plataformas educativas y plataformas específicas de matemáticas; este pasaje ha sido casi inmediato. Esto se destaca en el documento elaborado por el BID en 2020, en él se indica que Uruguay en la pandemia potenció la infraestructura tecnológica que tenía a raíz de la existencia del Plan Ceibal, siendo el único país de la región con una plataforma integrada para la administración de los aprendizajes de los estudiantes. (Arias et al., 2020)

En este contexto investigaciones sobre la utilización de las plataformas por parte de los estudiantes, sobre el uso del conocimiento (Cantoral, 2013) que los estudiantes ponen en juego al realizar actividades que ofrecen las plataformas, brindan elementos que pueden ser tenidos en cuenta por los docentes a la hora de utilizar este tipo de herramientas. En este artículo se presenta parte de la investigación "Uso de las gráficas cartesianas en el contexto de una Plataforma Adaptativa de Matemática" (Testa, 2020) para obtener el grado de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa. Dicha investigación se realizó utilizando la plataforma adaptativa PAM, con foco en el uso de las gráficas cartesianas (Cordero, Cen, Suárez, 2010). PAM es la primera plataforma de matemática que Plan Ceibal pone a disposición de docentes y estudiantes.

2. El contexto

2.1. La educación en Uruguay

Para entender el impacto del Plan Ceibal en estos dos años de pandemia debemos hacer un breve resumen de algunos aspectos desde su creación. Así como enmarcar la incidencia de él en los estudiantes y docentes uruguayos.

En Uruguay, el Sistema Educativo abarca Educación en la Primera Infancia e Inicial, Primaria, Media Básica y Media Superior, Terciaria (Universitaria y no Universitaria). Para todos estos ciclos hay Centros Públicos (laicos y gratuitos) y Privados. La enseñanza desde Inicial 4 (a partir de 4 años) a Media Básica (aproximadamente 15 años) es obligatoria.

Testa (2020) muestra el nivel de cobertura de Educación Primaria y Media Básica presentado por el Ministerio de Educación y Cultura (2020) al 2017. En Educación Primaria la cobertura educativa es universal, próxima al 100%, en Educación Secundaria Básica, nivel en el que se realizó la investigación, la cobertura es superior al 95%.

Frente a esta situación podemos asegurar que Plan Ceibal llega a un elevado porcentaje de docentes y estudiantes, lo que favoreció el rápido pasaje de los cursos, de la presencialidad a la virtualidad, en la pandemia. Testa decía, que:

> Los porcentajes de estudiantes que asisten a Centros Educativos Públicos en Educación Media Básica es superior al 86% según los datos del Anuario Estadístico de la Educación (Ministerio de Educación y Cultura, 2019, p. 1). Estos estudiantes y sus docentes son, entre otros casos muy específicos, los considerados *usuarios Ceibal*. Este alto porcentaje de cobertura a nivel país pone de relevancia la importancia de realizar investigaciones en Matemática Educativa de los materiales, programas y plataformas que Plan Ceibal pone a disposición de dichos estudiantes y docentes. (Testa, 2020, p.4)

2.2. El Plan Ceibal

El Plan Ceibal se crea por decreto presidencial en 2007. Es un proyecto socioeducativo, que convierte a Uruguay en un país vanguardista en la reducción de la brecha digital en la sociedad, la inclusión y la equidad en el acceso a la información. Entrega a cada docente de Educación Primaria (6 a 11 años) y Media

Básica (12 a 14) pública (obligatoria, gratuita y laica), así como a sus estudiantes, una laptop o tablet para su uso personal, tanto en el aula como fuera de ella. Además de la entrega de los dispositivos pone a disposición de estos estudiantes y docentes distintas plataformas educativas, materiales, ofrece variados cursos, así como desarrolla distintos proyectos. Plan Ceibal brinda conectividad gratuita a los Centros Educativos públicos. En época de pandemia generó planes de conexión para estudiantes y docentes, además de sumar a las plataformas ya existentes una herramienta de videoconferencia que no consume datos, de esta forma facilitó los encuentros sincrónicos, que vinieron a sumarse a las interacciones asincrónicas que ya brindaban las plataformas con las que se contaba. La entrega de los dispositivos impactó en la población disminuyendo la brecha de acceso a un dispositivo portátil entre los distintos quintiles como se puede observar en la Figura 1.

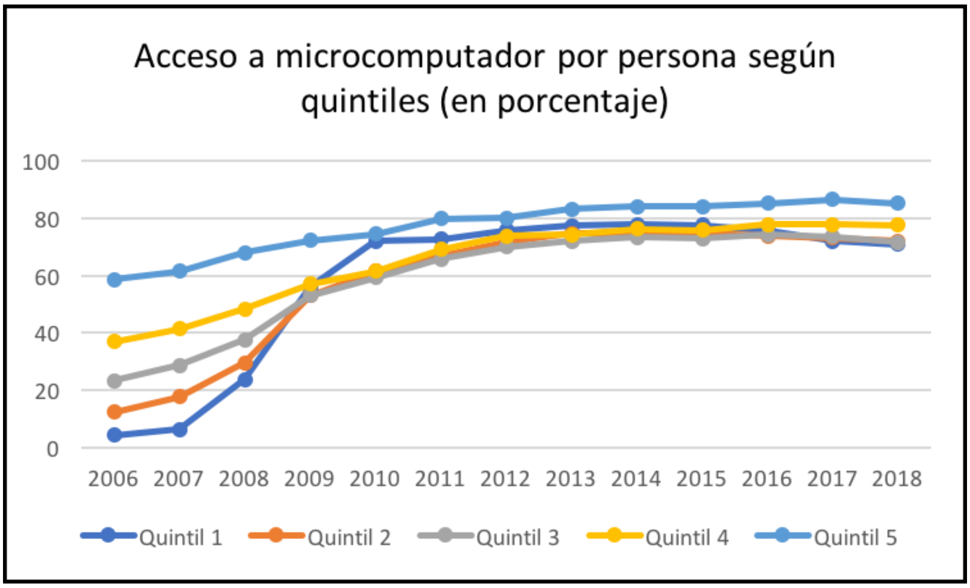


Figura 1. Acceso a microcumputador 2006-2018 (Uruguay)
Nota: elaboración propia con datos del Ministerio de Desarrollo Social (2020)

2.3. La plataforma adaptativa de matemática "PAM"

Desde mediados del 2013 Plan Ceibal pone a disposición de sus usuarios PAM, plataforma a la que se accede en línea con contenidos de tercer año de Educación Primaria a tercer año de Educación Media Básica. Tiene una lógica de trabajar en base a actividades o series de actividades, cuenta con más de 100.000 actividades las cuales se presentan por tema o por curso. Cabe destacar que todas las actividades de PAM están disponibles para los docentes y los estudiantes, independientemente del curso en el que se encuentren. Entre todas las actividades de PAM el docente puede elegir las que asignará a sus estudiantes, y los estudiantes pueden realizar tanto las asignadas por su docente como cualquier otra PAM.

Cuando el estudiante realiza las actividades si lo desea puede acceder a aspectos teóricos, "consultar", que es un libro virtual que le presenta exactamente el tema relacionado con la actividad con la cual está trabajando, que contiene ejemplos, definiciones, etc., y que permite navegar dentro del desarrollo del tema en cuestión. El estudiante en la actividad también puede ingresar a "pistas", en general observaciones sobre la actividad dadas en lenguaje coloquial. Estos aspectos diferencian a PAM de la mayoría de los libros en formato papel en los cuales primero desarrollan el tema y luego se presentan las actividades.

PAM brinda al estudiante una retroalimentación sobre lo realizado en la actividad. Como desarrolla Testa (2020) el concepto de "adaptativa" en lo micro se refiera a la retroalimentación inmediata que le brinda al estudiante al ingresar una respuesta. Si la respuesta es la esperada por PAM se lo indica con sonido e imágenes que así se lo hacen saber. Si la respuesta ingresada no es correcta (según PAM) también emite sonido y marcando en rojo la respuesta (o la parte de ella) que no correcta[1]. Si en el primer intento de respuesta de la actividad, ésta no es la esperada por la plataforma, el estudiante tiene la posibilidad de responder nuevamente (ya alertado de los errores cometidos en el primer intento), y en caso que nuevamente la respuesta dada no sea la esperada por PAM la plataforma le proporciona una posible solución acompañada de una explicación.

La PAM no presenta un fundamento explícito escrito sobre la concepción pedagógica ni didáctica de su propuesta; Plan Ceibal ha brindado variados y numerosos cursos a docentes de corte instrumental y de corte matemático-educativo. Por ello considero, en base a mis 11 años de trabajo en Plan Ceibal, y al estudio de Testa y Suárez (2019), que cada docente la utiliza de distintas maneras, teñido por sus hábitos, sus concepciones y su punto de vista sobre la enseñanza de la Matemática como también reportan los estudios de Drijvers et al. (2010) sobre otras herramientas tecnológicas. En el estudio de Testa y Suárez (2019) se destaca también que los docentes han ido modificando la forma de utilizar PAM en función de las capacitaciones en las que participan y del proceso de apropiación que van realizando.

3. La investigación

El estudiante al trabajar en PAM, dadas las características descritas anteriormente, puede establecer una interrelación (personal) con ella y sus contenidos. En esta interrelación se producen distintos *usos del conocimiento* (Cantoral, 2013). La investigación, de la cual en este artículo se reportan algunos objetivos y sus resultados, buscó indagar sobre dichos usos, en particular el *uso de las gráficas* (Cordero et a*l*., 2010) determinado por sus *formas* y *funcionamientos;* indagar si se produce, o no, un *desarrollo del uso de la gráfica* cuando un grupo de estudiantes realiza una actividad en PAM seleccionada especialmente para esta investigación.

Presento en este párrafo algunos de los antecedentes, sobre el trabajo en el aula con tecnología, que consideramos para esta investigación. El informe de la XVII ICMI Study Conference (Hoyles & Lagrange, 2010) donde analizan los cambios desde el primer estudio ICMI; Sinclair *et al*. (2010) indica que en el inicio las investigaciones se enfocaban en aprendices individuales y su relación con la computadora, y luego incorporaron estudios de gran escala demandan una aproximación más sistémica. Los proyectos reportados son *Enciclomedia* (México), *M@t.abel* (Italia), *Sketchpad for Young Learners* (US), *Mathematics 9 and 10 with the Geometer's Sketchpad* (Lituania) y *E-content Initiative* (Irán). Sacristán *et al*.

[1] En todos los casos en este artículo nos referimos a respuesta "correcta" o "incorrecta" según la respuesta esperada por PAM.

(2010) estudian los modos en que los estudiantes se involucran en el aprendizaje al utilizar herramientas digitales. Julie *et al*. (2010) presentan proyectos de desarrollo regionales, en Rusia, Hong Kong, Vietnam, Sudáfrica y Latinoamérica. Los estudios de Hoyles y Lagrange (2010), Goos (2005), Villarreal (2012) y Ponte e*t al*. (2002), se centran más en el docente y la utilización de la tecnología.

3.1. La perspectiva teórica

La perspectiva teórica de esta investigación fue Teoría Socioepistemológica, en particular el *Uso de las gráficas* (Cordero *et al.,* 2010). Cantoral (2013) destaca el aporte de la Socioepistemología, "modela *la construcción del conocimiento matemático* conjuntamente con su *difusión institucional*, esto es, modeliza las dinámicas del *saber* o *conocimiento puesto en uso*" (p. 97). Indica que fue necesario introducir la noción de *uso* y de *conocimiento en uso*, en contraste a la noción sicológica que plantea un conocimiento estático. En cuanto a la investigación, en la teoría, indica que "…inicia con este particular tratamiento del *saber*. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y en el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa" (p. 97).

> Considerar al *saber* como el *conocimiento en uso* rompe la centralización en los objetos matemáticos. Esto implica cambiar la lupa de lo que *sabe un estudiante sobre cierto objeto matemático*, o cómo el *docente debe enseñarlo*, a colocarla en *cómo se usa el conocimiento* en cierta situación. Impacta también en la concepción de la enseñanza de la matemática, dejando de considerarla como transmisora de conocimientos a una enseñanza funcional. Lo cual implica crear las condiciones para que el aprendiz realice un aprendizaje funcional. El concepto que abarca estas dos últimas cuestiones es considerar a la matemática desde una mirada funcional, en contraposición de una mirada utilitaria. (Testa, 2020, p. 37)

A partir del constructo *conocimiento en uso* planteado por Cantoral (2013), Cordero et al., (2010) consideran el *uso de la gráfica* a través de los conceptos de *forma* y *funcionamiento*. En este sentido Cordero *et al*., (2010) consideran al uso de la gráfica "como el papel que desempeña en la situación y se manifiesta por sus funcionamientos y formas" (p.199). Respecto a la forma y funcionamiento de la gráfica los autores indican que "el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones." (p.199). Se establece una relación dialéctica entre el funcionamiento y la forma de la gráfica, dando origen a su uso.

Para esta investigación consideré las categorías teóricas que surgen del estudio de los programas de seis semestres del bachillerato tecnológico bivalente del Instituto Politécnico Nacional de México, en el área de físico-matemáticas realizado por Cordero *et al*. (2010). Los usos de la gráfica reportado por estos autores son: *distribución de puntos*, *comportamiento geométrico*, *análisis de la curva*, *cálculo de áreas y volúmenes*, y *análisis de la información*. En la Tabla 1 sintetizo la descripción que dicho estudio realiza de los "usos", a partir del funcionamiento y la forma de la gráfica que los determinan.

Uso	Situación	Funcionamiento	Forma
Distribución de puntos	Atañe al conocimiento de la forma gráfica de una función.	Ubicación de puntos, desplazamiento en el plano cartesiano, variación de los	Tablas con valores previamente

		puntos para el trazado de curvas continuas o no.	establecidos, gráficas y ecuaciones.
Comportamiento geométrico	Alude a la interpretación geométrica de una función o asociación curva-expresión algebraica, para comprender las transformaciones de las funciones.	Obtención de nuevas gráficas de funciones a partir de una ya conocida	Traslación horizontal o vertical, estiramiento o reflexión de la gráfica.
Análisis de la curva	Dirigida hacia la variación de la curva (análisis global).	Análisis del comportamiento (crecimiento o decrecimiento) para ubicar máximos y mínimos, puntos de inflexión y concavidad en distintos intervalos.	Tabla de variación, criterios de la derivada primera y derivada segunda
Cálculo de áreas y volúmenes	Centrada en hallar el área o volumen de una figura limitada por funciones (foco en la unidad de análisis que describen la o las gráficas).	Para definir la superficie (cálculo de área) o superficie a rotar (cálculo de volumen)	Integración

Tabla 1. Categorías de usos de las gráficas (Cordero et al., 2010)
Nota: Creación propia con datos de Cordero et al. (2010, p. 200)

Cordero *et al.* (2010) también destacan que el debate entre las formas y funcionamientos de la gráfica permite que estos se vayan transformando y modificando, generando nuevas formas y funcionamientos. A esta transformación le denominan *desarrollo de usos de la gráfica*, que implica su *resignificación*. “Se forman construcciones, se hacen distinciones entre ellas, se ponen en juego clases de actividades y usos del conocimiento donde no sólo se da un lenguaje de herramientas, sino también se desarrolla” (Cordero *et al*., p. 200).

3.2. Marco metodológico

La propuesta fue realizada por tres equipos de Estudiantes de primer y tercer año de Ciclo Medio Básico. Trabajaron con una sola computadora, para que debieran acordar la respuesta a ingresar en PAM, y se dieran interacciones entre ellos. La investigadora grabó las interacciones orales entre los estudiantes y tomó notas de sus gestos, sin intervenir. Acorde a la perspectiva teórica de la investigación se consideró el abordaje metodológico de Montiel y Buendía (2011) donde presentan un *Esquema Metodológico para la Investigación Socioespistemológica*, Figura 2.

Figura 2. El esquema metodológico
Nota. Fuente, Montiel y Buendía (2011, p. 446)

Montiel y Buendía (2011) indican que los nodos representan fases o momentos del proceso de investigación (incluyendo tareas), y las flechas que los vinculan, acciones que relacionan los distintos momentos. La relación entre los nodos presentados en el esquema en forma genérica y los de la investigación que acá presento es la siguiente: *primer nodo* la problemática a estudiar; *segundo nodo* se consideraron los estudios de Cordero y Flores (2007), Cordero *et al.* (2010) y Suárez (2014) en torno a la graficación como práctica social, *tercer nodo* (situación-problema) del esquema corresponde a la de la plataforma adaptativa de matemática, que he llamado *Gráficas en PAM*, que seleccioné especialmente para este estudio y *cuarto y último nodo* del esquema corresponde a los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes. En la Tabla 2 presento las distintas etapas del diseño metodológico de la investigación.

Etapa	Acciones
1	Se analizó en profundidad PAM, experimentando con distintas actividades relacionadas al uso de las gráficas considerando los elementos propios de ella; *consultas*, *pistas*, *la solución PAM* (con la respuesta esperada), y *las devoluciones* frente a una respuesta.
2	Seleccioné de las actividades de PAM las que contuvieran una gráfica de una función pero no su expresión analítica. De las pocas actividades que cumplían esta condición, que podrían permitir evidenciar el *uso de la gráfica* que los estudiantes pondrían en juego al realizarla, y que además fuera un desafío no paralizante para los estudiantes elegí la llamé *Gráficas en PAM.* Según la clasificación de Cordero *et al.* (2010) la enmarqué en el uso *distribución de puntos.*
3	Apliqué la actividad a tres equipos de tres estudiantes de primer y tercer año de Educación Media Básica.
4	Analicé las producciones de los estudiantes

Tabla 2. Etapas del diseño metodológico

3.3. La propuesta

Se presenta a continuación la actividad seleccionada, la pista asociada a ella, y la resolución que propone PAM. No se presenta el consultar dada su extensión y además porque los sujetos de la investigación no recurrieron a él.

3.3.1. La actividad *Gráficas en PAM*

Las Figuras 3 y 4 muestran la actividad seleccionada para la investigación. En la pantalla se debe deslizar la barra lateral para ver toda la actividad, por ello la misma se presenta en dos figuras. La consigna indica: Encuentra los valores de “x” tales que los puntos de coordenadas (x;3) pertenezcan al gráfico de la función v.

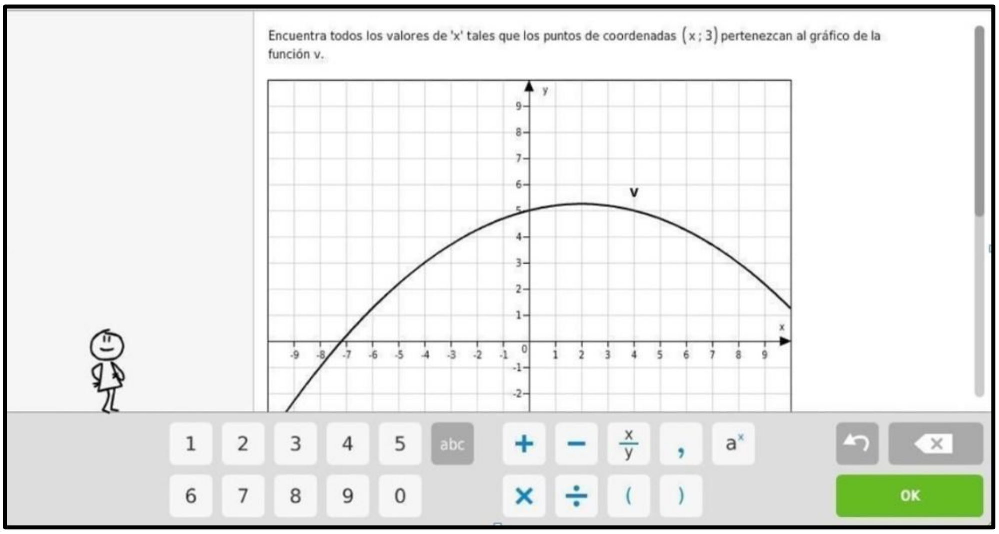


Figura 3. Actividad Gráficas en PAM 1
Nota: Captura de pantalla de PAM (2019)

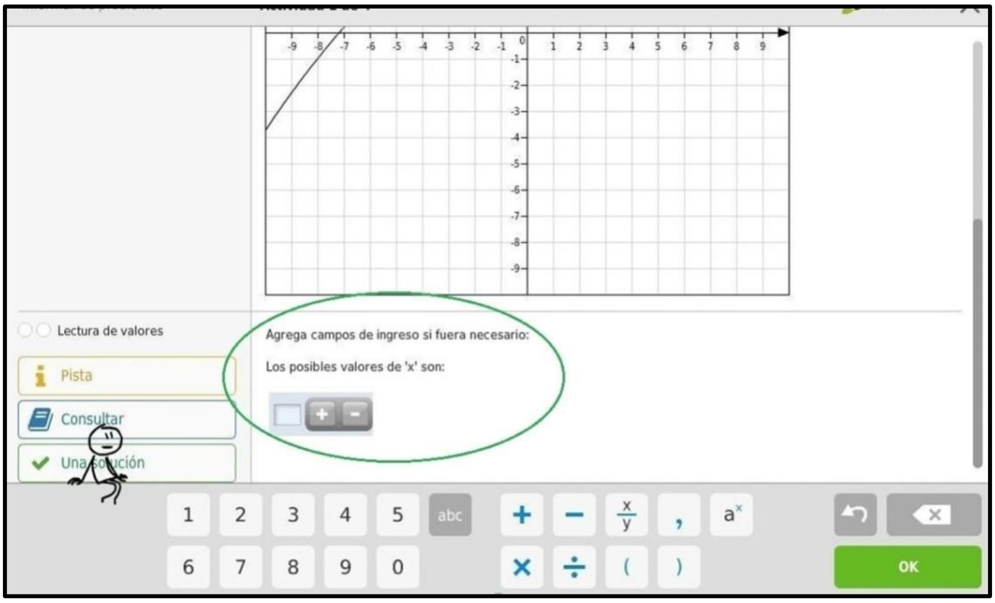


Figura 4. Actividad Gráficas en PAM 2
Nota: Captura de pantalla de PAM modificado (2019)

En las figuras anteriores se puede observar que la gráfica está representada en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, y que se presenta una cuadrícula relacionada con las abscisas y ordenadas enteras. La consigna hace referencia a una función pero no presenta su expresión analítica. Estos aspectos fueron tenidos en cuenta para la elección de esta actividad, ya que implica que el estudiante interactúe directamente con la gráfica, aunque queda abierta la posibilidad de que intente encontrar alguna expresión analítica que se corresponda con la gráfica dada. La zona marcada con verde es el espacio donde los estudiantes deben ingresar la respuesta antes de enviarla para recibir la devolución de PAM. En la Figura 4, debajo, se puede observar las casillas para ingresar a pista y consultar asociados a esta actividad, así como una solución.

3.3.2. La pista

La *pista* (Figura 5) de la actividad que llamamos Gráficas en PAM indica: Un punto de (*x*;*y*) pertenece a la gráfica de una función v si y=v(x).

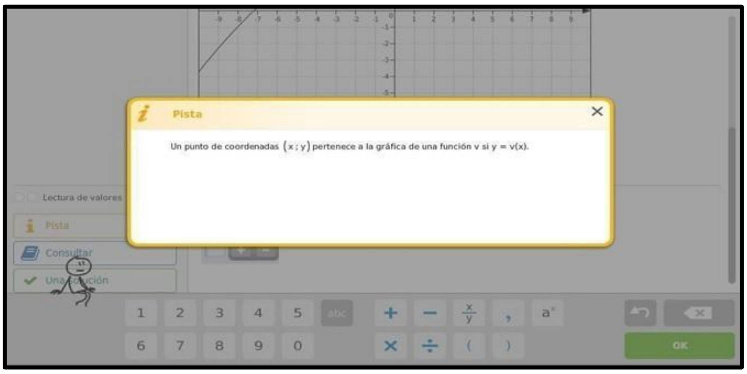


Figura 5. La pista
Nota. Fuente, captura de pantalla PAM (2019)

Como se puede observar no brinda información directa sobre lo solicitado en la actividad, no da un ejemplo en el contexto gráfico, ni muestra la representación de un punto en una gráfica y la relación de éste con sus coordenadas. Tampoco está dada en lenguaje coloquial, como la mayoría de las *pistas* en PAM, sino en lenguaje matemático-formal. En esta investigación nos propusimos analizar el significado que los estudiantes asignen a la información dada en la pista y si genera nuevas formas y funcionamientos de la gráfica, en caso de que ingresaran a ella.

3.3.3. Devolución frente a una respuesta no correcta[2]

En el caso que los estudiantes no ingresen la respuesta esperada por la plataforma, respuesta “incorrecta según PAM”, la devolución instantánea que les brinda se presenta en la Figura 6.

[2] No correcta según PAM.

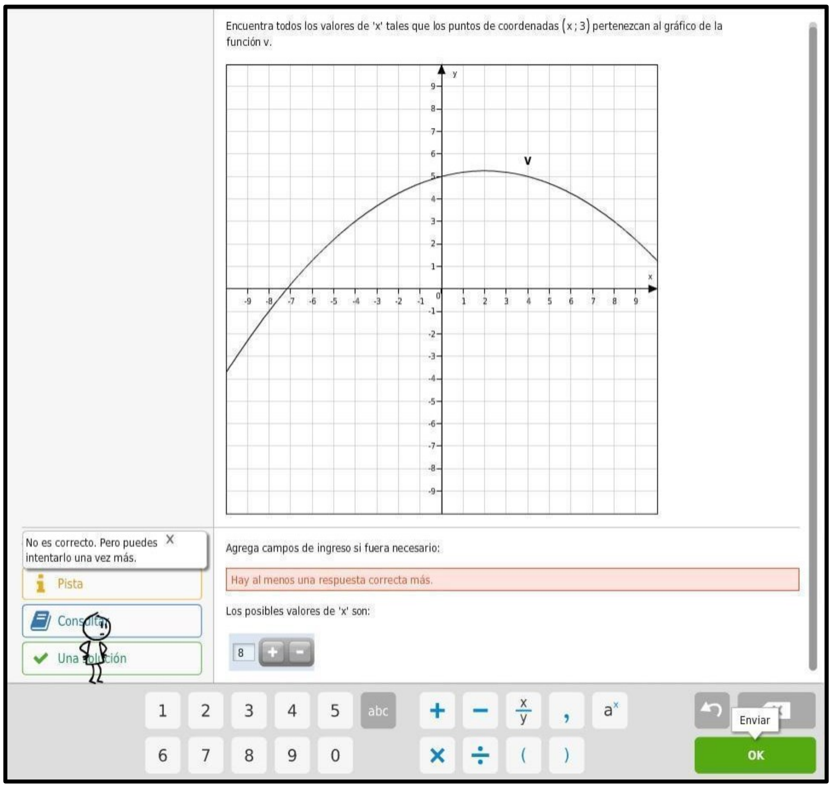


Figura 6. Devolución de PAM
Nota: Fuente, captura de pantalla PAM (2019)

Para el análisis ingresamos solo uno de los números que dan solución a la actividad, la PAM en la devolución indica que el valor ingresado es correcto pero que no está completa la respuesta. Ya sea que la respuesta ingresada sea “parcialmente correcta” o “incorrecta” según la plataforma ahora el estudiante solo tiene una opción más para dar una nueva respuesta. En caso de ingresar un número distinto al esperado por la PAM la devolución indica: “la respuesta no es correcta, inténtalo nuevamente”.

3.3.4. Solución brindada por PAM

En este artículo, como ya se indicó, no se presenta el “consultar” ni su análisis, ya que ningún equipo ingresó a él. Pero la solución (Figura 7) que brinda PAM está relacionada con el contenido del consultar y brinda muestras de la estrategia que La plataforma propone para la solución de esta actividad.

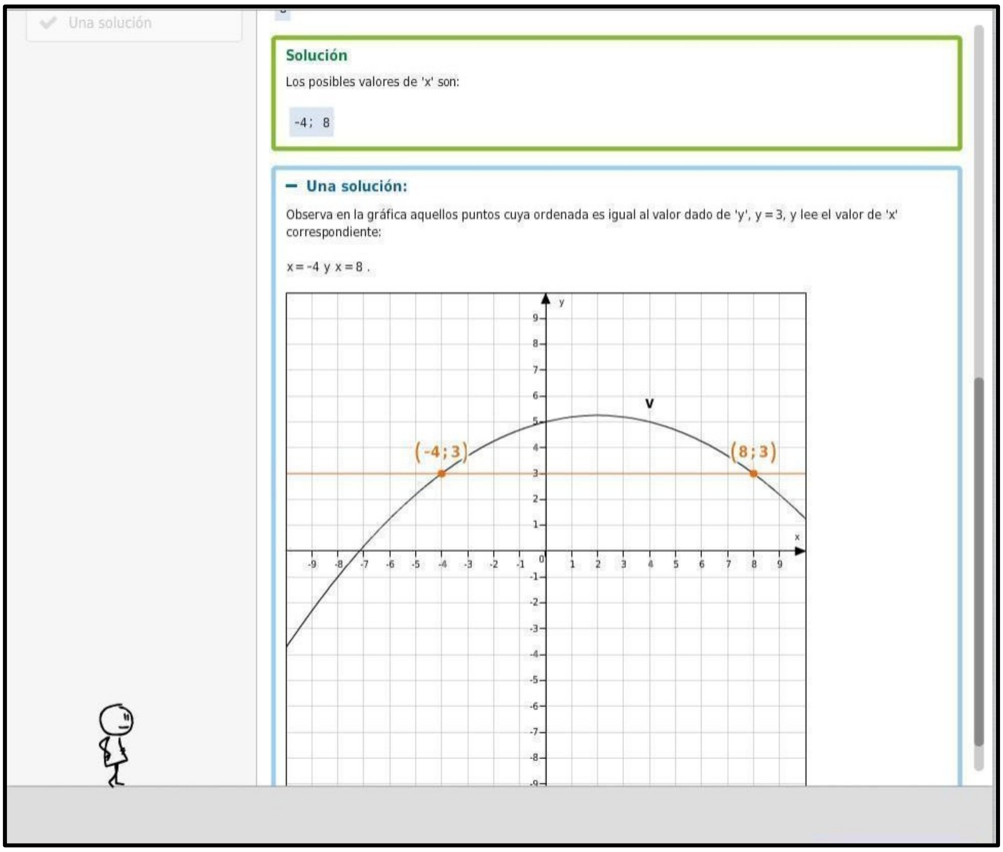


Figura 7. Solución PAM
Nota: Fuente, captura de pantalla PAM (2019)

La estrategia que presenta PAM, para dar respuesta a la actividad, la considero dentro del uso de la gráfica *distribución de puntos* (Cordero et al., 2010) que tiene asociado, en este caso, el funcionamiento "determinar de los puntos de ordenada 3 los que pertenecen a la gráfica para hallar su abscisa" y las formas: considerar el conjunto de puntos de ordenada 3 (recta y=3), intersectar la recta con la gráfica, proyectar los puntos de intersección sobre el eje de las abscisas.

3.4. Algunos resultados de la investigación

Presento en este apartado algunos resultados de uno de los tres equipos que participaron en esta investigación. Corresponde a estudiantes de primer año de Educación Media Básica, nivel en el cual no se ha abordado formalmente el concepto de función. Para el análisis de las producciones y la presentación de los resultados se determinan "momentos" teóricos. Estos están dados por algún cambio significativo en el uso de la gráfica que los estudiantes están poniendo en juego.

En el Momento 1 consideraron que los puntos de ordenada 3 de la gráfica son los que están debajo de ella en el cuadrante I (con ordenada 3 o con ordenada "próxima" a 3). Los estudiantes tocan en la pantalla, como se muestra en la Figura 8, pero esto no queda registrado en PAM, dado que en esta actividad la respuesta implica ingresar números en la zona determinada para ello y no acepta "marcar en la pantalla".

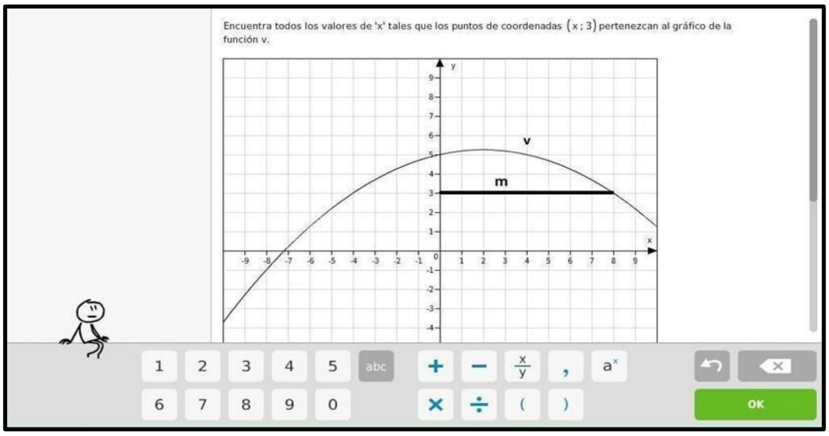


Figura 8. Segmento en cuadrante I
Nota: Fuente, Testa (2020, p. 111)

Las *formas de la gráfica* que surgen en este momento son considerar el semieje de las abscisas positivas, el (0;3) marcado, puntos debajo de la curva con abscisas *próximas* a 3, y luego de abscisa 3, lo que les funciona para determinar puntos de ordenada 3 con abscisa positiva debajo de la curva, lo que significan como *pertenecer a la gráfica*. Está implícito que consideran que los puntos que pertenecen a la gráfica son los de la Zona A (Figura 9), determinada superiormente por la curva, inferiormente por el eje de las abscisas, a la derecha por la ventana de la actividad y a la izquierda por el eje de las ordenadas; están considerando solo el primer cuadrante.

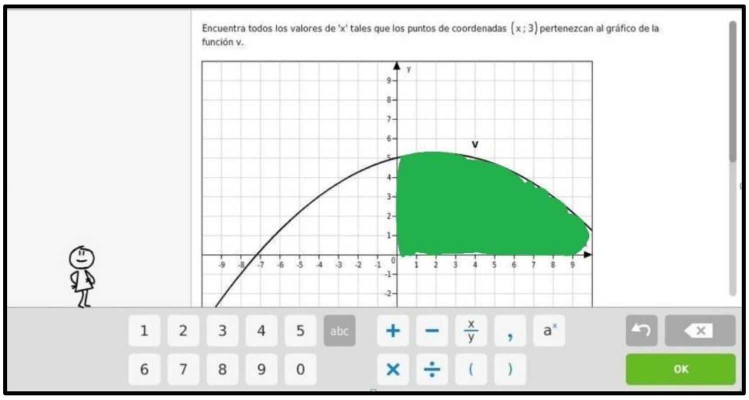


Figura 9. Zona A
Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)

El uso de la gráfica que observé en este momento no lo encontré reportado en la revisión bibliográfica realizada, y le llamé *envoltura*. Asocié el uso de la gráfica envoltura al de figuras planas. Dado que estos estudiantes son de primer año de Educación Media Básica, y en Educación Primaria han trabajado con figuras en el plano, en general convexas (círculo, cuadriláteros, triángulos, entre otros), esta podría ser la razón que les lleva a considerar que los puntos “debajo de la curva”, en particular los de la Zona A, son los que pertenecen a la gráfica. El uso de la gráfica envoltura que ponen en juego los estudiantes en este momento presenta similitudes a las reportadas por Suárez y Cordero (2010), en relación con la Figuración de las Cualidades de Oresme. Aquí se establecen relaciones entre figuras planas y situaciones de variación. Los autores mencionan, por ejemplo, el uso del rectángulo para representar una situación donde la intensidad de la cualidad no varía. La determinación de esta nueva categoría de usos de la gráfica es uno de los hallazgos más importantes del estudio de Testa (2020).

> El contorno de estas figuras geométricas guarda parecido con las curvas que actualmente en sistemas de ejes coordenados representan funciones analíticas. Hay una estrecha relación entre la Figuración de las Cualidades y una etapa histórica del desarrollo del concepto matemático de función. (Suárez y Cordero, 2010, p. 323)

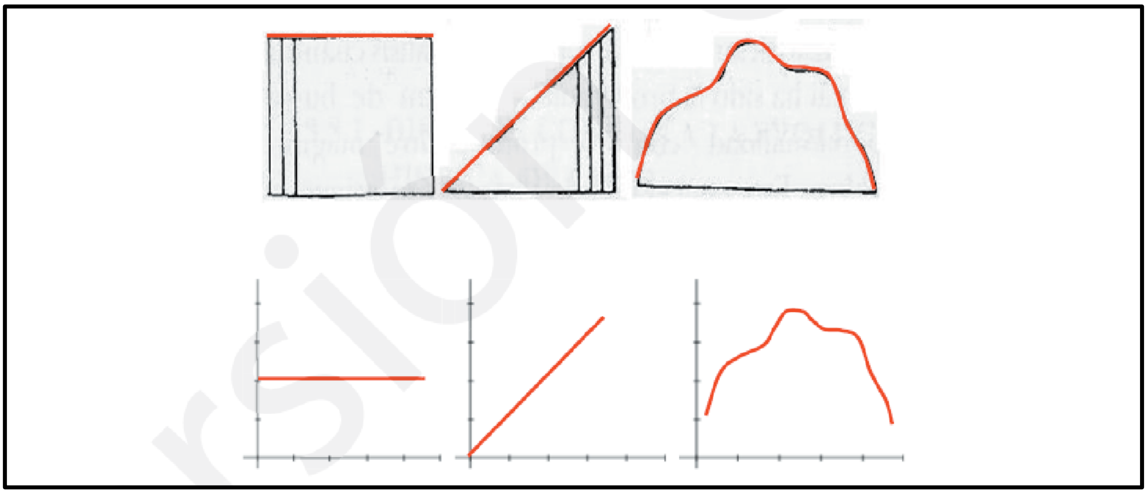


Figura 10. La gráfica antecede a la función (Cordero et. al., 2010, p. 323)

En el Momento 2 los estudiantes consideraron que los puntos de la gráfica de la función son los que "están en la curva"[3] y en el cuadrante I. Esto les lleva a ingresar como respuesta el 8 y la PAM le brinda la devolución ya presentada en la Figura 6. Esto da muestras de que los estudiantes *resignificaron la gráfica* ya que pasan de considerar que sus puntos son los de la Zona A a que son los de la curva en el cuadrante I.

En este momento los estudiantes del equipo presentan evidencias de *evolución en el uso de la gráfica* pasando del *uso envoltura* al *distribución de puntos*. El funcionamiento de la gráfica que ponen en juego los estudiantes es determinar el valor de x (positivo) que verifica que (x;3) pertenece a la gráfica y las formas de la gráfica son considerar el (0;3) y el semieje positivo de las abscisas, intersectar la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece (0;3) con la gráfica (en el cuadrante I), proyectar el punto de intersección sobre el eje de las abscisas; los estudiantes presentan muestras de ello tocando en la pantalla como se muestra en la Figura 11.

[3] En palabras de los estudiantes.

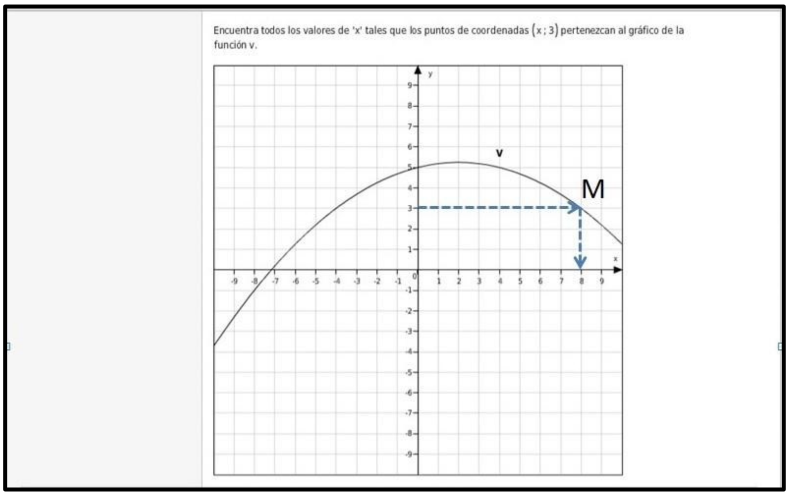


Figura 11. Pre imagen de 3
Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)

En el Momento 3 se mantiene el uso de la gráfica distribución de puntos asociado a nuevas formas y funcionamientos de ésta. En este momento la gráfica les funciona para determinar, considerando “la altura”, que 8 verifica que (*x*;3) pertenece a la gráfica. Expresan que “8 tiene altura 3”, por lo cual es la solución al problema. Las formas de la gráfica que ponen en juego en este momento son: determinar el 8 en el eje de las abscisas, intersectar la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenece (8;0) con la gráfica, determinar el punto M (Figura 12) y proyectarlo sobre el eje de las ordenadas. Esta estrategia, sumada a la del momento anterior, les lleva a ingresar como respuesta 8, y la PAM les brinda la devolución presentada en la Figura 6.

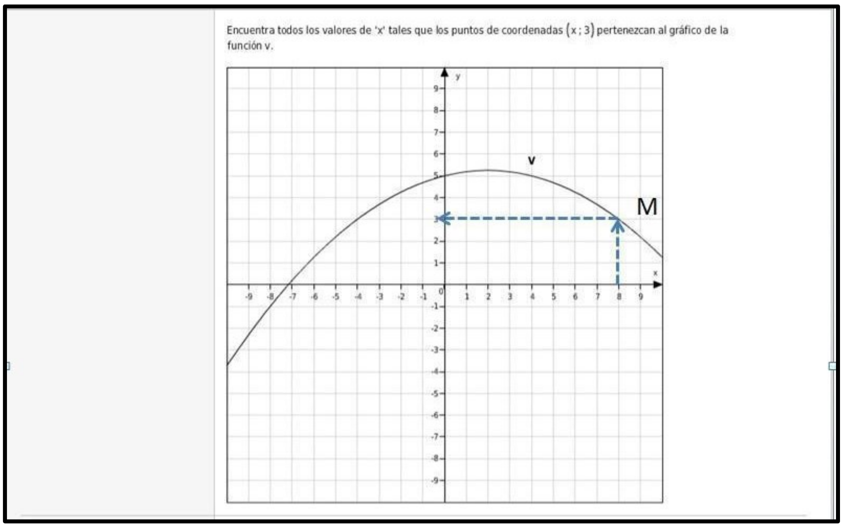


Figura 12. Imagen de 8
Nota: Captura de Pantalla PAM modificado (2019)

En el último momento, Momento 4, los estudiantes mantienen la estrategia de determinar “la altura de puntos” (en particular de los enteros). Se mantiene el uso de la gráfica *distribución de puntos.* El cual tiene asociado el funcionamiento de determinar qué otros valores de *x* verifican que (*x*;3) pertenece a la gráfica; y las formas: determinar enteros representados en el eje de las abscisas, considerar la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenecen, considerar (0;3) y la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece, luego intersectar las dos líneas de la cuadrícula antes mencionadas y observar si ese punto pertenece o no a la gráfica. Esta estrategia les permite que algunos enteros que no cumplen la condición requerida y que el -4, además de 8, la cumple.

La Figura 13 representa el *desarrollo de los usos de la gráfica* que han realizado los estudiantes de este equipo, lo que indica la *resignificación de la gráfica* que estos estudiantes han realizado al buscar dar respuesta a la actividad *Gráficas en PAM*. También se muestra la evolución de usos de la gráfica de la cual han dado muestras estos estudiantes, al pasar del uso de la gráfica (envoltura) a otro (distribución de puntos). En la Tabla 2 se presentan los *funcionamientos* y *formas de la gráfica*, que ponen en juego los estudiantes en los distintos momentos, los cuales determinan distintos usos de ella.

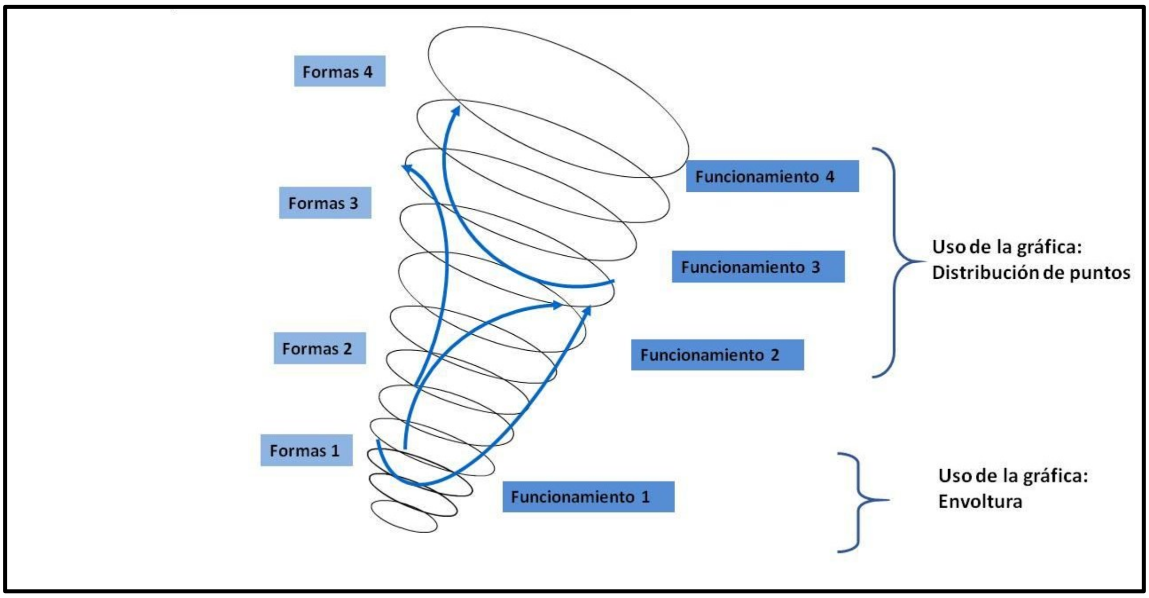


Figura 13. Desarrollo del uso de la gráfica. Resignificación de la gráfica
Nota: Idea de espiral tomada de Suárez (2014, p. 98)

Uso de la gráfica	Funcionamientos	Formas
Envoltura	Determinar los puntos de ordenada 3 con abscisa positiva que están debajo de la curva.	Considerar el (0,3). Considerar el semieje positivo de las abscisas. Considerar la concavidad negativa de la gráfica y su trazo continuo. Tocar puntos de ordenada próxima a 3 y abscisa positiva que están debajo de la curva. Tocar puntos de ordenada 3 y abscisa positiva que están debajo de la curva.
		Considerar la línea horizontal de la cuadrícula a la que pertenece (0;3).
Distribución de puntos	Determinar el valor de x (positivo) que verifica que (x;3) pertenece a la gráfica	Considerar el (0,3) y el semieje positivo de las abscisas. Intersectar la línea la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece (0;3) con la gráfica (en el cuadrante I), M. Proyectar M sobre el eje de las abscisas. Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas antes detalladas.
	Determinar si 8 verifica que (x;3)	Considerar el 8 del eje de las abscisas y la línea

	pertenezca a la gráfica	vertical (de la cuadrícula a la que pertenece (0,8)). Intersectar la línea vertical; de la cuadrícula a la que pertenece (0,8); con la gráfica (M). Proyectar M sobre el eje de las ordenadas. Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas detalladas.
	Determinar valores del eje de las abscisas que verifiquen que (x;3) pertenezca a la gráfica	Considerar distintos enteros del eje de las abscisas y la línea vertical (de la cuadrícula) a la que pertenecen. Considerar (0;3) y la línea horizontal (de la cuadrícula) a la que pertenece. Intersectar las dos líneas antes mencionadas y observar si dicho punto pertenece o no a la gráfica. Tocar en la pantalla dando muestras de la puesta en juego de las formas detalladas.

Tabla 2. Evolución del uso de la gráfica

4. Conclusión

La presente investigación aportó al marco teórico elementos para la categorización de usos de la gráfica, al detectar un uso no reportado en la bibliografía consultada, al que llamé *envoltura*. Así como formas y funcionamientos específicos de la gráfica asociados al uso distribución de puntos. Se presentaron muestras de que, eligiendo adecuadamente una actividad de PAM, se puede desarrollar el uso de la gráfica y su resignificación.

Dada la situación sanitaria por Covid-19 a nivel mundial, el pasaje que se hizo de la enseñanza presencial a la virtual, y la relevancia que pasaron a tener plataformas como PAM, considero que los resultados acá presentados pueden ser valiosos para los docentes a la hora de planificar sus clases. Los elementos que dieron fuerza a este estudio surgen de la interacción de los estudiantes con la plataforma, con la devolución que les brindó, y las interacciones entre ellos, al exteriorizar sus creencias, al argumentar. De acá la importancia, para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, de que los docentes generemos ambientes (virtuales o no) propicios para el desarrollo del pensamiento matemático; promoviendo la argumentación de las respuestas, la confrontación de las ideas, la creación de hipótesis, el desarrollo del conocimiento en uso.

4. Referencias bibliográficas

Arias, E., Rieble-Aubourg, S., Álvarez, H., Rivera, M., Viteri, A., López, A., Pérez, M., Vásquez, M. Bergamaschi, A., Ortiz, M., Gerrero, M. y Viteri, A., Banco Interamericano de Desarrollo (2020). La educación en tiempos del coronavirus: Los sistemas educativos de América Latina y el Caribe ante COVID-19.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa S.A.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*, (1), 7-38.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, An International Journal*, *75* (2), 213-234.

Goos, M. (2005). A Sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teachers pedagogical identities as users of technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 35-59.

Hoyles, C., & Lagrange, J. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17th ICMI Study*. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Julie, C., Leung, A., Chi Thanh, N., Posadas, L., Sacristán, A., y Semenov, A. (2010). Some Regional Development in Access and Implementation of Digital Technologies and ICT. En C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17th ICMI Study*. (pp. 361-384). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Montiel, G., & Buendía, G. (2011). *Propuesta metodológica para la investigación Socioepistemológica*. Memoria de la XIV Escuela de invierno en Matemática educativa. 443-454

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J.M. (2002). Development of Pre-Service Mathematics Teachers' Professional Knowledge and Identity in Working with Information and Communication Technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 93-115 https://doi.org/10.1023/A:1015892804607

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M. Moreno, L. & Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shapping of Digital Technologies on the Learning -and Learning Trajectories- of Mathematical Concepts. En C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17th ICMI Study* (pp.179-226). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Sinclair, N., Arzarello, F., Trigueros, M., Lozano, M., Dagiene, V., Behrooz, E., & Jackiw, N. (2010). Implementing Digital Technologies at a National Scale. En C.

Hoyles & J. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. 17th ICMI Study*. (pp.61-80). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ediciones Díaz de Santos.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 13* (4-II), 319-333.

Testa, Y. (2020). Usos de las gráficas cartesianas en el contexto de una Plataforma Adaptativa de Matemática. [Tesis de doctorado, 2020, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México, tesis no publicada]

Testa, Y., y Suárez, L. (2019). Los profesores uruguayos ante la implementación de la Plataforma Adaptativa de Matemática para aprender y enseñar matemática. *Educar em Revista, 35* (78), 105-129. https://revistas.ufpr.br/educar/issue/view/2622/showToc

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC, 3* (5), 73-94.

Yacir Testa. Profesora de Matemática y de Didáctica de Matemática. Doctora en Matemática Educativa. prof.yacirtesta@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-8629-4895, Uruguay.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1- 19

El cine como contexto para hacer matemática en la formación inicial de profesores
Cinema como contexto para fazer matemática na formação inicial de professores

Cristina Ochoviet, Verónica Molfino, Daniela Pagés, Valeria Schaffel

Fecha de recepción:29/11/2021
Fecha de aceptación: 22/12/2021

Resumen	¿Qué contextos son propicios para diseñar tareas que promuevan procesos matemáticos genuinos en la clase de matemática? Generalmente, la respuesta a esta pregunta menciona la palabra "realidad". En este artículo problematizamos su significado, y cuestionamos si es posible que realidades ficcionales, como el cine, sean contextos adecuados para favorecer el aprendizaje de matemática, especialmente en el ámbito de la formación de profesores. Presentamos el diseño de una tarea y el análisis de producciones de estudiantes de primer año de la carrera, en términos de los modelos que logran crear y las fases del ciclo de modelación que transitan en la resolución. **Palabras clave**: Formación de profesores, realidad, contextos de ficción, modelación, cine.
Abstract	Which contexts are conducive to designing tasks that promote genuine mathematical processes in mathematics class? Usually, the answer to this question includes the word "reality". In this article we problematize its meaning, and we question whether it is possible that fictional realities, such as movies, are adequate contexts to favor the learning of mathematics, especially in the ambit of teacher training. We present the design of a task and the analysis of the productions of prospective teachers studying first year courses, in terms of the models that they manage to create and the phases of the modeling cycle that pass through the resolution. **Keywords**: Teacher training, reality, fictional contexts, modeling, movies.
Resumo	Que contextos são propícios para projetar tarefas que promovem processos matemáticos genuínos na aula de matemática? Geralmente, a resposta a esta pergunta menciona a palavra "realidade". Neste artigo problematizamos seu significado e questionamos se é possível que realidades ficcionais, como o cinema, sejam contextos adequados para favorecer a aprendizagem da matemática, especialmente no campo da formação de professores. Apresentamos a proposta de uma tarefa e a

análise das produções dos alunos do primeiro ano do curso, ao nível dos modelos que conseguem criar e das fases do ciclo de modelação que passam pela resolução.
Palavras-chave: Formação de professores, realidade, contextos ficcionais, modelação, cinema.

1. Introducción

En la búsqueda de contextos para las situaciones problemáticas que se proponen en el aula, es frecuente que los profesores elijan aquellas que se corresponden con la vida cotidiana o con la vida real, por creer que facilitan el aprendizaje de la matemática o para mostrar a los estudiantes que las matemáticas son útiles en el día a día, y por ello hay que estudiarlas y aprenderlas. En procura de contextualizar las tareas que se ofrecen a los estudiantes, muchas veces se proponen contextos insensatos (Alsina 2007; Spira, 2008), esto es, situaciones que resultan absurdas porque los vínculos con la vida cotidiana son forzados. Estas situaciones tienen en los estudiantes un efecto totalmente contrario al que se desea, pues refuerzan la idea, bastante extendida entre los alumnos, de que las matemáticas son, en efecto, inútiles. Lejos estamos de entender a la matemática como una disciplina utilitaria (Ogawa y Fujiwara, 2017) o de tomar una postura simplista creyendo que la matemática se comprende mejor si se propone en situaciones contextualizadas. Sin embargo, consideramos que hay contextos que pueden resultar interesantes por las posibilidades que brindan para la modelación matemática y porque al estar planteados en el plano de la ficción, nos ponen a resguardo de las contextualizaciones insensatas. Esto es posible al considerar, por ejemplo, el cine como un campo en el que pueden germinar problemas desafiantes para la enseñanza de la matemática.

En definitiva, argumentaremos que muchas de las situaciones contextualizadas que pretenden mostrar a los alumnos la matemática en la vida cotidiana o en el mundo real, son una ficción. Y en el plano de la ficción, como veremos, podremos encontrar situaciones matemáticas desafiantes y otras no tanto. Con esto queremos enfatizar en que no es el llamado contexto de la vida real lo que puede atraer a los alumnos a la matemática sino la potencia de las situaciones que les ofrezcamos, aún en el plano ficcional.

En este trabajo presentamos, en primer lugar, una discusión acerca del concepto de realidad y su empleo para plasmar contextos. Luego, discutimos algunas ideas relativas a la realidad de ficción, en contraposición a ideas como “contexto de la vida real”, “matemática del día a día”, o “matemática de la vida cotidiana”, y presentamos un ejemplo del uso de una escena de la película *Alicia en al País de las Maravillas* dirigida por Tim Burton como contexto para la formulación de un problema. Más adelante desarrollamos una conceptualización de modelación matemática, y una manera de describirla, mediante el ciclo de modelación de Blum y Borromeo Ferri (2009). Por último, presentamos algunas estrategias utilizadas por un grupo de estudiantes del primer año de la carrera de Profesor de Matemática en Uruguay al resolver ese problema, con el fin de que pueda apreciarse el valor de una situación en contexto fantástico como promotora de procesos matemáticos genuinos. Los estudiantes trabajaron durante todo el año lectivo 2021 en una plataforma Schoology de Plan Ceibal y lo que reportamos es fruto de ese trabajo en línea.

2. Realidad y contexto

Qué es la realidad es una de las grandes preguntas de la filosofía y como en todo gran asunto filosófico no hay una respuesta sencilla, acabada y única. En este trabajo no pretendemos hacer un recorrido por todas las posibles formas de abordar este concepto, sino que nuestra intención es problematizar especialmente el concepto de "realidad" que está en juego al proponer problemas matemáticos para la enseñanza.

Parece evidente que cuando hablamos de problemas contextualizados en situaciones cotidianas estamos hablando de problemas que involucran la "realidad". Pero ¿qué estamos entendiendo por realidad? Y Sobre todo ¿qué valor didáctico tiene presentar problemas matemáticos en estos contextos?

Alsina (2007) destaca el valor de trabajar la modelización en el aula y entiende modelizar como "estructurar el contexto, matematizar..." (p. 92). En este sentido los problemas en contextos reales tienen el inmenso valor de que permiten trabajar la modelización. Alsina entiende realidad como todo lo vinculado a la naturaleza, la sociedad y la vida cotidiana; sin embargo, a los efectos de modelizar ¿no podremos ampliar esta noción de realidad? ¿No podrían las ficciones literarias o cinematográficas conformar una realidad?

El término "ficción" proviene del latín, del verbo *fingo*, que casualmente significa "modelar". ¿No podremos modelar matemáticamente realidades ficcionales? Incluso ¿no podríamos decir que las ficciones también conforman una realidad por más que esto exceda la definición con la que propone trabajar Alsina (2007)? Quienes disfrutamos de las ficciones cinematográficas o literarias probablemente tengamos la intuición de que estas creaciones tienen la capacidad de generar sensaciones tan reales como cualquier otra. Entonces, ¿por qué estas ficciones no serían reales? Existe una rama de la filosofía contemporánea, conocida como "filosofía de la ficción", encargada de teorizar sobre este asunto. El filósofo español García-Carpintero (2016) argumenta que las ficciones tienen valor cognitivo, que son fuentes de verdad; esto significa que se puede producir conocimiento valioso a partir de la realidad ficcional. En ese sentido, aprender matemática a partir de una obra de ficción ¿no estaría tan vinculado a la realidad como hacerlo a partir de una situación denominada como de la vida cotidiana?

En el siglo XX se da en la filosofía lo que se conoce como el giro lingüístico. Se pone de manifiesto que todo conocimiento está mediado por lenguaje y que, por lo tanto, para pensar acerca de la realidad, sea lo que sea que entendamos por esta, debemos atender al lenguaje.

Tradicionalmente se entendía que, por un lado, estaba el universo de las cosas (o la realidad) y, por otro, el del lenguaje, que tenía por objetivo dar cuenta de las cosas. Foucault (1966) cuestiona que exista tal separación. Entiende que no hay discursos neutros y separados de la realidad, plantea que las propias prácticas discursivas conforman una realidad. Por ejemplo, la palabra "número" no significaba lo mismo en la antigüedad que en la modernidad, hay todo un entramado cultural que lleva a que ese concepto se signifique de determinado modo en cada contexto histórico. ¿Cómo se relaciona esto con las ficciones? Que ya no es tan claro que no sean realidades. La realidad está mediada por el lenguaje o, parafraseando a Heidegger (2005), solo hay mundo donde hay lenguaje. Cuando nos referimos a la vida cotidiana, a esa que no dudaríamos en llamar realidad, nos estamos refiriendo a la construcción lingüística que hacemos de ella. No deja de ser una narración como lo es un cuento o una película. Entonces, ¿por qué plantear problemas sobre compras en un supermercado cuando podemos hacerlo sobre historias fantásticas? Cada docente seleccionará aquellos contextos que considere más valiosos para sus estudiantes, pero nos interesa mostrar lo limitante que puede resultar elegirlos en función de la creencia fuertemente instalada de que lo cotidiano, *per se*, será más significativo para los alumnos. Una compra en el supermercado es tan ficcional como puede ser una escena de una película planteada en un universo fantástico y, sin duda, esta última puede resultar mucho más estimulante. No es el carácter cotidiano que tenga el contexto lo que hará que las situaciones matemáticas que planteamos sean valiosas para los estudiantes.

2.1. Situaciones matemáticas y contexto

Diferentes organizaciones, como NCTM (1991), señalan que es necesario formar ciudadanos que puedan comprender información compleja dado que las sociedades democráticas requieren que los ciudadanos tomen decisiones políticas y sociales, y ello exige "un electorado culto y bien informado" (p. 5). La NCTM (2000) recomienda que la educación matemática de los estudiantes esté orientada al uso de la matemática en situaciones de la vida cotidiana y, en particular, menciona las situaciones laborales. Así, los docentes, los libros de texto y los recursos didácticos han puesto el foco en ofrecer a los alumnos situaciones contextualizadas, que comúnmente se denominan problemas de la vida real, con el objetivo de mostrar al estudiantado "cómo la matemática se presenta en situaciones reales" (CES, 2010, p. 1), tal como lo recomienda, por ejemplo, el programa de primer año de enseñanza secundaria en Uruguay.

Ya en los años 70 del siglo pasado, surge en Holanda la corriente denominada Educación Matemática Realista (EMR) a partir de las ideas fundantes de Hans Freudenthal, posicionándose críticamente frente a los enfoques instrumentales de la enseñanza de la matemática que imperaban en ese entonces en las escuelas:

> …hacer matemática (*matematizar*) es más importante que aprenderla como producto terminado. El énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de *algoritmización*, no en el álgebra sino en la actividad de *algebrizar*, no en las abstracciones sino en la acción de *abstraer*, no en la *forma y la estructura* sino en *formalizar y estructurar*. (Bressan, Zolkower y Gallego, 2005, p. 74)

Y la posibilidad de recuperar el verbo a partir del sustantivo, tal como remarcan las autoras haciendo referencia a Freudenthal (1991), se logra proponiendo a los estudiantes situaciones problemáticas contextualizadas que requieran el uso de herramientas matemáticas para organizarlas y resolverlas. De esta manera, tanto la matemática como su aprendizaje surgen de la matematización de la realidad. No obstante, Bressan et al. (2005) subrayan que: "Esto no solo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos” (p. 75) y agrega que Freudenthal también considera contextos a los “puramente matemáticos (contextos desnudos o puros)” (p. 79) que igualmente deben ser significativos para los estudiantes y sugiere presentarlos como juegos o desafíos. Beswick (2011) clarifica esta idea señalando que los contextos realistas en el enfoque de la EMR no están restringidos al mundo real o a la vida cotidiana sino que abarcan contextos fantásticos y también los matemáticos como ya se mencionó; agrega que lo importante es que “sean situaciones que los estudiantes puedan imaginar” (p. 370). En conclusión, lo relevante de los contextos es que resulten significativos para los estudiantes ya sea porque se vinculan a lo cotidiano o porque constituyen desafíos, y estos dos aspectos están, a su vez, vinculados a lo subjetivo.

Con lo avanzado hasta aquí, sin adentrarnos más en los principios de la EMR, deseamos puntualizar, entonces, que los contextos de las situaciones problemáticas pueden referirse a lo real (en el sentido más amplio de este término) y también a lo intramatemático. A su vez, siguiendo a Beswick (2011), argumentaremos que la potencia de una tarea para promover procesos de matematización que den lugar a aprendizajes matemáticos depende de la manera en que está formulada y no únicamente del simple hecho de que esté dotada de un contexto de la vida real.

Esto último lo comentaremos desde el análisis realizado en Beswick (2011), pues existe una idea extendida en el profesorado de que la matemática es más fácil de comprender si se presenta en un contexto no puramente matemático, llegando muchas veces al extremo de que, en determinados niveles, como los primeros años de la educación primaria, la posibilidad del contexto intramatemático aparece prácticamente vedada. Beswick (2011) analiza en forma minuciosa y desde diversidad de perspectivas los beneficios de utilizar tareas contextualizadas. La autora concluye que “el entusiasmo por los problemas contextualizados parece estar por delante de la evidencia de su eficacia” (p. 387). Agrega que los contextos pueden ser útiles para proponer tareas desafiantes, pero que se debe cuidar que estos contextos no entorpezcan ni opaquen la comprensión. Beswick señala que aún queda mucho por investigar acerca del uso de los contextos y su incidencia en el aprendizaje, así como de los efectos en el aprendizaje de la dimensión afectiva que se moviliza al trabajar en los distintos contextos.

2.2. El cine como contexto

Según Sorando (2015) el cine ofrece variados escenarios que pueden ser reales o fantásticos. Nos permite “imaginar que vivimos las vidas de otros” (p. 11). Esto refuerza lo planteado en secciones anteriores en cuanto al cine como contexto. El cine es una invitación a imaginar una realidad sobre la que puede ser valioso trabajar matemáticamente, sin importar si no refiere a lo que tradicionalmente se entiende por realidad. La historia que se presente para trabajar estará cargada de sentido en tanto ofrezca una lógica que se articule con la situación problemática planteada. Según este autor, el cine proporciona “lenguaje y metáforas” (p. 12) y esto es lo que cierra “el triángulo cine-realidad-matemáticas” (p. 12).

Desde estos presupuestos, partimos de una escena de la película *Alicia en el país de las maravillas* dirigida por Tim Burton para proponer una pregunta a futuros profesores de matemática. Una vez que Alicia bebe un poco de líquido y se achica, ya no puede alcanzar la llave que quedó encima de la mesa (minuto 1:50 de la escena accesible en https://bit.ly/3FnyzIF). La pregunta que les formulamos fue la siguiente: ¿Cuánto debería crecer Alicia para quedar de la altura de la mesa? Esta cuestión no constituye un problema de la vida cotidiana ni de la vida real, pero sí es una pregunta genuina en el contexto de la historia y la situación que vive Alicia. En ese momento configura un problema para el personaje en el contexto de la escena. Como veremos en las próximas secciones, esta pregunta, en apariencia muy simple, dio lugar a un intenso trabajo matemático a los efectos de poder modelar la situación de la escena y ofrecer respuestas razonables en el contexto planteado. Esta actividad permitió a los futuros profesores una experiencia que los llevó a concluir que resolver situaciones problemáticas no se reduce a aplicar fórmulas preestablecidas sino que se trata de crear relaciones y modelos, y de este modo hacer matemática. Entendemos que esto tiene un inmenso valor, especialmente para alumnos que recién ingresan al profesorado, ya que suelen llegar con concepciones tradicionales de la enseñanza de la matemática, y actividades como esta permiten cuestionarlas.

3. Modelación y educación matemática

Tal como señalan Villa-Ochoa, Bustamante y Arboleda (2010), la palabra modelación tiene múltiples interpretaciones, podemos pensar en la “modelación de una buena práctica de enseñanza o de la comprensión de los estudiantes” (p. 1087). También podemos pensar en la modelación en el ámbito artístico. Si bien en este contexto estamos hablando de modelar matemáticamente, nos interesa señalar que esto no dista tanto de lo que sucede en ámbitos artísticos como la pintura, o al menos en la pintura figurativa. El pintor observa aquello que va a representar, extrae lo que le resulta relevante y lo pinta presentando un modelo simplificado de lo que observó. La creación del pintor aporta un valor agregado a la mera observación de la realidad ya que permite hacer foco en aquello que el artista eligió. Análogamente, en la actividad matemática hay un trabajo creativo que lleva a modelar la realidad seleccionando aspectos relevantes para presentar una matematización de la realidad que enriquece su comprensión.

Blum y Borromeo Ferri (2009) definen la competencia de modelar como la habilidad de construir modelos siguiendo ciertos pasos de forma apropiada, así como de analizar o comparar modelos dados. Siguiendo a Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo (2009), llamamos modelo matemático “a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p. 162). En el siguiente esquema se aprecian los pasos y el ciclo de la modelación:

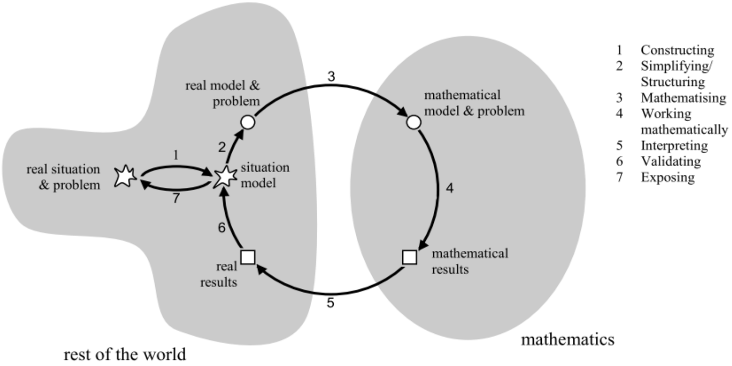


Figura 1. Ciclo de modelación (Blum y Borromeo Ferri, 2009, p. 46)

Es decir que la modelación involucra varias prácticas que conforman un ciclo entre la “realidad” y las matemáticas: (1) Construir un modelo a partir de la situación dada, extraída de una “situación real”, (2) Simplificar y estructurar el modelo, identificar los datos necesarios, (3) Matematizar identificando o construyendo el modelo matemático requerido para resolver la situación, (4) Trabajar matemáticamente: manipular símbolos, operar, calcular, construir, entre otras prácticas matemáticas requeridas, (5) Interpretar la respuesta obtenida a la luz del contexto dado originalmente, (6) Validar esas respuestas y (7) Exponer la o las respuestas obtenidas.

A partir de lo discutido en las secciones anteriores, proponemos ampliar la noción de “situación real”, entendiendo también como reales los relatos ficticios.

Trigueros (2009) sostiene que en educación matemática hay varias maneras de entender la modelación, en una de ellas los estudiantes primero aprenden un contenido en una situación sin contexto y después se les propone un problema en un contexto “real” para que apliquen ese conocimiento. En la perspectiva que propone la EMR, “el contexto funciona como la fuente del proceso de aprendizaje” (p. 78). A medida que abordan la situación problema, los estudiantes van desarrollando las herramientas y conocimiento matemáticos necesarios para resolverla, lo que es llamado, en EMR, el paso del “modelo de” al “modelo para”.

Adoptaremos esta última manera de entender la modelación, según la cual los estudiantes son partícipes activos de la construcción de conocimiento matemático, a partir de contextos genuinos, significativos para ellos y de una propuesta desafiante a resolver.

4. Actividad propuesta. Análisis y discusión de las respuestas de los estudiantes de profesorado

Se presentó la siguiente tarea a estudiantes de profesorado de matemática, en la asignatura Introducción a la Didáctica, del primer año de la carrera, a través de una plataforma Schoology, para realizar en duplas. Una vez resuelta, la tarea se debía entregar por escrito.

1. Realicen el visionado de un fragmento de la película Alicia en el país de las maravillas, accesible en: https://bit.ly/3FnyzIF

2. Alicia se achicó y la llave quedó sobre la mesa (minuto 1:50), ¡imposible alcanzarla! ¿Cuánto debería crecer Alicia para quedar de la altura de la mesa?

Presentamos las resoluciones de los estudiantes por duplas, ejemplificando con aquellas que consideramos ilustran la diversidad de procedimientos empleados. Es importante destacar que en forma previa no se abordó ningún tema matemático en particular. Es decir, los alumnos resolvieron la tarea con base en sus conocimientos previos, y en lo que pudieron elaborar trabajando en equipo y consultando los materiales que entendieron pertinentes.

Grupo 1

Extraen de Internet la altura de la actriz que interpreta a Alicia que es de 1,63 metros. Suponen que la mesa se agrandó, y por lo tanto mide más de 1,63 metros. Utilizan también las proporciones de Vitruvio, concretamente, que la altura total de la actriz es igual a la longitud de los dos brazos extendidos y que la cabeza mide un octavo de la altura. Muestran la siguiente imagen, correspondiente al minuto 2:34 del fragmento.

Figura 2. Minuto 2:34 del fragmento de *Alicia en el país de las maravillas*.

Con estos datos, calculan la medida de un brazo de Alicia menos su cabeza, que es lo que agregan a la altura para determinar la medida de la mesa. Así, concluyen que la mesa debe medir 2,25 metros. Luego recurren a la siguiente imagen:

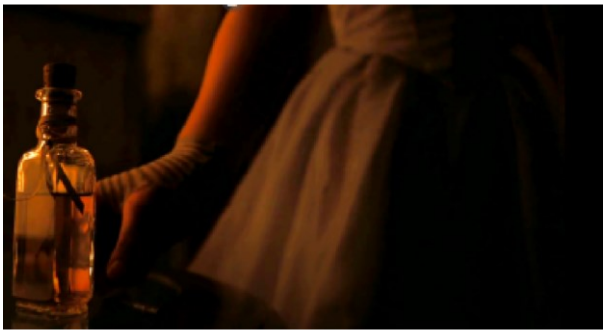


Figura 3. Minuto 1:32 del fragmento de *Alicia en el país de las maravillas*.

Los estudiantes establecen que, en ese momento, la mesa le llega a Alicia, en su estatura normal, a la altura de las rodillas. Consideran la relación del hombre de Vitruvio: “desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte”. Calculan un cuarto de la altura de la actriz y utilizan una aproximación de ese resultado para la altura de la mesa. Con los resultados obtenidos, la altura de la mesa si esta hubiera crecido (2,25 m) y la altura de la mesa de acuerdo a la imagen anterior (0,50 m), determinan que el segundo número es el 22,2% del primero. De aquí deducen que Alicia decreció un 22% al tomar la poción. Entonces calculan el 22,2% de la diferencia entre un brazo extendido y la cabeza (mediante regla de tres) y concluyen que ese resultado (0,14 m) es lo que Alicia debe crecer para alcanzar la mesa, para el caso en que la mesa sea de 0,50 m de altura.

Podemos inferir que este grupo, en una primera instancia, analizó la situación presentada en el episodio, determinó los momentos del fragmento a tomar como referencia y buscó informaciones como la altura de la actriz, así como relaciones de proporcionalidad entre distintas partes del cuerpo. Esta etapa correspondería a la construcción del modelo, de acuerdo con las fases planteadas por Blum y Borromeo Ferri (2009). La segunda etapa, de simplificación y estructuración del modelo, consistió en determinar que la razón de decrecimiento de Alicia es igual a la razón de crecimiento de la mesa, tomando como referencia las dos imágenes consideradas, de Alicia pequeña y Alicia de altura normal. La matematización consistió en los cálculos de las alturas de la mesa en los dos momentos, la razón entre ellas y el uso de dicha razón para hallar la altura de Alicia pequeña y establecer luego cuánto debía crecer. Consideramos que este grupo no realizó la etapa de validación, pues se limitaron a dar la respuesta y no analizaron su confiabilidad.

Grupo 2

Comienzan considerando la imagen del minuto 2:34 del fragmento (figura 2). Establecen que la distancia que le falta crecer a Alicia para que su cabeza esté a la altura de la mesa es la medida de su antebrazo y su mano. Utilizan dos imágenes, una del Hombre de Vitruvio y otra de proporciones del cuerpo de una mujer (figura 4), a partir de las que afirman que la longitud del antebrazo más la mano es igual a la cuarta parte de la altura total.

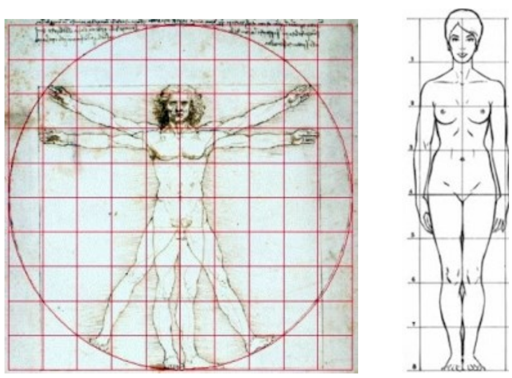


Figura 4. Hombre de Vitruvio y proporciones del cuerpo de una mujer.

De aquí deducen que Alicia debe crecer el 25% de la altura que tiene en ese momento.

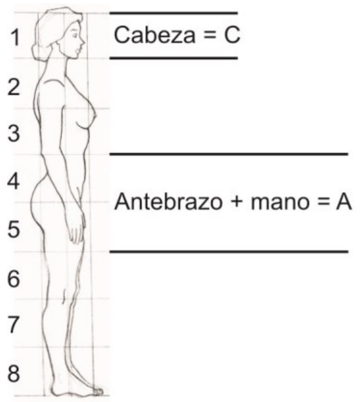
Sin embargo, luego agregan otros datos para refinar la solución. Toman en cuenta la altura de la actriz que representa a Alicia, extraída de Internet, la relación de la altura de Alicia, antes de achicarse, con la altura de la mesa (en el minuto 1:32) y las proporciones del cuerpo de una mujer según la figura 4. Deducen que la altura de la mesa es tres octavos de la altura de la actriz y con esa relación calculan la altura de la mesa (61 cm). Toman 61 cm como la suma de la altura de Alicia pequeña más un cuarto de dicha altura. De ahí deducen que Alicia debe crecer 13 cm para alcanzar la mesa.

Este grupo comienza abordando el problema solo a partir de la imagen del minuto 2:34 (figura 2) con Alicia pequeña y utilizan las proporciones del cuerpo humano para deducir qué porcentaje de su altura debe crecer Alicia. Luego, vuelven a considerar la situación con el objetivo de obtener resultados más exactos. Para esto toman como dato la altura real de la actriz y la razón entre la altura de Alicia normal y la mesa, lo que les permite calcular su altura. El modelo que construyen utiliza las proporciones del cuerpo humano, así como la igualdad de razones entre la altura de Alicia y de la mesa en las dos situaciones.

Al igual que el grupo 1, este grupo no realizó una validación de sus respuestas, aunque observamos un refinamiento en la solución, que puede interpretarse como una repetición de parte del ciclo (Blum y Borromeo Ferri, 2009).

Grupo 3

Los estudiantes de este grupo utilizan las mismas proporciones que los del grupo 2, aunque agregan que experimentaron con las medidas de sus cuerpos para comprobarlas. Presentan la siguiente imagen (figura 5).



A = longitud del antebrazo + mano estirada
H = altura de Alicia estado inicial
C = longitud de la cabeza

Entonces:
H = 8C
A = 2C
H = 4A

Figura 5. Proporciones en el cuerpo femenino.

El razonamiento de este grupo puede visualizarse en la siguiente figura, elaborada por los estudiantes.

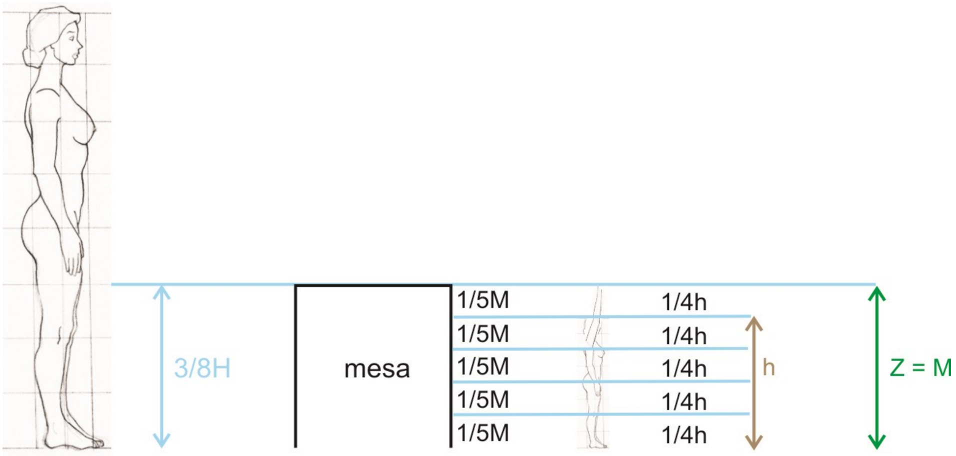


Figura 6. Elaboración del grupo 3.

Los estudiantes de este equipo, sin embargo, expresan algebraicamente las relaciones que muestra la figura y mediante sustituciones llegan a una ecuación que vincula la altura de Alicia pequeña y de tamaño normal. Utilizando la altura de la actriz que representa a Alicia, que extraen de Internet, concluyen que debe crecer 0,12 m para alcanzar la mesa, realizando sustituciones en las razones que establecieron.

En este grupo identificamos la búsqueda de información para resolver el problema, como las proporciones del cuerpo humano y la comprobación de que estas se verifican, utilizando las medidas de sus propios cuerpos. Esto nos invita a pensar en una validación experimental de la información que van a utilizar. Visualizamos esta etapa como de comprensión de la situación o construcción del modelo. La matemática que utilizan es la noción de proporcionalidad y establecen, también, relaciones algebraicas. No observamos que analicen la razonabilidad de la respuesta a la que arriban finalmente.

Grupo 4

Este equipo considera una medida promedio para la altura de la mesa (70 cm). Utilizan, también, las proporciones del Hombre de Vitruvio. Como asumen una medida para la altura de la mesa, para su modelo solo utilizan la proporcionalidad, que analizan en la siguiente imagen (figura 7).

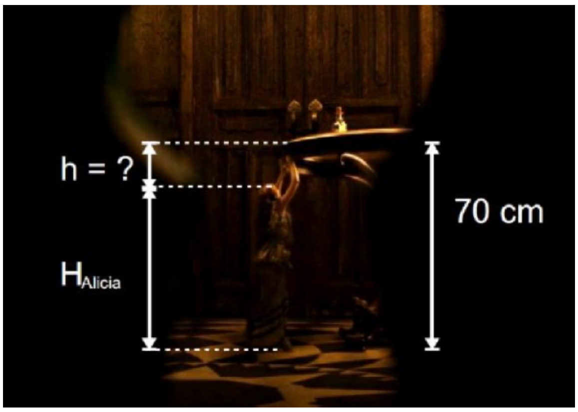


Figura 7. Elaboración del grupo 4 a partir de la imagen.

Plantean una ecuación que expresa la proporcionalidad que determinaron en la que la incógnita es la longitud de la cabeza y, a partir de hallarla, encuentran la altura de Alicia pequeña y cuánto debe crecer.

$$
\begin{array}{ll}
Cuerpo - Cabeza + Brazo = AlturaMesa & \\
8C - C + 3.5C = 70\ cm & \\
10.5 \times C = 70\ cm & \\
C = \dfrac{70\ cm}{10.5} = 6.7\ cm & Donde: \\
H_{Alicia} = 8C = 8 \times 6.7\ cm = 53.6\ cm & C: altura\ de\ la\ cabeza \\
h = 70\ cm - 53.6\ cm & H_{Alicia}: altura\ de\ Alicia \\
h = 16.4\ cm & h: altura\ que\ debe\ crecer\ Alicia
\end{array}
$$

Figura 8. Cálculo presentado por el grupo 4.

El modelo construido por este grupo, a diferencia de los anteriores, no incluye la igualdad de razones en dos momentos del video (cuando Alicia tiene altura normal y cuando se ha achicado), sino que se concentra en analizar las relaciones de proporcionalidad cuando Alicia tiene tamaño pequeño. Para que este modelo funcione, asumen una medida promedio para la altura de la mesa. En cuanto a la formulación matemática, utilizan una ecuación, a partir de expresar la altura de Alicia y la longitud que debe crecer, en función de la longitud desconocida de la cabeza. Podríamos decir que trabajan con una función afín. Al igual que los grupos anteriores, este equipo da la respuesta en el contexto “real”, pero no realiza la fase de validación.

Grupo 5

Los estudiantes de este grupo también asumen una medida promedio para la altura de la mesa que surge de promediar 70 cm y 75 cm. Es decir, establecen que la mesa mide 72,5 cm. Analizan la imagen del minuto 2:34 (figura 2), sobre la que indican las proporciones que toman.

Figura 9. Elaboración del grupo 5 a partir de la imagen.

Deducen que Alicia debe crecer un cuarto de la altura de la mesa, por lo que dividen 72,5 entre 4 y responden que Alicia debe crecer 18,125 cm para alcanzar la mesa., Este grupo utiliza un modelo de proporcionalidad que determinan a partir de visualizar la imagen (es posible que hayan realizado mediciones sobre la imagen). Su trabajo matemático se reduce a efectuar una división. No realizan la fase de validación.

Grupo 6

Este grupo también asume una altura promedio para la mesa de, en este caso 75 cm. Presentan la siguiente imagen, en la que establecen relaciones entre las distintas alturas.

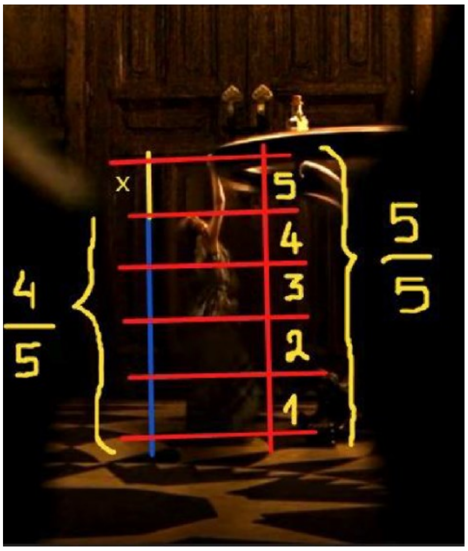


Figura 10. Elaboración del grupo 6 a partir de la imagen.

Concluyen que la altura de Alicia pequeña es cuatro quintos de la altura de la mesa.

Tomando como referencia la mesa, podemos apreciar que Alicia mide cuatro quintos en correspondencia a la misma, por lo que debería crecer un cuarto más.

Entonces:
5/5 = 4/5 + x ----> x = 1/5

Es decir, por ejemplo: si la mesa posee una altura de 75 cm (altura promedio de una mesa living-comedor), entonces:

75 = 60 + x
x = 75 - 60
x = 15

75 = 5/5 ----> 60 = 4/5

Figura 11. Elaboración del grupo 6.

Como se observa en la figura 11, se basan en la imagen para plantear una ecuación cuya incógnita es la longitud que debe crecer Alicia. Calculan cuatro quintos de la altura de la mesa y de esto deducen lo que Alicia debería crecer.

El modelo que construye este equipo es esencialmente el mismo que el anterior, solo que difiere en la razón establecida entre la altura de Alicia y la de la mesa. Tampoco validan su respuesta.

Grupo 7

Este equipo asume una altura promedio para la mesa de 72 cm. Observan la imagen del minuto 2:34, y deducen que a Alicia le falta crecer "poco menos que la medida del brazo", que estiman en el doble de la longitud de la cabeza (proporciones del Hombre de Vitruvio). Plantean una ecuación cuya incógnita es la altura de Alicia:

$$x + 2\frac{x}{8} = 72$$

Resuelven la ecuación para determinar la altura de Alicia, y luego calculan dos octavos de ese número para determinar cuánto debe crecer Alicia, dando como respuesta 14,4 cm.

Este grupo recurre a la relación entre la longitud del cuerpo y la de la cabeza en un cuerpo humano, de acuerdo al Hombre de Vitruvio. Su modelo incluye como dato la altura de la mesa y la observación de la imagen para determinar lo que Alicia debe crecer, en términos del número de cabezas. Calculan la altura de Alicia pequeña y luego la cuarta parte de esta. No realizan la fase de validación de su respuesta.

Grupo 8

Este grupo basa su razonamiento en la siguiente imagen.

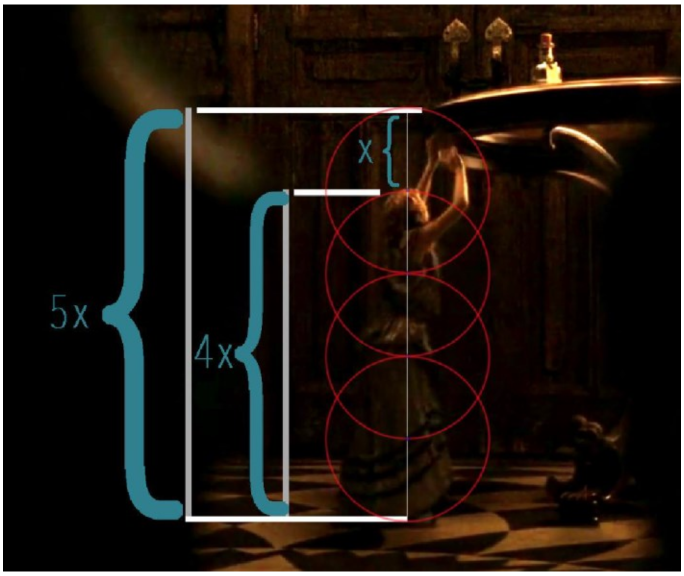


Figura 12. Elaboración del grupo 8 a partir de la imagen.

Llaman *x* a la altura que debe crecer Alicia. Determinan que este número es el radio de una circunferencia tangente a la mesa y cuyo centro es la altura actual de Alicia. Afirman que trasladaron esta medida al cuerpo de Alicia y concluyeron que era un cuarto de su altura total. Deducen que Alicia mide 4*x* y la mesa mide 5*x*.

Utilizan una regla de tres para calcular qué porcentaje de su altura debe crecer Alicia.

$$
\begin{array}{l}
4.x - - - - y \\
5.x - - - - 100\% \\
y = 80\%.
\end{array}
$$

Figura 13. Elaboración del grupo 8.

Responden que Alicia debe crecer 20% de su estatura cuando está pequeña.

Este grupo construye un modelo basado en proporciones que determinan geométricamente sobre la imagen. A partir del recurso de considerar las circunferencias, hallan la relación entre la altura de Alicia y la de la mesa. Su trabajo matemático consiste en considerar circunferencias tangentes exteriormente para determinar, por observación, la razón entre las alturas y efectuar una regla de tres para hallar qué porcentaje de la altura de la mesa es la de Alicia. Finalmente, realizan una resta para obtener la respuesta. En este caso, la respuesta no es una longitud sino un porcentaje de la altura de Alicia, que el grupo no conoce y tampoco determina. No realizan la fase de validación.

Grupo 9

Este equipo acompaña su razonamiento con la siguiente figura.

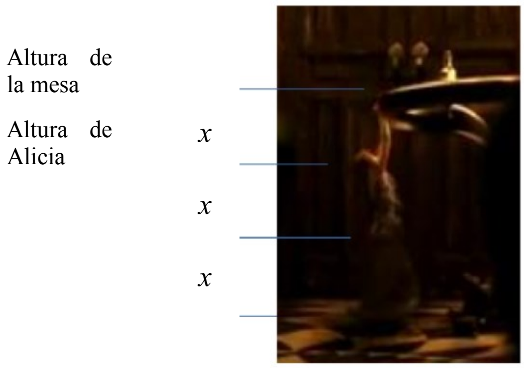


Figura 14. Elaboración del grupo 9 a partir de la imagen.

Comienzan diciendo “por nuestra perspectiva” Alicia debería crecer un medio de su altura o un tercio de la altura de la mesa, para alcanzarla. Llaman y a la medida de la mesa y z a la altura de Alicia, y realizan los siguientes planteos.

$$y - z = x$$
$$3x - 2x = x$$
$$y - 2x = x$$
$$y = 2x \ más \ x$$
$$y = 3x$$
$$y / 3 = x$$
$$z = 2x$$
$$z / 2 = x$$

Figura 15. Elaboración del grupo 9.

No dan una repuesta numérica a la pregunta.

Este grupo parece basarse solo en la visualización de la imagen y la determinación aproximada de la longitud que debe crecer Alicia, en términos de una fracción de su altura o de una fracción de la altura de la mesa. No realizan trabajo matemático ya que las ecuaciones que plantean los conducen a la respuesta que dieron inicialmente. Consideramos que este equipo solo transitó las fases 1, 2 y 3 del ciclo de modelación.

5. Discusión

Observamos que siete grupos transitan las primeras cinco fases del ciclo de modelación (Bloom y Borromeo Ferri, 2009). Es decir, construyen un modelo, lo simplifican o estructuran, lo matematizan, realizan trabajo matemático e interpretan los resultados obtenidos. Dos equipos solo transitan las fases 1, 2 y 3 del ciclo de modelación. Ningún grupo realiza la validación de sus resultados en la situación, ni la exposición final de una respuesta validada como razonable.

Todos los equipos mencionan o utilizan relaciones de proporcionalidad. Sin embargo, podemos agruparlos, de acuerdo al modelo construido, en tres tipos:

Los que buscan datos (la altura de la actriz o la altura de una mesa promedio) y consideran modelos de proporcionalidad en el cuerpo humano. Algunos trabajos de este grupo plantean relaciones de proporcionalidad entre la altura de Alicia y de la mesa en dos momentos, otros solo cuando Alicia se ha achicado. Algunos realizan cálculos matemáticos en el contexto de las razones, otros plantean un modelo algebraico mediante ecuaciones o, implícitamente, una función afín. En particular, un grupo afirma que la mesa pudo haberse agrandado (grupos 1, 2, 3, 4 y 7).

Otros grupos consideran como dato la altura de una mesa promedio, pero estiman las relaciones de proporcionalidad sobre la imagen del minuto 2:34 del fragmento. Con respecto al trabajo matemático, aparecen modelos numéricos con razones y divisiones, y algunas ecuaciones. La mayoría de los grupos realiza construcciones sobre la imagen para determinar las razones buscadas (grupos 5 y 6).

Entre los grupos que no consideran ningún dato adicional, algunos no llegan a dar una respuesta numérica (grupo 9) y uno de ellos da una respuesta porcentual basada en construcciones geométricas (grupo 8).

Si consideramos los tipos de pensamiento planteados por Blum y Borromeo Ferri (2009), podemos decir que el primero de los tipos de trabajos observados presenta una forma de pensamiento más integrada, combinando formas analíticas y visuales en su razonamiento, en tanto los del segundo y tercer tipo presentan un pensamiento más visual, realizando mediciones y estimaciones sobre las imágenes consideradas.

Por último, señalamos que, si bien los estudiantes no realizan una validación al final de la respuesta, el hecho de recurrir a datos de la realidad, como por ejemplo la altura de la actriz o la altura promedio de una mesa similar a la que aparece en la escena, es una manera de ir cotejando, en el proceso, que lo que están hallando tiene coherencia. En un escenario de discusión en foro, tal vez posterior o en una clase presencial, la docente podría haber preguntado por la razonabilidad de las respuestas, lo que podría dar lugar al desarrollo de la fase 7 -exposición- del modelo de Blum y Borromeo Ferri (2009). Sin embargo, esto no fue solicitado en esta oportunidad y las duplas solo entregaron sus razonamientos por escrito. No obstante, observamos que no surge como necesidad de los estudiantes la validación, si no es requerida en forma explícita por el docente.

6. Conclusiones

Los procesos de modelación desarrollados por los estudiantes de primer año de profesorado dan cuenta del potencial que tiene la situación propuesta para hacer matemática. Una situación extremadamente sencilla en su formulación, planteada en el contexto de la escena de una película que presenta un universo fantástico y que no se corresponde, al menos, con el mundo en que vivimos. En este sentido, proponemos ampliar el punto de partida del modelo propuesto por Blum y Borromeo Ferri (2009) que hace referencia a “situación real y problema” (p. 46). Por realidad entienden “el 'resto del mundo' afuera de las matemáticas incluyendo la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas” (Blum y Borromeo Ferri, 2009, p. 45). Sugerimos, entonces, modificar el punto de partida del modelo, ampliando la noción de realidad involucrada en “situación real y problema”. Entenderemos por realidad tanto a los relatos que hacemos sobre “la naturaleza, la sociedad, la vida cotidiana y otras disciplinas científicas”, así como también a los relatos ficcionales, como pueden ser los que provienen de contextos literarios, cinematográficos o artísticos, en general.

Iniciar el trabajo con la proporcionalidad en la formación de profesores a través de situaciones como la que presentamos en este trabajo tiene, a nuestra consideración, mayor potencial que hacerlo a través de abordajes formales que usualmente comienzan por la presentación de las definiciones y propiedades relevantes para pasar luego a la resolución de problemas. En la página web de José María Sorando (https://mathsmovies.wordpress.com/) pueden encontrarse varios ejemplos de películas clasificadas por contenidos matemáticos, entre ellos la proporcionalidad.

La experiencia reportada en este artículo resulta de particular interés para los formadores, para animarlos a instrumentar ambientes de aprendizaje que promuevan los procesos del hacer matemático. Esto permitirá que los futuros profesores enriquezcan su repertorio didáctico a través de la vivencia propia, marcando así una clara línea de trabajo en la que los futuros profesores se forman de manera similar a como luego se espera que trabajen en las aulas de enseñanza media.

Este trabajo pone en evidencia que no son solo los contextos de la "vida real" o los del día a día los que pueden resultar significativos a los estudiantes, y que un contexto de ficción puede resultar de inmenso potencial tanto para hacer matemática como para la formación didáctica de los futuros profesores.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 85–101. Recuperado de: https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a04.pdf

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of ´contextualised´ tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 367-390. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9270-z

Blum, W. y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58. Recuperado de: https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M. F. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia, A. Bressan y P. Sadovsky (Comps.), *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática* (pp. 69–98). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Consejo de Educación Secundaria (CES) (2010). *Programa de Matemática Primer año, Ciclo Básico. Reformulación 2006. Ajustes 2010*. Uruguay: CES.

Foucault, M (1966). *Las palabras y las cosas*. Argentina: Siglo veintiuno ediciones.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

García-Carpintero, M. (2016). *Relatar lo ocurrido como invención: Una introducción a la filosofía de la ficción contemporánea*. Madrid: Editorial Cátedra.

Heidegger, M. (2005). Hölderlin y la esencia de la poesía. En *Aclaraciones a la poesía de Hölderlin* (pp. 37-53). Madrid: Alianza Editorial.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Ogawa, Y. y Fujiwara, M. (2017). *Introducción a la belleza de las matemáticas*. Madrid: Editorial Funambulista.

Sorando, J. M. (2015). *Aventuras matemáticas en el cine*. España: Guadalmazán.

Sorando, J. M. (22 de diciembre de 2021). *100 escenas de cine y tv para la clase de Matemáticas.* Directorio de 100 escenas de cine y tv para la clase de Matemáticas. https://matematicasentumundo.es/CINE/100escenas.htm

Spira, M. (2008). Contextualização ou insensatez? *Revista do Professor de Matemática*, *65*, 14.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75–87. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C. y Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 1087–1096. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/905/1/alme23.pdf

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J. y Ocampo, D. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159–180. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6170694

Autoras:

Cristina Ochoviet: Doctora en Matemática Educativa (CICATA, IPN, México). Se desempeña como profesora de Didáctica de la Matemática (CFE, Uruguay). Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores (SNI, Uruguay). Su línea de investigación es la identidad y el conocimiento del profesor. cristinaochoviet@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9069-3469

Verónica Molfino: Doctora en Matemática Educativa (CICATA, IPN, México). Se desempeña como profesora de Matemática y Didáctica de Matemática en el profesorado de Matemática (CFE, Uruguay). Su línea de investigación principal es la identidad y formación de profesores de Matemática. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores (SNI, Uruguay). veromolfino@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6672-762X

Daniela Pagés: Doctora en Matemática Educativa (CICATA, IPN, México). Se desempeña como profesora de Didáctica de la Matemática (CFE, Uruguay). Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores (SNI, Uruguay). danielapages@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2009-4940

Valeria Schaffel: Profesora de Matemática (Instituto de Profesores de Artigas, Uruguay), Licenciada en Filosofía (Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Udelar). Se desempeña como docente de Matemática en enseñanza secundaria y como docente de Matemática y Filosofía en ÁNIMA bachillerato tecnológico. valeriaschaffel@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4938-8504

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-21

Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação: um modelo para o ensino remoto de Matemática

Rosalide Carvalho de Sousa, Francisco Régis Vieira Alves

Fecha de recepción: 5/11/2021
Fecha de aceptación: 21/12/2021

Resumen	Este trabajo presenta la exploración de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas, utilizando herramientas como: software GeoGebra, Kahoot!, diapositivas, Whiteboard, PhET, WhatsApp y sitios web educativos. El objetivo principal es presentar un modelo de enseñanza a distancia en el que se aproveche el potencial de los TDIC para planificar y ejecutar clases dinámicas e interactivas que fomenten la autonomía del alumno y brinden apoyo a los docentes para la enseñanza de Razones Trigonométricas en Circunferencia. Las clases se llevaron a cabo a través de "Google Meet", con estudiantes de segundo año de secundaria, de una escuela pública en el interior de Ceará, Brasil. **Palabras clave**: TDIC, aprendizaje remoto, enseñanza de las matemáticas.
Abstract	This work presents the exploration of digital technologies in the teaching of Mathematics, using tools such as: GeoGebra software, Kahoot!, animated slides, Whiteboard, PhET, WhatsApp and educational websites. The main objective is to present a remote teaching model in which the potential of TDIC is used to plan and execute dynamic and interactive classes that encourage student autonomy and provide teachers with support for teaching Trigonometric Reasons in Circumference. The classes took place via "Google Meet", with 2nd year high school students from a public school in the interior of Ceará, Brazil. **Keywords**: TDIC, remote teaching, teaching of mathematics.
Resumo	Este trabalho apresenta a exploração das tecnologias digitais no ensino de Matemática, utilizando ferramentas como: *software* GeoGebra, *Kahoot!*, slides animados, *Whiteboard, PhET*, *WhatsApp* e sites educacionais. O objetivo é apresentar um modelo de ensino remoto no qual se utiliza o potencial das TDIC para planejar e executar aulas dinâmicas e interativas que estimulem a autonomia do aluno e proporcione aos docentes, suportes para o ensino de Razões Trigonométricas na Circunferência. As aulas ocorreram via *"Google Meet*", com alunos do 2° Ano do ensino médio, de uma escola pública no interior do Ceará, Brasil. **Palavras-chave:** TDIC, ensino remoto, ensino de matemática.

1. Introdução

Os avanços tecnológicos, frente à educação e a necessidade de implementar metodologias que provoquem mudanças no comportamento de alunos e professores, ganharam ainda mais notoriedade diante da condição de isolamento social, provocada pela pandemia da Covid-19. Desse modo, Marques (2020) ressalta que:

> As mudanças emergentes que ocorreram no processo de ensino frente ao atual contexto da pandemia causada pelo novo coronavírus, levaram a adoção de metodologias, até então, não adotadas por muitos professores em seus ambientes de ensino. O que fez ungir a necessidade de inovação perante o ato de lecionar, buscando alternativas inovadoras para levar conhecimento aos seus alunos, com o intuito, sobretudo, de prover autonomia aos estudantes no seu processo de aprendizagem (Marques, 2020, p. 5).

Mediante esse contexto, a Tecnologia Digital de Informação e Comunicação (TDIC), configura-se como um recurso valioso para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da matemática, pois segundo Braz, Dantas e Gouveia (2015), é nessa disciplina que as tecnologias tem sido desenvolvidas com mais força, privilegiando o docente dessa área, que pode contar com uma série de recursos, como calculadoras, jogos eletrônicos, ambientes virtuais e *softwares* direcionados a construção dos saberes matemáticos.

Assim, neste trabalho, procurou-se explorar as ferramentas digitais, examinando as concepções de um grupo de alunos da educação básica em dois momentos distintos: no primeiro potencializou-se o raciocínio lógico-dedutivo e a visão espacial nas soluções de desafios matemáticos em um *"quizz"*; no segundo, explorou-se a visualização de propriedades e elementos numéricos e geométricos das Razões Trigonométricas na Circunferência. Diante desse interesse, buscou-se responder ao seguinte questionamento: *Como inserir as TDIC no ensino de matemática, de modo a promover um modelo didático-pedagógico que auxilie a compreensão dos conceitos matemáticos e potencialize a autonomia do estudante na construção do conhecimento*?

A partir disso, percebeu-se a necessidade de planejar e executar aulas que possibilitem ao aluno ser o protagonista na apropriação dos saberes, promovendo recursos didáticos que propiciem a reflexão, contextualização e a compreensão de conceitos matemáticos. Para tanto, relacionou-se o uso das TDIC, disponibilizando recursos digitais que permitam estabelecer estratégias de resolução e desenvolver habilidades matemáticas do estudante em Trigonometria.

Nesse sentido, este artigo descreve a experiência de duas práticas pedagógicas, que tem como objetivo apresentar um modelo de ensino remoto em que se utiliza o potencial das TDIC para planejar e executar aulas dinâmicas e interativas que possam estimular a autonomia do aluno, e, subsidiar aos docentes um suporte para o ensino de Razões Trigonométricas na Circunferência.

As aulas ocorreram com alunos do 2° Ano do Ensino Médio, em uma escola da rede pública estadual, localizada no interior do Ceará, Brasil, nos meses de maio e junho de 2021. Os encontros aconteceram via plataforma *on-line* do "*Google Meet*". Para estruturar e organizar as aulas foram utilizados as TDIC, ferramentas como:

software GeoGebra, *Kahoot*!, slides animados, a lousa digital *Whiteboard*, *PhET*, sites educacionais, aplicativos de mensagens do *WhatsApp*, entre outros.

2. As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática

As TDIC, aplicadas ao ensino de Matemática proporcionam aulas dinâmicas e potencializa a relação ensino e aprendizagem. Desse modo é possível, ao professor, produzir uma aula que favoreça a interação oferecida pelos sites, e por programas e *softwares* educacionais, que possibilitam não só aprimorar suas práticas docentes, como também, permitem ao estudante ser um agente mais participativo no processo de apropriação dos saberes matemáticos. De acordo com Chaves (2017):

> O que é particularmente fascinante nas novas tecnologias disponíveis hoje, em especial na Internet, e, dentro dela, na *web*, não é que, com sua ajuda, seja possível ensinar remotamente ou a distância, mas sim, que elas nos ajudam criar ambientes ricos em possibilidades de aprendizagem nos quais as pessoas interessadas e motivadas podem aprender quase qualquer coisa sem, necessariamente, se envolver num processo formal e deliberado de ensino (Chaves, 2017, p.3).

Assim, a compreensão desses ambientes, ricos de aprendizagem, e a adequada aplicação das ferramentas tecnológicas, podem se tornar um aliado no ensino remoto, deixando para trás a velha didática de memorização de fórmulas matemáticas e avançando em direção ao verdadeiro propósito docente, o de mediador do saber, intermediando assim, o acesso do aprendiz ao conhecimento.

Desse modo apresenta-se, aqui, alguns recursos tecnológicos utilizados para mediar o ensino matemático, em dois momentos distintos, na modalidade remota.

2.1. *Software* – GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de livre acesso e pode ser utilizado em computadores, *tablets* e celulares. De acordo com Macedo (2018), ele vai além da Geometria Dinâmica, embora seja classificado como *software* de Matemática Dinâmica. Foi desenvolvido por Markus Horenwarter e Judith Preiner em 2001 na *Univerity of Salzburg*, continuando a ser desenvolvido na *Atlantic University*, na Florida. Seu uso é destinado, sobretudo, ao ensino e aprendizagem de Matemática na educação básica, mas podendo ser utilizado também no nível superior.

Com esse *software*, segundo Mathias e Leivas (2020), é possível trabalhar geometria, álgebra, tabelas, gráficos e estatísticas. Trata-se de uma multiplataforma, que apresenta versão em português, com interface de fácil manuseio, permitindo a construção de figuras precisas que podem ser movimentadas, modificadas, animadas e, ainda, possibilitam a exploração visual por vários ângulos incluindo em terceira dimensão.

Na Figura 1 tem-se a imagem do *software* utilizado para demonstrar de modo dinâmico os elementos de um Prisma Reto.

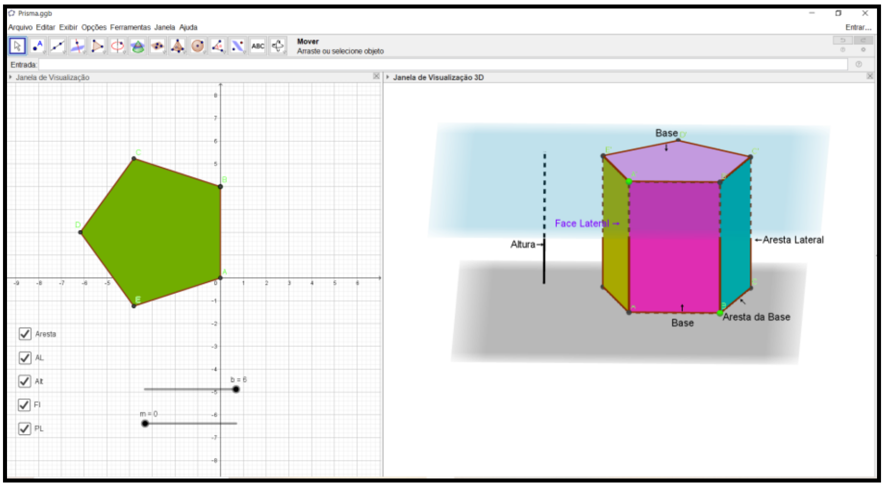


Figura 1. Elementos de um Prisma Reto no Geogebra
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Observa-se, na imagem acima, que o programa possibilita a visualização de informações algébricas, geométricas e 3D de um prisma, e, ainda propicia ao aluno realizar movimentos, como também, verificar as modificações que ocorrem no sólido com as alterações feitas por meio dos controles deslizantes. Tal fato favorece a compreensão dos elementos e propriedades matemáticas do objeto gerando, consequentemente, melhorias no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, o aluno consegue visualizar que um prisma tem suas superfícies constituídas de polígonos que, pelo menos, dois deles são congruentes e contidos em planos paralelos. Outra característica que é bem acentuada são suas outras faces em paralelogramos, conforme se evidencia na imagem da Figura 2, em que se tem sua planificação.

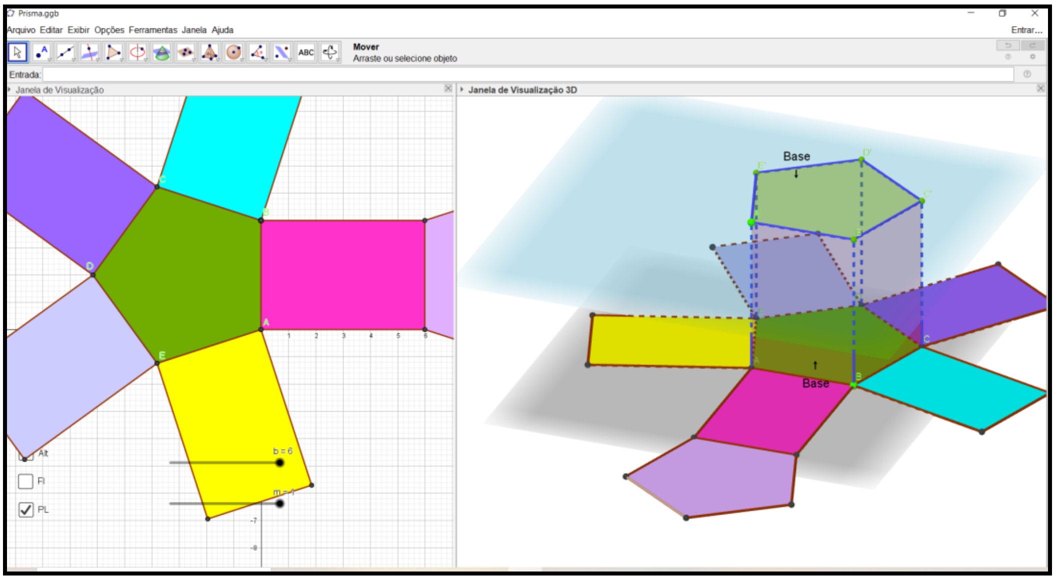


Figura 2. Planificação de um Prisma Reto no GeoGebra
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

A visualização em três dimensões de um sólido geométrico assim como a possibilidade de explorar o objeto por vários ângulos é outra vantagem proporcionada pelo *software*, pois de acordo com Alves (2019, p. 155), ao utilizar um recurso tecnológico em sala de aula, o professor propicia ao aluno, participar da “exploração dinâmica das propriedades numéricas e geométricas, de modo que a visualização, percepção e intuição desempenhe um papel essencial para a evolução da aprendizagem de todos os envolvidos em cada situação didática”. Assim, pode-se observar que os conceitos geométricos podem ser trabalhados por perspectivas visuais que facilitam o ensino e a aprendizagem em matemática.

2.2. Simulações Interativas no PhET

Assim como o GeoGebra, o *PhET* (*Physics Education Technology*), foi criado para simular situações que permitem a compreensão sobre conceitos de Ciências e Matemática. Foi desenvolvido na *University of Colorado Boulder*, em 2002 pelo Prêmio Nobel, Carl Wieman e funciona como uma plataforma *on-line*. É um projeto de recursos educacionais abertos e sem fins lucrativos que originalmente foi pensando para trabalhar conteúdos de física, mas que não demorou muito para se expandir para outras áreas de conhecimento, como química, biologia, ciências da terra e matemática. As simulações foram traduzidas para mais de 65 idiomas, desenvolve e publica mais 125 simulações interativas e gratuitas para uso educacional.

Suas simulações são projetadas para serem flexíveis, de modo que possam ser utilizadas em palestras, atividades em casa ou como laboratórios. Possui um ambiente intuitivo, assemelhando-se a um jogo, proporcionando ao estudante aprender conceitos através da exploração científica num ambiente computacional simplificado, onde as representações visuais dinâmicas podem ser tornar visíveis ou invisíveis, conectando os conhecimentos científicos ao mundo real.

Na Figura 3, tem-se a projeção da simulação das razões trigonométricas na circunferência. Nela, pode-se verificar o seno, cosseno e tangente dos ângulos em graus ou radiano, enquanto se tem a demonstração gráfica de suas funções.

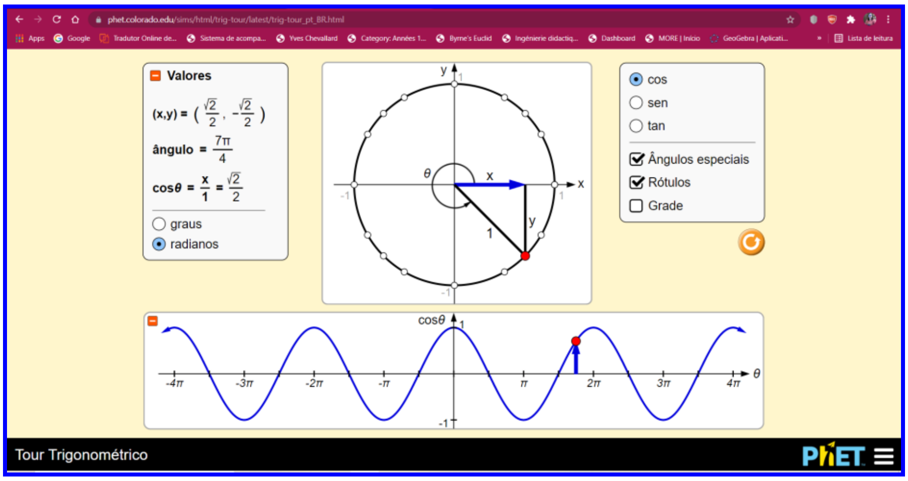


Figura 3. Tou Trigonométrico no PhET
Fonte: *Physics Education Technology* (2021).

Através da interatividade do *PhET*, é possível visualizar o movimento dos quadrantes, os ângulos contidos em cada um deles. Nele o aluno tem a possibilidade de aprender conceitos através de simulações dos conteúdos estudados nas aulas de modo dinâmico e atrativo.

2.3. Site: https://www.geogebra.org/?lang=pt

O site do GeoGebra é um exemplo de como o computador pode auxiliar no ensino e aprendizagem de matemática. Mesmo sem ter domínio do *software*, é possível ter acesso a uma gama de atividades prontas para serem aplicadas em sala de aula. Registra-se na imagem da Figura 4 o atual *layout* do site em que pode-se observar também a existência de aplicativos móveis, inseridos em meados de 2015.

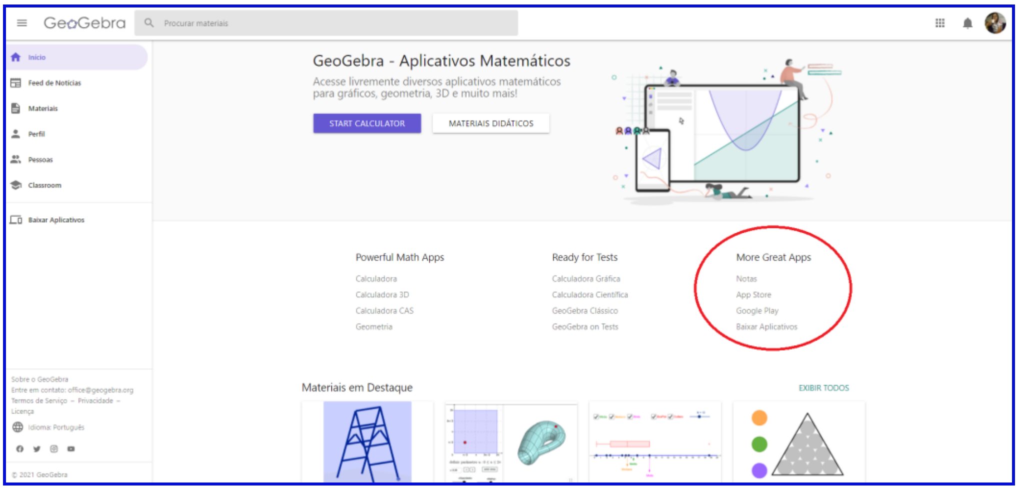


Figura 4. Tela de entrada do site GeoGebra em 2021
Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt **.**

Nota-se que o site dispõe um menu lateral, em que é possível ter acesso a notícias de novas postagens, com o GeoGebra, aos materiais, ao perfil dos usuários, as pessoas que fazem parte da comunidade e aos grupos. Além de dispor aos navegadores, baixar os aplicativos para serem utilizados quando não é possível ter acesso à internet.

A configuração do site, de modo mais específico o *Classroom*, é uma plataforma virtual que permite a interação entre professores e alunos, compartilhando e cooperando em tarefas, ou seja, em uma sala de aula virtual. Ademais as tarefas editáveis, presentes no site, podem ser utilizadas em outras plataformas ou até mesmo serem baixadas e disponibilizadas aos alunos para serem usadas posteriormente como, por exemplo, enquanto auxílio na resolução de uma atividade, nesse caso, requer que o *software* GeoGebra esteja instalado no dispositivo.

A criação de uma sala permite a interação simples e direta entre seus participantes. Para acessá-la, é fornecido um código para que todos os convidados possam participar e realizar atividades. Outra possibilidade é disponibilizar algum material ou atividade diretamente do site com suas turmas da escola, para isso basta acessar uma tarefa e compartilhar o *link* e, em seguida escolher *Google Classroom*, conforme se observa na Figura 5:

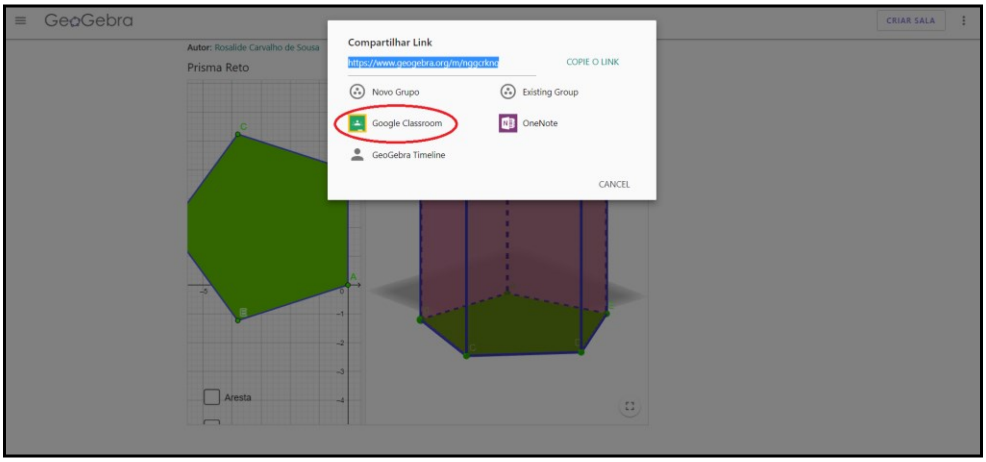


Figura 5. Compartilhando material do site do GeoGebra
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Em seguida, abre-se uma nova aba (Figura 6), em que é possível acessar suas turmas oficiais da escola, para tanto, é preciso logar no *site* por meio do e-mail institucional.

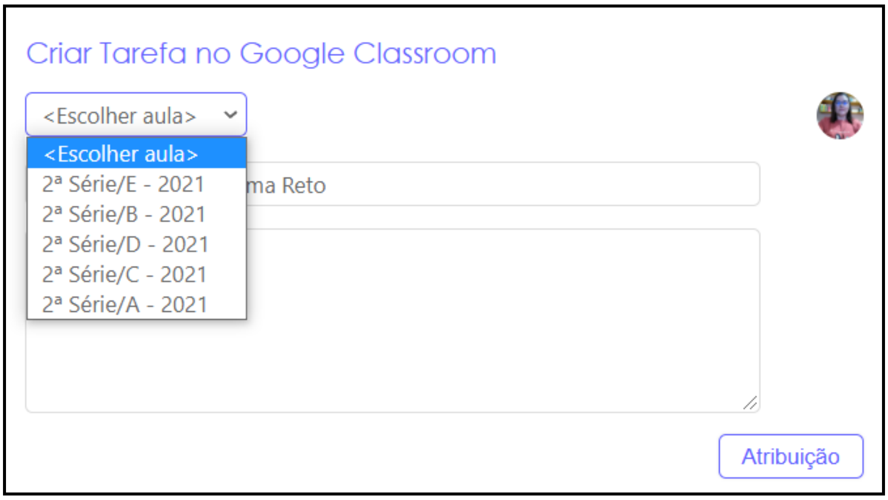


Figura 6. Criar tarefa no *Google Classroom*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Por meio dessa ferramenta, *Google Classroom*, pode-se enviar tarefas para os alunos, dar um *feedback* das resoluções e fazer comentários sobre as postagens dos participantes, criando desse modo, um ambiente virtual de aprendizagem em que os conceitos matemáticos podem ser trabalhados de forma dinâmica e interativa.

2.4. Kahoot!

O *Kahoot!* é uma plataforma de aprendizagem baseada em jogo, usada como recurso tecnológico em escolas e outras instituições de ensino. Foi fundada por Johan Brand, Jamie Brooker e Morten Versvik, num projeto em parceria com a *Norwegian University of Science and Technology*. Posteriormente eles se juntaram ao professor Alf Inge Wang e depois ao empresário norueguês *Asmund Furuseth*.

Seus jogos, “kahoots”, são testes de múltipla escolha que podem ser acessados através de um navegador da web, ou do aplicativo *Kahoot*!, conforme pode-se observar na Figura 7:

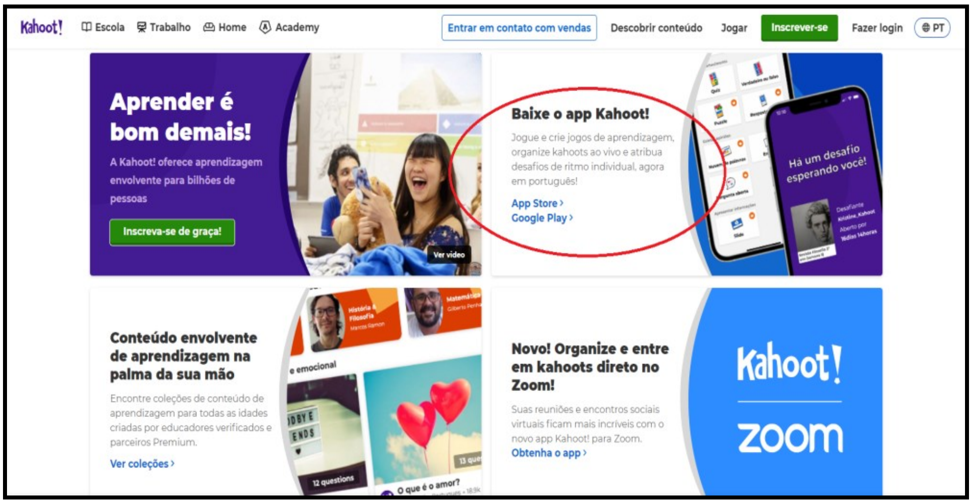


Figura 7. Tela inicial do Kahoot!
Fonte: https://kahoot.com (2021).

A plataforma possibilita a criação de *quizzes*, desafios e outros jogos personalizados e interativos, a ferramenta também apresenta sugestões para se trabalhar algumas atividades especificas como, por exemplo, questões socioemocionais, ciências, matemática, entre outros.

O aplicativo fora projetado para desenvolver uma aprendizagem social, onde os estudantes se reuniam em torno de uma tela, com um quadro interativo, um projetor e/ou monitor de computador. O *design* do jogo é simples, os participantes se conectam através de PIN (Figura 8), utilizando um dispositivo para responder perguntas elaboradas por um professor ou outra pessoa que tenha sido designada para tal atribuição.

Figura 8. Tela de início de jogo no Kahoot!
Fonte: https://kahoot.com/ (2021).

Através de sua interface, o *Kahoot!* permite o acesso por diferentes navegadores da web e dispositivos móveis. Portanto, vale salientar que:

> Pela sua simplicidade, qualquer utilizador – professor ou aluno – pode construir kahoots e aplica-los de diversas formas em ambientes de sala de aula, proporcionando momentos de debate e de construção conjunta do conhecimento, em torno dos conteúdos abordados, independentemente do nível de ensino (Correia & Santos, 2017, p. 253).

Assim, percebe-se que o professor pode usar essa ferramenta tecnológica para elaborar e executar uma aula interativa, descontraída e envolvente, propiciando uma aprendizagem eficiente, e sem o tradicionalismo, presente na maioria das aulas de matemática, possibilitando, assim, o desenvolvimento de habilidades cognitivas, essenciais para despertar a autonomia do estudante no processo de construção do conhecimento matemático.

2.5 *Whiteboard*

Uma das ferramentas tecnológicas essenciais para o ensino remoto são os quadros interativos. A *Microsoft* criou o *Whiteboard*, um *app* simples, de interface autoexplicativa, que possibilita a criação e a colaboração entre professores e alunos. Trata-se de uma lousa digital, em que se pode usar e compartilhar quadros brancos com outros usuários em tempo real. É conveniente ressaltar, que existem outros aplicativos que possuem funções semelhantes, mas nesse caso específico, daremos ênfase ao *app* utilizado durante essas aulas.

Na Figura 9 ilustra-se a tela inicial do aplicativo. Nela pode-se escrever e desenhar utilizando uma caneta *stylus*, um mouse, o dedo (em telas *touchscreens*), ou ainda, uma caneta digital. Outro recurso interessante do aplicativo, é que ele salva automaticamente os quadros, permitindo continuar de onde se parou ou até mesmo compartilhar o *link* para que os alunos visualizem as anotações.

Na parte inferior da tela, tem-se acesso a uma variedade de canetas coloridas, marcadores, apagadores e régua. Ademais, também é possível procurar imagens na web ou no computador, importar um PDF para tela, adicionar notas adesivas, documentos em *Word* ou em *PowerPoint*, conforme ilustração abaixo:

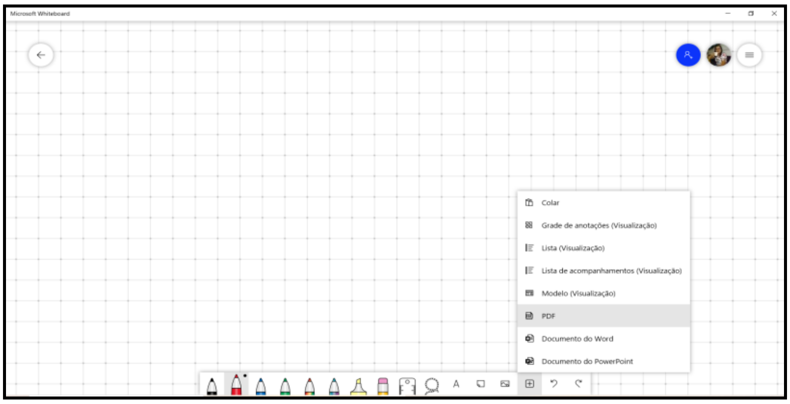


Figura 9. Menu inferior do *Whiteboard*
Fonte: *Microsoft Whiteboard* (2021).

Observa-se, portanto, que existem vários recursos nesse aplicativo que podem ser utilizados para dinamizar e facilitar a exposição dos conteúdos. Ressalta-se, dessa maneira, a importância de se explorar diferentes ferramentas com o intuito de facilitar a transposição do ensino presencial para o ensino remoto.

3. Procedimentos metodológicos

Este trabalho resulta da exposição de duas aulas, cujos sujeitos envolvidos foram alunos do 2° Ano do ensino médio, nos turnos manhã e tarde, da disciplina de Matemática de uma escola pública localizada no interior do estado do Ceará, Brasil. Caracteriza-se este estudo como qualitativo em que buscou-se investigar as percepções dos alunos sobre a utilização das TDIC na aprendizagem de conceitos matemáticos.

O encontro se deu de forma remota, por meio da plataforma *Google Meet*. Foram programadas duas aulas: a primeira com duração de 45 minutos e a segunda com duração de 90 minutos, nos meses de maio e junho de 2021. Participaram 43 alunos na primeira sessão e 55 no segundo encontro, referidos nesse trabalho por A1, A2, A3,..., sucessivamente, seguindo a ordem de registro do diário de sala.

Para estruturar e organizar as aulas foram utilizados as TDIC. Recursos como: GeoGebra, *Kahoot*!, slides animados, a lousa digital *Whiteboard*, *PhET*, sites educacionais, entre outros.

Para análise de dados, utilizaram as respostas dos alunos, registros fotográficos, exposições orais, gravações de áudio, produções escritas, as conversas realizadas nos grupos de *WhatsApp*, além da percepção da professora (pesquisadora) sobre a participação dos alunos e a utilização dos recursos didáticos-tecnológicos como mediadores no processo de ensino e aprendizagem.

4. Sobre as aulas

Nesse escopo, descreve-se o processo metodológico de duas sessões didáticas, em que se utilizou diferentes recursos tecnológicos para o ensino de Matemática, com o intuito de apresentar subsídios aos professores de matemática para o planejamento e execução de aulas na modalidade remota e estimular o protagonismo discente.

4.1 Primeira aula

Na primeira aula, apresenta-se uma sessão didática construída na plataforma *on-line* do *Kahoot!*, um *quizz* de desafios matemáticos, cuja intenção era envolver os alunos em uma maior participação na aula, além de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo, fortalecer a autonomia e o protagonismos dos estudantes na apropriação dos saberes matemáticos, primordiais em tempos de ensino remoto.

Dessa forma, concebeu-se 11 (onze) desafios matemáticos envolvendo questões de raciocínio lógico-dedutivo e de visão espacial. As tarefas foram disponibilizadas por meio da plataforma de jogos *Kahoot!*, (Figura 10).

Figura 10. Desfio Matemático no *Kahoot!*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Observa-se que, para cada desafio exposto, o aluno tinha 01 minuto para responder. Decorrido esse tempo é exibida uma tela com a pontuação destinada a cada opção (Figura 11), mostrando a quantidade de alunos que acertaram o problema.

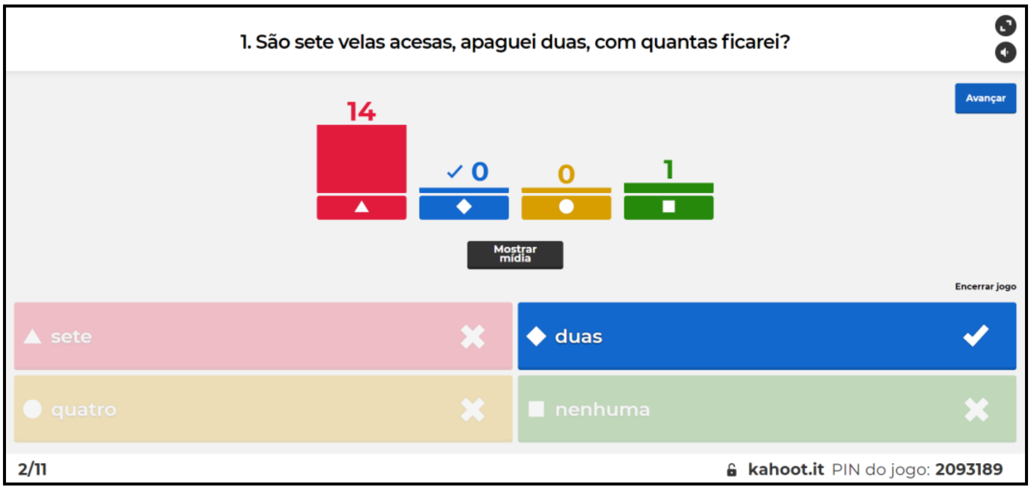


Figura 11. Tela de pontuação do problema no *Kahoot!*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Ao visualizarem as respostas os alunos, que erravam, indagavam o motivo, assim, a professora anotava os questionamentos que geravam mais dúvidas para serem debatidos após o ciclo de perguntas serem encerrados e divulgados os vencedores. Convém ressaltar, que nos demais desafios foi possível realizar o *feedback* de imediato, sanando as dúvidas de todos sobre as resoluções.

Ao realizar o *quizz* em modo competitivo, os alunos sentiram-se motivados e desafiados, contribuindo para desenvolver a capacidade de realizarem tarefas sozinhos para, dessa forma, fortalecer a autonomia no processo de aquisição de conhecimento, atingindo, portanto, um dos objetivos da aula.

A rapidez do raciocínio, também foi outro ponto trabalhado na realização da atividade. Os estudantes disponham de um tempo cronometrado para apresentarem a resposta. As questões, relacionadas aos blocos lógicos, tinham o intuito de estimular a visão espacial (Figura 12), pois de acordo com Mathias e Leiva (2020), as imagens são importantes no processo de aprendizagem, pois potencializam o entendimento dos conceitos envolvidos nessas etapas, condição importantíssima para que o estudante aprenda Geometria.

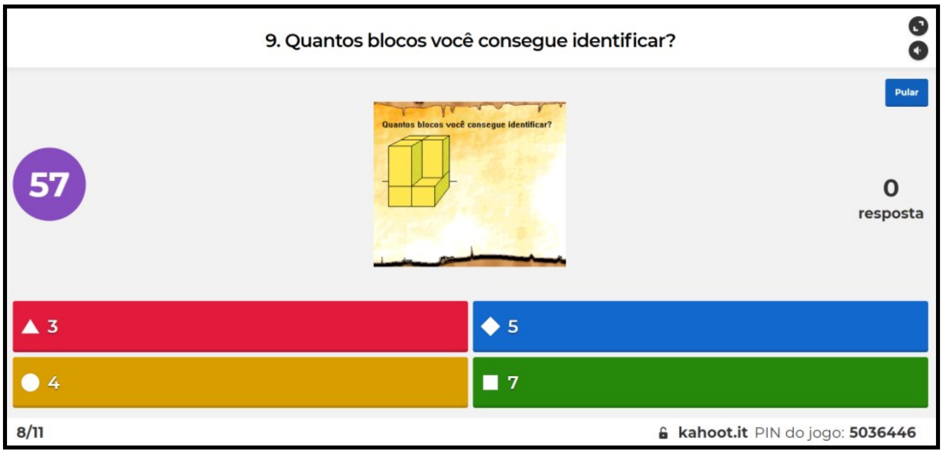


Figura 12. ***Quizz*** **de Geometria**
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Assim, após todos os desafios serem respondidos pela turma, a professora retomou a discussão dos *quizzes* que provocaram dúvidas nos participantes. Desse modo, a docente solicitou aos alunos que compartilhassem, com toda a sala, as estratégias por eles usadas para encontrarem as resoluções.

O desafio 10 foi um dos quais suscitaram dúvidas. Consistia na seguinte indagação: "*Em uma estante existiam dez livros de cem folhas cada, formando uma coleção. Uma traça estraçalhou desde a primeira folha do primeiro livro até a última folha do último livro. Quantas folhas foram danificadas?"*. Verificou-se que dos 43 participantes, somente 18 acertaram a resposta. O aluno A12, apresentou oralmente sua resolução, revelando que se baseou nos livros dispostos na estante de sua casa. Segue a transcrição do áudio, coletado durante a apresentação no *Meet*:

> A12: Eu tomei como exemplo a estante da minha casa e pensei: se a traça estragou a primeira folha do 1° livro, ela comeu só a capa, depois passou para o segundo livro e comendo ele todo, assim a traça foi comendo todos os livros até chegar na última folha do último livro, que no caso é a capa de trás, nesse caso estragando somente a última página, assim a resposta é 802, por que do primeiro livro ela comeu a parte da frente da capa, dos outros oito livros ela comeu todas as páginas e do último só a capa traseira.

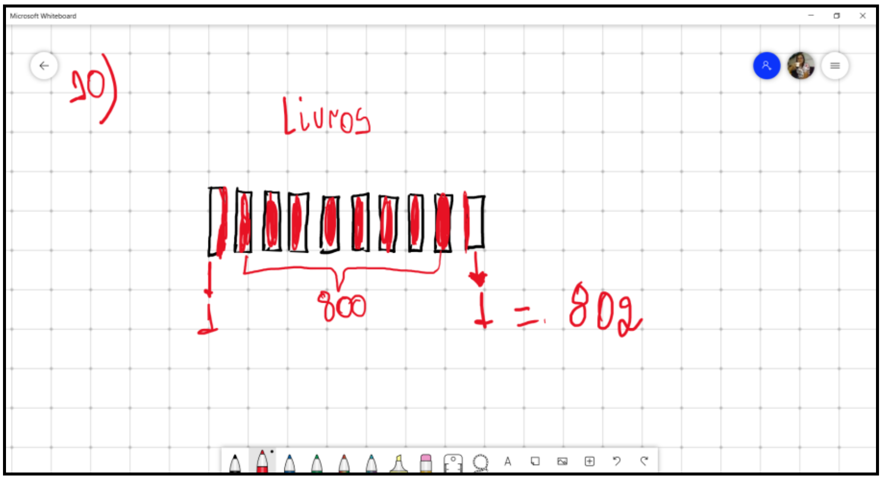


Figura 13. Demonstração do desafio 10 no *Whiteboard*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Mesmo após o relato feito pelo aluno A12, alguns membros da turma ainda não estavam seguros da resposta. Nesse momento, a professora interveio e ilustrou o raciocínio para todos os presentes através de um desenho no quadro digital do *Whiteboard*, conforme observa-se na imagem da Figura 13:

Ela condensou a resposta do aluno A12, apresentando um modelo de resolução através de um desenho, simulando a arrumação de uma estante e explicando qual o caminho percorrido pela traça, que danificou a capa do primeiro livro, seguindo em direção ao último, estraçalhando tudo que encontrou pelo caminho, até parar na última página do último livro.

O desafio 7 (sete) foi outra questão que gerou dúvidas entre os alunos, havendo somente 6 participantes acertando o problema, de um total de 43 estudantes, que dizia o seguinte: *Quantos números de dois algarismos têm a soma desses algarismos igual a um quadrado perfeito?* Nessa etapa, os alunos relataram que o tempo de 01 (um) minuto não foi suficiente para apresentarem a resposta, pois essa questão necessitava de cálculo para sua realização. Assim o aluno A29 explicou a todos sua estratégia de resolução:

> A29: Eu fui anotando em meu caderno os números assim: Soma 1 = 10; Soma 4 = 13, 22, 31, 40; Soma 9 = 18, 27, 36, 45, 54. Aí eu parei por que o tempo estava acabando, então eu arrisquei. Como eu já tinha 10 números e ainda faltava fazer cálculos eu procurei uma média. Fiquei na dúvida entre o 17 e o 18, mas arrisquei o 17.

Diante do exposto, verificou-se que a velocidade de raciocínio é um ponto que necessita ser trabalhada com a turma, pois o fator tempo é importantíssimo durante a resolução de atividades matemáticas, principalmente em avaliações externas, como as de larga escala, utilizadas para medir o nível de aprendizagem da educação básica no Brasil. Outro fator, que chamou atenção, foi a dificuldade de interpretação do problema matemático em questão, demonstrando que o aluno ainda está muito apegado a fórmulas e cálculos matemáticos direcionados, sentindo dificuldades de estabelecer estratégias de solução sem um modelo pronto, o que demonstra a necessidade do professor utilizar novas estratégias de ensino, como esta que apresentamos nesse artigo, que busca fortalecer o desenvolvimento do raciocínio e o protagonismo do aluno.

Para instituir a resposta para a turma, a professora retomou a solução dos participantes, dando prosseguimento ao raciocínio apresentado pelo aluno A29, e mostrando todos os números de dois algarismos, cuja soma são quadrados perfeitos, conforme imagem da Figura 14:

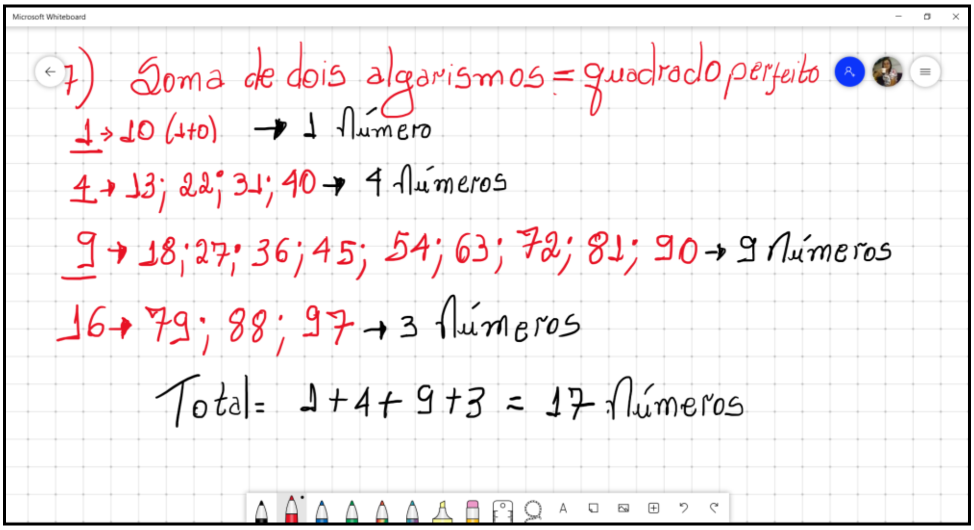


Figura 14. Demonstração do desafio 07 no *Whiteboard*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

Há, portanto, 17 números de dois algarismos cuja soma é um quadrado perfeito. É importante ressaltar que nesse momento a docente esclareceu que após o 16 nenhum número de dois algarismos terá soma igual a 25, 36, 49, etc.

Nesse sentido, verifica-se que a tarefa proposta explorou o raciocínio lógico-dedutivo, como também a autonomia do estudante, assim, considera-se a apresentação de um modelo de ensino com diferentes recursos tecnológicos que auxilie as práticas docentes no ensino remoto, ao mesmo tempo, que favorece o protagonismo discente, em consonância com a proposta desse estudo.

4.2 Segunda aula

Nesse escopo, traz-se a descrição de uma aula sobre Razões Trigonométricas na Circunferência, planejada e executada com o auxílio das tecnologias digitais e, transmitida via videoconferência por meio da plataforma *"Google Meet"*. Dessa forma, para o desenvolvimento do encontro foram concebidos slides (Figura 15), construções no *software* GeoGebra, utilização da plataforma do *"PhET"* e o site do GeoGebra, para demonstrações e simulações, com o intuito de explorar a visualização de propriedades e elementos numéricos e geométricos, de modo a promover uma maior compreensão desses conceitos matemáticos.

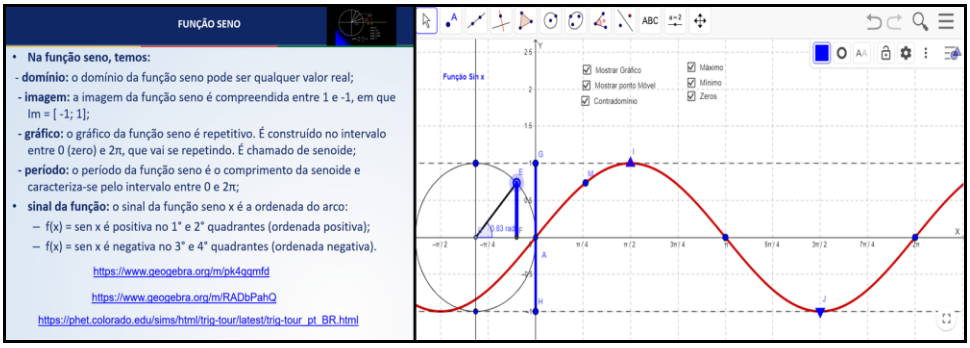


Figura 15. Apresentação de slides e GeoGebra no *Google Meet*
Fonte: Elaborado pelo(s) autor(es) (2021).

A docente expôs o conteúdo através de slides animados e o GeoGebra, intercalando teoria e prática através da movimentação gráfica das Razões Trigonométricas na Circunferência. Observa-se na imagem acima, que a simulação no *software* possibilita a visualização de elementos e propriedades da função. Ao movimentar o ponto “E” na circunferência, os valores dos ângulos são exibidos, mostrando o gráfico da função, seu ponto máximo, mínimo e o contradomínio. Segundo Lima, Carvalho e Bezerra (2011),

> Os softwares que apresentam a possibilidade de facilitar a compreensão dos conteúdos são os que produzem “figuras em movimento” fator que aumenta a interatividade e por sua vez induz o aluno a explorar, investigar as propriedades geométricas de seus desenhos. O resultado destas explorações é a produção do conhecimento através de uma aprendizagem significativa (Lima, Carvalho & Bezerra, p.11, 2011).

Assim, com a intenção de possibilitar um melhor entendimento do aluno dos conceitos envolvidos na aula, também utilizou-se a plataforma do *PhEt* para realização de um “*Tour* Trigonométrico”, Figura 16, em que é possível identificar e explorar elementos e propriedades, tais como: funções trigonométricas para ângulos negativos e ângulos superiores a 90°; transitar entre várias representações dessas funções, como lados de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio unitário, seus gráficos e os respectivos valores numéricos; deduzir os sinais (+, -, 0) de uma função trigonométrica para qualquer ângulo, como também estimar seus valores utilizando o conceito de unidade de círculo.

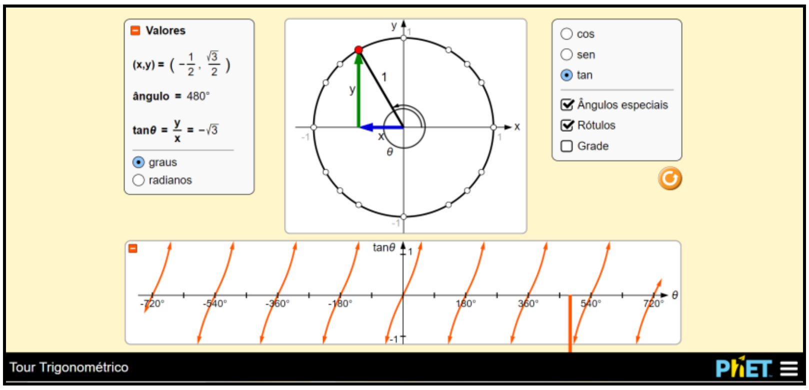


Figura 16. Simulação da função tangente no *PhET*
Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/trig-tour (2021).

Diante do exposto, pode-se verificar que desenvolver uma aula por meio da movimentação de objetos matemáticos com o *software*, permite ao professor uma maior exploração dos conteúdos envolvidos, provocando meios para que o discente possa se apropriar e formalizar esses conceitos.

Dentro desse contexto, foi possível à professora (pesquisadora), refletir sobre sua prática docente, fazendo um paralelo com o modelo tradicional do quadro e pincel, e uma aula construída com diferentes recursos tecnológicos. Desse modo, percebendo que o uso das TDIC aproxima o aluno da compreensão do conteúdo matemático abordado na aula, no caso desse estudo, Razões Trigonométricas na Circunferência, favorecendo novas formas de pensar e agir, propiciando significação a aprendizagem da matemática.

Portanto, o ensino remoto e as ferramentas tecnológicas, promoveram modificações promissoras às práticas da professora de matemática. As aulas *on-line* foram transmitidas por meio do *“Google Meet”* (Figura 17), os materiais utilizados durante os encontros e as atividades, eram repassados aos discentes através do *“WhatsApp”* e do “*Google Classroom*”, de modo a garantir que todos eles tivessem acesso às informações e conteúdos trabalhados no decorrer dos encontros.

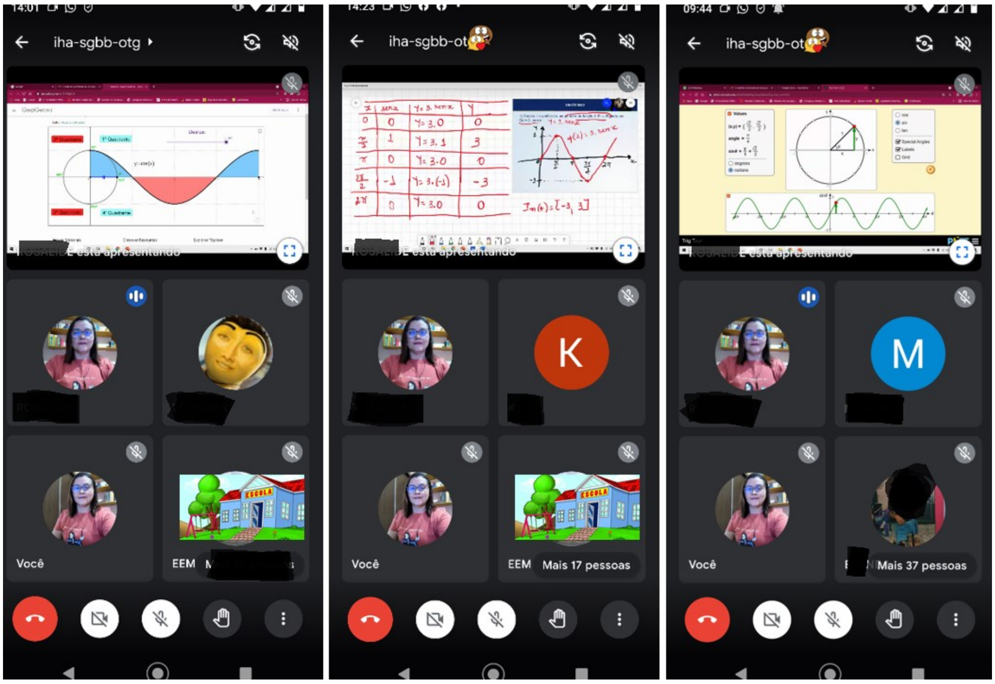
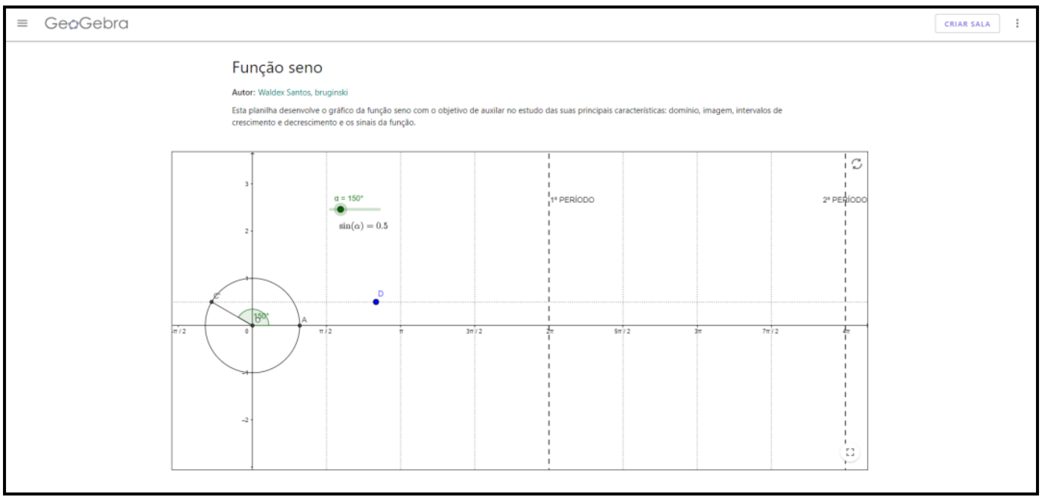


Figura 17. Aula *online* no *Google Meet*
Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Convém ressaltar que, no momento das aulas, a professora utilizava tanto o computador quanto o *smartphone*, assim ela podia expor os conteúdos via tela do computador, e acompanhar as perguntas e comentários dos alunos no *chat*, via celular.

Para encerra a sessão didática, a docente passou uma atividade para a turma através de um "*link*", disponibilizado por meio do "*chat*", "*WhatsApp*" e "*Classroom*". Assim, o aluno foi direcionado ao *site* do GeoGebra, em que ela previamente selecionou uma atividade sobre Razões Trigonométricas na Circunferência. Nela o discente podia manipular o *applet* de uma simulação no GeoGebra e responder as perguntas presentes na atividade, conforme se verifica na Figura 18.



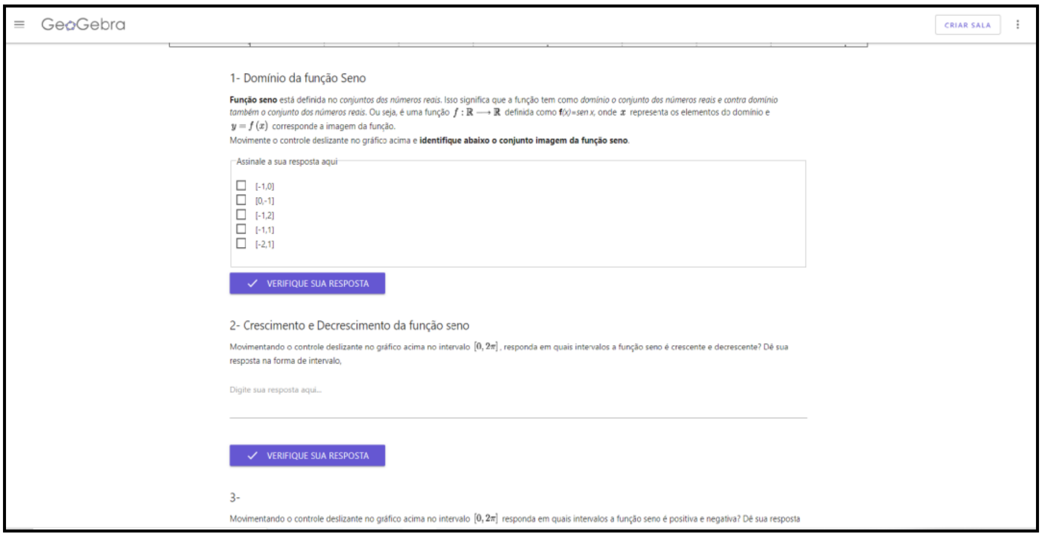


Figura 18. *Link* de atividade no *site* GeoGebra
Fonte: https://www.geogebra.org/m/AjDczh8x (2021).

Para concluir, mesmo a atividade oferecendo possibilidade de verificar a resposta das questões, a professora intermediou o debate e promoveu o *"feedback"* entre os alunos de modo a garantir uma maior assimilação do assunto estudado. Nesse sentido explorou-se o uso das TDIC com o objetivo de promover um auxílio para o ensino e a aprendizagem das Razões Trigonométricas na Circunferência, apresentando um modelo que pode ser considerado valioso para o progresso do estudante, como sujeito autônomo, na construção dos saberes matemáticos, ao mesmo tempo que subsidiou um suporte ao docente de matemática.

5. Considerações finais

Esse trabalho teve como objetivo principal apresentar um modelo de ensino remoto de matemática, em que se utiliza o potencial didático das TDIC para planejar e executar aulas dinâmicas e interativas, com o intuito de estimular a autonomia do estudante na construção do conhecimento matemático, como também, oferecer ao professor, um suporte que o auxilie no processo de ensino e aprendizagem de Razões Trigonométricas na Circunferência.

Dessa forma desenvolveu-se aulas e tarefas de modo a induzirem os discentes a considerarem a manipulação e visualização de recursos digitais e tecnológicos, como alternativas para compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados e também na resolução das atividades. Nesse sentido, a aceitação dos educandos e o retorno por eles apresentados, tanto nas participações durante as aulas, quanto na realização das tarefas propostas, torna possível concluir que o objetivo foi alcançado.

A escolha das ferramentas e dos métodos utilizados para o ensino remoto desse trabalho possibilitou a pesquisadora agregar conhecimentos a sua prática docente, induzindo-a numa reflexão sobre seus métodos antes e durante a pandemia, como também, levando-a a concluir, que aulas pautadas na utilização das TDIC promovem um ensino inovador, ocasionando experiências efetivas aos envolvidos na construção dos saberes matemáticos.

É inegável que a pandemia da Covid-19 trouxe prejuízo a todos os setores, incluindo à educação. Dentro desse o contexto, os mais prejudicados nesse sistema de ensino remoto, foram professores e alunos, principalmente das escolas públicas, que carecem de estruturas físicas e tecnológicas para garantir que aulas nessa modalidade ocorram.

Coube aos docentes bancarem todos os recursos necessários para implementarem o ensino remoto. Eles tiveram que se desdobrar na buscar por informações e metodologias que pudessem empregar em suas aulas, fazendo com que sua carga horária, que já é bastante alta, triplicasse. Outro ponto a se considerar é que os professores arcaram com todas as despesas das aulas nesse período. Entre compras de equipamentos, manutenção de internet e energia, suas despesas aumentaram consideravelmente, já que os artigos tecnológicos, nesse período pandêmico, sobrevalorizaram. Ademais, é importante destacar os danos psicológicos que toda essa sobrecarga pode causar na vida do educador.

Os alunos também foram muito prejudicados nesse sistema de ensino. A desigualdade social, que impera em nosso país, impossibilitou que muitos estudantes tivessem acesso às aulas remotas, pois não dispunham dos recursos básicos como: conexão de internet, computadores e celulares. Tais pressupostos demandou a implementação de alternativas, como elaboração e entrega de materiais impressos, que posteriormente se configuram ineficazes no seu propósito, pois os educandos não conseguiam responder as tarefas, já que não tinham as explanações dos conteúdos necessários para desenvolver estratégias de resolução.

É bem verdade que alguns estados brasileiros adotaram medidas na tentativa de garantir o acesso do aluno ao ensino remoto. Houve entrega de *chips* com acesso à internet e distribuição de *tablets* aos estudantes da escola pública. No entanto, a morosidade nessa distribuição fez com que muitos deles, ainda hoje, decorridos um ano e meio do início da pandemia, encontrem-se sem acesso a tais recursos.

Verificou-se também, que muito ainda se precisa fazer para que o aluno tenha um maior protagonismo na construção dos saberes. No entanto, os métodos aqui apresentados, em muito podem contribuir para estimular o desenvolvimento dessa autonomia no processo da aprendizagem dos conceitos propostos, permitindo que eles evoluam por seu próprio mérito e construindo suas próprias reflexões.

Desse modo, constatou-se que o emprego das TDIC no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, no caso específico desse estudo, das Razões Trigonométricas na Circunferência, auxiliam a exploração e validação desses conceitos, configurando-se como ferramentas didáticas potencializadoras no processo de ensino remoto, podendo facilmente estender-se às aulas presenciais.

Portanto, almeja-se que esse artigo sirva como suporte aos professores que ensejam utilizar novas propostas para otimizar o ensino de matemática, haja visto que o docente deve estar em constante aprimoramento, para desempenhar um papel relevante no exercício da profissão. Ademais, mostrou-se que é importante integrar recursos digitais, quer sejam nas aulas remotas, quer sejam nos momentos presenciais, de maneira a produzir resultados positivos na aprendizagem dos discentes.

6. Referências bibliográficas

Alves, F. R, V. (2019). Visualizing the olympic didactic situation (ODS): teaching mathematic with support of the GeoGebra software. *Revista Acta Didactica Naposcensia.* Romania, 12(2), 97-116.

Braz, A. F. S.; Trindade, N. O.; Dantas, G. C. B. & Gouveia, S. S. S. (2015*).* Concepções dos alunos no uso do software GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática: uma análise do sujeito coletivo*.* In: XIII Congresso Internacional de Tecnologia na Educação, 2015. *Anais...* Pernambuco. Recuperado em 19 junho, 2020, de http://www.pe.senac.br/congresso/anais/2015/arquivos/pdf/poster/CONCEP%C3%87%C3%95ES%20DOS%20ALUNOS%20NO%20USO%20DO%20SOFTWARE%20GEOGEBRA%20COMO%20FERRAMENTA%20DE%20ENSINO%20E%20APRENDIZAGEM%20DA%20MATEM%C3%81TICA%20UMA%20AN%C3%81LISE%20DO%20SUJEITO%20COLETIVO.pdf .

Chaves, E. O. C. (2017). A tecnologia e a educação. *Biblioteca Virtual*. https://smeduquedecaxias.rj.gov.br/nead/Biblioteca/Forma%C3%A7%C3%A3o%20Continuada/Tecnologia/chaves-tecnologia.pdf .

Correia, M. & Santos, R. (2017) A aprendizagem baseada em jogos online: uma experiência de uso do Kahoot na formação de professores. In Ponte, C., Dodero, J. M. & Silva, M. J. (2017). Atas do XIX Simpósio Internacional de Informática Educativa e VIII Encontro do CIED – III Encontro Internacional. (252-257) Lisboa: CIED – Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais. Recuperado em 10 julho, 2020, de https://www.eselx.ipl.pt/sites/default/files/media/2017/siie-cied_2017_atas-compressed.pdf.

GeoGebra – Aplicativos Matemáticos. Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt

Kahoot! Plataforma Interativa. Disponível em: https://kahoot.com/pt/.

Lima, M. M. F; Carvalho, S. O. & Bezerra, J. C. A. (2011*). Tecnologia da Informática do ensino da Geometria.* In: XX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, 2011. Rio de Janeiro. Graphica.

Macedo, A. A. *Engenharia didática de segunda geração: um referencial para ação investigativa na formação inicial dos professores de física.* (2018). Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2018, 158p.

Marques, P. P. M. & Esquincalha, A, C. (2020). Desafios de ensinar matemática remotamente: os impactos da pandemia covid-19 na rotina de professores. In: IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro, 2020. *Anais...* Rio de Janeiro: SBEM-RJ. Recuperado em 12 agosto, 2021, de http://eventos.sbem.com.br/index.php/spem-rj/ix-spem-rj/paper/viewFile/1399/1167 .

Mathias, C. V. & Leivas, C. P. (2020*).* Potencial de um sistema de matemática dinâmica no estudo de transformações lineares*.* #tear - *Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, *9* (1), 1-22.

PhET Interactive Simulations. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/.

Autores:

Rosalide Carvalho de Sousa: Graduada em Ciências Habilitação em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). Especialista em Metodologia do Ensino Fundamental e Médio (UVA). Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail: rosalidecarvalho@hotmail.com.

Francisco Régis Vieira Alves: Mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela UFC. Doutor, com ênfase no ensino de Matemática pela UFC. Professor Titular do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE. E-mail: fregis@ifce.edu.br.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-15

Aprendizaje de las Matemáticas durante la pandemia del COVID-19: el actuar de alumnos y docentes ante la transición de lo presencial a on-line

Agustín Alfredo Torres Rodríguez, Marcos Campos Nava, Luisa Morales Maure, Orlando García Marimón.

Fecha de recepción:3/11/2021
Fecha de aceptación: 23/12/2021

Resumen	Se aplicó un test exploratorio tipo Likert, con la finalidad de indagar sobre las percepciones de los estudiantes de nivel bachillerato y universitario de instituciones de México y Panamá, respecto de sus experiencias en las asignaturas de matemáticas, durante el periodo de marzo a junio de 2020, en el cual, debido a la contingencia sanitaria por COVID-19, se tuvo que migrar de educación presencial a educación virtual. Los ítems del cuestionario abordaron diversos aspectos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. En una primera aproximación, la información recabada indica que este cambio ocasionó una brecha respecto a lo que se podría aprender en clases presenciales. **Palabras clave:** matemáticas, aprendizajes, test exploratorio, educación a distancia.
Abstract	An exploratory Likert-type test was applied, in order to inquire about the perceptions of high school and university students from institutions in Mexico and Panama, regarding their experiences in mathematics subjects, during the period from March to June 2020, in which, due to the health contingency due to COVID-19, it was necessary to migrate from face-to-face education to virtual education. The items of questionnaire addressed various aspects related to learning mathematics. In a first approach, the information collected indicates that this change caused a gap with respect to what could be learned in face-to face classes. **Keywords**: mathematics, learnings, exploratory test, virtual education.
Resumo	Foi aplicado um teste exploratório do tipo Likert, com o objetivo de indagar sobre as percepções de estudantes do ensino médio e superior de instituções do México e do Panamá, sobre suas experiências em disciplinas de matemática, durante o período de março a junho de 2020, no qual, devido para o contingente de saúde debido ao COVID-19, foi necessário migrar do ensino presencial para o ensino virtual. Os itens do questionário abordaram diversos aspectos relacionados à aprendizagem da matemática. Em uma primeira aproximação, as informações coletadas indicam que essa mudança causou uma lacuna em relação ao que poderia ser aprendido nas aulas presenciais. **Palavras-chave:** Matemática, aprendizagens, teste exploratório,

	educação a distancia.

1. Introducción

Ante el advenimiento de la delicada situación derivada de la pandemia del COVID-19 a escala internacional, en México y otras naciones latinoamericanas, las autoridades sanitarias y educativas tomaron la decisión de interrumpir el ciclo normal de enseñanza en la modalidad presencial, para continuarlo en modalidad a distancia. Esta decisión abarcó prácticamente todos los niveles educativos, y fue así que aproximadamente a partir de la última semana de marzo de 2020, se inició esta nueva etapa, dónde las distintas instituciones educativas de todos los niveles, comenzaron a implementar estrategias para la atención de su población escolar bajo la modalidad mencionada. En el caso del nivel bachillerato, y del nivel superior fue a partir de esa fecha y hasta el término del ciclo escolar respectivo, en junio de ese mismo año, que se brindó la atención a los estudiantes bajo el esquema denominado también educación en línea.

Estas decisiones tuvieron que ser tomadas, dentro de un contexto de emergencia, y debido a ello, no hubo el tiempo suficiente para planificarlas, de modo que las respuestas institucionales ante la situación, ameritaron la toma rápida de un conjunto de estrategias y acciones encaminadas a tratar de rescatar la segunda mitad del periodo escolar de la mejor manera posible, con base en las fortalezas y recursos con las que cada institución contaba en ese momento. Dentro de este contexto, los autores de esta contribución, decidimos realizar un proceso indagatorio sobre cómo algunas de estas condiciones inciden en los procesos de enseñanza-aprendizaje, concretamente en el caso de las asignaturas de matemáticas que cursan los estudiantes del nivel bachillerato, y los estudiantes del nivel superior.

Para ello consideramos la elaboración de un test exploratorio con la intención de identificar algunos aspectos relacionados con la forma en que los distintos factores involucrados por la abrupta migración de educación presencial a una no planificada educación a distancia, pueden estar incidiendo sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes, considerando la relevancia de este trabajo en partir de la hipótesis de que el cambio en la modalidad de enseñanza puede estar trayendo transformaciones importantes sobre las formas en que se están dando las prácticas de enseñanza y aprendizaje, y que pueden incidir también sobre el aprovechamiento y desempeño de los estudiantes.

Aunque no es tan difícil plantear dicha suposición, consideramos que lo relevante es intentar caracterizar algunos elementos de cómo ocurren tales incidencias, tomando como referente las clases de matemáticas, por la razón de que los autores de este trabajo, somos profesores de matemáticas en servicio en dichos niveles educativos, además desarrollamos investigación en la enseñanza de esta disciplina, y aunado a lo anterior, por considerar que a través de los datos que se obtienen en una investigación como ésta, pueden servir como punto de referencia para la propuesta de mejoras en la gestión de los cursos, además de que esta metodología es factible de replicarse para indagar los efectos de esta migración de modalidad educativa en otras de las áreas de conocimiento.

2. Referentes teóricos

2.1. La Educación a Distancia

En el caso de México y otros países similares, esta modalidad educativa inicialmente se concibió como una estrategia que podía contribuir al crecimiento de la matrícula estudiantil (Freixas y Ramas, 2015; Covarrubias, 2021), nació como una herramienta para atender a poblaciones en rezago educativo, poblaciones dispersas o que presentaban alguna otra situación de desventaja. Sin embargo en la actualidad, ha ocurrido un crecimiento vertiginoso de la educación a distancia, y son numerosas las instituciones de diferentes niveles educativos, que tienen dentro de su oferta cursos a distancia, o bien diferentes modalidades que tienen la característica de ser virtuales.

El campo de acción de la educación virtual se ha extendido, pues el objetivo ya no es atender ciertos sectores característicos dispersos o con rezago, sino en general ofrecer una gama más amplia de opciones para hacer llegar la educación a cualquier persona que cuente con la conexión a internet, y que además puede tener su lugar de residencia incluso en otras regiones o países distintos a dónde se encuentra la sede la institución educativa en la que se matricula. La oferta se ha ampliado para abarcar no solo cursos o diplomados, sino también estudios de bachillerato, licenciaturas y posgrados completamente ofertados en modalidad on-line (Covarrubias, 2021).

¿Cuáles son algunas de las características centrales de la educación a distancia? García-Aretio (2001) identifica 3 rasgos distintivos: la separación física profesor-alumno, la utilización de medios técnicos (herramientas digitales) como medio de comunicación, y la necesidad de la gestión de cursos a distancia, esto es, de un profesor o asesor que atienda las necesidades del estudiante, aun cuando no esté en el mismo espacio físico.

Este es precisamente el reto de esta modalidad educativa, que pese a la separación se pueda establecer una relación “cercana” entre el docente y sus alumnos, una relación mediada por formas de comunicación potenciadas por las herramientas digitales, de modo que pueda *sustituir* (si el término pudiera ser adecuado) a esa relación directa, cara a cara, que permite la educación tradicional en el aula.

2.2. Los nuevos roles docentes

En la época actual, la omnipresencia de las tecnologías digitales y la web mundial, está repercutiendo fuertemente en el sector educativo, al grado que las instituciones de educación, especialmente las de educación superior, requieren adaptarse a nuevas modalidades de formación que respondan ante estos nuevos retos (Salinas, de Benito y Lizana, 2014). La forma en que se vienen dando aceleradamente estos cambios en los procesos educativos, tiene una fuerte influencia sobre los actores principales, esto es los estudiantes, pero también tiene importantes incidencias sobre el quehacer docente. Se puede decir entonces, que con el advenimiento de esta revolución digital, cambian los escenarios educativos, y en consecuencia se plantean también transformaciones necesarias en los roles del docente y de los estudiantes. (Salinas et al. 2014; Torres, Deserti y Valentín, 2014).

En particular, estos nuevos escenarios de aprendizaje, requieren de la adquisición de habilidades y destrezas por parte de los docentes. Se requiere adquirir pericia en la producción e implementación de contenidos, así como en habilidades específicas en el manejo de diversas herramientas tecnológicas, del software y en general, de la forma de gestionar o administrar un curso en ambientes virtuales de aprendizaje. La pregunta central puede ser entonces ¿está preparado el profesor de matemáticas para asumir nuevos retos en la gestión de un curso en la modalidad a distancia?

Por parte de los estudiantes, hay que considerar igualmente que la transición desde un modelo presencial hacia uno virtual conlleva retos y dificultades, pues de entrada podríamos suponer un fuerte impacto en aspectos como: tiempos utilizados para el estudio, acceso a fuentes de información, disposición de red de internet, entre otros. También habría que tener en cuenta elementos de su propio proceso para acceder al conocimiento, como puede ser el caso de los llamados estilos de aprendizaje.

2.3. La enseñanza de las matemáticas en entornos virtuales

Aunque en principio pudiera pensarse que la enseñanza de las matemáticas, que de por sí resulta compleja en modalidad presencial, puede complicarse todavía más en un ambiente virtual, debido entre otros elementos, a la falta de una interacción directa, cara a cara , entre el profesor y sus estudiantes, resulta que las distintas plataformas educativas ofrecen en la actualidad un conjunto de herramientas y recursos que pueden coadyuvar a la enseñanza de la disciplina, y que tienen como característica su amplia disponibilidad en la web. Aunado a lo anterior, en los últimos años se han reportado diversas investigaciones que dan cuenta del uso de tecnologías digitales que específicamente pueden potenciar los aprendizajes en la asignatura de matemáticas (Sánchez, 2020; Campos y Torres, 2017).

Ya con anterioridad, se ha identificado la influencia de las tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas (Santos-Trigo, 2010; Moreno-Armella, 2002), señalando que su empleo puede favorecer los procesos de comprensión de ideas y conceptos. Si consideramos además que en la actualidad, las distintas plataformas de aprendizaje (e-learning) permiten la gestión de diversos programas o software, tales como graficadores, sistemas dinámicos, simuladores, entre otros; resulta entonces pertinente considerar que es posible aprender matemáticas a través de un medio que pueda ofertar este tipo de recursos, que pueden ofertar opciones de texto, audio, o video; sin olvidar desde luego, la gestión del curso por parte del profesor, que resulta de vital importancia.

3. Metodología

Se diseñó un cuestionario tipo Likert, con la finalidad de indagar acerca de las percepciones de estudiantes de los niveles de bachillerato y superior, sobre el aprendizaje de las matemáticas, a través de entornos virtuales o educación a distancia. Este tipo de escalas son recomendadas en la literatura para medir actitudes y creencias. Para ello se siguió un proceso de 3 etapas: se definió un constructo conceptual referente a las actitudes de los estudiantes, posteriormente se realizó su *operacionalización*, esto es, su desglose en dimensiones e indicadores, obteniendo una batería de reactivos (ítems) con los cuáles se configuró finalmente el cuestionario, como última etapa se adecuó el cuestionario para ser enviado a través de la plataforma *Google Forms*, de forma simultánea a los destinatarios. Estos usuarios fueron seleccionados previamente, mediante el requisito de estar en ese tiempo cursando alguna asignatura de matemáticas del nivel bachillerato o superior.

La actitud hacia las clases de matemáticas en línea, no es un atributo observable directamente, sin embargo, de forma empírica, los investigadores consideraron que hay dimensiones que caracterizan dicha actitud, lo anterior, por el trabajo que los mismos investigadores realizan como profesores de matemáticas y tomando como punto de partida, comentarios de estudiantes y colegas profesores, durante el desarrollo de los cursos de matemáticas en forma virtual. Al realizar un análisis sobre estas concepciones de los estudiantes, arribamos a un constructo conceptual que denominamos "Actitudes hacia las clases de matemáticas en línea".

Este constructo lo desglosamos en 5 dimensiones, a saber: disposición de recursos para las clases virtuales, competencias tecnológicas del profesor de matemáticas, competencias didácticas del docente, pertinencia de los recursos didácticos empleados, y percepciones sobre el propio aprendizaje. Partiendo de estas 5 dimensiones, obtuvimos un total de 30 ítems o reactivos.

Una segunda parte del cuestionario, se conformó por una pregunta abierta, cuya redacción se comparte a continuación:

> *Si así lo deseas, agrega un comentario adicional sobre tu experiencia de llevar clases de matemáticas desde casa debido a la cuarentena por la pandemia de Covid-19*

En esta sección se tuvo el propósito de recoger algunas explicaciones más detalladas acerca de sus experiencias, expectativas u opiniones. Finalmente, el cuestionario fue enviado a una muestra de 662 estudiantes (de bachillerato y licenciatura), de distintas instituciones públicas en México y Panamá, empleando la herramienta *Google Forms* mencionada.

4. Resultados

Dentro de las dimensiones consideradas para la confección de los ítems, se destacan las referentes a las competencias tecnológicas y didácticas del profesor, y dentro de los resultados obtenidos en este caso, podemos identificar 3 ítems relacionados directamente con la forma en que el docente realiza la gestión de su curso mediante el empleo de diversas estrategias en el aula virtual. A la pregunta relativa a si el docente modifica sus métodos y técnicas de enseñanza cuando trabaja en la modalidad a distancia, a diferencia de cómo lo venía haciendo antes del surgimiento de la pandemia, el 61.5 % contestó afirmativamente (42.6 % de acuerdo y 18.9% totalmente de acuerdo), en tanto que el 26.6% consideró la respuesta en *ni de acuerdo ni en desacuerdo*. Este resultado parece indicar que la mayoría de los profesores se vio obligado a modificar sus estrategias de enseñanza en esta nueva modalidad, y ello hace reflexionar sobre el impacto que pueden tener estos cambios (ver fig.1).

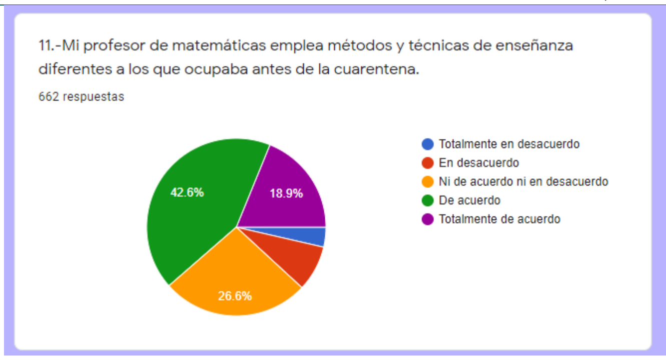


Figura 1. Respuestas obtenidas para el reactivo número 11.

Esta perspectiva de los estudiantes es similar en el caso de la pregunta 15, sobre si su profesor le propone la utilización o consulta de recursos interactivos que el estudiante puede hallar en la web, tales como simuladores o applets, o inclusive páginas como *Khan Academy*. Puede apreciarse que la respuesta dada por los encuestados resulta similar a la recolectada para el reactivo número 11, ya que el 65.4% declaró en forma afirmativa (30.4 % totalmente de acuerdo y 35 % de acuerdo), en tanto que sólo el 14.4 % consideró la respuesta neutra de *ni de acuerdo ni en desacuerdo* (ver figura.2).

En este caso fue un poco mayor el porcentaje de estudiantes que consideraron estar en desacuerdo (20.1 %), lo que parece indicar que es mayor el porcentaje que consideró que el docente modificó sus estrategias de enseñanza, sin necesariamente recurrir al apoyo de otros recursos didácticos disponibles en la web.

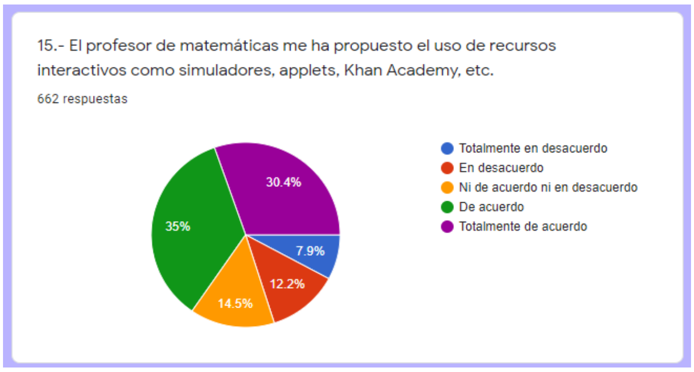


Figura 2. Respuestas obtenidas para el reactivo número 12.

Otros 2 ítems relacionados con los aspectos de la gestión didáctica y tecnológica del curso por parte del profesor, fueron los identificados con los números 24 y 27. En el primer caso, a la pregunta acerca de si los materiales que proporciona el profesor en la modalidad en línea, sirvieron para el propósito de enseñanza, el 66.6% manifestaron estar de acuerdo (un 19.3% totalmente de acuerdo y un 47.3% de acuerdo), en tanto que un porcentaje de 24.2% manifestó una respuesta neutra, *ni de acuerdo ni en desacuerdo* (ver figura 3).

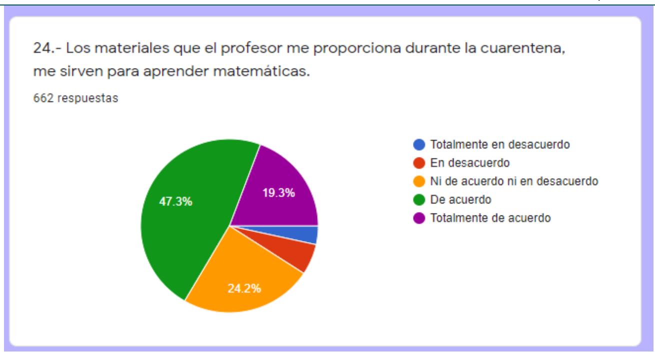


Figura 3. Respuestas de los estudiantes al reactivo número 24.

Y en al caso del ítem 27, acerca de si el docente sabía del manejo de los recursos disponibles como classroom, moodle, skype, entre otros; el 83.6 % declaró estar de acuerdo (37.5% totalmente de acuerdo y 46.1% de acuerdo), en contraste, solamente el 11.9% se declaró en forma neutra, y solo el 14.4% se manifestó en desacuerdo a este respecto (ver figura 4). Esta diferencia, si la comparamos con lo respondido en la pregunta 24, pudiera estar indicando a su vez que, aunque el docente conozca sobre el uso de ciertas herramientas tecnológicas que pueden abordarse en la educación a distancia, su empleo no necesariamente obtiene los resultados esperados, esto es, no logran cumplir los propósitos en el proceso de enseñanza.

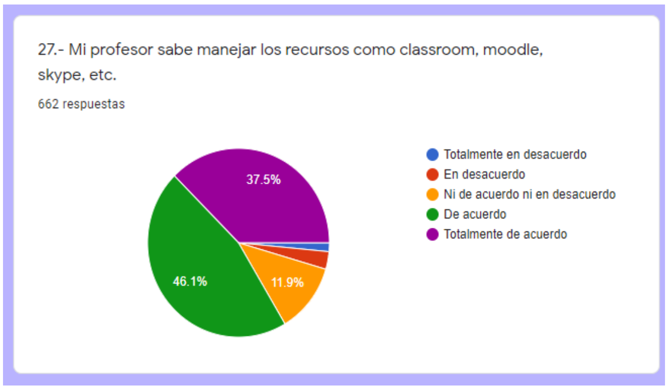


Figura 4. Resultados obtenidos de las respuestas al ítem 27.

Otras 2 dimensiones del constructo, son las relativas a la disposición de recursos para las clases virtuales, así como la pertinencia de dichos recursos, vistos desde la perspectiva del estudiante. Dentro de la dimensión de la disposición de recursos, se muestran los resultados de los reactivos 2 y 7, que versan acerca de la disponibilidad del servicio de internet de los estudiantes, y de la disposición de computadora en casa o teléfono móvil para poder acceder a las clases en línea. En la figura 5 se presentan las respuestas obtenidas para el reactivo 2 y en la figura 6 las obtenidas para el reactivo 7.

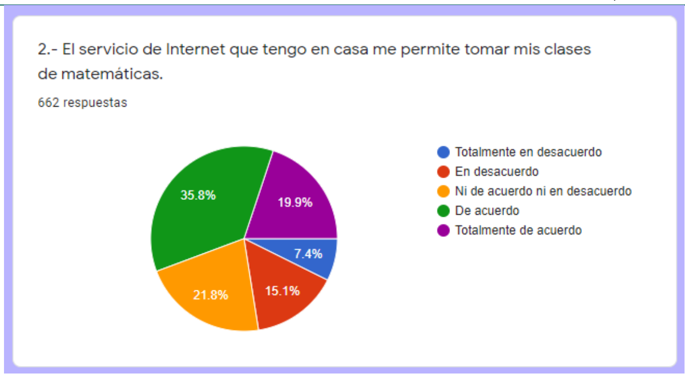


Figura 5. Resultados obtenidos para el reactivo 2.

Como se desprende de la figura 5, el 35.8% manifestó estar de acuerdo y el 19.9 % totalmente de acuerdo, en que el servicio de internet les permitió tomar sus clases de matemáticas regularmente, dato que concuerda con que el 82.2% declaró tener ya sea computadora en casa o teléfono móvil. La diferencia parece indicar que casi un 40% de los estudiantes utilizó solamente este último dispositivo para tomar sus lecciones.

Figura 6. Resultados obtenidos para el reactivo 2.

Lo anterior estaría indicando que un buen porcentaje de estudiantes emplea únicamente los mismos datos de su plan de pago del teléfono móvil para tomar sus lecciones escolares.

En cuanto a las percepciones de los estudiantes sobre el aprendizaje que estarían adquiriendo, y que corresponden a la quinta dimensión del constructo, compartimos a continuación los resultados mostrados en los reactivos 1, 8, 9, así como los reactivos 14, 16 y 18 del cuestionario. El reactivo 1 (ver figura 7) preguntaba acerca de si el estudiante consideraba poder aprender matemáticas estudiando desde casa, a lo que solamente el 10.3 % manifestó estar totalmente de acuerdo y el 32.5% de acuerdo. Estas cifras ponen de manifiesto que más de la mitad de los alumnos considera que no puede aprender matemáticas en esta modalidad.

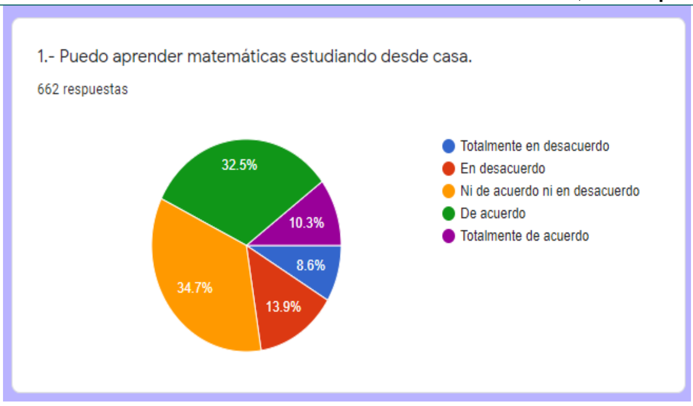
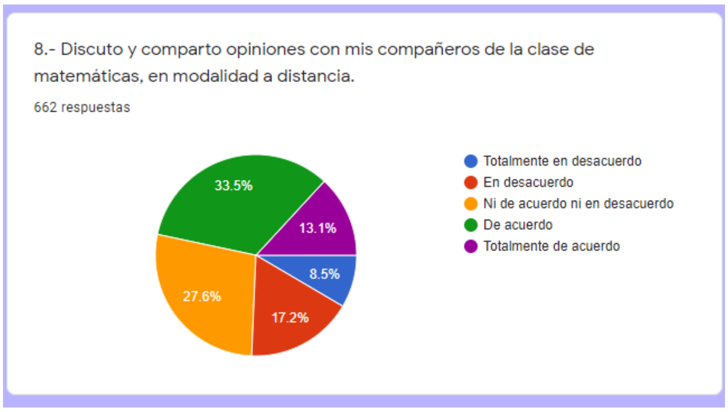


Figura 7. Porcentajes de las respuestas al reactivo 1.

Al indagar en cuestiones más específicas en torno al aprendizaje, la pregunta 8 versaba sobre las actividades de interacción que pueden darse entre los estudiantes, en forma de discusiones u opiniones, que permitan enriquecer los aprendizajes. En este reactivo, el porcentaje de estudiantes de acuerdo y totalmente de acuerdo resultó de 46.6%, y el 27.7 % ni en acuerdo ni en desacuerdo (ver figura 8).

Nuevamente resalta el hecho de que este último porcentaje de estudiantes no valora que resulten importantes los procesos de intercambio y de diálogo que diversas investigaciones identifican como necesarios para la mejor comprensión de ideas y conceptos (Rodríguez, López y Mortera, 2017). Aunado a dicho porcentaje, el 17.2% se manifestó en desacuerdo y el 8,5% en total desacuerdo, lo que suma un 25.7% adicional.

Para Rodríguez et al. (2017), el uso de la tecnología en el aula no puede entenderse sin los procesos de interacción social, lo que indica que existe todavía un reto muy grande en lograr que dichos procesos se completen en la modalidad de trabajo a distancia. Este problema se acentúa si consideramos el aprendizaje de una asignatura como matemáticas, que por su naturaleza, puede representar mayores dificultades.



Figuro 8. Porcentajes obtenidos para el reactivo 8.

El ítem 9, que guarda estrecha relación al anterior, indagó acerca de si el estudiante externaba sus dudas al profesor, durante las clases de matemáticas (ver figura 9) En este caso, se obtuvo que un 37% estuvo de acuerdo y un 11.5% totalmente de acuerdo, porcentajes bastante similares a los mostrados por el reactivo 8.

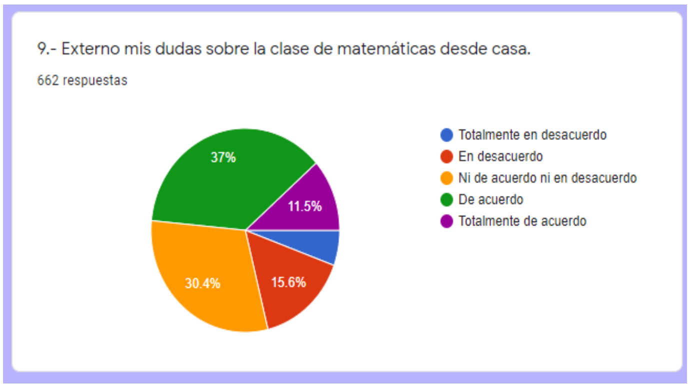


Figura 9. Porcentajes obtenidos para el reactivo 9.

Otros de los reactivos considerados en esta dimensión fueron respectivamente el 14, 16 y 18, relacionados con el empleo de diversos materiales o recursos didácticos para el logro de los aprendizajes. Estos reactivos resultan se suma importancia si consideramos que el tipo y características de los recursos y materiales que el docente implementa para el curso, inciden fuertemente en la disposición que pueden adquirir los estudiantes para el logro de los aprendizajes en esta modalidad de educación a distancia.

A continuación se muestran las respuestas obtenidas al reactivo 14 (ver figura 10), relativo a que si la lectura de distintos textos dispuestos por el profesor, conteniendo explicaciones de los diferentes temas, resultan pertinentes para lograr una suficiente comprensión de los mismos, solamente el 36.1% contestó estar de acuerdo y un 11.9 % totalmente de acuerdo, ambas respuestas sumaron un 48%; en contraste el otro 52 % manifestó cierto grado de indiferencia (26%) o de plano estar en desacuerdo parcial o totalmente (26 %).

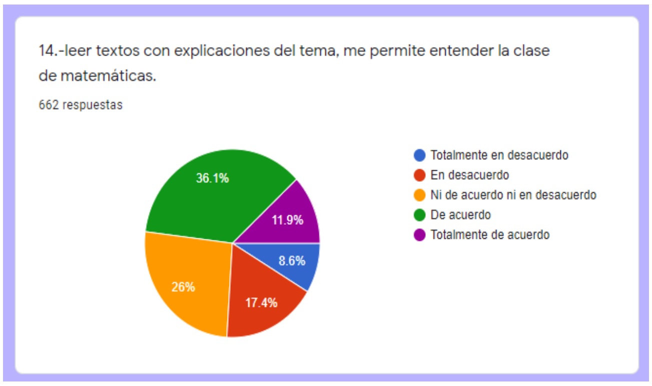


Figura 10. Respuestas proporcionadas al reactivo 14.

La utilización de elementos multimedia dentro del repertorio de recursos didácticos, suele asociarse como medios que permiten un cierto nivel de interacción con el estudiante, además de proporcionar información muy completa acerca de un tópico en específico. El porcentaje de estudiantes que manifestaron estar de acuerdo con el uso de estos elementos video-tutoriales fue del 66.3% (figura 11).

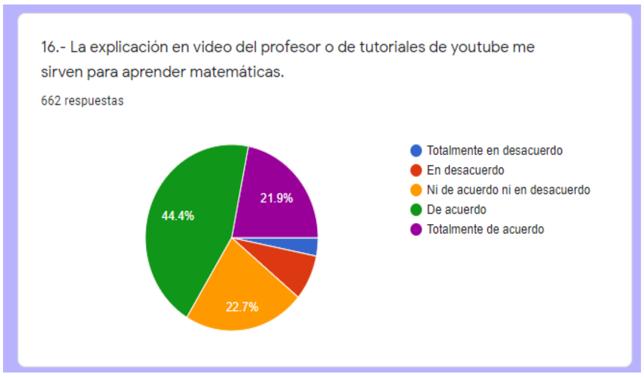


Figura 11. Porcentajes de respuestas obtenidas para el reactivo 16.

En el ítem 18, se indagó acerca del empleo de documentos digitalizados en formato pdf, así como el envío de los trabajos o tareas del estudiante empleando fotografías o archivos con los ejercicios solicitados para evaluar algún contenido (ver figura 12). El 38.1% manifestó estar de acuerdo y un 23.4% totalmente de acuerdo, que sumarizan un 61.5%. En contraste, casi el 38.5% manifestó algún grado de desacuerdo.

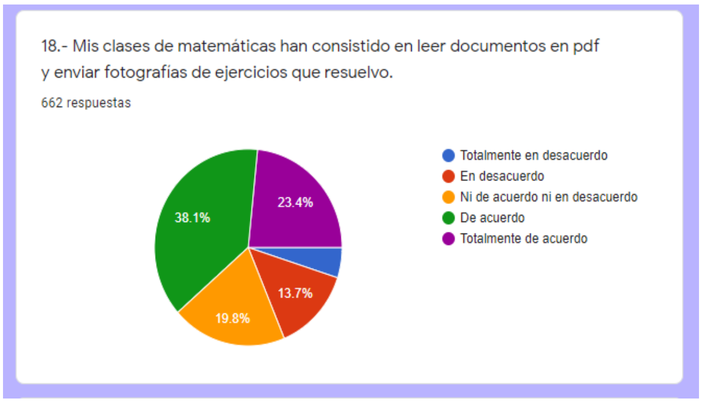


Figura 12. Respuestas proporcionadas al reactivo 18.

Si bien el empleo de diversos tipos de materiales y recursos es deseable, es importante señalar que es la forma de gestión que realiza el profesor, la que puede determinar ciertas características que los hagan idóneos, considerando asimismo que sería adecuado un correcto balance de los distintos materiales: presentaciones electrónicas en formato de diapositivas, lecturas de documentos digitalizados como libros o notas de clase, , documentos de trabajo editables en algún procesador de textos, imágenes o fotografías, videos y tutoriales, ligas a recursos adicionales, entre otros.

Lo anterior pone de relieve lo señalado por diversas investigaciones, en el sentido de que las herramientas tecnológicas por si solas no generan aprendizajes, sino que es el docente quien desde la planificación del curso, puede potencializar su empleo para lograr los aprendizajes (Sánchez, 2020; Viberg, 2020).

En este orden de ideas, resulta interesante explorar las respuestas obtenidas a la pregunta abierta que fue añadida hacia el final del cuestionario. Lo anterior para poder realizar un contraste entre dichas respuestas y los resultados de los ítems de la escala Likert aplicada.

De este modo, las respuestas relativas a las cinco dimensiones consideradas en este estudio, no siempre tienen relación con los comentarios realizados por los mismos estudiantes, ya que en algunos de ellos manifiestan no estar de acuerdo con la manera en que sus profesores de matemáticas los implementaron, en algunos casos, de acuerdo a los estudiantes, la estrategia preponderante es impartir la clase de forma habitual (explicando sobre un pizarrón), sólo que desde la casa del profesor, en modalidad de video-llamada con el resto del grupo.

En otros casos, se manifiesta una estrategia preponderantemente basada en enviar archivos digitales con notas de clase o fragmentos de libro, y solicitar a su vez, el envío de problemas resueltos. En este sentido, se comparten algunos de los comentarios recopilados, en la pregunta final del test que era opcional y abierta se presentó con el siguiente enunciado:

> *Si así lo deseas, agrega un comentario adicional sobre tu experiencia de llevar clases de matemáticas desde casa debido a la cuarentena por la pandemia de Covid-19*

A manera de ejemplos, se reproducen de forma íntegra, algunos de los comentarios vertidos por algunos de los estudiantes que contestaron el formulario:

> *No considero que matemáticas sea una materia que se pueda dar solamente online.*
>
> *No me gustan las clases en línea, me desesperan y causan ansiedad.*
>
> *Que no estoy aprendiendo casi nada con mi sinceridad.*
>
> *Que no sean tantos PDF.*
>
> *Es estresante y confuso.*
>
> *Ha mejorado mis calificaciones en cuanto a la materia de matemáticas, sin embargo, se espera las clases presenciales porque así se resuelven dudas o situaciones presentadas de los ejercicios resueltos.*
>
> *Mi experiencia no ha sido nada fácil y no comprendo tan bien los temas.*
>
> *Pienso que no aprendo ya que estoy acostumbrado a clases presenciales y pienso que es mejor resolver dudas al momento presencialmente que en línea.*
>
> *Creo que fuera de las matemáticas mi experiencia de clases en línea ha sido mejor que las clases presenciales y me sirve mucho.*
>
> *Tengo depresión y ataques de ansiedad, el estrés de las clases en general me ocasiona más problemas.*
>
> *Pues fue una experiencia muy agradable hacer las clases de esta manera, pero extraño ir a la escuela y ver a mis profesores.*
>
> *Se me hace imposible concentrarme.*

Algunos maestros no están listos para este tipo de clases, modalidad presencial es para mi gusto la mejor manera de aprender matemáticas.

Odio las clases desde casa.

Las clases (no sólo de matemáticas) no sirven, sólo es pérdida de tiempo e interés.

Me siento a gusto haciendo mis trabajos, ya que con los videos y videollamadas que la maestra hace, entiendo mejor los temas, me concentro más que en clase presencial. Me gustan los trabajos y actividades que proporciona.

5. Conclusión

Con base en los resultados obtenidos, podemos establecer la prevalencia de ciertos aspectos: la mayoría de los profesores se vieron obligados a modificar algunas estrategias de enseñanza, entre ellas el uso de diferentes recursos digitales, tales como lecturas, videos y tutoriales, páginas web. Asimismo, gestionar sus lecciones a través de diversas plataformas digitales, tales como classroom o moodle; y utilizar servicios de video-llamadas de licencia libre o de paga, tales como Google meet o zoom, entre otras. Sin embargo, el cambio hacia el uso de estas herramientas, no se acompañó necesariamente de cambios profundos en las estrategias de enseñanza empleadas por el docente.

Por lo anteriormente comentado, el reto para los docentes, ante estos cambios se tienen que dar en el terreno de la planificación y gestión de sus cursos (Sánchez, 2020; Drijvers, 2015): diseño de enseñanza (lecciones, tareas y actividades), y los roles que adopte durante su implementación.

En lo que respecta a los recursos disponibles para que los estudiantes pudieran acceder a sus clases en línea, los resultados de la encuesta aplicada indican que casi el 50% de los estudiantes no contaban en sus hogares con servicio fijo de internet, así como con equipo de cómputo personal.

En este sentido, casi el 40% reportó hacer uso de su teléfono móvil para poder tomar sus clases, por lo que parte importante de los datos proporcionados por sus planes de pago contratados, se destinarían para poder tener acceso y conectividad para completar sus clases y trabajos escolares. Investigaciones recientes (Covarrubias, 2021) sostienen que la continuidad de los procesos educativos se ha visto alterada durante esta pandemia, y que resulta todavía utópico pensar que todos los estudiantes han tenido las mejores condiciones para el estudio, tales como espacios dignos o conectividad a internet.

Resulta imperativo poner especial interés en las características del conocimiento que han adquirido los estudiantes durante las clases de matemáticas en modalidad a distancia, pues en definitiva, tendrá características de otra naturaleza, por el simple hecho de que se está mediando dicho aprendizaje con diferentes recursos a los que suelen emplear en modalidad presencial (Covarrubias, 2021; Sánchez, 2020).

En principio, una clase virtual tiene el potencial de poder articular lecciones que incluyen la lectura, la escritura, pero también elementos visuales, auditivos y de video que pueden integrarse coadyuvando con ello a atender las necesidades derivadas de los distintos estilos de aprendizaje. Sin embargo, haría faltan mayores estudios para indagar en forma más específica, acerca de cómo se interrelacionan dichos recursos y sus resultados en los desempeños de los estudiantes, tratando de incidir en las diferencias mencionadas.

A manera de reflexión final, los profesores de matemáticas, al no haber tenido oportunidad de capacitarse de forma planificada para impartir educación en línea, lo han venido haciendo, en el mejor de los casos, con entusiasmo y dedicación, pero con ideas que no son del todo compatibles con los fundamentos de la educación a distancia. Es menester de las instituciones educativas, que tomando como punto de partida las situaciones derivadas de la actual pandemia, planifiquen la capacitación y formación de sus docentes considerando todos aquellos elementos implicados en las modalidades on-line o mixtas, pues estas modalidades educativas ya no podrán dejarse de lado en el futuro.

Referencias bibliográficas

Campos, M. y Torres, A. (2017). Las tareas de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas a distancia. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, 19(17), 142-149.

Covarrubias, L.Y. (2021). Educación a distancia: transformación de los aprendizajes. *Revista Telos* 23(1), 150-158. DOI: https://doi.org/10.36390/telos231.12.

Drijvers, P. (2015). *Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn´t)*. In selected regular lectures from the 12th intenational congress on mathematical education (pp.135-151). DOI: https//doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8.

Freixas, M.R. y Ramas, F.E. (2015). *Un modelo de tutoría para la educación a distancia: el caso de la UNAM*. México: UNAM.

García-Aretio, L. (2001). *La educación a distancia*. Madrid: ediciones Ariel.

Moreno-Armella, L. (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales.* En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. .81-86. Bogotá, Colombia.

Rodríguez, R.A.; López, B.S. y Mortera, F.J. (2017). El video como recurso educativo abierto y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 19 (3), 92-100.

Salinas, J.; de Benito, B. y Lizana, A. (2014). Competencias docentes para los nuevos escenarios de aprendizaje. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado RIEFOP,* 79, 145-163.

Sánchez, C.I. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *Revista Hamut´ay* 7(2), 46-57. DOI: http://dx.doi.org/10.21503/hamu.v7i2.2132.

Santos-Trigo, M. (2010). *A mathematical problem solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools*. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard & J. Hertzog (eds.), Technology Implementation and Teacher education: Reflective models. 296-313.

Torres, A.D., Deserti, E.O y Valentín, N.O. (octubre, 2014). *Retos de los asesores y tutores de la educación a distancia a nivel superior, desde las perspectivas de los estudiantes*. XIX Congreso Internacional de Contaduría, Administración e Informática. UNAM.

Viberg, O.; Grönlund, A. y Andersson, A. (2015). *Integrating digital technology in mathematics education: a Swedish case study, Interactive Learning Environments*, DOI: https://doi.org/10.1080/10494820.2020.1770801.

Torres Rodríguez, Agustín Alfredo: Profesor del Departamento de Ciencias Básicas del Tecnológico Nacional de México, plantel Atitalaquia. Sus líneas de investigación se centran en las problemáticas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas en el nivel superior. Email: agustin.tr@atitalaquia.tecn.mx

Campos Nava Marcos: Profesor investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. Sus líneas de investigación son diseño de tareas de aprendizaje en matemáticas y física y formación de profesores de matemáticas y física. Email: mcampos@uaeh.edu.mx

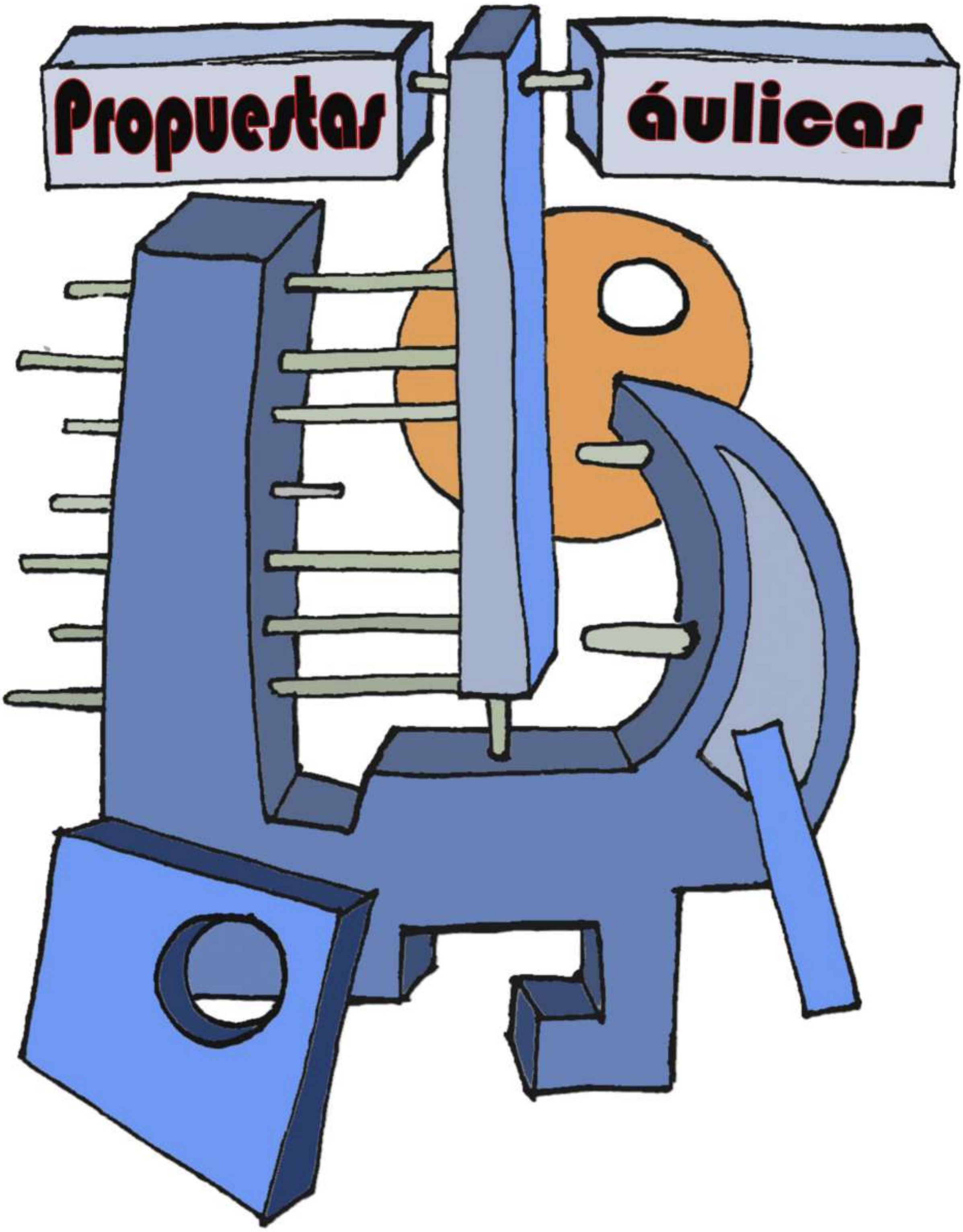
Morales Maure Luisa: Profesora investigadora del Depto. de Matemáticas de la Universidad de Panamá. Actualmente dirige el grupo de investigación en Educación Matemática GIEM21 en su institución, desarrollando proyectos relacionados con la formación y profesionalización de los profesores de matemáticas del nivel básico en servicio. Email: luisa.morales@up.ac.pa

García Marimón Orlando: Profesor investigador del Depto. de Matemáticas de la Universidad de Panamá. Actualmente es doctorando en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Barcelona. Email: olando.egarcia@up.ac.pa

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-18

Sequência didática para o ensino de matemática financeira em tempo de adversidade

Secuencia didáctica para la enseñanza de las matemáticas financieras en tiempos de adversidad

Enoque da Silva Reis, Samanta Margarida Milani, Alexandre Ferreira Santos Júnior, Geisiely Santos Meneguelli, Gian Willian Tavares de Souza

Fecha de recepción: 6/11/2021
Fecha de aceptación: 13/12/2021

Resumen	El presente trabajo tiene como objetivo traer una secuencia didáctica para la enseñanza de la matemática financiera, en particular los componentes de interés simple e interés compuesto propuestos para el tercer año de bachillerato. Como base teórica, los conceptos surgen tanto del interés simple como del compuesto. Como marco didáctico así como la metodología de investigación utilizamos las ideas de Michèle Artigue sobre la Ingeniería Didáctica, más concretamente la secuencia didáctica. Los resultados apuntan a la posibilidad de trabajar de forma remota los elementos conceptuales de estos dos regímenes de interés, así como las diferencias entre ellos y los elementos que los componen de forma satisfactoria. **Palabras clave:** Matemática financiera; interés simple; interés compuesto.
Abstract	The present work aims to bring a didactic sequence for the teaching of financial mathematics, in particular the components of simple interest and compound interest proposed for the third year of high school. As a theoretical basis, the concepts arising from both simple and compound interest. As a didactic framework as well as the research methodology we use Michèle Artigue's ideas regarding Didactic Engineering, more specifically the didactic sequence. The results point to the possibility of working remotely on the conceptual elements of these two interest regimes, as well as the differences between them and the elements that make them up in a satisfactory way. **Keywords:** Financial mathematics; simple Interest; compound Interest.
Resumo	O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino de matemática financeira, em particular dos componentes de juros simples e juros compostos propostos para o terceiro ano do ensino médio. Como base teórica, os conceitos advindos de juros simples e de juros compostos. Para a construção do referencial didático assim como da metodologia da pesquisa, fazemos uso das ideias de Michèle Artigue referente a Engenharia didática em particular os conceitos oriundos da Sequência Didática. Os resultados apontam a possibilidade de trabalhar remotamente os elementos conceituais desses dois regimes de juros, assim como as diferenças entre eles e os elementos que os compõe de forma satisfatória. **Palavras Chaves:** Matemática financeira; juros simples; juros composto.

1. Introdução

É notório que a matemática financeira está presente na vida cotidiana dos alunos, mesmo nestes tempos de adversidade, e essa aproximação do conteúdo matemático com o dia a dia do educando é um fator primordial para o melhor movimento do ensino e da aprendizagem de determinados conteúdo.

Diante das dificuldades advindas da pandemia da Covid-19, notoriamente os professores, alunos e a rede de ensino mundial tiveram um grande desafio: manter o ensino e, em particular, a qualidade do processo de ensino e aprendizagem em todos os níveis educacionais. Assim, surgi então, como uma problemática, como manter a qualidade do ensino nessas adversidades advindas da pandemia, logo este trabalho vem justamente com o objetivo de apresentar uma sequência didática para o ensino de matemática financeira, em particular dos componentes de juros simples e juros compostos propostos para o terceiro ano do ensino médio com o intuito de auxiliar o professor nesse movimento de aulas remotas.

Coloca-se em destaque, que esta proposta que segue trata justamente de uma sequência didática construída de forma coletiva por três licenciandos e dois docentes do ensino superior de matemática, e visa possibilitar de forma remota o ensino de matemática financeira, em particular de juros simples e juros compostos. Nessa construção tem-se que o grupo de alunos tiveram a oportunidade de construir em conjunto trazendo para sua escrita as experiências vividas no ensino médio atreladas aos ensinamentos do curso de licenciatura, e a partir da apresentação do plano aos professores foram realizadas diversas observações de cunho técnico e teórico presentes na proposta.

2. Engenharia Didática

A Engenharia Didática como uma modalidade metodológica vem se evidenciando entre os pesquisadores em Educação Matemática. Como mostra uma breve pesquisa no banco de teses e dissertações da Capes que contém como descritor o termo “Engenharia Didática” tem-se um total de 588 resultados[1], ou seja, um número expressivo de pesquisas que fazem de alguma forma uso dessa temática. A partir da leitura de Almouloud; Coutinho (2008) e Carneiro (2005) entendemos que a metodologia possui como uma das finalidades, a análise dos processos de ensino e aprendizagem que ocorrem durante a aplicação de um projeto de pesquisa, já na área da Educação Matemática objetiva conceber, realizar, observar e analisar o estudo das sequências didáticas voltadas à matemática inserida, portanto, pode ser utilizada no quadro teórico do ensino pedagógico.

Buscando realizar um panorama histórico desta temática, conforme Artigue (1996) os estudos que levaram a Engenharia Didática tiveram seu início nas décadas dos anos 70 a 80 na França, onde buscava-se uma metodologia para auxiliar o ensino da matemática, porém não havia se consolidado. Mas em 1988, Michéle Artigue publica: “Ingénierie didactique” na revista Recherches en Didactique des Mathématiques, onde detalha a Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa e investigação, apresentando suas características, singularidades e fases.

Esta metodologia idealizada por Artigue, surgiu em decorrência de uma vertente conhecida como Didática da Matemática. Conforme, Douady (1985) define a Didática da

[1] Pesquisa realizada no site Catálogo de Teses & Dissertações - CAPES em 19/12/2021 as 11:30horas

Matemática como a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico assim como no ensino superior, propondo-se não somente a descrever mas também a explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática e ainda, segundo a autora, a Didática da Matemática, não se reduz a pesquisar uma boa maneira ou modelo de ensinar uma determinada noção ou conceito particular.

Conforme Almouloud (2007) outro grande nome que contribuiu com os estudos da Didática da Matemática foi Brousseau que é considerado um dos precursores da área, em particular ele contribuiu com o desenvolvimento da teoria das Situações Didáticas. A proposta surgiu em um momento histórico em que a visão dominante no campo da Educação era essencialmente cognitivo, devido a teoria de Piaget e outros colaboradores, que evidenciou o papel central da ação, a originalidade do pensamento matemático e as etapas de seu desenvolvimento nas crianças.

Entendemos que na perspectiva de Brousseau (1996), a Didática da Matemática deveria se centrar nas atividades didáticas que tem como objetivo o ensino dos saberes matemáticos. Dentro desta concepção, a Didática da Matemática deve oferecer explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise, incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos (fazendo referência a certos aspectos da obra de Piaget), além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

Brousseau (1996) considerava que as situações didáticas deveriam se situar na proposta construtivista e contemplar os processos adaptativos e de equilibração delineados na teoria de Piaget. Porém, o referido autor considera que Piaget não observou a particularidade da aprendizagem de cada conhecimento matemático ao considerar a estrutura formal e a função da lógica como fundamentais, ideias defendidas por alguns matemáticos formalistas da Matemática Moderna.

Para superar tais impedimentos, Brousseau (1996) propôs uma retomada do contexto de origem dos saberes e a importância do valor funcional das etapas que o saber percorre até ser elaborado, o que equivale a resgatar a gênese epistemológico-cultural do saber. Assim buscar levar em consideração que o sujeito que aprende necessita, de certa forma, construir por si mesmo seus conhecimentos, e essa construção se constitui por meio de um processo adaptativo com certa semelhança com ao que realizam os produtores originais dos conhecimentos que se quer ensinar.

Para Brousseau (1996), as situações didáticas são uma gênese artificial análoga àquela que originou o conhecimento, de modo que a aprendizagem dos sujeitos agentes (os alunos) ocorre por adaptação, assimilação e equilibração. O que podemos observar com o designado por Piaget quando retrata nas etapas enunciadas por ele em, selecionar, antecipar, executar e controlar as estratégias que serão aplicadas à resolução do problema que foi formulado a partir da sequência didática.

Segundo Artigue (1996, p.193), o termo Engenharia Didática é utilizado nas pesquisas da didática da matemática que inclui uma parte experimental, onde são empregados métodos próprios para fazê-lo, esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro:

> [...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar

> [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. Artigue (1996, p.193),

Desta forma, a Engenharia Didática se caracteriza por propor conforme Douady (1993) *apud* Machado (2002, p. 198):

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma constante, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

Segundo Campos (2006, p. 1), ao observar a engenharia didática ressalta que a mesma possui em seu quadro didático uma dupla funcionalidade “[...] como metodologia de pesquisa e como de produção de situações de ensino e aprendizagem, [...]”. Essa mesma visão observada em Campos (2006) está baseada nos ensinamentos de Douady (1996, p.241):

> […] el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta em funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. Douady (1996, p.241)

Conforme Pommer (2013, p.21), em sua visão a engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa se coloca como pesquisa quantitativa,

> A Engenharia Didática se enquadra na perspectiva da pesquisa qualitativa, que inicialmente teve como finalidade estudar problemas relativos à aprendizagem de conhecimentos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, dificuldades e obstáculos, compreender os níveis de desenvolvimento das estratégias dos alunos, a aprendizagem, introdução e construção de conhecimentos específicos, a formação de professores, explicitar a relação entre temas da matemática e outras áreas de conhecimento, dentre outras. Pommer (2013, p.21)

Conforme Pais (2002) a Engenharia Didática surgiu no transcorrer das discussões desenvolvidas no IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), na França, ao final da década de 1960. Em seus primórdios, o IREM desenvolvia uma complementação na formação de professores de matemática e na produção de meios materiais de apoio para a sala de aula, destacando-se o desenvolvimento de jogos, brinquedos, problemas, exercícios e experimentos.

No contexto da época, as discussões no IREM sobre o ensino da Matemática se dirigiram para a “[...] produção de conhecimento para controlar e produzir [...] ações sobre o ensino” (GÁLVEZ, 1996, p. 26). Nesse panorama, houve consenso por parte de pesquisadores da corrente da Didática da Matemática para tomar como objeto de estudo as situações didáticas, proposta que estava sendo desenvolvida por Guy Brousseau.

Dessa forma a engenharia didática tem meios para se chegar aos fins desejáveis, porém não segue apenas uma reta, é flexível, podendo o pesquisador retomar a qualquer etapa que julgue necessário.

A engenharia didática como metodologia de pesquisa, se distingue em dois níveis: o da microengenharia e o da macroengenharia, conforme Machado (2002) os quais são de grande importância dentro da engenharia didática. O primeiro tem um tema específico como objeto de ensino, que levam em conta fenómenos específicos de uma determinada sala de aula, ou grupo de indivíduos, o que o professor pode utilizar para ensinar determinado assunto levando em consideração as peculiaridades daquele grupo de aprendizes. Já o segundo, permite compor-se a complexibilidade de microengenharia dos fenômenos ligados ao tempo de duração nas relações ensino/aprendizagem, são pesquisas que se complementam e são necessárias e que podem ser exploradas por outros grupos de indivíduos, não ficando somente em um ambiente, mas podendo ser amplamente difundida, uma metodologia utilizada para um grupo que pode ser aplicada em outros grupos com contextos parecidos ou não. Conforme Pais (2002) uma das características da engenharia didática é o registro de estudos de caso e sua validação, que se dá sobretudo internamente, baseando-se na confrontação entre a análise a priori apoiada na teoria da análise posteriori.

Conforme Douady (1987) que na sequência é importante ressaltar que a singularidade da engenharia didática não repousa sobre seus objetivos, más em suas características de funcionamento metodológico.

Por fim, é possível observar a partir das leituras e dos fragmentos aqui apresentados que a engenharia didática tem uma natureza dupla: um produto é um processo de atividade de design educacional é um produto de análise e design didático, bem como o processo de aplicação de um produto de ensino projetado para o ambiente de aprendizagem. Assim, como atividade instrucional, a engenharia didática pode ser definida como uma série de etapas da análise, projeto e construção de produtos de ensino e seu uso no processo instrucional, a fim de criar ambientes eficazes de aprendizado e alcançar os resultados de aprendizagem desejados.

Após esta breve discussão acerca da Engenharia Didática visando uma abordagem histórica, passamos então ao que estamos considerando como o núcleo dela, que são suas fases, assim trazemos no próximo tópico uma abordagem descritiva delas.

2.1 Fases da metodologia da engenharia didática

A metodologia denominada engenharia didática compõe-se em quatro fases investigativas: a primeira fase são as análises preliminares; a segunda fase são as análises a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; a terceira fase são a experimentação e por fim, a quarta fase baseada na análise a posteriori e validação da experiência. A figura 1 representa tal evidência, conforme Artigue (1988).

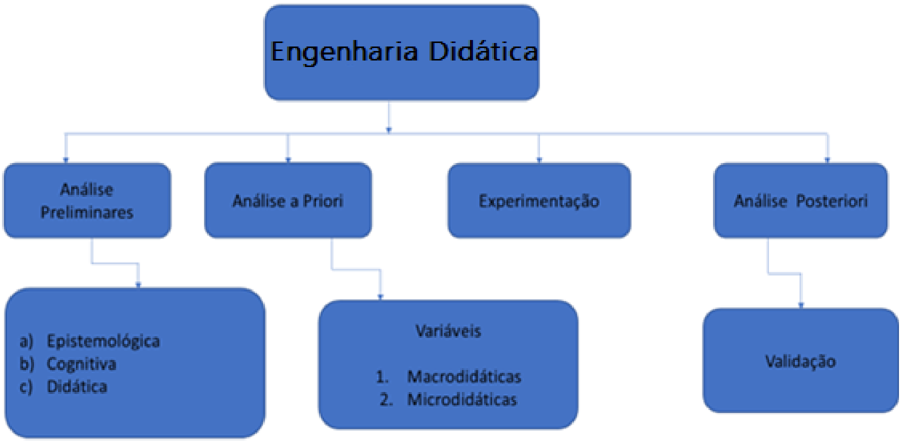


Figura 1: Fase da Engenharia Didática
Fonte: Autor, adaptado Artigue (1988)

Vale ressaltar que as quatro fases não ocorrem de maneira a ser engessada e sequencial e é preciso, em alguns momentos, da antevisão, da associação e a aplicação de elementos característicos destas quatro fases, como aponta Pommer (2013).

Uma pesquisa que segue os princípios da Engenharia Didática perpassa pela fase das análises preliminares é a fase que vai embasar a engenharia didática; É nesta fase que é discutido o quadro teórico, os estudos pertinentes ao tema discutido onde se busca o conhecimento do que já foi feito anteriormente.

Para Artigue (1988), seu principal objetivo está em analisar o funcionamento do ensino tradicional do conteúdo e propor uma intervenção no melhoramento da sala de aula usual.

De acordo com Souza e Cordeiro (2005):

> As principais diferenças entre as pesquisas realizadas dentro de uma Metodologia da Engenharia Didática e outras, na área da didática que não são desenvolvidas por meio desta metodologia, são observadas na profundidade das análises preliminares, e também no fato da validação das hipóteses realizadas sobre o problema da pesquisa serem validadas no confronto entre análise a priori e a posteriori (p. 37-38).

Conforme Machado (2002) as análises preliminares são realizadas através de concepções do quadro teórico geral e os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o tema em questão, análise epistemológica dos conteúdos; análise do ensino atual e seus efeitos; análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; e análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

As análises preliminares são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia didática, porém, elas são retomadas e aprofundados durante todo o transcorrer do trabalho, deixando o pesquisador livre para realizar sua pesquisa de forma satisfatória.

Não podendo deixar de considerar os objetivos da pesquisa, que são partes fundamentais para sua elaboração. As análises preliminares são feitas para embasar as concepções da engenharia, porém não são deixadas de lado, em todo o processo da pesquisa são feitas retomadas, dependendo da pesquisa e seu grau de aprofundamento.

Para se fazer uma análise é primordial verificar se dentro do tema proposto os conceitos e funcionamentos do ensino usual, conhecer todo o material didático utilizado e outros disponíveis dentro da temática escolhida, analisar os entraves e chegar a uma determinada condição para um ponto de equilíbrio.

Fase da concepção e da análise a priori, a pesquisa se desenvolve com orientações obtidas nas análises preliminares, delimitando as variáveis pertinentes, que são chamadas de variáveis de comando.

Segundo Artigue (1998) para facilitar a análise de uma engenharia a autora as define em duas categorias, a primeira delas contém as variáveis macrodidáticas ou globais, concernente a organização global da engenharia enquanto a segunda tem-se as variáveis microdidáticas ou locais, concernente a organização local da engenharia, organização de uma sessão ou uma fase.

Não podemos deixar de observar que as variáveis podem ser de ordem geral ou específica, podendo se tratar de um todo ou parte de uma situação de pesquisa. Estão interligadas entre si, pois a escolha global pode estar dentro de uma intervenção local.

Análise a priori abrange uma parte da descrição e outra parte da previsão e está centrada em características de situação didática que se quer aplicar a um determinado grupo de alunos visando a experimentação. A análise a priori é constituída por três elementos distintos, a saber:

- ✔ Descrever as escolhas locais feitas e características da situação adidática decorrente das escolhas.
- ✔ Analisar o desafio a situação para o aluno, conforme as possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e validação que dispõe o aluno durante a experimentação;
- ✔ Prever comportamentos possíveis e mostrar como a análise efetuada pode controlar esses comportamentos e asseguram que esses comportamentos ocorram para resultar o desenvolvimento do conhecimento pretendido.

Essa análise a priori objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: descritivo e o previsivo. Nessa fase o foco principal é a capacidade de aprendizagem do aluno e o professor apenas faz interferências quando necessário.

Pelo exposto, fica claro que a análise a priori objetiva a consideração do aluno sobre dois aspectos o descritivo e o previsível, não há nela, tradicionalmente, lugar para o papel do professor, que quando aparece, é simplesmente no aspecto descritivo o aluno é considerado ator principal e o papel do professor é recuperado, em parte, no contrato didático e, mais recentemente, no caso das situações de institucionalização. As situações de institucionalização são aquelas em que o professor retorna as questões discutidas e estabelece os principais resultados da teoria.

As escolhas de ordem geral, globais, precedem a descrição de cada fase da engenharia quando influem as escolhas locais. Embora as escolhas globais possam aparecer separadamente das escolhas locais, elas são interdependentes.

Ainda tendo como base Artigue (1998) a fase de experimentação é clássica, nela a engenharia é realizada com um certo grupo de alunos, se inicia com o contato pesquisador/professor/observador e alunos que são os objetos de investigação.

A experimentação supõe:

- ✔ A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa ao grupo de alunos que participará da investigação;
- ✔ Estabelecimento de contrato didático;
- ✔ Aplicação de instrumentos de pesquisa;
- ✔ Registro das observações feitas durante a experimentação.

É importante nessa fase de experimentação se a previsão for de mais de uma sessão, fazer uma análise posterior local, após algumas sessões para confrontar com a análise a priori feitas, para verificar quantas sessões serão necessárias para concluir a pesquisa.

Na experimentação é preciso respeitar, dentro do possível o que se escolheu nas análises a priori, para evitar frustração na engenharia. Esse contato com a ambientação da pesquisa é importante para prever como será feita a engenharia e sua duração em tempo e quantidade de sessões.

A análise a posteriori e validação encerram as fases da engenharia, essa fase apoia-se sobre todos os dados coletados durante a experimentação e observações realizadas durante cada sessão de ensino, e as produções realizadas pelo grupo de alunos em sala e fora dela. Para uma melhor compreensão dos fatos às vezes se torna necessário dados complementares tais como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, que podem ser realizadas durante ou após a experimentação.

Por fim, essa metodologia se define por modelo experimental tendo as realizações didáticas realizadas em sala de aula e a observação e análise das sequências de ensino, e da confrontação das análises a priori e a posteriori que permitem validar ou não, as hipóteses levantadas no início da engenharia.

Passamos neste momento ao tópico 3 deste trabalho com o título “Uma sequência didática para o ensino de Juros Simples e Composto” em resumo trata-se de uma proposta construída de forma coletiva como já enunciado, em que foram levados em consideração os pressupostos advindos da Metodologia da Engenharia Didática idealizado por Michèle Artigue, reforçamos neste momento que esta proposta até o momento não foi utilizada em sala de aula, do ensino médio para o processo de ensino e aprendizado do conteúdo matemático proposto, diante disso não temos elementos dessa prática para análise. No entanto, no âmbito da formação inicial de professor de matemática, ou seja, no curso de licenciatura em matemática a proposta foi apresentada e discutida entre os pares sempre observando a metodologia aqui colocada como base.

3. Uma Sequência Didática para o ensino de Juros Simples e Juros Compostos

Turma a ser desenvolvida a sequência didática: 3° ano do Ensino Médio

Tema da sequência didática: Matemática Financeira

Conteúdos a serem trabalhados: Juros Simples e Juros Compostos

Objetivos da sequência didática: Conceituar juros simples e compostos; compreender as diferenças entre juros simples e compostos; identificar o capital, a taxa de juros e o tempo; resolver problemas envolvendo juros simples e compostos; refletir criticamente sobre aplicações e empréstimos – situações reais – que necessitam de conhecimentos sobre Juros Simples e Compostos.

Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas: Pesquisar caso ache importante.

Tempo de execução da sequência didática: 2 aulas de 50 minutos cada.

Materiais necessários: Computador ou Celular; acesso à internet; reunião pelo Google Meet; episódio do desenho Futurama; slides; plataforma GeoGebra; calculadora de juros compostos; Kahoot.

Detalhamento das aulas:

Organização: A aula será ministrada de forma remota, pelo Google Meet, logo todos os alunos deverão ter um aparelho eletrônico como (tablete, celular, computador...) e acesso à internet.

Introdução: No início da aula deverá ser apresentada uma sinopse do desenho Futurama[2], ao qual abordará o tema a ser trabalhado na sequência didática com auxílio de um vídeo de humor. Iremos assistir os setes primeiros minutos do sexto episódio deste desenho, e centraremos nossas discussões na parte em que mostra o investimento realizado pelo protagonista de $0,93 em um banco e, após 1000 anos, o investimento havia gerado mais de 4 bilhões de dólares. Após a finalização do vídeo, mostraremos a relação entre o desenho e a aula que será ministrada, expondo que é possível resolver o dilema do personagem através de conhecimentos sobre Juros Simples e Compostos.

Desenvolvimento

1° Etapa: Inicialmente haverá a explicação de alguns conceitos básicos sobre Juros Simples e Compostos e suas fórmulas de maneira detalhada. Após esta breve introdução, será resolvido um exemplo envolvendo o assunto trabalhado, a fim de promover a interação e melhor compreensão do conteúdo, visando facilitar o ensino e a aprendizagem durante a pandemia, utilizando slides.

Exemplos 1: Um investidor aplica R$ 1.000,00 a juro simples de 2% ao mês. Determinar a taxa equivalente ao ano, o juro recebido após 1 mês e após 2 anos, e o montante recebido após 8 meses.

Resolução:

●Considerando:

○J = juros

○C = capital

○i = taxa

○t = tempo

○M = montante

●Primeiro deve-se calcular qual é a taxa (i) ao ano. Separando os dados:

○C = R$ 1.000,00

○i = 2% ao mês

○$i_{a.m.}$= taxa ao mês

○$i_{a.a.}$= taxa ao ano

Calculando:

---

[2] Disponível em <https://animezeira.net/episodio/futurama-episodio-6-a-minha-fortuna-sao-os-meus-amigos/>

Se $i_{a.m.}$= 2%, então

$i_{a.a.}$= 12 . 2%, logo

$i_{a.a.}$= 24%.

Assim, a taxa ao ano será de 24%.

●Agora calcula-se o juro recebido após 1 mês. Separando os dados:

○C = R$ 1.000,00

○i = 2% ao mês

○2% = 2 : 100

○2% = 0,02

Calculando:

Temos que J = C . i . t

Substituindo:

J = 1000 . 0,02 . 1

Então J = R$20,00.

Assim, o juro recebido após um mês será de R$20,00.

●Neste passo se calcula o juro recebido após 2 anos. Separando os dados:

○C = R$ 1.000,00

○i = 2% ao mês

○2% = 0,02

○2 anos = 24 meses.

Calculando:

Temos que J = C . i . t

Substituindo:

J =1000 . 0,02 . 24

Assim, J = R$480,00.

Portanto, o juro recebido após 2 anos será de R$480,00.

●Por fim, é calculado o montante recebido após 8 meses.

Os dados observáveis são M = C + J, mas não está explícito o juro recebido após 8 meses, então primeiramente deve-se calcular o juro:

J = C . i . t, substituindo

J = 1000 . 0,02 . 8

Então J = R$160,00.

Este é o momento de calcular o montante. Substituindo na fórmula M = C + J:

M = 1000 + 160

Assim, M = R$1160,00.

Logo, o montante recebido após 8 meses é de R$1160,00.

2° Etapa: Nesta etapa é apresentado o conceito de Juros Compostos através da plataforma GeoGebra[3], utilizando como recurso didático um exercício sobre investimento (capital) que foi aplicado a uma taxa x em um período y[4]. Após a atividade será utilizado outro exemplo disponível na Plataforma GeoGebra para identificar as diferenças entre Juros Simples e Compostos[5].

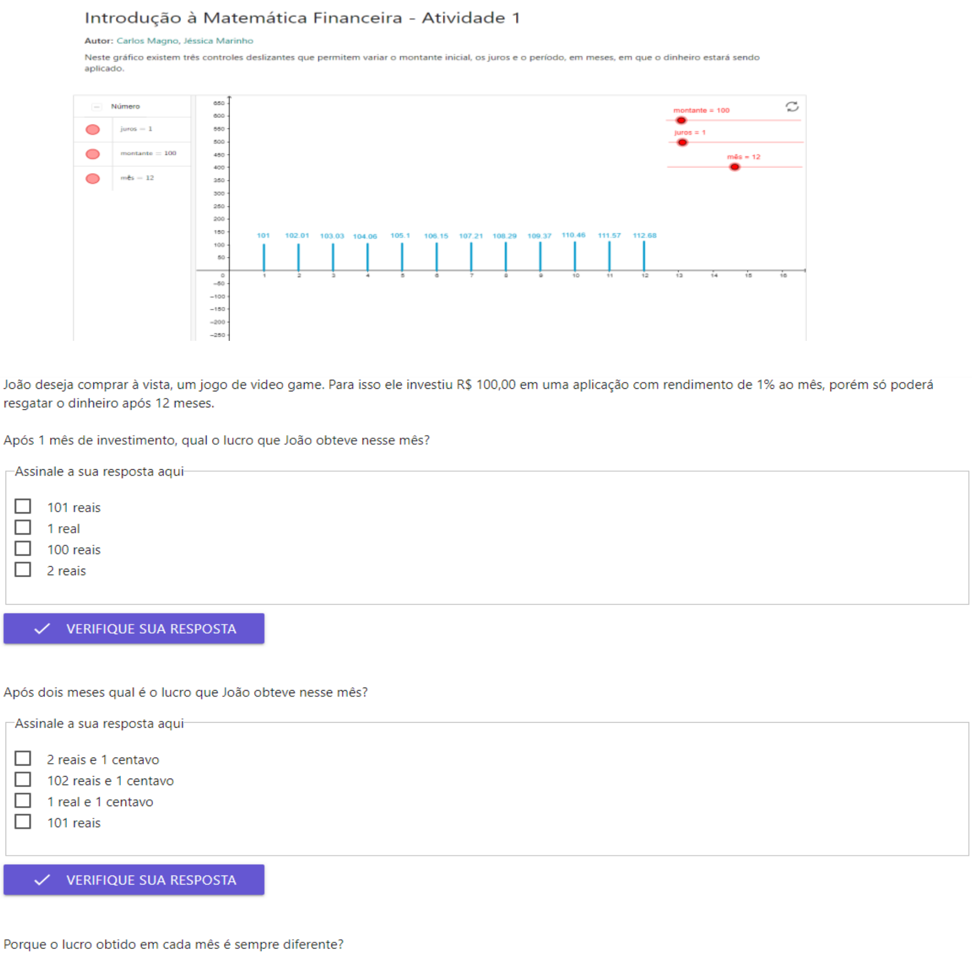


Figura 2: Atividade 1
Fonte: https://www.geogebra.org/m/er9wmrbx

3°Etapa: O professor propõe uma situação hipotética e, com o auxílio da Plataforma GeoGebra, terá a possibilidade de distinguir as características e aplicabilidades dos Juros Simples e Compostos. A situação hipotética será criada e a partir disso serão desenvolvidos exercícios em sala de aula, sempre baseando-se na sugestão dos alunos para a construção do problema.

Exemplo 2 (situação hipotética): A empresa Marcio Brás (os/as discentes poderão juntamente com o/a professor/a criar uma empresa fictícia) necessita de um empréstimo de R$ 1000,00 (os/as discentes juntamente com o/a professor/a podem sugerir o valor do empréstimo) para comprar peças de automóvel e só quem está disposta a emprestar essa quantia é a/o Fulano (escolher algum aluno/a) que age como uma boa agiota e dá

[3] Disponível em <https://www.geogebra.org/>
[4] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/er9wmrbx>
[5] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/u85paqen>

duas opções de juros mensais: juros simples de 20% ou juros compostos de 10%. Qual das propostas é a mais rentável?

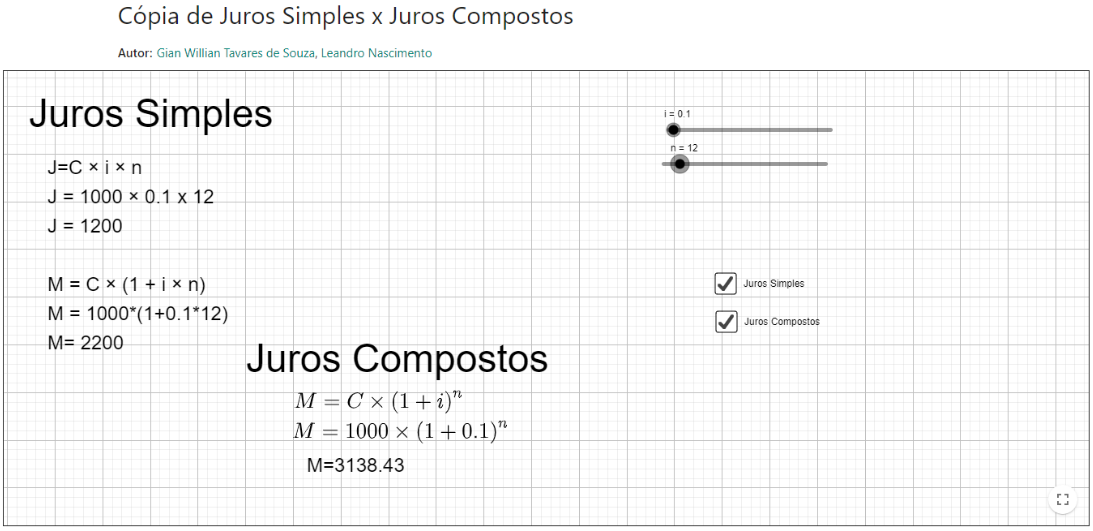


Figura 3: Resolução do exemplo 2 com auxílio da Plataforma GeoGebra
Fonte: https://www.geogebra.org/m/u85paqen

Por conseguinte, será feita a comprovação do que foi evidenciado no desenho Futurama, usando a calculadora financeira online[6] será demonstrado que os $0,93 quando aplicados à uma taxa de 2,25% ao ano em um período de 1000 anos geram aproximadamente $4,3 bilhões, um resultado próximo ao que é exposto no desenho.

4° Etapa: Para avaliar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto em questão, será utilizada a ferramenta Kahoot[7]. De acordo com o B2B Stack Blog (2017), a Kahoot é uma plataforma de aprendizado utilizada para criar conteúdos dinâmicos, utilizada como tecnologia educacional em escolas e outras instituições de ensino. Seus jogos de aprendizado, "Kahoots", são testes de múltipla escolha que permitem a geração de usuários e podem ser acessados por meio de um navegador da Web ou do próprio aplicativo. O Kahoot sugerido possui sete questões curtas que abordam os conceitos básicos de juros, como capital, taxa, montante e sua relação com outras áreas da Matemática como as progressões geométrica e aritmética e o estudo de funções[8]. O jogo deverá ser realizado no final da aula como uma recapitulação dos conceitos anteriormente apresentados, utilizando apenas as funções gratuitas da ferramenta.

Conclusão: Será passada aos alunos uma atividade para ser feita em casa, que consiste em uma “entrevista” com os pais sobre os investimentos e empréstimos realizados por eles nos últimos anos. Posteriormente eles deverão apresentar na próxima aula as informações pesquisadas em casa.

Avaliação: Para verificar se os objetivos citados no início foram alcançados, será proposto que os alunos apresentem em grupos duas propostas semelhantes à situação hipotética apresentada na 3° etapa desta sequência. Vale ressaltar que os grupos precisam escolher situações-problemas e realizar os cálculos em relação ao Juros

[6] Disponível em <https://www.mobills.com.br/blog/calculadoras/calculadora-juros-compostos/>
[7] Disponível em <https://kahoot.com/schools-u/>
[8] As questões se encontram no “APÊNDICE A” deste artigo.

Simples e Compostos, no intuito de fazê-los refletir criticamente sobre as diferenças significativas a longo prazo referentes aos conteúdos.

4. Conclusão

Diante do objetivo proposto nesta pesquisa de apresentar uma sequência didática para o ensino de matemática financeira, em particular dos componentes de juros simples e juros compostos propostos para o terceiro ano do ensino médio. Observa-se que a luz das ideias advindas da Metodologia da Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue, que mesmo pensando em um movimento de aula remota, ou seja, sem a presença física dos alunos é possível construir de forma satisfatória uma sequência didática que possibilite o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo aqui proposto. Vale ressaltar que para que ocorra de forma satisfatória o processo tanto de ensino quanto de aprendizagem é primordial a utilização de equipamentos como celular, tablete ou computador que possuam acesso a internet, tanto por parte do aluno quanto do professor, e também a participação dos alunos no decorrer da sequência. E por fim, é possível que a sequencia construída nesse movimento coletivo e que aqui esta apresentada, pode ser utilizada não somente em aula remota, mas também em uma aula presencial.

Referências

Almouloud, Saddo A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* 1ª ed. Curitiba: Editora UFPR.

Almouloud, Saddo Ag; Coutinho, Cileda. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*.

Artigue, M. (1996). Engenharia Didáctica. In: *Didática das Matemáticas*. Brun, J. (Org.). Lisboa: Instituto Piaget.

Artigue, M. (1998). *Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3), 281-307. La Pensée Sauvage.

Blog. LIRA, Márcia. (2017). *Você sabe o que é o Kahoot!? Entenda aqui como funciona!* B2B Stack.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, 7(2).

Brousseau, G. (1981). *Problèmes en Didactique dês decimaux.Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2(3), 37- 127.

Brousseau, Guy. (1996). Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: Brun, J. *Didática das Matemáticas*. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Brousseau, G. A. (2006). *Teoria das Situações Didáticas e a Formação do Professor.* Palestra. São Paulo: PUC.

Brousseau, Guy. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas*. São Paulo: Ática.

Campos, E. de F. (2006). Ingeniería Didáctica. Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática.

Carneiro, Vera Clotilde Garcia. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, Campinas. UNICAMP, 13(23).

Douady, R. (1985). *Didactique des Mathématiques.* Encyclopedia Universalis, 885-889.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des mathématiques, 7(2), 5-32.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Gálvez, G. A. (1996). Didática da Matemática. In: Parra, C.; Saiz, I. *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 26-34.

Machado, Silvia Dias Alcântara. (2002). Engenharia Didática. In: Machado, Silvia Dias A. *Educação Matemática: uma introdução***.** 2ª ed. São Paulo: EDUC, 197-208.

Pais, Luiz Carlos. (2002). *Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.* 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Pommer, W. M. *A. (2013). Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*. São Paulo.

Souza, R. N. S. de; Cordeiro, M. H. *A. (2005). Contribuição da Engenharia-Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica.* Educere.

Reis, Enoque da Silva, Pós Doutorando pela Universidade Federal da Grande Dourados. Doutor e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Professor Adjunto no departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Rondônia, *campus* de Ji-Paraná. Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar GEPHEME RO.

Milani, Samanta Margarida, possui Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UNIR, especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pela UNINTER, graduada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso. Professora efetiva do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia de Rondônia, *campus* Cacoal, no curso de Licenciatura em Matemática.

Júnior, Alexandre Ferreira Santos, Graduando em Licenciatura Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia de Rondônia, *campus* Cacoal.

Meneguelli, Geisiely Santos, Graduanda em Licenciatura Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia de Rondônia, *campus* Cacoal.

Souza, Gian William Tavares de, Graduando em Licenciatura Matemática pelo Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia de Rondônia, *campus* Cacoal.

APÊNDICE A

“Kahoot!: Juros simples e compostos”

1) Qual das alternativas abaixo representa corretamente a fórmula do montante em juros simples?

(x) M = C + J ( ) M = C.(1+i).t ( ) M = C.[(1+i)^t] ( ) M = C.J

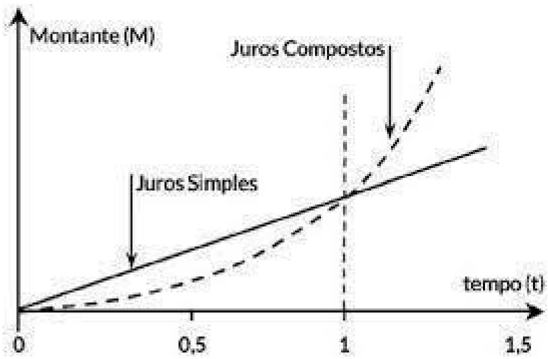
2) Os Juros compostos sempre rendem com base no capital inicial.

( ) Verdadeiro (x) Falso

3) considerando taxas e períodos iguais, investir em juros compostos é sempre mais vantajoso que em juros simples?

( ) Verdadeiro (x) Falso

Slide explicativo



Os juros simples serão maiores se o tempo de rendimento for menor que um período.

4) As progressões de juros simples e o composto se baseiam, respectivamente, em:

( ) P.A. e P.A. (x) P.A. e P.G. ( ) P.G. e P.A. ( ) P.G.e P.G.

5) Considere um capital de R$10.000,00 aplicado a juros simples de 1% a.m. Em 10 meses, quanto esse capital terá rendido?

( ) R$10.100,00 (x) R$1.000,00 ( ) R$11000,00. ( ) R$100,00

6) A taxa de juros de 1% ao mês em juros simples é proporcional a que taxa anual?

( ) 20% ao ano ( ) 10% ao ano (x) 12% ao ano ( ) 16% ao ano

7) No episódio de "Futurama", a fortuna de 4bi acumulada do personagem só é possível graças ao sistema de juros compostos?

(x) Verdadeiro ( ) Falso

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-18

O Kahoot! no ensino de sequências e progressões geométricas norteado pela Teoria das Situações Didáticas: uma experiência no ensino remoto

Renata Teófilo de Sousa, Paulo Vítor da Silva Santiago, Francisco Régis Vieira Alves

Fecha de recepción: 8/11/2021
Fecha de aceptación: 21/12/2021

Resumen	El objetivo de este trabajo fue desarrollar una secuencia didáctica utilizando el Kahoot! como una forma de posibilitar la enseñanza de secuencias y progresiones geométricas, con el apoyo de la Teoría de Situaciones Didácticas, buscando diversificar el abordaje de esta temática, considerando las dificultades de aprendizaje en la enseñanza remota. La investigación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de primer año de secundaria de una escuela pública en el estado de Ceará, Brasil. La metodología adoptada en este trabajo fue la Ingeniería Didáctica, donde sus fases guiaron el desarrollo de la investigación y recolección de datos. **Palabras clave**: Kahoot!, secuencias y progresiones geométricas, enseñanza remota, Teoría de Situaciones Didácticas.
Abstract	The objective of this work was to develop a didactic sequence using the Kahoot! as a way to enable the teaching of geometric sequences and progressions, with the support of the Theory of Didactic Situations, seeking to diversify the approach to this theme, considering the learning difficulties in remote education. The research was developed with a group of students from the 1st year of high school, from a public school in the state of Ceara, Brazil. The methodology adopted in this work was Didactic Engineering, where its phases guided the development of research and data collection. **Keywords**: Kahoot!, geometrical sequences and progressions, remote teaching, Theory of Didactic Situations.
Resumo	O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma sequência didática utilizando a plataforma Kahoot! como forma de viabilizar o ensino de sequências e progressões geométricas, com amparo da Teoria das Situações Didáticas, buscando diversificar a abordagem deste tema, considerando as dificuldades de aprendizagem no ensino remoto. A pesquisa foi desenvolvida com um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio, de uma escola pública no estado do Ceará, Brasil. A metodologia adotada neste trabalho foi a Engenharia Didática, onde suas fases nortearam o desenvolvimento da pesquisa e coleta de dados. **Palavras-chave:** Kahoot!, sequências e progressões geométricas, ensino remoto, Teoria das Situações Didáticas.

1. Introdução

Dentro do debate acerca de metodologias e práticas voltadas para o Ensino de Matemática na educação básica, por diversas vezes deparamo-nos com um elo frágil entre os conceitos matemáticos abordados, sua relação com o mundo que nos cerca e a importância de seu aprendizado pelos alunos. E a incompreensão destas relações pode proporcionar dificuldades na disciplina, fazendo com que ela seja vista de forma negativa e difícil. Entretanto, tais concepções podem ser desconstruídas através de formas de ensino dinâmicas, com uma contextualização do cotidiano do aluno, trazendo os conceitos matemáticos de forma interessante e divertida.

Para tal, podem ser utilizadas as tecnologias digitais como ferramentas para o processo de ensino, incorporadas à metodologia do professor em busca de uma alternativa que torne o estudo da disciplina de Matemática mais bem aceito pelos alunos.

O tema matemático escolhido para este trabalho foi Sequências e Progressões Geométricas (PG), pois este configura-se em um dos conteúdos em que os alunos apresentam dificuldades em sua compreensão na educação básica. A designação do tema foi baseada nas vivências de sala de aula, levando-se em consideração não apenas as dificuldades dos alunos, mas também a forma como o conteúdo é comumente apresentado, de forma estática e engessada, com mero uso de fórmulas, não possibilitando um aprendizado efetivo, mas sim um processo de memorização, sem preocupar-se com a construção do pensar matemático. Além disso, a aprendizagem da Matemática e, consequentemente do referido assunto, tem sido comprometida em diversos aspectos durante o período do ensino remoto, realidade de muitas escolas atualmente.

Assim, traz-se como pergunta diretriz para este trabalho: de que forma a plataforma Kahoot! pode contribuir para o ensino e aprendizagem de Sequências e Progressões Geométricas, norteada pela Teoria das Situações Didáticas, para o desenvolvimento deste tema no formato de aulas remotas?

Considerando o cenário do ensino remoto emergencial e a crescente incorporação de tecnologias digitais no ensino de Matemática, adotou-se para este trabalho a plataforma Kahoot! como uma ferramenta metodológica, buscando trabalhar o conteúdo de Sequências e Progressões Geométricas de forma dinâmica e interativa. O Kahoot! é uma plataforma que desenvolve o aprendizado com base em jogos e tem sido muito difundido nas instituições de ensino enquanto tecnologia educacional. Seus jogos são em formato de *quizzes* de múltipla escolha, em que os alunos têm a possibilidade de verificar seus conhecimentos com *feedback* imediato.

Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver uma sequência didática utilizando a plataforma Kahoot! como forma de viabilizar o ensino de Sequências e Progressões Geométricas, com amparo da Teoria das Situações, buscando diversificar a abordagem deste tema, considerando as dificuldades de aprendizagem no ensino remoto.

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho foi a Engenharia Didática, norteada pelas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas para aplicação das atividades propostas durante as sessões de ensino. As fases da Engenharia Didática (análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e validação) organizaram todo o processo de estruturação das atividades realizadas, enquanto a Teoria das Situações Didáticas auxiliou o trabalho do professor, ao torná-lo um investigador em sua práxis e mediador da aprendizagem, instigando o aprendizado do aluno e incentivando-o a ser também um pesquisador, desenvolvendo sua autonomia e construindo seu conhecimento.

O público-alvo desta pesquisa foi um grupo de doze alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, sendo a pesquisa aplicada em dois encontros no horário das aulas de reforço da disciplina de Matemática. Para a realização desta pesquisa foram elaboradas duas sequências didáticas: a primeira como forma de sondar os conhecimentos prévios da turma acerca do tema a ser desenvolvido e a segunda com questões niveladas de forma crescente, partindo dos conceitos de multiplicação e sequências multiplicativas, até o desenvolvimento do termo geral de uma P.G. Ambas as sequências didáticas foram aplicadas utilizando a plataforma Kahoot!.

A coleta dos dados se deu por meio de registros fotográficos dos alunos, registro de conversas na plataforma Google Meet e no aplicativo WhatsApp, gravação dos encontros e questionário final, com as impressões dos participantes da pesquisa.

Nas seções seguintes são abordados tópicos que tratam sobre o ensino remoto e a ferramenta Kahoot!, a Teoria das Situações Didáticas e a Engenharia Didática e suas etapas para a organização e desenvolvimento deste trabalho, bem como as considerações dos autores.

2. Análises preliminares

Segundo Almouloud e Silva (2012) nas análises preliminares de uma Engenharia Didática são realizados levantamentos acerca do quadro teórico didático geral e do que já foi estudado sobre o referido assunto, incluindo "a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática" (Almouloud & Silva, pp. 26).

2.1. O ensino remoto e a ferramenta Kahoot!

Em virtude da pandemia do Novo Coronavírus e do cenário em que a educação tem vivenciado, as práticas metodológicas docentes demandam adaptações emergentes, como é o caso da adoção do ensino remoto em diversas escolas no mundo. Neste processo de reestruturação da práxis docente, os recursos tecnológicos educacionais e as ferramentas digitais constituem um leque de possibilidades, sendo primordiais para o andamento das atividades escolares e na readaptação do processo de ensino e aprendizagem, onde o professor começou a ensinar de outras formas, além de aprender e refletir sobre sua prática.

Entretanto, vale ressaltar que muitos docentes não possuíam habilidades tecnológicas desenvolvidas ou receberam algum preparo sobre esta modalidade de ensino em sua formação inicial. Em um panorama geral, o professor de Matemática tem enfrentado dificuldades para obter retorno positivo dos estudantes em sua disciplina na modalidade remota. Nota-se que o distanciamento entre professor e alunos no decorrer do processo de ensino e aprendizagem dificultou a compreensão dos conteúdos por parte dos estudantes e, em muitos casos, têm provocado uma redução no engajamento nas aulas e prejudicado seu desempenho em seus estudos autônomos/domiciliares.

Schwanz e Felcher (2020) apontam que no atual cenário e em meio a tantas dificuldades no ensino da disciplina de Matemática, as tecnologias digitais têm se tornado recursos imprescindíveis para o andamento do processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que elas oportunizam a realização de atividades de forma síncrona e/ou assíncrona, seja por meio de vídeo conferências, uso de plataformas digitais como Google Classroom, aplicativos, vídeo aulas gravadas, entre outras ferramentas. Moran (2015) complementa ainda sobre a importância da tecnologia para a aprendizagem:

> As tecnologias WEB 2.0, gratuitas, facilitam a aprendizagem colaborativa, entre colegas, próximos e distantes. Cada vez adquire mais importância a comunicação entre pares, entre iguais, dos alunos entre si, trocando informações, participando de atividades em conjunto, resolvendo desafios, realizando projetos, avaliando-se mutuamente. (Moran, 2015, pp. 26).

De acordo com o autor, a troca de informações entre os pares proporciona um ambiente fértil para a evolução do pensamento dos alunos, em que as ideias surgem e se conectam, gerando conhecimento e aprendizado. Meireles e Schimiguel (2019) também enfatizam que a integração das tecnologias no contexto escolar reforçam a importância de um direcionamento destes recursos em concordância com as diferentes necessidades educacionais dos alunos, a partir do alinhamento entre os recursos utilizados e os objetivos a serem atingidos no processo de construção do conhecimento. “As gerações têm acesso cada vez mais cedo às tecnologias e essa habilidade tecnológica deve ser evidenciada e compartilhada” (Meireles & Schimiguel, 2019, pp. 96).

Mïller (2013) afirma que diversos pesquisadores comentam a associação de habilidades de jogo e resolução de problemas, como os poderes de dedução, pensamento espacial (além do pensamento linear) e tomada de decisão baseada em evidências. O autor reforça ainda a relevância da gamificação (do inglês – *gamification*), em que os alunos são instigados a praticar e melhorar suas habilidades de conjecturar, estabelecer uma hipótese confiável, conceituar ideias complexas e abstratas e melhorar sua capacidade de processar informações visuais e espaciais. A gamificação, segundo Silva, Sales e Castro (2019) pode ser interpretada como uma estratégia de aprendizagem ativa, quando o professor estabelece regras e orientações claras, desafiando e estimulando os alunos a realizarem suas tarefas ou missões

Partindo do exposto, aponta-se neste trabalho como recurso digital auxiliar o Kahoot!, que consiste em uma plataforma voltada para o aprendizado, constituída por diversos jogos disponíveis para aplicação em sala de aula ou mesmo a possibilidade da própria produção pelo professor da disciplina. As perguntas inseridas no Kahoot! podem ser criadas no formato de *quiz* e inseridas na plataforma, onde é atribuída uma pontuação que gera o *ranking* desses resultados, bem como promove o engajamento, permitindo ao professor uma avaliação do desempenho do aluno. (Dellos, 2015).

Uma alternativa para motivar os alunos a partir do uso de recursos digitais é a aplicação de jogos online. Nesse sentido, Santos e Caldas (2016) apontam que jogos online no formato de *quizz*, podem ser incentivadores, promovendo maior participação dos alunos, gerando aprendizagem e sendo facilitador da interação entre eles. Em complementaridade, Dellos (2015, pp. 51) afirma que "o *Kahoot!* incentiva a curiosidade e o envolvimento do aluno, o que proporciona a oportunidade para o educador identificar 'lacunas' ou áreas de fragilidade no entendimento do conteúdo".

Nesse sentido, o presente trabalho traz a aplicação de um quiz por meio da plataforma Kahoot!, utilizando-a como recurso estratégico para o ensino de Sequências e Progressões Geométricas com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem em Matemática, avaliando seu desempenho e participação, bem como a usabilidade desta ferramenta no contexto do ensino remoto.

2.2. O ensino remoto e a ferramenta Kahoot!

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) propaga um modo de assimilarmos a relação estabelecida entre o trinômio professor, aluno e saber, levando em consideração o meio (*milieu*) em que a situação didática ocorre. A relação entre este trinômio é denominada por Brousseau (2008) como Triângulo Didático, em que seus vértices apresentam as relações professor-aluno, aluno-saber e professor-saber.

Brousseau (2008) aponta que para a aprendizagem do aluno realizar-se, é necessária uma conexão entre o conhecimento e a interação entre duas ou mais pessoas. Tais interações ocorrem pelo que ele denomina de situação didática, que ocasiona a apreensão do conhecimento. A situação didática pode ser um jogo, um desafio ou qualquer tipo de dispositivo criado para que o aprendizado ocorra de forma efetiva. Como o autor traz em sua obra, a situação didática é caracterizada por "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (Brousseau, 2008, pp. 20). Em conformidade com Brousseau, Alves (2016a, pp. 141) reforça que:

> o professor deve buscar a apresentação de um objeto matemático ou o entendimento de uma estrutura matemática, não apenas restrita à relevância e valor interno (endógeno) à própria Matemática, mas também, sua significância adquirida a partir das vivências e idiossincrasias particulares que proporcionam ao aprendiz a origem de um repertório amplo de situações-problema que permitam-no explorar e, paulatinamente, elaborar e reelaborar construções e modelos mentais de ação eficazes. (Alves, 2016a, pp. 141).

Nesse sentido, entendemos que o professor deve trazer questionamentos instigantes, levando em consideração as vivências e experiências do aluno. Como diria o próprio Brousseau (1996, pp. 62) "o saber é uma associação entre boas questões e boas respostas. O professor coloca um problema que o aluno deve resolver". Assim as questões referentes ao objeto matemático devem ser equilibradas – nem difíceis demais, pois o aluno pode não conseguir solucionar, – nem fáceis demais – pois podem não instigar o raciocínio matemático o suficiente, tornando-se desinteressantes.

Além disso, para que a situação didática ofereça um resultado satisfatório, deve ser estabelecido o que Brousseau (2008) chama de contrato didático, sendo este um tipo de contrato verbal que estabelece um sistema de regras de funcionamento, determinando as atribuições de cada sujeito envolvido na situação didática - no caso, professor e alunos - enfatizando a necessidade de colaboração de forma recíproca, em que esta relação é mediada pelo saber. Artigue et al. (1995, pp. 12) ao complementar traz que "a análise do funcionamento cognitivo do aluno não pode ser realizada de forma independente, sem levar em consideração o contrato didático que é colocado em jogo”.

Estabelecidas as orientações e o contrato didático pelo professor, a TSD almeja aproximar a tarefa do aluno ao trabalho de um pesquisador, incitando-o à formulação de hipóteses, conjecturas, elaboração de conceitos e validação de estratégias, sendo o docente o mediador do processo, ao promover situações ou sequências didáticas previamente preparadas para que o estudante aja sobre o saber e o transforme em conhecimento para si mesmo. Para Brousseau (2008) as situações de ensino devem ser elaboradas pelo professor para que o estudante construa e se aproprie do conhecimento.

A TSD é constituída por quatro fases ou dialéticas, modeladas conforme as situações de ação, formulação, validação e institucionalização, visando a aprendizagem do aluno. Estas dialéticas podem ser explanadas, em síntese, como:

Dialética de ação: ponto de partida, onde o aluno apropria-se do problema proposto e inicia uma tomada de decisões;

Dialética de formulação: a partir da ação inicial, há troca de informações entre o aluno e o *milieu*, com a verbalização de ideias e conjecturas pelos alunos a partir de seus conhecimentos prévios, mas nada formalizado;

Dialética de validação: nesta etapa, o aluno apresenta sua estratégia de solução para a situação didática proposta, buscando sustentar argumentos que validem seu raciocínio, como forma de validar ou não suas conjecturas;

Dialética de institucionalização: aqui o professor sintetiza o que foi exposto pelos alunos nas etapas anteriores, fazendo um compilado das informações e apresentando o conceito que objetivava-se ser apreendido, de maneira formal e com linguagem matemática adequada.

Vale ressaltar que estas fases ocorrem simultaneamente, onde as três primeiras dialéticas compõem da fase adidática, em que o aluno busca construir seus conhecimentos sem a intervenção do professor e sendo o momento em que ele interage com o milieu e busca respostas para suas teorias.

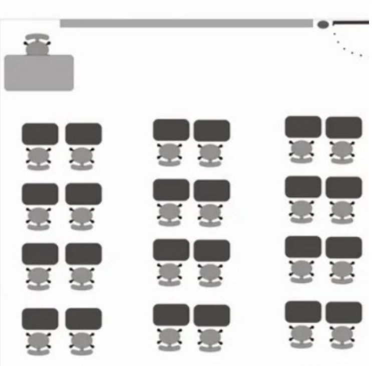
Por tais pressupostos, a TSD atende às necessidades deste trabalho, sendo associada à Engenharia Didática, por ser uma metodologia de pesquisa voltada para a fundamentação de investigações, bem como para leitura e interpretação de dados de maneira sistematizada, pois “a identificação de um problema constitui o primeiro passo para a adoção de uma Engenharia” (Alves, 2016b, pp. 62).

3. Concepção e análise *a priori*

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67), sobre a análise *a priori* de um estudo, afirmam que “O objetivo de uma análise *a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido”.

Partindo desse ponto, nesta etapa foram concebidas e desenvolvidas as situações didáticas para o ensino de Sequências e Progressões Geométricas (PG), em formato de sequência didática, sendo duas listas de atividades: uma para a sondar os conteúdos prévios dos alunos sobre a operação de multiplicação e compreensão de sequências e outra para trabalhar PG, divididas em dois encontros com os estudantes da disciplina.

Para a aplicação da sequência didática, considerou-se uma previsão atitudinal do aluno, com base no contrato didático estabelecido entre o professor e a turma, como forma de nortear o processo de ensino e aprendizagem. Assim, esperamos que o aluno, instigado a construir o conhecimento e apropriar-se do saber de forma autônoma sem a intervenção direta do professor, demonstre compreensão e evolução do pensamento matemático por meio dos estímulos provocados pela situação didática. Para tal, foram desenvolvidas quatro questões propostas aos alunos e aplicadas a partir das dialéticas da TSD, no primeiro encontro, tratando sobre Sequências, revisando o conceito básico de multiplicação (Quadro 1).

Perguntas	**Alternativas por cores**
Qual é o próximo termo da sequência (1, 2, 4, 8, 16, ...)?	Vermelho (20), Azul (32), Amarelo (26) e Verde (40)
Qual o preço do aparelho de telefone celular exposto na figura?  	Vermelho (96), Azul (108), Amarelo (64) e Verde (56)
Observe a sala de aula representada abaixo. Qual o total de carteiras? 	Vermelho (16), Azul (24), Amarelo (14) e Verde (36)
Qual a operação trabalhada na sequência anterior?	Vermelho (multiplicação), Azul (divisão), Amarelo (adição) e Verde (subtração)

Quadro 1. Questões aplicadas no 1º encontro.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Esta aplicação foi disponibilizada na plataforma Kahoot!, sendo nomeada por "Sequências Numéricas para alunos". A partir de sua concepção, foi disponibilizado o código para entrada no jogo (*Play Kahoot!*) onde os estudantes puderam visualizar, interagir e marcar sua opção de resposta.

Com a TSD norteando o processo, os alunos são responsáveis pela construção do seu conhecimento, buscando maior interação por meio da troca de mensagens entre si via Google Meet e cooperação entre eles na disputa do jogo. O desenvolvimento das aulas no encontro virtual foi realizado em etapas, que convergem de forma sequencial para o conteúdo específico de progressões geométricas: a) Noções básicas de multiplicação; b) sequências multiplicativas; c) razão entre dois termos; d) termo geral de uma sequência. Para fins de avaliação, Kahoot! disponibiliza uma classificação para cada participante. Nesse sentido, foi observada e analisada a desenvoltura dos alunos com base na pontuação obtida, sendo atribuída uma nota de acordo com o seu desempenho (Figura 1).

Parâmetros de Pontuação	
Pontos	**Nota avaliativa**
≥ 5120 a < 6000 pontos	10,0
≥ 4923 a ≤ 5119 pontos	9,0
≥ 2893 a ≤ 4922 pontos	8,0
≥ 1520 a ≤ 2892 pontos	7,0
≥ 924 a ≤ 1519 pontos	6,0
≥ 0 a ≤ 923 pontos	5,0

Figura 1. Parâmetros de pontuação nos *Quizzes* para os alunos
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Na dialética de ação, os alunos apropriaram-se das questões propostas, realizando uma leitura de forma atenta. Assim, buscaram em seus conhecimentos prévios, o conceito de multiplicação e suas aplicações. Uma das questões, no layout da plataforma Kahoot!, apresenta-se na Figura 2:

Figura 2. Segunda questão da atividade proposta
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Na dialética de formulação, os alunos conjecturaram ideias e elaboraram suas estratégias de solução para o problema, para a partir de então selecionar a sua resposta, e em seguida visualizar a pontuação atribuída a pergunta. Também foi disponibilizado um link de acesso ao Google Meet para que os alunos tivessem acesso às questões e trocassem ideias sobre elas dentro do ambiente virtual (Figura 3).

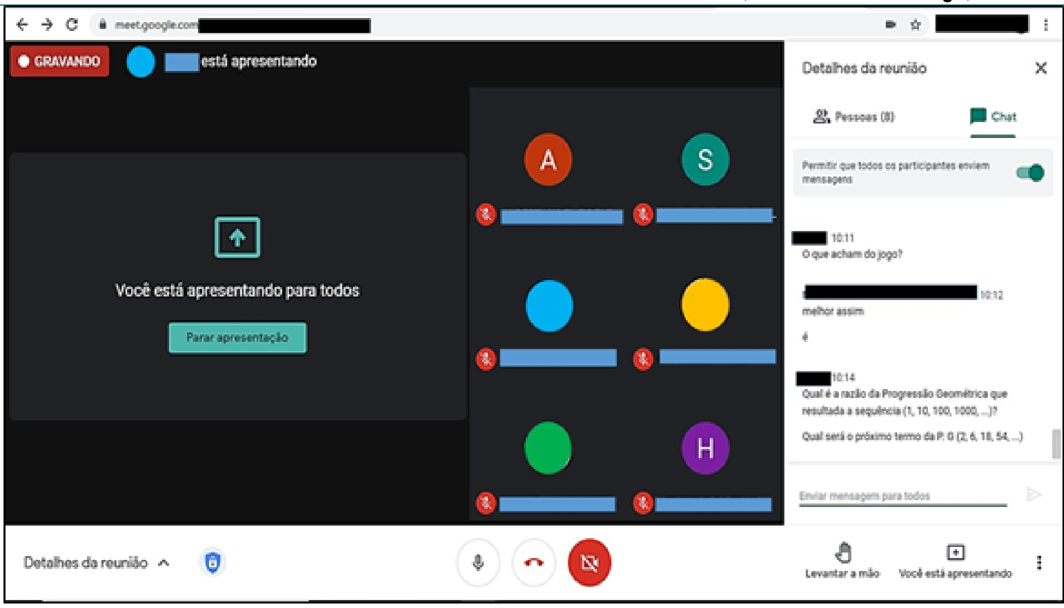


Figura 3. Recorte da interação dos estudantes no Google Meet.
Fonte: Registro dos autores (2021).

Na dialética de validação, os alunos procuram apresentar seus argumentos de forma organizada, buscando legitimar suas ideias acerca da operação de multiplicação em associação às sequências numéricas. Na Figura 4, apresentam-se alguns dos procedimentos realizados pelos alunos.

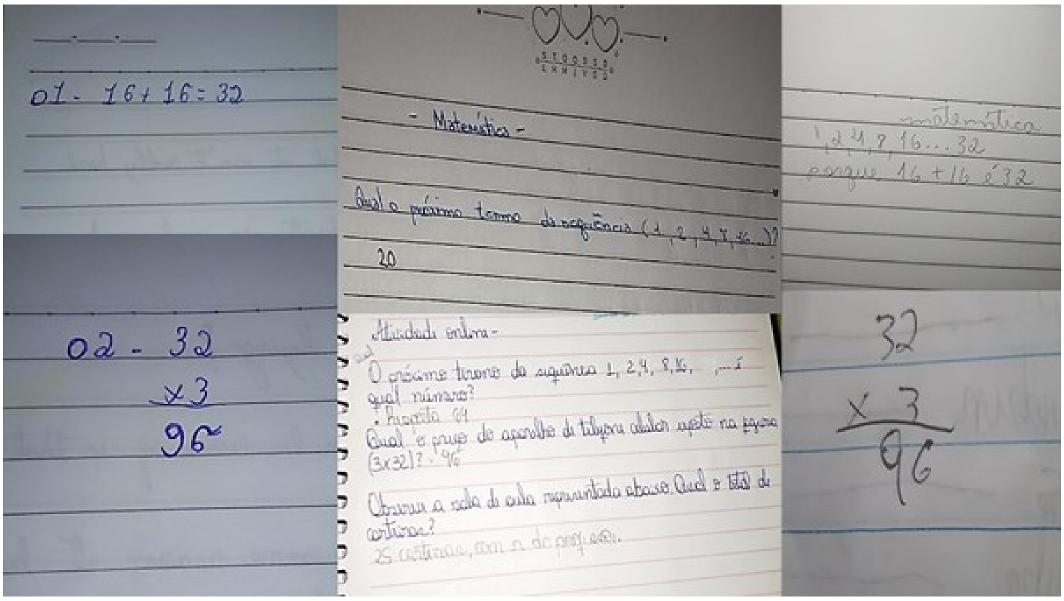


Figura 4. Validação das situações-problema pelos alunos.
Fonte: Registros dos alunos (2021).

Como se pode observar na Figura 4, alguns alunos utilizaram a operação de adição para resolver o produto, levando em consideração a definição básica de multiplicação, que é a soma de parcelas iguais. Outros já apresentaram o esquema da multiplicação diretamente. Alves (2012, pp. 150), sobre os modelos distintos de resolução de problemas em Matemática, comenta que “o solucionador pode mobilizar um raciocínio lógico-matemático formal ou, de outro modo, mobilizar uma categoria de raciocínio que não possui características marcantes e determinantes de um raciocínio formal”.

Na dialética de institucionalização, o professor analisou as discussões e argumentos apresentados pelos alunos, verificando sua veracidade, apresentando com linguagem matemática formalizada o conceito de sequências numéricas, como no excerto: *As sequências numéricas são classificadas em finitas ou infinitas e o primeiro termo é representado por* a_1*, o segundo termo por* a_2*, o terceiro termo por* a_3*, e assim sucessivamente. Em uma sequência numérica finita o último termo é representado por* a_n*. A letra n indica a quantidade de termos da sequência ou a posição de cada termo.*

A partir disso, foram elaboradas dez questões propostas aos estudantes e desenvolvidas com base nas dialéticas da TSD no segundo encontro com os alunos, abordando o conceito de Progressão Geométrica (PG) e analisando o processo de construção do conhecimento relacionado à sequência de multiplicação (Quadro 2).

Questões	Perguntas	Alternativas por cores
Q1	Qual das sequências descritas é uma Progressão Geométrica?	Vermelho (1, 3, 5, 7, 9, ...), Azul (1, 2, 3, 4, 5, ...), Amarelo (1, 3, 9, 27, 81, ...) e Verde (3, 5, 9, 12, 15, ...)
Q2	Qual é a razão da Progressão Geométrica que resulta na sequência (1, 10, 100, 1000, ...)?	Vermelho (1), Azul (10), Amarelo (20) e Verde (100)
Q3	Qual será o próximo termo da PG (2, 6, 18, 54, ...)?	Vermelho (108), Azul (136), Amarelo (124) e Verde (162)
Q4	A sequência da PG (-2, -4, -8, -16, -32, ...) é:	Vermelho (Oscilante), Azul (Crescente), Amarelo (Estacionária) e Verde (Decrescente)
Q5	Quando uma razão da PG é negativa, dizemos que ela é:	Vermelho (Alternada), Azul (Constante), Amarelo (Decrescente) e Verde (Fixa)
Q6	Progressão Geométrica é uma sequência numérica onde cada termo é igual ao produto de seu antecessor com uma constante.	Azul (Verdadeiro), Vermelho (Falso)
Q7	Determine o sétimo termo da progressão geométrica a seguir: (1, 3, 9, ...).	Vermelho (81), Azul (729), Amarelo (27) e Verde (243)
Q8	O quinto termo da PG é 240 e sua razão tem valor igual a 2, o primeiro termo é:	Vermelho (30), Azul (45), Amarelo (15) e Verde (90)
Q9	Dada a sequência de figuras abaixo, qual a razão dessa PG? E quantos quadrados tem a próxima figura 5?	Vermelho (1 e 12), Azul (3 e 36), Amarelo (2 e 24) e Verde (2 e 48)
Q10	Numa PG tem-se a1 = 4 e a6 = 128. A razão dessa PG é:	Vermelho (1), Azul (3), Amarelo (2) e Verde (4)

Quadro 2. Questões aplicadas no 2º encontro
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Este questionário se encontra disponível na plataforma Kahoot!, identificado por “Progressão Geométrica (PG)”.

A situação didática desenvolvida nesta análise a *priori* foi calibrada para a realização de uma sondagem, visando identificar as dificuldades dos alunos sobre a operação de multiplicação e sua interpretação em situações simples. Assim, na etapa de experimentação, na subseção seguinte, têm-se a aplicação com o assunto de sequências numéricas e progressões geométricas.

4. Experimentação

Almouloud e Silva (2012, p. 27) sobre a experimentação na Engenharia Didática, explicam que esta etapa “consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação”.

A atividade foi aplicada em dois encontros e seu público-alvo foi composto por um grupo de 12 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola de tempo integral, na disciplina de Matemática. Os alunos selecionados apresentam dificuldades na disciplina de Matemática, sendo uma turma de reforço.

O professor apresentou o contrato didático com base no encontro anterior, sendo pactuado com todos os participantes que eles deveriam registrar suas anotações por meio de fotografias e interagir nos encontros, a fim de promover um ambiente propício à aprendizagem. Os participantes também estavam cientes de que o professor faria registros dos encontros em formato de vídeo, áudio e fotografias, sem expor a identidade dos envolvidos. Mesmo com as dificuldades impostas pelo ensino remoto, a realização dos encontros aconteceu utilizando a plataforma do Google Meet e o aplicativo WhatsApp para o envio das resoluções descritas pelos alunos.

Na etapa de ação, o docente estimulou os alunos, para analisarem os dados da questão em busca dos dados numéricos e sequências presentes no enunciado, de acordo com a Tabela 3. Nesta etapa, os estudantes perceberam a relação entre o conteúdo de sequência e multiplicação relacionados ao conteúdo de Progressões Geométricas. Um tempo foi estipulado para cada questão, onde o aluno desenvolveu o pensamento matemático e resolveu a questão proposta. Na Figura 5, tem-se a ilustração da primeira questão do segundo encontro, no layout da plataforma Kahoot!

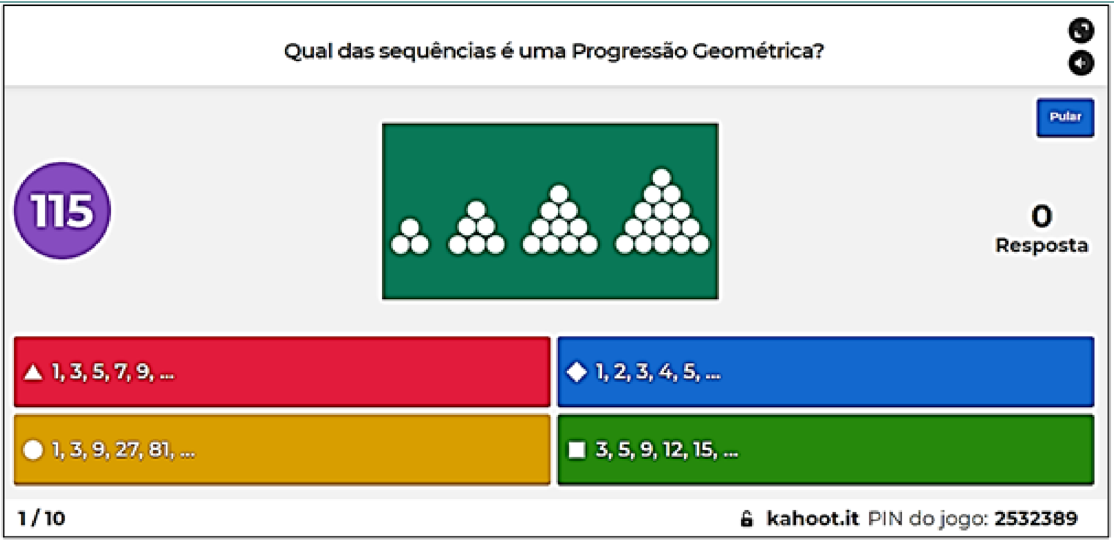


Figura 5. Primeira situação-problema do segundo encontro.
Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

No ambiente computacional, os alunos têm contato com questões de múltipla escolha, com quatro alternativas cada, em que sua compreensão das questões na plataforma Kahoot! os alunos devem relacionar com o que foi estudado no primeiro encontro, sobre sequências e multiplicação.

Na etapa da formulação acontece a troca de informações dos estudantes, por meio de uma discussão via Google Meet, comparando o estudo de sequências com o assunto de PG, em que eles buscam elaborar uma resolução para cada problema, como ilustrado na Figura 6.

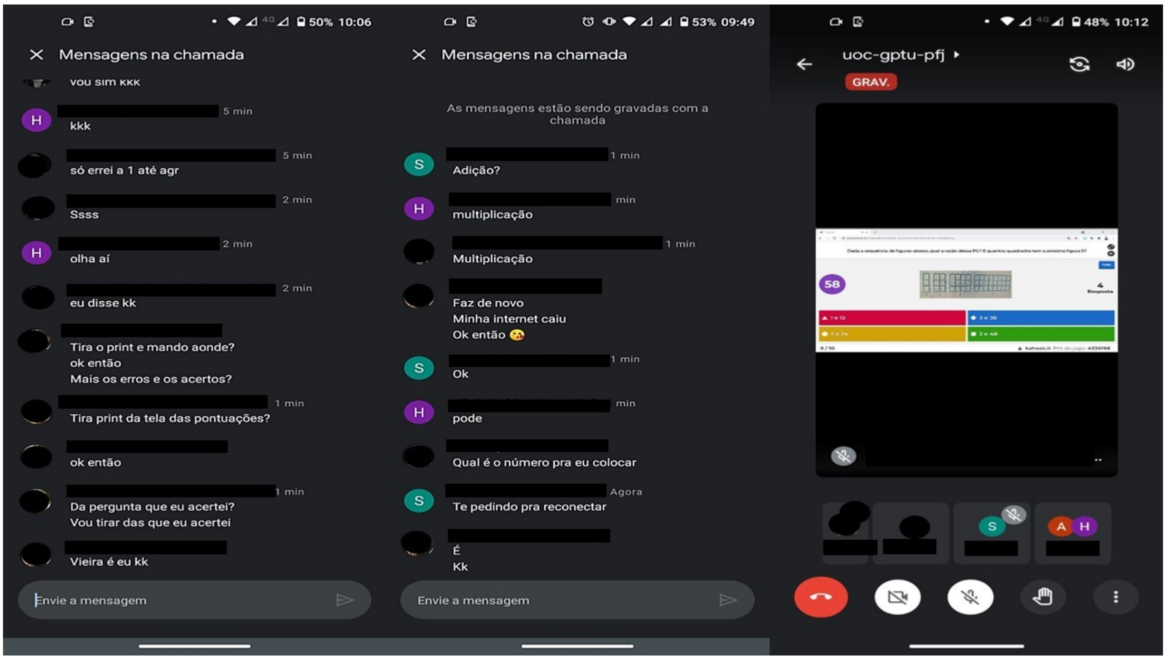


Figura 6. Desenvolvimento e discursos no aplicativo do Google Meet.
Fonte: Registro dos autores (2021).

Na etapa de validação, os estudantes a partir dos conhecimentos prévios sobre multiplicação e sequências podem então construir um estudo exploratório e verificar os valores descobertos a partir dos cálculos realizados na Figura 7.

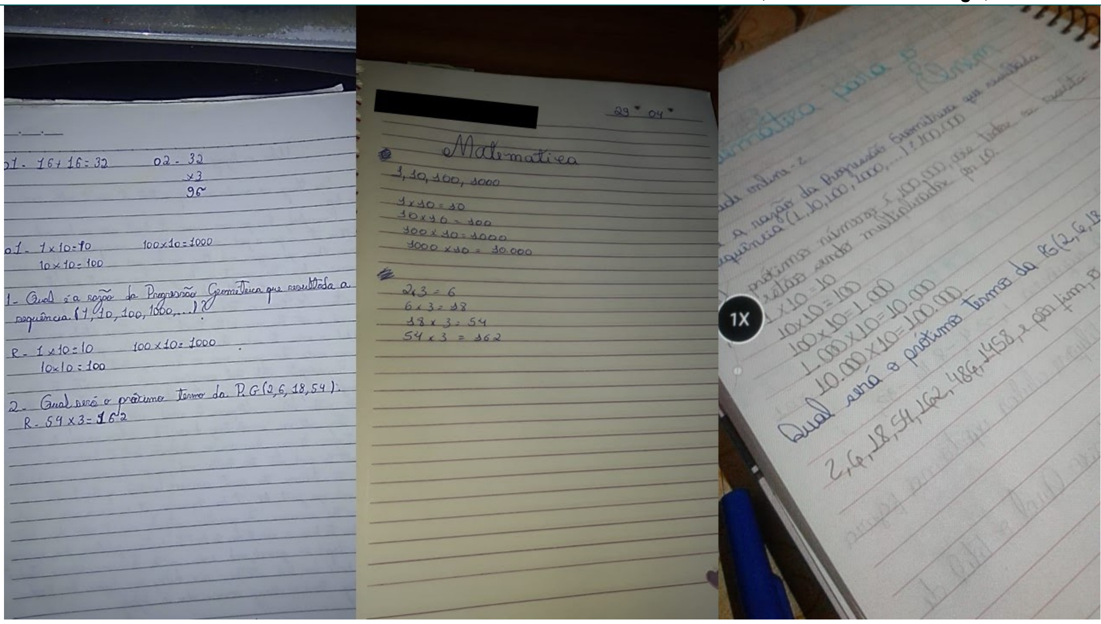


Figura 7. Resolução de questões no segundo encontro
Fonte: Registros dos alunos (2021).

Dessa forma, a exploração da plataforma Kahoot! para o estudo de sequências e PG mostrou diversas formas de pensamento matemático sobre a mesma questão, observadas as formas de resolver utilizadas pelos alunos e sua interação na troca de ideias.

O professor, ao permitir o envio das resoluções dos alunos via WhatsApp, criou um ambiente para troca de informações entre os alunos, onde estes conjecturaram suas ideias, configurando a etapa de formulação conforme descrito por Brousseau (2008).

Na etapa de institucionalização, o professor esclareceu e indicou as principais propriedades formais que constituem os conceitos desenvolvidos nas etapas anteriores. O docente realizou a institucionalização, mostrando o conceito de PG, com base na orientação apresentada no livro didático da turma, apontando que “Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q, chamada de razão da PG” (Leonardo, 2016, pp. 200). Após isto, o docente mostrou alguns tipos de Progressões Geométricas, conforme a sua classificação, como ilustrado na Figura 8:

Exemplos de PGs	Características
$(-8, -4, -2, -1, ...)$; com $a_1 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$ $(3, 6, 12, 24, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 2$	Os termos das duas PGs estão em ordem crescente de valor. Na primeira: $a_1 < 0$ **e** $0 < q < 1$; na segunda: $a_1 > 0$ **e** $q > 1$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **crescente**.
$(-3, -9, -27, ...)$; com $a_1 = -3$ e $q = 3$ $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$; com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$	Os termos das duas PGs estão em ordem decrescente de valor. Na primeira: $a_1 < 0$ **e** $q > 1$; na segunda: $a_1 > 0$ **e** $0 < q < 1$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **decrescente**.
$(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, ...)$; com $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 1$ $(0, 0, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$	Em cada uma das PGs, todos os termos têm o mesmo valor. Na primeira: $a_1 \neq 0$ **e** $q = 1$; na segunda: $a_1 = 0$ **e** $q \in \mathbb{R}$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **constante**.
$(3, 0, 0, 0, ...)$; com $a_1 = 3$ e $q = 0$	Apenas o primeiro termo da PG é diferente de zero ($a_1 \neq 0$); além disso, sua razão é $q = 0$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **estacionária**.
$(2, -10, 50, ...)$; com $a_1 = 2$ e $q = -5$ $(-7, 14, -28, ...)$; com $a_1 = -7$ e $q = -2$	Em ambas as PGs, dois termos consecutivos têm sinais alternados. Na primeira: $a_1 > 0$ **e** $q < 0$; na segunda: $a_1 < 0$ **e** $q < 0$. Uma PG que apresente essas características é classificada como **oscilante**.

Figura 8. Classificação da PG e suas características.
Fonte: Leonardo (2016, p. 201).

Além disso, foi realizada a demonstração do termo geral de uma PG, em que mostrou que dada uma PG de razão q, é possível escrever qualquer termo em função do primeiro, considerando a definição de PG e o que foi estudado em sequências. A partir de seu desenvolvimento, encontra-se como termo geral referente à n-ésima posição na PG como sendo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

em que n pertence ao conjunto dos números naturais.

Com base no exposto, trazemos na próxima seção a análise a posteriori e validação deste estudo.

5. Análise *a posteriori* e validação

Na análise *a posteriori* de uma sessão de ensino, conforme Almouloud e Coutinho (2008), temos uma análise sobre o conjunto de resultados obtidos na etapa de experimentação e que "contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo" (Almouloud & Coutinho, 2008, p. 68), sendo estes confrontados com a análise *a priori* realizada anteriormente.

Nesta etapa, foram analisados os dados obtidos na fase de experimentação, onde consideramos as observações realizadas sobre a sessão de ensino, os trabalhos escritos em sala de aula remota e a troca de informações durante o encontro virtual com a turma. A prática foi realizada em duas horas de aula, em momentos distintos, com o desenvolvimento aplicação das questões propostas.

Na resolução da questão (Q2), os alunos foram questionados sobre a razão da PG em sequência crescente de base dez. Então, eles multiplicaram o primeiro termo por dez, obtendo o valor do próximo termo. A seguir, ocorreu uma comunicação virtual entre os alunos, registrada no chat da plataforma do Google Meet e transcrito no seguinte diálogo:

> *Diálogo da resolução Q2 com o A1: 28/04/2021 às 9:45 "Sim, pela atividade anterior acho que é multiplicação". A2: 28/04/2021 às 9:47 "Adição? porque fiz aqui deu resultado que eu marquei no jogo". A3: 28/04/2021 às 9:48 "multiplicação prof, por ser uma sequência lógica de multiplicar pelo anterior". A4: 28/04/2021 às 9:52 "professor acho que é Multiplicação também, vou te enviar a resposta no WhatsApp".*

Ao analisar os discursos sobre o conteúdo de PG, estes foram relacionados à multiplicação, por ser um tópico visto no primeiro encontro virtual. Nesse processo, a plataforma Kahoot! foi utilizada nos dois encontros com a turma, mobilizando os estudantes diante das questões em formato de jogo virtual e atraindo a atenção de todos no ensino e aprendizagem de PG.

Dessa forma, a análise *a posteriori* feita relaciona-se com resultados obtidos da aplicação, explorando aqueles que podem contribuir para uma evolução dos conhecimentos dos estudantes, identificando as ligações dos seus conhecimentos prévios demonstrados na análise a priori. Assim, o professor instigou-os a lembrar das questões de multiplicação, incentivando a memória e a evolução na linha de raciocínio do aluno.

Reforça-se que nesta etapa, a possibilidade de *feedback* imediato dada pelo Kahoot! foi bastante útil no desenvolvimento das demais questões de P.G. Foi possível perceber isto no decorrer da atividade e na participação dos alunos utilizando a ferramenta Google Forms em que eles responderam um questionário final para coleta de suas impressões acerca da experiência com o Kahoot!, servindo para auxiliar na validação dos objetivos da pesquisa.

Os dados coletados a partir do formulário tiveram três perguntas direcionadas à plataforma Kahoot! com a participação de todos os estudantes da turma:

(i) Você já conhecia o Kahoot!? onde 77,8% marcaram que "Não", 22,2% que "Sim";

(ii) Você sente que consegue aprender Matemática em aulas envolvendo jogos? houve unanimidade, pois 100% da turma assinalou a alternativa "Sim";

(iii) Descreva em poucas palavras o que você achou destas aulas com o Kahoot!

A pergunta (iii) foi aberta e algumas das reflexões apresentadas pelos alunos foram descritas na passagem abaixo:

> A2: Muito bom e interessante, e ao mesmo tempo interativo;
> A5: foi realmente bom, ajuda a gente a pensar mais rápido e se prepara para mais coisas;
> A6: Muito divertido e bem dinâmico;
> A7: muito produtivo, o jogo nos faz raciocinar mais rápido;
> A8: foi legal, teve mais interação;
> A12: muito bom e interessante, participei e fiquei no top 5".

Por meio desses diálogos, percebemos a aceitação do Kahoot!, pelos estudantes. A plataforma provocou estímulos e maior agilidade no pensamento matemático, além de competição saudável, *feedback* imediato sobre o progresso dos alunos e uma forma lúdica de se trabalhar o tema em sala de aula. O fato de o Kahoot! ter um cronômetro que marca o tempo de resposta do estudante e que quanto mais rápida a resposta, maior a pontuação atribuída a ela, instigou os alunos a pensar de forma prática.

Por ser uma atividade realizada com estudantes que apresentam dificuldades na aprendizagem da matemática, a recepção e a participação na atividade proposta foram satisfatórias.

Por fim, acredita-se que um bom planejamento, com a elaboração de questões convenientes ao objeto matemático em estudo e o uso da gamificação influenciam de forma positiva em sala de aula, pois sua aplicação tende a ser dinâmica, gerando interesse e engajamento da turma.

6. Considerações finais

Este trabalho se propôs a investigar a contribuição do Kahoot! para o ensino de Sequências e Progressões Geométricas (PG) em dois encontros virtuais através do Google Meet. Verificamos que a utilização de abordagens didáticas com uso de plataformas digitais, analisada por uma visão complementar entre a ED e a TSD através da observação de suas dialéticas mostram um resultado positivo, caso bem planejadas. Nas sessões de ensino desta investigação, além do cálculo de multiplicação, sequências e PG, os alunos demonstraram compreensão sobre algumas propriedades da PG e de sequências.

O Kahoot! provocou curiosidade, interesse e engajamento, de modo que os alunos, mesmo com dificuldades em Matemática se propuseram a aceitar o desafio de resolver questões com tempo cronometrado, sendo a plataforma bem aceita pelos estudantes.

É imprescindível que as tecnologias sejam incorporadas ao contexto escolar, especialmente no ensino remoto. Porém, é fundamental também que o docente reflita sobre a melhor forma de uso dos recursos digitais disponíveis, sendo o planejamento da atividade essencial para a sua execução, atingindo os objetivos da aula preparada com tais recursos.

A plataforma Kahoot! auxiliou na aprendizagem em sala de aula por proporcionar a utilização dos principais componentes de jogos virtuais como estabelecer regras claras (tempo por questão, formato de alternativas), *feedbacks* rápidos, planilha com resultados por questão, além de promover a diversão durante o processo de aprendizagem. A partir do interesse, engajamento e das respostas dadas pelos alunos, pudemos observar que o aprendizado ocorreu ou, pelo menos, foi estimulado de modo positivo.

Acreditamos que este trabalho pode ser uma contribuição a ser considerada na área de jogos virtuais aplicados ao ensino de matemática em futuras pesquisas, fornecendo subsídios a professores desta disciplina, visto que o desenvolvimento de métodos para aplicação da gamificação mostra-se como recurso atrativo e, a depender do planejamento docente, pode ser eficiente para a aprendizagem dos estudantes.

Referências bibliográficas

Almouloud, S. A., & Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1), 62-77. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62

Almouloud, S. A., & Silva, M. J. F. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 22-52. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p22

Alves, F. R. V. (2012). Insight: Descrição e possibilidades de seu uso no ensino de cálculo, *Vidya,* 32(2), 149-161. https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/279

Alves, F. R. V. (2016a). Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da educação,* 7(21), 131-150. DOI: https://doi.org/10.26514/inter.v7i21.1259.

Alves, F. R. V. (2016b). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de ponto extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco,* 5(2), 59-68. https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/376

Artigue, M., Douady, R., & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática:* Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas:* conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática.

Dellos, R. (2015). Kahoot! A digital game resource for learning. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning,* 12(4), 49-52. https://www.itdl.org/Journal/Apr_15/Apr15.pdf#page=53

Leonardo, F. M. (Org.). (2016). *Conexões com a Matemática 2*. 3 ed. São Paulo: Moderna.

Meireles, S. M., & Schimiguel, J. (2020). Tendências da tecnologia ou ensino de matemática. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15* (57), 95-106. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/86

Mïller, C. (2013). The Gamification of Education. *Anais…* Developments in Business Simulation and Experiential Learning, 40, 196-200. https://absel-ojs-ttu.tdl.org/absel/index.php/absel/article/view/40

Moran, J. (2015). *Mudando a educação com metodologias ativas.* Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens, 2. Carlos Alberto de Souza e Ofélia Elisa Torres Morales (orgs.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG.

Santos, G. K. V., & Caldas, R. L. (2016). *Uso de jogo quiz online como ferramenta motivadora na resolução de questões de física.* DSpace/Manakin Repository, http://bd.centro.iff.edu.br/xmlui/handle/123456789/1111

Schwanz, C. B., & Felcher, C. D. O. (2020). Reflexões acerca dos desafios da aprendizagem matemática no ensino remoto. *Redin – Revista Educacional Interdisciplinar*, 9(1), 91-106. http://seer.faccat.br/index.php/redin/article/view/1868

Silva, J. B., Sales, G. L., & Castro, J. B. (2019). Gamificação como estratégia de aprendizagem ativa no ensino de Física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(4). DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0309

Renata Teófilo de Sousa: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE *campus* Fortaleza. Especialista em Ensino de Matemática (UVA), Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC). Pós-graduada em Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem e MBA em Gestão Escolar (UniAmérica). E-mail: rtsnaty@gmail.com

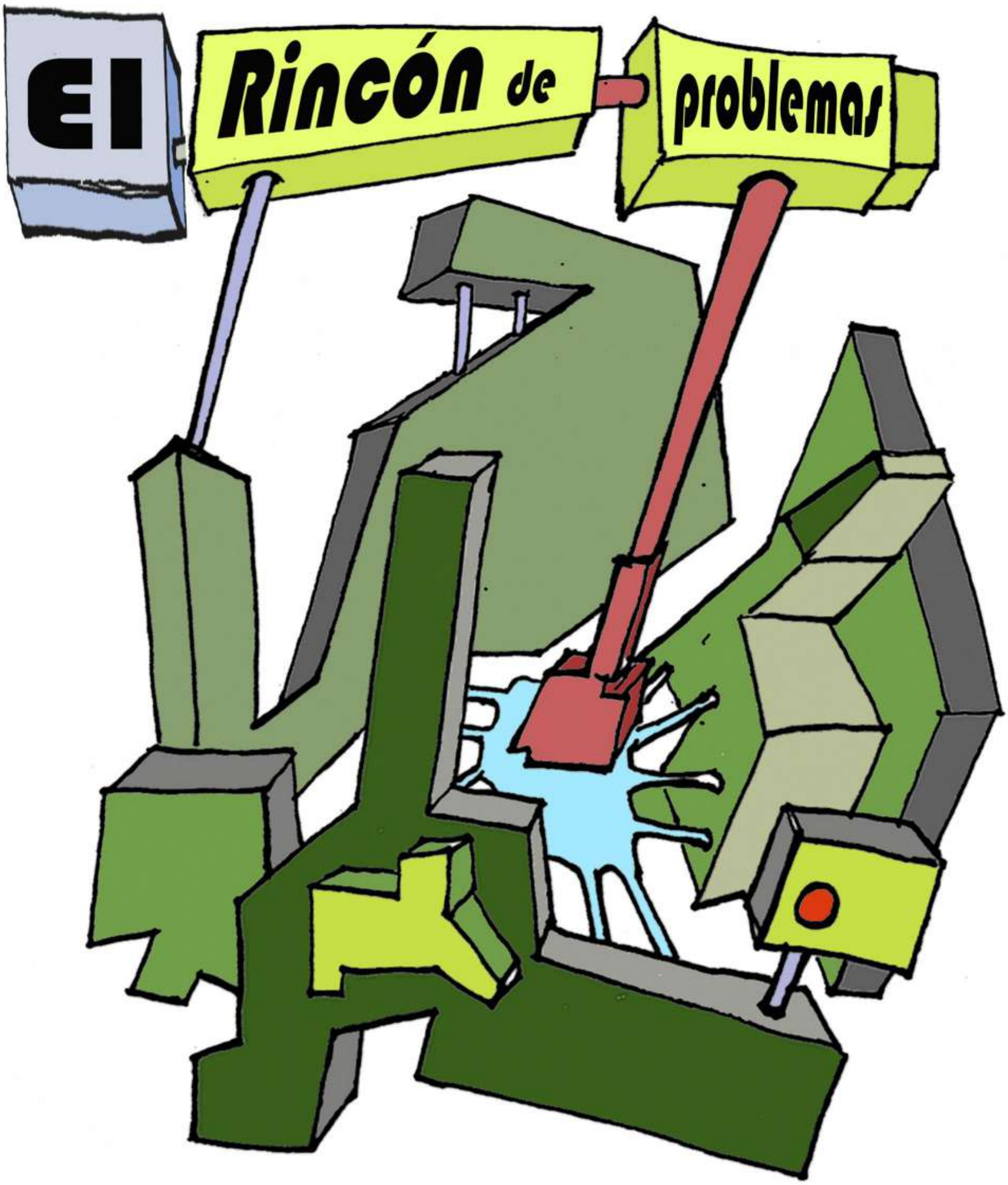
Paulo Vítor da Silva Santiago: Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC), Professor de Matemática do Ensino Médio da Rede Estadual do Ceará (SEDUC-CE), Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). E-mail: pvitor60@hotmail.com

Francisco Régis Vieira Alves: Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, Coordenador acadêmico do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE. Líder do Grupo de Pesquisa CNPQ Ensino de Ciências e Matemática. E-mail: fregis@ifce.edu.br

UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-10

Rompecabezas geométrico e indagaciones didáctico-matemáticas

Uldarico Malaspina

Resumen	En este artículo se presenta y comenta problemas de geometría creados mediante indagaciones didáctico-matemáticas, generadas a partir de actividades con diez figuras planas (6 rectangulares y 4 triangulares) mostradas a profesores de primaria y de secundaria en servicio, en talleres virtuales sobre creación de problemas. En esta experiencia de indagación y aprendizaje en un ambiente lúdico, se llegó – apoyados por la intuición – a problemas aplicables en primaria y secundaria, que permiten relacionar áreas y perímetros de regiones poligonales, con aspectos básicos de la teoría de números, de sistemas de ecuaciones y de optimización matemática. **Palabras clave**: Indagación; creación de problemas; resolución de problemas; áreas y perímetros; puzles.
Abstract	This article presents and comments on geometry problems created through didactic-mathematical inquiries, generated from activities with ten plane figures (6 rectangular and 4 triangular) shown to primary and secondary school in service teachers, in virtual workshops on problem posing. In this experience of inquiry and learning in a playful environment, it was arrived - supported by intuition - to problems applicable in primary and secondary schools, which allow to relate areas and perimeters of polygonal regions, with basic aspects of number theory, systems of equations and mathematical optimization. **Keywords**: Inquiry; problem posing; problem solving; areas and perimeters; puzzles.
Resumo	Este artigo apresenta e comenta problemas de geometria criados por meio de inquéritos didático-matemáticos, gerados a partir de atividades com dez figuras planas (6 retangulares e 4 triangulares) apresentadas a professores do ensino fundamental e médio em serviço, em oficinas virtuais de criação de problemas. Nesta experiência de investigação e aprendizagem em ambiente lúdico, chegou-se - apoiado na intuição - a problemas aplicáveis ao ensino básico e secundário, que permitem relacionar áreas e perímetros de regiões poligonais, com aspectos básicos da teoria dos números, de sistemas de equações e otimização matemática. **Palavras-chave:** Inquérito; criação de problemas; resolução de problemas; áreas e perímetros; quebra-cabeças.

1. Problema

¿Cuál es la región cuadrada de mayor área que se puede formar uniendo por sus lados algunas de las figuras que se muestran en la Figura 1, sin superposiciones ni vacíos? (Tomar como unidad de área la región cuadrada más pequeña del papel cuadriculado sobre el cual se han trazado las figuras)

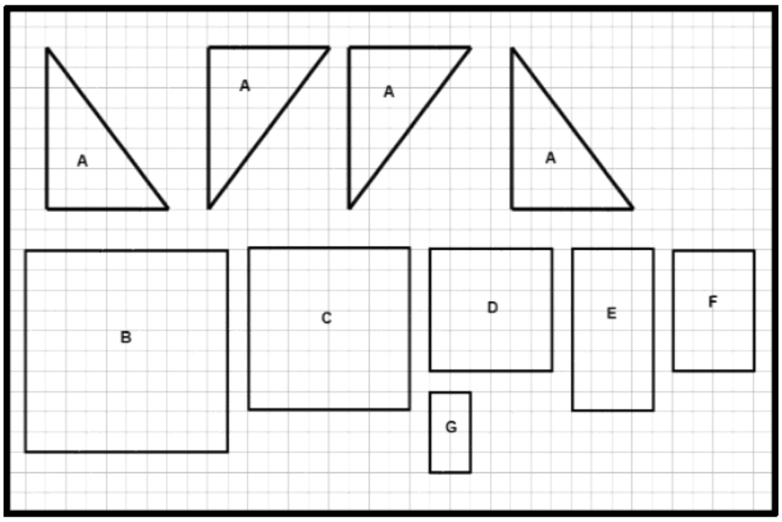


Figura 1. Material enviado a cada participante del taller

Cabe aclarar que este problema no es el punto de partida en la experiencia didáctica que explicaremos a continuación. Este problema, como algunos otros, surgió haciendo indagaciones didáctico-matemáticas sobre un problema propuesto en un grupo de trabajo.

2. La experiencia didáctica

Fue una experiencia didáctica desarrollada en forma virtual en el 2020, con docentes en servicio: Un taller con 60 profesores de primaria de diversos distritos de Lima; otro con 40 profesores de primaria de la región Amazonas; y un tercero con 53 profesores de educación secundaria de Lima, en el marco de talleres de creación de problemas de matemáticas, poniendo énfasis en la indagación, como parte de los programas de formación continua en matemáticas y ciencias, que ofrece la Academia Nacional de Ciencias del Perú al profesorado de educación básica[1].

El propósito fundamental fue brindar a los profesores en servicio experiencias de aprendizaje o profundización de conocimientos matemáticos, en un ambiente lúdico, indagando básicamente sobre áreas y perímetros de regiones planas: creando actividades, formulando preguntas y creando problemas de geometría, usando figuras especialmente diseñadas sobre papel cuadriculado. Veremos cómo resultaron problemas de geometría que se relacionan con la descomposición de un número en sus factores primos, con la identificación de números cuadrados perfectos, con un sistema de ecuaciones no lineal en dos variables y con la búsqueda de una configuración óptima.

[1] Me acompañaron en esta experiencia, integrando el equipo docente, la profesora Maritza León y los profesores Carlos Torres, Enrique Piñeyro y Max Ponce.

Se siguió una secuencia muy similar a la seguida con estudiantes de primaria, en un taller presencial, expuesta detalladamente en el número anterior de UNIÓN (Malaspina, 2021a); es decir, a todos los docentes participantes se les envió con anticipación un archivo con los triángulos y rectángulos que se muestran en la Figura 1 (notar que entre los rectángulos hay tres cuadrados) y se les pidió que, a partir de tal situación – trabajando colaborativamente en el taller, grupos de a lo más 5 participantes – desarrollen indagaciones didáctico-matemáticas creando actividades, preguntas y problemas, para estudiantes de un grado de la educación básica que ellos escojan. Tales actividades, preguntas y problemas deberían estar relacionados con áreas y perímetros de regiones poligonales. Más aún, los problemas creados tenían que ser resueltos y luego identificar sus cuatro elementos fundamentales (información, requerimiento, contexto y entorno matemático). Todo esto fue realizado por todos los grupos, expuesto por algunos de ellos en la reunión plenaria y enriquecido con los aportes e indagaciones, tanto de los participantes como de los monitores integrantes del equipo docente.

Sugiero al lector, imprimir, recortar y pegar las figuras en cartón u otro material que facilite su manipulación, para que siga experimentalmente las diversas indagaciones y trate de resolver los problemas propuestos. En el anexo se presenta una hoja para este propósito. Tomando como unidad *u* la longitud de los lados de los cuadrados más pequeños del papel cuadriculado, los triángulos tienen catetos de longitudes 6*u* y 8*u*; el cuadrado B tiene lados de longitud 10*u*; el cuadrado C, lados de longitud 8*u*; el cuadrado D, lados de longitud 6*u*; el rectángulo E es de 4*u* por 8*u*; el rectángulo F de 4*u* por 6 *u;* y el rectángulo G de 2*u* por 4*u*.

Algunas de las actividades propuestas por algunos grupos de docentes participantes, a partir del material recibido (Figura 1), fueron:

a) Averigua si hay figuras que tienen la misma área
b) Averigua si hay figuras que tienen el mismo perímetro
c) Averigua si hay un rectángulo que tiene la misma área que un triángulo
d) Recorta las figuras dadas y arma una figura como, por ejemplo: un robot, un tren, un barquito, etc.

Algunas de las preguntas propuestas por algunos grupos de participantes, a partir del material recibido y teniendo en cuenta las actividades propuestas, fueron:

i) ¿Qué figuras podríamos unir para formar otra que tenga el mismo perímetro que la figura C?
ii) ¿Cuál de las figuras dadas tiene mayor área?
iii) ¿Cuál de las figuras armadas tiene mayor área?
iv) ¿Cómo hallar el perímetro de las figuras de forma triangular?
v) ¿Cómo hallar el perímetro de las figuras armadas uniendo las figuras recortadas?
vi) ¿Cuál de las figuras armadas tiene mayor perímetro?

3. Problemas y más indagaciones

A continuación, mostraré algunos de los problemas creados en los grupos. Ciertamente, la idea en la secuencia didáctica es que – en el marco de indagaciones didáctico-matemáticas a partir de una situación dada – las actividades y preguntas creadas sirvan de base para la creación de uno o más problemas. El Grupo U1, en uno de los talleres con profesores de primaria, propuso la actividad d) y la pregunta v) y, a partir de ellas, propuso el siguiente problema:

Problema 1.

Hallar el área y el perímetro de la figura mostrada

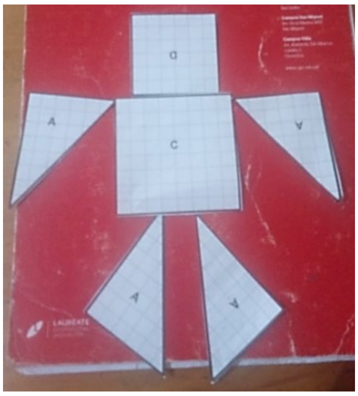


Figura 2. "Robot" creado por el Grupo U1, con algunas de las piezas recortadas

El área se obtuvo directamente, sumando las áreas de las figuras que conforman el "robot": 4 veces el área de A + el área de C + el área de D (lo cual da 196u^2). Obtener el perímetro conllevó la dificultad de hallar la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos A. Por cierto, esto no ocurrió con los profesores que recordaban el teorema de Pitágoras. Algunos profesores de primaria dedujeron que tal longitud es 10 unidades, observando que la hipotenusa coincidía completamente con la longitud de los lados del cuadrado B, que es precisamente de 10 unidades. Fue una ocasión para comentar sobre la confiabilidad en las mediciones empíricas y para destacar la importancia del teorema de Pitágoras. Así, se obtuvo que el perímetro del "robot" es de 140 unidades. El lector puede verificar que una manera de obtener tal perímetro es: 4 veces el perímetro de A + el perímetro de C + el semiperímetro de D.

Cuando el problema fue expuesto en la reunión plenaria, surgieron algunas indagaciones en torno a él:

- *¿Cómo cambian el área y el perímetro del "robot" si este desplaza su cabeza hacia la izquierda o hacia la derecha, sin sobrepasar su cuerpo?*
- *¿Cómo cambian el área y el perímetro del "robot" si este pega sus brazos a su cuerpo?*

Ante las preguntas sobre el área, en ambos casos, la respuesta fue inmediata: el área del "robot" no se altera, porque se mantienen las áreas de las figuras que lo componen. La respuesta sobre el perímetro no fue muy inmediata, pero también se concluyó que en el primer caso el perímetro del "robot" se mantiene.

Ante la pregunta sobre el perímetro del "robot" cuando pega sus brazos al cuerpo se concluyó que el perímetro sí se altera, pues en tal caso, se entiende que resultan 8 unidades en común entre el cuerpo y un brazo y otras 8 unidades en común entre el cuerpo y el otro brazo. Estas 16 unidades en común ya no forman parte del perímetro total del “robot”, por lo cual hay que descontarlas del perímetro del “robot” en la presentación inicial (Figura 2).

Problema 2

Con todas las piezas recortadas de la Figura 1, formar un rectángulo, sin vacíos ni superposiciones.

Calcular el perímetro y el área del rectángulo formado.

Este problema fue creado por el Grupo 8, en el taller con profesores de secundaria, y como solución de la primera parte presentó la que muestro en la Figura 3.

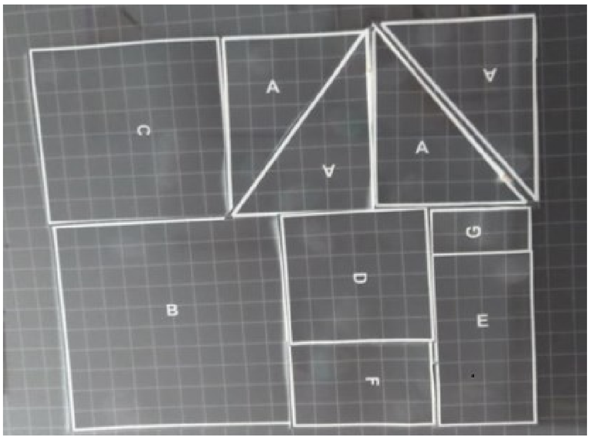


Figura 3. Rectángulo formado con todas las piezas

La novedad principal de este problema está en la construcción del rectángulo, usando todas las figuras que conforman el material básico presentado en la Figura 1, constituyendo así un rompecabezas (o puzle) interesante. El perímetro y el área se obtuvo sin dificultad: 76u y 360u^2, respectivamente.

A partir de este problema, algunas indagaciones didáctico-matemáticas nos llevan a nuevos problemas; por ejemplo:

- *Si uniendo todas las piezas se pudiera formar otro rectángulo, sin vacíos ni superposiciones, ¿tendría área diferente?*
- *¿Se puede construir otro rectángulo de perímetro mayor, uniendo todas las piezas, sin vacíos ni superposiciones?*

La primera pregunta conlleva el reforzamiento de la conservación de la cantidad – en este caso de áreas, al modificar la posición de las piezas – que es fundamental en la educación primaria. Notar que juega un papel muy importante la palabra *todas*. Resulta interesante que, para responder a la pregunta, no es necesario saber si realmente se puede construir otro rectángulo con todas las piezas.

Responder la segunda pregunta lleva a indagaciones matemáticas interesantes, más allá de la búsqueda, por ensayo y error, de la construcción de otro rectángulo usando todas las piezas. Por ejemplo:

- Si se usan todas las piezas, el área del rectángulo que se construya, siempre tendría que ser 360u^2; en consecuencia, si a y b fueran las longitudes de la altura y de la base de tal rectángulo, tendría que ocurrir que ab = 360 y su perímetro sería $2a + 2b$. Llamando *P* a tal perímetro, tenemos un sistema de ecuaciones que da algunas pistas para desarrollar indagaciones matemáticas orientadas a responder la pregunta.

- Sabiendo que ab = 360, también una pista de indagación matemática es explicitar los factores primos de 360; esto es: $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ y con esta información se busca pares de números naturales a y b que multiplicados den 360. La suma de tales números correspondería al semiperímetro del rectángulo. Un par de tales números es 18 y 20, que da el semiperímetro 38, como se muestra en la Figura 2, pero la idea es examinar si existe otro par de números naturales cuyo producto sea 360 y cuya suma sea mayor que 38.
- Las longitudes de los lados de todas las piezas son números pares; en consecuencia, la base y la altura de cualquier rectángulo que se construya con ellas, tendrán longitudes pares; es decir, a y b deben ser números pares. Esto lleva a descartar el par 24 y 15, así como el par 8 y 45.

Problema 3

Formar un cuadrado uniendo el mayor número de las piezas dadas, sin vacíos ni superposiciones.

Hallar su área y su perímetro.

Este problema fue creado por el Grupo 2 de participantes en el taller con profesores de secundaria y presentó como solución a la primera parte, la que muestro en la Figura 4.

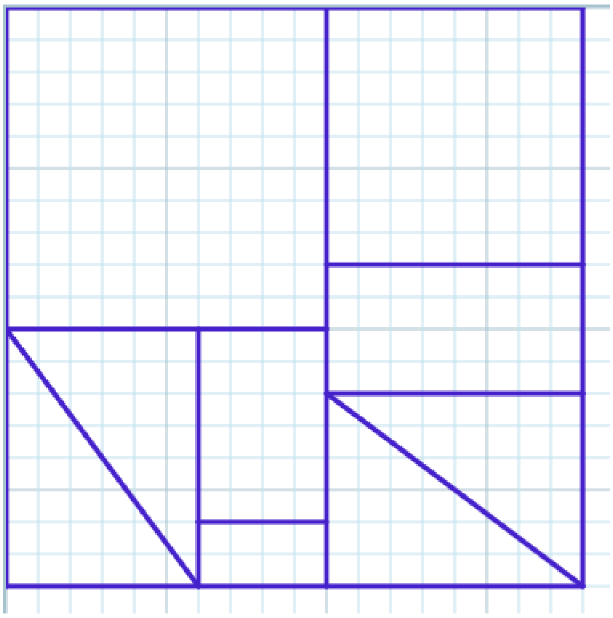


Figura 4. Cuadrado formado con 9 de las 10 piezas.

El área y el perímetro de este cuadrado se halló fácilmente, observando que sus lados tienen longitud 18*u*; Así: Área = $324u^2$ y Perímetro = 72*u*.

Nuevamente, tenemos un puzle matemático, que motiva hacer algunas indagaciones didáctico-matemáticas; por ejemplo:

- *¿Cuál es el cuadrado de mayor área que se puede formar uniendo algunas de las figuras dadas, sin vacíos ni superposiciones?*
- *¿Se puede formar un cuadrado uniendo todas las piezas dadas, sin vacíos ni superposiciones?*

Responder estas preguntas, lleva a otras observaciones e indagaciones matemáticas interesantes; por ejemplo:

- El cuadrado mostrado ha sido construido con 9 de las 10 piezas. Si se usara la pieza que falta, el área del cuadrado sería $360u^2$ ¿Puede existir un cuadrado con lados de longitud entera, cuya área sea $360u^2$?
- ¿360 es un cuadrado perfecto?

Como 360 no es un cuadrado perfecto, no puede existir un cuadrado cuyos lados sean de longitud entera (más aún, número par, por lo que se vio en el problema anterior) y cuya área sea $360u^2$.

Como $324u^2$ es el área del cuadrado mostrado en la Figura 3 y $324 = 18^2$ es el número cuadrado más próximo a 360, menor que 360 (el siguiente es $361 = 19^2$), no es posible formar un cuadrado de área mayor que $324u^2$ con las piezas de la Figura 1.

Así, tenemos respondidas las preguntas y, en consecuencia, resuelto el problema con el que iniciamos este artículo.

4. Comentarios

Los análisis hechos al examinar los problemas propuestos, brindan elementos para nuevas indagaciones didáctico-matemáticas uniendo las piezas de la Figura 1, sin vacíos ni superposiciones. Por ejemplo,

- ¿Qué otros rectángulos se pueden construir con las piezas dadas?
- ¿Qué otros cuadrados se pueden construir con las piezas dadas?
- ¿Es posible construir triángulos uniendo algunas piezas?
- ¿Se puede formar un triángulo uniendo dos figuras triangulares a dos lados de uno de los cuadrados?
- ¿Se puede construir rectángulos S y T, tales que S tenga perímetro menor que T, pero área mayor que T?
- ¿Se puede utilizar las figuras para ilustrar el teorema de Pitágoras?

Ciertamente, responder estas preguntas y otras similares que puedan surgir, es resolver problemas haciendo interactuar la experimentación, la intuición y criterios matemáticos, todo lo cual, es sustancial en la formación científica de profesores y estudiantes.

Estamos llamando *indagación didáctico-matemática* de los docentes, a las preguntas con sentido matemático, motivadas por la búsqueda de formas de facilitar aprendizajes a los estudiantes, a partir de una situación, de un problema o de un concepto matemático. Esto conlleva proponer actividades y crear problemas que estimulen su curiosidad. Más aún, la resolución y refinamiento didáctico y matemático de los problemas creados. En muchos casos, las actividades, las preguntas y los problemas creados, convendrá organizarlos en secuencias didácticas que favorezcan los aprendizajes.

Podemos percibir la importancia de las indagaciones didáctico-matemáticas a partir de una situación dada – en este caso, el material repartido (Figura 1) – y de las indagaciones didáctico-matemáticas a partir de problemas – en este caso, los problemas 1, 2 y 3 – que son dos caminos básicos para crear problemas; en el primer caso por *elaboración* y en el segundo por *variación* (Malaspina, 2021b). Hemos visto que estas dos formas de crear problemas se potencian entre sí, en el sentido que, partiendo de una situación se crea uno o más problemas por elaboración y luego, a partir de estos, se crean nuevos problemas por variación.

Los talleres interactivos desarrollados, en forma presencial o virtual, siguiendo secuencias didácticas de creación de actividades, creación de preguntas y creación de problemas, con estudiantes o con docentes (Malaspina, 2021a, 2021c), así como otras experiencias didácticas que se exponen en diversas publicaciones sobre indagación y creación de problemas, recientes – como la de Divrik et al. (2020) – y de hace algunas décadas – como la de Yerushalmy et al. (1990), me llevan a afirmar, parafraseando a Cruz-Guzmán et al. (2017), que aun con sus dificultades y limitaciones, el aprendizaje por indagación es uno de los enfoques didácticos más idóneos para aprender matemáticas haciendo matemáticas.

Considero fundamental que, desde temprana edad, en contextos lúdicos, los niños sean estimulados en su curiosidad innata y se les brinde oportunidades para observar, experimentar, formular preguntas, desarrollar su intuición matemática, hacer conjeturas y crear problemas. Ciertamente, para esto es fundamental que los docentes, como parte de su formación inicial y continua, vivan experiencias de indagaciones didáctico-matemáticas. En números anteriores de UNIÓN he expuesto experiencias interesantes con docentes, en las que, indagando, se llega a temas matemáticos no previstos, inclusive de nivel universitario (Malaspina, 2017, 2019, 2021c).

El uso de rompecabezas adecuados es un recurso particularmente motivador y contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas (Gorev et al., 2018). Es un desafío para investigadores y educadores, crear rompecabezas adecuados que motiven indagaciones didáctico-matemáticas para brindar a nuestros estudiantes ocasiones de aprendizaje reflexivo, en contextos lúdicos y con emociones positivas.

Bibliografía

Cruz-Guzmán, M., García-Carmona, A., & Criado, A. M., (2017) Aprendiendo sobre los cambios de estado en educación infantil mediante secuencias de pregunta– predicción– comprobación experimental. *Enseñanza de las Ciencias, 35*.3, pp. 175-193

Divrik, R., Pilten, P., & Tas, A. M. (2020). Effect of Inquiry-Based Learning Method Supported by Metacognitive Strategies on Fourth-Grade Students' Problem-Solving and Problem-Posing Skills: A Mixed Methods Research. *International Electronic Journal of Elementary Education, 13*(2), 287-308.

Gorev, P. M., Telegina, N. V., Karavanova, L. Z., & Feshina, S. S. (2018). Puzzles as a didactic tool for development of mathematical abilities of junior schoolchildren in basic and additional mathematical education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(10), em1602.

Malaspina, U. (2017). Operaciones con números y operaciones con funciones afines. Gráficos e indagaciones. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 50*, pp. 167-174

Malaspina, U. (2019). Rectángulos: Perímetros, áreas y curvas de nivel. Una experiencia de indagación. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, No. 57*, pp. 153-161

Malaspina, U. (2021a). Creación de problemas sobre triángulos, jugando con varillas *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 62*, pp. 1 – 8.

Malaspina, U. (2021b). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 10*(1), 1-17.

Malaspina, U. (2021c). Triángulos en un rectángulo. Situación, actividades, preguntas y problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 61*, 1 - 9

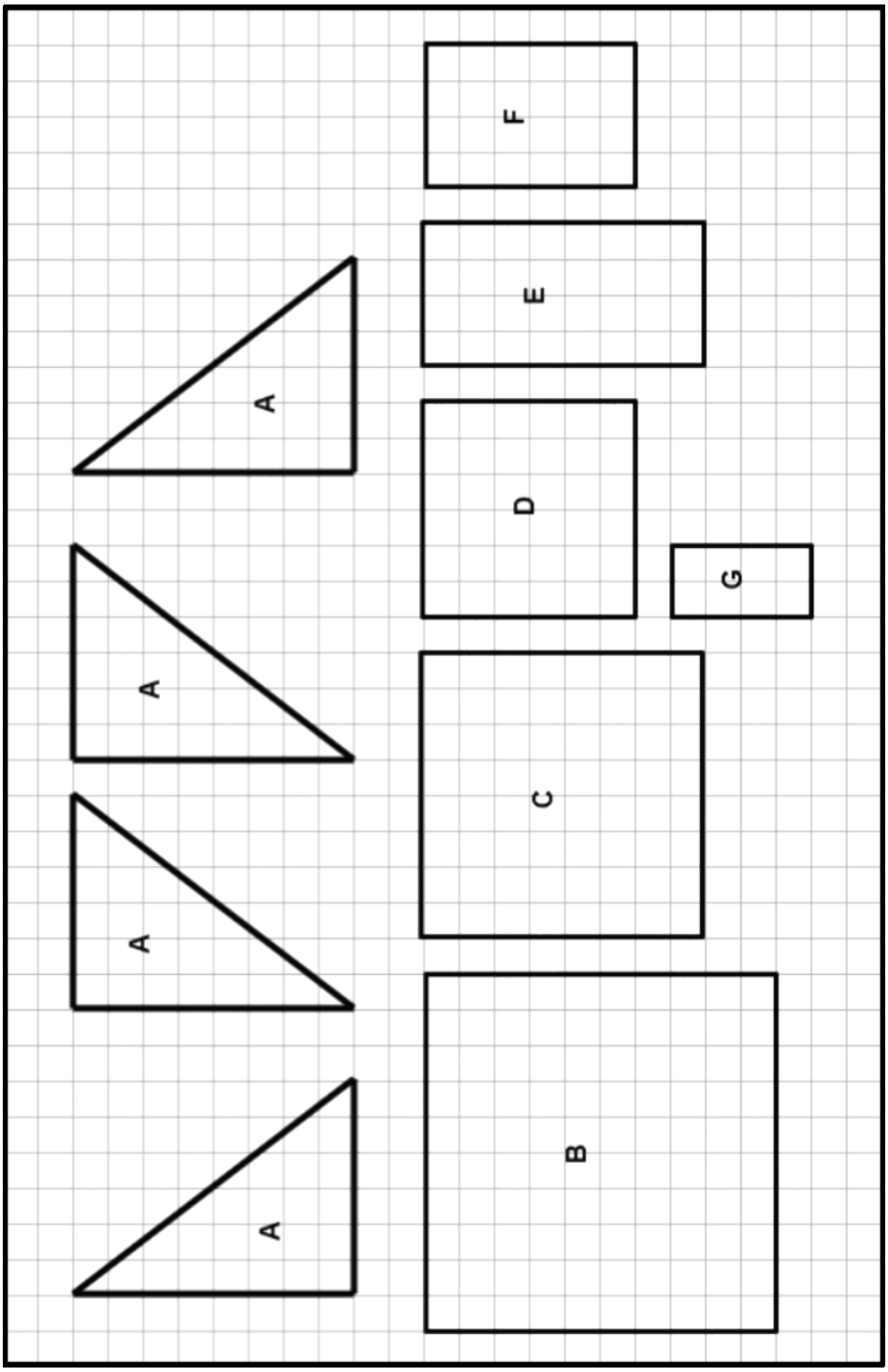
Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science, 19*(3), 219-245.

Autor: Malaspina Jurado, Uldarico

Doctor en Ciencias, Profesor Emérito de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Expositor en foros internacionales de Educación Matemática. Autor y coautor de libros y artículos de Matemática y Educación Matemática. Académico de Número de la Academia Nacional de Ciencias del Perú. Palmas Magisteriales - Grado Amauta

Anexo

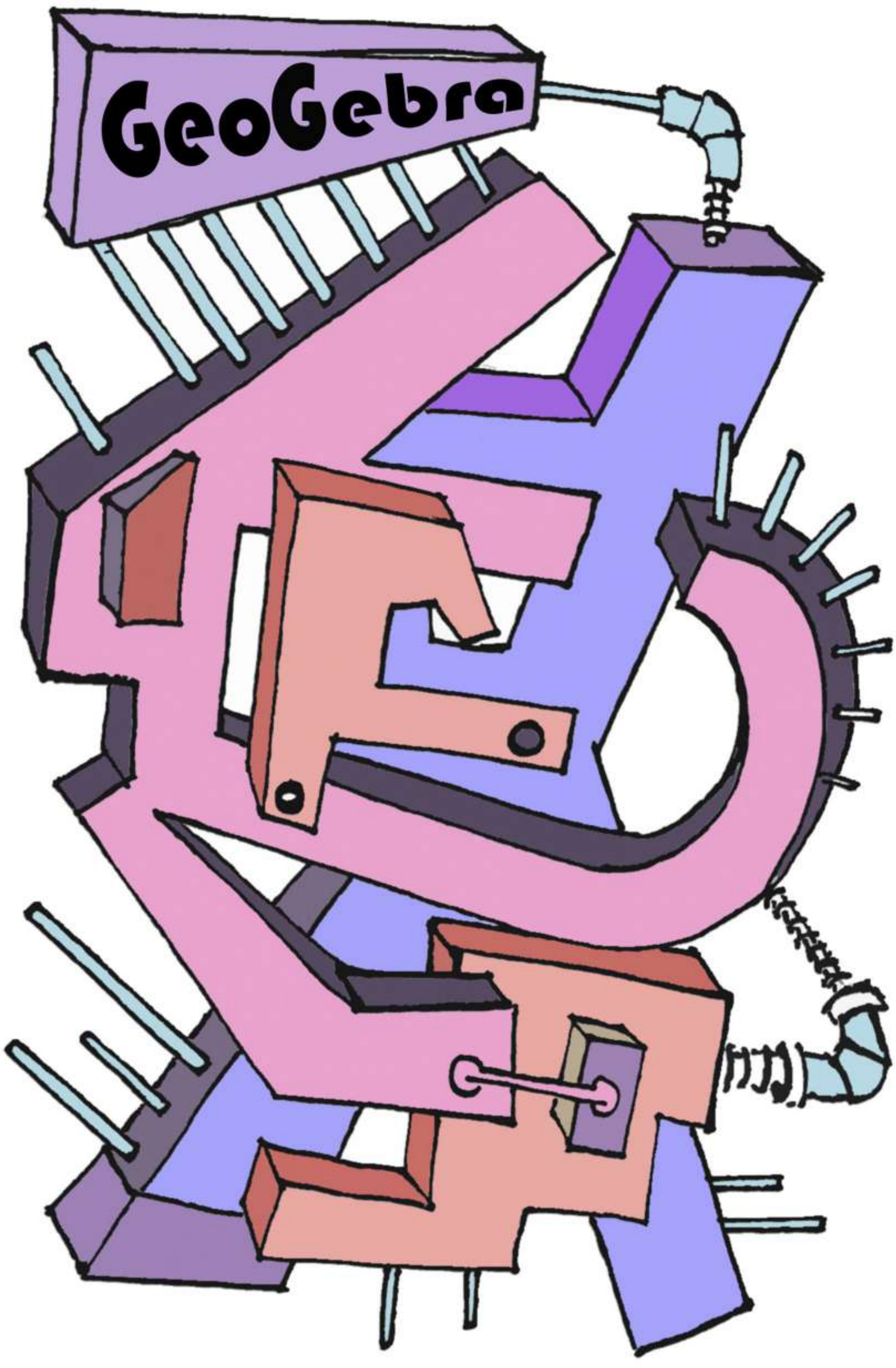
Hoja con el material de trabajo.
(Sugiero imprimir, recortar las figuras y pegarlas en cartón u otro material que facilite su manipulación.)



UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http//union.fespm.es/index.php



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-7

GeoGebra en Unión

Alejandro Gallardo Lozano

1. Introducción

Esta es la sección dedicada en la Revista Unión a las noticias y novedades relacionadas con el software GeoGebra en la comunidad Iberoamericana.

En cada número tenemos un artículo realizado por una firma invitada que pueda realizar un aporte especial en alguno de estos tres aspectos:

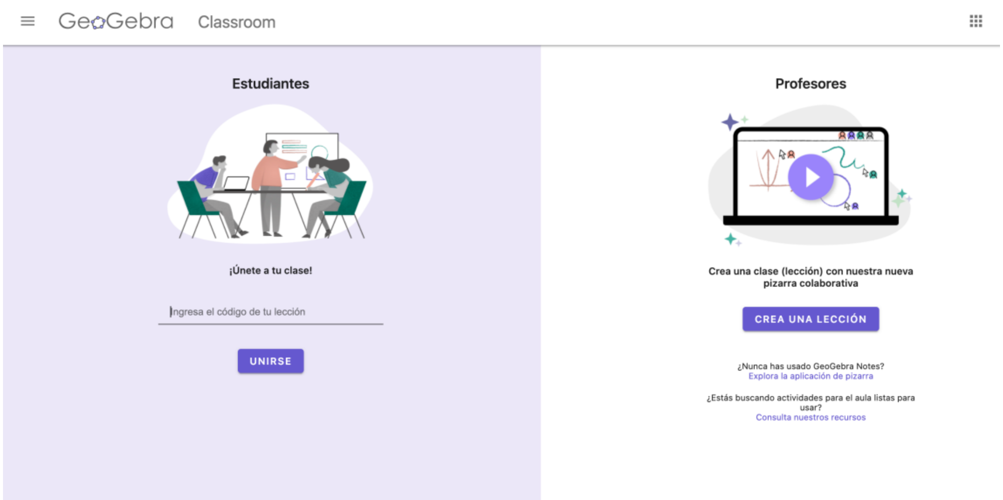
- Investigaciones realizadas sobre el impacto educativo del uso de GeoGebra en las aulas. Es necesario avanzar en esta línea para favorecer su inclusión en las aulas como un elemento de mejora en la Educación Matemática.
- Experiencias de aula con GeoGebra: modelos de uso con éxito en las aulas de diferentes niveles educativos. Necesitamos responder a la preguntas ¿cómo introducir GeoGebra en mi aula y para qué? ¿Cómo hacer que mis alumnos hagan Matemáticas con GeoGebra?
- Trabajos realizados con GeoGebra que nos sirvan a todos para aprender su manejo.

En este número nuestra firma invitada es Fredy Rivadeneira Loor, ecuatoriano, Licenciado en Ciencias de la Educación mención Física y Matemáticas, Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria especialidad Matemáticas. Ha sido parte de varios procesos de formación tanto para educadores como para estudiantes, entre ellos: Formador de Formadores de Matemáticas de la Senescyt e Instructor de Didáctica de la Matemática para la Educación General Básica del Ministerio de Educación del Ecuador. En la Universidad Técnica de Manabí coordina el Instituto GeoGebra. Tiene participación como ponente en importantes eventos académicos relacionados con la Matemática Educativa; llegando a ser autor, coautor y revisor de publicaciones científicas, mismas que están relacionadas con la Formación de Docentes en el Área de Matemáticas y con el uso de las TIC dentro del proceso de enseñanza de las Matemáticas. Es miembro de la Comunidad de Educación Matemática de América del Sur – CEMAS y de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana – CGL.

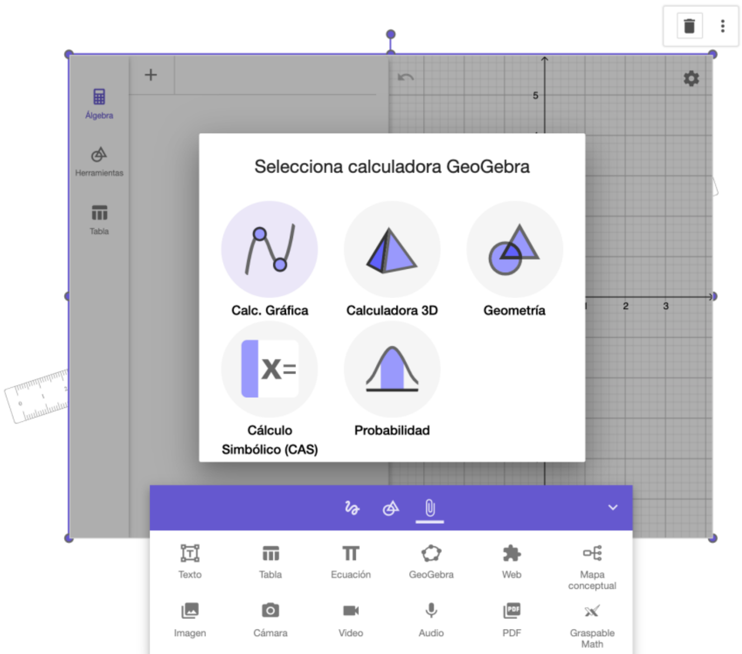
En esta ocasión en su artículo nos presenta una experiencia de trabajo en aula sobre Distribuciones de Probabilidad con el uso de Geogebra como software e incluso como pizarra digital. Esta experiencia de éxito tuvo lugar durante el confinamiento provocado por la pandemia Covid-19. Espero que sea de su interés y abra nuevas perspectivas de trabajo en la enseñanza híbrida a la que estamos cada vez más orientados. Agradecemos a Fredy su generosidad en esta colaboración.

2. Novedades y Noticias

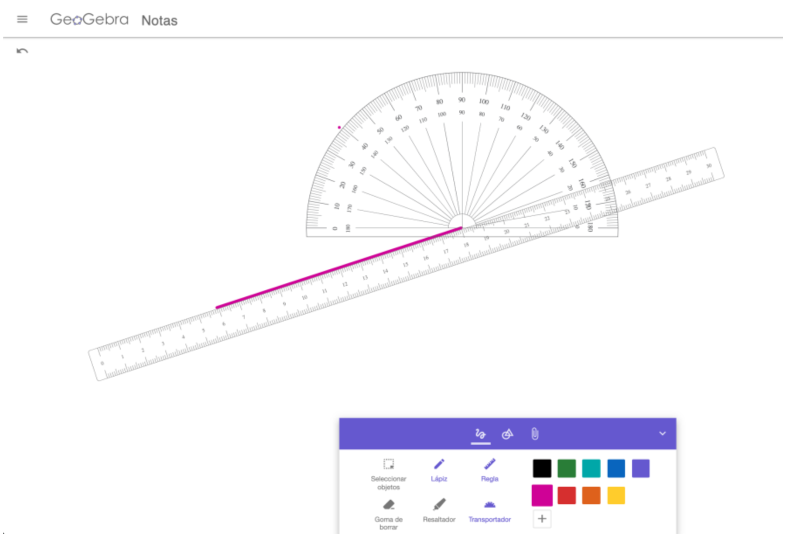
- GeoGebra Classroom:
    - Se ha implementado la posibilidad de obtener una vista rápida de lo que hacen los alumnos en una tarea. Vídeo.
    - Está prevista la integración de GeoGebra Classroom en MS Teams. Los alumnos iniciarían sesión de forma automática en GeoGebra desde Teams. Se publicaría una app que tendría que integrar en Teams el Administrador del dominio del Centro. Asimismo se va avanzando en la integración con Google Classroom y Moodle. La idea es que los alumnos utilicen GeoGebra Classroom desde su entorno de trabajo habitual.
- GeoGebra Notes:
    - Se anuncia la novedad de crear una pizarra colaborativa para grupos de alumnos (que puede configurar el profesor). Varios alumnos podrían trabajar a la vez sobre una tarea preparada previamente por el profesor con las enormes posibilidades que ya integra Notes.



-
    - Notes incluye ahora la posibilidad de, al insertar GeoGebra, elegir cualquiera de las calculadoras.

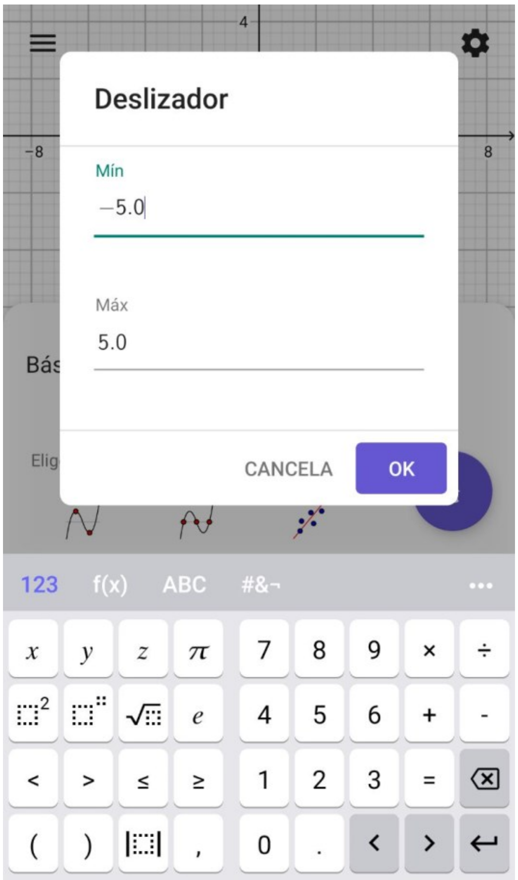


◦ Se integra en Notes una regla (que permite dibujar líneas rectas) y un transportador de ángulos. Esta novedad se suma a los mapas mentales y la posibilidad de gráficos desde tablas que ya habían integrado antes.



- Apps:

  ◦ Se anuncia la integración del teclado de GeoGebra en la app cuando se usan las herramientas. Por ejemplo, en la herramienta deslizador se abre el teclado para configurar los límites.



- La tabla de la Calculadora gráfica se va a ir pareciendo cada vez más a una hoja de cálculo (algo que echábamos de menos los usuarios de GeoGebra 5 y 6). Permitirá su configuración manual y modificaciones en los valores a los que se aplican las funciones.

- GeoGebra Community Involvement: se ha lanzado este programa para gestionar las vías de participación de los usuarios de GeoGebra. Se ofrecen distintas posibilidades de implicación individuales y colectivas. En esta tabla se detallan las posibilidades.

Tareas / Insignias	Seguidor	Colaborador	Embajador	Instituto	Red
Número de personas	individual	individual	individual	mín. 3 personas	mín. 5 personas
Seguir noticias de GeoGebra	✔	✔	✔	✔	✔
Crear recursos		✔	✔	✔	✔
Ayudar con la traducción		✔	✔	✔	✔
Escribir publicaciones		✔	✔	✔	✔
Participar en entrevistas UI/UX		✔	✔	✔	✔
Prueba de versiones beta		✔	✔	✔	✔
Redes sociales			✔	✔	✔
Organizar eventos			✔	✔	✔
Apoyar la comunidad local				✔	
Apoyar la comunidad interregional					✔

Las insignias otorgadas tienen validez de un año y se controlarán a través de un sistema de puntos para fomentar la implicación de los usuarios.

La web de GeoGebra está llena de actividades publicadas que quizá no sean útiles a todos en general. La idea de futuro será limitar las publicaciones en la web a autores certificados para garantizar una cierta calidad en los contenidos visibles en la web.

Es muy interesante la vía de crear equipos colaborativos reconocidos por GeoGebra, más allá de los estupendos Institutos GeoGebra.

Si eres usuario de GeoGebra, ¿has pedido ya tu insignia?

3. GeoGebra en pandemia

¿Cómo ha contribuido GeoGebra a la supervivencia educativa en los tiempos de pandemia y confinamiento que hemos sufrido?

Bajo mi punto de vista los grandes aportes de esta app a nuestro trabajo docente en estos días inciertos han sido:

- GeoGebra Notes: la capacidad de disponer de una pizarra con tantísimas posibilidades para usar en nuestras clases online. Con ella hemos podido compartir textos, resolver problemas usando la integración de Graspable Math y las gráficas, integrar pdfs, vídeos, imágenes, etc. Estas pizarras podían ser guardadas y compartidas directamente con nuestros alumnos.
- GeoGebra Classroom: la posibilidad de que nuestros alumnos realicen tareas matemáticas online durante la clase o después de ella con nuestra visión en directo de su trabajo (con el feedback que podemos dar en el momento) y la capacidad de evaluación posterior nos ha salvado la vida a más de uno. Hay actividades autoevaluables (como las de Javier Cayetano) que permitían la integración en Moodle y la aparición del puntaje obtenido por el alumno directamente en el libro de calificaciones.
- La exposición de applets para la visualización de conceptos. Para los que ya hacíamos esto en el aula presencial el traslado a la clase online fue bastante llevadero.

- Los applets de GeoGebra permiten la aleatoriedad y, por tanto, la generación de pruebas evaluativas diferentes para cada alumno (basadas por ejemplo en su número de identificación).

  En definitiva, GeoGebra hizo su aporte en una situación tan complicada que nadie podíamos imaginar. Ahora estamos más preparados para modelos educativos que combinen formatos presenciales y a distancia. Podemos afirmar que líneas de futuro educativo se han impuesto a la fuerza y hemos tenido que reaccionar aprendiendo a la desesperada y evidenciando nuestras carencias formativas.

4. GeoGebra es comprado por BYJU'S

El día 9 de diciembre de 2021 se agitó nuestra tranquilidad como usuarios de GeoGebra. La gran empresa tecnológica india Byju's adquiere GeoGebra. Ese día nos surgen muchas dudas:

> *¿Seguirá siendo software libre? ¿Cómo afectará a los usuarios? ¿Y a los recursos publicados en su web? ¿Seguirán siendo Creative Commons? ¿Cómo se hará la gestión de los datos? ¿Y los datos de los alumnos? ¿Servirán para que esta empresa les ofrezca productos?*

GeoGebra se ha encargado de aclarar las dudas asegurando que todo seguirá siendo como hasta ahora. Esperemos que así sea. Hay muchas personas en el mundo que hemos elegido GeoGebra como nuestro software favorito para trabajar Matemáticas.

Las aclaraciones están disponibles aquí: https://www.GeoGebra.org/m/fzkjvuuv

5. MatesGG (Matemáticas con GeoGebra)

El día 5 de noviembre de 2021 saltó la noticia: se publicaba este increíble recurso, fruto del trabajo de la FESPM (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) y el INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado).

Puedes acceder a la web del proyecto aquí: https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg/

- ¿Qué es MatesGG? Una colección de unos 600 recursos de GeoGebra seleccionados por su calidad y utilidad para el uso de los profesores y profesoras directamente en su aula.
- ¿Por qué es tan importante? Pone a disposición de los profesores y profesoras que no tienen por qué conocer el manejo de la herramienta GeoGebra recursos de alta calidad para su alumnado. La web de GeoGebra tiene tantos recursos publicados que es difícil seleccionar los más adecuados.
- ¿Cómo se ha elaborado? Se ha trabajado en red desde los distintos Institutos GeoGebra del estado español. Se han seleccionado los recursos, clasificado por bloques y grupos de edad, y se han integrado en la herramienta Exelearning, que ha permitido una mejor integración web. Se han generado indicaciones de los posibles usos de cada recurso seleccionado.
- ¿Cómo se puede usar? La web del proyecto permite la búsqueda y selección por niveles y bloques desde Infantil a Bachillerato. Te muestra los recursos que cumplen con tus criterios de búsqueda y te abre (en nueva pestaña) el recurso sobre el que haces click. En él puede explorar sus características y comprobar si se adapta a tu necesidad concreta.
- ¿Está acabado? No, es un proyecto que seguirá creciendo aportando nuevos recursos de calidad a nuestro trabajo en las aulas.

MatesGG se suma a la recopilación de recursos que ha seleccionado la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (web GeoGebra en español), a la colección de Illustrative Math Curriculum, a la selección en lengua inglesa realizada por el GeoGebra Team (Primaria, Secundaria), los materiales FLINK (Austria, con la posibilidad de ser traducidos en el futuro). Muchos recursos al servicio del profesorado que avanza y reflexiona en su práctica docente.

Nuestro agradecimiento y reconocimiento a todos los que han colaborado en este estupendo trabajo de MatesGG, que sabemos que ha supuesto un gran esfuerzo y dedicación por parte de todos los implicados.

¡Gracias por vuestra atención! ¡A construir y a llevarlo al aula!

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 63. Diciembre 2021
Páginas 1-11

GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas. Una experiencia de aula.

Fredy Rivadeneira Loor

Resumen	En diferentes centros de Educación Superior, la Estadística es considerada asignatura básica en las carreras que se ofertan; pero en su enseñanza se presenten ciertas dificultades ya que en la etapa de Educación Secundaria no se cumple con los contenidos propuestos en el currículo, sobre todo en lo que a Estadística Inferencial se refiere. El presente documento tiene como fin describir la experiencia de aula utilizando los recursos que posee GeoGebra para enseñar Distribuciones Probabilísticas, en que se utilizó una metodología participativa con un enfoque teórico-práctico. **Palabras clave**: GeoGebra, Distribuciones probabilísticas, Didáctica, Estadística
Abstract	In different Higher Education centers, Statistics is considered a basic subject in the careers that are offered; but in its teaching certain difficulties arise since in the Secondary Education stage the contents proposed in the curriculum are not fulfilled, especially with regard to Inferential Statistics. The purpose of this document is to describe the classroom experience using the resources that GeoGebra has to teach Probabilistic Distributions, in which a participatory methodology with a theoretical-practical approach was used. **Keywords**: GeoGebra, Probabilistic distributions, Didactics, Statistics
Resumo	Em diferentes Centros de Ensino Superior, a Estatística é considerada uma disciplina básica nas carreiras que são oferecidas; mas no seu ensino surgem algumas dificuldades, visto que na fase do Ensino Secundário os conteúdos propostos no currículo não são cumpridos, especialmente no que se refere à Estatística Inferencial. O objetivo deste documento é descrever a experiência em sala de aula utilizando os recursos que o GeoGebra possui para o ensino de Distribuições Probabilísticas, nas quais foi utilizada uma metodologia participativa com abordagem teórico-prática. **Palavras-chave:** GeoGebra, distribuições probabilísticas, didática, estatística

1. Introducción

La Estadística, ciencia que se encarga de la obtención, presentación y descripción de los datos muestrales (Johnson & Kuby, 2008), es en la actualidad la ciencia que todo profesional debe conocer y utilizar en su diario accionar; pero a pesar de su importancia, no ha sido posible cubrir en su totalidad los contenidos que se establecen en los diferentes niveles de formación académica, sobre todo los temas relacionados con las Distribuciones Probabilísticas Discretas. Esto último se convierte en un problema a solucionar, lo cual se torna complicado porque los profesores se enfrentan con diferentes obstáculos al momento de impartir los mencionados contenidos.

De las tantas dificultades que se presentan en la práctica docente, una de ellas es no tener a la mano recursos para ser utilizados en la enseñanza, sobre todo aquellos que tienen relación con la tecnología, como, por ejemplo, un software.

Como es de conocimiento general, en el campo de la Estadística Inferencial se aborda el tema Distribuciones Probabilísticas tanto Discretas como Continuas, entre ellas, Binomial, Hipergeométrica, Poisson y Normal. La enseñanza de estos modelos probabilísticos se desarrolla siguiendo un esquema: teoría – resolución de problemas, mismo que se lo realiza tradicional (el Docente resuelve ejercicios tipo y el Estudiantado resuelve talleres). Es decir que el proceso de abstracción queda muchas veces a un lado, y con ello, difícilmente se llega a aprendizajes significativos.

Duval (1999), manifiesta que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Según esta afirmación, lograr verdaderos aprendizajes implica tener en el proceso la mayor cantidad de registros, y uno que falta en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas es el registro gráfico; situación que se soluciona incorporando GeoGebra como recurso didáctico.

Y es que GeoGebra no es solo geometría dinámica (Geo) y álgebra (Gebra), es mucho más, ya que ofrece herramientas y opciones que permitirán trabajar cualquier contenido matemático, en diferentes niveles educativos, tal como sostiene Carrillo (2010).

Con GeoGebra se pueden activar diferentes registros de representación, lo que permitirá que las Distribuciones Probabilísticas sean aprendidas tanto en su modelo y algoritmo como en su gráfica.

En el presente documento se describirá la experiencia de aula en la que se utilizó las diferentes herramientas que posee GeoGebra, un software libre de Matemática Dinámica que Markus Hohenwarter y todo un equipo de programadores vienen desarrollando desde 2002 cuando salió la primera versión, y que están estrechamente relacionadas con las Distribuciones Probabilísticas, que bien pueden convertirse en alternativas a ser utilizadas como recurso pedagógico en el aula de clase y en el aprendizaje autónomo, sobre todo en situaciones, como las vividas a causa de la COVID19, en la que se tuvo que migrar de procesos educativos presenciales a virtuales.

De acuerdo con Guachún et al (2020), en tiempos de pandemia donde prevalece la educación virtual el utilizar el Software GeoGebra como recurso didáctico resulta muy útil, debido a su fácil obtención, instalación y manejo, a más de generar un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, permitiendo alcanzar los conocimientos mínimos y despertando la motivación por aprender, pues les permite aprender mejor y más rápidamente. Y es que GeoGebra se convirtió en un importante aliado de los profesores en los tiempos que se viven a causa de la pandemia.

2. Descripción de la experiencia

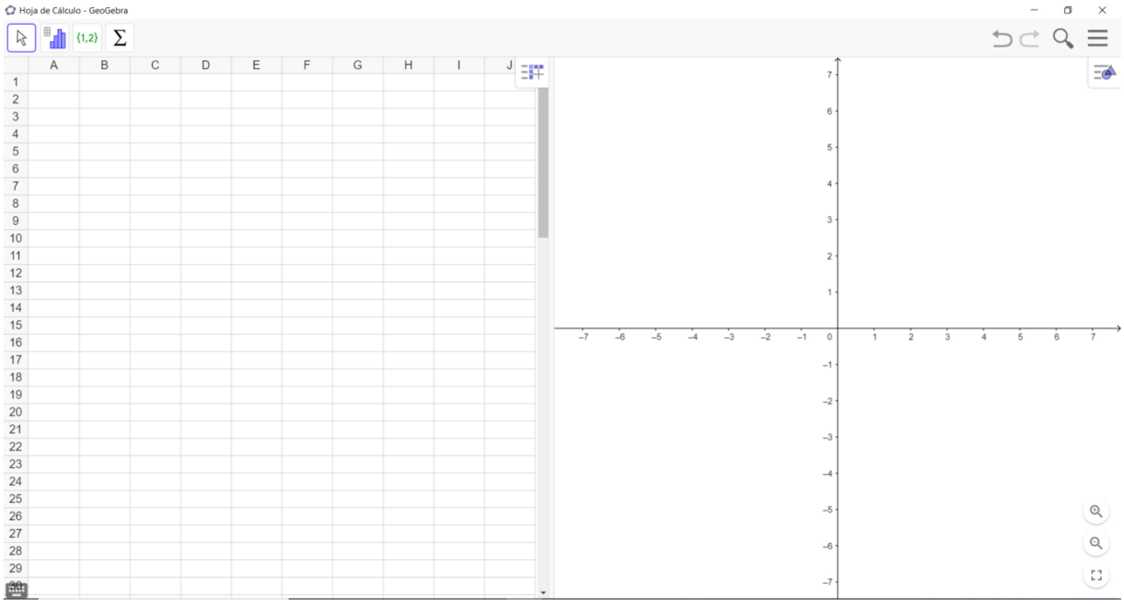
Estadística Aplicada a la Investigación Educativa es una de las asignaturas del Programa de maestría en Pedagogía de las Ciencias Experimentales mención Matemática y Física de la Universidad Técnica de Manabí, Ecuador. En los contenidos mínimos se aborda lo relacionado a las Distribuciones Probabilísticas y en el diagnóstico cualitativo realizado se pudo determinar que no todos los maestrantes dominaban dichos temas, por lo que se decidió optar por incorporar GeoGebra como recurso para mediar su enseñanza en el ambiente virtual en el que se desarrolló la asignatura, debido a que la pandemia de la COVID19 no permitió que sea presencial como originalmente está considerado el tratamiento de la mencionada asignatura.

La experiencia de aula consta de tres etapas o momentos: primero se revisan las herramientas y vistas que posee GeoGebra y que están relacionadas con la Estadística. En segundo lugar, se resuelven problemas tipo relacionados con las Distribuciones Probabilísticas Discretas, y finalmente problemas de aplicación de Distribución Normal; en estas dos últimas instancias utilizando GeoGebra.

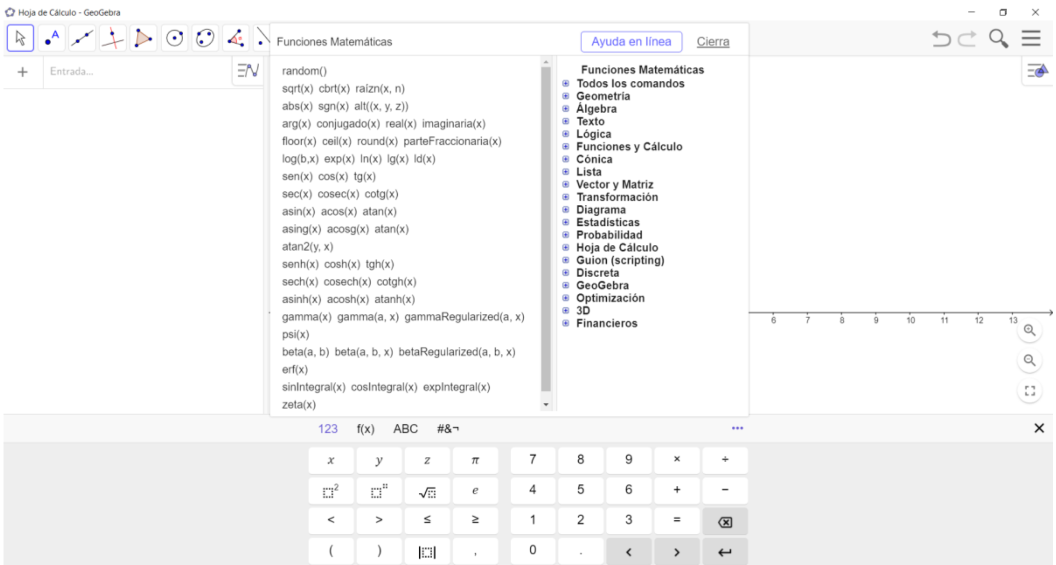
2.1. Herramientas de GeoGebra para enseñar Estadística

En la versión 6.0 de GeoGebra se puede encontrar una amplia gama de herramientas que pueden ser utilizadas en la enseñanza de la Estadística, así tenemos:

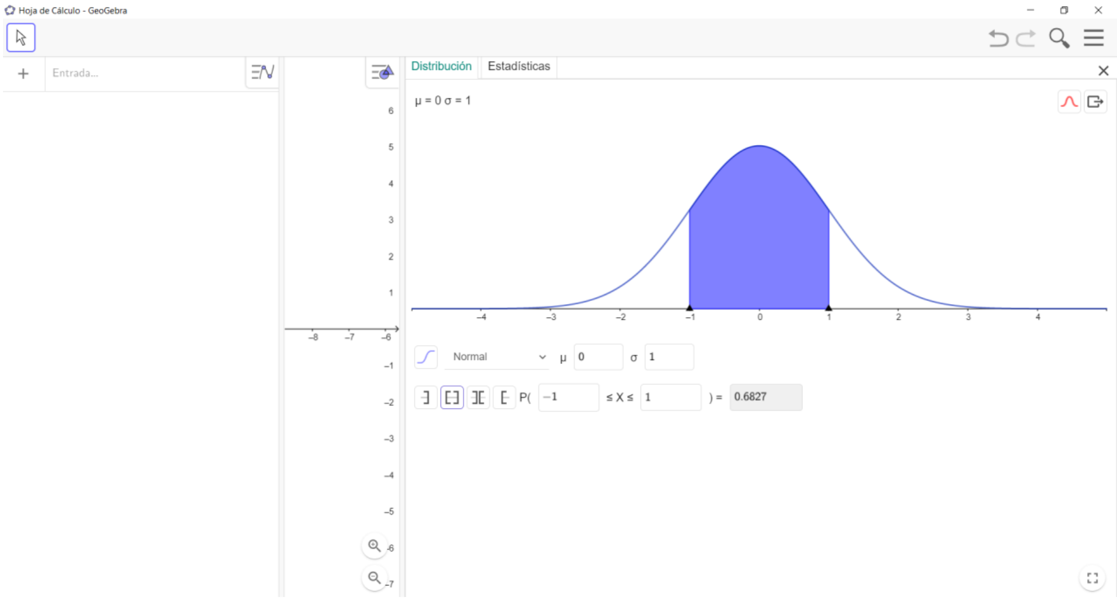
La hoja de cálculo, vista que sirve para ingresar datos numéricos que pueden ser procesados con la ayuda de tres herramientas que se encuentran en el extremo superior izquierdo de la hoja de cálculo.



Lista de comandos, donde se encuentran grupos de funciones matemáticas que facilitan el análisis y procesamiento de datos estadísticos.



Cálculos de probabilidad, interfaz que permite visualizar la gráfica de los diferentes modelos de distribución de probabilidad, así como también realizar test de validación de hipótesis y cálculo de intervalos de confianza.



2.2. Resolución de problemas relacionados con Distribuciones Probabilísticas Discretas utilizando GeoGebra.

En esta etapa de la experiencia se configuró la interfaz de GeoGebra de tal forma que la vista gráfica sirva como pizarra digital donde se presenta el enunciado del problema y se realiza la resolución algorítmica del mismo, y teniendo activa la vista de cálculo de probabilidades se compara y visualiza lo calculado.

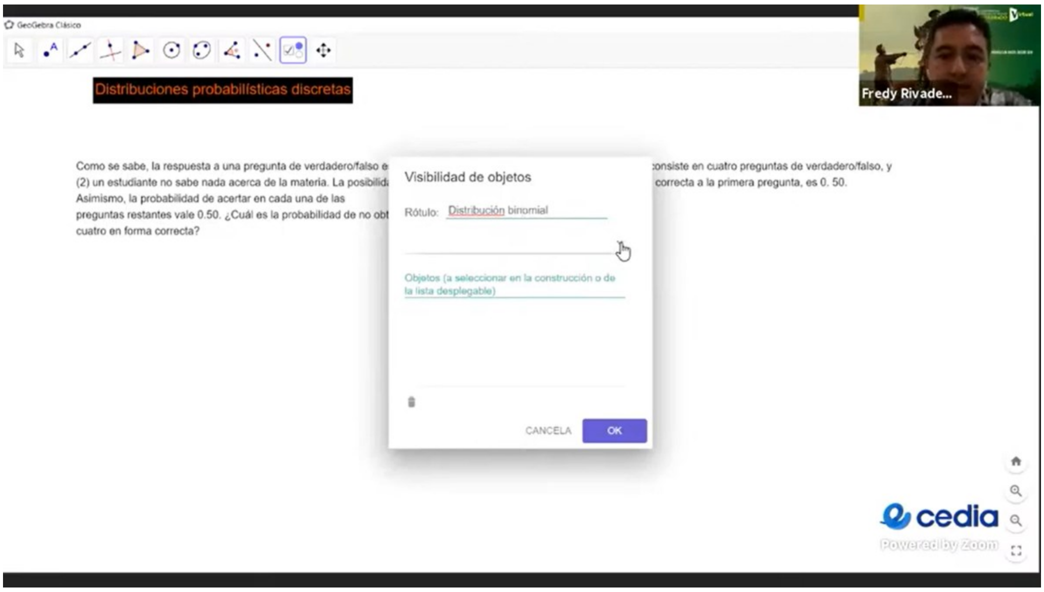
A continuación, se detalla el proceso de resolución de un problema de Distribución Probabilística Binomial poniendo en práctica lo descrito en el párrafo anterior:

2.2.1. Preliminares.

La sesión inicia con un conversatorio en el que los participantes exponen sus fortalezas y debilidades en cuanto al tema de las distribuciones probabilísticas, este es el momento del desequilibrio cognitivo ya que con el aporte del docente se establecen puntos de partida para continuar con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

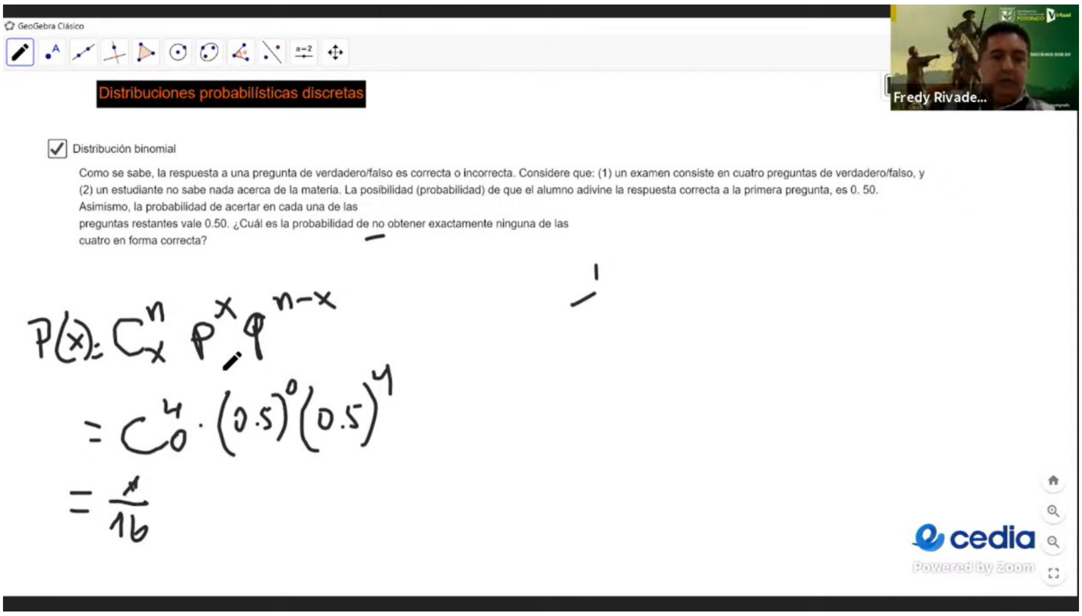
2.2.2. Configuración de la interfaz de GeoGebra como una pizarra.

Una vez abierto GeoGebra, se procede a configurar la vista gráfica a modo de pizarra digital, también se ingresa el texto del problema a resolver y se lo liga con una casilla de control para ocultarlo cuando sea necesario.



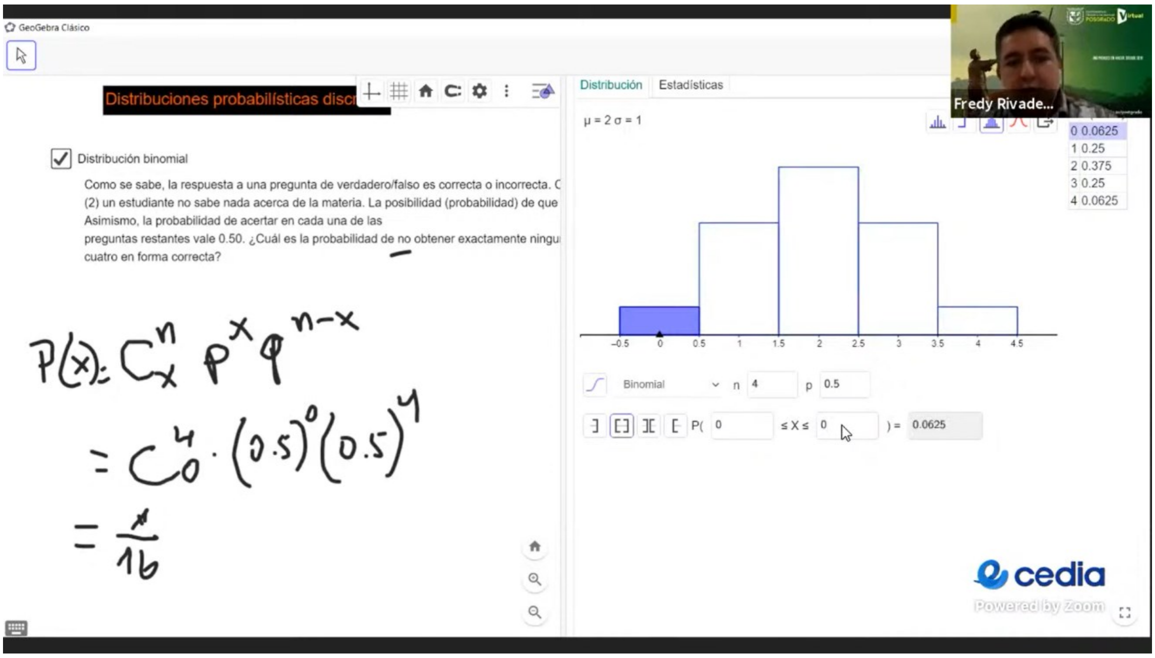
2.2.3. Resolución del problema propuesto aplicando el modelo binomial.

Con la herramienta lápiz se realiza el proceso de resolución del problema planteado, demostrando una de las ventajas que posee GeoGebra.



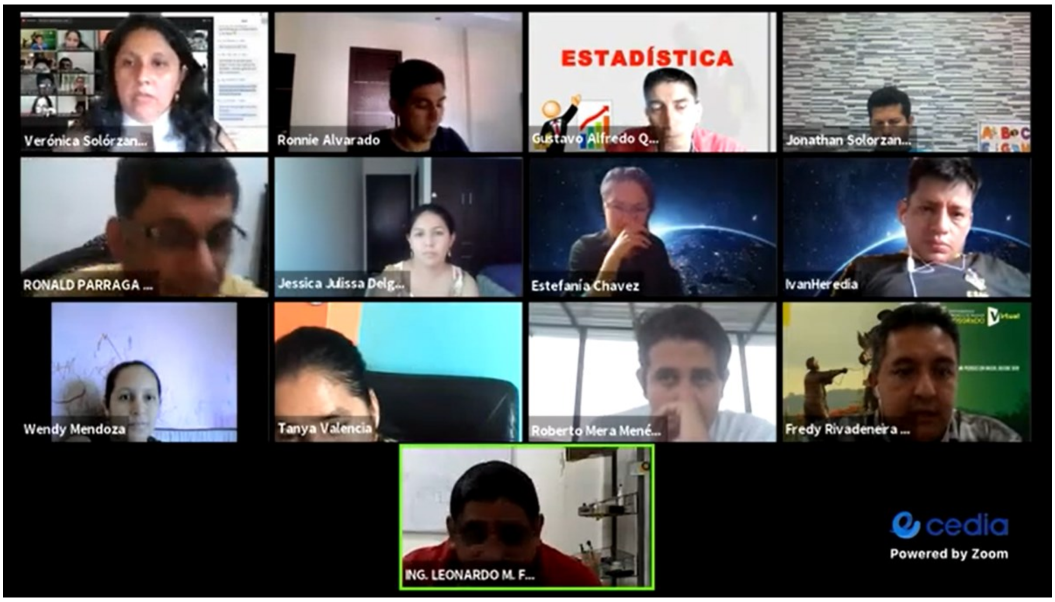
2.2.4. Utilizando la vista cálculos de probabilidad de GeoGebra.

Una vez realizada la resolución del problema, se procede a habilitar la vista de GeoGebra que permite interactuar con los diferentes modelos de distribución probabilística, escogiendo en este caso en Binomial. Se pudo visualizar las diferentes situaciones que se podrían dar y con ello lograr un aprendizaje mucho más consolidado.



2.2.5. Plenaria.

En esta etapa del proceso se vertieron importantes opiniones respecto al nuevo aprendizaje (para unos) y a la actualización del mismo (para otros). También los maestrantes opinaron que, a pesar de que han utilizado GeoGebra, no conocían las herramientas estadísticas y probabilísticas que posee, y a las que se les puede sacar mucho provecho.

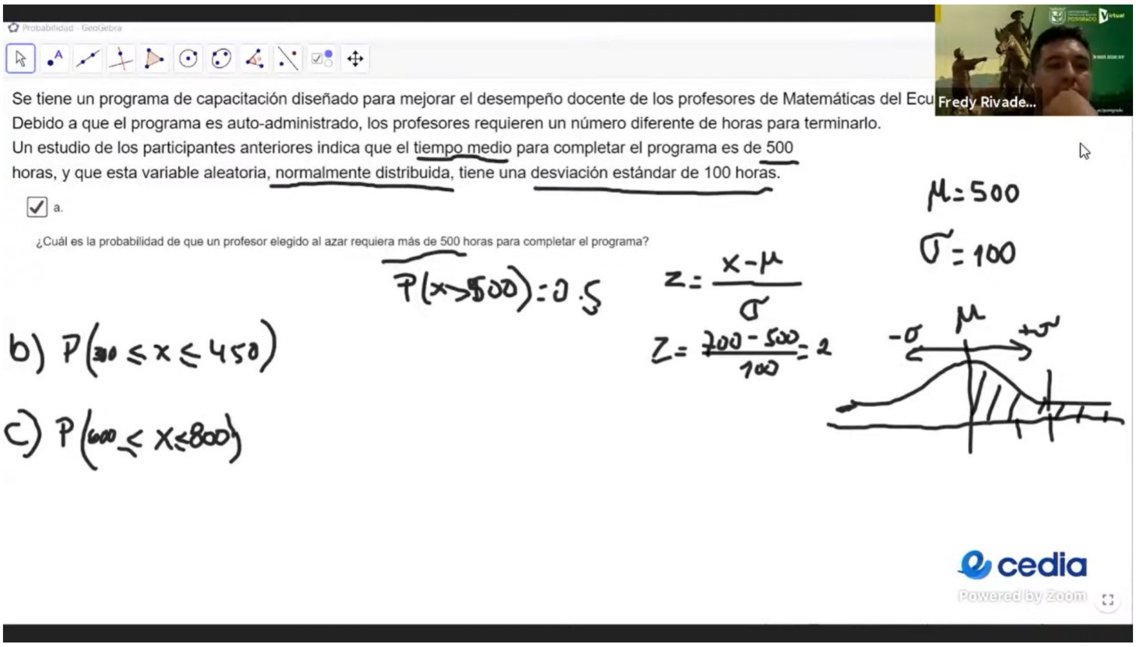


2.3. Resolución de problemas relacionados con Distribución Probabilística Normal utilizando GeoGebra.

Siguiendo el proceso metodológico descrito en 2.2., se procede a efectuar la resolución de un problema de aplicación de Distribución Normal.

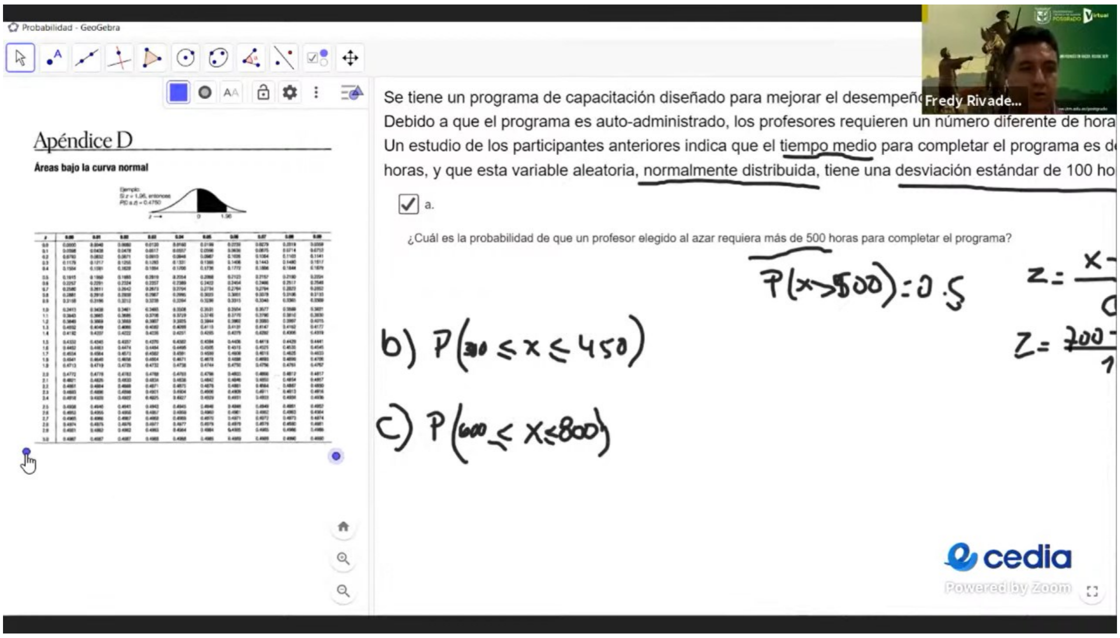
2.3.1. GeoGebra como pizarra digital.

Tal como se describió en 2.2.1., el primer paso es aprovechar la interfaz de GeoGebra como una pizarra digital e incluso como una herramienta para organizar presentaciones, teniendo todo en un mismo lugar, por así decirlo.



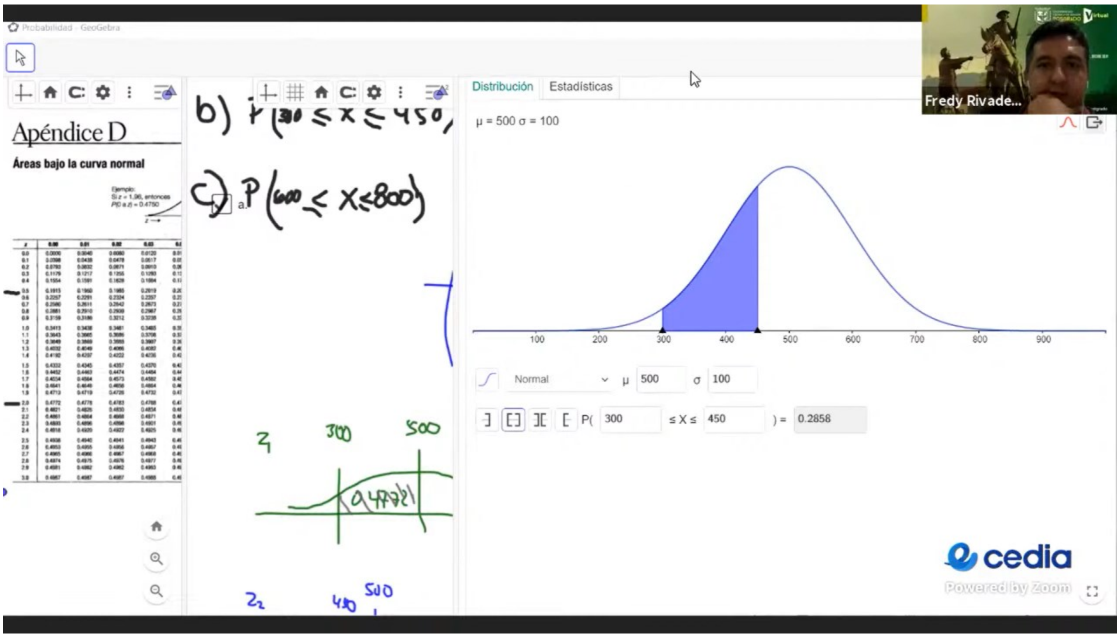
2.3.2. Insertando tabla de áreas bajo la curva normal en formato imagen.

Además de la posibilidad de tener una pizarra digital, GeoGebra permite insertar imágenes, en este caso la tabla de distribución normal y con ello se tiene la posibilidad de visualizar en un mismo sitio los resultados del cálculo del estadístico z y el valor que este representa en la mencionada tabla.



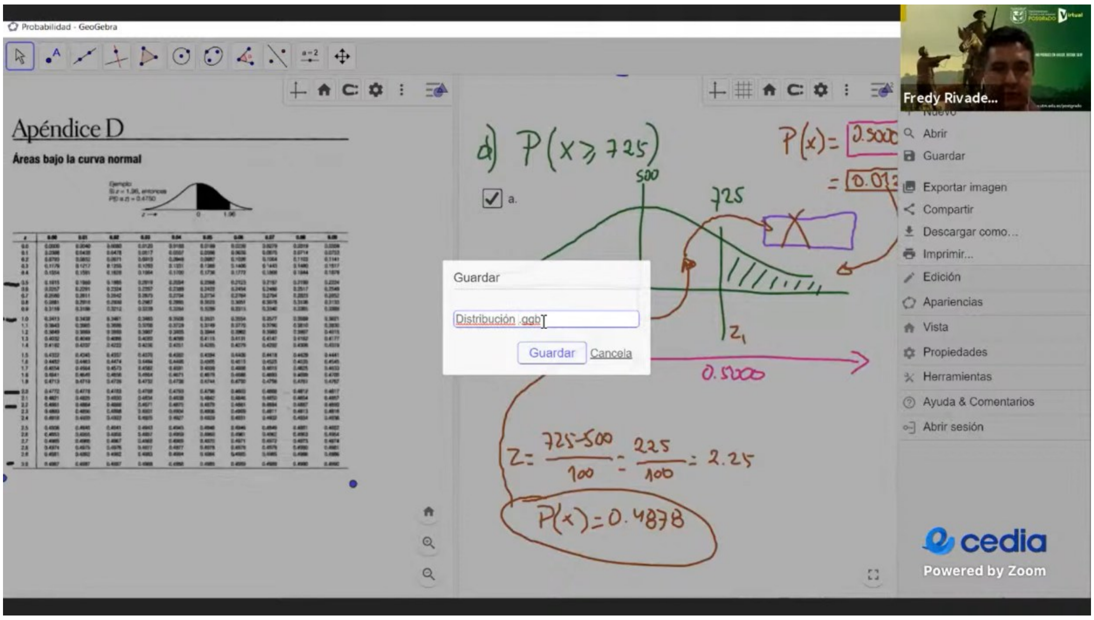
2.3.3. Vista cálculos de probabilidad.

Realizados los cálculos, se procede a habilitar la vista cálculos de probabilidad seleccionando el modelo de distribución normal, consiguiendo así tener más de un registro de representación en la resolución de un problema de aplicación.



2.3.4. Guardando lo realizado.

Como un adicional, se procede a mostrar cómo realizar el guardado del trabajo en las diferentes alternativas que brinda GeoGebra.



2.3.4. Plenaria.

La plenaria estuvo cargada de importantes reflexiones relacionadas con la responsabilidad que se tiene como docente al momento de transmitir conocimientos, ya que al utilizar un adecuado recurso, el aprendizaje será significativo.

3. Consideraciones finales.

La pandemia de la COVID19 nos viene dejando muchos aprendizajes, sobre todo en el contexto educativo, donde se tuvo la necesidad de migrar de un entorno presencial a uno virtual, la experiencia de aula descrita en el presente trabajo se convierte en un aporte en el que se mostró cómo convertir a GeoGebra, no solo en un recurso didáctico, sino en un entorno virtual de aprendizaje aprovechando las herramientas que posee.

En este trabajo se evidenció que entre más registros de representación se puedan utilizar en la enseñanza de la Matemática, en este caso las Distribuciones Probabilísticas, se obtendrán aprendizajes significativos.

Los resultados cualitativos que se obtuvieron de las opiniones, preguntas y sugerencias realizadas en las plenarias dejan notar que incorporar GeoGebra en la enseñanza de las Distribuciones Probabilísticas fue una decisión acertada por cuanto las y los maestrantes quedaron satisfechos y sobre todo motivados para utilizar GeoGebra en su quehacer profesional.

4. Referencias bibliográficas

Carrillo, A. (2010). GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. España: UNIÓN. http://www.cvrecursosdidacticos.com/web/repository/1304332210_GeoGebra_Rev_Union_023_020.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Guachún, F., Rojas, M. & Rojas, I. (2020). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de la Integral definida: Una propuesta didáctica. Ecuador: UNAE. http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/123456789/1882/1/182-192.pdf

Johnson, R. & Kuby, P. (2015). *Estadística Elemental: lo esencial*. México: Cengage Learning Editores

Fredy Rivadeneira Loor
fredy.rivadeneira@utm.edu.ec, fredyrivadeneiraloor@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3106-2170
Ecuador
Instituto GeoGebra de la Universidad Técnica de Manabí

ISSN: 1815-0640

Número 63. Diciembre 2021

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

http://www.fisem.org/www/index.php

https://union.fespm.es/index.php/UNION

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene ahora una periodicidad cuatrimestral, de modo que se publican tres números al año, en los meses de abril, agosto y diciembre. Es recepcionada en ***Mathematics Education Database***, está incluida en el catálogo ***Latindex, CAPES*** y otros.